SISTEM PERSAMAAN LINIER, DETERMINAN, DAN APLIKASINYA

Laporan Tugas Besar 1 IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri

Semester I Tahun 2020/2021

Oleh:

Kelompok 39

Dionisius Darryl Hermansyah	13519058
Rehagana Kevin Christian Sembiring	13519117
Rizky Anggita Syarbaini Siregar	13519132

SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2020

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

1.1. Deskripsi masalah

Pada tugas besar 1 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri ini, akan dibuat sebuah program yang dapat menyelesaikan permasalahan matematik sebagai berikut:

1. Menghitung solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan).
2. Menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier.
3. Menghitung matriks balikan.
4. Menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor).

1.2. Spesifikasi program

Adapun spesifikasi dari program yang akan dibuat adalah sebagai berikut:

1. Program dapat menerima masukan (input) baik dari keyboard maupun membaca masukan dari file text. Untuk SPL, masukan dari keyboard adalah m, n, koefisien aij , dan bi. Masukan dari file berbentuk matriks augmented tanpa tanda kurung, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
3    4.5    2.8    10    12
-3    7    8.3    11    -4
0.5    -10    -9    12    0
```

2. Untuk persoalan menghitung determinan dan matriks balikan, masukan dari keyboard adalah n dan koefisien aij. Masukan dari file berbentuk matriks, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
3    4.5    2.8    10
-3    7    8.3    11
0.5    -10    -9    12
```

3. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari keyboard adalah n, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), dan nilai x yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik

dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Misalnya jika titik-titik datanya adalah (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513), maka di dalam file text ditulis sebagai berikut:

```
8.0   2.0794
9.0   2.1972
9.5   2.2513
```

4. Untuk persoalan regresi, masukannya jika dari keyboard adalah n (jumlah peubah x), semua nilai-nilai x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}, nilai y_i, dan nilai-nilai x_k yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung.

5. Untup persoalan SPL, luaran (output) program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada, jika solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya $x_4 = -2$, $x_3 = 2s – t$, $x_2 = s$, dan $x_1 = t$.)

6. Untuk persoalan determinan dan matriks balikan, maka luarannya sesuai dengan persoalan masing-masing

7. Untuk persoalan polinom interpolasi dan regresi, luarannya adalah persamaan polinom/regresi dan taksiran nilai fungsi pada x yang diberikan.

8. Luaran program harus dapat ditampilkan pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam file

9. Bahasa program yang digunakan adalah Java.

BAB II
TEORI SINGKAT

2.1. Matriks

Matriks merupakan susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan sebagai *entri*. Ordo, merupakan ukuran dari sebuah matriks dengan menyatakan jumlah baris dan kolom. Ada pun beberapa jenis matriks yang umumnya termasuk digunakan dalam perhitungan matematis terutama aljabar linear adalah matriks balikan, kofaktor, dan adjoin (Anton, 2010). Sedangkan, jika dilihat berdasarkan ukuran dan elemennya, terdapat 6 jenis matriks secara umum yaitu:

a. Matriks bujur sangkar (persegi)

   Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom atau matriks berordo n, dimana jumlah kolom sama dengan jumlah baris.

b. Matriks diagonal

   Matriks yang semua elemen di atas atau di bawah diagonalnya bernilai 0.

c. Matriks segitiga

   Matriks dengan semua entri di bawah atau diatas diagonal utama bernilai nol. Ada dua jenis matriks segitiga yaitu segitiga bawah dan segitiga atas.

d. Matriks nol

   Matriks yang semua elemennya bernilai nol.

e. Matriks identitas

   Matriks yang diagonal utamanya diisi oleh bilangan 1 dan dinyatakan dengan I.

f. Matriks simetri

   Matriks simetri merupakan matriks yang setiap elemen selain elemen diagonalnya simteri terhadap diagonal utama.

2.1.1. Matriks balikan

Jika matriks A dan B adalah dua buah matriks bujur sangkar sehingga A B = B A = I, maka matriks B disebut juga sebagai matriks balikan (*inverse*) dari matriks A atau B = A^{-1} demikian juga sebaliknya. Sebuah matriks balikan dapat dicari dengan beberapa metode seperti dengan memanfaatkan operasi baris elementer (OBE) atau ekspansi kofaktor (Anton, 2010). Adapun rumus untuk menghitung inverse matriks menggunakan ekspansi kofaktor, yang memanfaatkan determinan dan matriks adjoin adalah:

$$A^{-1} = 1 / (\det(A)) \,.\, \mathrm{adj}(A)$$

2.1.2. Matriks kofaktor

Sesuai dengan namanya, matriks kofaktor merupakan matriks yang berisi harga dari seluruh kofaktor dalam sebuah matriks (Hari, 2015). Nilai setiap kofaktor didapatkan dengan mengalikan minor dengan pola tanda yang bersesuaian dengan :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Kofaktor dilambangakan dengan Cij, dimana, i menandakan baris pada matriks dan j menanadakan kolom. Misalkan terdapat matriks A, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Berikut merupakan contoh proses perhitungan pada kofaktor di baris 1 kolom 1 dan di baris 1 kolom 2:

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = +(0 - 24) = -24$$

$$C_{12} = + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6$$

Setelah melakukan perhitungan setiap kofaktor, maka dapat dibentuk matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

2.1.3. Matriks adjoin

Matriks adjoin secara sederhana merupakan matriks transpose dari matriks kofaktor. Dengan mengambil contoh pada perhitungan matriks kofaktor pada 2.1.2. dapat diperoleh matriks adjoin sebagai berikut:

$$C^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

2.2. Metode eliminasi Gauss

Eleminasi Gauss merupakan teknik eleminasi pada matriks yang ditemukan oleh Carl Friedrich Gauss. Metode ini dapat dimanfaatkan untuk memecahkan sebuah sistem persamaan linear dengan memanipulasinya dalam bentuk matriks. Matriks tersebut kemudian dikonversi dengan operasi baris elementer (OBE) untuk menjadi sebuah matriks eselon baris. Ciri-ciri uatama dari matriks eselon baris adalah memiliki nol-nol di bawah 1 utama (Rivaldo, 2019).

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris jika memenuhi:

1. Jika sebuah baris tidak terdiri dari selurunya nol, maka bilangan tidak nol pertama di dalam baris tersebut adalah 1 (disebut 1 utama)
2. Jika ada baris yang seluruhnya nol, maka semua baris itu dikumpulkan pada bagian bawah matriks.
3. Di dalam dua baris berturutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan daripada 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

2.3. Metode eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan pengembangan dari metode eliminasi Gauss. Metode ini melakukan perluasan pada matriks sistem persamaan linear terkait dengan mengubahnya bukan hanya sekedar menjadi matriks eselon, namun menjadi matriks eselon baris tereduksi. Matriks eselon baris tereduksi memiliki ciri-ciri utama memiliki nol-nol di bawah dan di atas satu utama (Ernanto, 2019).

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris tereduksi jika memenuhi:

1. Seluruh persyaratan matriks eselon
2. Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol di tempat lain.

2.4. Determinan

Determinan merupakan sebuah komponen dalam matriks yang diartikan sebagai nilai yang dapat dihasilkan melalui operasi-operasi pada sebuah matriks persegi. Determinan dari suatu matriks, misalnya A, dapat ditulis sebagai det(A), det A, atau |A|. Ada 2 metode yang dapat digunakan untuk menghitung determinan matriks n x n (Anton, 2010).

Metode pertama adalah dengan memanfaatkan reduksi baris. Determinan matriks, misalkan matriks A, dapat diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks A sampai diperoleh matriks segitiga (segitiga bawah atau atas). Determinan adalah hasil dari perkalian elemen-elemen pada diagonal matriks.

Metode kedua adalah dengan memanfaatkan ekspansi kofaktor. Dengan menggunakan kofaktor, determinan matriks A misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dapat dihitung secara baris atau kolom dengan persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n} \\ \det(A) &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{2n}C_{2n} \\ &\vdots \\ \det(A) &= a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \dots + a_{nn}C_{nn} \end{aligned}$$

Secara baris

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1} \\ \det(A) &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{n2}C_{n2} \\ &\vdots \\ \det(A) &= a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \dots + a_{nn}C_{nn} \end{aligned}$$

Secara kolom

2.5. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer merupakan sebuah persamaan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sebuah sistem persamaan linear. Metode ini memanfaatkan determinan suatu matriks dengan matriks lain yang diperoleh dengan mensubstitusikan salah satu kolom dengan vektor yang terdiri dari nilai konstanta angka di sebelah kanan persamaannya (Poole, 2010).

Menurut kaidah Cramer, Jika Ax = b adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah sedemikian sehingga det(A) ≠ 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu:

$$X_1 = \det(A_1) / \det(A)$$

$$X_2 = \det(A_2) / \det(A)$$

$$X_3 = \det(A_3) / \det(A)$$

yang dalam hal ini, Aj adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks B yang merupakan matriks konstanta (Anton, 2010).

