



# LOIS DE LA STRUCTURE

---

*OGOU OLANIRAN CYRIAQUE*

## SOMMAIRE

INTRODUCTION .....	3
RESUME .....	3
CHAPITRE I : LOIS DE LA STRUCTURE.....	4
Etat de la déformation .....	4
Les lois de Kirchhoff appliqués .....	5
Intermité K d'un matériau élastique .....	6
Energie libérée par un matériau élastique.....	7
Mécanique statique.....	11
Champ mécanostatique T.....	11
Notion de la H.....	12
Énergie stockée dans un matériau fragile .....	12
Mécanique dynamique.....	16
Champ mécanodynamique R .....	16
Théorème d'Ampère appliqué .....	16
Notion de la laricité F .....	17
Energie stoclée dans un matériau plastique .....	17
Induction mécanique.....	17
Rigidité R d'un matériau .....	23
Energie de changement de domaine .....	23
La disruption.....	24
Les Oscillateurs mécaniques .....	26
Notion du vide mécanique .....	29
Dualité onde-corpuscule .....	30
Action efficace .....	34
Formule du centre de gravité d'une charge polynômiale .....	34
CHAPITRE II : STRUCTURE ANALITYTIQUE .....	38
OBJECTIFS DE LA DISCIPLINE .....	38
CHAPITRE Iii : STRUCTURE HYPERSTATIQUE .....	40
Les lois de la statiques.....	40
Résolution des poutres continues.....	48
Degré ou ordre d'encastrement d'un appui.....	50
Résolution des portiques.....	51
CHAPITRE IV : NORME DE CONSTRUCTION.....	52

Utilité de la récidance d'un matériau .....	52
Dimensionnement de tout élément de structure .....	53
Règle de construction es structure .....	55
Prophétie sur l'avenir de la mécanique.....	57
CONCLUSION .....	59

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Ciderité d'un matériau.....	12
Tableau 2 : Laricité d'un matériau.....	18
Tableau 3::Tabulaire direct.....	29
Tableau 4 : Analogie Electricité-Mécanique.....	37

## **INTRODUCTION**

L'ingénierie est le domaine d'application de la physique ; de ce fait les lois et théorèmes de la physique doivent être appliqués et vérifiés dans toutes les branches de l'ingénierie. Cependant nous constatons de nos jours que les lois de la physique théorique disparaissent peu à peu au profit des lois empiriques et de plus chaque branche de la physique a ses propres lois. On assiste ainsi à une myriade de lois intra et interdisciplinaires. Le vrai problème des lois empiriques est qu'elles sont relatives et contiennent toujours des erreurs. L'ingénieur annule ces erreurs ou presque en surdimensionné l'ouvrage. C'est pourquoi les ouvrages tiennent en ingénierie au prix des matériaux. Or les matériaux s'amenuisent et la pénurie avance à grand pas, il faut alors chercher à corriger les lois au lieu de rechercher d'autres matériaux car les mêmes causes produisent les mêmes effets. A travers notre étude nous avons montré que l'Electricité et la Mécanique sont régies par les mêmes lois ou presque et que lorsque nécessaire certaines lois de l'Electricité peuvent s'appliquer en Mécanique.

## **RESUME**

Notre document contient quatre parties essentielles. Dans la première nous avons décrit les lois de la structure ; cette partie est la plus importante de notre étude. Nous avons montré dans cette partie que les lois de l'Electricité statique et dynamique s'appliquent bien en Mécanique. De nouveaux termes ont vu le jour à cause de notre besoin de désigner certaines choses qui jusqu'ici ne sont pas nommées. Dans la deuxième, nous avons parlé de la structure analytique. Dans cette nous avons pensé bien de commencer à modéliser l'ossature de tout ouvrage par des fonctions mathématiques. Dans la troisième nous avons parlé de l'hyperstatique et proposé des méthodes de calcul des systèmes hyperstatiques et dans la dernière partie de notre étude nous avons proposé une méthode de dimensionnement des éléments de la structure.

## **CHAPITRE I : LOIS DE LA STRUCTURE**

### **Etat de la déformation**

Lorsqu'on soumet un élément de structure à une sollicitation celui-ci passe par deux états : l'état fragile et l'état ductile

#### ➤ L'état fragile

Quand le matériau est à l'état fragile, il se comporte comme un corps dur et résiste à la pénétration d'un corps étranger. Dans cet état de matériau chaque particule du matériau reçoit la totalité de la contrainte qui lui est transmise et il n'y a ni dissipation et n'y a perte de contrainte. Mais le matériau ne se déforme quasiment pas et se rompt lorsque l'effort devient important : c'est le cas des verres

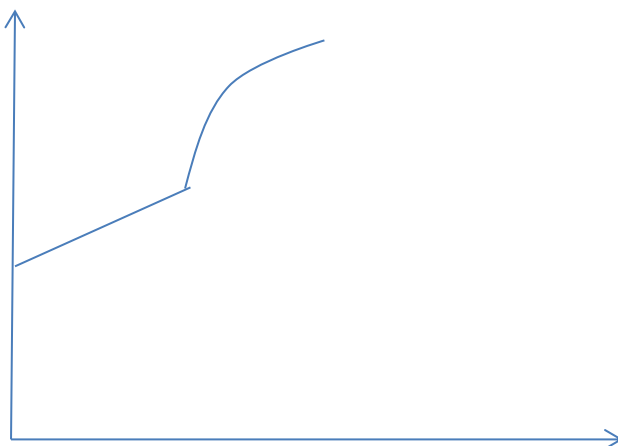
#### ➤ L'état ductile

Cet état est divisé en deux phases : la phase élastique et la phase plastique

Dans la phase élastique l'effort est proportionnel au déplacement. La phase plastique est une variation différée de la déformation : Dans cette phase on observe une variation importante du déplacement pour un effort pratiquement constant.

L'état ou la phase d'un matériau est déterminé par l'effort appliqué sur le matériau. Ainsi un matériau plastique par nature peut travailler en élastique ou en verre si l'effort qui lui est appliqué n'est pas suffisant pour l'amener dans le domaine élastique.

Les trois phases décrites ci-dessus sont représentées dans le schéma suivant



**Branche** : Une branche est une portion de la structure dans laquelle se propage le même effort

**Nœud** : Un nœud est le point de rencontre d'au moins trois branches

**Maille** : Une maille est un circuit fermé formé par plusieurs branches non convergentes

### Les lois de Kirchhoff appliqués

Vous avez connu Kirchhoff par ses Lois de l'électricité: loi des mailles et des nœuds , seulement que les lois de Kirchhoff peuvent aussi être appliquées en structure.

#### **Loi des nœuds**

La somme des efforts arrivent à un nœud est égale à la somme des efforts qui en repartent.

#### **Loi des mailles**

La somme algébrique des déplacements dans une maille est nulle.

#### **Proposition**

Pour tout élément soumis à la flexion simple on a  

$$\delta(x) = \frac{a}{2} \ln M_z$$

#### **Preuve**

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} y \text{ et } \tau_{xy} = \frac{T_y}{y} \frac{S_z}{I_z}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{T_y}{y^2} \frac{S_z}{I_z} \frac{I_z}{M_z} \Leftrightarrow \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{T_y}{y^2} \frac{S_z}{M_z}$$

Pour  $y = b$  on a  $\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{T_y}{b^2} \frac{S_z}{M_z}$  or  $S_z = \frac{1}{2} ab^2$  donc

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{a}{2} \frac{T_y}{M_z} \text{ or } T_y = \frac{dM_z}{dx} \text{ alors } \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{a}{2} \frac{\frac{dM_z}{dx}}{M_z}$$

$$\int \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}} dx = \frac{a}{2} \int \frac{\frac{dM_z}{dx}}{M_z} dx \text{ en posant } \delta(x) = \int \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}} dx \text{ on a}$$

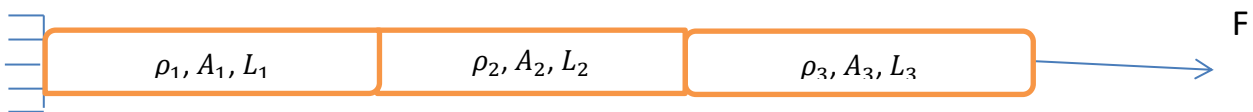
$$\delta(x) = \frac{a}{2} \ln M_z$$

### Schéma équivalent

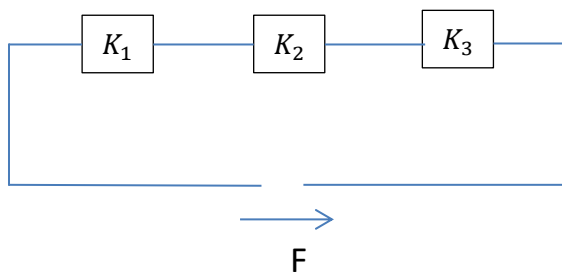
On appelle schéma équivalent d'un schéma structural le schéma montrant uniquement les composants des éléments de la structure.

### Exemple

Soit le schéma suivant



Son schéma équivalent (mécanique) est



### **Intermité $K$ d'un matériau élastique**

Quand l'on soumet un matériau à une action (effort ou moment) celui cherche à résister aux déformations (déplacement ou rotation). La résistance d'un matériau à une déformation dépend de son type et de sa géométrie. En général plus un matériau est dense plus il va résister au déplacement. Le rapport entre l'effort et le déplacement d'un matériau est sa capacité à s'opposer au déplacement et cette capacité est appelée intermité.

$$K = \rho \frac{L}{A}$$

$K$  est l'intermité du matériau

$\rho$  la résistivité mécanique (masse volumique) du matériau

$A$  et  $L$  désignent respectivement la surface et la longueur du matériau

## Energie libérée par un matériau élastique

$$E = KU^2$$

C'est une énergie thermique. Elle est dissipée dans les matériaux par effet connu en électricité comme effet Joule. Cette énergie est responsable du passage de tout matériau du domaine élastique au domaine plastique..

## Montage Série/parallèle des matériaux

Dans cette partie de notre étude nous admettons les hypothèses suivantes

- La liaison entre deux matériaux est parfaite
- Les éléments assemblés travaillent dans un même état

## Traction simple

### Propriété

Dans un assemblage série il y a unicité de l'effort et additivité de déplacement

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \text{ et } N = N_i$$

Dans un assemblage parallèle il y a unicité de déplacement et additivité de l'effort

$$N = \sum_{i=1}^N N_i \text{ et } U = U_i$$

## Association série de matériaux



Soit les trois éléments purement élastiques ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en série et on cherche à déterminer l'inductance équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est série  $N = N_1 = N_2 = N_3$

$$N = N_1 = N_2 = N_3 \Leftrightarrow Ku = K_1U_1 = K_2U_2 = K_3U_3$$

$$\Leftrightarrow U_1 = \frac{K}{K_1}U, U_2 = \frac{K}{K_2}U, U_3 = \frac{K}{K_3}U$$



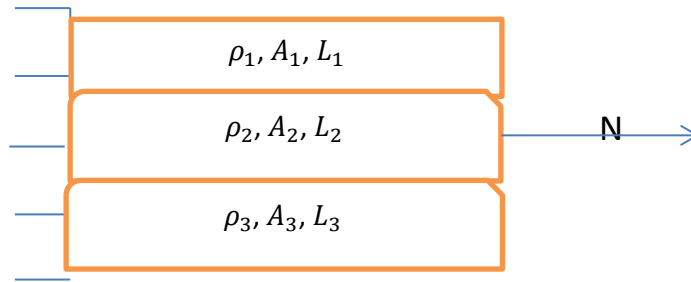
On déduit que  $U_i = \frac{K_{\text{équi}}}{K_i} U$

De plus  $U = U_1 + U_2 + U_3$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \Leftrightarrow \frac{N}{K_{\text{équi}}} = \frac{N}{K_1} + \frac{N}{K_2} + \frac{N}{K_3} \text{ car } N = N_1 = N_2 = N_3$$

$$\text{D'où } \frac{1}{K_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{K_i}$$

### Association parallèle de matériaux



Soit les trois éléments purement élastiques ci-dessus . On suppose que les trois éléments sont assemblés en parallèle et on cherche à déterminer l'indéformité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est parallèle  $U = U_1 = U_2 = U_3$

$$U = U_1 = U_2 = U_3 \Leftrightarrow \frac{N}{K_{\text{équi}}} = \frac{N_1}{K_1} = \frac{N_2}{K_2} = \frac{N_3}{K_3}$$

$$\Leftrightarrow N_1 = \frac{K_1}{K_{\text{équi}}} N, N_2 = \frac{K_2}{K_{\text{équi}}} N, N_3 = \frac{K_3}{K_{\text{équi}}} N$$

On déduit que  $N_i = \frac{K_i}{K_{\text{équi}}} N$

De plus  $N = N_1 + N_2 + N_3$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \Leftrightarrow K_{\text{équi}} U = K_1 U_1 + K_2 U_2 + K_3 U_3$$

$$\text{D'où } K_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 K_i$$

### Pont diviseur de déplacement et indéformité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement élastiques en série

$$U_i = \frac{K_{\text{équi}}}{K_i} U \text{ et } \frac{1}{K_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{K_i}$$

### Pont diviseur de l'effort et indermité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement élastiques en parallèle

$$N_i = \frac{K_i}{K_{\text{équi}}} N \text{ et } K_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 K_i$$

### CISAILLEMENT PUR

#### Propriété

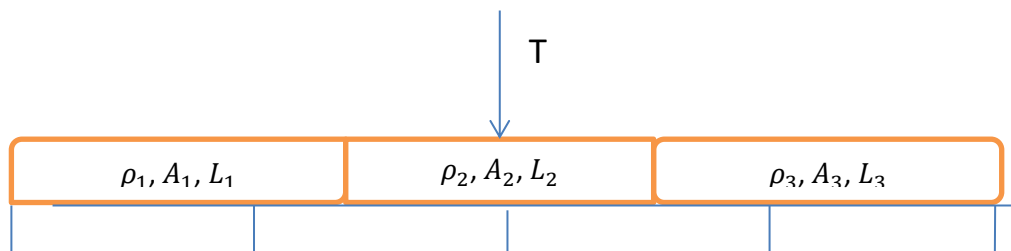
Dans un assemblage série il y a additivité de l'effort et unicité du déplacement

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \text{ et } V = V_i$$

Dans un assemblage parallèle il y a unicité de l'effort et additivité du déplacement

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \text{ et } T = T_i$$

### Association série de matériaux



Soit les trois éléments purement élastiques ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en série et on cherche à déterminer l'indermité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est série  $V = V_1 = V_2 = V_3$

$$V = V_1 = V_2 = V_3 \Leftrightarrow \frac{T}{K_{\text{équi}}} = \frac{T_1}{K_1} = \frac{T_2}{K_2} = \frac{T_3}{K_3}$$

$$\Leftrightarrow T_1 = \frac{K_1}{K_{\text{équi}}} T, T_2 = \frac{K_2}{K_{\text{équi}}} T, T_3 = \frac{K_3}{K_{\text{équi}}} T$$

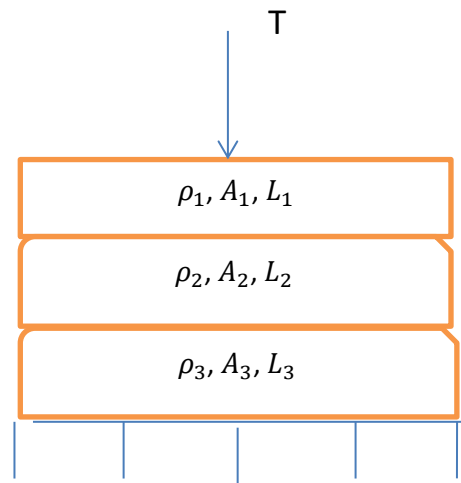
On déduit que  $T_i = \frac{K_i}{K_{\text{équi}}} T$

De plus  $T = T_1 + T_2 + T_3$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \Leftrightarrow K_{\text{équi}} V = K_1 V_1 + K_2 V_2 + K_3 V_3$$

D où  $K_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 K_i$

### Association parallèle de matériaux



Soit les trois éléments purement élastiques ci-dessus . On suppose que les trois éléments sont assemblés en parallèle et on cherche à déterminer l'indéformité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est parallèle  $T = T_1 = T_2 = T_3$

$$T = T_1 = T_2 = T_3 \Leftrightarrow KV = K_1V_1 = K_2V_2 = K_3V_3$$

$$\Leftrightarrow V_1 = \frac{K}{K_1}V, V_2 = \frac{K}{K_2}V, V_3 = \frac{K}{K_3}V$$

On déduit que  $V_i = \frac{K_{\text{équi}}}{K_i}V$

De plus  $V = V_1 + V_2 + V_3$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \Leftrightarrow \frac{T}{K_{\text{équi}}} = \frac{T}{K_1} + \frac{T}{K_2} + \frac{T}{K_3} \text{ car } T = T_1 = T_2 = T_3$$

$$\text{D'où } \frac{1}{K_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{K_i}$$

### Pont diviseur de l'effort et indéformité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement élastiques en série

$$T_i = \frac{K_i}{K_{\text{équi}}}T \text{ et } K_{\text{équi}}\varepsilon = \sum_{i=1}^3 K_i$$

### Pont diviseur de déplacement et indéformité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement élastiques en parallèle

$$V_i = \frac{K_{\text{équi}}}{K_i} V \text{ et } \frac{1}{K_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{K_i}$$

### Mécanique statique

La mécanique statique est la branche de la mécanique qui étudie le comportement statique (absence d'action) des éléments de structures. Elle s'oppose donc à la mécanique dynamique (présence des actions et déformations) que nous verrons par la suite.

