Задача 1. Формирование сигнального созвездия

Имя входного файла: *standard input*
Имя выходного файла: *standard output*
Ограничение по времени: 2 seconds
Ограничение по памяти: 512 mebibytes
Количество попыток: 20

Теорема о пропускной способности канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ), доказанная Клодом Шенноном (Claude Shannon, 1948), утверждает, что существует максимальная скорость передачи информации (бит/символ), при которой возможна передача дискретных сообщений (цифровой информации) со сколь угодно низкой вероятностью ошибки на бит. Эта скорость называется пропускной способностью канала (см. Рис. 1, красная линия).

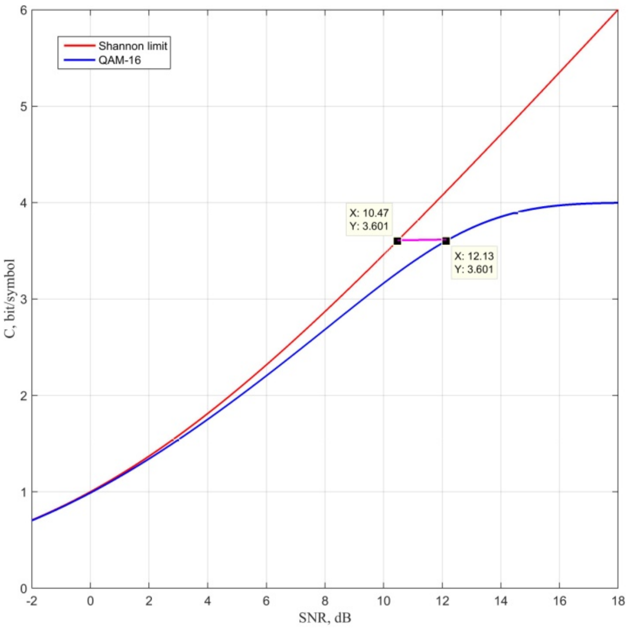


Рис. 1

Одним из способов повышения пропускной способности канала являются многоуровневые сигналы, которые передают сразу несколько бит информации. На рисунке приведён пример такого сигнала.

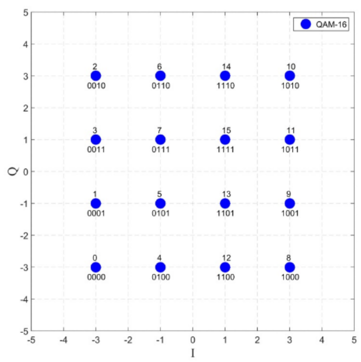


Рис. 2

Прямоугольная схема расположения сигнальных точек используется в квадратурно-амплитудной модуляции (КАМ-16) для быстрой и достаточно простой схемы демодуляции, но в этом случае пропускная способность канала ограничена синей линией (рис. 1). Таким образом, система передачи “потеряла” 1.66 дБ для уровня 3.6 бит/символ еще до начала этапа проектирования.

Определения:

Пусть в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ задан набор чисел $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — произвольное конечное множество чисел мощности $N = 2^m$, $m \geqslant 1$. Пусть также задано число $E \in \mathbb{R}^+$ и функция $P : X \to [0, 1]$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} P(x_i) \cdot |x_i|^2 = E. \tag{2}$$

Совокупность $(\mathbf{X}, E, P)$ будем называть *сигнальным созвездием* (или просто созвездием), набор $\mathbf{X}$ — *сигнальной совокупностью*, элементы $\mathbf{X}$ — точками сигнального созвездия, число E — средней энергией созвездия. Функция P определяет вероятность появления точек сигнального созвездия. Созвездие $(\mathbf{X}, E, P)$ будем называть *несингулярным* (невырожденным), если $P(x_i) > 0$ для всех точек $x_i \in X$.

