

# Домашнее задание

По курсу: Математический Анализ

Студент: Ростислав Лохов

# Содержание

<b>1</b>	<b>Производная второго порядка</b>	<b>2</b>
1.1	Задача 2 . . . . .	2
1.2	Задача 3 . . . . .	2
1.3	Задача 4 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Производная высших порядков</b>	<b>2</b>
2.1	Задача 6 . . . . .	2
2.2	Задача 7 . . . . .	2
2.3	Задача 8 . . . . .	3
2.4	Задача 9 . . . . .	3
2.5	Задача 10 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Производные высших порядков от параметрически или неявно заданных функций</b>	<b>4</b>
3.1	Задача 11 . . . . .	4
3.2	Задача 12 . . . . .	4
3.3	Задача 13 . . . . .	4

# 1 Производная второго порядка

## 1.1 Задача 2

Решение:

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = 3t^2 + t + 1 \wedge \frac{ds_2(t)}{dt} = 2t^2 + 6t - 5$$

$$3t^2 + t + 1 = 2t^2 + 6t - 5 \Rightarrow t = 2 \wedge t = 3$$

$$\frac{d^2s_1(t)}{dt|_{x=2}} = 13 \wedge \frac{d^2s_1(t)}{dt|_{x=3}} = 19$$

$$\frac{d^2s_2(t)}{dt|_{x=2}} = 14 \wedge \frac{d^2s_2(t)}{dt|_{x=3}} = 18$$

## 1.2 Задача 3

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{12x + 210x^5}{(6x^2 + 35x^6)^3}$$

## 1.3 Задача 4

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d(\frac{1}{f'(x)})}{dy} = \frac{-f''(x)}{f'(x)^3} \Rightarrow \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{-\frac{f'''(x)}{f''(x)} \cdot (f'(x)^3 + 3f''(x)^2) \cdot f'(x)}{f'(x)^6}$$

# 2 Производная высших порядков

## 2.1 Задача 6

$$f^{(1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f^{(2)} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} (x^2 + 1)^k \cdot (2x)^{n-k}$$

$$(-2n + 4) \cdot (1 + x)^{-2n+6}$$

## 2.2 Задача 7

$$f^{(1)} = \frac{-3x^2 + 8x - 6}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} (x^2 - 2)^k \cdot (((x - 1)(x - 2))^{-1})^{n-k}$$

## 2.3 Задача 8

1.  $5(x(x-3))^{5x} \left( 5 \left( \ln(x(x-3)) + \frac{2x-3}{x-3} \right)^2 + \frac{2 + \frac{2(2x-3)}{x} - \frac{(2x-3)^2}{x(x-3)}}{x-3} \right)$
2.  $2(9x^2(\sin^2(3x) - \cos^2(3x)) - 12x \sin(3x) \cos(3x) + \cos^2(3x))$
3.  $\sqrt{\frac{3x+5}{2x+1}} \left( 3 - 2\frac{3x+5}{2x+1} \right) \frac{\left( \frac{3-2\frac{3x+5}{2x+1}}{4(3x+5)} - \frac{3}{2(3x+5)} - \frac{1}{2x+1} \right)}{3x+5}$
4.  $-\frac{x(x-2)\left(\frac{(2x-1)^2}{-x^2+x+2}+2\right)}{-x^2+x+2} - \frac{4(x-1)(2x-1)}{-x^2+x+2} + 2\ln(x^2-x-2)$

## 2.4 Задача 9

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{e^{ix+i\frac{\pi k}{2}} + e^{-ix-i\frac{\pi k}{2}}}{2i} \\ e^{ix} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{0.5i\pi})^k &= (1+i)^n = \operatorname{Im}(e^{ix}(1+i)^n) \\ (1+i)^n &= \sqrt{2}^n e^{0.25i\pi n} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{4}\right) \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right) &= 2^{0.5n} \sin\left(x + \frac{\pi n}{4}\right) \end{aligned}$$

## 2.5 Задача 10

$$y = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Левосторонняя производная равна правосторонней равна 0

$$y'' = \begin{cases} 6x, & x \geq 0 \\ -6x, & x < 0 \end{cases}$$

Левосторонняя производная равна правосторонней равна 0

$$y''' = \begin{cases} 6, & x \geq 0 \\ -6, & x < 0 \end{cases}$$

Левосторонняя производная не равна правосторонней -6 и 6 соответственно, следовательно производной в точке  $x=0$  не существует.

Таким образом существует производная максимум второго порядка.

### 3 Производные высших порядков от параметрически или неявно заданных функций

#### 3.1 Задача 11

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{2x - x^4}{x^6 + 2x^3 + 1} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3x^2}{x^6 + 2x^3 + 1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(3x^2)(x^6 + 2x^3 + 1)}{(x^6 + 2x^3 + 1)(2x - x^4)} = \frac{3x^2}{2x - x^4} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{6x^3 + 6}{x^6 - 4x^3 + 4}\end{aligned}$$

#### 3.2 Задача 12

$$d^2y = 6xdx^2$$

$$d^2y = 30t^4 dt^2$$

#### 3.3 Задача 13

$$3y - 3x + 3 + \arctan(y/x) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d(3y)}{dx}dx - \frac{d(3x)}{dx}dx + \frac{d(\arctan(y/x))}{dx}dx &= \frac{d(0)}{dx}dx \\ 3dy - 3dx + \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{d(\frac{y}{x})}{dx} &= 3(dy - dx) + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0 \\ \frac{dy}{dx} = a &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$3a - 3 + \frac{ax - y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$3\frac{dp}{dx} + \frac{d\frac{dp}{dx}(x^2 + y^2) - (xp - y)(2x + 2yp)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Подставляем, получаем:

$$d^2y = 0.375dx^2$$