2.6. Sistem persamaan linear

Sistem persamaan linier (SPL) Ax = b dengan n peubah (variable) dan m persamaan adalah berbentuk

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x2 + ... + a_{1n}\, x_n = b_1$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + ... + a_{2n}\, x_n = b_2$$

$$: \qquad\qquad :$$

$$: \qquad\qquad :$$

$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + ... + a_{mn}\, x_n = b_m$$

yang dalam hal ini x_i adalah peubah, a_{ij} dan b_i adalah koefisien ∈ R. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}\, b$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak, atau hanya satu (unik/tunggal).

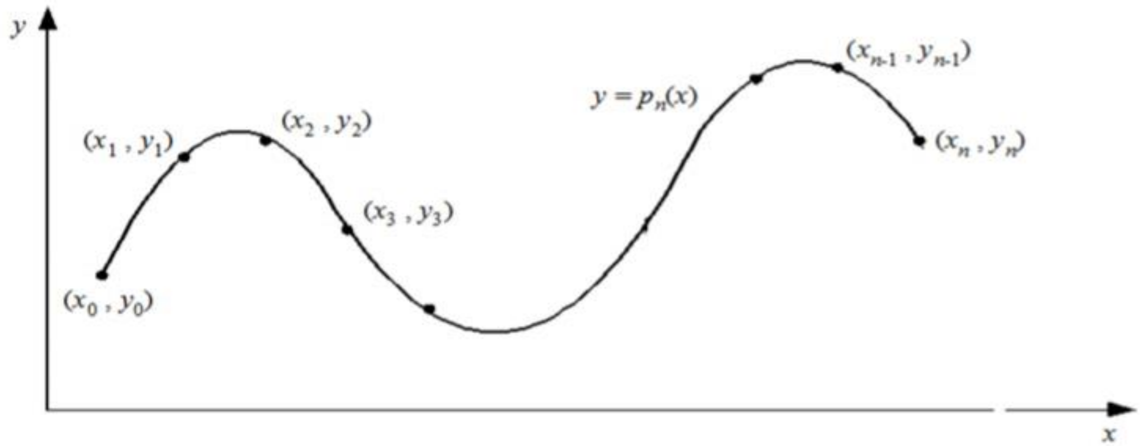
Sebuah matriks M berukuran n × n dan determinannya det(M) adalah

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad \det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinan matriks M berukuran n × n dapat dihitung dengan beberapa cara: reduksi baris dan ekspansi kofaktor. SPL memiliki banyak aplikasi dalam bidang sains dan rekayasa, dua diantaranya diterapkan pada tugas besar ini, yaitu interpolasi polinom dan regresi linier (N.N, 2020.

2.7. Interpolasi polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n seperti pada gambar di bawah.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$. Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik $(x_0, y_0),(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + … + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah sebuah persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + … + a_nx^n$ untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan linier. (N.N, 2020).

2.8. Regresi linier berganda

Regresi linear merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcccccl}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = & \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss (N.N, 2020).

BAB III
IMPLEMENTASI PROGRAM

Tampilan utama program kami ditunjukkan oleh gambar di bawah:

Secara garis besar arsitektur program yang dibuat memanfaatkan 3 kelas (*class*). Adapun class yang didefinisikan tersebut, adalah:

1. Class Matriks (Matriks.java): Struktur data matriks dan metode-metode yang digunakan serta penyelesaian interpolasi polinom dan regresi linear,
2. Class SPL (SPL.java): Penyelesaian sistem persamaan linear dan merupakan ekstensi dari class Matriks.
3. Class Program (Program.java): Program utama dalam tugas besar ini.

Berikut ini adalah penjelasan atribut dan method dari masing-masing class tersebut secara lebih rinci:

1. Class Matriks

Nama Fungsi / Prosedur	Keterangan
Atribut	
IdxBrsMin, IdxBrsMax	Indeks baris minimum dan maksimum matriks
IdxKolMin, IdxKolMax	Indeks kolom minimum dan maksimum matriks
IdxUndef	Indeks tidak terdefinisi (999)