Теперь определим последовательность $h = [h_1, h_2, \ldots, h_M]$m где h_1, h_2, $\ldots$, h_M — независимые равновероятные случайные величины с заданным распределением $\{\mathbf{P}(h_j = x_i) = P(x_i),\ j \in [1, M]\}$.

Отношение сигнал/шум (ОСШ или SNR), которое обычно выражается в децибельной шкале, по определению будем считать равным

$$SNR = \frac{E}{2\sigma^2}$$

На рисунке ниже показан канал с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ).

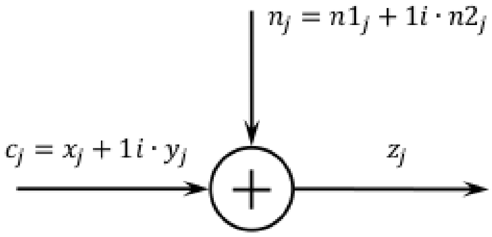


Рис. 3

Здесь x_j и y_j — это реальная и мнимая части h_j, $n1$ — случайная величина, имеющая гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2, т. е. $n1 \sim N(0, \sigma^2)$ и $n2 \sim N(0, \sigma^2)$, а $1i \equiv \sqrt{-1}$.

Пропускная способность канала с АБГШ — это максимум взаимной информации

$$C(SNR) = \max_{\{X,P\}} (I(c; z)|_{SNR}).$$

Детали вычисления пропускной способности хорошо описаны в книге Прокиса «Цифровая связь» (соответствующая глава в HTML — `http://sernam.ru/book_p_net.php?id=115`, вся книга в формате pdf — `http://www.rphf.spbstu.ru/dsp/lib/Prokis_2000.pdf`.

Задание

Изменить сигнальную совокупность (позиции точек сигнального созвездия) для КАМ-16 так, чтобы понизить требуемое для достижения пропускной способности канала в 3.6 бит/символ отношение сигнал/шум для идеализированной системы передачи.

Параметры системы:

1. $E = 1$;
2. $P(x_i) = 1/16$, $i = 1, 2, \ldots, 16$;
3. $\forall j\ |h_j| > 0.1$ (технически обусловленное требование)

Формат входных данных

Программе участника входных данных не подаётся.

Формат выходных данных

Программа участника должна посылать в стандартный поток ввода-вывода (выводить на экран) 16 комплексных чисел полученной сигнальной совокупности в формате (Re_1, Im_1, Re_2, Im_2, $\ldots$, Re_{16}, Im_{16}), где Re_i — вещественная часть числа, Im_i — мнимая часть числа. Точки сигнальной совокупности можно выводить в произвольном порядке. В примере к задаче указано расположение сигнальных точек, соответствующее начальному распределению. Так как это расположение не соответствует требуемым параметрам системы, то соответствующее решение получит 0 баллов.

Пример

standard input	standard output
	-3 -3 -3 1 -3 1 -3 3 -1 -3 -1 -1 -1 1 -1 3 1 -3 1 -1 1 1 1 3 3 -3 3 -1 3 1 3 3

Система оценки

Каждый участник может отправить решение по данной задаче **не более 20 раз**. Из всех сделанных попыток оценивается наилучшая. Предварительный результат, доступный участникам в течение отборочного этапа и обновляемый онлайн, вычисляется по 1000-балльной шкале (0 — наихудший результат, 1000 — наилучший).

Окончательный результат отборочного этапа по данной задаче будет пересчитан по 10000-балльной шкале.

Задача 2. Обеспечение стабильности цифрового рекурсивного фильтра

Имя входного файла:	*standard input*
Имя выходного файла:	*standard output*
Ограничение по времени:	120 seconds
Ограничение по памяти:	512 mebibytes

Введение:

Разностное уравнение цифрового рекурсивного фильтра имеет вид:

$$y(k) = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot x(k-m) - \sum_{n=1}^{M} a_n \cdot y(k-n)\right), \tag{1}$$

где $x(k)$ и $y(k)$ - отсчёты входного и выходного сигналов соответственно, $k = 0, 1, 2 \ldots N-1$; b_m и a_n - коэффициенты фильтра, M - порядок фильтра.

