Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

8 февраля 2025 г.

Содержание

1 Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$

1.1 Задача 1

1. Граничные точки — такая точка, что

$$(\forall \varepsilon > 0) \begin{cases} U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset, \\ U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset. \end{cases}$$

   Тоесть простыми словами, окрестность точки или сама точка имеет пересечение со всем множеством A и окрестность имеет пересечение с надмножеством A.

2. Предельная точка — $(\forall \varepsilon > 0) U_\varepsilon \cap (A \setminus \{x\} \neq \emptyset)$

3. Точки прикосновения - $(\forall \varepsilon > 0) U_\varepsilon \cap A \neq \emptyset$

4. Внутренняя точка - $(\exists \varepsilon > 0) U_\varepsilon(x) \subset A$

5. Граничные точки E: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, [8; 11]\}$

6. Предельные точки E: $\{E \setminus (\{2\} \cup \{5\})\}$

7. Точки прикосновения E: E

8. Внутренние точки - $(0; 1) \cup (3; 4)$

1.2 Задача 2

Предельная точка - $(\forall \varepsilon > 0)(U_\varepsilon \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset)$

Тогда согласно условию задачи $\forall x \in E \exists c : (\forall \varepsilon > 0)(U_\varepsilon \cap A \setminus \{c\} \neq \emptyset)$ что противоречит само себе т.к множество изолированно, т.е $c : U_\varepsilon \cap A = \emptyset$

1.3 Задача 3

Множество называется открытым, если все его точки внутренние т.е для всех точек существует окрестность в которой они полностью лежат в множестве.

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения т.е содержит все такие точки что пересечение их окрестностей с рассматриваемым множеством ненулевое.

Да, $[0; 1)$

1.4 Задача 4

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения т.е содержит все такие точки, что пересечение их окрестности с рассматриваемым множеством ненулевое.

Граница множества - такая точка, что

$$(\forall \varepsilon > 0) \begin{cases} U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset, \\ U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset. \end{cases}$$

1. Предположим, что верна формула $\delta E = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E}$

2. Пусть $x \in \delta E$ тогда по определению границы множества выполняется. Также $x \in \overline{E} \wedge x \in \overline{X \setminus E}$

3. Обратно пусть $x \in \overline{E} \cap \overline{X \setminus E}$ Тогда каждая окрестность U точки x пересекаются с E и пересекается с $X \setminus E$. Также удовлетворяет

4. Таким образом верно.

1.5 Задача 5

Изолированная точка - такая точка, окрестности которой не пересекаются с множеством, однако точка принадлежит множеству.

Тогда в окрестности каждой такой точки можно выбрать рациональное число. Таким образом можно установить биекцию, а т.к множество рациональных чисел счётно, то множетсво изолированных точек счётно.

1.6 Задача 6

1. $x \sin(y) \geq 0$, $[0; +\infty]$

2. Замкнуто, не является областью, т.к область должна быть открытой и связанной.

2 Предел по множеству

2.1 Задача 7

$$x = t\cos(\alpha) \wedge y = t\sin(\alpha) \wedge t = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (t\cos(\alpha))^4 e^{tsin(\alpha) - (t\cos(\alpha))^2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^4(1 - \sin^2(\alpha))^2}{e^{(t\cos(\alpha))^2 - tsin(\alpha)}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^4 \cos^2(\alpha)}{e^{t(t\cos^2(\alpha) - \sin(\alpha))}}$$

применим правило Лопиталя дважды, получим

$$\lim_{t \to \infty} \frac{12t^2}{e^{t(t\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha))}(4t^2\cos^4(\alpha) + \cos(\alpha)^2(2 - 4\sin(\alpha)) + \sin^2(\alpha))} = 0$$

таким образом предел по направлению существует, однако общего предела нет(предела по совокупности) Контрпример:

$$y = x^2 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} x^4 = \infty$$

а т.к пределы по направлению не совпадают, то предела не существует

2.2 Задача 8

$$x = r\cos(\theta) \wedge y = r\sin(\theta) \wedge r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x;y) \to (+\infty;+\infty)} \frac{x^2 + 3y^2}{e^{x+y}} = \lim_{r \to +\infty} \frac{(r\cos(\theta))^2 + 3(r\sin(\theta))^2}{e^{r(\cos(\theta) + \sin(\theta))}}$$

т.к в знаменателе сумма в показателе может быть как отрицательна, так и положительна, то предел может быть как бесконечность, так и 0 соответственно.

2.3 Задача 9

Перейдем также к полярным координатам и покажем, что зависит от θ:

$$x = r\cos(\theta) \wedge y = r\sin(\theta) \wedge r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a)
$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta)(r\sin(\theta))^3}{(r\cos(\theta))^4 + 3(r\cos(\theta))^2(r\sin(\theta))^2 + 2(r\sin(\theta))^4} = \frac{-2\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{-3+\cos(2\theta)}$$

Таким образом видно, что предел зависит от θ, а значит предела не существует.

b) Рассмотрим различные случаи стремления к 0. Рассмотрим два случая с параметром, $y = kx$ и $y = mx^5$:

$$\lim_{(x;kx)\to(0;0)} \frac{x^6 k}{x^{10} + 2k^2x^2} = 0$$

$$\lim_{(x;kx^5)\to(0;0)} \frac{x^1 1k}{x^{10} + 2k^2x^1 0} = \frac{m}{1+2m^2}$$

Т.к во втором примере предел зависит от константы, и пределы различны в зависимости от скорости с которой мы приближаемся к 0, в таком случае предела нет.

