Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

8 декабря 2024 г.

Содержание

1 Правило Лопиталя

1.1 Задача 4

$$\lim_{x\to 1} \frac{70x^9 - 70}{20x^4 - 20} = \lim_{x\to 1} \frac{630x^8}{80x^3} = \frac{63}{8}$$

1.2 Задача 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-1} - 1}{3x^2} = \frac{-1}{3}$$

1.3 Задача 6

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (\cos(x) - x\sin(x))}{3\sin^2(x)\cos(x)} = \frac{1}{3}$$

1.4 Задача 7

$$\frac{2x^3}{1/3x^3} = 6$$

1.5 Задача 8

$$-2\arcsin(\sqrt{2} - 1) = \frac{-\pi}{4}$$

1.6 Задача 9

$$\frac{2x + cos(x)}{2x - cos(x)}$$

$$\frac{2 + sin(x)}{2 - sin(x)}$$

т.к на бесконечности sinx не определен, т.е осцилирует, в таком случае правило Лопеталя не работает, продолжая

1.7 Задача 10

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)/x}{0.5x^{-0.5}} = 0$$

1.8 Задача 11

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a!}{b^a e^{bx}} = 0$$

1.9 Задача 12

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a!}{b} \frac{1}{x^b} = 0$$

1.10 Задача 13

Предела не существует т.к показатель e^{-1/x^3} зависит от знака, т.е левостороний предел не равен правостороннему, разрыв второго рода.

1.11 Задача 14

Заметим, что числитель при данном пределе равен нулю, следовательно функция непрерывна в нуле. Рассмотрим первую производную:

$$\frac{de^{-1/x^2}}{dx} = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$$

$$\lim_{t\to\infty} |f'(x)| = |2t^3 e^{-t^2}| = 0$$

ММИ:

Предположим, что для всех производных до порядка n-1 включительно верно $f^{(k)}(0) = 0$ Покажем, что $f^{(n)}(0) = 0$

По определению:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - 0}.$$

По предположению индукции:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x}.$$

$$f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}$$

где P_{n-1} - любой многочлен степени n-1

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}\frac{1}{x}.$$

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}\frac{1}{x}.$$

$$f^{(n)}(0) = \lim_{t\to\infty} P_{n-1}(t)e^{-t^2}t.$$

т.к экспонента убывает быстрее любой полиномиальной функции:

$$\lim_{t\to\infty} P_{n-1}(t)te^{-t^2} = 0.$$

Следовательно

$$f^{(n)}(0) = 0$$

1.12 Задача 15

$$\lim_{x\to\pi/2} \tan(x)\ln(\sin(x))$$

Сделаем замену

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(-\frac{t^2}{2}) = 0$$

следовательно предел 1, т.к мы искали предел экспоненты

1.13 Задача 16

Логарифмируем

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}$$

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot x}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$L = e^{\ln L} = e^1 = e$$

1.14 Задача 17

Используем разложение Тейлора около a до второго порядка числитель:

$$\begin{aligned}&\left[f(a)+3hf'(a)+\frac{9h^2}{2}f''(a)+o(h^2)\right]\\ &\quad -3\left[f(a)+2hf'(a)+2h^2f''(a)+o(h^2)\right]\\ &\quad +3\left[f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)\right]\\ &\quad -f(a)=o(h^2)\end{aligned}$$

Тогда:

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(h^2)}{h^2} = 0$$

1.15 Задача 18

$$\text{Sector}(QPR) = \frac{r^2\theta}{2} \wedge B(\theta) = \frac{1}{2}(r)(r)\sin\theta = \frac{r^2}{2}\sin\theta$$

$$A(\theta) = \text{Sector}(QPR) - \text{Triangle}(PQR) = \frac{r^2\theta}{2} - \frac{r^2\sin\theta}{2} = \frac{r^2}{2}(\theta-\sin\theta)$$

$$\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \frac{\frac{r^2}{2}(\theta-\sin\theta)}{\frac{r^2}{2}\sin\theta} = \frac{\theta-\sin\theta}{\sin\theta}$$

Тейлор около 0:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + o(\theta^3)$$

$$\theta-\sin\theta = \theta - \left(\theta-\frac{\theta^3}{6}+o(\theta^3)\right) = \frac{\theta^3}{6}+o(\theta^3)$$

$$\frac{\theta-\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\theta^3}{6}+o(\theta^3)}{\theta-\frac{\theta^3}{6}+o(\theta^3)}.$$

$$\frac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta} \approx \frac{\frac{\theta^3}{6}}{\theta} = \frac{\theta^2}{6}.$$

$$\frac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta} \approx \frac{\frac{\theta^3}{6}}{\theta} = \frac{\theta^2}{6}.$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta^2}{6} = 0.$$

Как будто бы очев