Домашнее задание

По курсу: **Линейная Алгебра**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

16 декабря 2024 г.

Содержание

1 Сингулярное разложение (SVD)

1.1 Задача 4

Условие задачи:

$$S = AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{22}}{2} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ближайшая матрица по норме Фробениуса ранга 1:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \sqrt{11} V^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3+\sqrt{11}}{2} & \frac{-3+\sqrt{11}}{2} \\ -1 & \frac{-3+\sqrt{11}}{2} & \frac{3+\sqrt{11}}{2} \end{pmatrix}$$

1.2 Задача 5

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & -4 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 19 & -27 & -27 \\ -27 & 41 & 41 \\ -27 & 41 & 41 \end{pmatrix}$$

$$\det(AA^T - \lambda I) = (\lambda - 100)(\lambda - 1)\lambda = 0$$

$$V = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{\text{норм}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{22}}{11} & \frac{3\sqrt{11}}{11} & 0 \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

SVD:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{22}}{11} & \frac{3\sqrt{11}}{11} & 0 \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{22}}{11} & \frac{3\sqrt{11}}{11} & 0 \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & -4 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

1.3 Задача 7

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Можно подобрать B, просто очень внимательно посмотрев:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 Задача 10

$$\varphi : v \mapsto v\varphi^*$$

$$\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$$

$$\varphi(x) = Ax, \varphi^*(x) = Bx = A^T x \implies AA^T = A^T A$$

Пусть u - собственный вектор для A:

$$Au = \lambda u$$

$$AA^T u = A^T Au = \lambda A^T u$$

$$A^T u \text{ - собственный для } A$$

$$\varphi^*(u) \text{ - собственный для } \varphi \text{ с собственным значением } \lambda$$

S - собственное подпространство φ с собственным значением λ, выберем ортонормированный базис в S из собственных векторов.

Докажем для всех базисных векторов:
$\forall v_i : \varphi^* v_i = \lambda v_i$
Рассмотрим v_1 (для остальных доказывается аналогично)
$\varphi^* v_1$ - собственный вектор $\varphi^* v_1 \in S$
$\varphi^* v_1 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_s v_s$
Рассмотрим:
$\langle v_1, \varphi v_1 \rangle = \lambda \langle v_1, v_1 \rangle = \lambda$
$\langle \varphi v_1, v_1 \rangle = \beta_1 \implies \beta_1 = \lambda$
Рассмотрим $\forall i \neq 1$:
$\langle v_1, \varphi v_i \rangle = \lambda \langle v_i, v_1 \rangle = 0$
$\langle \varphi v_1, v_i \rangle = \beta_i \implies \beta_i = 0 \implies \varphi^* v_1 = \lambda v_1 \implies \forall v \in S : \varphi^* v = \lambda v$
Что и требовалось доказать.

1.5 Задача 11

U, S, V - Рон, Гарри и Гермиона соответственно.

$A = USV$

$\det(USV - \lambda I)$

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0.5 & 2.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$A' = USV^T = UQAQ^TV^T \implies A'A'^T = US^2U^T$

$$A'A'^T = \begin{pmatrix} 6.5 & -1.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A'A'^T - \lambda I) = 4\lambda^2 - 28\lambda + 4 = 0$$

$$\operatorname{spec}\left\{\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}}\right\}$$