Рекурсивный фильтр может быть представлен своей передаточной характеристикой $H(z)$:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^{M} a_n \cdot z^{-n}}, \tag{2}$$

где $z = e^{j \cdot w}$ - комплексная переменная, которая зависит от частоты w.

Подставив $z = e^{j \cdot w}$ в (2), получим комплексный коэффициент передачи $H(w)$:

$$H(w) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot e^{-j \cdot w \cdot m}}{1 + \sum_{n=1}^{M} a_n \cdot e^{-j \cdot w \cdot n}}. \tag{3}$$

Комплексный коэффициент передачи $H(w)$ 2π-периодическая функция частоты w.

Коэффициенты фильтра задаются векторами чисел с плавающей точкой, например для $M = 6$:

$$\begin{array}{rlllllll} \vec{b} = & [0.0007 & -0.0001 & 0.0012 & 0.0001 & 0.0012 & -0.0001 & 0.0007]; \\ \vec{a} = & [1.0000 & -4.8444 & 10.3069 & -12.2480 & 8.5481 & -3.3180 & 0.5597]; \end{array} \tag{4}$$

Если мы преобразуем коэффициенты к целочисленному формату:

$$\begin{array}{l} \vec{b}_q = \mathrm{round}(b \cdot 16); \\ \vec{a}_q = \mathrm{round}(a \cdot 16); \end{array} \tag{5}$$

тогда $\vec{b}_q$ будет иметь нулевые элементы, а полюса $H(z)$ будут располагаться вне единичной окружности комплексной плоскости. Это означает, что фильтр стал неустойчивым и не может быть использован на практике.

Подстановка коэффициентов $\vec{b}_q$ и $\vec{a}_q$ в (3) позволяет получить комплексный коэффициент передачи $H_q(w)$, который для устойчивого фильтра не должен принимать бесконечных значений.

Постановка задачи:

Необходимо написать программу, подбирающую квантованные коэффициенты фильтра $\vec{b}_q$ и $\vec{a}_q$ таким образом, чтобы обеспечить устойчивость фильтра, т.е. комплексный коэффициент передачи $H_q(w)$ не должен иметь бесконечных значений для сетки частот

$$w_k = \frac{k\pi}{K}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots K-1, \quad K = 512. \tag{6}$$

Вещественные целочисленные коэффициенты $\vec{b}_q$ и $\vec{a}_q$ должны представляться 9-битным знаковым числом, т.е. их модуль не должен превышать 255.

Необходимо обеспечить минимум среднего квадрата ошибки MSE между комплексным коэффициентом передачи $H(w_k)$, рассчитанным для сетки частот (6), при использовании коэффициентов с плавающей точкой, и комплексным коэффициентом передачи $H_q(w_k)$, полученным при использовании квантованных коэффициентов $\vec{b}_q$ и $\vec{a}_q$:

$$MSE = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} |H_q(w_k) - H(w_k)|^2 \tag{7}$$

Программа должна поддерживать фильтры порядка M до 13 включительно.

Формат входных данных

Входными данными являются вектора коэффициентов фильтра с плавающей точкой. В первой строке задаётся вектор $\vec{b}$, во второй — вектор $\vec{a}$. Коэффициенты каждого вектора перечислены **через запятую**.

Указанный в примере к задаче входной файл соответствует (4). Входные данные следует считывать **со стандартного потока ввода** ("с клавиатуры").

Формат выходных данных

Программа должна выводить в стандартный поток вывода целочисленные значения коэффициентов $\vec{b}_q$ и $\vec{a}_q$, модуль которых не превышает 255, и которые обеспечивают минимум (7). $\vec{b}_q$ задаётся в первой строке, $\vec{a}_q$ — во второй. Элементы вектора разделяются **запятой**.

