

# Домашнее задание

По курсу: **Линейная Алгебра**

**Студент: Ростислав Лохов**

АНО ВО Центральный университет

9 декабря 2024 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Объёмы и движения в евклидовом пространстве</b>	<b>2</b>
1.1	Задача 1 . . . . .	2
1.2	Задача 3 . . . . .	2
1.3	Задача 7 . . . . .	2
1.4	Задача 8 . . . . .	3
1.5	Задача 9 . . . . .	4
1.6	Задача 10 . . . . .	4
1.7	Задача 11 . . . . .	4
1.8	Задача 12 . . . . .	4
1.9	Задача 13 . . . . .	4
1.10	Задача 14 . . . . .	5

# 1 Объёмы и движения в евклидовом пространстве

## 1.1 Задача 1

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{33}$$

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{38}$$

## 1.2 Задача 3

а)  $\|v_1\| = \sqrt{15} \wedge \|v_2\| = \sqrt{13}$

б)  $\cos(\varphi) = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{195}}\right)$

в)  $\|v_1 - v_2\| = \sqrt{42}$

## 1.3 Задача 7

Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$v_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 2e = 3 \Rightarrow e = 1.5 \wedge \langle v_2, v_2 \rangle = f^2 + g^2 + h^2 = 4.75 \Rightarrow h = 0 \wedge f = \frac{\sqrt{19}}{2} \wedge g = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ \frac{\sqrt{19}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 1 \Rightarrow k = 0.5 \wedge \langle v_3, v_3 \rangle = 7 \Rightarrow l^2 + m^2 + n^2 = 6.75$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 13 \\ \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{1634}} \\ \frac{38}{0} \end{pmatrix}$$

#### 1.4 Задача 8

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{-5 + i\sqrt{11}}{6}, \quad \lambda_3 = \frac{-5 - i\sqrt{11}}{6}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

Отбросим комплексное решение, поскольку поворот в вещественном поле. Тогда выберем произвольные векторы ортогональные  $e_1$  и ортонормируем с помощью Грама-Шмидта.

Пусть  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , тогда  $\langle e_1, u_1 \rangle = 0$ , т.е. ортогонален, после нормирования получим  $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ .

Пусть  $u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ , тогда  $\langle e_1, u_3 \rangle = 0$ , нормируем и составляем матрицу ортонормированного оператора в каноническом виде.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{\sqrt{22}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{22}}{3} \end{pmatrix}$$

$$A' = Q^T A Q$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

## 1.5 Задача 9

$$Av_1 = v_2$$

Нормализируем вектора, получаем третий вектор как ортогональный первым двум, находится через векторное произведение. Строим базис.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{17}}{17} & \frac{5\sqrt{1122}}{1122} & \frac{7\sqrt{66}}{66} \\ \frac{3\sqrt{17}}{17} & -\frac{8\sqrt{1122}}{1122} & \frac{2\sqrt{66}}{66} \\ \frac{2\sqrt{17}}{17} & \frac{29\sqrt{1122}}{1122} & \frac{\sqrt{66}}{66} \end{bmatrix}$$

## 1.6 Задача 10

Матрицы неотрицательны, нормированны, также должно выполняться  $Q^T Q = I$ , таким образом данным условиям удовлетворяют только перестановочные матрицы.

## 1.7 Задача 11

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$V = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$$V = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{\frac{32}{135}}$$

## 1.8 Задача 12

Для существования скалярного произведения необходимо, чтобы матрица  $G$  была положительно определена. Проверим,  $\det(G) = 0$ .

В таком случае существует линейная зависимость матрицы Грама, таким образом один вектор может быть выражен через другие, однако произведение по определению положительно определено. Если появляется ненулевой вектор с нулевой нормой, то это не скалярное произведение.

## 1.9 Задача 13

$$\det(v_1|v_2) = -7$$

$$\det(BA) = 0$$

Просуммируем главные миноры второго порядка для определения коэффициентов при втором члене характеристического многочлена, получаем, что все собственные значения - 0, 2, -2. Мы знаем, что характеристический многочлен от коммутирующих матриц не меняется за исключением нулей. Тогда:

$$\det(v_1|v_2) \det(AB) = 28$$

### 1.10 Задача 14

Длины  $v_1$  и  $u_2$  совпадают. Длины  $v_2$  и  $u_2$  не совпадают. Проверим  $v_3$  и  $u_2$  - совпадают. Проверим угол между  $v_1$  и  $v_3$ :  $\varphi = 39^\circ \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{39}{\sqrt{14}\sqrt{114}}$ .

Проверим угол для  $u_1$  и  $u_2$ :  $\cos(\varphi) = \frac{39}{\sqrt{114}\sqrt{14}}$  совпадает. Тогда можно построить ортонормированные базы и дополнить до базиса. Тогда существует ортогональная матрица  $R$ , такая что  $Rv_1 = u_1$  и  $Rv_3 = u_2$ . Образы  $v_2$  и  $v_4$  определяются тем же ортогональным преобразованием  $R$ . Однако выбор третьего направления не единственен, так как мы завершим базис до ортонормированного. Следовательно,  $R$  не единственно определен по предыдущим условиям. Следовательно, решение существует и оно не единственно.