Домашнее задание

По курсу: **Математический Анализ**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

22 марта 2025 г.

Содержание

1 Интегрирование дробно-рациональных функций

1.1 Задача 1

1. Разделим на n равных подинтервалов $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
2. Выберем в качестве $\xi_i = a + i\Delta x$ правые концы.
3. $f(x_i) = x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$
4. $\sigma(f; r; \xi_r) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{b-a}{n})(a + \frac{i(b-a)}{n}) = \sum_{i=1}^{n} a\frac{b-a}{n} + \frac{i(b-a)^2}{n^2}$
5. $\frac{-1}{2} \cdot \frac{(a-b)(-a+b+an+bn)}{n}$

1.2 Задача 2

1. Нет, допустим $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, интегрируема на отрезке от 0 до 1 и интеграл равен 2м.
2. $g(x) = x^2$
3. $f(g(x)) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$

1.3 Задача 3

1. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1.5}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n^{1.5}} \int_0^n \sqrt{k} = \frac{1}{n^{1.5}} \cdot \frac{2}{3} n^{1.5} = \frac{2}{3}$

1.4 Задача 4

1. $y = nx$, $dy = ndx$
2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f(y)}{n} dy = \frac{1}{n} \int_0^n f(y)dy = A$ по первой теореме о среднем

1.5 Задача 5

1. Да, т.к сли функция интегрируема на отрезке, то она ограничена по определению интеграла по Риману. Т.е по определению

1.6 Задача 6

1. Нулю, т.к первообразная равна константе, а производная константы будет равна 0.
2. $\sin(x^2)$
3. $2x\sqrt{1+x^4}$
4. $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{1+x^8}$

1.7 Задача 7

1. $f'(x) = 2x\frac{1-x^4}{2+x^8}$ - через замену переменных
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -1, \quad x = 1$

1.8 Задача 8

1. Тут к сожалению с ходу не получится ничего сказать, поэтому пусть $\varphi(x) = \arccos(x)$
2. Заметим, что экспоненцальная функция убывает от 0 до 1.
3. Оценка снизу $\frac{1}{3}\int_0^1 \arccos(x)dx$
4. $\int_0^1 \arccos(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1$
5. Тогда оценка сгизу равна $\frac{1}{3}$
6. Оценка сверху получится, если экспонента примет максимум при x=0, т.е экспонента будет равна 1, значит оценка сверху - 1. Неравенство строгое т.к $3^{-x} < 1 \forall x > 0$
7. Что и требовалось доказать

1.9 Задача 9

1. $\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x \cdot x \cdot (x-1)}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}dx$
2. $\int_{-2}^{-1} \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}dx$
3. $\ln(\frac{16}{9}) - 0.5$

1.10 Задача 10

1. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
2. $u = \sqrt{x}, \quad u^2 = x, \quad dx = 2udu$
3. $\int_0^4 \frac{2udu}{1+u} = \int_0^4 \frac{2(u+1)-2}{=} \int_0^4 2 - \frac{2}{1+u} = 4 - 2\ln(3)$

1.11 Задача 11

1. $\int_0^{0.5\pi} \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}$
2. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой
3. $\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$

1.12 Задача 12

1. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$
2. $t = \ln(x), \quad dt = \frac{1}{x}dx$
3. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{2} - 2$

1.13 Задача 13

1. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$
2. $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow dt = \frac{x}{t} dx \Rightarrow dx = \frac{tdt}{x}$
3. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{x^2} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t^2-1}$
4. $I = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$
5. $\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$

1.14 Задача 14

1. $\int_1^{\sqrt{3}} x \arctan(x) dx$
2. $\left[\frac{x^2}{2} \arctan(x)\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$
3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$
4. $\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

1.15 Задача 15

1. Логарифм принимает отрицательные значения на промежутке от 0 до 1 и неотриц от 1 до бесконечности
2. Пользуясь свойством аддитивности интеграла $-\int_{e^{-1}}^1 \ln(x)dx + \int_1^e \ln(x)dx$
3. $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C$
4. $2 - \frac{2}{e}$

1.16 Задача 16

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x (\arctan(t)^2 dt)}{\sqrt{x^2+1}}$
2. Пользуясь правилом лопиталя т.к возникает неопределенность бесконечность на бесконечность $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}\arctan^2(x)}{x}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \arctan(x)^2 = \frac{\pi^2}{4}$

1.17 Задача 18

1. $u = \pi = x \Rightarrow du = -dx$
2. $I = \int_\pi^0 (\pi - u)\, f\big(\sin(\pi-u)\big)\,(-du) = \int_0^\pi (\pi-u)\, f\big(\sin(\pi-u)\big)\, du$
3. $I = \int_0^\pi (\pi-u)\, f(\sin u)\, du$
4. $I = \int_0^\pi x\, f(\sin x)\, dx \quad$ и $\quad I = \int_0^\pi (\pi - x)\, f(\sin x)\, dx$
5. $2I = \int_0^\pi \big[x + (\pi - x)\big] f(\sin x)\, dx = \int_0^\pi \pi\, f(\sin x)\, dx$

6. $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$

7. $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$

1.18 Задача 19

1. $u = \frac{1}{2t}\ dv = 2t\sin(t^2)\, dt\ du = -\frac{1}{2t^2}dt, \quad v = -\cos(t^2)$

2. $\int \sin(t^2)\, dt = -\frac{\cos(t^2)}{2t} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos(t^2)}{t^2}\, dt$

3. $\int_x^{x+1} \sin(t^2)\, dt = \left[-\frac{\cos(t^2)}{2t}\right]_x^{x+1} + \frac{1}{2}\int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{t^2}\, dt$

4. Оценим каждое слагаемое:

5. $\left|-\frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)} + \frac{\cos(x^2)}{2x}\right| \leq \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)$

6. $\left|\frac{1}{2}\int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{t^2}\, dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_x^{x+1} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$

7. Суммируем оценки:

8. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x}$

9. Т.к $\cos(t^2) \neq 1$ строгое неравенство выполняется.

10. $\left|\int_x^{x+1} \sin(t^2)\, dt\right| < \frac{1}{x}$