Обратите внимание, что пример задаёт только формат вывода; программа, выдающая ответ из примера, будет оценена на данном примере в 0 баллов

Пример

standard input
0.0007,-0.0001,0.0012,0.0001,0.0012,-0.0001,0.0007 1.0000,-4.8444,10.3069,-12.2480,8.5481,-3.3180,0.5597

standard output
1,2,0,0,0,-2,-1 250,-5,134,-245,0,4,-7

Система оценки

Проверяющая программа оценивает устойчивость фильтра, разрядность полученных целочисленных коэффициентов и рассчитывает средний квадрат ошибки MSE согласно (7).

Балл за один тест (фильтр) выставляется по следующему правилу:

- Если полученный целочисленный фильтр является неустойчивым, участник получает 0 баллов.
- Если разрядность коэффициентов превышает 9 бит — 0 баллов.
- Если фильтр устойчив, коэффициенты укладываются в 9 бит, но $MSE > 1$, участник получает 0 баллов.
- Если фильтр устойчив, коэффициенты укладываются в 9 бит, $MSE < 1$, то оценка S рассчитывается по формуле:

$$S = \text{floor}\big(Weight \cdot (1 - MSE)\big). \tag{8}$$

  floor - округление к меньшему целому.

- Значение $Weight$ равно 1000 для *предварительного* тестирования (балл, который участник получает сразу же после проверки отправленной им задачи) и 10 000 для *итогового* тестирования, которое определяет итоговый балл по задаче.

Сразу после отправки решения тестируются для фильтра, содержащего 7 и 8 коэффициентов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ и участник получает предварительный балл за попытку, равный $0.25 \cdot S_7 + 0.75 \cdot S_8$, где S_7 и S_8 — баллы за фильтр соответствующего размера.

По окончании приёма решений будет проведно **итоговое тестирование** для фильтров, содержащих 7, 8, 9 и 10 коэффициентов. По результатам выполнения задачи на каждом из четырёх тестов программа получает соответствующую **итоговую** оценку S_7, S_8, S_9 и S_{10}.

При этом полученный участником за данную попытку **итоговый** балл вычисляется по следующей формуле:

$$S_{sum} = 0.1 \cdot S_7 + 0.2 \cdot S_8 + 0.3 \cdot S_9 + 0.4 \cdot S_{10}. \tag{9}$$

Предварительный (или итоговый) балл участника за задачу равен максимальному предварительному (соответственно, итоговому) баллу, полученному участником за все попытки по данной задаче.

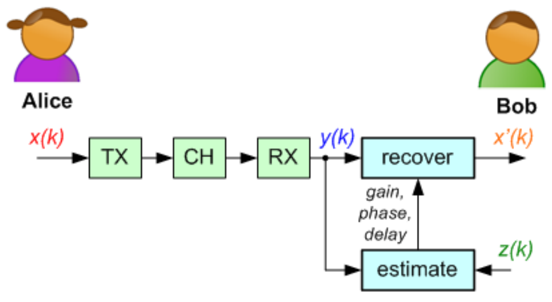
Задача 3. Задача восстановления сигнала

Имя входного файла:	*standard input*
Имя выходного файла:	*standard output*
Ограничение по времени:	120 seconds
Ограничение по памяти:	512 mebibytes

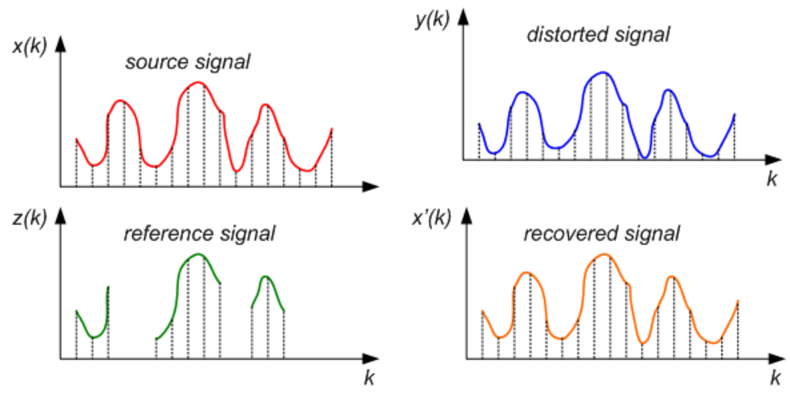
Описание задачи:

Алиса отправляет Бобу оцифрованный узкополосный сигнал $x(k)$, где k — номер отсчета, $k = 0, 1, 2 \ldots K - 1$. Полоса сигнала располагается в области низких частот и значительно меньше частоты дискретизации.

Алиса отправляет сигнал, который проходит через передатчик (TX), канал (CH) и приемник (RX). При этом в процессе передачи у сигнала изменяется среднее значение, амплитуда и фаза, добавляются временной сдвиг (в пределах $-1 \ldots 1$ отсчета), а также смещение по частоте.



Боб имеет опорный сигнал $z(k)$, который является частью передаваемого сигнала $x(k)$. Используя принятый сигнал $y(k)$ и опорный сигнал $z(k)$, он может оценить искажения, вносимые в сигнал Алисы.

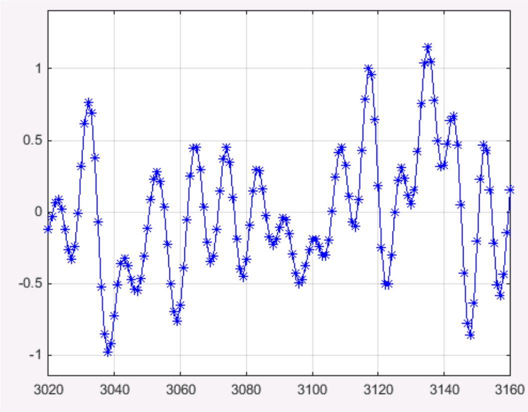


Используя оцененные значения искажений (смещение, коэфф.усиления, фазовый сдвиг, временной и частотный сдвиги), Боб может восстановить сигнал $x'(k)$, который должен быть как можно ближе к исходному сигналу $x(k)$.

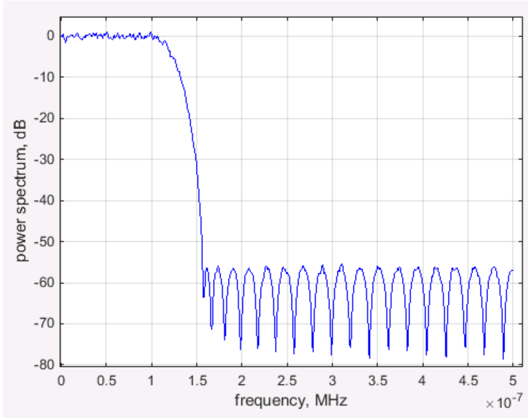
Математическая модель сигнала:

Свойства сигнала $x(k)$:

- оцифрованный сигнал в временной области, где k — номер отсчета, $k = 0, 1, 2 \ldots K - 1$;
- отсчеты сигнала являются числами, представленными в формате с плавающей точкой двойной точности (double);
- количество отсчетов сигнала $K = 10000$;
- сигнал узкополосный, то есть его полоса в 4 раза меньше частоты дискретизации;
- отсчеты сигнала могут быть действительными или комплексными.



Сигнал $x(k)$ во временной области



Сигнал $x(k)$ в частотной области

Алгоритм для генерации сигнала $x(k)$:

1. сгенерировать K псевдослучайных чисел с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией $n(k)$, $k = 0 \ldots K-1$;

2. посчитать свертку сигнала $n(k)$ с коэффициентами низкочастотного фильтра Найквиста:

$$x(k) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m n(k-m)$$

.

