

Домашнее задание

По курсу: Дискретная математика

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

11 марта 2025 г.

Содержание

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Свойства сочетаний. Сочетания с повторениями. Числа Каталана | 2 |
| 1.1 | Задача 1 | 2 |
| 1.2 | Задача 2 | 2 |
| 1.3 | Задача 3 | 2 |
| 1.4 | Задача 4 | 3 |
| 1.5 | Задача 5 | 3 |
| 1.6 | Задача 6 | 3 |
| 1.7 | Задача 7 | 3 |
| 1.8 | Задача 8 | 4 |
| 1.9 | Задача 10 | 5 |
| 1.10 | Задача 11 | 5 |

1 Свойства сочетаний. Сочетания с повторениями. Числа Каталана

1.1 Задача 1

1. Порядок неважен, т.е мы однозначно можем восстановить необходимое число из множества цифр длиной 5 (любое множество цифр может быть неубывающим/невозрастающим).
2. Тогда задача сводится к тому, чтобы найти Количество сочетаний с повторениями из 10 цифр по 5, для пятизначного числа.
3. Каждая цифра может быть 5 раз, за исключением 0, он может быть 4 раза.
4. Всего сочетаний повторениями $\binom{14}{5}$
5. Т.к одно множество будет $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ просто вычтем 1
6. Тогда ответ будет $\frac{14!}{5!9!} - 1 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 1 = 2001$

1.2 Задача 2

1. Рассмотрим первую связку, для нее возможно $\binom{60}{15}$ вариантов сочетания грибов.
2. Рассмотрим вторую связку, для нее возможно $\binom{45}{15}$ вариантов сочетания грибов.
3. Рассмотрим третью связку, для нее возможно $\binom{30}{15}$ вариантов сочетания грибов.
4. Рассмотрим четвертую связку, для нее возможно $\binom{15}{15} = 1$ вариантов сочетания грибов.
5. Тогда нам необходимы такие варианты где нам необходимо выбрать все связки.
6. Однако в нашем случае связки считаются упорядоченными т.к мы неявно задаём порядок рассматривая сначала первую связку, затем вторую и т.п
7. Таким образом $n = \frac{\binom{60}{15} \cdot \binom{45}{15} \cdot \binom{30}{15}}{4!}$

1.3 Задача 3

1. Между каждой парой выбранных книг должно быть не менее 3х книг. Задача о барьерах.
2. Для 10 выбранных книг у нас 9 промежутков, каждый занимает минимум 3 места
3. $3 \cdot 9$ книг занято, можем оперировать только $50 - 3 \cdot 9$. Всего 10 интересных книг. Тогда $\binom{23}{10}$ при этом условии минимум 3 места уже учтено.

1.4 Задача 4

$$\sum_{k=0}^m \binom{k}{n} \cdot \binom{m-k}{n}$$

$$\begin{aligned} \binom{k}{n} \cdot \binom{m-k}{n} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(m-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \binom{m}{n} \cdot \binom{k}{m} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{k}{n} \cdot \binom{m-k}{n} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{n} \cdot \binom{k}{m} = \binom{m}{n} \sum_{k=0}^m \binom{k}{m} = \binom{m}{n} \cdot 2^m$$

1.5 Задача 5

$$\left(\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \right)^2 = ((1+1)^n)^2 = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{2n}$$

1.6 Задача 6

1. $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. Функция строго возрастает при $n \geq k$
3. $\forall k C(n, k) = m$ т.е. имеет не более одного решения n для произвольного m
4. Рассмотрим $k > m$. Минимальное значение C достигается при $n=k$ и равно 1. Однако если мы возьмем $n=k+1$ то $C=k+1$. Если $k+1 > m$ то для всех $n \geq k+1$ $C(n, k) \geq k+1 > m$
5. Таким образом при $k \geq m$ нет решений
6. Таким образом следует, что k может принимать значения только от 1 до $m-1$. Для каждого такого k существует не более одного m удовлетворяющее уравнению $C(n, k) = m$
7. Следовательно общее кол-во пар (n, k) для которых $C(n, k) = m$ не превышает $m-1$ что конечно.

1.7 Задача 7

1. Воспользуемся теоремой Люка: бином нечетен тогда и только тогда, когда двоичные цифры в двоичном разложении n являются подмножеством битов m
2. Т.е. каждый бит k не превосходит соответствующий бит n в двоичной системе.
3. если $n = \sum_{i=0}^m a_i 2^i$ $k = \sum_{i=0}^m b_i 2^i$ то $C(n, k)$ нечетен тогда и только тогда, когда $\forall i b_i \leq a_i$
4. Если $a_i = 1 \Rightarrow b_i = 0 \vee b_i = 1$
5. Если $a_i = 0 \Rightarrow b_i = 0$
6. Тогда для каждого $a_i = 1$ есть 2 варианта выбора b_i , а для $a_i = 0$ только один.