### Champ mécanostatique T

Le champ mécanostatique est le champ créé par toute matière solide au repos et dans lequel toute autre matière solide est soumise à une force mécanique (généralement attractive). En physique cette force est appelée la gravité

Les physiciens du XIX<sup>e</sup> Siècle ont déjà tout fait ou presque nous n'avons qu'à appliquer leur lois dans notre domaine d'étude.

### Théorème de Gauss appliqué

L'on se souviendra de Friedrich Karl Gauss à travers son théorème emblématique de l'électrostatique. Nous appliquerons ce théorème en mécanostatique.

### Enoncé

Le flux du champ mécanostatique à travers une surface fermée d'un matériau est proportionnel à l'ensemble des particules solides qui composent le matériau

$$\oint_S T dS = \frac{S_{\text{int}}}{\varepsilon_M}$$

T est le champ mécanostatique

$S_{\text{int}}$  est la friche (l'ensemble des particules solides) intérieure du matériau

$\varepsilon_M$  est la permittivité mécanique du matériau. Elle traduit la résistance du matériau à un champ mécanique externe ( le champ gravitationnel par exemple).

### Notion de la H

Dans un matériau fragile (verre par exemple) la déformation n'est pas proportionnelle à l'action. Lorsqu'un matériau fragile est soumis à une action continue dans l'espace il ne se déforme presque pas. On dit que les matériaux fragiles emmagasinent les actions. La déformation d'un matériau est donc proportionnelle au gradient de l'action et le coefficient de proportionnalité est appelé la cidité

$$u = H \frac{dn}{dx} \text{ et } S = HN$$

### Énergie stockée dans un matériau fragile

$$E = \frac{1}{2} HN^2 = \frac{1}{2} SN$$

C'est cette énergie qui est responsable de la fissuration des matériaux fragiles lorsqu'elle dépasse le seuil de l'énergie de résistance de l'élément.

### Valeur de la cidité H des matériaux selon leur géométrie

Description	Cidité H	Champ mécanique T
Verre plan	$B = \varepsilon \frac{A}{L}$	$T = \frac{S}{\varepsilon A}$
Verre cylindrique	$H = 2\pi\varepsilon \frac{L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$	$T(r) = \frac{S}{2\pi\varepsilon r L}$
Verre sphérique	$H = 2\pi\varepsilon \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$	$T(r) = \frac{S}{4\pi\varepsilon r^2 L}$
Sphère	$H = 4\pi\varepsilon R_1$	

**Tableau 1 : Cidité d'un matériau**

### Calcul de H suivant le type de sollicitation

#### Traction simple

#### Propriété

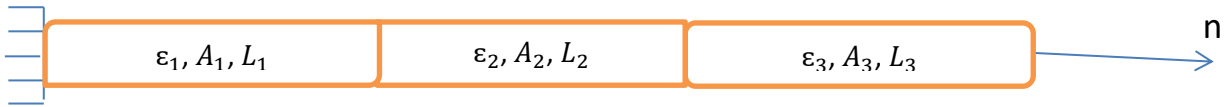
Dans un assemblage série il y a unicité de l'effort et additivité de la friche

$$S = \sum_{i=1}^N S_i \text{ et } N = N_i$$

Dans un assemblage parallèle il y a unicité de la friche et additivité de l'effort

$$N = \sum_{i=1}^N N_i \text{ et } S = S_i$$

### Association série de matériaux



Soit les trois éléments purement fragiles ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en série et on cherche à déterminer la rigidité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est série  $N = N_1 = N_2 = N_3$

$$N = N_1 = N_2 = N_3 \Leftrightarrow \frac{S}{H_{\text{équi}}} = \frac{S_1}{H_1} = \frac{S_2}{H_2} = \frac{S_3}{H_3}$$

$$\Leftrightarrow S_1 = \frac{H_1}{H_{\text{équi}}} S, S_2 = \frac{H_2}{H_{\text{équi}}} S, S_3 = \frac{H_3}{H_{\text{équi}}} S$$

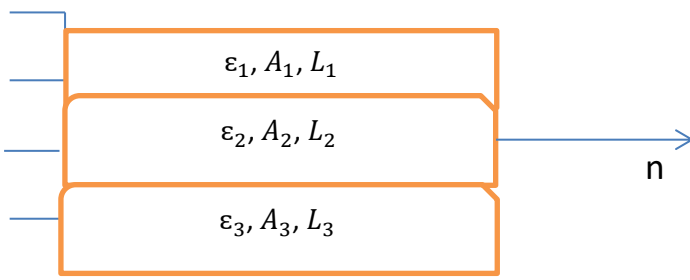
On déduit que  $S_i = \frac{H_i}{H_{\text{équi}}} S$

De plus  $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \Leftrightarrow H_{\text{équi}} N = H_1 N_1 + H_2 N_2 + H_3 N_3$$

D où  $H_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 H_i$  avec  $H = \frac{\varepsilon A}{L}$

### Association parallèle de matériaux



Soit les trois éléments purement fragiles ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en parallèle et on cherche à déterminer la rigidité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est parallèle  $S = S_1 = S_2 = S_3$

$$S = S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow HN = H_1 N_1 = H_2 N_2 = H_3 N_3$$

$$\Leftrightarrow N_1 = \frac{H}{H_1} N, N_2 = \frac{H}{H_2} N, N_3 = \frac{H}{H_3} N$$

On déduit que  $N_i = \frac{H_{\text{équi}}}{H_i} N$

De plus  $N = N_1 + N_2 + N_3$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \Leftrightarrow \frac{S}{H_{\text{équi}}} = \frac{S}{H_1} + \frac{S}{H_2} + \frac{S}{H_3} \text{ car } S = S_1 = S_2 = S_3$$

$$\text{D'où } \frac{1}{H_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i} \text{ avec } H = \frac{\varepsilon A}{L}$$

### Pont diviseur de la friche et Cidérité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement fragiles en parallèle

$$N_i = \frac{H_{\text{équi}}}{H_i} N \text{ et } \frac{1}{H_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{H_i} \text{ avec } H = \frac{\varepsilon A}{L}$$

### Pont diviseur de l'effort et Cidérité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement fragile en série

$$S_i = \frac{H_i}{H_{\text{équi}}} S \text{ et } H_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 H_i \text{ avec } H = \frac{\varepsilon A}{L}$$

## CISAILLEMENT PUR

### Propriété

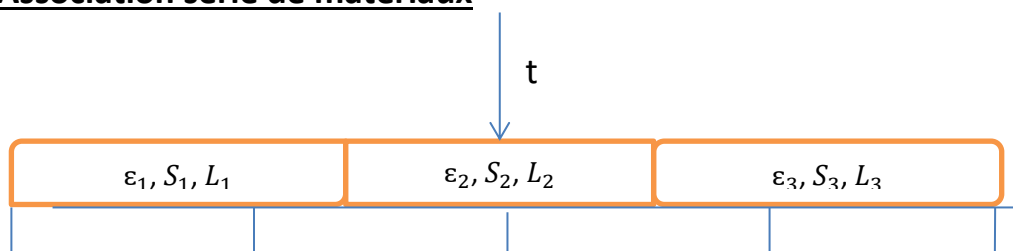
Dans un assemblage série il y a unicité de la friche et additivité de l'effort

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \text{ et } S = S_i$$

Dans un assemblage parallèle il y a additivité de la friche et unicité de l'effort

$$S = \sum_{i=1}^N S_i \text{ et } T = T_i$$

### Association série de matériaux



Soit les trois éléments purement fragiles ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en série et on cherche à déterminer la rigidité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est série  $S = S_1 = S_2 = S_3$

$$S = S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow BT = H_1 T_1 = H_2 T_2 = H_3 T_3$$

$$\Leftrightarrow T_1 = \frac{H}{H_1} T, T_2 = \frac{H}{H_2} T, T_3 = \frac{H}{H_3} T$$

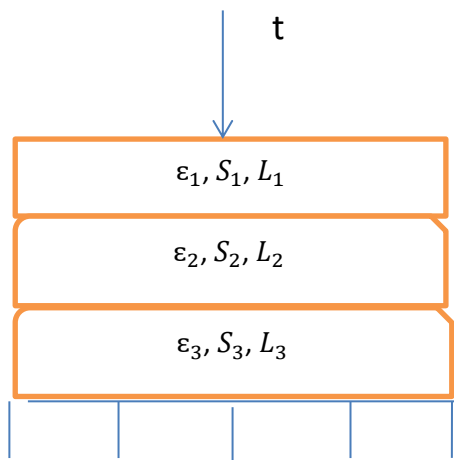
On déduit que  $T_i = \frac{H_{\text{équi}}}{H_i} T$

De plus  $T = T_1 + T_2 + T_3$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \Leftrightarrow \frac{S}{H_{\text{équi}}} = \frac{S}{H_1} + \frac{S}{H_2} + \frac{S}{H_3} \text{ car } S = S_1 = S_2 = S_3$$

$$\text{D'où } \frac{1}{H_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i} \text{ avec } H = \frac{\varepsilon A}{L}$$

### Association parallèle de matériaux



Soit les trois éléments purement fragiles ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en parallèle et on cherche à déterminer la rigidité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est parallèle  $T = T_1 = T_2 = T_3$

$$T = T_1 = T_2 = T_3 \Leftrightarrow \frac{S}{H_{\text{équi}}} = \frac{S_1}{H_1} = \frac{S_2}{H_2} = \frac{S_3}{H_3}$$

$$\Leftrightarrow S_1 = \frac{H_1}{H_{\text{équi}}} S, S_2 = \frac{H_2}{H_{\text{équi}}} S, S_3 = \frac{H_3}{H_{\text{équi}}} S$$



On déduit que  $S_i = \frac{H_i}{H_{\text{équi}}} S$

De plus  $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \Leftrightarrow H_{\text{équi}} T = H_1 T_1 + H_2 T_2 + H_3 T_3$$

D où  $H_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 H_i$  avec  $H = \frac{\varepsilon A}{L}$

### **Pont diviseur de l'effort et Cidérété équivalente**

Soit un assemblage de N matériaux purement fragiles en série

$$T_i = \frac{H_{\text{équi}}}{H_i} T \text{ et } \frac{1}{H_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{H_i} \text{ avec } H = \frac{\varepsilon A}{L}$$

### **Pont diviseur de la friche et Cidérété équivalente**

Soit un assemblage de N matériaux purement fragile en parallèle

$$S_i = \frac{H_i}{H_{\text{équi}}} S \text{ et } H_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 H_i \text{ avec } H = \frac{\varepsilon A}{L}$$

## **Mécanique dynamique**

Parlons à présent des lois qui régissent la mécanique dynamique

La mécanique dynamique est la branche de la mécanique qui étudie le mouvement des éléments de structures.

### **Champ mécanodynamique R**

Le champ mécanodynamique est le champ crée par toute matière solide en mouvement et dans lequel toute autre matière solide est soumise à une force mécanodynamique

### **Théorème d'Ampère appliqué**

L'on se souviendra aussi de André Marie Ampère à travers son théorème emblématique du magnétisme. Nous appliquerons ce théorème en mécanodynamique.

### **Énoncé**

La circulation du champ mécanodynamique à travers un contours fermé est proportionnelle au déplacement de matières solides ( particules solides) sur ce contours.

$$\oint_L R dl = \sum u$$

R est le champ mécanodynamique

u est le déplacement des particules solides

$\mu_M$  est la perméabilité mécanique du matériau. Elle traduit la résistance du matériau à un champ mécanodynamique externe.

### Notion de la laricité F

Dans un matériau plastique la déformation n'est pas proportionnelle à l'action. Lorsqu'un matériau plastique se déforme de manière continue dans l'espace cela ne produit presque pas d'action en lui. On dit que les matériaux plastiques emmagasinent les déformations. L'action d'un matériau plastique est donc proportionnelle au gradient de la déformation et le coefficient de proportionnalité est appelé la laricité

$$N = F \frac{dU}{dx} \text{ et } \phi = FU$$

### Energie stockée dans un matériau plastique

$$E = \frac{1}{2}FU^2$$

C'est une énergie destructrice, elle provoque la ruine de l'élément de structure lorsqu'elle dépasse l'énergie interne (propre) de l'élément. Cette énergie est aussi responsable du phénomène de striction ou du voilement des matériaux plastiques.

### Induction mécanique

Ce n'est pas en électromagnétisme seulement qu'il y a induction. Même en mécanique cette induction existe. Si vous voulez savoir plus sur les inductions et leur nature lisez La théorie de la médjination du Béninois OGOU Olaniran Cyriaque. Ce que nous pouvons vous dire ici est que toute matière (solide, liquide, gaz ou plasma) en mouvement crée un champ à l'intérieure de toute autre matière au repos de même nature qu'elle. Ce phénomène est appelé induction.

Par exemple le déplacement de tout mobile solide modifie la gravité locale du milieu. C'est surtout cette modification de la gravité ou bien le champ créé par

tout mobile qui est à l'origine des forces de gravité qui attirent les solides de petites masses ( poussières) vers le mobile.

### **Loi de Faraday appliquée**

Le scientifique britannique Mikaël Faraday est connu pour sa loi d'induction électromagnétisme. Nous allons appliquer cette loi en mécanique.

