Домашнее задание

По курсу: **Дискретная математика**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

8 марта 2025 г.

Содержание

1 Свойства сочетаний. Сочетания с повторениями. Числа Каталана

1.1 Задача 1

1. Порядок неважен, т.е мы однозначно можем восстановить необходимое число из множества цифр длиной 5(любое множество цифр может быть неубывающим/невозрастающим).

2. Тогда задача сводится к тому, чтобы найти Количество сочетаний с повторениями из 10 цифр по 5, для пятизначного числа.

3. Каждая цифра может быть 5 раз, за исключением 0, он может быть 4 раза.

4. Всего сочетаний повторениями $\binom{14}{5}$

5. Т.к одно множество будет $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ просто вычтем 1

6. Тогда ответ будет $\frac{14!}{5!9!} - 1 = \frac{10*11*12*13*14}{1*2*3*4*5} - 1 = 2001$

1.2 Задача 2

1. Рассмотрим первую связку, для нее возможно $\binom{60}{15}$ вариантов сочетания грибов.

2. Рассмотрим вторую связку, для нее возможно $\binom{45}{15}$ вариантов сочетания грибов.

3. Рассмотрим вторую связку, для нее возможно $\binom{30}{15}$ вариантов сочетания грибов.

4. Рассмотрим вторую связку, для нее возможно $\binom{15}{15} = 1$ вариантов сочетания грибов.

5. Тогда нам необходимы такие варианты где нам необходимо выбрать все связки.

6. Однако в нашем случае связки считаются упорядоченными т.к мы неявно задаём порядок рассматривая сначала первую связку, затем вторую и т.п

7. Таким образом $n = \frac{\binom{60}{15} \cdot \binom{45}{15} \cdot \binom{30}{15}}{4!}$

1.3 Задача 3

1. Между каждой парой выбранных книг должно быть не менее 3х книг. Задача о барьерах.

2. Для 10 выбранных книг у нас 9 промежутков, каждый занимает минимум 3 места

3. $3 \cdot 9$ книг занято, можем оперировать только $50 - 3 \cdot 9$. Всего 10 интересующих книг. Тогда $\binom{23}{10}$ при этом условие минимум 3 места уже учтено.

1.4 Задача 4

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} \cdot \binom{m-k}{n}$$

$$\binom{k}{n}\cdot\binom{m-k}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$= \binom{m}{n} \cdot \binom{k}{m}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} \cdot \binom{m-k}{n-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{n} \cdot \binom{k}{m} = \binom{m}{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{n} \cdot 2^m$$

1.5 Задача 5

$$(\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n})^2 = ((1+1)^n)^2 = (1+1)^2 n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{2n}$$

1.6 Задача 6

1. $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. Функция строго возрастает при $n \geq k$
3. $\forall k C(n,k) = m$ т.е имеет не более одного решения n для произвольного m
4. Рассмотрим k>m. Минимальное значение C достигается при n=k и равно 1. Однако если мы возьмем n=k+1 то C=k+1 Если k+1>m то для всех $n \geq k + 1 C(n,k) \geq k+1 > m$
5. Таким оразом при $k \geq m$ нет решений
6. Таким образом следует, что k может принимать значения только от 1 до m-1. Для каждого такого k существует не более одного m удовлетворяющее уравнению $C(n,k) = m$
7. Следовательно общее кол-во пар (n,k) для которых $C(n,k) = m$ не превышает m-1 что конечно.

1.7 Задача 7

1. Воспользуемся теоремой Люка: бином нечетен тогда и только тогда, когда двоичные цифры в двоичном разложении n являются подмножеством битов m
2. Т.е каждый бит k не превосходит соответствующий бит n в двоичной системе.
3. если $n = \sum_{i=0}^{m} a_i 2^i$ $k = \sum_{i=0}^{m} b_i 2^i$ то C(n, k) нечетен тоже самое, что и $\forall i b_i \leq a_i$
4. Если $a_i = 1 \Rightarrow b_i = 0 \vee b_i = 1$
5. Если $a_i = 0 \Rightarrow b_i = 0$
6. Тогда для каждого $a_i = 1$ есть 2 варианта выбора b_i, а для $a_i = 0$ только один.

7. Тогда общее количество нечентных $C(n,k) = \prod_{i=0}^{m}(1+a_i) = 2^{\text{Кол-во единиц в n}}$

8. Тогда в нашем случае $2025_{10} = 11111101001_2$

9. Общее количество нечетных: $2^8 = 256$

10. Общее количество четных - $2025 + 1 - 256 = 1770$ +1 - смещение по индексу.

11. Задача гроб

1.8 Задача 8

1. n людей, 50 рублей стоимость кино, если дают купюру в 100 рублей - 50 рублей сдачи т.е минус 50 рублей.

2. Далее у нас есть купюра в 100 рублей, если мы разменяли, т.е это тупо мертвый груз с которым мы ничего не можем делать

3. Тогда у нас есть возможность добавить 50р в кассу, убавить кассу на 50р при этом добавить 100 р. при обоих случаях у нас тратится билет. Всего n билетов

4. Можем просто убрать 100р, роли не играет, 50 р -50 рублей сделать +1 и -1 соответственно

5. k людей имеют 50р.

6. Представим, что театр обладает вместимостью минимум n, тогда нам необходимо продать билеты всем людям, и чтобы касса могла разменивать. Также должно выполняться $k \geq n - k$ иначе ответ 0

7. Тогда нам необходимо попасть в точку (n, 2k-n), n - количество проданых билетов, 2k-n - конечный баланс, нам необходимо, чтобы он был ≥ 0

8. Хорошо, тогда всего существует $\binom{n}{k}$ способов расставить людей.

9. Построим биекцию между плохими траекториями, ведущими из (0, 0) в (n, 2k-n)

10. Отразим часть траектории после этой точки относительно прямой y=-1

11. В результате получим траекторию которая заканчивается в точке (n, 2k-n)

12. При этом произвольная траектория из (0, 0) точно пересекает прямую $y = -1$

13. Аналогично, найдем последнюю точку пересечения или касания с этой прямой и отразим эту часть вертикально. Получим плохую траекторию из (0, 0) в (n, 2k-n)

14. Поскольку это биекция, количество плохих траекторий из (0, 0) в (n, 0) равно количеству произвольных траекторий из (0, 0) в (n, 2k-n-2).

15. Чтобы добраться из точки (0, 0) в (2n, -2) необходимо выбрать k+1 шаг из n на котором траектория пойдет вниз

16. Т.е k+1 людей с 50 рублями n-k-1 людей с 100 рублями

17. Таким образом кол-во плохих траектори $\binom{n}{k+1}$ т.к мы выбираем k+1 позиций для людей с 50 рублями из n
18. Тогда допустимых траекторий - разница между общим кол-вом и недопустимым
19. $\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}$