Домашнее задание

По курсу: **Дискретная математика**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

27 марта 2025 г.

Содержание

1 Индукция и реккурентные уравнения

1.1 Задача 1

1. База индукции: Рассмотрим круг из 1 красного шарика и одного синего, тогда можно составить 1 круг беря попарно шарики. Также взяв всего 2 шарика можно составить только один круг(КС)

2. Индукционный переход: Допустим можно получить любую комбинацию из k красных и k синих шаров в круге, прибавляя пары различных цветов.

3. Рассмотрим k+1 красных и столько же синих шаров. Тогда т.к шариков одинаковое количество, то существует пара с различными цветами(КС) или (СК). Уберем ее, получим, что осталось k красных и k синих шариков.

4. По индукционному предположению, мы можем из k красных и k синих шаров получить любой круг, прибавляя k пар соседних разноцветных шариков

5. Далее после k операций добавления пар мы добавляем убранную пару разноцветных шариков на место где она была расположена в исходной комбинации, мы получим исходную комбинациюю из k+1 красных и столько же синих шаров.

6. Таким образом на основании принципа математической индукции любая комбинация из n красных и синих шаров расположенных по кругу, может быть получена последовательно добавляя пары из соседних разноцветных шариков в изначально пустой круг

1.2 Задача 2

1. База индукции: Рассмотрим две ступеньки, человек стоит на одной из ступенек

2. Всего существует 4 возможных варианта комбинаций указателй на 2х ступеньках

3. (UU) (UD) (DU) (DD) - UP, Down, справа - верх лестницы, слева - низ.

4. Тогда если он стоит на любой из ступенек у крайних двух ((UU), (DD)), то очевидно, что он сойдет со ступенек

5. (UD) - Если начинаем на U, то мы поднимаемся в D, далее U сменилась на D, после D мы уходим на D и далее уходим с лестницы(Эффект как D), Если начинаем с D, будет эффект U

6. (DU) - Если начинаем на D, то ведёт себя как D, Если U - то как U

7. Тогда из двух произвольных ступенек, мы получаем либо эффект UU либо DD

8. База доказана

9. Индукционный переход: Допустим мы можем уйти с лестницы из k ступенек.

10. Рассмотрим k+1 ступенек, Возможны два варианта - лестница полностью состоит из одного и того же знака, в таком случае мы просто уходим с лестницы, или на лестнице есть хотя бы два различных знака.

11. Тогда эффект хотя бы одной такой пары превращается в U или D, из прошлых рассуждений. В таком случае общее результирующее будет k, и мы приходим к индукционному предположению

12. Значит таким образом рано или поздно человек покинет лестницу.

1.3 Задача 3

1. Есть множество $S = \{1, 2, 3, ..., 2^n\}$ необходимо найти количество способов раскрасить каждое число в 2 цвета, но при этом, если два числа образуют сумму некоторого числа, которое является степенью двойки.

2. Тогда пусть есть ребро между двумя вершинами, если сумма этих чисел даёт степень двойки.

3. $a + b \in S, a \neq b$ $a + b \in \{3; 2^n + 2^{n+1} - 1\}$ - диапазон суммы. Единственные натуральные степени двойки имеют диапазон от 2 в степени 2 до 2 в степени n+1

4. Заметим, что $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ т.к числа должны быть различными, эта запись не приводит к ребру, следовательно 2^{n-1} не используется при создании ребер.

5. Общее количество компонент -C(n) = n+1. Докажем по индукции.

6. База: множество $S = \{1, 2\}$ - каждая пара не даёт степень двойки, поэтому рёбер нет. Следовательно каждая вершина является компонентой, т.е общее количество - 2. C(1) = 2

7. Предположим, что для $S_n = \{1, 2, ...2^n\}$ количество компонент $C(n) = n + 1$

8. Рассмотрим множество $S_{n+1} = \{1, 2, ...2^{n+1}\}$

9. Разобьём на 2 множества: $A = \{1, 2, 3...2^n\}, \quad B = \{2^n + 1, 2^n + 2...2^{n+1}\}$

10. Тогда A совпадает с предположением и имеет n+1 компонент.

11. Рассмотрим B, заметим, что если взять любые два числа, то их сумма всегда будет больше 2^{n+1}

12. Таким образом в B между любыми двумя вершинами ребер нет, т.е все вершины изолированы. Тогда число вершин в B = 2^n

13. Теперь нам необходимо понять какие рёбра соединяют A и B.

14. Заметим, что там необходимо найти такие рёбра $(a, 2^{n+1} - a)$ (из уравнения $a + b = 2^{n+1}$)

15. Т.е для каждого a из A соответсвуеющая вершина $2^{n+1} -$ из B присоединяется к компоненте, в которой находится a. Каждый такой переход обьединяет две компоненты (одну из A и одну из B) в одну.

16. Изначально до связывания A и B обратно у нас получилось $n+1+2^n$ компонент

17. Берем из A все a от 1 до $2^n - 1$ т.е каждое такое ребро будет соединять a с изолированной на множестве B вершину. Таких ребер 2^n-1 и каждое уменьшает общее число ребер на 1 т.к мы считаем дважды.

18. Тогда $C(n+1) = n + 1 + 2^n - 2^n + 1 = n + 2$

19. Т.е всего для $S = \{1, 2, 3, ..., 2^n\}$ n+1 компонент.