### **Énoncé de la loi**

La variation du flux du champ mécanodynamique d'un point à un autre engendre un effort entre les deux points

$$f = - \frac{d\Phi}{dx}$$

L'explication du signe – est donnée par Lenz. Il est dû au fait que le déplacement induit cherche toujours à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

### **Auto-Induction**

C'est l'induction créée dans un matériau par le matériau lui-même. En absence de toute matière solide au voisinage du matériau, le flux propre du matériau est égal au flux induit.

$$FU = RS \text{ Ce qui implique } F = \frac{\mu L S}{P}$$

L, P et S désignent respectivement la longueur, le périmètre et la section du matériau

### **Valeur de la laricité F des matériaux selon leur géométrie**

Description	Laricité F
plastique plan	$F = \mu \frac{LA}{P}$
Verre cylindrique	$F = \frac{1}{2} \mu L R$
Verre sphérique	$F = \frac{1}{2} \mu \pi R^2$
Sphère	$F = \frac{1}{2} \mu_0 \pi R^2$

**Tableau 2 : Laricité d'un matériau**

## Calcul de l'aridité suivant le type de sollicitation

### Traction simple

#### Propriété

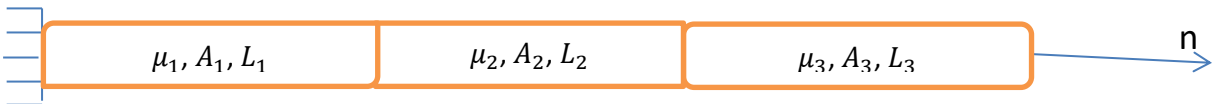
Dans un assemblage série il y a unicité du flux et additivité du déplacement

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \text{ et } \phi = \phi_i$$

Dans un assemblage parallèle il y a unicité du déplacement et additivité du flux

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \text{ et } U = U_i$$

#### Association série de matériaux



Soit les trois éléments purement plastiques ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en série et on cherche à déterminer la l'aridité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est série  $\phi = \phi_1 = \phi_2 = \phi_3$

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 \Leftrightarrow FU = F_1 U_1 = F_2 U_2 = F_3 U_3$$

$$\Leftrightarrow U_1 = \frac{F}{F_1} U, U_2 = \frac{F}{F_2} U, U_3 = \frac{F}{F_3} U$$

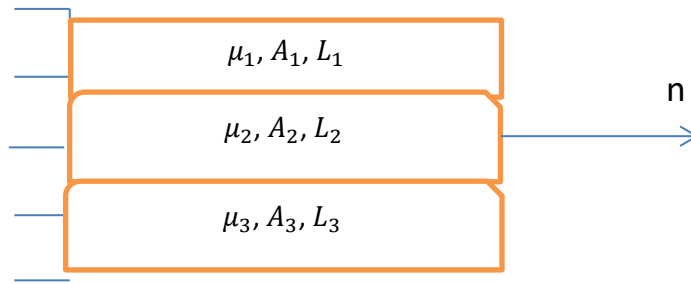
On déduit que  $U_i = \frac{F_{\text{équi}}}{F_i} U$

De plus  $U = U_1 + U_2 + U_3$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \Leftrightarrow \frac{\phi}{F_{\text{équi}}} = \frac{\phi}{F_1} + \frac{\phi}{F_2} + \frac{\phi}{F_3} \text{ car } \phi = \phi_1 = \phi_2 = \phi_3$$

$$\text{D'où } \frac{1}{F_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{F_i}$$

### Association parallèle de matériaux



Soit les trois éléments purement plastiques ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en parallèle et on cherche à déterminer la laricité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est parallèle  $U = U_1 = U_2 = U_3$

$$U = U_1 = U_2 = U_3 \Leftrightarrow \frac{\emptyset}{F_{\text{équi}}} = \frac{\emptyset_1}{F_1} = \frac{\emptyset_2}{F_2} = \frac{\emptyset_3}{F_3}$$

$$\Leftrightarrow \emptyset_1 = \frac{F_1}{F_{\text{équi}}} \emptyset, \emptyset_2 = \frac{F_2}{F_{\text{équi}}} \emptyset, \emptyset_3 = \frac{F_3}{F_{\text{équi}}} \emptyset$$

On déduit que  $\emptyset_i = \frac{F_i}{F_{\text{équi}}} \emptyset$

De plus  $\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 + \emptyset_3$

$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 + \emptyset_3 \Leftrightarrow F_{\text{équi}} U = F_1 U_1 + F_2 U_2 + F_3 U_3$$

$$\text{D où } F_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 F_i$$

### Pont diviseur du déplacement et laricité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement plastiques en série

$$U_i = \frac{H_{\text{équi}}}{H_i} U \text{ et } \frac{1}{F_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{F_i}$$

### Pont diviseur du flux et laricité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement plastiques en parallèle

$$\emptyset_i = \frac{H_i}{H_{\text{équi}}} \emptyset \text{ et } F_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 F_i$$

## CISAILLEMENT PUR

### Propriété

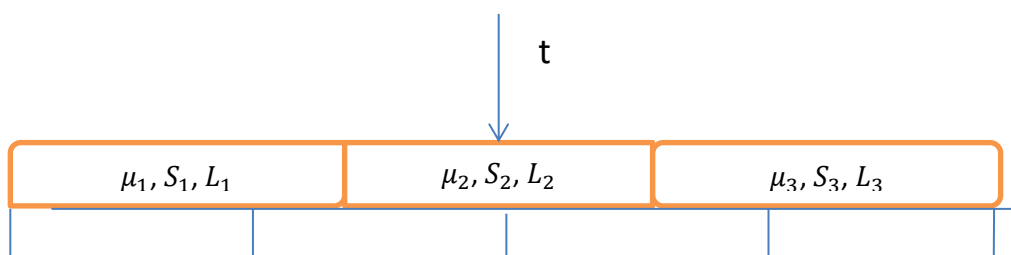
Dans un assemblage série il y a unicité du déplacement et additivité du flux

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \text{ et } V = V_i$$

Dans un assemblage parallèle il y a additivité du déplacement et unicité du flux

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \text{ et } \phi = \phi_i$$

### Association série de matériaux



Soit les trois éléments purement plastiques ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en série et on cherche à déterminer la viscosité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est série  $V = V_1 = V_2 = V_3$

$$V = V_1 = V_2 = V_3 \Leftrightarrow \frac{\phi}{F_{\text{équi}}} = \frac{\phi_1}{F_1} = \frac{\phi_2}{F_2} = \frac{\phi_3}{F_3}$$

$$\Leftrightarrow \phi_1 = \frac{F_1}{F_{\text{équi}}} \phi, \phi_2 = \frac{F_2}{F_{\text{équi}}} \phi, \phi_3 = \frac{F_3}{F_{\text{équi}}} \phi$$

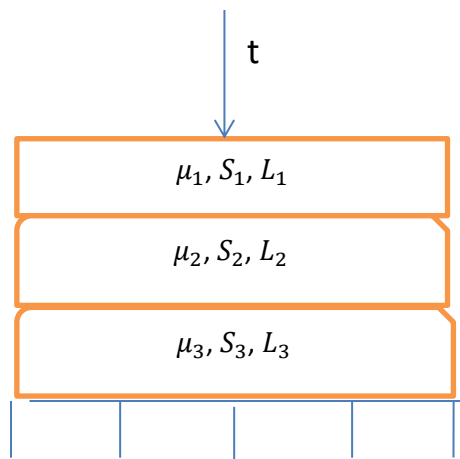
On déduit que  $\phi_i = \frac{F_i}{F_{\text{équi}}} \phi$

De plus  $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \Leftrightarrow F_{\text{équi}} V = F_1 V_1 + F_2 V_2 + F_3 V_3$$

D où  $F_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 F_i$

### Association parallèle de matériaux



Soit les trois éléments purement plastiques ci-dessus. On suppose que les trois éléments sont assemblés en parallèle et on cherche à déterminer la laricité équivalente de l'association.

Puisque l'assemblage est parallèle  $\emptyset = \emptyset_1 = \emptyset_2 = \emptyset_3$

$$\emptyset = \emptyset_1 = \emptyset_2 = \emptyset_3 \Leftrightarrow FV = F_1V_1 = F_2V_2 = F_3V_3$$

$$\Leftrightarrow V_1 = \frac{F}{F_1}V, V_2 = \frac{F}{F_2}V, V_3 = \frac{F}{F_3}V$$

On déduit que  $V_i = \frac{F_{\text{équi}}}{F_i}V$

De plus  $V = V_1 + V_2 + V_3$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \Leftrightarrow \frac{\emptyset}{F_{\text{équi}}} = \frac{\emptyset}{F_1} + \frac{\emptyset}{F_2} + \frac{\emptyset}{F_3} \text{ car } \emptyset = \emptyset_1 = \emptyset_2 = \emptyset_3$$

$$\text{D'où } \frac{1}{F_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{F_i}$$

### Pont diviseur du flux et laricité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement plastiques en série

$$\emptyset_i = \frac{H_i}{H_{\text{équi}}} \emptyset \text{ et } F_{\text{équi}} = \sum_{i=1}^3 F_i$$

### Pont diviseur du déplacement et laricité équivalente

Soit un assemblage de N matériaux purement plastiques en parallèle

$$V_i = \frac{H_{\text{équi}}}{H_i} V \text{ et } \frac{1}{F_{\text{équi}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{F_i}$$

### Rigidité R d'un matériau

On désigne par rigidité la capacité d'un matériau à résister à un effort ou à une déformation. Pour tout matériau la rigidité est le rapport de l'effort au déplacement

Pour un matériau élastique

$$R = \frac{N}{U} = K$$

Pour un matériau fragile

$$R = \frac{N}{U} = \frac{1}{Hw}$$

Pour un matériau plastique

$$R = \frac{N}{U} = Fw$$

$w$  est la pulsation du signal mécanique.

$$w = \frac{2\pi}{T} \text{ où } T \text{ est la période du signal}$$

### Energie de changement de domaine

Les matériaux fragiles, élastiques ou plastiques appartiennent à un même état de matière : état solide. Lorsque les actions ou les déformations qui leurs sont appliquées atteignent certaines valeurs, ces matériaux ont tendance à changer de domaine de travail. Ainsi le matériau fragile devient élastique puis plastique. De ce fait l'énergie stockée ou dissipée par chacun de ces matériaux se convertit en énergie calorifique.

#### Passage du domaine fragile à l'élastique

$$E = mC_P(T_{\text{éla}} - T_{\text{fra}})$$

$$E = \frac{1}{2}HN^2 = mC_P(T_{\text{éla}} - T_{\text{fra}}) \text{ d'où}$$

$$N = \sqrt{\frac{2mC_P(T_{\text{éla}} - T_{\text{fra}})}{H}} \text{ et } S = \sqrt{2HmC_P(T_{\text{pla}} - T_{\text{éla}})}$$

#### Passage du domaine élastique au plastique



$$E = mC_P(T_{pla} - T_{éla})$$

$$E = KU^2t = mC_P(T_{pla} - T_{éla}) \text{ d'où}$$

$$U = \sqrt{\frac{mC_P(T_{pla} - T_{éla})}{Kt}} \text{ et } N = \sqrt{\frac{KmC_P(T_{pla} - T_{éla})}{t}}$$

U et N sont respectivement le déplacement et l'effort de passage élastoplastique

### **Passage du domaine plastique à la déformation avec perte**

$$E = mC_P(T_{fus} - T_{pla})$$

$$E = \frac{1}{2}FU^2 = mC_P(T_{fus} - T_{pla}) \text{ d'où}$$

$$U = \sqrt{\frac{2mC_P(T_{fus} - T_{pla})}{F}} \text{ et } \Phi = \sqrt{2FmC_P(T_{fus} - T_{pla})}$$

### **Diagramme du changement du domaine**

Le diagramme du changement du domaine mécanique se présente comme suit :

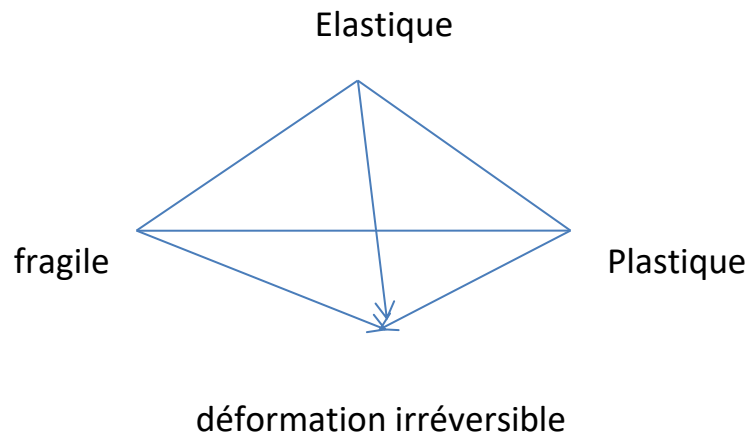
fragile  $\longrightarrow$  élastique  $\longrightarrow$  plastique  $\longrightarrow$  fusio

### **La disruption**

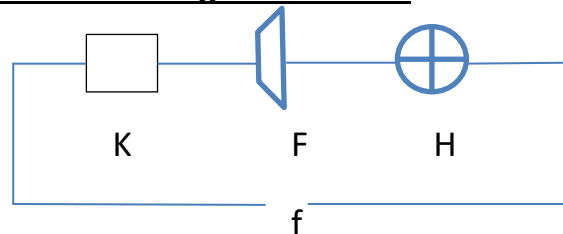
On appelle disruption le phénomène par lequel tout matériau subit une déformation irréversible sans passer par le diagramme de changement du domaine. Le champ disruptif est alors le champ nécessaire pour obtenir une déformation irréversible du matériau.

C'est ce champ qui est responsable de la brisure des matériaux fragiles (verre) et de la rupture des matériaux plastiques (caoutchou)

### Diagramme de la disruption



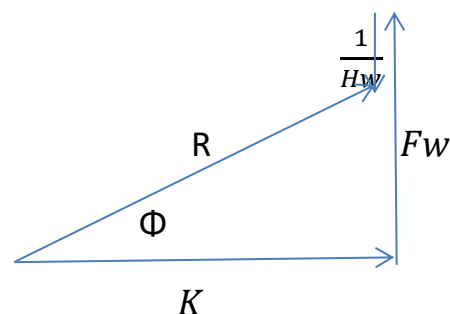
### Circuit KFH en série et rigidité du circuit



$$R = \frac{N}{U} = \sqrt{K^2 + \left(Fw - \frac{1}{Hw}\right)^2}$$

### Diagramme de Fresnel

Le diagramme de Fresnel est la représentation graphique de l'effort appliqué à un composant mécanique en fonction de sa phase (angle de rotation). Son utilité réside dans le fait que des intensités de l'effort et du déplacement peuvent être déterminés graphiquement. Il se présente comme suit



$$\tan \Phi = \frac{Fw - \frac{1}{Hw}}{K}$$

## Les Oscillateurs mécaniques

Ce sont des circuits mécaniques composés de composants structuraux qui tendent à produire une oscillation d'un point à un autre. Les circuits KFH ont cette particularité.

Les phénomènes de flambement observés chez un poteau sollicité en compression axiale sont les manifestations de l'oscillation structurale.

