Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

6 апреля 2025 г.

Содержание

1 Определение и некоторые свойства несобственного интеграла 2

1.1 Задача 1 . . . 2
1.2 Задача 2 . . . 2
1.3 Задача 3 . . . 2
1.4 Задача 4 . . . 2
1.5 Задача 5 . . . 3
1.6 Задача 6 . . . 3
1.7 Задача 7 . . . 3
1.8 Задача 8 . . . 3
1.9 Задача 10 . . . 4
1.10 Задача 11 . . . 4
1.11 Задача 12 . . . 4
1.12 Задача 13 . . . 4
1.13 Задача 14 . . . 5
1.14 Задача 15 . . . 5
1.15 Задача 16 . . . 5
1.16 Задача 17 . . . 5
1.17 Задача 18 . . . 6
1.18 Задача 19 . . . 6
1.19 Задача 20 . . . 6
1.20 Задача 22 . . . 6
1.21 Задача 24 . . . 7
1.22 Задача 25 . . . 7

1 Определение и некоторые свойства несобственного интеграла

1.1 Задача 1

1. $\int_{-\infty}^{0.25\pi} e^x \sin(x)dx = 0.5e^x(\sin(x) - \cos(x))|_{-\infty}^{0.25\pi} =$
2. $0 - (0.5e^{0.25\pi}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})) = 0$

1.2 Задача 2

1. $y(x_0) = 1$
2. $y - 1 = -0.5(x-1) \Rightarrow y = -0.5x + 1.5$ - ур-е нормали в точке 1
3. $x^2 = -0.5x + 1.5 \Rightarrow x = -1.5, x = 1$
4. $S = \int_{-1.5}^{1} -0.5x + 1.5 - \int_{-1.5}^{1} x^2$
5. $S = (-0.25x^2 + 1.5x)|_{-1.5}^{1} - (x^3/3)_{-1.5}^{1} = \frac{125}{48}$

1.3 Задача 3

1. $\frac{dx}{dt} = 12t^2$
2. $\frac{dy}{dt} = 12t^3$
3. $L = \int_0^1 \sqrt{144t^4 + 144t^6}dt = 12\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^2}dt$
4. $t = \tan(\theta)$
5. $L = \int_0^{0.25\pi} \tan^2(\theta)\sec^3(\theta)d\theta$
6. $\int_0^{0.25\pi} \sec^5(\theta) - \int_0^{0.25\pi} \sec^3(\theta)$
7. $\int(\sec^5(\theta) - \sec^3(\theta))d\theta = \left(\frac{1}{4}\sec^3(\theta)\tan(\theta) + \frac{3}{8}\sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{3}{8}\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)|\right) - \left(\frac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{1}{2}\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)|\right) = \frac{1}{4}\sec^3(\theta)\tan(\theta) + \left(\frac{3}{8} - \frac{4}{8}\right)\sec(\theta)\tan(\theta) + \left(\frac{3}{8} - \frac{4}{8}\right)\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| = \frac{1}{4}\sec^3(\theta)\tan(\theta) - \frac{1}{8}\sec(\theta)\tan(\theta) - \frac{1}{8}\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)|$
8. $L = 12\left(\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\ln(1+\sqrt{2})\right) = \frac{36\sqrt{2}}{8} - \frac{12}{8}\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{9\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

1.4 Задача 4

1. $L = \int_2^5 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(x^2-1)^2}}$
2. $L = \int_2^5 \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^4-2x^2+1}}$
3. $L = \int_2^5 |\frac{x^2+1}{x^2-1}|$
4. $L = \int_2^5 \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = \int_2^5 1 + \frac{2}{x^2-1} = 3 - 2\int_2^5 \frac{1}{1-x^2} = 3 + \ln(2)$

1.5 Задача 5

1. $S = \pi \int_0^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2+1}$
2. $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$
3. $S = \pi \int_1^3 0.5(u-1)u^{0.5}du = 0.5\pi \int_1^3 u^{1.5} - u^{0.5}du = 0.5\pi(\frac{u^{2.5}}{2.5} - \frac{u^{1.5}}{1.5})_1^3 = \pi \frac{12\sqrt{3}+2}{15}$

1.6 Задача 6

1. $\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^2 dx$
2. $\pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 dx$
3. $\pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})|_{-R}^{R}$
4. $\frac{4}{3}\pi R^3$

