Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

26 февраля 2025 г.

Содержание

1 Производная и дифференциал вектор-функции

1.1 Задача 1

$$f(t) = g \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3}$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Задача 2

$$J = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ y(1-z) & x(1-z) & -xy \\ -y & 1-x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = xy^2$$

1.3 Задача 3

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \\ u_2 = 0.5x_1^2 + 0.5x_2^2 + x_3^2 + \cdots \\ u_3 = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{3}x_2^3 + \frac{1}{3}x_3^3 + \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{i} \cdot i \cdot {x_j}^{i-1} = {x_j}^{i-1}$$

$$\begin{pmatrix} {x_1}^0 & {x_2}^0 & {x_3}^0 & \cdots \\ {x_1}^1 & {x_2}^1 & {x_3}^1 & \cdots \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Это транспонированная матрица Вандермонда, ее определитель нам известен, но будет со знаком - из за транспонирования.

$$\prod_{1 \le i \le j \le n}^{n} (x_j - x_i)$$

1.4 Задача 4

$$J = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ y-yz & x-xz & -xy \\ -y & 1-x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$Det(J) = xy^2z(1-x) + x^2y^2z + xy^2(1-z) = xy^2$$

1.5 Задача 5

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y^2} \\ \frac{-2x^2}{y^3} \end{pmatrix}$$

H(f) =

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{y^2} & \frac{-4x}{y^3} \\ \frac{-4x}{y^3} & \frac{6x^2}{y^4} \end{pmatrix}$$

$$H(f(1,1)) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.6 Задача 6

$$f(x) = \ln(\langle Ax; x\rangle)$$

$$f(x+dx) - f(x) = \ln(\langle Ax + dx; x + dx\rangle) - \ln(\langle Ax; x\rangle)$$

$$f(x+dx) - f(x) = \ln(\frac{\langle Ax + Adx; x + dx\rangle}{\langle Ax; x\rangle})$$

$$f(x+dx) - f(x) = \ln(\frac{\langle Ax; x\rangle + \langle Ax; dx\rangle + \langle Adx; x\rangle + \langle Adx; dx\rangle}{\langle Ax; x\rangle})$$

$$f(x+dx) - f(x) = \ln(1 + \frac{\langle Ax; dx\rangle + \langle Adx; x\rangle + \langle Adx; dx\rangle}{\langle Ax; x\rangle})$$

По эквивалентностям + опустим скалярное произведение $\langle Adx; dx\rangle$ т.к слишком мало

$$f(x+dx) - f(x) = \frac{\langle Ax; dx\rangle + \langle Adx; x\rangle}{\langle Ax; x\rangle}$$

Т.к оператор A симметричен, то:

$$f(x+dx) - f(x) = 2\frac{\langle Ax, dx\rangle}{\langle Ax; x\rangle}$$

т.к $df = \langle \nabla f; dx\rangle$, то

$$\nabla f = \frac{1}{\langle Ax; x\rangle}\nabla\langle Ax; x\rangle$$

$$d\langle Ax; x\rangle = \langle Ax + Adx; x + dx\rangle - \langle Ax; x\rangle$$

$$d\langle Ax; x\rangle = \langle Ax; x\rangle + \langle Ax; dx\rangle + \langle Adx; x\rangle + \langle Adx; dx\rangle - \langle Ax; x\rangle$$

$$d\langle Ax; x\rangle = \langle Ax; dx\rangle + \langle Adx; x\rangle = 2\langle Ax; dx\rangle = \langle 2Ax; dx\rangle$$

Отсюда следует, что $\nabla f = \frac{2Ax}{\langle Ax; x\rangle}$

Возьмем вспомогательную функцию $g(x) = df(x)$, тогда

$$dg(x) = \langle \nabla df; dx\rangle = \langle \nabla(f(x+dx_1) - f(x)); dx\rangle$$

$$dg(x) = \langle \nabla(f(x+dx) - f(x)); dx \rangle$$

т.к функция линейна по аргументам, то

$$ddf(x) = \langle \nabla f(x+dx) - \nabla f(x); dx \rangle$$

$$ddf(x) = \langle \frac{2A(x+dx)}{\langle A(x+dx); x+dx \rangle} - \frac{2Ax}{\langle Ax; x \rangle}; dx \rangle$$

Лень сокращать, поэтому

$$H = \frac{2A(x+dx)}{\langle A(x+dx); x+dx \rangle} - \frac{2Ax}{\langle Ax; x \rangle}$$

1.7 Задача 7

1. бесконечное кол-во т.к $(x-y)(x+y) = 0$ для каждого x это уравнение выполняется, если $y = x$ или $y = -x$
2. 4 - $y = x \wedge y = -x \wedge y = |x| \wedge y = -|x|$
3. две - $y = x \wedge y = -x$ обе остальные недиф в нуле
4. две - $y = x \wedge y = |x|$

1.8 Задача 8

$$F'_x = 2yu \wedge F'_y = 2xu \wedge F'_u = 3u^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial F} =$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial F}$$

$$u(0,1) = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1.9 Задача 11

$$\begin{cases} z = u^3 + v^3 \\ y = u^2 + v^2 \\ x = u + v \end{cases}$$

$$dz = 3u^2du + 3v^2dvdy = 2udu + 2vdvdx = du + dv$$

$$du = dx - dv$$

$$dy = 2u(dx - dv) + 2vdv$$

$$dv = \frac{dy - 2udx}{2(v-u)}$$

$$du = \frac{2vdx - dy}{2(v-u)}$$

$$dz = 3u^2 \frac{2vdx - dy}{2(v-u)} + 3v^2 \frac{dy - 2udx}{2(v-u)}$$

$$dz = 1.5(-2uvdx + (u+v)dy)$$

$$uv = \frac{x^2 - y}{2}$$

$$dz = 1.5(y - x^2)dx + 1.5xdy$$

1.10 Задача 13

$$\frac{dy^2}{d^2x} + (x+y)(1 + \frac{dy}{dx})^3 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} - 1$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{du}{dt} + 1}{\frac{du}{dt} - 1}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2u''}{(u'+1)^2}$$

$$\frac{2u''_{tt}(u'_t + 1) + 16u(u'_t)^3}{(u'_t + 1)^3}$$

1.11 Задача 14

$$\begin{cases} x = p\cos(\varphi) \\ y = p\sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cos(\varphi) \cdot \frac{dp}{dt} - \sin(\varphi) p \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \sin(\varphi) \frac{dp}{dt} + \cos(\varphi) p \cdot \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\varphi) \frac{dp}{dt} - \sin(\varphi) p \frac{d\varphi}{dt} = p\sin(\varphi) + kp^3\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \frac{dp}{dt} + \cos(\varphi) p \frac{d\varphi}{dt} = -p\cos(\varphi) + kp^3\sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -1 \frac{dp}{dt} = kp^3 \end{cases}$$

1.12 Задача 15

$$(y-z)\frac{dz}{dx}+(y+z)\frac{dz}{dy}=0$$

$$\begin{cases} u=y-z \\ v=y+z \end{cases}$$

$$\frac{du}{dx}=0\wedge\frac{dv}{dx}=0\wedge\frac{du}{dy}=1\wedge\frac{dv}{dy}=1$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{du}\frac{du}{dy}+\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy}$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{du}=-0.5 \\ \frac{dz}{dv}=0.5\frac{dz}{dy}=0 \end{cases}$$