Étudions à présent le comportement mécanique d'un circuit KFE (élastique-plastique-fragile) en compression axiale

D'après la loi des nœuds

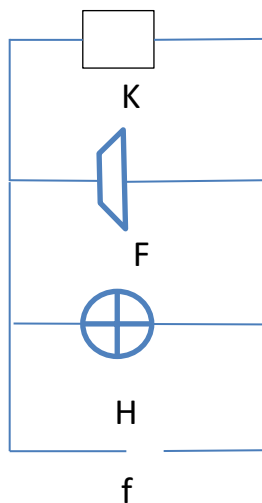
$$u = u_K + u_F + u_H \text{ or } u_K = \frac{f}{K} ; u_H = H \frac{df}{dx} \text{ donc}$$

$$u = \frac{f}{K} + u_F + H \frac{dF}{dx} \text{ or } f_F = F \frac{du_F}{dx} \text{ ainsi } u_F = \frac{1}{F} \int f dx$$

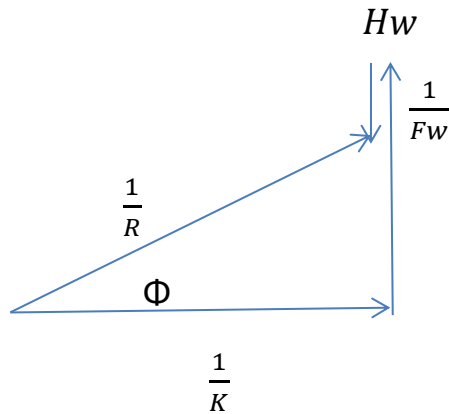
$$u = \frac{f}{K} + H \frac{dF}{dx} + \frac{1}{F} \int f dx$$

$$\text{D'où } u = \frac{f}{K} + H \frac{dF}{dx} + \frac{1}{F} \int f dx$$

### Circuit KPH en parallèle et rigidité du circuit



$$\frac{1}{R} = \frac{U}{N} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{K^2} + \left(\frac{1}{Fw} - Hw\right)^2}}$$



$$\tan \Phi = \frac{\frac{1}{Fw} - Hw}{\frac{1}{K}}$$

D'après la loi des nœuds

$$f = f_K + f_F + f_H \text{ or } f_K = Ku; f_F = F \frac{du}{dx} \text{ donc } f =$$

$$f = Ku + F \frac{du}{dx} + f_H \text{ or } u = H \frac{df_H}{dx} \text{ ainsi}$$

$$f = KH \frac{df_H}{dx} + FH \frac{d^2 f_H}{dx^2} + f_H$$

$$\text{D'où } f = FH \frac{d^2 f_H}{dx^2} + KH \frac{df_H}{dx} + f_H$$

### **Effort continu, effort variable et effort alternatif**

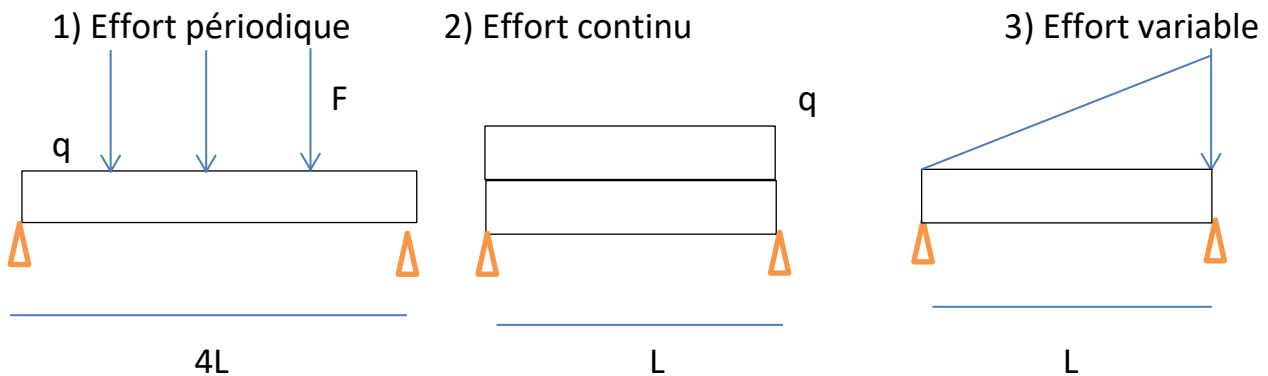
Un effort est dit continu s'il est constant dans l'espace. En Résistance des Matériaux un effort peut être constant dans l'espace sans que le déplacement le soit.

Un effort variable est un effort qui varie d'un point à un autre. Généralement quand un effort est variable son déplacement l'est aussi.

Un effort périodique est un effort qui se répète identiquement à lui-même dans un intervalle précis de l'espace

Un effort alternatif est un effort qui prend tantôt des valeurs positives, tantôt des valeurs négatives. Les ondes sismiques représentent des efforts périodiques, variables et alternatifs.

### Exemple



### Transformation de Fourier

Joseph Fourier était le premier à remarquer que tout signal périodique est la somme de plusieurs sinusoïdes dont une principale et des harmoniques. La transformée de Fourier peut servir en structure.

$$f(x) = \frac{1}{T} \int_0^T c_i e^{-inx} dx$$

### Transformée de Laplace

Pierre Simon de Laplace fait partie de ces savants qui ont menés leur étude sur la résolution des équations différentielles à coefficient constant. IL a établi une table de transformées permettant de passer du domaine spatial au domaine de Laplace. OGOU Olaniran Cyriaque a quant à lui mené ses études sur la résolution des équations linéaires de type polynomial. L'utilisation coordonnée de la table de Laplace et du tabulaire direct permet de déterminer la reponse temporelle et spatiale de tout système dynamique.

Voici le tabulaire proposé par le Béninois (Voir Tabulaires)

$\sum_{k=1}^n z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
$\sum_{k=1}^n z_k^2 = -\frac{2a_{n-2}}{a_n} + \frac{a_{n-1}^2}{a_n^2}$
$\sum_{k=1}^n z_k^3 = -\frac{3a_{n-3}}{a_n} - \frac{a_{n-1}^3}{a_n^3} + \frac{3a_{n-1}a_{n-2}}{a_n^2}$
$\sum_{k=1}^n z_k^4 = -\frac{4a_{n-4}}{a_n} + \frac{2a_{n-2}^2}{a_n^2} + \frac{a_{n-1}^4}{a_n^4} + \frac{4a_{n-1}a_{n-3}}{a_n^2} - \frac{4a_{n-1}^2a_{n-2}}{a_n^3}$
$\sum_{k=1}^n z_k^5 = -\frac{5a_{n-5}}{a_n} - \frac{a_{n-1}^5}{a_n^5} + \frac{5a_{n-1}a_{n-4}}{a_n^2} + \frac{5a_{n-2}a_{n-3}}{a_n^2} - \frac{5a_{n-1}^2a_{n-3}}{a_n^3} - \frac{5a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_n^3} + \frac{5a_{n-1}^3a_{n-2}}{a_n^4}$
$\sum_{k=1}^n z_k^6 = -\frac{6a_{n-6}}{a_n} + \frac{3a_{n-3}^2}{a_n^2} - \frac{2a_{n-2}^3}{a_n^3} + \frac{a_{n-1}^6}{a_n^6} + \frac{6a_{n-1}a_{n-5}}{a_n^2} + \frac{6a_{n-2}a_{n-4}}{a_n^2} -$

$\frac{6a_{n-1}^2 a_{n-4}}{a_n^3} + \frac{6a_{n-1}^3 a_{n-3}}{a_n^4} - \frac{6a_{n-1}^4 a_{n-2}}{a_n^5} + \frac{9a_{n-1}^2 a_{n-2}^2}{a_n^4} - \frac{12a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3}}{a_n^3}$
$\sum_{k=1}^n Z_k^7 = -\frac{7a_{n-7}}{a_n} - \frac{a_{n-1}^7}{a_n^7} + \frac{7a_{n-1} a_{n-6}}{a_n^2} + \frac{7a_{n-2} a_{n-5}}{a_n^2} + \frac{7a_{n-3} a_{n-4}}{a_n^2} - \frac{7a_{n-1}^2 a_{n-5}}{a_n^3} -$ $\frac{7a_{n-1} a_{n-3}^2}{a_n^3} - \frac{7a_{n-2}^2 a_{n-3}}{a_n^3} + \frac{7a_{n-1}^3 a_{n-4}}{a_n^4} + \frac{7a_{n-1} a_{n-2}^3}{a_n^4} - \frac{7a_{n-1}^4 a_{n-3}}{a_n^5} + \frac{7a_{n-1}^5 a_{n-2}}{a_n^6} -$ $\frac{14a_{n-1}^3 a_{n-2}^2}{a_n^5} - \frac{14a_{n-1} a_{n-2} a_{n-4}}{a_n^3} + \frac{21a_{n-1}^2 a_{n-2} a_{n-3}}{a_n^4}$
$\sum_{k=1}^n Z_k^8 = -\frac{8a_{n-8}}{a_n} + \frac{4a_{n-4}^2}{a_n^2} + \frac{2a_{n-2}^4}{a_n^4} + \frac{a_{n-1}^8}{a_n^8} + \frac{8a_{n-1} a_{n-7}}{a_n^2} + \frac{8a_{n-2} a_{n-6}}{a_n^2} +$ $\frac{8a_{n-3} a_{n-5}}{a_n^2} - \frac{8a_{n-1}^2 a_{n-6}}{a_n^3} - \frac{8a_{n-2} a_{n-3}^2}{a_n^3} - \frac{8a_{n-2}^2 a_{n-4}}{a_n^3} + \frac{8a_{n-1}^3 a_{n-5}}{a_n^4} - \frac{8a_{n-1}^4 a_{n-4}}{a_n^5} +$ $\frac{8a_{n-1}^5 a_{n-3}}{a_n^6} - \frac{8a_{n-1}^6 a_{n-2}}{a_n^7} + \frac{12a_{n-1}^2 a_{n-3}^2}{a_n^4} - \frac{16a_{n-1}^2 a_{n-2}^3}{a_n^5} + \frac{20a_{n-1}^4 a_{n-2}^2}{a_n^6} -$ $\frac{16a_{n-1} a_{n-3} a_{n-4}}{a_n^3} - \frac{16a_{n-1} a_{n-2} a_{n-5}}{a_n^3} + \frac{24a_{n-1}^2 a_{n-2} a_{n-4}}{a_n^4} + \frac{24a_{n-1} a_{n-2}^2 a_{n-3}}{a_n^4} -$ $\frac{32a_{n-1}^3 a_{n-2} a_{n-3}}{a_n^5}$

**Tableau 3::Tabulaire direct**

Nous demandons au lecteur d'approfondir si nécessaire ses connaissances sur les transformées de Laplace et l'usage du tabulaire direct.

### Les équations de Maxwell appliquées

L'électricité et la mécanique étant deux branches de la physique, elles sont alors gouvernées par les mêmes lois ou presque. Les équations de James Clerk Maxwell appliquées en électromagnétisme peuvent alors s'appliquer en mécanique. Ainsi nous avons les équations suivantes.

$$\text{div} T = \frac{\rho}{\varepsilon};$$

$$\text{div} R = 0$$

$$\text{rot} T = -\mu \frac{\partial R}{\partial t}$$

$$\text{rotr} = \varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + q$$

Avec q le déplacement fictif de la matière

### Notion du vide mécanique

Le vide mécanique est un milieu dans lequel il y a absence de particule solide (friche) et par conséquent absence de champ mécanique interne. Pour être plus direct le vide mécanique est un milieu dans lequel les forces de gravité sont nulles (gravité 0, apesanteur). Dans ces milieux le champ mécanique se propage comme une onde suivant l'équation

$$\Delta T - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0$$

### Dualité onde-corpuscule

Nous venons de voir l'équation de propagation du champ mécanique dans le vide, cette équation explique le caractère ondulatoire de tout champ mécanique dans le vide. Le champ étant lui-même généré par la friche alors toute particule frichée existe à la fois sous forme corpusculaire et ondulatoire.

### Les filtres mécaniques

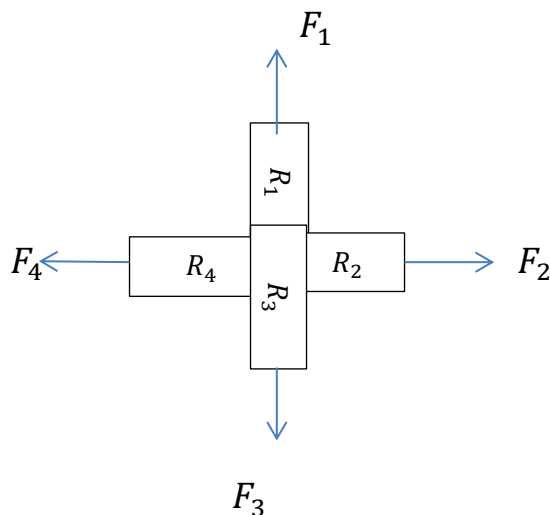
Nous abordons l'un des principaux objectifs de ce document.

A l'instar des filtres électroniques, il est possible de fabriquer des filtres mécaniques dont leur vocation serait de filtrer certaines fréquences indésirables pour le concepteur. De ce fait on pourra facilement protéger les ouvrages contre les ondes sismiques et par conséquent sauvegarder l'intégrité de l'ouvrage.

Par exemple un circuit KFH est un filtre passe-bande d'ordre deux tandis que le circuit KH est un filtre passe-haut d'ordre un.

### Théorème de Millman appliqué

Soit l'assemblage suivant



L'effort au point d'intersection X des quatre éléments est

$$F_X = \frac{\frac{F_1}{R_1} + \frac{F_2}{R_2} + \frac{F_3}{R_3} + \frac{F_4}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

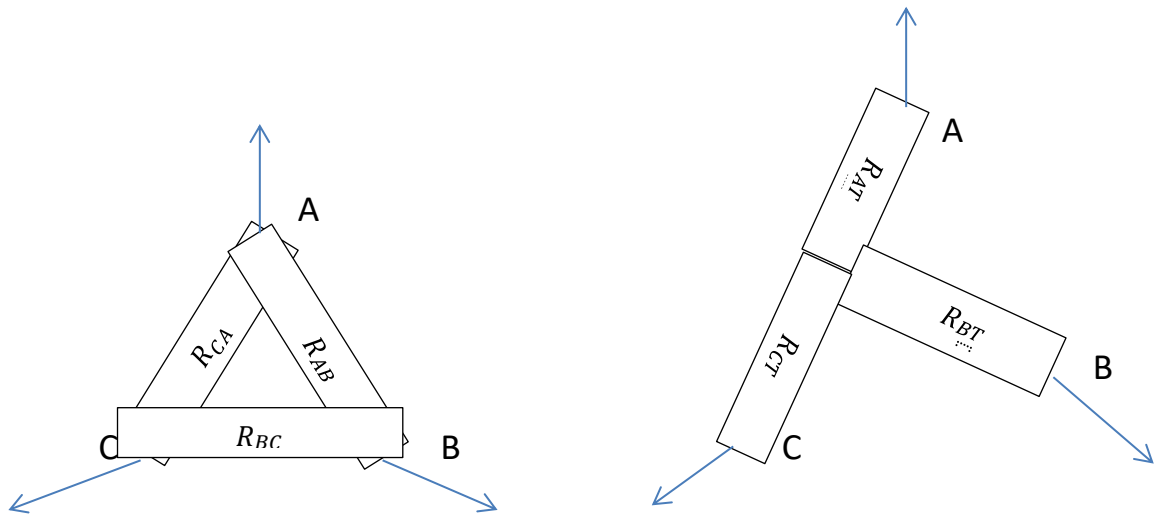
Pour N éléments soumis aux actions (effort ou moment) comme dans le cas ci-dessus

$$P_X = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{P_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}}, P = F \text{ ou } P = M$$

Ce théorème peut être démontré en utilisant le principe de superposition

### Théorème

Soit le montage suivant



### Transformation Etoile-Triangle

Pour transformer ce montage Etoile en un montage triangle il faut appliquer les transformations suivantes

$$R_{AB} = \frac{R_{AT} \cdot R_{BT}}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{BT} \cdot R_{CT}}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{AT} \cdot R_{CT}}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

### Transformation Triangle-Etoile

Pour transformer ce montage triangle en un montage étoile il faut appliquer les transformations suivantes

$$C_{AT} = \frac{C_{AB} \cdot C_{CA}}{C_{AB} + C_{BC} + C_{AC}}$$



$$C_{BT} = \frac{C_{AB} \cdot C_{BC}}{C_{AB} + C_{BC} + C_{AC}}$$

$$C_{CT} = \frac{C_{BC} \cdot C_{CA}}{C_{AB} + C_{BC} + C_{AC}}$$

En Electricité, ces théorèmes sont connus sous le nom de Théorème de Kennelly

### Preuve

#### Transformation Etoile -Triangle

Pour démontrer ces formules passons par la méthode de superposition en ne considérant qu'un seul effort et en reliant tous les autres à l'encastrement (potentiel nul). Leurs rigidités ou souplesses équivalentes doivent être égales dans les deux cas.