20. Далее надо доказать, что каждая компонента имеет всего 2 варианта раскраса.

21. Т.к каждая компонента представляет собой цепочку или одну вершину, то у каждой такой компоненты мы можем выбрать всего 2 раскраса(определение цветов первым + чередование) (цепочка потому что иначе мы бы не смогли покрасить так, чтобы любые две соседствующих вершины были разных цветов при 2х цветах максимум)

22. Тактим образом каждая компонента имеет два цвета, а значит всего способов раскрасить числа в 2 цвета - 2^{n+1}

1.4 Задача 4

1.5 Задача 5

1.6 Задача 6

1. Одна окружность делит на 2 плоскости, т.е $R(1) = 2$

2. Предположим, что $R(k) = k^2 - k + 2$, $R(1) = 2$ - база доказана.

3. Предположим, что формула верна для некоторого k.

4. Тогда $R(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) + 2$

5. По условию k+1 окружность пересекается с каждой из к уже проведенных окружностей ровно в 2х точках

6. Эти 2k точек разбивают новую окружность на 2k дуг, каждая дуга проходит через одну из областей, которые уже образованы k окружностями

7. При добавлении дуги, область разделяется на две. Следовательно каждая из 2k дуг добавляет по одной области, т.е новых облaсей ровно 2k

8. Тогда $R(k+1) = R(k) + 2k$

9. $R(k+1) = (k^2 - k + 2) + 2k = k^2 + k + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2$

10. Таким образом переход индукции выполнен, а значит для любого натурального n, число областей, на которые n окружностей делят плоскость равно $n^2 - n + 2$

1.7 Задача 7

1. После четного числа прыжков лягушка может находится только в вершинах A C E.

2. Обозначим a_k, c_k, e_k число путей длины 2k из A в A, C и E.

3. В силу симметрии $C_k = E_k$:

4. $C_{k+1} = A_k + 3C_k$

5. $A_{k+1} = 2A_k + 2C_k$

6. $_{k+2} = A_{k+1} + 3C_{k+1} = 2A_k + 2C_k + 3C_{k+1} = 2(C_{k+1} - 3C_k) + 2C_k + 3C_{k+1} = 5C_{k+1} - 4C_k$

7. $\lambda^2 = 5\lambda - 4 \ \lambda = 4, \quad \lambda = 1$

8. $C_n = C_1 4^n + C_2 \ C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = -\frac{1}{3}$

9. $C_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

10. Обозначим через B_k число путей длины $2k - 1$, ведущих из A в B, тогда

11. $B_{k+1} = 3b_k$ т.к за два прыжка можно двумя способами вернуться из B в B и одним способом попасть из B в F.

12. Т.к $_k = B_k$, то $C_{k+1} = 3C_k, k > 0, C_1 = 1 \Rightarrow C_k = 3^{k-1}$

1.8 Задача 8

1. Пусть f(n) - число слов длины n с четным числом букв A. Тогда g(n) - с нечетным A.

2. Если слово длины n-1 имеет четное число букв A, то при добавлении не A, четность не меняется получаем 2f(n-1) вариантов.

3. Если же добавляем A, то будет нечет число A, f(n-1)

4. Если слово такой же длины имеет нечетное число A, то при добавлении не A, четность не меняется и остаётся 2g(n-1).

5. Если A, то g(n-1) вариант.

6. $f(n) = 2f(n-1) + g(n-1) \wedge g(n) = f(n-1) + 2g(n-1) \wedge f(0) = 1 \wedge f(0) = 1 \wedge f(n) + g(n) = 3^n$

7. $f(n) = 2f(n-1) + \Big(3^{n-1} - f(n-1)\Big) = f(n-1) + 3^{n-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n+1}{2}$ сумма геом прогрессии

1.9 Задача 9

1.10 Задача 10

1. Башню 2 x 2 x 1 можно составить 2мя способами(поворот на 0 градусов относительно горизонтальной плоскости и на 90 градусов)

2. Далее башня 2 x 2 x 2 4 варианта, если кирпичи лежат большей стороной к основанию и 5 вариантов, если вертикально стоят хотя бы 2.

3. Т.е у нас два состояния для предыдущей башни + 5 вариантов после наклона.

4. Тогда $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ т.е текущий слой это сумма состояний предыдущего + сумма состояний предыдущего в обьединении с пред предыдущим.

5. $A_1 = 2, A_2 = 9$

6. $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

7. $A_n = \frac{7\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{7\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

1.11 Задача 11

1. На каждом шаге у деда есть выбор, вложить в мешок мешок или засунуть подарок, в каждом мешке либо два подарка, либо два мешка. Надо разложить все подарки.

2. Заметим, что если мы положим 2 подарка в один мешок, то далее мы не сможем ложить подарки

3. Тогда у нас на каждом этапе будет выбор, или два мешка, или мешок и подарок, первое бессмысленно, поскольку мы не тратим подарки, а второе имеет смысл, тогда реккурент задан следующим образом

4. $f(n) = \binom{n}{2} f(n-1)$ т.к подарки различны

5. $f(n) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} f(1)$

6. $f(n) = \frac{n!(n-1)!}{2^{n-1}}$