3 Поиск предела с помощью перехода в полярные координаты

3.1 Задача 10

$$x = r\cos(\theta) \wedge y = r\sin(\theta) \wedge r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\sin(\theta)\sin(r\cos(\theta)) - r\cos(\theta)\sin(r\sin(\theta))}{((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2)^2}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin(\theta)\sin(r\cos(\theta)) - \cos(\theta)\sin(r\sin(\theta))}{r^3}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin(\theta)\left(r\cos(\theta) - \frac{r^3\cos^3(\theta)}{6}\right) - \cos(\theta)\left(r\sin(\theta) - \frac{r^3\sin^3(\theta)}{6}\right) + o(r^3)}{r^3} = -\frac{1}{6}\sin\theta\cos\theta\cos(2\theta)$$

Таким образом предел зависит от θ, а значит предела нет

4 Повторный предел

4.1 Задача 11

$$\lim_{x\to 0} f(x;y) = -1$$

$$\lim_{y\to 0} f(x;y) = 1$$

4.2 Задача 12

$$\begin{cases} f(x;y) = ysin(\frac{1}{x}), x \neq 0 \\ f(x;y) = 0, x = 0 \end{cases}$$

имеет предел по совокупности, однако не существует обоих повторных пределов

4.3 Задача 13

По определению предел по совокупности переменных - все переменные одновременно стремятся к какой то точке и, согласно условию задачи, предел существует. Определение повторного предела - пределы по одной переменной, а значит, если существует предел по совокупности, то существует и предел по каждой переменной, т.е повторный предел

5 Примеры исследования пределов

5.1 Задача 14

a)

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos(\varphi)\sin(\varphi)^3}{\sqrt{r^6(\cos^6(\varphi)+\sin^6(\varphi))}}$$

сделаеем оценку, не зависящую от φ

$$|f(x_0 + r\cos(\varphi); y_0 + r\sin(\varphi)| \leq r$$

Таким образом, оценка существует, а значит существует и предел по совокупности.

b)

$$\lim_{r\to 0} \frac{\frac{r^2\cos(\varphi)^2}{2}}{\sqrt{r^2(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))}} = \frac{r\cos(\varphi)^2}{\sqrt{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}} = 0$$

$$|f(x_0 + r\cos(\varphi); y_0 + r\sin(\varphi)| \leq |r|$$

Таким образом, оценка существует, а значит существует и предел по совокупности.

6 Непрерывность по множеству, совокупности и по переменной

6.1 Задача 15

Определение непрерывной функции - функция называется непрерывной, если $\lim_{(x,y)\to(x_0;y_0)} f(x,y)$ $f(x_0;y_0)$

Проверим в точке разрыва $0 = \lim_{(x,y)\to(0;0)} 0\sin(\frac{1}{0})$ т.к произведение ограниченной на бесконечно малую то получим 0.

т.е непрерывна в 0. В остальных точках она непрерывна т.к 1/x разрывна в 0, sin(x) неразрывен.

6.2 Задача 16

Аналогично проверим. Только теперь у нас будет что-то вроде линии разрыва. $x = -y$

$$\lim_{x \to -y} \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x+y} = 3y^2$$

$$3y^2 = 3, y = 1 \Rightarrow x = -1 \vee y = -1 \Rightarrow x = 1$$

Т.е в случае если сумма стремится к 0, точками должны быть $(1; -1) \vee (-1; 1)$

В любой другой точке функция разрывна если сумма равна 0

Доопределение:

Можем просто сделать более сильное условие чтобы она была всюду неразрывна, тогда необходимость в остальных случаях отпадет:

$$f(x; y) = x^2 - xy + y^2$$

7 Свойства непрерывных функций

7.1 Задача 17

Абсолютно также:

$$\lim_{x^2 \to 1 - y^2} (1 - y^2 + y^2 - 1) \sin(\frac{1}{1 - x^2 - y^2})$$

окей, в таком случае произведение ограниченной на бесконечно малую даёт 0, а т.к значение в этой же точке совпадает с пределом значит разрыва нет.

Хорошо, тогда рассмотрим когда обе координаты стремятся к бесконечности, в таком случае аргумент синуса стремится к 0, а синус 0 это 0, значит функция равна 0 на бесконечности по обоим аргументам одновременно, также и если мы будем рассматривать предел по каждому аргументу одновременно.

Точек разрыва нет.

7.2 Задача 18

Здесь будет проще перейти к полярным координатам т.к можем уйти в комплексное поле.

$$x = r\cos(\theta) \wedge y = r\sin(\theta) \wedge r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{r \to 0} r^{r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)} = 1$$

Произведение непрерывной на огриниченную в показателе даёт 0, причем показатель идет к 0 быстрее, чем числитель, а значит предел к этой точке равен значению в этой точке. во всех остальных точках функция непрерывна.