Cas 1 : les points B et C sont encastres et A reçoit l'effort dans les deux cas.

$$R_{equi\ 11} = R_{AB} + R_{CA} = R_{equi\ 12} = \frac{R_{AT}(R_{BT} + R_{CT})}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

En faisant de même pour les autres cas on trouve

$$R_{equi\ 21} = R_{BC} + R_{AB} = R_{equi\ 22} = \frac{R_{BT}(R_{AT} + R_{CT})}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

$$R_{equi\ 31} = R_{CA} + R_{BC} = R_{equi\ 32} = \frac{R_{CT}(R_{AT} + R_{BT})}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

De ces équations on trouve

$$R_{AB} = \frac{R_{equi\ 12} + R_{equi\ 22} - R_{equi\ 32}}{2} = \frac{R_{AT} \cdot R_{BT}}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{equi\ 22} + R_{equi\ 32} - R_{equi\ 12}}{2} = \frac{R_{BT} \cdot R_{CT}}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{equi\ 32} + R_{equi\ 12} - R_{equi\ 22}}{2} = \frac{R_{AT} \cdot R_{CT}}{R_{AT} + R_{BT} + R_{CT}}$$

#### Transformation Triangle-Etoile

Posons  $C = \frac{1}{R}$  avec C la souplesse du matériau

Des trois équations précédentes on obtient

$$C_{AB} = \frac{C_{BT} \cdot C_{CT} + C_{AT} \cdot C_{BT} + C_{AT} \cdot C_{CT}}{C_{CT}}$$

$$C_{BC} = \frac{C_{BT} \cdot C_{CT} + C_{AT} \cdot C_{BT} + C_{AT} \cdot C_{CT}}{C_{AT}}$$

$$C_{CA} = \frac{C_{BT} \cdot C_{CT} + C_{AT} \cdot C_{BT} + C_{AT} \cdot C_{CT}}{C_{BT}}$$

On peut aussi écrire

$$C_{AT} = \frac{C_{AB} \cdot C_{CA}}{C_{AB} + C_{BC} + C_{CA}}$$

$$C_{BT} = \frac{C_{AB} \cdot C_{BC}}{C_{AB} + C_{BC} + C_{CA}}$$

$$C_{CT} = \frac{C_{BC} \cdot C_{CA}}{C_{AB} + C_{BC} + C_{CA}}$$

### **Théorème de Kennelly généralisé**

#### **Transformation Etoile- polygone**

Soit un montage polygonal de n matériaux. Pour transformer ce montage en un montage étoilé il faut appliquer les transformations suivantes.

$$R_i = \frac{1}{r_i} \frac{\prod_{j=1}^n r_j}{\sum_{i=1}^m C_N^{n-2}}$$

Avec  $N = (r_1, r_2 \dots \dots r_{n-1}, r_n)$ ;  $m = \text{card}N$  et  $m = C_n^{n-2}$

$R_i$  et  $r_i$  sont les rigidités opposées par la transformation

#### **Transformation polygone-Etoile**

Soit un montage polygonale de n matériaux. Pour transformer ce montage en un montage étoilé il faut appliquer les transformations suivantes.

$$c_i = \frac{1}{C_i} \frac{\prod_{j=1}^n C_j}{\sum_{i=1}^m C_N^{n-2}}$$

Avec  $N = (C_1, C_2 \dots \dots C_{n-1}, C_n)$ ;  $n = \text{card}N$  et  $m = C_n^{n-2}$

$C_i$  et  $c_i$  sont les souplesses opposées par la transformation

Ces deux théorèmes peuvent être prouvés par récurrence.

### Action efficace

On appelle action (effort ou moment) efficace d'une action variable dans l'espace la valeur de l'action continue qui produirait le même échauffement de matériau que l'action variable.

L'effort efficace d'un effort variable est

$$F_{\text{éff}} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L f^2(x) dx}$$

Le déplacement efficace d'un déplacement variable est

$$U_{\text{éff}} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L u^2(x) dx}$$

On a toujours  $F_{\text{éff}} = KU_{\text{éff}}$

### Formule du centre de gravité d'une charge polynômiale

Soit  $q(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$  une charge répartie sur un élément de structure de longueur L

La position du centre de gravité par rapport à l'origine est :

$$x_G = L \frac{\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+2}}{\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1}}$$

En particulier si  $q(x)$  est un monôme de degré n alors  $x_G = L \frac{n+1}{n+2}$

Le moment statique total de la charge en tout point est

$$I = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+2} \frac{x^{n+2}}{L^n}$$

L'aire totale de la charge en tout point est

$$I = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{L^n}$$

### Construction mixe

On appelle construction mixte un assemblage coordonné de matériaux différents travaillant ou pas dans le même domaine (Verre, plastique et

élastique) par exemple. Oui c'est bien possible de construire tout un immeuble avec des matériaux plastiques ou fragiles et c'est bien ce qui arrivera dans la suite des temps

### **Avantages des constructions mixtes**

- L'aspect inertiel

L'inertie d'un matériau varie en fonction de son domaine de travail. Ainsi à volume égal un matériau fragile est plus inertiel qu'un matériau élastique qui est moins inertiel qu'un matériau plastique.

Ainsi si l'on souhaite construire léger il faut opter pour les plastiques et si c'est une grande inertie de l'ouvrage que l'on recherche il faut opter pour les matériaux fragiles

- L'aspect esthétique

Certains matériaux sont plus esthétiques que d'autres. Les matériaux fragiles par exemple à l'image du verre présentent un aspect esthétique relativement plus grand qu'un matériau plastique qui aussi est plus esthétique qu'un matériau élastique

- Résistance aux ondes de choc

Dans les zones à haut risque sismique par exemple il faut opter pour la construction en matériau fragile ou plastique

Une onde est caractérisée par son amplitude et sa fréquence. Or les matériaux fragiles résistent aux déformations et les matériaux plastiques résistent aux actions alors les matériaux fragiles lutteront contre les fréquences tandis que les matériaux plastiques lutteront contre les amplitudes.

- Résistance aux attaques chimiques

Les plastiques sont moins oxydatives que les autres. Dans les zones à forte attaque chimique il est préférable d'opter pour les matériaux plastiques ou à minima pour les matériaux élastiques qui sont moins corrosifs que ceux fragiles

- Résistance à la chaleur

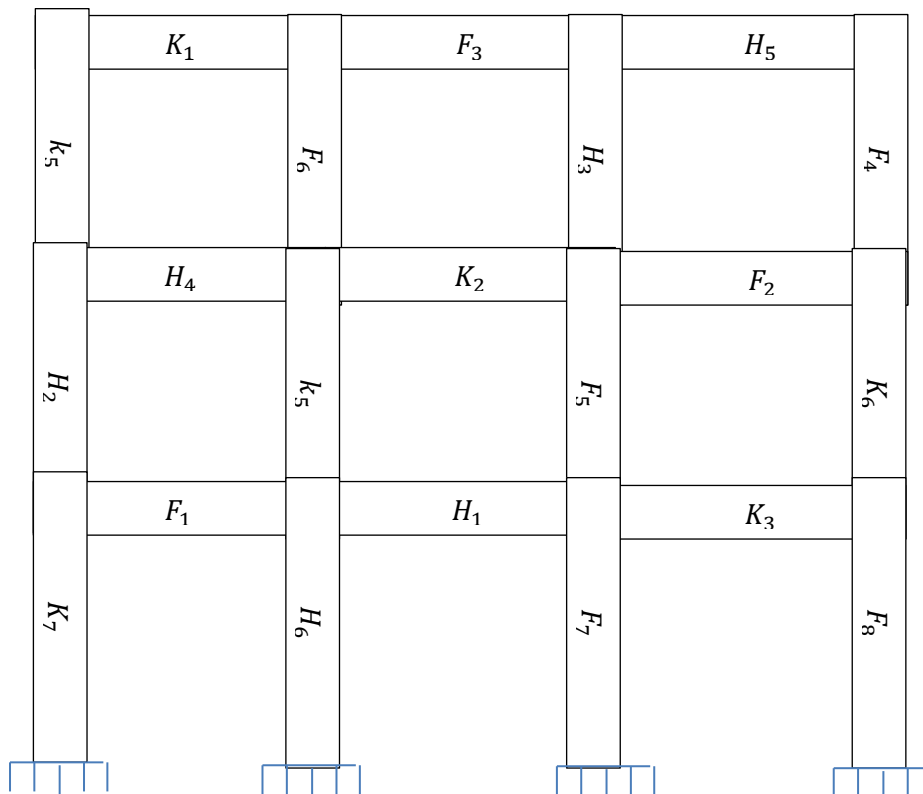
Tous les matériaux n'ont pas les mêmes capacités calorifiques et conductivité thermique. Les matériaux plastiques sont de parfaits isolants thermiques, les élastiques le sont moins et encore moins le sont les fragiles.

Dans les zones à forte variation de température (tropicale et polaire) il est préférable d'opter pour des plastiques

- Aspect financier

Plus un matériau produit du confort plus il est onéreux. Ainsi construire tout un immeuble en verrerie est bien mais supporter le poids financier de l'ouvrage n'est pas souvent un pari gagné. Tout bon concepteur doit concevoir son ouvrage de manière la plus confortablement possible tout en réduisant au maximum le coût de l'ouvrage. Tout ouvrage est donc un compromis prix/confort. Dans les pays du sud les constructions mixtes sont conseillées.

### Exemple



### Matériau bois

Voilà un matériau rebelle qui doté de vertu mécanique inestimable refuse toute coopération scientifique. Le bois, pourtant disponible en quantité dans certaine zone de la planète notamment en Afrique centrale est caractérisé par une inhomogénéité et une anisotropie très importante. Mais comme tout problème à une solution nous proposons une méthode par broyage du matériau. La sillure obtenue peut être rendue homogène et isotrope et par conséquent être utilisé avec plus de prévision en utilisant le liant adéquat. Ainsi

ces caractéristiques mécaniques seront plus facile à déterminer. Cette une pratique onéreuse mais fiable.

### **Etude d'un matériau réel**

En réalité aucun matériau n'est purement fragile, élastique ou plastique. Il est toujours la combinaison pondérée de ces trois domaines. On dira qu'un matériau est indermaire, cidéaire, ou laricaire respectivement si il est plus élastique, fragile ou plastique.

### **Méthode de Joubert appliquée**

La méthode de Joubert permet de déterminer les caractéristiques d'un matériau plastique ou fragile. Puisque ces deux types de matériaux possèdent une indermité interne alors il faut la déterminer en régime continu avant de déterminer les cidérité et laricité en régime variable. Par exemple pour déterminer les caractéristiques d'un fragile il faut lui appliquer un effort continu et l'indermité trouvé rst l'indernité interne du matériau. Apres on applique un effort périodique pour trouver la cidérité du matériau.

### **Analogie Electricité-Mécanique**

Mécanique	Electricité
Indermité K	Résistance R
Cidérité H	Capacité C
Laricité F	Induction L
Rigidité R	Impédance Z
Champ Mécanique T	Champ Electrique E
Effort N	Tension U
Déplacement U	Courant I

**Tableau 3 : Analogie Electricité-Mécanique**

## CHAPITRE II : STRUCTURE ANALITYTIQUE

Chers confrères, vous êtes habitué à modéliser une structure par un schéma. C'est bien, seulement qu'une structure peut être modélisée par des fonctions mathématiques.

### OBJECTIFS DE LA DISCIPLINE

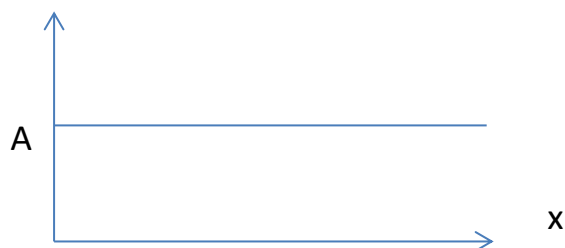
Jusqu'à ce jour nous n'avons pas une idée claire et tangible des objectifs de celle nouvelle discipline de la structure mais dans ce monde en constante évolution nous estimons que la discipline trouvera de domaine d'application et sa raison d'être. C'est donc dans l'espoir d'être le précurseur d'une discipline qui pourrait connaître une amélioration ou une remise en cause et dans l'intention de ne pas obstruer l'évolution de la science que nous, OGOU Olaniran Cyriaque avons jugé bon d'écrire ce document.

Néanmoins nous pouvons citer deux avantages de la structure analytique

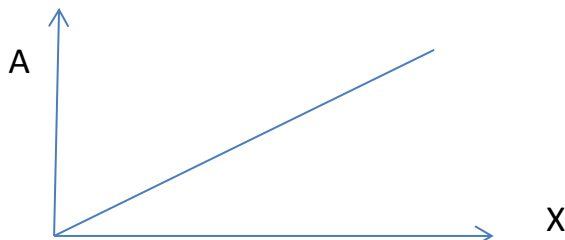
- Elle permet de programmer toute une structure avec un langage de programmation et par conséquent de manipuler facilement les structures avec la programmation Orienté Objet
- Elle permet également d'effectuer des transformations géométriques ( translation, rotation, homothétie etc)

### Rappels de quelques fonctions mathématiques

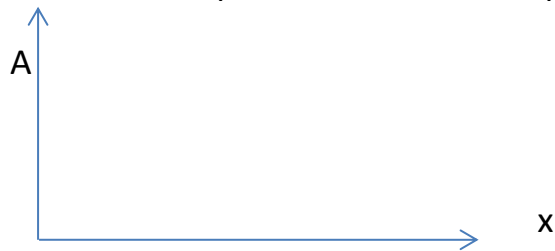
- Fonction échelon d'amplitude A  $u(x)=A$



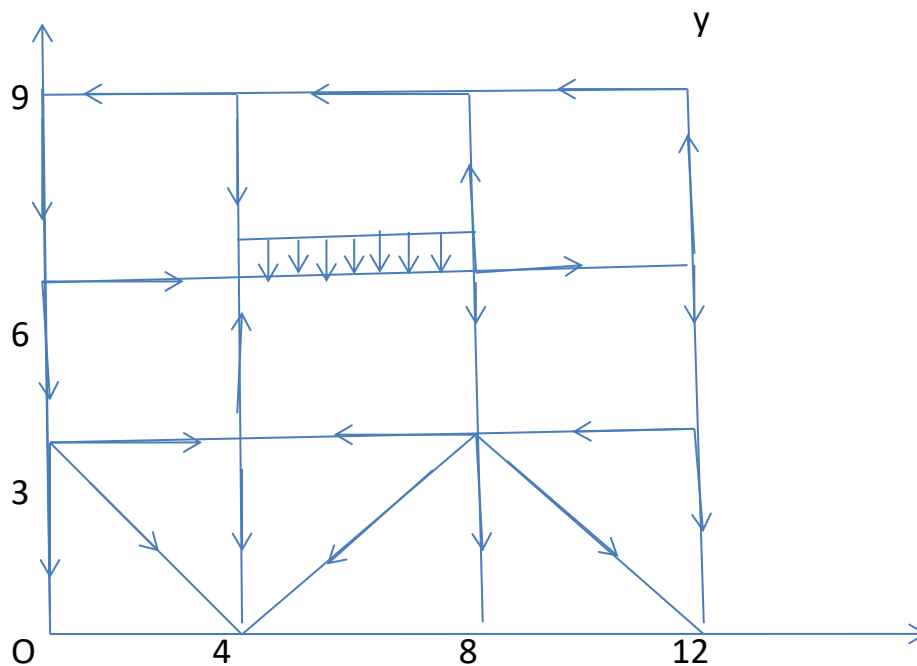
- Fonction rampe de pente A  $r(x)=Ax$



- Fonction impulsion de Dirac d'amplitude A  $\delta(x)$



Pour modéliser une structure par des fonctions mathématiques il convient de choisir un repère.



