Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

10 апреля 2025 г.

Содержание

1 Примеры нахождения суммы ряда

1.1 Задача 1

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} = \lim_{n\to\infty} 0.5 - \frac{1}{4n+2} = 0.5$

1.2 Задача 2

1.3 Задача 3

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$
2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \cdots = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{k} = 1$

1.4 Задача 4

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 - \frac{2}{k(k+1)}) = \ln(k-1) - \ln(k) - \ln(k+1) + \ln(k+2) = -\ln(3)$

1.5 Задача 5

1. $\sum_{1}^{\infty} \sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k} = \sqrt{1} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{3} + 2\sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{1+n} - \sqrt{2+n}} = 1 - \sqrt{2}$

1.6 Задача 6

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(k^2 + 3 + \frac{2}{k^2})$
2. $\lim_{k\to\infty} \ln(k^2 + 3 + \frac{2}{k^2}) = \infty$ - таким образом не соответствует необходимому условию сходимости (предел к бесконечности не равен нулю, следовательно сумма бесконечно суммируется)

2 Критерий Коши сходимости числового ряда

2.1 Задача 7

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} | \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}|$
2. Пусть $n = p = N \Rightarrow | \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}| \geq |\frac{1}{\sqrt{2N(2N+1)}}| = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{2}{N}}} < 0.5$
   При N $=$ 1 и $\varepsilon = \frac{1}{3}$ неравенство не выполняется, следовательно расходится.

2.2 Задача 8

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} | \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k}| < \varepsilon$
2. $| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k}| \leq | \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|$
3. Таким образом, т.к геометрический ряд, показатель которого меньше 1 сходится, то наша искомая функция сходится аболютно, а значит, ряд сходится.

2.3 Задача 9

1. $|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)+\sin(n)}{n^2}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)+1}{n^2}$

2. Сделаем интегральный тест: $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)+1}{x^2} dx = (-\frac{\ln(n)+2}{n})|_1^{\infty} = 2$ - сходится, значит и наш ряд сходится.

2.4 Задача 10

1. $|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{11+5(-1)^k}{2^{k+4}}| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{2^{k+4}}$

2. Воспользуемся интегральным тестом: $16 \int_1^{\infty} \frac{1}{2^{k+4}} = \frac{1}{\ln(4)}$

3. Сходится абсолютно, значит и наш искомый интеграл сходится

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2}$ - не сходится т.к одно из слагаемых будет расходится

2.5 Задача 11

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^5+e^k}{4^k+\ln(k+1)^3} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^5+e^k}{4^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^5}{4^k} + \frac{e^k}{4^k}$ - сходится т.к две суммы сходятся

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3+7k+3}{\sqrt{k^8+6k^2+1}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3}{k^4}$ Расходится.

2.6 Задача 12

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - \ln(1+k)^{-\frac{1}{k}})$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - e^{-\frac{1}{k}\ln(\ln(1+k))})$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln(k))}{k}$ - расходится при интегральной оценке.

2.7 Задача 13

1. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \cos(\frac{\pi}{k^{1.5}})$

2. Хочется попробовать через признак Д‘Аламбера

3. $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1-\cos(\frac{\pi}{(k+1)^{1.5}})}{1-\cos(\frac{\pi}{k^{1.5}})}$

4. Тейлором его около 0

5. $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\pi^2}{2(k+1)^3} - \frac{\pi^4}{24(k+1)^6}}{1-\frac{\pi^2}{2k^3}+\frac{\pi^4}{24k^6}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{(k+1)} = 1$ - очень грустно

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2k^3} < \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ - сходится как известный p-ряд. Получается, что Даламбэро критерьеро не помог