Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

30 марта 2025 г.

Содержание

1 Определение и некоторые свойства несобственного интеграла

1.1 Задача 1

1. $\int_{-0.5\pi}^{0.5\pi} \tan(x)dx = -\ln(|\cos(x)|)\Big|_{-0.5\pi}^{0.5\pi} = -\ln(\cos(0)) + \ln(\cos(0))$
2. Расходится, т.к логарифм 0 - бесконечность и возникает разность бесконечностей, про которую нельзя ничего сказать. По крайней мере по риману.

1.2 Задача 2

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = 0.5\arctan(0.5x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$
2. $0.5(\pi/2 + \pi/2) = 0.5\pi$

1.3 Задача 3

1. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(\beta x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}$
2. $\int e^{mx}\cos(nx)dx = \frac{m\sin(nx)+n\cos(nx)}{m^2+n^2}e^{mx}$
3. $F(x) = \frac{-a\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x)}{e^{ax}(a^2+\beta^2)}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-a\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x)}{e^{ax}(a^2+\beta^2)} - \lim_{x\to 0} \frac{-a\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x)}{e^{ax}(a^2+\beta^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-a\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x)}{e^{ax}(a^2+\beta^2)} + \frac{a}{b^2+a^2}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-a\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x)}{e^{ax}(a^2+\beta^2)} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}} = \frac{a}{b^2+a^2}$
8. Таким образом $\alpha \neq \beta \neq 0$

1.4 Задача 4

1. Нам задана функция $y = x\frac{1+x}{1-x}$
2. Нам необходимо найти площадь под графиком от 0 до 1.
3. $\int_0^1 x\frac{1+x}{1-x}dx$
4. $\int_0^1 -x + 1 + 2 - \frac{2}{1-x}dx$
5. $F(x) = -0.5x^2 + 3x + 2\ln(|x-1|)$
6. $-0.5 + 3 + 2\ln(0)$ - расходится

1.5 Задача 6

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}$
2. Разобьем на $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}$
3. $u = \frac{1}{x}$
4. $\int_1^0 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$
5. $-\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$
6. $\int_0^1 \frac{ln(x)}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = 0$

2 Несобственные интегралы от знакопостоянных функций

2.1 Задача 7

1. $\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$
2. Есть точка разрыва 0.
3. Распиливаем: $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx + \int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}$
4. $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2}$
5. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} = \int_{+\infty}^1 -ue^u du = \int_1^{+\infty} ue^u du$
6. $F(u) = e^u(u-1)$ видно, что предел в бесконечости равен бесконечности, значит интеграл не сходится.
7. Следовательно $\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$ не сходится
8.

2.2 Задача 8

1. Попробуем доказать, что $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4} = 0.5 \arctan(0.5x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$
2. Т.к у нас $\cos(4x)$ будет не всегда принимать значения =1, то $|\int_0^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{x^2+4}| < \frac{\pi}{4}$

2.3 Задача 9

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)dx}{(1+x^2)(e^x-1)^a}$
2. Рассмотрим поведение интеграла возле 0:
3. $\int_0^{\varepsilon} x^{1-a} dx$
4. Таким образом $a < 2$, чтобы интеграл сходился.
5. Далее рассмотрим верхнюю оценку на бесконечности:

6. $\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2e^{\alpha x}}$

7. Если a>0 то интеграл не будет сходится на бесконечности т.к экспоненциальная функция растёт быстрее любой полиномиальной.

8. Если a=0, то $F(0)$ будет равен бесконечности. Т.е будет расходится

9. Таким образом $a \in (0,2)$

2.4 Задача 10

1. $\int_0^{+\infty} \ln^a(\cosh(x)) \cdot \arcsin(\frac{2x}{3+x^2})dx$

2. Рассмотрим ассимптотики на бесконечности.

3. $\ln(\cosh(x)) = \ln(\frac{e^x}{2}) = x - \ln(2) = x \Rightarrow \ln^a(\cosh(x)) = x^a$

4. $\frac{2x}{3+x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow \arcsin(\frac{2x}{3+x^2}) = \frac{2}{x}$

5. $x^a \cdot \frac{2}{x} = 2x^{a-1} \Rightarrow a < 0$ т.к иначе будет расходится на бесконечности.

6. Теперь рассмотрим при стремлении к 0.

7. $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow \ln(\cosh(x)) = \ln(1+0.5x^2) = 0.5x^2$

8. $\arcsin(u) = u + \frac{u^3}{6} \Rightarrow \arcsin(\frac{2x}{3+x^2}) = \frac{2x}{3}$

9. $\ln^a(\cosh(x)) \cdot \arcsin(\frac{2x}{3+x^2}) = \frac{1}{2^a}x^{2a} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2}{3 \cdot 2^a}x^{2a+1}$

10. Расходится если $2a+1 > -1 \Rightarrow a > -1$

11. Таким образом $-1 < a < 0$

2.5 Задача 11

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\frac{2+x^2}{1+x^2})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}\arctan(x))^a}$

2. Рассмотрим около 0.