NBrsEff, NKolEff	Jumlah baris dan kolom efektif matriks
M	Isi matriks
Metode	
Konstruktor	
Matriks	Mendefinisikan matriks kosong
Function BuatMatriks	Membuat matriks berukuran NBrsEff dan NKolEff
Prosedur BacaMatriks	Membaca matriks dari input user di keyboard
Prosedur BacaMatriksTxt	Membaca matriks dari input file teks (.txt)
Prosedur TulisMatriks	Menuliskan matriks ke layar
Operasi Matriks	
Function CopyMatriks	Mengcopy matriks M ke matriks MHsl
Function Transpose	Mereturn transpose dari matriks M
Prosedur TransposeMatriks	Melakukan transpose pada matriks M dan men-set NBrsEff dan NKolEff sesuai hasil transpose
Determinan	
Function DeterminanOBE	Mereturn hasil determinan matriks menggunakan metode operasi baris elementer (OBE)
Function DeterminanKofaktor	Mereturn hasil determinan matriks menggunakan metode ekspansi kofaktor
Function MinorEntri	Mereturn sebuah matriks minor enteri saat matriks dipivot pada (x,y)
Matriks Balikan	
Function BuatMatriksIdentitas	Membuat matriks identitas dari matriks M seukuran NBrsEff x NKolEff M
Function BuatMatriksAugmented	Membuat matriks augmented (konkatenasi sebuah matriks M1 dan matriks lainnya M2)
Function BuatMatriksBalikan	Membuat matriks balikan dari matriks M
Metode Eliminasi	

Prosedur EliminasiGauss	Melakukan eliminasi Gauss pada matriks M untuk menghasilkan matriks echelon
Prosedur EliminasiGaussJordan	Melakukan eliminasi Gauss Jordan pada matriks M untuk menghasilkan matriks echelon tereduksi
Fungsi-fungsi Pembantu	
Function IsBrsPivot	Mereturn apakah sebuah baris merupakan pivot
Function CariIdxKolPivot	Mereturn indeks kolom dari pivot
Function PivotPembagi	Mereturn nilai pembagi dari sebuah pivot
Prosedur swapBaris	Menukar dua baris (baris1 dan baris2)
Prosedur scaleBaris	Mengubah elemen barisX, bisa dibagi atau dikali (diatur di parameter scaler)
Prosedur isAllZeroBrs	Mengecek apakah elemen pada barisX semuanya 0
Prosedur isAllZeroKol	Mengecek apakah elemen pada kolomX semuanya 0
Function PerbaikiNol	Memperbaiki output program -0.0 agar menjadi 0.0
Prosedur susunMatriks	Menyusun matriks dalam metode eliminasi Gauss
Interpolasi	
Prosedur Interpolasi	Menyelesaikan persoalan interpolasi polinom
Regresi Linear Berganda	
Prosedur regresi	Menyelesaikan persoalan regresi linear berganda
Save File	
Prosedur save	Menyimpan hasil perhitungan (matriks) dalam sebuah output file (.txt)

2. **Class SPL (ekstensi dari class Matriks)**

Nama Fungsi/Prosedur	Keterangan
Atribut	
Solusi	Solusi dari SPL dalam bentuk string
Metode	

Prosedur menuSPL	Menampilkan menu utama penyelesaian SPL dengan 4 metode
Prosedur save_solusi	Menyimpan solusi dari SPL
Prosedur splGauss	Mencari solusi SPL menggunakan metode eliminasi Gauss
Prosedur splGaussJordan	Mencari solusi SPL menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan
Prosedur splMatriksBalikan	Mencari solusi SPL menggunakan metode matriks balikan
Prosedur splCramer	Mencari solusi SPL menggunakan metode kaidah Cramer
Prosedur solveSingleSolution	Menyelesaikan dan mengoutput SPL dengan solusi tunggal
Prosedur solveManySolution	Menyelesaikan dan mengoutput SPL dengan solusi banyak
Function isSolutionExist	Mengecek apakah SPL memiliki solusi
Function isManySolution	Mengecek apakah SPL memiliki banyak solusi (tak hingga)
Function isSingleSolution	Mengecek apakah SPL memiliki solusi tunggal
Function BackSubstitution	Melakukan back substitution pada penyelesaian SPL
Prosedur copySPLMatriks	Mengcopy SPL a ke Matriks B

3. Class Program

Nama Fungsi/Prosedur	**Keterangan**
Main	
Prosedur MenuUtama	Menampilkan menu utama
Prosedur MenuSPL	Menampilkan menu penyelesaian SPL
Prosedur MenuDeterminan	Menampilkan menu penyelesaian determinan
Prosedur MenuInverse	Menampilkan menu penyelesaian inverse matriks
Prosedur MenuInterpolasi	Menampilkan menu penyelesaian interpolasi polinom
Prosedur MenuInputMatriks	Menampilkan menu input matriks
Prosedur loadingSleep	Memberikan efek loading menu

BAB IV

EKSPERIMEN

Berikut merupakan hasil eksekusi program dan analisis terhadap contoh-contoh kasus yang diberikan:

<table>
<tr><th>Kasus</th><th>Output program dan analisis</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>

```
Matriks yang anda masukkan:
1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0
2.0 5.0 -7.0 -5.0 -2.0
2.0 -1.0 1.0 3.0 4.0
5.0 2.0 -4.0 2.0 6.0

Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan:
1.0 0.0 0.0 0.6666665 0.0
0.0 1.0 0.0 -2.6666665 0.0
0.0 0.0 1.0 -1.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0

SPL tidak memiliki solusi.
```

Didapatkan bahwa SPL tidak memiliki solusi, hal ini diakibatkan adanya kolom yang bernilai 0 seluruhnya pada matriks koefisien, namun tidak bernilai nol pada matriks konstanta yang sebaris setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>

```
Matriks yang anda masukkan:
1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0
1.0 1.0 0.0 -3.0 0.0 6.0
2.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0 5.0
-1.0 2.0 0.0 -2.0 -1.0 -1.0

Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan:
1.0 0.0 0.0 0.0 -1.0 3.0
0.0 1.0 0.0 0.0 -2.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 -1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

SPL memiliki solusi banyak.

x1 = 3.0  + x4
x2 =
x3 = -1.0  + x4
x4 = t, untuk t ∈ R
```

</td></tr>
</table>

	Dari hasil program, didapatkan bahwa SPL memiliki banyak solusi (tak hingga). Solusi ditampilkan dalam bentuk parametrik pada output program dimana: x1 = 3.0 + x4 x2 = x3 = -1.0 + x4 x4 = t, untuk t ∈ R Dapat dilihat bahwa terjadi bug pada program sehingga tidak mengeluarkan output pada x2, namun output matriks eselon baris tereduksi dan hasil x yang lain sudah tepat. Berdasarkan matriks eselon baris tereduksi, nilai: x2 = 2 x4.
1c	Matriks yang anda masukkan: 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan: 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 SPL memiliki solusi tunggal. x1 = 1.0 x2 = -2.0 x3 = 1.0 Dari hasil program, didapatkan bahwa SPL memiliki solusi tunggal dengan: x1 = 1.0 x2 = -2.0 x3 = 1.0 Namun, jika dilihat secara manual melalui hasil matriks eselon baris tereduksi yang dioutput oleh program setelah melakukan eliminasi Gauss-Jordan, dapat dilihat bahwa terdapat 6 nilai x dengan solusi banyak yaitu: X1 = s, untuk s ∈ R X2 = 1 - u X3 = t, untuk t ∈ R X4 = -2 - u X5 = 1 + u X6 = u, untuk u ∈ R

<table>
<tr>
<td>1d</td>
<td>

```
Matriks yang anda masukkan:
1.0 0.5 0.33 0.25 0.2 0.16 1.0
0.5 0.33 0.25 0.2 0.16 0.14 0.0
0.33 0.25 0.2 0.16 0.14 0.125 0.0
0.25 0.2 0.16 0.14 0.125 0.11 0.0
0.2 0.16 0.14 0.125 0.11 0.1 0.0
0.16 0.14 0.125 0.11 0.1 0.09 0.0

x1 = 4.194664
x2 = -7.938921
x3 = 2.3647573
x4 = -13.400475
x5 = 21.002544
x6 = -5.3481755
```

Untuk matriks Hilbert dengan n=6, penyelesaian SPL menggunakan kaidah Cramer menghasilkan
x1 = 4.194664
x2 = -7.938921
x3 = 2.3647573
x4 = -13.400475
x5 = 21.002544
x6 = -5.3481755
</td>
</tr>
</table>

```
Matriks yang anda masukkan:
1.0 0.5 0.33 0.25 0.2 0.16 0.14 0.125 0.11 0.1 1.0
0.5 0.33 0.25 0.2 0.16 0.14 0.125 0.11 0.1 0.09 0.0
0.33 0.25 0.2 0.16 0.14 0.125 0.11 0.1 0.09 0.08 0.0
0.25 0.2 0.16 0.14 0.125 0.11 0.1 0.09 0.08 0.076 0.0
0.2 0.16 0.14 0.125 0.11 0.1 0.09 0.08 0.076 0.071 0.0
0.16 0.14 0.125 0.11 0.1 0.09 0.08 0.076 0.071 0.066 0.0
0.14 0.125 0.11 0.1 0.09 0.08 0.076 0.071 0.066 0.062 0.0
0.125 0.11 0.1 0.09 0.08 0.076 0.071 0.066 0.062 0.058 0.0
0.11 0.1 0.09 0.08 0.076 0.071 0.066 0.062 0.058 0.055 0.0
0.1 0.09 0.08 0.076 0.071 0.066 0.062 0.058 0.055 0.052 0.0

x1 = 6.7198386
x2 = -20.184921
x3 = 6.5676107
x4 = -1.1069639
x5 = 13.335037
x6 = -7.081412
x7 = 5.1626863
x8 = 36.36641
x9 = -18.78425
x10 = -22.544596
```