1.7 Задача 7

1. ур-е шара $r^2 = x^2 + y^2$
2. $S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$
3. $S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2} dx$
4. $S = 2\pi \int_{-r}^{r} r dx$
5. $S = 2\pi 2r^2 = 4\pi r^2$

1.8 Задача 8

1. $y = \frac{\sqrt{1-2x^2}}{2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{1-2x^2}}$
2. $S = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-2x^2}}{2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-2x^2}} dx$
3. $S = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1-2x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} dx$
4. $S = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1-x^2}{4}} dx$
5. $S = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(y) dy$
6. $S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}$

1.9 Задача 10

1. Функция распределения веростности - отношение площадей функции, т.е $F = \frac{x^2}{R^2} =$
2. Плотность распределения - $f' = \frac{2x}{R^2}$
3. $E = \int_0^R \frac{2x^2}{R^2} dx = \frac{2}{3}R$
4. $E_2 = \int_0^R x^2 \frac{2x}{R^2} dx = \frac{R^2}{2}$
5. $Var = E_2 - E^2 = \frac{R^2}{18}$

1.10 Задача 11

1. $f(x) = (1 + \frac{a}{x} I_{2,\infty}(x))$
2. $\int_2^\infty 1 + \frac{a}{x} = (x + a\ln(x))|_2^\infty$ - расходится, не может быть плотностью распределения

1.11 Задача 12

1. $f(x) = \frac{2}{x^3} I_{1,+\infty}$
2. $\int_{-\infty}^\infty f(x) = 1$
3. $E = \int_{-\infty}^\infty x f(x) = 2$
4. $E_2 = \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = -\ln(1) + \ln(+\infty)$ - расходится

1.12 Задача 13

1. Вся вероятность лежит на $(-\infty; 8]$
2. Тогда для максимизации дисперсии, необходимо максимизировать разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания.
3. Пусть вся масса лежит в некой точке $c \leq 2$, а оставшаяся 0.8 в точке 8.
4. $E = 0.2c + 0.64$
5. $Var(\xi) = 0.2(c - (0.2c + 0.64))^2 + 0.8(8 - (0.2c + 0.64))^2$
6. $\frac{4(8-c)^2}{25} = Var(\xi)$
7. при c стремящемся к ∞ получаем максимальную дисперсию.

1.13 Задача 14

1. $S = 0.5ah$

2. h - высота, величина постоянная. E

3. $h = 5\sqrt{3}$

4. $S(x) = 2.5\sqrt{3}x$

5. $E(x) = \int_0^{10} 2.5\sqrt{3}dx$ - т.к равномерное распределение

6. $E(x) = 12.5\sqrt{3}$

7. $Var(x) = \frac{75}{4}Var(x)$ т.к равномерно распределенное, то

8. $Var(x) = \frac{75}{4} \cdot \frac{100}{12} = 156.25$

1.14 Задача 15

1. $P(k \leq \xi \leq k+1) = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$ - видно, что геом прогрессия.

2. $t = e^{-\lambda} \Rightarrow P(1 < \xi < 2) = t - t^2$ достигает максимума в точке (0.5, 0.25) таким образом невозможно

3. $t(1-t) = \frac{4}{27} \Rightarrow t = 0.5 \pm 0.5\sqrt{\frac{11}{27}}$ т.е существуют такие корни, значит возможно

1.15 Задача 16

1. $\int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x}dx = 0 + \int_0^\infty \frac{n}{\lambda}x^{n-1}\lambda e^{-\lambda x} = \frac{n!}{\lambda^n}$

1.16 Задача 17

1. $P(\xi > x + y \mid \xi > x) = \frac{P(\xi > x+y \text{ и } \xi > x)}{P(\xi > x)}$ Заметим, что событие $\{\xi > x + y\}$ является подмножеством события $\{\xi > x\}$, поэтому $P(\xi > x + y \text{ и } \xi > x) = P(\xi > x + y)$

2. $P(\xi > x + y \mid \xi > x) = \frac{P(\xi > x+y)}{P(\xi > x)}$

3. $P(\xi > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s}\, ds = e^{-\lambda t}$

4. $P(\xi > x) = e^{-\lambda x}, \quad P(\xi > x + y) = e^{-\lambda(x+y)}$

5. $P(\xi > x + y \mid \xi > x) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y}$ Но $e^{-\lambda y}$ — это и есть $P(\xi > y)$. Таким образом, получаем:

6. $P(\xi > x + y \mid \xi > x) = P(\xi > y)$

1.17 Задача 18

1. $E|\xi| \wedge Var|\xi| \wedge \xi \approx N(0, \sigma^2)$
2. $E|\xi| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\int_{-\infty}^{0} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 2\int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$
3. $2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{0}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$
4. $u = \frac{x^2}{2\sigma^2} \Rightarrow du = \frac{x}{\sigma^2} dx$
5. $\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-u} du = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} (-e^{-u})|_{0}^{\infty}$

1.18 Задача 19

1. $P(\xi - 8| < 4), P(|\xi - 2| < 4), P(|\xi - 3| < 4)$

1.19 Задача 20

1. $\int_{a}^{b} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 3^2}} dx = 0,5$
2. $t = \frac{x+2}{3} \Rightarrow 3dt = dx$
3. $\int_{\frac{a+2}{3}}^{\frac{b+2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.5$
4. $\Phi(\frac{b+2}{3}) - \Phi(\frac{a+2}{3}) = 0.5$
5. $\frac{a+2}{3} = -\frac{b+2}{3}$ по св-ву симметричности:
6. $2\Phi(\frac{b+2}{3}) - 1 = 0.5$
7. $\Phi(\frac{b+2}{3}) = 0.75 \Rightarrow a = -4.0245 \wedge b = 0.0235$

1.20 Задача 22

1. $f_{\xi}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}$
2. $E\xi = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} dx$
3. $\ln(x) = t \Rightarrow dx = xdt$
4. $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
5. $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2+1}{2}} dt$
6. $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
7. $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-1)^2}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\right) dt e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-1)^2}{2}\right) dt$
8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-1)^2}{2}\right) dt = 1$
9. $E\xi = \sqrt{e}$

10. $\operatorname{Var}\xi = (\exp(\sigma^2) - 1)\exp(2\mu + \sigma^2)$ - просто формула логнормального распределения

11. $\operatorname{Var}\xi = (\exp(1) - 1)\exp(0 + 1) = \exp(1)(\exp(1) - 1)$

1.21 Задача 24

1. $\Phi\left(\frac{19-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{22-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)$

2. $m_1 = 10, m_2 = 13, \Rightarrow |10-\mu| = |13-\mu| \Rightarrow \mu = 11.5$

3. $P(5 < \xi < 10) = \Phi\left(\frac{10-11.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{5-11.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{1.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{6.5}{\sigma}\right)$

4. $P(5 < \xi < 10) = \left[1 - \Phi\left(\frac{1.5}{\sigma}\right)\right] - \left[1 - \Phi\left(\frac{6.5}{\sigma}\right)\right] = \Phi\left(\frac{6.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1.5}{\sigma}\right)$

5. $g(t) = \Phi(6.5t) - \Phi(1.5t) \Rightarrow g'(t) = 6.5\varphi(6.5t) - 1.5\varphi(1.5t)$

6. $6.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(6.5t)^2}{2}\right) = 1.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(1.5t)^2}{2}\right)$

7. $t^2 = \frac{1}{20}\ln\frac{6.5}{1.5}$

8. $\ln\frac{6.5}{1.5} = \ln\left(\frac{13}{3}\right) \approx \ln(4.3333) \approx 1.464$

9. $t^2 \approx \frac{1.464}{20} \approx 0.0732, \quad t \approx \sqrt{0.0732} \approx 0.2707$

10. $P(5 < \xi < 10) \approx 0.9608 - 0.6591 \approx 0.3017$

1.22 Задача 25

1. $\eta = -\cot(\pi\xi), \quad \xi \sim U[0,1]$

2. $\theta = \pi\xi - \frac{\pi}{2}$

3. $\pi\xi = \theta + \frac{\pi}{2}$

4. $\cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\theta$

5. $\eta = -\cot(\pi\xi) = -\cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\theta$

6. $\theta = \pi\xi - \frac{\pi}{2}$ равномерно на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

7. $f_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

8. $\theta = \arctan\eta$

9. $\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{1+\eta^2}$

10. $f_\eta(\eta) = f_\theta(\theta)\left|\frac{d\theta}{d\eta}\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\eta^2}, \quad \eta \in \mathbb{R}$

11. $\boxed{f_\eta(\eta) = \dfrac{1}{\pi(1+\eta^2)}, \quad \eta \in \mathbb{R}}$