Домашнее задание

По курсу: **Дискретная математика**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

29 марта 2025 г.

Содержание

1 Индукция и реккурентные уравнения

1.1 Задача 1

1. Всего вариантов сочетаний с повторениями: $\binom{12}{8} = 495$
2. $1, 1, 2......$ - для последнего можем выбрать лексикографически меньшее, будет
3. $1, 1, 1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ каждый такой x от 1 до 5 включительно, значит всего вариантов $\binom{9}{5} = 126$
4. Далее $1, 1, 2, 2, 2, 2, x_6, x_7, x_8$ - x_6 может быть 2 или 3, т.к иначе мы бы нарушали условие возрастания.
5. Если 6 элемент равен 2, то оставшиеся 2 элемента принимают от 2 до 5 включительно. Если 3м - то от 3х до 5 включительно.
6. Значит число сочетаний с повторениями $= 10$ и 6 соответственно
7. Таким образом 142 комбинации, значит номер заданного сочетания 143
8. Если первый элемент 1, то получим, что каждый из оставшихся 7 элементов принимает значение от 1 до 5 включительно. Значит всего $\binom{11}{7} = 330$, 127 меньше 495, значит продолжаем
9. Значит первая цифра 1
10. Далее второй элемент будет 1, т.к минимальное значение интересует, значит каждое из 6 оставшихся принимает значение от 1 до 5 включительно. Всего $\binom{10}{6} = 210$ 127 меньшне чем 210. Продолжаем
11. Предположим, что и дальше будет элемент 1, значит оставшиеся 5 принимают значение от 1 до 5 включительно. Значит на них приходится $\binom{9}{5} = 126$, что меньше 127. т.к мы вышли за пределы нумерации, значит тут двойка.
12. Если двойка, значит оставшиеся 5 чисел принимают значения от 2 до 5, т.е $\binom{8}{5} = 56$
13. Таким образом ответ (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2).

1.2 Задача 2

1.3 Задача 3

1. Разобьем на 2 кучи, по 50 монет, пусть будет куча А и Б
2. Если куча А больше Б. Рассмотрим подкучи кучи Б 25 и 25, С и Д соответственно
3. Если куча С больше или меньше кучи Д, т.е неравна. то 50 монет кучи А настоящие т.к 50 монет больше чем $49 + 1$ из кучи Б. Т.е в куче Б содержится монета которая легче. Т.е $49+1$ фальшивая монета легче чем 50 настоящих.
4. В случае если куча С и Д равны, то фальшивая монета тяжелее, т.к куча А $>$ Б и подкучи С и Д равны. Т.е подкуча А больше при 50 монетах чем куча Б при куче в 50 монет. Таким образом фальшивая монета тяжелее.

5. За одно нельзя т.к мы получим неравенство, а следовательно, мы не сможем знать в какой куче всё нормально, а в какой нет. Следовательно только за 2 взвешивания

1.4 Задача 4

1. Пусть наше число закодировано в двоичном виде.

2. Тогда пусть каждый iый кролик пьет вино если i ый бит равен 1.

3. Тогда на следующий день мы знаем какие кролики умерли. И номера этих кроликов указывают на биты равные 1 в двоичном представлении номера бутылки, которое отравлено.

4. Так как кролики пили одновременно, то вышел 1 день.

5. Если кроликов 5

6. Допустим можно за 3 дня. Каждый кролик может. Пить в день 1. В день 2. В день 3. Ну или быть мертвым в один из дней.

7. Присвоим каждой бутылке уникальный номер из вектора в $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5), k \in 0, 1, 2, 3$

8. Кролик i пьет из бутылка в день k_i

9. Тогда для каждого кролика Если умер в день d, то $k_i = d$

10. Если выжил, то $k_i = 0$

11. Количество комбинаций даёт $(3 + 1)^5 = 1024$ состояния различных.

12. Докажем, что меньше нельзя.

13. Предположим что можно за 2. Тогда у кролика 3 состояния. Умер в день 1. Умер в день 2 и выжил.

14. Для 5 кроликов кол-во состояний $3^5 = 243$ т.е такими способами можно закодировать бутылки.

15. Следовательно недостаточно двух дней.

16. Далее предположим, что всего 3 дня. Т.е 4 состояния у кролика. Умер в день 1. Умер в день 2. Умер в день 3. Жив.

17. Тогда информации $2^10 = 1024$ что хватает для кодирования 1000 бутылок.

