

Домашнее задание

По курсу: Математический Анализ

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

21 декабря 2024 г.

Содержание

1	Второе достаточное условие экстремума	2
1.1	Задача 8	2
2	Неравенство Йенсена	2
2.1	Задача 9	2
2.2	Задача 10	2
3	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано	3
3.1	Задача 12	3
4	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа	3
4.1	Задача 13	3
4.2	Задача 14	3
4.3	Задача 15	3
4.4	Задача 16	4
4.5	Задача 17	4
4.6	Задача 19	4
4.7	Задача 28	4
4.8	Задача 29	5
4.9	Задача 30	5
4.10	Задача 31	5

1 Второе достаточное условие экстремума

1.1 Задача 8

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x) \Rightarrow f''(x) = f''(-x) \\ f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(0) + f'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

Тогда пользуясь вторым достаточным условием экстремума:

$f'(0) = 0 \wedge |f''(x)| > 0 \Rightarrow |f''(x)| \neq 0$ точка 0 является точкой экстремума.

2 Неравенство Йенсена

2.1 Задача 9

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2$$

$$w_i = \frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

сумма всех w равна 1

Пусть

$$x_i = \frac{b_i}{a_i}$$

Тогда по неравенству Йенсена:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \frac{b_i}{a_i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \left(\frac{b_i}{a_i} \right)^2$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

домножим обе части на знаменатель:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

что и требовалось доказать

2.2 Задача 10

Неравенство Юнга т.к. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

тогда введем индексы и просуммируем

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n b_i^q$$

Тогда по неравенству Йенсена:

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n b_i^q \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Объединяем, получаем:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n b_i^q \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

3.1 Задача 12

$$ch(1) + sh(1)(x-1) + o((x-1)^2)$$

4 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

4.1 Задача 13

$$x + \frac{x^3}{3!} + R_3$$

Т.к в разложении нечетной функции участвуют только нечетные степени, то

$$|R_3| \leq \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \right| = \left| \frac{x^5}{5!} \right|$$

$$|R_3| \leq 8.333 \cdot 10^{-8}$$

$$|\sin(0.01) - 0.1 - \frac{0.001}{6}| \leq 10^{-7}$$

чтд

4.2 Задача 14

Разложим около точки $x = 4 + h$ $h = 1$ $x_0 = 4$ $f = \sqrt{4+h} \Rightarrow f(x) = 2 \cdot (1 + 0.25h)^{0.5}$

Воспользуемся биномиальным разложением: $(1+z)^k = 1 + kz + \frac{k(k-1)}{2!} z^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} z^3 \dots$

$$k = 0.5 \quad z = 0.25 \quad T_0 = 1, T_1 = 0.125, T_2 = -\frac{1}{128}, T_3 = \frac{1}{1024}, T_4 = \frac{-15}{98304}, T_5 = \frac{7}{262144}$$

$$S = \sum_{i=0}^5 T_i = \frac{586174}{131072}$$

$$T_6 = \frac{945}{188743680} \approx -0.000005$$

$$|2.2361 - 2.2360679775| \approx 0.000032 \leq 10^{-4}$$

4.3 Задача 15

По теореме Лагранжа:

Поскольку f дифференцируема на $[0; 1]$ и $f(0) = f(1) = 0$, по теореме Лагранжа существует точка $c \in (0; 1)$, такая что:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0.$$

То есть, существует точка c , в которой первая производная равна нулю.

Для любой точки $x \in [0; 1]$ применим неравенство Липшица для производной:

$$|f'(x) - f'(c)| \leq \sup_{t \in [0; 1]} |f''(t)| \cdot |x - c| \leq A|x - c|.$$

Поскольку $f'(c) = 0$, получаем:

$$|f'(x)| \leq A|x - c|.$$

Максимальное значение $|x - c|$ на отрезке $[0; 1]$ достигается, когда x находится на границах отрезка относительно c . Наиболее «жесткая» оценка достигается, когда $c = \frac{1}{2}$, тогда:

$$|x - c| \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно:

$$|f'(x)| \leq A \cdot \frac{1}{2} = \frac{A}{2}.$$

что и требовалось доказать.

4.4 Задача 16

По формуле косинусов суммы:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x)$$

Раскладываем в ряд по степеням x

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

4.5 Задача 17

$$\text{a) } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{8(-\ln 2)^k}{k!} x^k + o(x^n) \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} \left(\frac{x}{4}\right)^k + o(x^n) \quad \text{c) } f(x) = 2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{x}{e}\right)^k + o(x^n)$$

4.6 Задача 19

$$f(x) = e^x + x^2|x| = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) + (x^3 \cdot \text{sign}(x))$$

$$n=1: f(x) = 1 + x + o(x)$$

$$n=2: f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$n=3+$: разложение не соответствует условию т.к. остаточный член не стремится к нулю при делении на x^n

4.7 Задача 28

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + O(x^3)$$

$$f'''(x)|_0 = -2$$

4.8 Задача 29

$$f(x) = 1 + 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$$

$$f'''(0) = -8$$

4.9 Задача 30

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6)$$

4.10 Задача 31

$$\arcsin(x^3) = x^3 + \frac{x^9}{6} + o(x^9)$$

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^5)$$