Untuk matriks Hilbert dengan n=10, penyelesaian SPL menggunakan kaidah Cramer menghasilkan
x1 = 6.7198386
x2 = -20.184921
x3 = 6.5676107
x4 = -1.1069639
x5 = 13.335037
x6 = -7.081412
x7 = 5.1626863
x8 = 36.36641
x9 = -18.78425
x10 = -22.544596

<table>
<tr>
<td>2a</td>
<td>
<pre>
Matriks yang anda masukkan:
1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
2.0 1.0 -2.0 -2.0 -2.0
-1.0 2.0 -4.0 1.0 1.0
3.0 0.0 0.0 -3.0 -3.0

Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan:
1.0 0.0 0.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

SPL memiliki solusi banyak.

x1 = -1.0 + x3
x2 = (2.0)x3
x3 =
x4 = t, untuk t ∈ R
</pre>
Dari hasil program, didapatkan bahwa SPL memiliki banyak solusi (tak hingga). Solusi ditampilkan dalam bentuk parametrik pada output program dimana:
x1 = -1.0 + x3
x2 = (2.0)x3
x3 =
x4 = t, untuk t ∈ R
Dapat dilihat bahwa terjadi bug pada program sehingga tidak mengeluarkan output pada x3, namun output matriks eselon baris tereduksi dan hasil x yang lain sudah tepat. Berdasarkan matriks eselon baris tereduksi, nillai:
x3 = s, untuk s ∈ R.
</td>
</tr>
</table>

2b

```
Matriks yang anda masukkan:
2.0 0.0 8.0 0.0 8.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
-4.0 0.0 6.0 0.0 6.0
0.0 -2.0 0.0 3.0 -1.0
2.0 0.0 -4.0 0.0 -4.0
0.0 1.0 0.0 -2.0 0.0

Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan:
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 1.0 0.0 0.0 2.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

SPL memiliki solusi banyak.

x1 =
x2 = 2.0
x3 = 1.0
x4 = 1.0
x5 =
x6 = t, untuk t ∈ R
```

Dari hasil program, didapatkan bahwa SPL memiliki banyak solusi (tak hingga). Solusi ditampilkan dalam bentuk parametrik pada output program dimana:
x1 =
x2 = 2.0
x3 = 1.0
x4 = 1.0
x5 =
x6 = t, untuk t ∈ R

Dapat dilihat bahwa terjadi bug pada program sehingga tidak mengeluarkan output pada x1 dan x5, namun output matriks eselon baris tereduksi dan hasil x yang lain sudah tepat. Berdasarkan matriks eselon baris tereduksi nilai:
x1 = 0
x5 = s, untuk s ∈ R.

3a	Matriks yang anda masukkan: 8.0 1.0 3.0 2.0 0.0 2.0 9.0 -1.0 2.0 1.0 1.0 3.0 2.0 -1.0 2.0 1.0 0.0 6.0 4.0 3.0 Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan: 1.0 0.0 0.0 0.0 -0.23575951 0.0 1.0 0.0 0.0 0.2681962 0.0 0.0 1.0 0.0 0.64003164 0.0 0.0 0.0 1.0 -0.15110755 x1 = -0.23575951 x2 = 0.2681962 x3 = 0.64003164 x4 = -0.15110755 Didapatkan bahwa SPL memiliki solusi tunggal dengan nilai: x1 = -0.23575951 x2 = 0.2681962 x3 = 0.64003164 x4 = -0.15110755

3b

```
Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan:
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 1.0 2.118437E7 1154567.8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.58868685E9
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -1.58868685E9
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 -8.315768
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 14.40461

SPL memiliki solusi banyak.

x1 =
x2 =
x3 =
x4 =
x5 =
x6 =
x7 =
x8 =
x9 =
x10 = 1.0
x11 =
x12 = t, untuk t ∈ R
```

Dari hasil program, didapatkan bahwa SPL memiliki banyak solusi (tak hingga). Solusi ditampilkan dalam bentuk parametrik pada output program dimana:
x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x11 belum dapat dioutput dengan baik
x10 = 1.0
x11 =
x12 = t, untuk t ∈ R

Dapat dilihat bahwa terjadi bug pada program sehingga tidak mengeluarkan output pada nilai sebagian besar, namun output matriks eselon baris tereduksi sudah tepat. Selain itu, terdapat pula bug yang menyebabkan variabel x yang dioutput lebih banyak dibandingkan dari yang seharusnya. Permasalahan ini dapat berakar pada loop yang digunakan pada saat mengoutput solusi, Berdasarkan matriks eselon baris tereduksi nilai:
x1 = 0
x2 = 0
x3 = 0
x4 = 0
x5 = 0

