# Домашнее задание

По курсу: **Линейная алгебра**

**Студент: Ростислав Лохов**

АНО ВО Центральный университет

23 ноября 2024 г.

# Содержание

# 1 Евклидовы пространства

## 1.1 Задача 3

**Условие задачи:** Найди длины сторон, внутренние углы и площадь треугольника $ABC$ в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x^T y$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Решение:** Найдем норму каждого вектора, полученных путем разности двух точек: $||AB|| = 6$, $||BC|| = 6$, $||CA|| = 6$. Поскольку стороны равны, то равны и углы (по свойству о равностороннем треугольнике). В таком случае площадь будет равна $9\sqrt{3}$ по формуле для равностороннего треугольника ($\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$).

## 1.2 Задача 4

**Условие задачи:** Найди QR-разложение для следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Решение:** $Q$ — матрица с ортонормированными столбцами, $R$ — верхнетреугольная матрица. Воспользуемся методом Грама-Шмидта для QR-разложения:

$$u_1 = a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$R_{11} = \|u_1\| = 3$$

$$q_1 = \frac{u_1}{R_{11}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$R_{12} = \langle q_1, a_2\rangle = -3$$

$$u_2 = a_2 - R_{12}q_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$R_{22} = \|u_2\| = 3$$

$$q_2 = \frac{u_2}{R_{22}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$R_{13} = -6, \quad R_{23} = -6$$

$$u_3 = a_3 - R_{12}q_1 - R_{23}q_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрицы $Q$ и $R$ имеют вид:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## 1.3 Задача 5

**Условие задачи:**

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & -7 \\ -7 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Решение:** Перемножив каждый вектор на матрицу, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тогда, сделав перемножение каждого вектора с исходным вектором (до транспонирования и умножения на матрицу), получим 0. В случае, если мы каждый такой вектор дополнительно умножим на такой же, то получим 1, значит данный базис является ортонормированным. Для любого вектора $v$ координаты в базисе переводятся как $\langle v, f_i \rangle$.

Теперь же для нахождения вектора в другом базисе каждый элемент $i$ находится как $\langle v, f_i \rangle$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 1.4 Задача 7

**Условие задачи:** В пространстве $\mathbb{R}^4$ задано стандартное скалярное произведение. Пусть $U = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid Ay = 0\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ -2 & -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Найди ортогональный базис подпространства $U$ и дополни его до ортогонального базиса всего пространства в $\mathbb{R}^4$.

**Решение:** Приведем матрицу $A$ к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -3x_3, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Тогда базис решений будет:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда ортогональные векторы к нему:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Дополнить можно, добавив стандартный базисный вектор. Таким образом, полный ортогональный базис $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## 1.5 Задача 8

**Условие задачи:** Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ задано стандартное скалярное произведение и следующий набор векторов:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализируй систему с помощью симметричного метода Гаусса и метода Грама-Шмидта.

**Решение:** Воспользуемся сначала методом Грама-Шмидта:

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j, \quad e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

Получим ортогональную систему:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Метод симметричного Гаусса:

$$u_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j$$

Получим ортогональную систему:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

**Задача 9:** Найди матрицу скалярного произведения в $\mathbb{R}^3$, чтобы векторы $f_1, f_2, f_3$ стали ортонормированными:

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Решение:** Условие ортонормированности: $F^T G F = I$, где $G$ — матрица скалярного произведения, $F$ — матрица, составленная из векторов $f_i$. Попробуем вариант $G = (FF^T)^{-1}$. Тогда:

$$FF^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & -7 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Вычислим обратную матрицу:

$$G = (FF^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица скалярного произведения $G$ выглядит следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 1.6 Задача 10

**Условие задачи:** Пусть задано евклидово пространство $R_{[x]\leq 3}$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Методом Грама-Шмидта проведи процесс ортогонализации базиса $\{1, x, x^2, x^3\}$.

**Решение:** Используем метод Грама-Шмидта для ортогонализации базиса $\{1, x, x^2, x^3\}$ в пространстве $R_{[x]\leq 3}$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Ортогонализированный базис с нормировкой:

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1$$

$$e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x$$

$$e_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$e_4 = \sqrt{\frac{35}{8}} \cdot \left(x^3 - 0.6x\right)$$

## 1.7 Задача 11:

**Условие задачи:** Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \cdot n (n > 1)$ относительно которго матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?

**Решение:**

Составим уравнение условия задачи. Пусть A - матрица из всех единиц - W - производльная матрица оператор, B - верхнетреугольная матрица, W - матрица-оператор тогда. $tr(A^T WB) = 0 \longleftrightarrow tr(WB) = 0$

$$tr(WB) = \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} b_{ji} = 0$$