Домашнее задание

По курсу: **Название Курса**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

9 декабря 2024 г.

Содержание

1 Объёмы и движения в евклидовом пространстве

1.1 Задача 1

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{V}_1 = \sqrt{det(G)} = \sqrt{33}$

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{V}_2 = \det(\sqrt{G}) = \sqrt{38}$

1.2 Задача 3

а) $||v_1|| = \sqrt{15} \wedge ||v_2|| = \sqrt{13}$ б) $\cos(\varphi) = \arccos(\frac{-7}{\sqrt{195}})$ в) $||v_1 - v_2|| = \sqrt{42}$

1.3 Задача 7

Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$v_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 2e = 3 \Rightarrow e = 1.5 \wedge \langle v_2, v_2 \rangle = f^2 + g^2 + h^2 = 4.75 \Rightarrow h = 0 \wedge f = \frac{\sqrt{19}}{2} \wedge g = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5\sqrt{19} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 1 \Rightarrow k = 0.5 \wedge \langle v_3, v_3 \rangle = 7 \Rightarrow l^2 + m^2 + n^2 = 6.75$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ \frac{13}{2\sqrt{19}} \\ \frac{\sqrt{1634}}{38} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Задача 8

$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow 3\lambda^2+2\lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \quad \lambda_2=\dfrac{-5+i\sqrt{11}}{6}, \quad \lambda_3=\dfrac{-5-i\sqrt{11}}{6}$

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}\\\frac{3}{\sqrt{11}}\\\frac{1}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}$$

Отбросим комплексное решение, поскольку поворот в вещественном поле. Тогда выберем произвольные векторы ортогональные e_1 и ортонормируем с помощью Грама Шмидта.

Пусть $u_1 = 1, 0, -1\mathrm{e}_1 u_1 = 0$ т.е ортогонален, после нормирования получим, $e_2 = 2^{-0.5}, 0, -2^{-0.5}$

Пусть $u_3 = -3, 2, -3\mathrm{e}_1 u_3 = 0$ нормируем и составляем матрицу ортонормированного оператора в каноническом виде. :

$$Q=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{11}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{3}{\sqrt{22}}\\ \dfrac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{22}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{11}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{3}{\sqrt{22}}\end{pmatrix}$$

$$A' = Q^T A Q$$

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{5}{6} & -\dfrac{\sqrt{11}}{6}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{11}}{6} & -\dfrac{5}{6}\end{pmatrix}$$

1.5 Задача 9

$$Av_1 = v_2$$

Нормализируем вектора, получаем третий вектор как ортогональный первым двум, находится через векторное произведение. Строим базис.

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{17}}{17} & \frac{5\sqrt{1122}}{1122} & \frac{7\sqrt{66}}{66}\\ \frac{3\sqrt{17}}{17} & -\frac{8\sqrt{1122}}{561} & \frac{2\sqrt{66}}{33}\\ \frac{2\sqrt{17}}{17} & \frac{29\sqrt{1122}}{1122} & \frac{\sqrt{66}}{66}\end{bmatrix}$$

1.6 Задача 10

Матрицы неотрицательны, нормированны, также должно выполнятся $Q^TQ = I$ таким образом данным условиям удовлетворяют только перестановочные матрицы.

1.7 Задача 11

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$V = \sqrt{det(G)} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$$V = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{\frac{32}{135}}$$

1.8 Задача 12

Для существования скалярного произведения необходимо, чтобы матрица G была положительноj определена. Проверим, $\det(G) = 0$

В таком случае существует линейная зависимость матрицы Грама, таким образом один вектор может быть выражен через другие, однако произведение по определению положительно определено. Если появляется ненулевой вектор с нулевой нормой, то это не скалярное произведение.

1.9 Задача 13

$$\det(v_1|v_2) = -7$$

$$\det(BA) = 0$$

Просуммируем главные миноры второго порядка для определения коэффициентов при втором члене хар многочлена, получаем, что все собственные значения - 0, 2, -2, мы знаем, что хар многочлен от коммутирующих матрц не меняется за исключением нулей. Тогда:

$$\det(v_1|v_2)\det(AB) = 28$$

1.10 Задача 14

Длины v_1, u_2 совпадают. Длины v_2, u_2 не совпадают. Првоерим v_3, u_2 - совпадают. Проверим угол между $v_1, v_3 = 39 \Rightarrow \cos(v_1, v_3) = \frac{39}{\sqrt{14}\sqrt{114}}$

Проверим угол для $u_1, u_2 = \frac{39}{\sqrt{114}\sqrt{14}}$ совпадают. Тогда можно построить ортонормированные базы и дополнить до базиса. Тогда существует ортогональная матрица $R : Rv_1 = u_1 \wedge Rv_3 = u_2$. Образы $v_2 \wedge v_4$ определяются тем же ортогональным преобразованием R. Однако выбо третьего направления не единственен т.к мы завершим базис до ортонормированного. Следовательно R не единственно определен по предыдущим условиям. Следовательно решение существует и оно не единственною