<table>
<tr><td></td><td>x6 = 0
x7= -1.58868685E9
x8 = -8.315768
x9 = 14.40461</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Matriks yang anda masukkan:
1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 10.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 5.0 0.0 1.0 -1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 20.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0
5.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 200.0
0.0 0.0 0.0 0.0 15.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 0.0
0.0 10.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -1.0 0.0

Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan:
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 6.153845
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 3.7252903E-9 -4.615389
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -3.7252903E-9 -1.538456
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -6.1538453
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.18571433 -22.857143
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.082142845 8.571429
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.082142845 8.571429
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -0.6785716 85.71429
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 -1.7142854 -57.142853
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -2.2321427 -128.57143

SPL memiliki solusi tunggal.

x1 = 6.153845
x2 = -4.6153893
x3 = -1.5384555
x4 = -6.1538453
x5 = -1.5384569
x6 = -1.5384569
x7 = 169.23077
x8 = 153.84607
x9 = 146.15376
x10 = 123.0769

Dari hasil program, didapatkan bahwa SPL memiliki solusi tunggal yaitu:
x1 = 6.153845 = i_{12}
x2 = -4.6153893 = i_{52}
x3 = -1.5384555 = i_{32}</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>x4 = -6.1538453 = i_{65}
x5 = -1.5384569 = i_{54}
x6 = -1.5384569 = i_{43}
x7 = 169.23077 = V_2
x8 = 153.84607 = V_3
x9 = 146.15376 = V_4
x10 = 123.0769 = V_5</td></tr>
<tr><td>5</td><td><pre>Hasil persamaan interpolasi polinom:
f(x,y) = -0.022976447 + 0.23999786x + 0.19740878x^2 + -3.5732985E-5x^3 + 0.026091348x^4 + -3.3
580964E-5x^5 + 8.731824E-6x^6
Masukkan titik yang akan ditaksir: 0.2
Hasil taksiran:
P6(0.2) = 0.03296092718179816
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N Y
Masukkan titik yang akan ditaksir: 0.55
Hasil taksiran:
P6(0.55) = 0.17111866226169853
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N Y
Masukkan titik yang akan ditaksir: 0.85
Hasil taksiran:
P6(0.85) = 0.3372358767437673
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N Y
Masukkan titik yang akan ditaksir: 1.28
Hasil taksiran:
P6(1.28) = 0.677541876782146
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N N
Apakah Anda ingin menyimpan solusi SPL? Y/N: N</pre>
Didapatkan bahwa:
Hasil persamaan interpolasi polinom:
f(x,y) = -0.022976447 + 0.23999786x + 0.19740878x^2 + -3.5732985E-5x^3 + 0.026091348x^4 + -3.3580964E-5x^5 + 8.731824E-6x^6580964E-5x^5 + 8.731824E-6x^6

Untuk nilai x = 0.2, Nilai taksiran y = 0.03296092718179816
Untuk nilai x = 0.55, Nilai taksiran y = 0.17111866226169853
Untuk nilai x = 0.85, Nilai taksiran y = 0.3372358767437673
Untuk nilai x = 1.28, Nilai taksiran y = 0.677541876782146</td></tr>
<tr><td>6</td><td><pre>f(x,y) = -1.45983872E8 + 1.6244288E8x + -7.2633248E7x^2 + 1.5405778E7x^3 + -947937.5x^4 + -268594.0x^5 + 70426.484x^
6 + -7428.382x^7 + 388.701x^8 + -8.295457x^9
Masukkan titik yang akan ditaksir: 5.806
Hasil taksiran:
P9(5.806) = 22525.667538918555
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N: Y
Masukkan titik yang akan ditaksir: 8.967
Hasil taksiran:
P9(8.967) = 169565.30127620697
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N: Y
Masukkan titik yang akan ditaksir: 9.5
Hasil taksiran:
P9(9.5) = 87520.36989974976
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N: Y
Masukkan titik yang akan ditaksir: 9.635
Hasil taksiran:
P9(9.635) = 804.5899438858032
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N: Y
Masukkan titik yang akan ditaksir: 9.635981
Hasil taksiran:
P9(9.635981) = 0.6510114669799805
Apakah anda ingin menaksir titik lain? Y/N:</pre>
Didapatkan bahwa:
Hasil persamaan interpolasi polinom:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>f(x,y) = -1.45983872E8 + 1.6244288E8x + -7.2633248E7x^2 + 1.5405778E7x^3 + -947937.5x^4 + -268594.0x^5 + 70426.484x^6 + -7428.382x^7 + 388.701x^8 + -8.295457x^9

