Домашнее задание

По курсу: **Линейная Алгебра**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

5 декабря 2024 г.

Содержание

0.1 Задача 1

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(AB) = -1$$

Матрица обратима, столбцы B линейно независимы и строки A линейно независимы, значит можно искать оператор проекции на U вдоль W:

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B(AB)^{-1}Av = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -7 & -3 \\ 4 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$w = v - u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0.2 Задача 7

$$Ac = b, \quad A = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & -2 & -8 \\ 4 & -2 & 10 & 16 \end{array}\right]$$

Система имеет бесконечно много решений

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_{\text{proj}} = -u_1 + 2u_3$$

$$v_{\text{proj}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

0.3 Задача 8

$$AA^T = \begin{pmatrix} 15 & -12 & -6 \\ -12 & 15 & 21 \\ -6 & 21 & 51 \end{pmatrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$AA^T y = Av$$

$$Pv = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$v - Pv = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

0.4 Задача 9

$$Av = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 18 & 40 \end{pmatrix}$$

$$A^T(AA^T)^{-1}Av = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$p = A^T \cdot A^T(AA^T)^{-1}Av = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|p\| = \sqrt{14}$$

0.5 Задача 10

$$A^T Ax = A^T b$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -18 & -3 & 21 \\ -3 & 18 & -21 \\ 21 & -21 & 42 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0.6 Задача 11

$$u_1 = 1, \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 2$$

$$u_2 = x - \frac{\langle x, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = x, \quad \langle u_2, u_2 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3}, \quad \langle u_3, u_3 \rangle = \frac{8}{45}$$

$$u_4 = x^3 - 0.6x, \quad \langle u_4, u_4 \rangle = \frac{8}{175}$$

$$D = \sqrt{\|x^4\|^2 - \sum_{i=1}^{4} \frac{|\langle x^4, u_i \rangle|^2}{\|u_i\|^2}}$$

$$\|x^4\|^2 = \int_{-1}^{1} x^8 \, dx = \frac{2}{9}$$

$$D = \frac{8\sqrt{2}}{105}$$

0.7 Задача 12

$$\|Ax - b\|_2^2 = (Ax - b)^T (Ax - b) = x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b$$

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda x^T x$$

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|^2 = x^T (A^T A + \lambda I) x - 2b^T A x + b^T b$$

Т.к $b^T b = \mathrm{const}$, то необходимо найти приближенное решение.

$$f(x) = x^T (A^T A + \lambda I) x - 2b^T A x$$

0.8 Задача 13

$$\langle \pi(v), u \rangle = \langle v, \pi^*(u) \rangle \quad \forall v, u \in V.$$

Т.к π является проекцией,

$$\pi^*(v) = \mathrm{Proj}_{U^\perp}^{W^\perp}(v), \quad \forall v \in V.$$