

Домашнее задание

По курсу: Математический Анализ

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

9 марта 2025 г.

Содержание

1	Что такое первообразная и неопределенный интеграл	2
1.1	Задача 1	2
1.2	Задача 2	2
1.3	Задача 3	2
1.4	Задача 4	2
1.5	Задача 6	2
1.6	Задача 7	3
1.7	Задача 8	3
1.8	Задача 9	3
1.9	Задача 10	3
1.10	Задача 13	4
1.11	Задача 15	4
1.12	Задача 19	4
1.13	Задача 20	5

1 Что такое первообразная и неопределенный интеграл

1.1 Задача 1

1. $\int (x(x(x)^{0.5})^{0.5})^{0.5} dx = \int x^{\frac{7}{8}} = \frac{8x^{\frac{15}{8}}}{15} +$
2. $\int (4e)^x dx = \frac{(4e)^x}{2\ln(2)+1} +$
3. $\int \frac{1}{5^x} + \frac{1}{2^x} dx = \int 5^{-x} + \int 2^{-x} = -\frac{2^{-x}}{\ln(2)} - \frac{5^{-x}}{\ln(5)} +$

1.2 Задача 2

1. $\int \cot^2 x dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx$
2. $\int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx = -\cot x - x +$

1.3 Задача 3

1. $2\ln(|x|) - \frac{3}{2}\ln(|x^2|) = 2\ln(-x) + \frac{3}{x} + C$
2. В точке $(-1, 1)$: $4 = C$
3. $F(x) = 2\ln(-x) + \frac{3}{x} + 4$

1.4 Задача 4

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x < -12x, \\ -1 \leq x < 12, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} -2x + C_1, & x < -1x^2 + C_2, \\ -1 \leq x < 12x + C_3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Необходимо обеспечить непрерывность в точках $-1, 1$

$$F(x) = \begin{cases} -2x + C, & x < -1x^2 + 1 + C, \\ -1 \leq x < 12x + C, & x \geq 1 \end{cases}$$

1.5 Задача 6

1. $\int \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx$
2. $u(x) = 5x^3 + 1$
3. $du = 15x^2 dx \Leftrightarrow x^2 dx = \frac{1}{15} du$
4. $\int \sqrt[3]{5x^3 + 1} dx = \int \sqrt[3]{u} \frac{1}{15} du = \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \cdot 15} + C$

1.6 Задача 7

1. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$
2. $(2x^2 - 5x + 3.125) + 3.875$
3. $(\sqrt{2}x - 1.25\sqrt{2})^2 + 3.875$
4. $u = \sqrt{2}x - 1.25\sqrt{2}$
5. $du = \sqrt{2}dx$
6. $\int \frac{du}{2u^2+7.75}$
7. $\frac{1}{\sqrt{7.75}} \arctan \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{7.75}} + C$

1.7 Задача 8

1. $\int \frac{x dx}{(1-x)^{12}}$
2. $u(x) = 1 - x$
3. $du = -dx$
4. $\int \frac{u-1}{u^{12}} du = \int \frac{1}{u^{11}} - \int \frac{1}{u^{12}}$
5. $\frac{1}{11(1-x)^{11}} - \frac{1}{10(1-x)^{10}} + C$

1.8 Задача 9

1. $\int \frac{\ln(x)^2}{x} dx$
2. $u(x) = \ln(x)$
3. $x = e^{u(x)}$
4. $du = \frac{1}{x} dx$
5. $\int u^2 du = \frac{\ln(x)^3}{3} + C$

1.9 Задача 10

1. $\int \frac{\ln(4x) - \ln(2)}{x \ln(4x)}$
2. $\ln(4x) = u$
3. $du = \frac{1}{x} dx$
4. $x du = dx$
5. $\int \frac{u - \ln(2)}{u} = \int 1 - \frac{\ln(2)}{u}$
6. $\ln(4x) - \ln(2) \ln(\ln(4x)) + C$

1.10 Задача 13

1. $x = tg(t)$
2. $dx = \sec^2 t dt$
3. $\int \sqrt{1 + tg(t)^2} \sec^2 t dt = \int |\sec(t)| \sec^2(t) dt$
4. Пусть $t \in [-0.5\pi, 0.5\pi]$
5. $\int \sec^3(t) dt = \sec(t) \tan(t) - \int \tan(t) \sec(t) \tan(t) dt$
6. Далее используя формулу интегрирования по частям
7. $\sec(t) \tan(t) - \int \sec(t)(\sec(t)^2 - 1)) = \sec(t) \tan(t) - \int \sec(t)^3 dt + \int \sec(t) dt$
8. $0.5(\sec(t) \tan(t) + \ln(|\sec(t) + \tan(t)|))$
9. $\sec(t) = \sqrt{x^2 + 1}$
10. $0.5(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(|\sqrt{x^2 + 1} + x|)) + C$

1.11 Задача 15

1. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx$
2. заменим x на $3 \sin(t)$ т.к функция ограничена
3. $\int \frac{\sqrt{(9-9\sin(t)^2)^3}}{3^6 \sin(t)^6} dx$
4. $\int \frac{\sqrt{(9\cos(t))^6}}{\sin(t)^6} dx$
5. $\int \frac{1}{9} \cot^4(t) \operatorname{cosec}^2(t) dt$
6. $u = \cot(t)$
7. $du = -\operatorname{cosec}(t)^2 dt$
8. $\frac{1}{9} \int u^4 du = -\frac{u^5}{45} + C = -\frac{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}{45x^5} + C$

1.12 Задача 19

1. $\int \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) dx$
2. $u = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$
3. $dv = dx \Rightarrow v = x$
4. $x \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx \quad t = 4 + x^2 \quad dt = 2x dx$
5. $\int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = 2t^{0.5} + C = \sqrt{4 + x^2}$
6. $x \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) - \sqrt{4 + x^2} + C$

1.13 Задача 20

1. $\int e^x \cos(x) dx$ $u = e^x$ $dv = \cos(x) dx$

2. $e^x = u$ $dv = -\sin(x) dx$

3. $e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$

4. $\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$

5. $\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$

6. $\int e^x \cos(x) dx = 0.5e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$