Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

13 декабря 2024 г.

Содержание

1 Правило Лопиталя

1.1 Задача 4

$$\lim_{x\to 1}\frac{70x^9-70}{20x^4-20}=\lim_{x\to 1}\frac{630x^8}{80x^3}=\frac{63}{8}$$

1.2 Задача 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-1}-1}{3x^2}=\frac{-1}{3}$$

1.3 Задача 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(\cos(x)-x\sin(x))}{3\sin^2(x)\cos(x)}=\frac{1}{3}$$

1.4 Задача 7

Воспользуемся методом эквивалентных переходов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x^2}{x-x+\frac{x^3}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{x^3}=6$$

1.5 Задача 8

Воспользуемся методом эквивалентных переходов:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1-\frac{1}{2x^2}$$

$$\arcsin(1-y)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2y}$$

$$\lim x\to\infty x(\pi-2(0.5\pi-\frac{1}{x}))=x(2/x)=2$$

1.6 Задача 9

$$\frac{2x+cos(x)}{2x-cos(x)}$$

$$\frac{2+sin(x)}{2-sin(x)}$$

т.к на бесконечности sinx не определен, т.е осцилирует, в таком случае правило Лопеталя не работает, продолжая

1.7 Задача 10

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x)/x}{0.5x^{-0.5}}=0$$

1.8 Задача 11

как будто очев

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{a-1}}{bx^b}=\lim_{x\to\infty}\frac{a!}{b^a e^{bx}}=0$$

1.9 Задача 12

тоже очев

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}\ln(x)^{a-1}\frac{1}{bx^{b-1}}\lim_{x\to\infty}\frac{a!}{b}\frac{1}{x^b}=0$$

1.10 Задача 13

Предела не существует т.к показатель e^{-1/x^3} зависит от знака, т.е левостороний предел не равен правостороннему, разрыв второго рода.

1.11 Задача 14

Заметим, что числитель при данном пределе равен нулю, следовательно функция непрерывна в нуле. Рассмотрим первую производную:

$$\frac{de^{-1/x^2}}{dx}=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$$

$$\lim_{t\to\infty}|f'(x)|=|2t^3e^{-t^2}|=0$$

ММИ:

Предположим, что для всех производных до порядка n-1 включительно верно $f^{(k)}(0)=0$ Покажем, что $f^{(n)}(0)=0$

По определению:

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0}.$$

По предположению индукции:

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x}.$$

$$f^{(n-1)}(x)=P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}$$

где P_{n-1} - любой многочлен степени n-1

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to0}P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}\frac{1}{x}.$$

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to0}P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}\frac{1}{x}.$$

$$f^{(n)}(0)=\lim_{t\to\infty}P_{n-1}(t)e^{-t^2}t.$$

т.к экспонента убывает быстрее любой полиномиальной функции:

$$\lim_{t\to\infty}P_{n-1}(t)te^{-t^2}=0.$$

Следовательно

$$f^{(n)}(0)=0$$

1.12 Задача 15

будем искать предел экспоненты, в дальнейшем обратно Логарифмируем

$$\lim_{x\to\pi/2} \tan(x)\ln(\sin(x))$$

Сделаем замену $t = x - \pi/2$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(-\frac{t^2}{2}) = 0$$

следовательно предел 1, т.к мы искали предел экспоненты

1.13 Задача 16

Логарифмируем

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}$$

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot x}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$L = e^{\ln L} = e^1 = e$$

1.14 Задача 17

Используем разложение Тейлора около а до второго порядка
числитель:

$$\begin{aligned}&\left[f(a) + 3hf'(a) + \frac{9h^2}{2}f''(a) + o(h^2)\right]\\ &\quad - 3\left[f(a) + 2hf'(a) + 2h^2 f''(a) + o(h^2)\right]\\ &\quad + 3\left[f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2)\right]\\ &\quad - f(a) = o(h^2)\end{aligned}$$

Тогда:

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$$

1.15 Задача 18

$$\text{Sector}(QPR) = \frac{r^2\theta}{2} \wedge B(\theta) = \frac{1}{2}(r)(r)\sin\theta = \frac{r^2}{2}\sin\theta$$

$$A(\theta) = \text{площадь сектора} - \text{площадь треугольника.}$$

$$\text{Площадь сектора} = \frac{1}{2}R^2\theta.$$

$$\text{Площадь треугольника} = \frac{1}{2}R^2\sin(\theta).$$

$$A(\theta) = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}R^2\sin(\theta).$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2}R^2\sin(\theta).$$

$$\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \frac{\frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}R^2\sin(\theta)}{\frac{1}{2}R^2\sin(\theta)}$$

$$\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \frac{\theta - \sin(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\theta^2}{6}}{1} = \frac{1}{3}.$$