18. Представим номер бутылки от 0 до 999 в четверичной системе счисления в виде 5-значного числа $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)_4$, где $b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Кролик i пьет из этой бутылки в день b_i (если $b_i \in \{1, 2, 3\}$; если $b_i = 0$, то не пьет). Если бутылка отравлена и $b_i = j \in \{1, 2, 3\}$, то кролик i умирает в день $j + 1$. На четвертый день мы будем знать, кто умер и в какой день, и сможем определить все b_i, а значит, и номер бутылки.

1.5 Задача 5

1. Проведём соревнование в 5 группах по 5 машин. Будет 5 быстрейших среди групп. +5 заездов.
2. Далее мы проводим заезд среди 5 этих сильнейших для определения чемпиона.
3. Далее у нас есть чемпион и нам надо определить рангом ниже чемпиона. Т.е взять 4 из 5 быстрейших и взять второго из начального заезда с чемпионом. Почему не 3его - он уже ниже нашего вторго и не имеет смысла брать топ 3 игрока. А топ 2 среди группы может обойти остальных.
4. Таким образом мы определили второго по скорости. Т.е всего $5 + 1 + 1 = 7$ заездов
5. Докажем что нельзя меньше 7.
6. Всего мы можем сравнить 5 машин между собой. Тогда сравним группы по 5. Затем еще этих 5 победителей по 5. Допустим мы хотим знать топ 2. Однако топ 2 среди последней группы может проиграть топ 2 среди группы победителя в первой сетке. Тогда возникает противоречие.

1.6 Задача 6

1. Разобьем нашу кучу шаров на 3 подкучи. 86 86 85. Будем рассматривать суммы двух куч из этих трёх. 3 запроса для нахождения кучи с 2мя радиоактивными шарами. Осталось 2/3 кучи. Или в худшем случае 172 шара. Если будем суммировать по 1, то мы не сможем сказать т.к множества не будут пересекаться и элементы могут быть просто в разных кучах.
2. Посмотрим, что будет если разбить на 4 подкучи. 65 64 64 64. Если будем суммировать по 3, то получим 3 проверки и 3/4 кучи. Если будем суммировать по 2. То нам понадобится 7 проверок. Что хуже, учитывая что мы получаем половину, вместо того, чтобы за то же количество -1 поверок получить 4/9 от изначальной кучи в первом варианте.
3. Для 5 чуть более сложно. Но суть та же, мы не получаем выигрыша в разбиениях и уж тем более в изменении суммирования.
4. Тогда мы делаем 3 проверки и получаем 2/3 кучи. Проделаем это выбирая наибольшую сумму всегда
5. 86, 86, 85: 172
6. 57, 57, 58: 115
7. 38, 38, 39: 77
8. 26, 26, 25: 52
9. 17, 17, 18: 35
10. 12, 12, 11: 24
11. 8, 8, 8: 16

12. 5, 5, 6: 11
13. 4, 4, 3: 8
14. 3, 3, 2: 5
15. 2, 2, 1: 4
16. 1, 1, 2 - тут 6 сравнений будет
17. Итого 39 сравнений.
18. Таким образом меняя разбиение и меняя суммирование, выигрыша мы не получим. И наиболее оптимальным поиском будет наш алгоритм который приведет за 39 ходов

1.7 Задача 8

1. Закодируем в троичную систему счисления.
2. Для первого взвешивания положим на одну чашу весов те монеты, у которых старший равзряд равен 0. На другую - у которых он равен 2.
3. Если перетянет чаша с 0, то запишем на бумажке цифру 0. Если 2 - 2. если равновесие - 1.
4. Для второго взвешивания - также второй разряд.
5. Для третьего - третий. и так 5 раз.
6. Мы получили цифру - пятизначное число. Далее определяем фальшивую монету по следующему алгоритму.
7. Если число совпадает с номером какой-то монеты, то эта монета фальшивая и тяжелее остальных. Если нет - заменим в этом числе все нули на двойки, а все двойки на нули. ТОгда эта монета легче остальных.

1.8 Задача 9

1. Если бы Илья был бы честным, то всего кол-во вариантов закодировать числа бинарными вопросами было бы 2^n
2. Т.к илья может соврать не более одного раза, то для каждого числа существует k+1 возможных последовательностей ответов
3. Чтобы Алла могла гарантированно определить число, все $200(k+1)$ сценариев должны соотвествовать уникальным последовательностям длины k.
4. Т.е $200(k+2) \leq 2^k$ Наименьшее такое целое $k = 12$
5. Таким образом за 12 вопросов.