Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

21 декабря 2024 г.

Содержание

1 Второе достаточное условие экстремума

1.1 Задача 8

$f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x) \Rightarrow f''(x) = f''(-x)$

$f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(0) + f'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

Тогда пользуясь вторым достаточным условием экстремума:

$f'(0) = 0 \wedge |f''(x)| > 0 \Rightarrow |f''(x)| \neq 0$ точка 0 является точкой экстремума.

2 Неравенство Йенсена

2.1 Задача 9

$$(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_nb_n)^2$$

$$w_i = \frac{a_i^2}{\sum_1^n a_i^2}$$

сумма всех w равна 1

Пусть

$$x_i = \frac{b_i}{a_i}$$

Тогда по неравенству Йенсена:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \frac{b_i}{a_i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

домножим обе части на знаменатель:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

чтд

2.2 Задача 10

Неравенство Юнга т.к $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

тогда введем индексы и проссумируем

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} b_i^q$$

Тогда по неравенству Йенсена:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} b_i^q \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Обьединяем, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} b_i^q \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

3.1 Задача 12

$$ch(1) + sh(1)(x-1) + \frac{ch(1)}{2!}(x-1)^2 \cdot o((x-1)^2)$$

4 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

4.1 Задача 13

$$x + \frac{x^3}{3!} + R_3$$

Т.к в разложении нечетной функции учавствуют только нечетные степени, то

$$|R_3| \leq |\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = |\frac{x^5}{5!}|$$

$$|R_3| \leq 8.333 \cdot 10^{-8}$$

$$|sin(0.01) - 0.1 - \frac{0.001}{6}| \leq 10^{-7}$$

чтд

4.2 Задача 14

Разложим около точки $x = 4 + hh = 1x_0 = 4f = \sqrt{4+h} \Rightarrow f(x) = 2 \cdot (1 + 0.25h)^{0.5}$

Воспользуемся биномиальным разложением: $(1+z)^k = 1+kz+\frac{k(k-1)}{2!}z^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}z^3...$
k = 0.5 z = 0.25 $T_0 = 1, T_1 = 0.125, T_2 = -\frac{1}{128}, T_3 = \frac{1}{1024}, T_4 = \frac{-15}{98304}, T_5 = \frac{7}{262144}$
$S = \sum_0^5 T_i = \frac{586174}{131072}$
$T_6 = \frac{945}{188743680} \approx -0.000005$

$$|2.2361 - 2.2360679775| \approx 0.000032 \leq 10^{-4}$$

4.3 Задача 15

По теореме Лагранжа:

Поскольку fдифференцируема на $[0;1]$и $f(0) = f(1) = 0$, по теореме Лагранжа существует точка $c \in (0;1)$, такая что:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0.$$

То есть, существует точка c, в которой первая производная равна нулю.

Для любой точки $x \in [0;1]$применим неравенство Липшица для производной:

$$|f'(x) - f'(c)| \le \sup_{t\in[0;1]} |f''(t)| \cdot |x - c| \le A|x - c|.$$

Поскольку $f'(c) = 0$, получаем:

$$|f'(x)| \le A|x - c|.$$

Максимальное значение $|x - c|$на отрезке $[0;1]$достигается, когда xнаходится на границах отрезка относительно c. Наиболее «жесткая» оценка достигается, когда $c = \frac{1}{2}$, тогда:

$$|x - c| \le \frac{1}{2}.$$

Следовательно:

$$|f'(x)| \le A \cdot \frac{1}{2} = \frac{A}{2}.$$

чтд

4.4 Задача 16

По формуле косинусов суммы:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)$$

Раскладываем маклоореном

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

4.5 Задача 17

a) $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{8(-\ln 2)^k}{k!}x^k + o(x^n)$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}\left(\frac{x}{4}\right)^k + o(x^n)$ c) $f(x) = 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{e}\right)^k + o(x^n)$

4.6 Задача 19

$f(x) = e^x + x^2|x| = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right) + (x^3 \cdot \mathrm{sign}(x))$ n=1: $f(x) = 1 + x + o(x)$

n=2: $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

n=3+: разложение не соответствует условию т.к остаточный член не стремится к нулю при делении на x^n

4.7 Задача 20

$$ln$$

4.8 Задача 26

$$f(x) = 2x + \frac{5x^3}{3} - 2x^4 + O(x^4)$$

4.9 Задача 28

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + O(x^3)$$

$$f'''(x)|_0 = -2$$

4.10 Задача 29

$$f(x) = 1 + 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$$

$$f'''(0) = -8$$

4.11 Задача 30

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6)$$

4.12 Задача 31

$$\arcsin(x^3) = x^3 + \frac{x^9}{6} + o(x^9)$$

$$ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^5)$$