La fonction caractérisant notre structure est donc

$$\begin{aligned}
 f(x) = & 9(\delta(x) + \delta(x - 4) + \delta(x - 8) + \delta(x - 12)) + 3(u(x) - u(x - 12)) \\
 & + 6(u(x) - u(x - 12)) + 9(u(x) - u(x - 12)) \\
 & + \frac{3}{4}(r(-x + 4) - r(-x)) + \frac{3}{4}(r(x - 4) - r(x - 8)) \\
 & + \frac{3}{4}(r(-x + 12) - r(-x + 8))
 \end{aligned}$$

Notons qu'en changeant l'origine du repère la fonction caractéristique de notre ossature change



## CHAPITRE Iii : STRUCTURE HYPERSTATIQUE

La résolution des structures hyperstatique est indispensable pour toute construction moderne. Plusieurs chercheurs ont d'une manière ou d'une autre proposé des moyens de résolution des systèmes hyperstatiques mais chacun d'entre eux ont présenté ses limites. C'est dans le but d'apporter notre pierre à l'édifice de résolution d'hyperstaticité de système que nous avons élaboré la troisième partie de notre étude.

### APPROCHES CRITIQUE

Toutes les méthodes de résolution des systèmes hyperstatiques quel que soit leur nature présentent un inconvénient majeur « le non-respect des lois de la statique ». De ce fait aucun crédit ne devrait être accordé à une méthode de la mécanique statique qui ne respecte pas la condition d'équilibre formulé par Newton à travers la troisième loi de la mécanique classique. Chaque méthode pris séparément présente des limites dont nous ne saurons tout énumérer.

### Les lois de la statiques

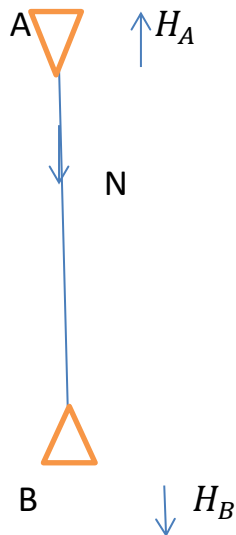
Les trois lois de la statique ne sont pas suffisantes pour déterminer tous les inconnus d'un appui. Il faut donc en trouver une autre. C'est pourquoi nous avons introduit la notion de « travail » dans la Résistance des matériaux. En effet quand un élément de structure est soumis à l'action d'un effort, celui-ci cherche à créer non seulement un moment mais aussi un travail en tout point de la structure. Mais l'ingénieur ignore souvent l'énergie créée à l'intérieur des matériaux qui est pourtant responsable de plusieurs aléas observables sur l'élément de structure. Nous allons expliquer dans cette partie l'importance de considérer la troisième loi de la statique dénommé « loi d'énergie »

Désormais les lois de la statique sont :

$$\sum F = 0 ; \sum M/X = 0 ; \sum W/X = 0$$

### Exemple 1

Soit un poteau simplement appuyé à ses deux extrémités comme l'indique le schéma suivant



On applique une charge  $N$  au tiers de la travée  $L$  et on cherche à déterminer les réactions aux appuis

$N = 75\text{KN}$  et  $L = 6\text{m}$

Déterminer les réactions  $H_A$  et  $H_B$  aux appuis A et B

### Résultat

D'après les lois de la statique

$$\begin{cases} \sum H = 0 \\ \sum W(H/A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_A - H_B = 75 \\ -6H_B - 2 * 75 = 0 \end{cases}$$

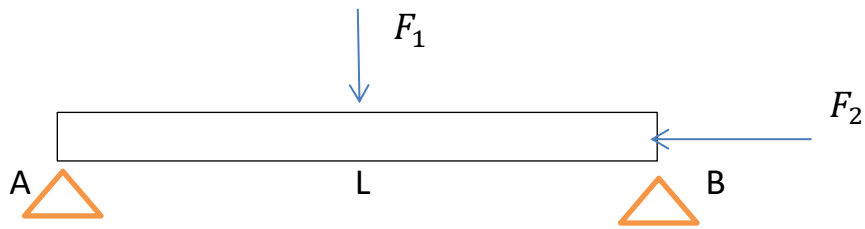
$$H_B = -\frac{150}{6} = -25\text{KN}$$

$$-6H_A + 4 * 75 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_A = \frac{300}{6} = 50\text{KN}$$

D'où  $H_A = 50\text{KN}$  et  $H_B = -25\text{KN}$

### Exemple 2

Supposons un système formé d'une poutre et de deux appuis doubles sur lequel s'appliquent deux efforts ponctuels comme l'indique le schéma suivant.



$$F_1 = 50\text{KN}, F_2 = 30\text{KN} ; L = 4\text{m}$$

Ce système est-il isostatique ? Oui il l'est et nous allons le résoudre

D'après les lois de la statique on a

$$R_A + R_B = 50\text{KN}$$

$$H_A - H_B = 30\text{KN}$$

$$R_A * 4 - 50 * 2 = 0 \Leftrightarrow R_A = 25\text{KN}, \text{Ainsi } R_B = 25\text{KN}$$

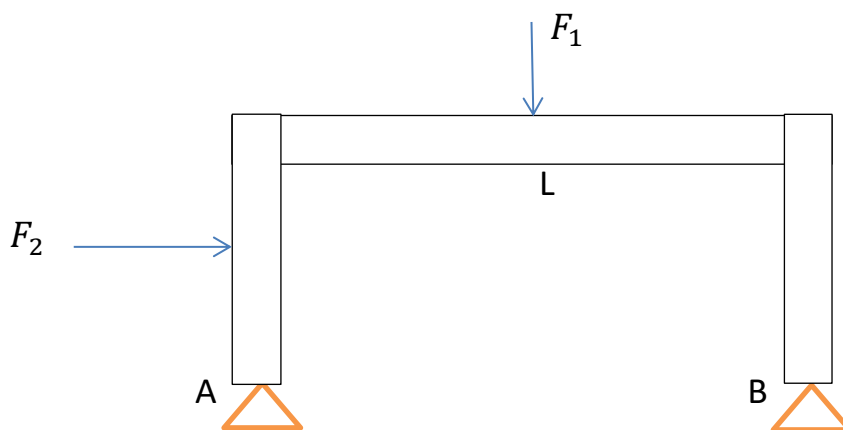
$$H_B * 4 - 30 * 4 = 0 \Leftrightarrow H_B = 30\text{KN}, \text{Ainsi } H_A = 0\text{KN}$$

D'où  $R_A = 25\text{KN}$ ,  $R_B = 25\text{KN}$ ,  $H_A = 0\text{KN}$  et  $H_B = 30\text{KN}$

### **Exemple 3**

Considérons à présent le système suivant

$$F_1 = 50\text{KN}, F_2 = 30\text{KN} ; L = 6\text{m et } l = 4\text{m}$$



D'après les lois de la statique on a

$$R_A + R_B = 50\text{KN}$$

$$H_A - H_B = 30\text{KN}$$

$$R_A * 6 - 50 * 3 + 30 + 30 * 2 = 0 \Leftrightarrow R_A = 15\text{KN}, \text{Ainsi } R_B = 35\text{KN}$$

$$-H_A * 6 + 30 * 6 + 50 * 4 = 0 \Leftrightarrow H_A = \frac{190}{3} \text{ KN}, \quad \text{et } H_B = \frac{100}{3} \text{ KN}$$

$$\text{D'où } R_A = 35 \text{ KN}, R_B = 15 \text{ KN}, H_A = \frac{100}{3} \text{ KN et } H_B = \frac{190}{3} \text{ KN}$$

### Diagramme de l'effort normal et du travail circulant

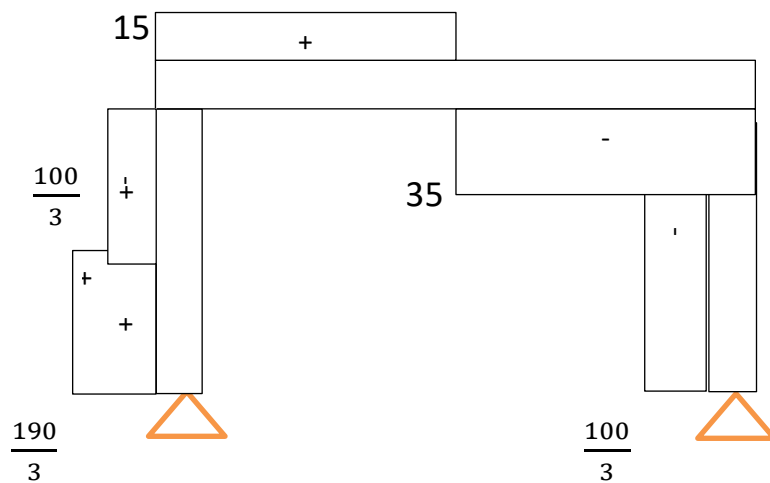
Nous savons tracer le diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant, nous allons à présent apprendre à tracer le diagramme du travail circulant dans un élément de structure.

Nous avons les formules suivantes

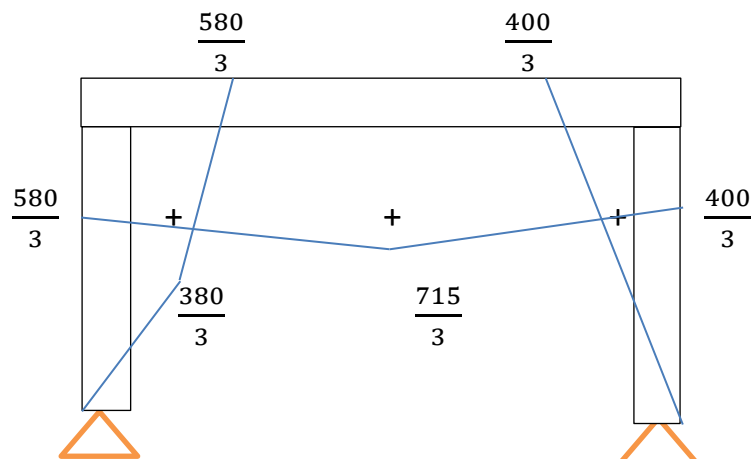
$$N(x) = \frac{dW(x)}{dx}, W(x) = \frac{d\varepsilon(x)}{dx}, \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}, M(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}, \theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}$$

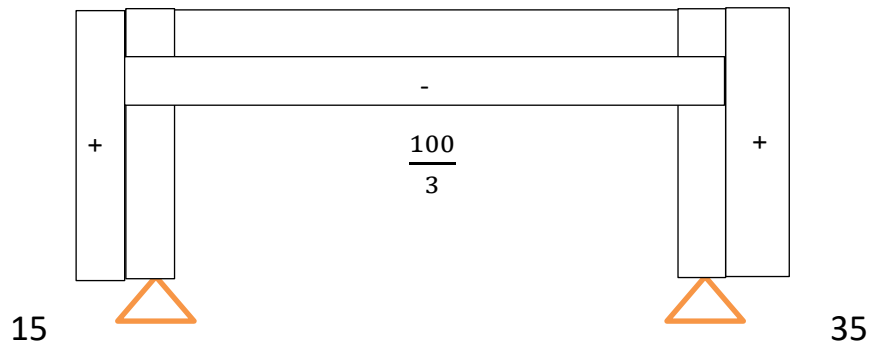
### Diagramme de l'effort tranchant



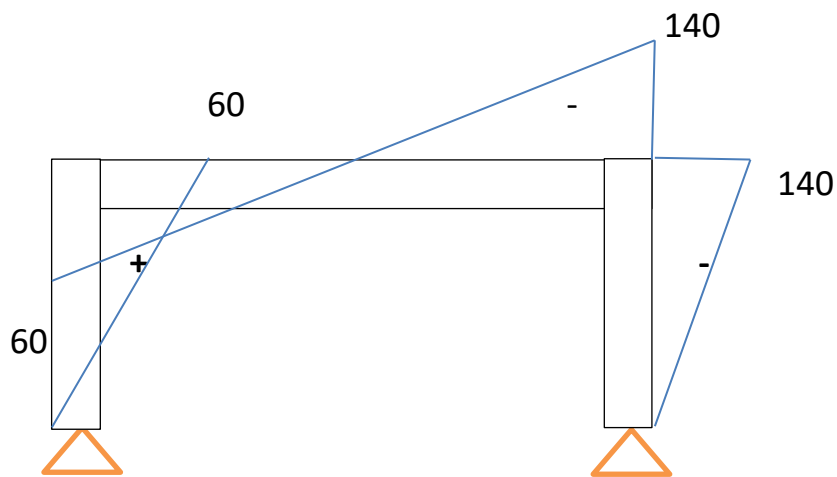
### Diagramme du moment fléchissant



### Diagramme de l'effort normal

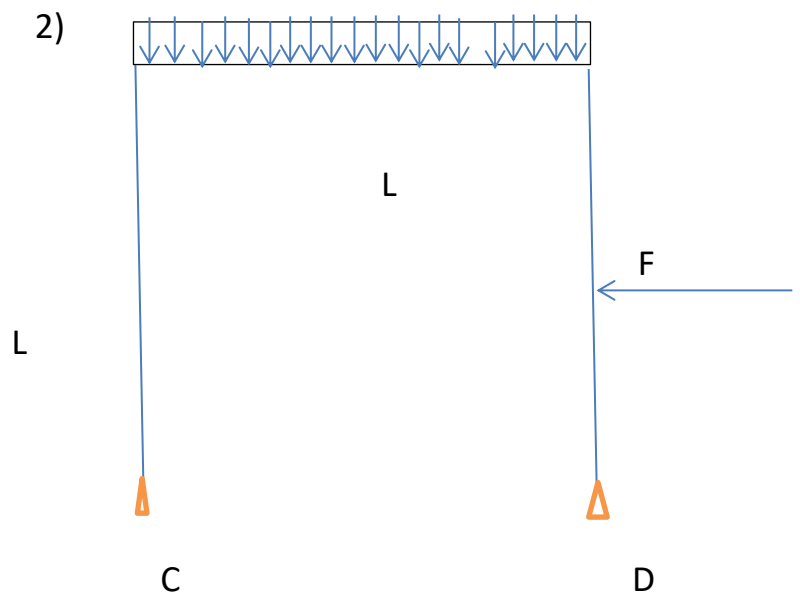
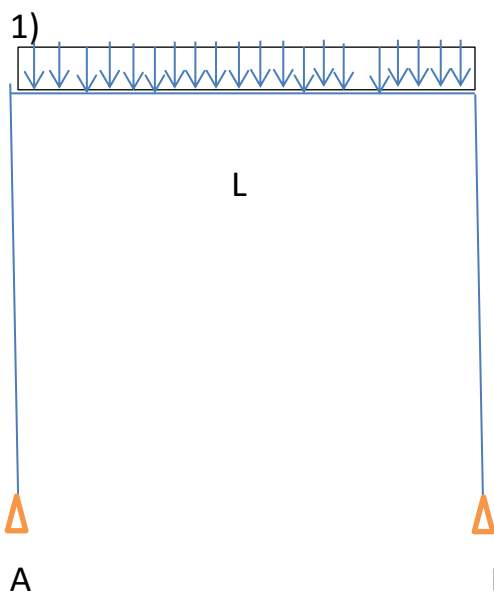


