Домашнее задание

По курсу: **Линейная Алгебра**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

13 декабря 2024 г.

Содержание

1 Объёмы и движения в евклидовом пространстве **2**
1.1 Задача 1 2
1.2 Задача 3 2
1.3 Задача 7 2
1.4 Задача 8 3
1.5 Задача 9 4
1.6 Задача 10 4
1.7 Задача 11 4
1.8 Задача 12 4
1.9 Задача 13 5
1.10 Задача 14 5

1 Объёмы и движения в евклидовом пространстве

1.1 Задача 1

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{33}$$

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{38}$$

1.2 Задача 3

а) $||v_1|| = \sqrt{15} \wedge ||v_2|| = \sqrt{13}$
б) $\cos(\varphi) = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{195}}\right)$
в) $||v_1 - v_2|| = \sqrt{42}$

1.3 Задача 7

Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$v_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 2e = 3 \Rightarrow e = 1.5 \wedge \langle v_2, v_2 \rangle = f^2 + g^2 + h^2 = 4.75 \Rightarrow h = 0 \wedge f = \frac{\sqrt{19}}{2} \wedge g = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ \frac{\sqrt{19}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 1 \Rightarrow k = 0.5 \wedge \langle v_3, v_3 \rangle = 7 \Rightarrow l^2 + m^2 + n^2 = 6.75$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ \frac{13}{2\sqrt{19}} \\ \frac{\sqrt{1634}}{38} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Задача 8

$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{-5 + i\sqrt{11}}{6}, \quad \lambda_3 = \frac{-5 - i\sqrt{11}}{6}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

Отбросим комплексное решение, поскольку поворот в вещественном поле. Тогда выберем произвольные векторы ортогональные e_1 и ортонормируем с помощью Грама-Шмидта.

Пусть $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, тогда $\langle e_1, u_1 \rangle = 0$, т.е. ортогонален, после нормирования получим $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Пусть $u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, тогда $\langle e_1, u_3 \rangle = 0$, нормируем и составляем матрицу ортонормированного оператора в каноническом виде.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}$$

$$A' = Q^T A Q$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

1.5 Задача 9

$$Av_1 = v_2$$

Нормализируем вектора, получаем третий вектор как ортогональный первым двум, находится через векторное произведение. Строим базис.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{17}}{17} & \frac{5\sqrt{1122}}{1122} & \frac{7\sqrt{66}}{66} \\ \frac{3\sqrt{17}}{17} & -\frac{8\sqrt{1122}}{561} & \frac{2\sqrt{66}}{33} \\ \frac{2\sqrt{17}}{17} & \frac{29\sqrt{1122}}{1122} & \frac{\sqrt{66}}{66} \end{bmatrix}$$

1.6 Задача 10

Матрицы неотрицательны, нормированны, также должно выполняться $Q^TQ = I$, таким образом данным условиям удовлетворяют только перестановочные матрицы.

1.7 Задача 11

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$V = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$$V = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{\frac{32}{135}}$$

1.8 Задача 12

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2 - базисные, v_3 выражается через v_1, v_2 следовательно его произведение зависит только от скалярных произведений v_1, v_2

Дополним до базиса R^3 $e_3 = (0, 0, 1)$ матрица грамма для v_1, v_2, e_3:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{fe} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{fe}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = G(e_1, e_2, e_3) = C_{fe}^T G(v_1, v_2, e_3) \cdot C_{fe} = \begin{pmatrix} 7/9 & -5/9 & 1/3 \\ -5/9 & 46/9 & 4/3 \\ 1/3 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.9 Задача 13

$$\det(v_1|v_2) = -7$$

$$\det(BA) = 0$$

Просуммируем главные миноры второго порядка для определения коэффициентов при втором члене характеристического многочлена, получаем, что все собственные значения - 0, 2, -2. Мы знаем, что характеристический многочлен от коммутирующих матриц не меняется за исключением нулей. Тогда:

$$\det(v_1|v_2)\det(AB) = 28$$

1.10 Задача 14

$||v_1|| = \sqrt{14} \wedge ||v_2|| = \sqrt{14} \wedge ||v_3|| = \sqrt{114} \wedge ||v_4|| = \sqrt{114}$

$||u_1|| = \sqrt{14} \wedge ||u_2|| = \sqrt{114}$

u_1 может получиться только из $v_1 \vee v_2$

u_2 может получиться только из $v_3 \vee v_4$

$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle \Rightarrow \varphi(v_1) = u_1 \wedge \varphi(v_3) = u_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & -7 \end{pmatrix} Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 \to 2u_1 - u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = u_3$$

$$v_4 \to -3u_1 + 2u_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = u_4$$