Домашнее задание

По курсу: **Дискретная математика**

Студент: Ростислав Лохов

АНО ВО Центральный университет

12 марта 2025 г.

Содержание

1 Свойства сочетаний. Сочетания с повторениями. Числа Каталана

1.1 Задача 1

1. Порядок неважен, т.е мы однозначно можем восстановить необходимое число из множества цифр длиной 5(любое множество цифр может быть неубывающим/невозрастающим).

2. Тогда задача сводится к тому, чтобы найти Количество сочетаний с повторениями из 10 цифр по 5, для пятизначного числа.

3. Каждая цифра может быть 5 раз, за исключением 0, он может быть 4 раза.

4. Всего сочетаний повторениями $\binom{14}{5}$

5. Т.к одно множество будет $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ просто вычтем 1

6. Тогда ответ будет $\frac{14!}{5!9!} - 1 = \frac{10*11*12*13*14}{1*2*3*4*5} - 1 = 2001$

1.2 Задача 2

1. Рассмотрим первую связку, для нее возможно $\binom{60}{15}$ вариантов сочетания грибов.

2. Рассмотрим вторую связку, для нее возможно $\binom{45}{15}$ вариантов сочетания грибов.

3. Рассмотрим вторую связку, для нее возможно $\binom{30}{15}$ вариантов сочетания грибов.

4. Рассмотрим вторую связку, для нее возможно $\binom{15}{15} = 1$ вариантов сочетания грибов.

5. Тогда нам необходимы такие варианты где нам необходимо выбрать все связки.

6. Однако в нашем случае связки считаются упорядоченными т.к мы неявно задаём порядок рассматривая сначала первую связку, затем вторую и т.п

7. Таким образом $n = \frac{\binom{60}{15} \cdot \binom{45}{15} \cdot \binom{30}{15}}{4!}$

1.3 Задача 3

1. Между каждой парой выбранных книг должно быть не менее 3х книг. Задача о барьерах.

2. Для 10 выбранных книг у нас 9 промежутков, каждый занимает минимум 3 места

3. $3 \cdot 9$ книг занято, можем оперировать только $50 - 3 \cdot 9$. Всего 10 интересующих книг. Тогда $\binom{23}{10}$ при этом условие минимум 3 места уже учтено.

1.4 Задача 4

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} \cdot \binom{m-k}{n}$$

$$\binom{k}{n} \cdot \binom{m-k}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$= \binom{m}{n} \cdot \binom{k}{m}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} \cdot \binom{m-k}{n-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{n} \cdot \binom{k}{m} = \binom{m}{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{n} \cdot 2^m$$

1.5 Задача 5

$$(\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n})^2 = ((1+1)^n)^2 = (1+1)^2 n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{2n}$$

1.6 Задача 6

1. $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. Функция строго возрастает при $n \geq k$
3. $\forall k C(n,k) = m$ т.е имеет не более одного решения n для произвольного m
4. Рассмотрим k>m. Минимальное значение C достигается при n=k и равно 1. Однако если мы возьмем n=k+1 то C=k+1. Если k+1>m то для всех $n \geq k + 1 C(n,k) \geq k+1 > m$
5. Таким оразом при $k \geq m$ нет решений
6. Таким образом следует, что k может принимать значения только от 1 до m-1. Для каждого такого k существует не более одного m удовлетворяющее уравнению $C(n,k) = m$
7. Следовательно общее кол-во пар (n,k) для которых $C(n,k) = m$ не превышает m-1 что конечно.

1.7 Задача 7

1. Воспользуемся теоремой Люка: бином нечетен тогда и только тогда, когда двоичные цифры в двоичном разложении n являются подмножеством битов m
2. Т.е каждый бит k не превосходит соответствующий бит n в двоичной системе.
3. если $n = \sum_{i=0}^{m} a_i 2^i$ $k = \sum_{i=0}^{m} b_i 2^i$ то C(n, k) нечетен тоже самое, что и $\forall i b_i \leq a_i$
4. Если $a_i = 1 \Rightarrow b_i = 0 \vee b_i = 1$
5. Если $a_i = 0 \Rightarrow b_i = 0$
6. Тогда для каждого $a_i = 1$ есть 2 варианта выбора b_i, а для $a_i = 0$ только один.