### Diagramme du travail circulant



### Exemple

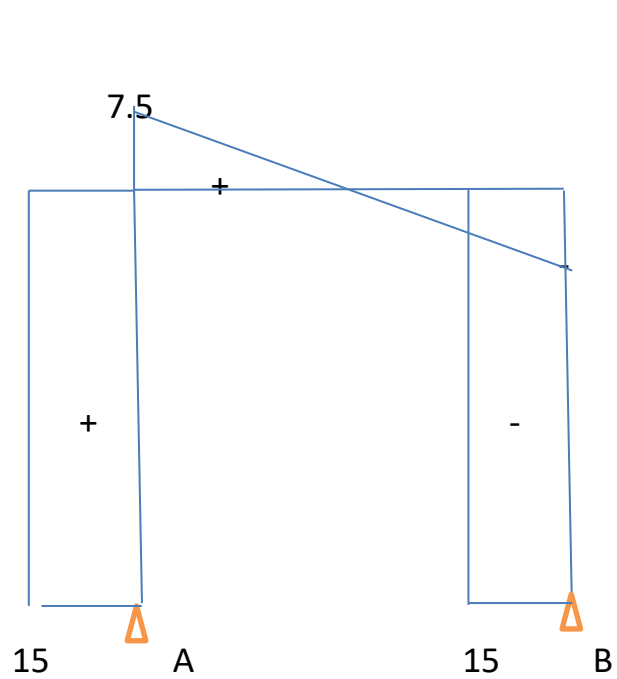
$F=20\text{KN}$  ;  $q=5\text{KN/m}$ ,  $L=3\text{m}$



Elément 1

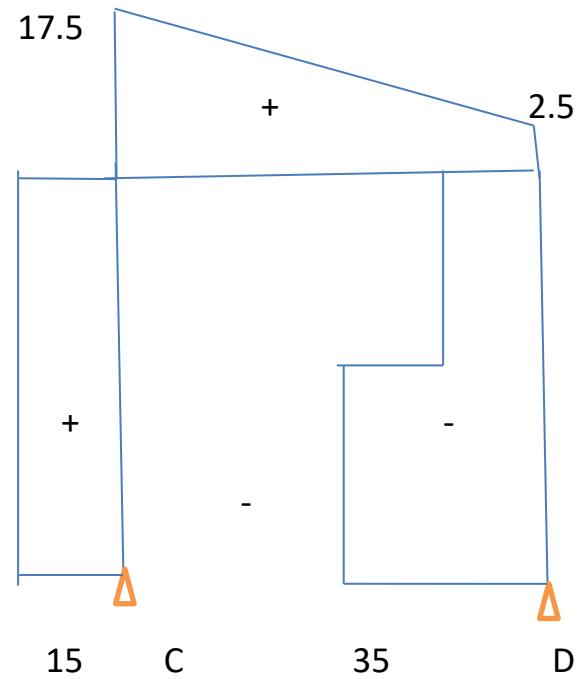
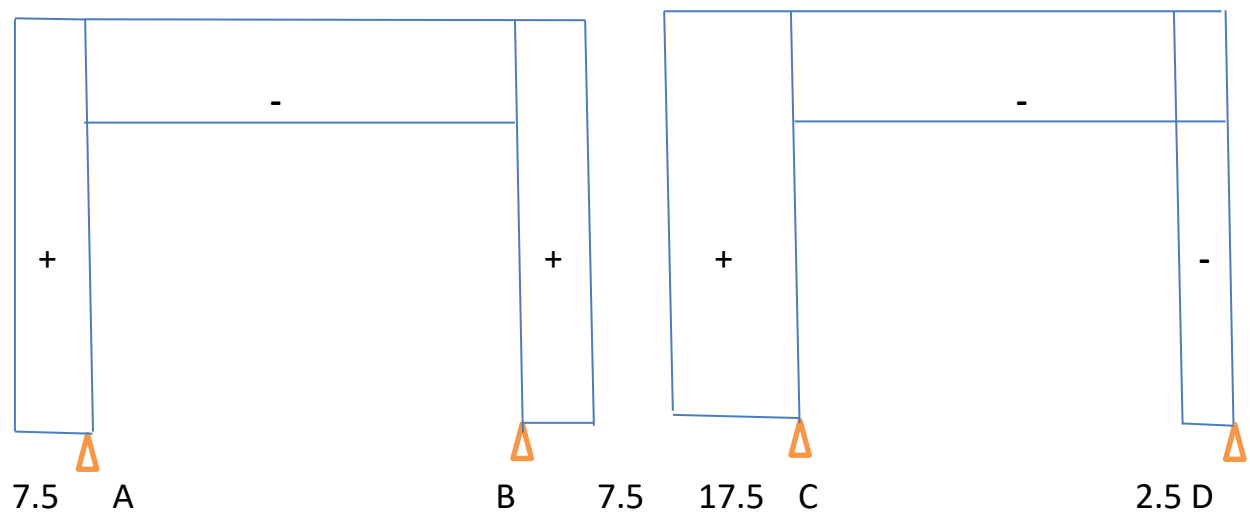
$$R_A = 7.5 \text{ KN}, R_B = 7.5 \text{ KN}$$

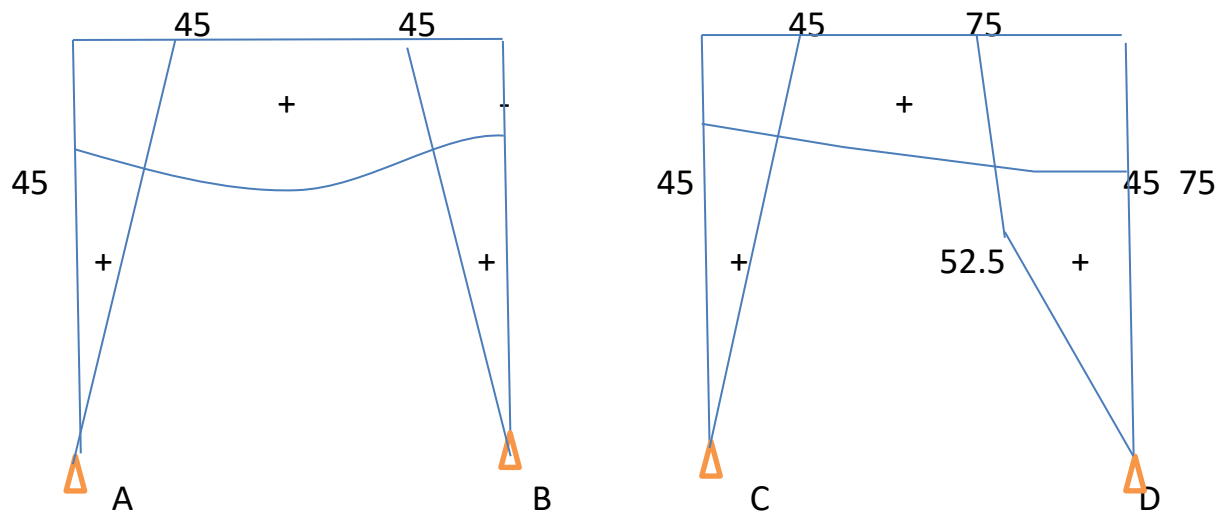
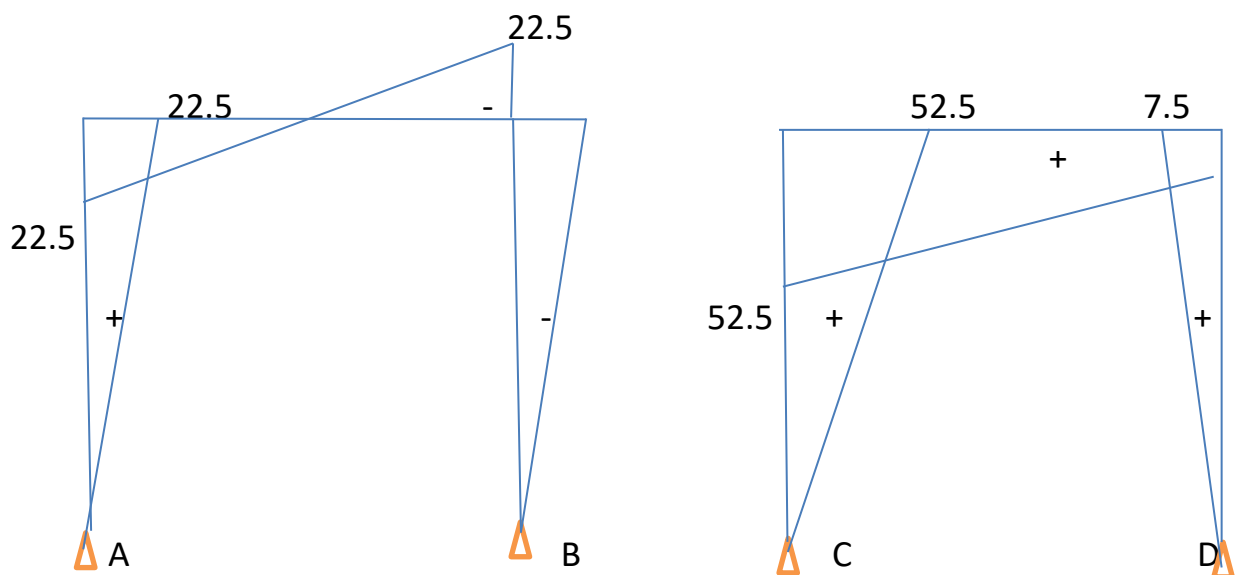
$$H_A = 15 \text{ KN}, H_B = 15 \text{ KN}$$

Effort normalElément 2

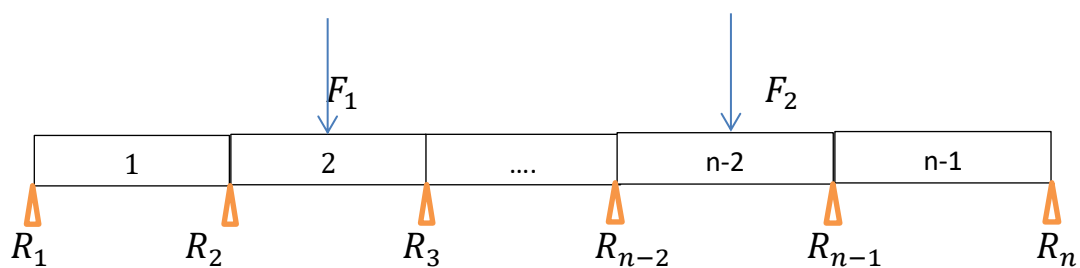
$$R_C = 17.5 \text{ KN}, R_D = -2.5 \text{ KN}$$

$$H_C = 15 \text{ KN}, H_D = 35 \text{ KN}$$

Effort normal

Effort normalTravail circulantPropriété

Soit un système de poutres continues chargé à  $n$  appuis ( $n \geq 2$ ) supposés non déplaçables.



- Les efforts tranchants sont extrêmes au niveau des appuis
- Les déplacements au niveau des appuis sont nuls

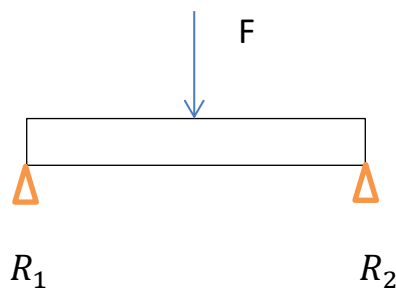
### Preuve

- Les efforts tranchants sont extrêmes au niveau des appuis ?

Pour démontrer cette propriété nous allons utiliser le raisonnement par récurrence

- Pour  $n=2$

Soit un système à deux appuis comme suit



Quelques soit le type de chargement

$$\left[ \begin{array}{ll} T_1 = R_1 & \text{(Maximum)} \\ T_2 = R_2 & \text{(Minimum)} \end{array} \right.$$

Alors la propriété est vraie à l'ordre 2

Soit  $k$  un entier naturel tel que  $k \geq 2$

Soit un système composé de  $k$  appuis

Supposons que la propriété est vraie à l'ordre  $k$  et montrons qu'elle l'est aussi à l'ordre  $k+1$

$$\text{On a } F_k = \sum_{i=1}^k R_i \text{ or } T_i = R_i \text{ ainsi } F_k = \sum_{i=1}^k T_i$$

$$\text{Pour } n=k+1 \text{ on a aussi } F_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} T_i$$

$$F_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} T_i \Leftrightarrow F_{k+1} = \sum_{i=1}^k T_i + T_{k+1} \text{ Ainsi}$$

$$T_{k+1} = F_{k+1} - \sum_{i=1}^k T_i$$



or  $T_l$  est extrême ( hypothèse de départ) alors  $\sum_{i=1}^k T_l$  l'est aussi

D'où  $T_{k+1}$  est extrême car  $F$  est constante ( c'est-à-dire  $F_k = F_{k+1}$ )

- Les déplacements au niveau des appuis sont nuls ?

De même puisque au niveau de chaque appui la réaction existe alors il y a toujours contact entre la poutre et l'appui et comme les appuis sont fixes alors la flèche est nulle au niveau de chaque appui.

D'où  $V_i = 0$

### **Conséquence**

Soit un système de poutres continues chargé à  $n$  appuis ( $n \geq 2$ ) supposés non déplaçables.

- Les moments fléchissant sont nuls au niveau des appuis
- Les rotations au niveau des appuis sont extrêmes

### **Preuve**

Comme  $T = \frac{dM}{dx}$  alors  $M = 0 \Leftrightarrow T$  extrême

Comme  $\theta = \frac{dv}{dx}$  alors  $v = 0 \Leftrightarrow \theta$  extrême

D'où le résultat.

### **Résolution des poutres continues**

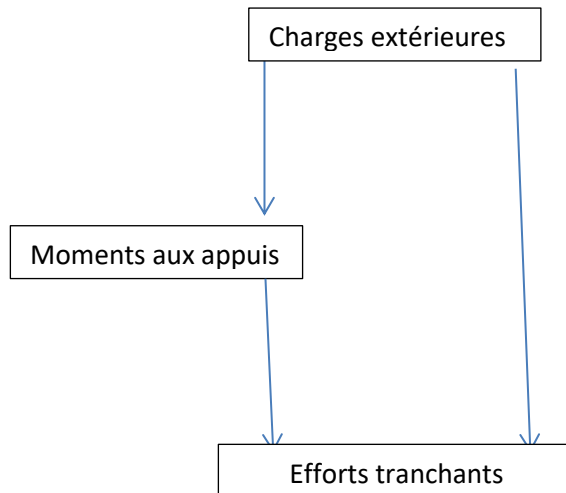
De nos jours plusieurs méthodes permettent de résoudre les systèmes de poutres continues. Parmi elles nous avons celle proposée par Émile Clapeyron à travers ses trois moments. Seulement que cette méthode présente un petit soucis.

Clapeyron estime que l'effort tranchant en tout point de la poutre est la somme de l'effort tranchant dû aux charges extérieures et celui dû aux moments au niveau des appuis. C'est là le souci puisque ces moments au niveau des appuis sont nuls en réalité mais bon comme c'est un savant qui a parlé, admettons qu'il a fait usage du principe de superposition et avançons.

L'autre souci dans la méthode est que les moments aux appuis qui engendrent des efforts tranchants supposés différents de celui engendrer par les charges

extérieures dépendent aussi des charges extérieures. Il y a donc dépendance entre charges extérieures et moments fléchissant ce qui signifie qu'il ne s'agit pas du principe de superposition.