Untuk nilai x=5.806 (25/05/20), Nilai taksiran y = 22525.667538918555
Untuk nilai x = 8.968 (30/08/20), Nilai taksiran y = 169565.30127620697
Untuk nilai x = 9.500 (15/09/20), Nilai taksiran y = 87520.36989974976
Untuk nilai x = 9.635 (19/09/20), Nilai taksiran y = 804.5899438858032

Ketika dianalisis, didapat bahwa puncak Covid 19 terjadi pada rentang tanggal 8.968 dan 9.1, yaitu tanggal 30/08/2020 dan 03/09/2020. Dan kasus Covid-19 mulai mereda dan mendekati 0 sejak rentang tanggal 9.635 dan 9.635981 yaitu pada 19/09/2020.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Dengan mengambil n=5 dan metode interpolasi polinom, fungsi
$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$
di selang [0,2] dapat disederhanakan menjadi:
Hasil persamaan interpolasi polinom:
f(x,y) = 0.29031122 + 0.3780651x + -0.15059769x^2 + 0.024032008x^3 + -0.003728453x^4
f(x,y) = 0.29031122 + 0.3780651x + -0.15059769x^2 + 0.024032008x^3 + -0.003728453x^4

yang merupakan polinom berderajat 4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Masukkan nilai x yang ingin ditaksir (X1) : 50
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir (X2) : 76
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir (X3) : 29.3
Hasil taksiran : 0.938426

Berdasarkan hasil regresi linear berganda tersebut, didapatkan bahwa estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30 adalah sebesar 0.938426.</td></tr>
</table>

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat ditarik dari tugas besar ini sebagai berikut:

1. Solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer dapat diimplementasikan dan diselesaikan dengan program Java.
2. Persoalan interpolasi dan regresi linier dapat diimplementasikan dan diselesaikan dengan program Java.
3. Perhitungan matriks balikan dapat diimplementasikan dan diselesaikan dengan program Java.
4. Perhitungan determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor) dapat diimplementasikan dan diselesaikan dengan program Java.

5.2. Saran

Untuk pengembangan lagi kedepannya, penulis memberikan saran sebagai berikut:

1. Meningkatkan tampilan program menggunakan GUI yang lebih baik.
2. Mengimplementasikan program pada platform seperti mobile atau sebuah website agar dapat dimanfaatkan secara nyata oleh khalayak umum.

5.3. Refleksi

Melalui pengerjaan tugas besar 1 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri ini, penulis memperoleh banyak hal baik dari segi akademik maupun non-akademik. Penulis dapat memahami materi tentang sistem persamaan linier, determinan, dan aplikasinya secara lebih mendalam dan jelas. Melalui implementasi algoritma-algoritma secara nyata dalam program, hal ini membantu penulis dalam memahami materi yang ada. Selain itu, penulis juga belajar untuk bekerja sama dalam tim terutama dalam mengerjakan sebuah proyek serta dapat melatih skill manajemen waktu. Seluruh hasil yang telah direfleksikan ini, diharapkan dapat membantu penulis untuk berkembang ke arah yang lebih baik lagi.

DAFTAR REFERENSI

Anton, H. 2010. *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*. New Jersey: John Wiley and Sons.

Ernanto, I. 2019. *Mencari Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Metode Eliminasi Gauss-Jordan.* Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Hari. 2015. *Minor, Kofaktor, Matriks Kofaktor, dan Adjoin Matriks.* Dilansir dari www.uniksharianja.com pada 29 September 2020.

Jordan, C. 2016. *Row Echelon Form and Reduced Row Echelon Form.* Dilansir dari www. silo.tips/download/row-echelon-form-and-reduced-row-echelon-form pada 25 September 2020.

Lambers, J. 2010. *Gaussian Elimination and Backward Substitution.* The University of Southern Mississippi. Dilansir dari www.math.usm.edu/lambers/mat610/sum10/ lecture4.pdf pada 26 September 2020.

Margalit, D., & Rabinoff, J. 2017. *Interactive Linear Algebra*. Georgia Institute of Technology. Dilansir dari www.textbooks.math.gatech.edu/ila/ila.pdf pada 25 September 2020.

N.N. 2020. *Tugas Besar 1 IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya Semester I Tahun 2020/2021*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Poole, D. 2014. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. Boston: Cengage Learning.

Rivaldo, M. G. 2019. *Eliminasi Gauss dan Contoh Penerapannya.* Dilansir dari www.profematika.com pada 29 September 2020.