Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

16 февраля 2025 г.

Содержание

1 Частные производные

1.1 Задача 1

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3\arctan(x)^2}{(1+x^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6\arcsin(2y)^2}{\sqrt{1-4y}}$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x-y}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^2+xy}{y^3}$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x\cos(6x\tan(y))\sec(y)^2 - \frac{x^2}{6\ln(5)y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6\cos(6x\tan(y))\tan(y) - 2\log_5(\sqrt[6]{11y})x$$

d)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x\cos(3y) + 2x^2\sin(y)^4 - sin(y)^4}{e^{x^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x\cos(6x\tan(y))\sec(y)^2 - \frac{x^2}{6\ln(5)y}$$

1.2 Задача 2

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{\arctan(xy^3)}y^3}{1+x^2y^6} = \frac{1}{2}e^{\pi/4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3e^{\arctan(xy^3)}xy^2}{1+x^2y^6} = \frac{1}{2}e^{\pi/4}$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (3x+y)^{3x+y}(3+3\ln(3x+y)) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (3x+y)^{3x+y}(1+\ln(3x+y)) = 1$$

1.3 Задача 3

$$\sqrt{|xy|} \leftrightarrow 0 \leq \sqrt{|x|}\sqrt{|y|} \leq \frac{|x|+|y|}{2}$$

по теореме о пределе промежуточной функции, сжатия, теореме о двух милиционерах предел нашей функции будет равен значению в 0, тогда функция непрерывна.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Таким образом в точке (0, 0) существуют обе частные производные.

функция назвается дифференцируемой в точке, если

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial}(x_0,y_0)\Delta y + o(p)$$

Подставляем, получаем

$$f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$$

подставим y=x

$$|x| = \sqrt{2}|x|$$

Значит не дифференцируема.

1.4 Задача 5

Пользуясь эквивалентностями

$$f(x,y) = |x|^a|y|^{0.5}$$

Перейдем к полярным координатам:

$$f(a,\theta) = r^{\alpha+0.5}|\cos(\theta)|^{\alpha}|\sin(\theta)|^{0.5}$$

При r стремящемся к 0 функция стремится к 0, если

$$\alpha > -0.5$$

При отрицательных α возникает деление на ноль, поэтому функция имеет смысл только при $\alpha > 0$

Тогда функция непрерывна при $\alpha \geq 0$ по определению

Найдем частные производные

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

таким образом, если функция дифференцируема, то ее дифференциал должен быть равен в точках 0, 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = r^{\alpha-0.5}|\cos(\theta)|^{\alpha}|\sin(\theta)|^{0.5}$$

если a > 0.5, то дифференцируема.

1.5 Задача 6

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial}(x_0, y_0)\Delta y + o(p)$$

Найдем частные производные

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{|xy|}\arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x^4 - \frac{x^2y^2}{3} + y^4\right)^{1/6}}\right) =$$

$$\frac{1}{2\left(3x^4 - x^2y^2 + 3y^4\right)^{7/6}|xy|^{3/2}}\times$$

$$\left(3^{1/6}\left(xy^2\left(3x^4 - x^2y^2 + 3y^4\right)\arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{2}{3}x^3y^2\left(6x^2 - y^2\right)\arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2x^3y^2\left(3x^4 - x^2y^2 + 3y^4\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+1\right)}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{|xy|}\arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x^4 - \frac{x^2y^2}{3} + y^4\right)^{1/6}}\right) =$$

$$\frac{y\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+1\right)\left(x^4 - \frac{x^2y^2}{3} + y^4\right)^{1/6}} +$$

$$\frac{x^2y\arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{2\left(x^4 - \frac{x^2y^2}{3} + y^4\right)^{1/6}|xy|^{3/2}} -$$

$$\frac{\left(4y^3 - \frac{2x^2y}{3}\right)\sqrt{|xy|}\arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{6\left(x^4 - \frac{x^2y^2}{3} + y^4\right)^{7/6}}$$

предел к 0 обоих производных даёт 0. тогда:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 0}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Перейдем в полярные координаты:

$$\frac{r^{1/3}\arctan(r)\sqrt{|\sin(2\theta)|}}{\sqrt{2}\left(1 - \frac{7}{12}\sin^2(2\theta)\right)^{1/6}} = 0$$

таким образом можно сделать оценку для нашей функции, что она стремится к 0 не больше, чем $r^{\frac{2}{3}}$, и отсюда следует, что она дифференцируема

1.6 Задача 8

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y + \pi\cos x}\cdot(2xy - \pi\sin x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2y + \pi\cos x}\cdot(x^2)$$

$$df = e^{-\pi/2 + \pi\cos 1}\left[-\pi(1+\sin 1)dx + dy\right]$$

1.7 Задача 9

$$z = u^2/v$$

$$d(\arctan(z)) = \frac{1}{1+z^2}dz$$

$$d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2$$

$$dz = d(u^2/v) = (vd(u^2) - u^2 d(v))/v^2$$

$$dz = (2uvdu - u^2 dv)/v^2$$

$$d(\mathrm{arctg}(u^2/v)) = (1/(1+(u^2/v)^2)) * [(2uvdu - u^2dv)/v^2]$$

$$d(\mathrm{arctg}(u^2/v)) = (2uvdu - u^2dv)/(v^2+u^4)$$

1.8 Задача 11

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial u} - 2y\frac{\partial f}{\partial v}$$

1.9 Задача 12

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y - z^2\right) = 2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y - z^2\right) = 1$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y - z^2\right) = -2z$$

$$\varphi'_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f'_u \cdot \frac{1}{y} + f'_v \cdot 2x$$
$$\varphi'_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = f'_u \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f'_v \cdot 1$$
$$\varphi'_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = f'_u \cdot 0 + f'_v \cdot (-2z) = -2zf'_v$$

$$\begin{aligned}
&2xz\varphi'_x + 2yz\varphi'_y + (2x^2+y)\varphi'_z \\
&= 2xz\left(f'_u \cdot \frac{1}{y} + f'_v \cdot 2x\right) + 2yz\left(f'_u \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f'_v \cdot 1\right) + (2x^2+y)\left(-2zf'_v\right) \\
&= \frac{2xz}{y}f'_u + 4x^2zf'_v - \frac{2xyz}{y^2}f'_u + 2yzf'_v - (4x^2z + 2yz)f'_v \\
&= \frac{2xz}{y}f'_u + 4x^2zf'_v - \frac{2xz}{y}f'_u + 2yzf'_v - 4x^2zf'_v - 2yzf'_v \\
&= \left(\frac{2xz}{y} - \frac{2xz}{y}\right)f'_u + \left(4x^2z - 4x^2z\right)f'_v + (2yz - 2yz)\,f'_v \\
&= 0 \cdot f'_u + 0 \cdot f'_v + 0 \cdot f'_v \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.10 Задача 14

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{14\sqrt{(14)}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{14\sqrt{(14)}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{14\sqrt{(14)}}$$
$$\nabla f(1;2;3) = -14\sqrt{14}(1;2;3)$$