Домашнее задание

По курсу: **Дискретная математика**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

2 апреля 2025 г.

Содержание

1 Основы теории графов

1.1 Задача 1

1. Вершины называются смежными если между ними есть ребро
2. а) Для любых двух смежных вершин есть ровно одна вершина смежная с ними обеими.
3. Т.е K_3 граф. т.е наборы треугольников которые не связаны между собой.
4. Если у нас n таких подграфов, то общее кол-во ребер 3n.
5. Т.к 100 не делится на 3, то граф удовлетворяющий условию не может иметь ровно 100 ребер
6. б) для любых двух смежных вершин есть ровно две вершины смежные с ними обеими. Т.е K_4 граф.
7. K_4 граф для любых двух смежных вершины содержит ровно 2 вершины смежные с этими двумя.
8. Кол-во ребер в K_4 графе $\binom{4}{2} = 6$ ребер. Если наш граф, содержит такие подграфы в кол-ве n, то общее кол-во ребер 6n, что не является делителем 100. Следовательно нет

1.2 Задача 2

1. Пусть k = 1. Тогда из одного любого города можно попасть в любой другой город, причем только 1. Т.е будет набор изолированных городов или пар связанных городов или в лучшем случае одну линию.
2. Если есть изолированные города - условие связанности не выполнено
3. Если есть пары допустим A-B, C-D - условие связанности также не выполняется. Мы не можем попасть из B в C
4. Если есть линия - пусть будет A-B-C..-H то из A в H попасть не более чем через один город нельзя
5. Пусть k=2.
6. Тогда возможны случаи, когда они собираются поотдельности. Вдвоем, и наконец в треугольники.
7. Как мы сказали ранее, изолированная вершина нас не интересует. Вершины связанные друг с другом т.е степень 1 также нас не интересуют.
8. Чтобы связать все 8 городов и чтобы каждая вершина была степени 2 нужен цикл. Т.е A-B-C-D-E-F-G-H-A. Любая друга структура будет либо несвязной. Либо будет иметь вершины степени 1.(линия) что не меняет картины.
9. Рассмотрим наш цикл A-B-C-D-E-F-G-H-A.
10. Допустим возьмем за опорный - город A.

11. Тогда города на расстоянии 1 это B и H
12. На расстоянии 2 - C и G
13. На расстоянии 3 - D и F
14. Тогда мы не можем добраться из A до города D и F, т.к оно противоречит условию, что максимум мы обходим 1 город.
15. Таким образом k=2 также не подходит
16. k=3
17. Построим пример: соединим ребра по кругу, как при k=2. Далее добавим диагонали, соединяющие противоположные города.
18. Доказательство того, что мы можем попасть в любую вершину.
19. Пусть мы взяли вершину i. все вершины пронумерованы от 0 до 7 включительно
20. i-1 i+1 достижимы за 1 ход
21. i+4 i-4 достижимы за 1 ход
22. i-2, i+2 достижимы за 2 хода $(i + 1 - > i + 2 \wedge i - 1 - > i - 2)$
23. i-3, i+3 достижимы за 2 хода $(i - 1 - > i + 3 \wedge i + 1 - > i - 3)$
24. Таким образом k=3

1.3 Задача 4

1. Рассмотрим одного из 50 человек. Назовём его A.
2. Оставшиеся 49 человек можно разделить на 2 группы: N и M - множество людей знакомых и не знакомых с A соответственно.
3. Возможны 2 случая - мощность N четна и нечетна.
4. Если N нечетно, в таком случае найдется человек B в группе N, у которого четное число знакомых среди людей в N.
5. Теперь рассмотрим пару (A, B). Их общие знакомые - среди оставшихся 48 человек - люди из N, которые знакомы с B. Поскольку B имеет чётное число знакомых в N, то число общих знакомых у A и B среди остальных 48 человек чётно. Следовательно A-B искомая пара.
6. Если N четно, то M нечетно.
7. Тогда в группе M незнакомых с A нечетное число людей, следовательно в M найдется такой человек C, у которого четное число знакомых в M. Поскольку C незнаком с A, а всего у него четное число знакомых, то у него четное число знакомых в N. C-A - искомая пара.

1.4 Задача 5

1. Девочка может быть знакома с любым количеством мальчиков. Т.к девочек n+1 и вариантов n+1 (добавляется то, что девочка незнакома с мальчиками)
2. Общее число пар знакомых - сумма всех степеней девочек. т.е $\frac{n(n+1)}{2}$
3. Каждый мальчик знаком с одним и тем же числом девочек. Пусть будет d
4. Общее кол-во знакомств - n*d
5. $nd = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow d = \frac{n+1}{2}$ - кол-во знакомых у каждого мальчика.
6. Тогда d должно быть целым, а значит n+1 должно быть четно, значит n нечетно.
7. Пусть $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $n = 2m+1$, где $m \in \mathbb{N}$. Разобьем девочек на пары, всего $m + 1$ пара. Первую девочку k-й пары познакомим с k мальчиками, вторую - с остальными $n - k$ мальчиками. При этом каждый мальчик знаком с ровно одной девочкой из каждой пары.

1.5 Задача 6

1. Возьмем полный граф 64 вершины. Тогда кол-во ребер $\binom{64}{2} = 2016$
2. Мы не можем составить простой путь в полном графе из 64 вершин - длина такого пути будет 63 - иначе, если больше 63 ребер, то будет не простой путь.
3. Осталось 9 ребер и 936 вершин. Пусть просто какие то из них связаны в цепочку.
4. Итого 10 вершин связаны в цепочку - первый граф. Второй граф - 926 изолированных вершин. Третий граф - полносвязный граф на 64 вершины.
5. Таким образом никакой из этих графов не будте связан с другим и никакой из них не будет иметь путь длины 64.

1.6 Задача 7

1. Всего ребер: $400 * 201 = 2E \Rightarrow E = 40200$
2. Для двудольного графа с 400 вершинами максимальное кол-во ребер - $400^2/4 = 40000$
3. А значит т.к наш граф имеет большее кол-во ребер, чем двудольный граф(граф который не содержит циклов длины 3) то наш граф обязательно содержит цикл длины 3.