# Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

**Студент: Ростислав Лохов**

АНО ВО Центральный университет

25 февраля 2025 г.

# Содержание

# 1 Примеры задач(безусловной) оптимизации

## 1.1 Задача 1

$$u(x;y) = y^3 + 3yx^2 - 39y - 36x + 26$$

$$du = 3y^2dy + 3x^2dy + 6xydx - 39dy - 36dx$$

$$\begin{cases} 3y^2 + 3x^2 - 39 = 0 \\ 6xy - 36 = 0 \end{cases}$$

$$(2,3) \wedge (3,2) \wedge (-3,-2) \wedge (-2,-3)$$

$$d^2u = 6ydy^2 + 6xdxdy + 6(xdy + ydx)dx$$

$$d^2u = 6ydy^2 + 12xdxdy + 6ydx^2$$

$$\begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{pmatrix}$$

1. (2, 3): $\delta_1 = 12$, $\delta_2 = 180$ - положительно определена - минимум
2. (3, 2): $\delta_1 = 18$, $\delta_2 = -180$ - неопределена
3. (-2, -3): $\delta_1 = -12$, $\delta_2 = 180$ - отрицательно определена - максимум
4. (-3, -2): $\delta_1 = -18$, $\delta_2 = -180$ - неопределена

## 1.2 Задача 2

$$u(x;y;z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + x + 1$$

$$du = -\frac{1}{z^2}dz + \frac{ydz - zdy}{y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2} + dx$$

$$du = dx + \frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2}dx - \frac{dz}{z^2} + \frac{dz}{y} - \frac{z}{y^2}dy$$

$$du = \left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z^2}\right)dz$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{y}{x^2} = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2} = 0 \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z^2} = 0 \end{cases}$$

$$(-1,1,-1) \wedge (1,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2y}{x^3} & \frac{-1}{x^2} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2z}{y^3} & \frac{-1}{y^2} \\ 0 & \frac{-1}{y^2} & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

$$H(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(-1,1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. H(1, 1, 1) - положительно определенная, все три алгебраических дополнения больше 0 - локальный минимум
2. H(-1, 1, -1) - отрицательно определенная, алгебраические дополнения чередуются - локальный максимум

### 1.3 Задача 3

$$u(x;y) : x^3 - y^2 + u^2 - 3x + 4y + u - 8 = 0$$

$$3x^2dx - 2ydy + 2udu - 3dx + 4dy + du$$

т.к в стационарных точках du = 0, то

$$3x^2dx - 2ydy - 3dx + 4dy = 0$$

$$(3x^2 - 3)dx + (4 - 2y)dy = 0$$

1. $1, 2, 2$
2. $1, 2, -3$
3. $-1, 2, 1$
4. $-1, 2, -2$

$$6xdx^2 - 2dy^2 + 2du^2$$

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

По критерию сильвестра найдем определенность матрицы:

1. $1, 2, 2$: $\delta_1 = 6, \delta_2 = -12, \delta_3 = -24$ - неопределена
2. $1, 2, -3$: $\delta_1 = 6, \delta_2 = -12, \delta_3 = -24$ - неопределена
3. $-1, 2, 1$: $\delta_1 = -6, \delta_2 = +12, \delta_3 = -24$ - отрицательно определенная, локальный максимум
4. $-1, 2, -2$: $\delta_1 = -6, \delta_2 = +12, \delta_3 = -24$ - отрицательно определенная, локальный максимум

## 1.4 Задача 4

$$(x - y)^2 + 4x - 4y + 5$$

$$((x - y)^2 + 4(x - y) + 4) + 1 = u$$

$$((x - y) + 2)^2 + 1 = u$$

функция имеет только глобальный минимум u=1

## 1.5 Задача 5

$$u = x^4 + y^4 - 2x^2$$

$$du = 4x^3dx + 4y^3dy - 4xdx$$

$$du = (4x^3 - 4x)dx + 4y^3dy$$

$$\begin{cases} 4x(x^2 - 1) = 0 \\ y^3 = 0 \end{cases}$$

$$x, y = (-1, 0), (0, 0), (1, 0)$$

$$d^2u = 12x^2d^2x + 12y^2d^2y - 4d^2x$$

$$d^2u = (12x^2 - 4)d^2x + 12y^2d^2y$$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y \end{pmatrix}$$

рассмотрим бесконечно малые приращения в точке (0, 0) отдельно по каждому аргументу:

$$u(\delta, 0) = \delta^4$$

$$u(0, \delta) = \delta^4 - 2\delta^2 = \delta^2(\delta^2 - 2)$$

при $\delta$ от 0 до $\sqrt{2}$ знаки будут отличаться, значит не экстремум.

Далее попробуем найти решение аналитически. Разделим график на две обьемные фигуры и спроецируем их на плостость uy:

В таком случае графиком будет гипербола и минимумом функции будет являться u = -1. В точке u=-1 x принимает значения ±1, а y - 0. Таким образом (-1, 0), (1, 0) - экстремумы

## 1.6 Задача 6

$||Ax-b||^2+\lambda^2||x||^2 = (Ax-b)^T(Ax-b)+\lambda x^T x = x^T A^T Ax - b^T Ax - x^T A^T b + b^T b + \lambda^2 x^T x =$

$$L(x) = x^T(A^T A + \lambda^2 I)x - 2x^T A^T b + b^T b$$

$$\nabla L(x) = 2(A^T A + \lambda^2 I)x - 2A^T b = 0$$

Если матрица А обратима:

$$x = (A^T A + \lambda^2 I)^{-1} A^T b$$

Т.к x существует если матрица обратима и функция имеет единственный глобальный минимум (функция регрессии с регуляризацией) то матрица положительно определена, следовательно минимум - x

## 1.7 Задача 7

$$\begin{cases} Q(k,l) = 50k^2 l^{0.5} \\ k = 80 - l \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(k,l) = 50(80-l)^2 l^{0.5} \\ k = 80 - l \end{cases}$$

$$dl = \frac{125(x^2 - 96x + 1280)}{\sqrt{x}} = 0$$

$$l = 16 \Rightarrow k = 64$$

## 1.8 Задача 8

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{9+y^2} \\ u(y) = 6 \mp 5\sqrt{9+y^2} - 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{9+y^2} \\ du = -4 \mp \frac{5y}{\sqrt{9+y^2}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{9+y^2} \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

$$x = \pm 5 \wedge y = \pm 4$$

$$x, y = (5,4) \vee x, y = (4,5)$$

## 1.9 Задача 11

$$\begin{cases} u = (x-y)(x+y) \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

исследуем на экстремумы:

$$du = 2xdx + 2ydy$$

$$d^2u = 2d^2x + 2d^2y$$

т.е в точке (0, 0) существует, локальный минимум, положительно определенная форма. Функция положительно определена на $\mathbb{R}^2$

Воспользуемся методом Лагранжа для исследования границ

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - \lambda((x-1)^2 y^2 - 1)$$

при y=0 x=2 или x=0 u=4 или u = 0

при $\lambda = -1$ x = 0.5 $y = \pm 0.5\sqrt{3}$ $u = -0.5$

Внутренняя точка 0, граничные точки - 4, 0, -0.5

Максимум 4 (2, 0), минимум -0.5 (0.5, $\pm 0.5\sqrt{3}$)