7. Тогда общее количество нечентных $C(n,k) = \prod_{i=0}^{m}(1+a_i) = 2^{\text{Кол-во единиц в n}}$

8. Тогда в нашем случае $2025_{10} = 11111101001_2$

9. Общее количество нечетных: $2^8 = 256$

10. Общее количество четных - $2025 + 1 - 256 = 1770$; $+1$ потому что строки нумеруются с нуля(n строка содержит n+1 чисел).

1.8 Задача 8

1. У нас есть n людей k людей имеют 50р, 50 рублей стоимость кино, если дают купюру в 100 рублей - мы даём 50 рублей сдачи т.е минус 50 рублей из кассы.

2. Далее у нас есть купюра в 100 рублей, если мы разменяли, то это тупо мертвый груз с которым мы ничего не можем делать(100 рублей осталось)

3. Тогда, согласно условию, у нас есть возможность добавить 50р в кассу, убавить кассу на 50р при этом добавить 100 р. при обоих случаях у нас тратится билет. Всего n билетов

4. Можем просто убрать 100р, роли не играет. Т.е остались варианты 50 р или -50 рублей сделать, пусть будет +1 и -1 соответственно

5. Согласно условию количество людей с 100 рублями, не превышает количество с 50 рублями. $k \geq n - k$

6. Представим координатную ось, где ось ординат - количество 50 рублевых купюр, ось абсцисс - количество людей.

7. Тогда минимальной допустимой точкой будет $k = n - k \Rightarrow 2k - n = 0$, где мы получаем, что каждому 50 рублёвому соответствует 100 рублёвый, чтобы они друг-друга компенсировали и в сумме в кассе было 0.

8. Пойдём из точки (0, 0) в точку (n, 2k-n), существует способы (+1, -1) (+1, +1) человек с 50 рублями и человек со 100 рублями соответственно.

9. Всего будет n-k способов использовать -1 и k способов использовать +1, тогда общее количество перемещений - $k + n - k = n$

10. Тогда общим количеством перемещений будет $\binom{n}{k}$ нужно выбрать k позиций для (+1, +1) и это будет тоже самое что и $\binom{n}{n-k}$

11. Теперь посчитаем количество плохих траекторий. Для этого мы построим биекцию юмежду плохими траекториями, вудещими из (0, 0) в (n, 2k-n) и произвольными траекториями.

12. Далее мы отражаем относительно прямой y = -1 т.к в этой точке мы получаем уже достаточное условие того, что траектория становится неправильной (2k-n<0)

13. Получаем точку (n, -n-k-2) и добраться до нее можно сделав n+1 шаг k способами

14. Количество хороших траекторий - разница всех и плохих - $(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1})k!(n-k)!$ т.к можно разместить людей еще различно, а не конкретно скобочки

1.9 Задача 10

1. На любом начальном отрезке строки количество символов (не меньше, чем количество символов)

2. Ось ординат - количество открытых скобочек, абсцисс - общее количество скобочек

3. Будем рассматривать на координатной плоскости из точки (0, 0) в (2n, 0) способами (+1, +1) (+1, -1) если скобка открывающая и закрывающая соответственно.

4. Весь путь 2n шагов, Если количество открывающих скобок m, то конечная точка будет на высоте k=2m-2n, $k \geq 0 \Rightarrow m \geq n$

5. Для каждого пути, нарушающего условие(опускается ниже оси x), существует соответствующий путь, отраженный относительно уровня -1. Количество таких плохих путей с m открывающими скобками равно $\binom{2n}{m-1}$

6. $\forall m \geq n$ количество допустимых путей с m открывающими скобками равно $\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}$

7. Суммируем $\sum_{m=n}^{2n} \binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1} = \binom{2n}{2n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n}$

1.10 Задача 11

1. Это та же самая задача о количестве правильных скобочных последовательностей. Только теперь нам без разницы, ((или)) у нас т.к это одно и то же

2. Тогда обозначим за k - красные b - черные

3. Определим пару убирающейся, если она выглядит следующим образом: $rr \vee bb$

4. Тогда количество сочетаний тех, которые нас интересуют$(rr \vee bb)$ равно количеству сочетаний $rb \vee br$ т.к всего можно из двух букв сделать 4 комбинации и они делятся строго на 2 группы.

5. Это задача на правильную скобочную последовательность. пустая строка - псп. Если строка S это ПСП - rSb или bSr это также ПСП. если S и T это ПСП, то их конкатенация также ПСП.

6. Тогда воспользуемся числом Каталана и получим, что если цвет был одним и тем же, то $\frac{1}{27}\binom{26}{52}$

7. Тогда для двух цветов $\frac{1}{27}\binom{26}{52}^2$