Домашнее задание

По курсу: **Дискретная математика**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

22 февраля 2025 г.

Содержание

1 Примеры и контрпримеры, доказательство от противного

ДИСКЛЕЙМЕР: Мне очень нужно попасть на красно-черный уровень, для этого нужно 8 баллов минимум набрать в течение 3х недель, не придирайтесь строго пожалуйста:) Я попал сюда потому что пропустил тест:(

1.1 Задача 1

1. Предположим, что набора из трех бабочек где все цвета и все размеры не существует
2. Построим таблицу 3 на 3, где строки - цвета, столбцы - размеры
3. Тогда согласно условию задачи каждый столбец и каждая строка непусты
4. Если бы не существовал набор из трёх бабочек, попарно различающихся по цвету и размеру, то невозможно было бы выбрать по одной бабочке из каждой строки и каждого столбца, что противоречит принципу Дирихле
5. т.к предположение ведет к противоречию, то следовательно существуют три абсолютно различные бабочки.

1.2 Задача 2

1. Предположим, что студенты решили сговориться и решили выбрать следующим образом числа: $23, 23, 22, 22, 22, 22, 22, 22$
2. Если лень считать - $2 \cdot 23 + 7 \cdot 22 = 200$
3. Тогда рассмотрим идеальный вариант для Ильи: Илья выбирает максимальные числа для максимизации выигрыша.
4. В таком случае он выберет 23, 23, 22, 22.
5. Сумма таких чисел - 90, что меньше, чем 100
6. Следовательно Илья не всегда может выбрать из них 4 числа так, что их сумма больше 100.

1.3 Задача 3

1. Предположим, что невозможно оставить коробки с одинаковым числом посылок (больше или равно 100 в сумме)
2. Рассмотрим два случая, все коробки содержат >100 посылок и <100 посылок:
3. Первый случай: больше или равно 100 посылок, если бы существовала коробка с m меньше чем 100 посылками, то можно было бы собрать несколько таких коробок с одинаковым количеством посылок m, чтобы их суммарное количество посылок было больше или равно 100. Например, для m=50, достаточно 2 коробок. Это противоречит предположению.

4. Второй случай: кол-во коробок меньше 100. Тогда по принципу дирихле найдется хотя бы 2 коробки с одинаковым m.Если $m \cdot k \geq 100$ для некоторого k, то можно составить k коробок с m, что противоречит предположению.

5. Из двух случаев следует, что коробок должно быть меньше или равно 20, т.к $\frac{2000}{100} = 20$ но тогда все 20 коробок содержат 100 посылок, оставив их, получим требуемоую ситуацию, что противоречит исходному предположению.

6. Значит такая ситуация всегда достижима

1.4 Задача 4

1. Предположим, что такое правда существует, рассмотрим верхний левый угол квадрата

2. Тогда согласно условию, существует закрашенная клетка под ним и справа от него.

3. Если (1,1) закрашена, её соседи (1,2) и (2,1) также должны быть закрашены (так как у угловой клетки только два соседа).

4. Если (1,1) не закрашена, её соседи (1,2) и (2,1) обязаны быть закрашены, чтобы суммарно дать два закрашенных соседа для (1,1).

5. Для клетки (1,2): она закрашена, поэтому у неё должно быть ровно два закрашенных соседа. Уже есть (2,1), значит, ещё один сосед (например, (1,3)) должен быть закрашен.

6. Для клетки (2,1): аналогично, закрашиваем (3,1), чтобы у (2,1) было два закрашенных соседа.

7. Продолжая эту логику, вдоль первой строки и первого столбца закрашиваются клетки через одну: (1,2), (1,4), (1,6), (1,8) и (2,1), (4,1), (6,1), (8,1).

8. На пересечении закрашенных строк и столбцов возникает клетка (2,2). Она должна быть закрашена (так как соседствует с (1,2) и (2,1)), но у неё уже два закрашенных соседа. Если (2,2) закрашена, то у неё должно быть ровно два закрашенных соседа. Однако её соседи: (1,2), (2,1), (3,2), (2,3). Из них уже два закрашены ((1,2) и (2,1)), поэтому (3,2) и (2,3) не могут быть закрашены. Это нарушает условия для клеток (3,2) и (2,3), которые теперь не смогут иметь по два закрашенных соседа.

9. Аналогичные рассуждения применяем к правому нижнему углу (9,9). Если закрасить клетки (9,8) и (8,9), то в клетке (8,8) возникнет противоречие: она должна быть закрашена (как пересечение строки и столбца), но её соседи (8,7), (7,8), (9,8), (8,9) уже включают два закрашенных, что делает невозможным выполнение условия.

10. В квадрате 9×9 количество клеток в строке и столбце нечётное. При попытке закрасить клетки через одну (например, чётные позиции) в последней клетке строки/столбца (позиция 9) возникает конфликт: она должна быть закрашена, но её соседи уже нарушают условие.

11. Требуемая раскраска не существует.

1.5 Задача 5

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0 \land \forall i(a_i + a_{i+1} + a_{i+2}) > 0$
2. Суммируем все такие подпоследовательности, получим, что a_1 и a_{20} встречаются по одному разу, a_2, a_{19} встречаются 2 раза, все остальные - по 3 раза.
3. $a_1 + a_2 + 3(a_3 + ... + a_{18}) + 2a_{19} + a_{20} > 0$
4. Заметим, что S входит в полученное равенство, только с меньшими коэффициентами, в таком случае невозможно, чтобы сумма была отрицательной (возникает противоречие)

1.6 Задача 6

Хорошо, минимизируем количество связей красный-красный, в таком случае будет последовательность вида красный-синий, в такой расстановке у каждого синего будет 2 соседа красных, а у каждого красного - два синих(тут должен был быть рисунок, но мне лень). В таком случае утверждение неверно.

1.7 Задача 7

1. Предположим обратное - не существует друзей которые подарили друг другу подарки
2. Рассмотрим множество неупорядоченных пар друзей, его мощность - $\binom{2}{10} = 45$
3. Рассмотрим количество подарков, каждый по 5, значит всего $5 \cdot 10 = 50$
4. т.к количество подарков больше, чем множество неупорядоченных пар друзей, то существуют такие друзья, которые подарили друг другу (по принципу Дирихле).
5. Возникает противоречие, а значит существуют такие друзья, что дарят друг другу подарки.

1.8 Задача 8

1. Предплоложим обратное, все группы содержат не более 14 студентов, тогда минимальное количество групп - 5.
2. Из каждой группы(14 человек) можно выбрать не более 2х студентов, чтобы избежать трех из одной группы. т.е 10 студентов.
3. Таким образом существует набор из 10 студентов, где ни в одной группе нет трёх человек, что противоречит условию задачи.