Коэффициенты фильтра c:

0	-0.0018	-0.0024	-0.0020	0	0.0031	0.0055
0.0047	0	-0.0068	-0.0115	-0.0097	0	0.0136
0.0227	0.0191	0	-0.0273	-0.0471	-0.0415	0
0.0728	0.1571	0.2243	0.2500	0.2243	0.1571	0.0728
0	-0.0415	-0.0471	-0.0273	0	0.0191	0.0227
0.0136	0	-0.0097	-0.0115	-0.0068	0	0.0047
0.0055	0.0031	0	-0.0020	-0.0024	-0.0018	0

Формат входных данных

Входные данные состоят из 10,000 строк. Каждая строка описывает один отсчёт и содержит 5 вещественных значений, заданных в типе `double`: действительная часть искаженного сигнала $y(k)$, мнимая часть искаженного сигнала $y(k)$, действительная часть опорного сигнала $z(k)$, мнимая часть опорного сигнала $z(k)$; отмеченные позиции опорного сигнала (0 — опорный сигнал не доступен (нулевые значения), 1 — опорный сигнал доступен).

Формат выходных данных

Выведите 10 000 строк, каждая из которых содержит два вещественных значения (в типе `double`), разделенные пробелом, одна строка соответствует одному отсчёту, сначала следует действительная часть восстановленного сигнала $x'(k)$, затем мнимая часть восстановленного сигнала $x'(k)$.

Пример

standard input
2.3961904028340197e+00 0.000e+00 0.0000000000000000e+00 0.00000e+00 1.0e+00 2.3961881389815662e+00 0.000e+00 1.4401054334247609e-06 0.00000e+00 1.0e+00 2.3961938694613858e+00 0.000e+00 -2.2052271546266804e-06 0.00000e+00 1.0e+00
standard output
1.2143751132096424e-03 0.0 -7.0993121735282391e-04 0.0000000000000000e+00 5.0213593611337574e-04 0

Замечание

Пример из условия содержит только три отсчёта вместо 10 000. Реальные примеры могут быть скачаны из архива материалов по ссылке `Sample ZIP` в интерфейсе тестирующей системы.

В архиве находятся 5 тестов; к тестам 1, 3, 5 прилагается эталонный ответ (исходный сигнал Алисы). В нижеследующей таблице дано краткое описание тестов.

Тест 1	Действительные	Фиксированное смещение, изменение амплитуды
Тест 2	Действительные	Фиксированное смещение, изменение амплитуды, дробный временной сдвиг ($-1 \dots 1$ отчсёта).
Тест 3	Комплексные	Фиксированное смещение, изменение амплитуды/фазы
Тест 4	Комплексные	Фиксированное смещение, изменение амплитуды/фазы, дробный временной сдвиг ($-1 \dots 1$ отчсёта).
Тест 5	Комплексные	Фиксированное смещение, изменение амплитуды/фазы, дробный временной сдвиг ($-1 \dots 1$ отчсёта), смещение по частоте.

Система оценки

Требуется минимизировать значение

$$NMSE = 10 \log_{10} \frac{\sum\limits_{k=0}^{K-1} |x(k) - x'(k)|^2}{\sum\limits_{k=0}^{K-1} |x(k)|^2} (dB)$$

При значениии $NMSE$, меньшем или равном -80, решение получает полный балл за тест, при положительном $NMSE$ решение получает 0 баллов за тест, иначе решение получает $-NMSE/80$ долю полного балла за каждый тест.

Каждый из 5 тестов оценивается следующим образом: пусть максимальный балл за задачу равен 100, тогда баллы максимальные баллы за первый и второй тест равны 15, за третий и четвёртый — 20, за пятый — 30.

Предварительное тестирование проходит на 5 тестах, которые доступны участникам для скачивания. Максимальная предварительная сумма баллов по всем пяти тестам равна 1000; после завершения отборочного этапа решение будет пересужено на полном наборе (10) тестов с максимальной суммой баллов, равной 10 000.