7. Тогда общее количество нечетных $C(n, k) = \prod_{i=0}^m (1 + a_i) = 2^{\text{Кол-во единиц в } n}$
8. Тогда в нашем случае $2025_{10} = 11111101001_2$
9. Общее количество нечетных: $2^8 = 256$
10. Общее количество четных - $2025 + 1 - 256 = 1770 + 1$ - сдвиг по индексу.
11. Задача гроб

1.8 Задача 8

1. У нас есть n людей k людей имеют 50р, 50 рублей стоимость кино, если дают купюру в 100 рублей - мы даём 50 рублей сдачи т.е минус 50 рублей из кассы.
2. Далее у нас есть купюра в 100 рублей, если мы разменяли, то это тупо мертвый груз с которым мы ничего не можем делать (100 рублей осталось)
3. Тогда, согласно условию, у нас есть возможность добавить 50р в кассу, убавить кассу на 50р при этом добавить 100 р. при обоих случаях у нас тратится билет. Всего n билетов
4. Можем просто убрать 100р, роли не играет. Т.е остались варианты 50 р или -50 рублей сделать, пусть будет +1 и -1 соответственно
5. Согласно условию количество людей с 100 рублями, не превышает количество с 50 рублями. $k \geq n - k$
6. Представим координатную ось, где ось ординат - количество 50 рублевых купюр, ось абсцисс - количество людей.
7. тогда минимальной допустимой точкой будет $k = n - k \Rightarrow 2k - n = 0$, где мы получаем, что каждому 50 рублёвому соответствует 100 рублёвый, чтобы они друг-друга компенсировали и в сумме в кассе было 0.
8. Пойдём из точки $(0, 0)$ в точку $(n, 2k-n)$, существует способы $(+1, -1)$ $(+1, +1)$ человек с 50 рублями и человек со 100 рублями соответственно.
9. Всего будет $n-k$ способов использовать -1 и k способов использовать +1, тогда общее количество перемещений - $k + n - k = n$
10. Тогда общим количеством перемещений будет $\binom{n}{k}$ нужно выбрать k позиций для $(+1, +1)$ и это будет тоже самое что и $\binom{n}{n-k}$
11. Теперь посчитаем количество плохих траекторий. Для этого мы построим биекцию юмежду плохими траекториями, ведущими из $(0, 0)$ в $(n, 2k-n)$ и произвольными траекториями.
12. Далее мы отражаем относительно прямой $y = -1$ т.к в этой точке мы получаем уже достаточное условие того, что траектория становится неправильной ($2k-n < 0$)
13. Получаем точку $(n, -n-k-2)$ и добраться до нее можно сделав $n+1$ шаг k способами
14. Количество хороших траекторий - разница всех и плохих - $(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1})k!(n-k)!$ т.к можно разместить людей еще различно, а не конкретно скобочки

1.9 Задача 10

1. На любом начальном отрезке строки количество символов (не меньше, чем количество символов)
2. Ось ординат - количество открытых скобочек, абсцисс - общее количество скобочек
3. Будем рассматривать на координатной плоскости из точки $(0, 0)$ в $(2n, 0)$ способами $(+1, +1)$ $(+1, -1)$ если скобка открывающая и закрывающая соответственно.
4. Весь путь $2n$ шагов, Если количество открывающих скобок m , то конечная точка будет на высоте $k=2m-2n$, $k \geq 0 \Rightarrow m \geq n$
5. Для каждого пути, нарушающего условие(опускается ниже оси x), существует соответствующий путь, отраженный относительно уровня -1 . Количество таких плохих путей с m открывающими скобками равно $\binom{2n}{m-1}$
6. $\forall m \geq n$ количество допустимых путей с m открывающими скобками равно $\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}$
7. Суммируем $\sum_{m=n}^{2n} \binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1} = \binom{2n}{2n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n}$

1.10 Задача 11

1. Это та же самая задача о количестве правильных скобочных последовательностей. Только теперь нам без разницы, $(($ или $))$ у нас т.к это одно и то же
2. Тогда обозначим за k - красные b - черные
3. Определим пару убирающейся, если она выглядит следующим образом: $rr \vee bb$
4. Тогда количество сочетаний тех, которые нас интересуют($rr \vee bb$) равно количеству сочетаний $rb \vee br$ т.к всего можно из двух букв сделать 4 комбинации и они делятся строго на 2 группы.
5. Это задача на правильную скобочную последовательность. пустая строка - псп. Если строка S это ПСП - rSb или bSr это также ПСП. если S и T это ПСП, то их конкатенация также ПСП.
6. Тогда воспользуемся числом Каталана и получим, что если цвет был одним и тем же, то $\frac{1}{27} \binom{26}{52}$
7. Тогда для двух цветов $\frac{1}{27} \binom{26}{52}^2$