Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный Университет 5 декабря 2024 г.

Содержание

1 Производная второго порядка

1.1 Задача 2

Решение:

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = 3t^2 + t + 1 \wedge \frac{ds_2(t)}{dt} = 2t^2 + 6t - 5$$

$$3t^2 + t + 1 = 2t^2 + 6t - 5 \Rightarrow t = 2 \wedge t = 3$$

$$\frac{d^2 s_1(t)}{dt_{|x=2}} = 13 \wedge \frac{d^2 s_1(t)}{dt_{|x=3}} = 19$$

$$\frac{d^2 s_2(t)}{dt_{|x=2}} = 14 \wedge \frac{d^2 s_2(t)}{dt_{|x=3}} = 18$$

1.2 Задача 3

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{12x + 210x^5}{(6x^2 + 35x^6)^3}$$

1.3 Задача 4

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d(\frac{1}{f'x})}{dy} = \frac{-f''(x)}{f'(x)^3} \Rightarrow \frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{-\frac{f'''(x)}{f''(x)} \cdot (f'(x)^3 + 3f''(x)^2) \cdot f'(x)}{f'(x)^6}$$

2 Производная высших порядков

2.1 Задача 6

$$f^{(1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f^{(2)} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (x^2 + 1)^k \cdot (2x)^{n-k}$$

$$(-2n + 4) \cdot (1 + x)^{-2n+6}$$

2.2 Задача 7

$$f^{(1)} = \frac{-3x^2 + 8x - 6}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (x^2 - 2)^k \cdot (((x - 1)(x - 2))^{-}1)^{n-k}$$

2.3 Задача 8

1. $5(x(x-3))^{5x}\left(5\left(\ln(x(x-3))+\frac{2x-3}{x-3}\right)^2+\frac{2+\frac{2(2x-3)}{x}-\frac{(2x-3)^2}{x(x-3)}}{x-3}\right)$
2. $2\left(9x^2(\sin^2(3x)-\cos^2(3x))-12x\sin(3x)\cos(3x)+\cos^2(3x)\right)$
3. $\sqrt{\frac{3x+5}{2x+1}}\left(3-2\frac{3x+5}{2x+1}\right)\frac{\left(\frac{3-2\frac{3x+5}{2x+1}}{4(3x+5)}-\frac{3}{2(3x+5)}-\frac{1}{2x+1}\right)}{3x+5}$
4. $-\frac{x(x-2)\left(\frac{(2x-1)^2}{-x^2+x+2}+2\right)}{-x^2+x+2}-\frac{4(x-1)(2x-1)}{-x^2+x+2}+2\ln(x^2-x-2)$

2.4 Задача 9

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}sin(x+\frac{\pi k}{2})$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{ix+i\frac{\pi k}{2}}+e^{-ix-i\frac{\pi k}{2}}}{2i}$$

$$e^{ix}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{0.5i\pi})^k=(1+i)^n=Im(e^{ix}(1+i)^n)$$

$$(1+i)^n=\sqrt{2}^n e^{0.25i\pi n}=sin(x+\frac{\pi n}{4})$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}sin(x+\frac{\pi k}{2})=2^{0.5n}sin(x+\frac{\pi n}{4})$$

2.5 Задача 10

$$y=\begin{cases}x^3,\ x\geq 0\\ -x^3,\ x<0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}3x^2,\ x\geq 0\\ -3x^2,\ x<0\end{cases}$$

Левосторонняя производная равна правосторонней равна 0

$$y''=\begin{cases}6x,\ x\geq 0\\ -6x,\ x<0\end{cases}$$

Левосторонняя производная равна правосторонней равна 0

$$y'''=\begin{cases}6,\ x\geq 0\\ -6,\ x<0\end{cases}$$

Левосторонняя производная не равна правосторонней -6 и 6 соответственно, следовательно производной в точке x=0 не существует.

Таким образом существует производная максимум второго порядка.

3 Производные высших порядков от параметрически или неявно заданных фукций

3.1 Задача 11

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x - x^4}{x^6 + 2x^3 + 1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3x^2}{x^6 + 2x^3 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2)(x^6 + 2x^3 + 1)}{(x^6 + 2x^3 + 1)(2x - x^4)} = \frac{3x^2}{2x - x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^3 + 6}{x^6 - 4x^3 + 4}$$

3.2 Задача 12

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3e^{-2x} - 12x^2e^{-2*x} + 6xe^{-2*x}$$

3.3 Задача 13

$$d^2y = 6xdx^2$$

$$d^2y = 30t^4dt^2$$

3.4 Задача 14

$$3y - 3x + 3 + \arctan(y/x) = 0$$

$$\frac{d(3y)}{dx}dx - \frac{d(3x)}{dx}dx + \frac{d(\arctan(y/x))}{dx}dx = \frac{d(0)}{dx}dx$$

$$3dy - 3dx + \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{d(\frac{y}{x})}{dx} = 3(dy - dx) + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = a = \frac{3}{4}$$

$$3a - 3 + \frac{ax - y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$3\frac{dp}{dx} + \frac{d\frac{dp}{dx}(x^2 + y^2) - (xp - y)(2x + 2yp)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Подставляем, получаем:

$$d^2y = 0.375dx^2$$

3.5 Задача 15

1. $\frac{dy}{dx|_{x=0.25}} = 4 \cdot 0.25 - 1 = 0$ - является

2. $\frac{dy}{dx|_{x=\arccos(4/5)}} = 3\cos(\arccos(4/5)) - 4\sin(\arccos(4/5)) = 0$

3. $y(x) = \begin{cases} 2x-2, \ x \geq 2 \\ 2x, \ 0 \leq x < 2 \\ 0, \ x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \begin{cases} 2, \ x \geq 2 \\ 2, \ 0 \leq x < 2 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$

чтд

4 Теорема Ролля

4.1 Задача 18

Т.к Теорема Ролля требует того, чтобы фукнция на этом отрезке была непрерывна и дифференцируема, а тангенс имеет разрыв в точке $\pi/2$

4.2 Задача 19

Согласно условию, мы можем выбрать такие m, k, что будет выполнятся $0 \leq m < k \leq n \Rightarrow f(0) = f(m) = f(k) = f(n)$ согласно условию задачи. Тогда зная, что она определена, и дифференцируема, значение фукнции f в любой точке на отрезке $=$ 0, тогда мы можем повторить процесс до производной n ого порядка. На последнем шаге мы получаем такую точку ξ что $f^{(n)}(\xi) = 0$

5 Теорема Лагранжа

5.1 Задача 23

Функция f, дифференцируемая на интервале (a, b), не может иметь разрыв второго рода у производной f', поскольку дифференцируемость f гарантирует существование и конечность производной в каждой точке интервала. Согласно теореме Лагранжа, значение $f'(x)$ между любыми двумя точками выражается через среднее изменение функции, что исключает разрывы второго рода.

Вывод: $f'(x)$ непрерывна или, в худшем случае, имеет разрывы первого рода, но не второго рода.

6 Первое достаточное условие экстремума

6.1 Задача 28

Т.к любой равнобедренный треугольник можно вписать в окружность, также третью сторону можно выразить используя теорему косинусов + можно выразить сторону через радиус, тогда

$$P = 4R\cos(\alpha) + 2R\sin(2\alpha)$$

$$\frac{dP}{d\alpha} = 2(2\sin(2\alpha) + 2\cos(\alpha))$$

$$2(2\sin(2\alpha) + 2\cos(\alpha)) \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} = 60\deg$$

Следовательно треугольник равносторонний