3. $\ln(1+x^2) = x^2 \wedge \ln(2+x^2) = \ln(2) + \frac{x^2}{2} \Rightarrow \ln(2+x^2) - \ln(1+x^2) = \ln(2) - 0.5x^2$

4. $\arctan(x) = x, \wedge \sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = x^{0.25}$

5. $\frac{\ln(2)+0.5x^{2-1.25a}}{1}$

6. $2 - 0.25a > -1 \Rightarrow a < 6$

7. Ассимптотики на бесконечности

8. $\ln(2+x^2) = \ln(x^2(2x^{-2}+1)) = 2\ln(x) + \ln(1+2/x^2)$

9. $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln(1+1/x^2)$

10. $\ln(2+x^2) - \ln(1+x^2) = 1/x^2$

11. $\sqrt{x+\sqrt{x}}\arctan(x)^a = \sqrt{x}$

12. $\frac{\ln(\frac{2+x^2}{1+x^2})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}\arctan(x))^a} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}^a x^{2+a/2}}$

13. $-2 < a < 4/5$

2.6 Задача 12

1. Рассмотрим около 0
2. $\ln(\cos(x/(x+1))) = \ln(1-0.5x^2) = -0.5x^2$
3. $|\ln(\cos(x/(x+1)))| = 0.5x^2$
4. $\sinh(ax)/e^x = \frac{ax}{1}$
5. $|\ln(\cos(x/(x+1)))|\sinh(ax)/e^x = 0.5x^{2(a-1)+1}a$
6. $2(a-1)+1 > -1 \Rightarrow a > 0$ - пользуясь вторым признаком сравнения
7. Далее будем рассматривать на бесконечности.
8. $\cos(1-\frac{1}{x+1}) = 1$
9. $|\cos(1-\frac{1}{x+1})|^{a-1} = |\ln(\cos(1))|^{a-1}$
10. $\frac{\sinh(ax)}{e^x} = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2e^x} = 0.5(e^{(a-1)x} - e^{-(a+1)x})$
11. $\frac{|\ln(\cos(1))|^{a-1}}{.}0.5(e^{(a-1)x} - e^{-(a+1)x})$ сходится только в случае, если a<1, если больше, то будет бесконечность - бесконечность. Если равен, то константе, значит наш интеграл будет бесконечно накапливаться и не будет сходимости.
12. $0 < a < 1$

3 Примеры решения задач на условную и абсолютную сходимость интегралов

3.1 Задача 14

1. $\int_0^1 \frac{\sin^3(\frac{1}{x})}{\arctan^a(x)}dx$
2. $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx$
3. $\int_1^\infty \frac{\sin^3(t)}{t^2\arctan^a(1/t)}$
4. $\lim_{t\to 1} \frac{|\sin^3(t):}{t^2\arctan^a(1/t)} = \frac{4^a\sin^3(1)}{\pi^a}$
5. $\lim_{t\to\infty} \frac{|\sin^3(t)|}{t^2\arctan^a(1/t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{|\sin^3(t)|}{t^{2-a}}$ таким образом $a < 1$
6. Т.е если a<1 то абсолютно сходится
7. Проанализируем на условную сходимость
8. $\frac{\sin^3(t)}{t^{2-a}} = \frac{3\sin(t)-\sin(3t)}{4t^{2-a}}$

9. $\int_1^{\infty} \frac{3\sin(t)}{4t^{2-a}} - \int_1^{\infty} \frac{\sin(3t)}{4t^{2-a}}$

10. Теперь для того, чтобы можно было по Признаку дирихле сказать, что интеграл условно сходится, необходимо, чтобы не a<=1 и 2-a > 0 т.е 1<=a<2

3.2 Задача 15

1. $\int_1^{+\infty} \left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right| \frac{dx}{x^a}$

2. $\left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right| \frac{1}{x^a} \ \leq \ \frac{1}{x^a}$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}, a > 1$ только в таком случае абсолютно сходится

4. $\int_1^{+\infty} \sin\Bigg(x + \frac{1}{x}\Bigg) \frac{dx}{x^a}$

5. Для условной сходимости, пусть $f(x) = \sin(x + 1/x), \quad g(x) = 1/x^a$

6. Тогда первообразная f ограничена на всём интервале, предел функции g в бесконечности равен 0, функция g нестрого убывает, только при 0 < a < 1.

3.3 Задача 19

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)\sin(x)}{x}$

2. $f(x) = \sin(x) \wedge g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

3. $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную

4. $g(x)$ непрерывно дифференцируема и стремится к нулю при $x \to \infty$

5. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0.5 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - 0.5 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$

6. Рассмотрим первый интеграл - он расходится, т.к будет равен $\ln(+\infty)$

7. Следовательно утверждение, что монотонность неважны в критерии дирихле, неверно.