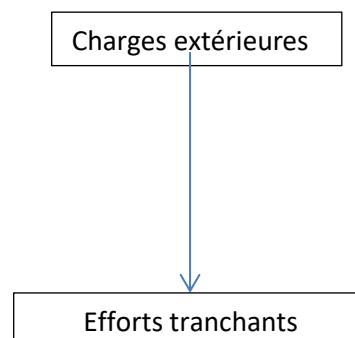
Voici le schéma suivit pas le savant français



C'est difficile à croire ce que nous propose Clapeyron pourtant mes ingénieurs et docteurs passent leur temps à calculer des moments qui n'existent pas en réalité.

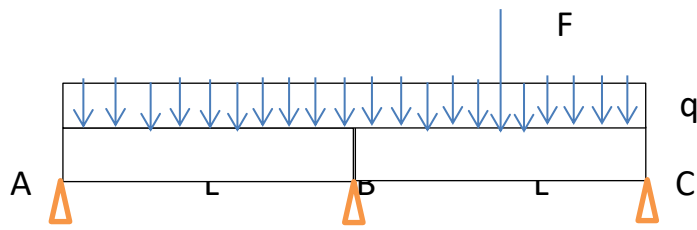
### **Proposition de résolution**

Puisque les moments au niveau des appuis sont nuls alors ce sont uniquement les charges extérieures qui créent les efforts tranchants et par conséquent le système à  $n-1$  travé doit être décomposé en  $n-1$  systèmes à une travé indépendants. La réaction au niveau de tout appui est la somme algébrique de sa réaction gauche et celle droite.



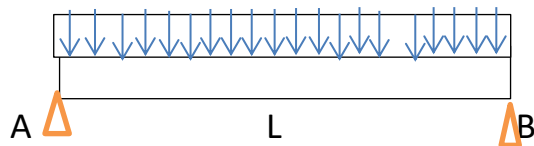
### **Exemple**

Soit à résoudre le système suivant

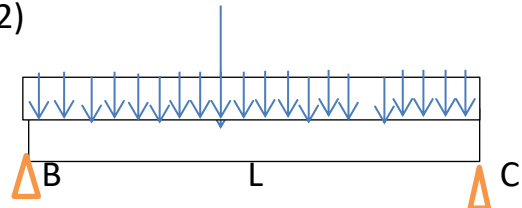


$$F=20\text{KN} ; q=5\text{KN/m}, L=3\text{m}$$

1)



2)

Élément 1

$$R_{A1} = 7.5 \text{ KN}, R_{B1} = 7.5 \text{ KN}$$

Élément 2

$$R_{B2} = 17.5 \text{ KN}, R_{C2} = 17.5 \text{ KN}$$

$$D'où R_A = 7.5 \text{ KN}, R_B = 25 \text{ KN} \quad R_C = 17.5 \text{ KN}$$

**Propriété**

Tout schéma structural possède au moins un schéma statiquement équivalent

**Conséquence**

Tout portique quel que soit son type ou son degré peut être transformé en une poutre continue en travée.

**Règle du spire**

La règle du spire est une règle du tracé des diagrammes mécaniques. Elle stipule que l'évolution de tout diagramme mécanique (effort tranchant, moment fléchissant...) est spirale.

**Degré ou ordre d'encastrement d'un appui**

Le degré d'encastrement d'un appui est le nombre de paramètre à considérer au niveau de cet appui dans l'étude du système.

**L'hyperstaticité d'un système**

L'hyperstaticité d'un système mécanique dépend de son degré d'encastrement. Un système peut être hyperstatique à l'ordre un et ne pas l'être à l'ordre deux. On dit que l'hyperstaticité est relative.

## Résolution des portiques

Il existe de nos jours plusieurs méthodes de résolution des portiques avec pour chacune une limite relative. Mais une insuffisance est commune à toutes ces méthodes : la non intégration du travail circulant dans leur calcul. Ce qui fait qu'il y existe dans leurs diagrammes un travail résiduel des efforts au niveau de chaque appui ( ce qu'il faut toujours éviter car le travail est une énergie). C'est pourquoi ces méthodes quelques soit leur type ne devait pas être considéré. De plus avec ces méthodes on ne peut résoudre des systèmes qu'au plus qu'à l'ordre deux d'encastrement (réaction et moment) et donc si l'on souhaite déterminer les rotation d'encastrement ( degré 3) ces méthodes ne nous les permettront pas. Cherchons alors une autre méthode.

### Proposition de résolution

La méthode de calcul des portiques que nous proposons est la méthode des forces modifiée. En effet puisque la méthode des forces que nous connaissons jusqu'à nos ne prend pas en compte le travail qui circule dans les élément de structure nous proposons alors une méthode qui suit le même processus ou cheminement que la méthode de force usuelle mais qui intègre la correction de la limite de la première.

### Méthode des forces modifiée

C'est une méthode ayant le même principe et la même démarche que la méthode des forces usuelle. Seulement que chaque fois qu'on considère une force unitaire de l'une des forces du système en annulant les autres il faut tracer les diagrammes du moment fléchissant et du travail circulant. Après ça on calcule les amplitudes des forces en utilisant les formules suivantes.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int_0^L (m_i m_j + w_i w_j)$$

$$\delta_{i0} = \int_0^L (M_0 m_i + W_0 w_i)$$

$$\delta_{ii} = \int_0^L (m_i m_i + w_i w_i)$$

## **CHAPITRE IV : NORME DE CONSTRUCTION**

### **Objectif**

Nous connaissons aujourd'hui des méthodes et normes de dimensionnement des éléments de structure (BAEL, EUROCODE ...). Sauf que toutes ces normes sont fondées sur des lois empiriques et de plus, elles provoquent un surdimensionnement important de l'ouvrage. Or les matériaux s'amenuisent et on tend vers une disparition totale de certains d'entre eux. D'où la nécessité de trouver d'autres méthodes ou normes de dimensionnement permettant un usage rationnel du matériau. La méthode que nous proposons ici est basée sur les lois de la mécanique statique que nous avons vu plus haut.

### **Approche critique**

Les essais au laboratoire effectués dans le domaine de Génie Civil ont apporté leurs aides dans l'étude des comportements des matériaux certes, mais certains essais sont encore nécessaires. Plusieurs essais qui jusque-là ne sont pas encore réalisés seront indispensables dans l'étude des comportements des matériaux. Nous allons citer au nombre des essais qui restent encore à effectuer :

- L'essai de détermination de la recidance (vitesse de propagation de la contrainte dans un matériau)
- Essai de détermination de la permittivité d'un matériau
- Essai de détermination de la perméabilité d'un matériau

### **Utilité de la récidance d'un matériau**

Le physicien connaît la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu, le chimiste connaît la vitesse de disparition d'un réactif mais mon ingénieur ne connaît pas la vitesse de propagation des efforts dans un matériau, c'est pathétique. En génie civil on tient beaucoup plus d'importance sur l'évolution spatiale des phénomènes que sur leur évolution temporaire, c'est une bêtise monumentale. C'est pourquoi on a du mal à prédire les déformations temporelles. On doit donc pour chaque matériau conduire des essais visant à déterminer sa résistance à la propagation des contraintes. Cela nous permet, lorsque la structure est mal dimensionnée de connaître avec précision le temps de début et de la fin des déformations.

### Differents type de charge

Vous avez appris qu'il existe trois type d'action : action permanente, d'exploitation et accidentelle. Nous somme tous d'accord la dessus mais vaut-il la peine d'utiliser des coefficients arbitraires pour pretendre avoir une sécurité quelconque ? C'est dommage car en construction les ouvragzs tiennent au prix du matériau et le franc ne se ramasse pas, encore moins dans mon pays. C'est le manque de connaissance qui nourrit la peur, le cœur d'un ingénieur compétent est plus calme que l'opkara.

J'ai une préoccupation, à partir de quelle durée pouvons-nous considérer qu'une charge est d'exploitation ? une minuite , deux ou une heure ? La question est peut être banale mais pas insensé car si pour une exploitation d'une minuite d'un ouvrage on utilise les mêmes coefficients de sécurité qu'une exploitation de vingt heure cela pose un enorme problème car les ouvrages ne sont pas soumis au même fluage, l'état limite ultime est une fiction. Tous le dimensionnement doit se faire à l'état limite de service, c'est-à-dire  $N=G+Q$

### Dimensionnement de tout élément de structure

Pour dimensionner tout élément de structure il faut suivre les étapes suivantes.

- Tracer l'épure de l'effort normal et déplacement normal dus aux charges externes.
- Calculer l'effort efficace et le déplacement efficace sur chaque tronçon
- Calculer la rigidité sur chaque tronçon

$$R_i = \frac{N_i}{U_i}$$

- Calculer la section sur chaque tronçon

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{K_i^2} + \left(\frac{1}{F_i w} - H_i w\right)^2}}$$

- Déterminer la section uniformisée le long de l'élément de structure

$$S = \max(S_i)$$

- Pour une semelle de fondation, les dimensions satisfont

$$h = \frac{M}{H} = \frac{W}{R}; a^2 = \frac{H}{\rho_{nom} g b} \text{ et } b = \frac{R}{\rho_{nom} g h a}$$

où h est la hauteur, a la dimension suivant H et b la dimension suivant R

- Une fois la structure dimensionner jusqu'à la semelle il faut passer à la deuxième étape en traçant les diagrammes de l'effort et déplacement normaux correspondant aux poids propres des éléments de structure
- Procéder de la même manière que décrite dans la première étape pour déterminer les sections et dimensions correspondant aux poids propres de la structure.
- Faire la somme des dimensions dues à la charge et celles dues à l'inertie de la structure

$$d = d_c + d_i$$

### **Remarque**

La charge linéaire inertielle d'une poutre est constante le long de la poutre tandis que celle d'un poteau est linéaire le long de ce dernier.

### **Théorème**

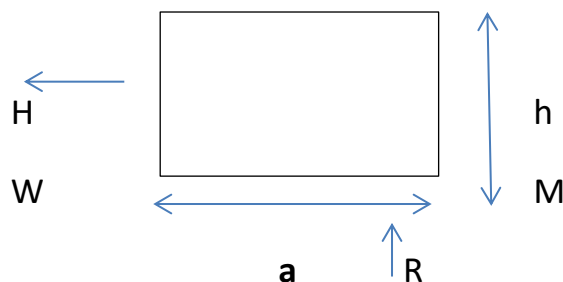
Pour un encastrement idéal  $\frac{M}{W} = \frac{H}{R} = cst$  le long de l'encastrement

### **Preuve**

Il existe trois manières de prouver ce théorème mais nous allons utiliser les deux premières

#### **1<sup>ère</sup> Méthode**

Soit un encastrement dont la coupe longitudinale se présente comme suit



Le travail et le moment agissant en tout point de cet encastrement sont fonctions des réactions tangentielles et normales de l'encastrement en ce même point.

$M = yH$  et  $W = yR$  où  $y$  est le bras de levier

Alors  $\frac{M}{W} = \frac{H}{R}$  or  $H = \tau S$  et  $R = \sigma S$  avec  $S$  la section transversale

ainsi  $\frac{M}{W} = \frac{H}{R} = \frac{\tau}{\sigma}$

Or  $\frac{\tau}{\sigma}$  n'est rien d'autre que l'angle de frottement interne du matériau qui est un paramètre intensif (qui ne dépend pas du volume du matériau). Il est donc constant.

D'où  $\frac{M}{W} = \frac{H}{R} = cst$

## 2<sup>ème</sup> Méthode.

Utilisons à présent un raisonnement mathématique

Si  $y=0$  alors notre encastrement se transforme en un appui double

Dans ce cas les réactions sont maximales et les énergies sont minimales. alors

$$\frac{M}{W} \leq \frac{H}{R}$$

Si  $y=h$  alors notre encastrement est réel. Dans ce cas les réactions sont

minimales et les énergies sont maximales., alors  $\frac{M}{W} \geq \frac{H}{R}$

Alors il vient que  $\frac{M}{W} = \frac{H}{R}$  et puisque  $\frac{H}{R}$  est constant (angle de frottement interne)

d'où  $\frac{M}{W} = \frac{H}{R} = cst$

La troisième méthode est aussi un raisonnement mathématique, non pas directe mais fondée sur l'absurdité.

## **Règle de construction es structure**

Les ingénieurs et techniciens doivent observer certaines règles ou dispositions lors du dimensionnement ou de la mise en œuvre de tout ouvrage.



## **Règle de construction bâtiment**

- La section doit être constante le long d'un élément de structure ( poutre ou pôteau)

Cela permettra d'éviter les racoucissements et les extensions des éléments de structure adjacents

- Eviter au mieux la discontinuité de la matière

La base de la résistance des matériaux étant fondée sur l'hypothèse d'un milieu continu il faudra que cette hypothèse soit le plus que possible vérifiée.

Ainsi en cas du possible, couler l'élément de structure sans chainage car le chainage crée une discontinuité de matière

- Dans les zones à forte densité démographique opter pour la construction par montage

Elle consiste à préfabriquer les éléments et à les monter sur le site. Cela permet de réduire l'impact des matériaux de construction sur la santé humaine. En fait tout matériau est le siège d'une réaction chimique ( le durcissement du béton par exemple)

- Réduire au mieux l'inertie de l'ouvrage

N'oublions pas que c'est la terre qui supporte le poids de votre ouvrage et cette terre à aussi une vie. Si elle est trop sollicitée elle va vite s'épuiser

- Utiliser le matériau le plus rationnelle que possible

Ne soyez pas égoïste, ayez un esprit social. Si parce que vous avez les moyens financiers vous vous permettez d'abuser des matériaux ce sont les autres qui en souffriront de leur pénurie

- Assurer au mieux la sécurité de l'ouvrage

Assurez-vous que votre site est inaccessible aux étrangers afin d'éviter les vols de matériaux ou matériels et les actes de vandalisme. Pour cela avant le début de tout travaux délimitez soigneusement votre site et veillez à sa fermeture après travail quotidien

- Assurer la sécurité du personnel

Limiter au maximum l'exposition du personnel à l'ouvrage afin de réduire le risque des problèmes sanitaires et incidents (chute de matériaux) et surtout ne prolonger pas le temps d'exécution lorsque vous pouvez faire autrement

- Vérifier l'auto-sécurité du personnel

Toute personne travaillant sur le site doit se vêtir convenablement ( port de casque, de chaussure de sécurité etc)

- La rigueur doit être de mise

N'est pas ingénieur qui veut mais qui peut, alors le site n'est pas un terrain de jeu et le travail pas un hlm hollywoodien. Que ceux qui jouent prennent congé des autres.

- Avoir le sens de responsabilité

L'œuvre humaine n'est pas divine et même le plus grand ingénieur de l'histoire ne saurait prendre en compte tous les paramètres ou facteurs préjudiciables à un ouvrage. Il y a toujours un risque à prendre et, si ce risque conduit au fiasco IL FAUT L'ASSUMER.

### **Prophétie sur l'avenir de la mécanique**

C'est ici la voix de la science et la projection de l'avenir. Comme le harmattan annonce la fin de l'année, l'acadjou annonce l'été, nous annonçons le future de la mécanique et le devenir de la discipline

Il arrivera un temps où l'électricité cèdera sa place à la mécanique

En effet, on obtiendra de la lumière non pas en appliquant une tension aux bornes d'un gaz mais en appliquant un effort aux bornes d'un matériau

Ce temps viendra où on laissera les ondes électromagnétiques au profit des ondes mécaniques

Ce temps arrive où on utilisera les composants mécaniques pour faire des merveilles (fabrication des appareils comme la télévision, le téléphone, les machines etc )

Ce temps est proche où on programmera des composants ou circuits mécaniques

Ce temps arrive où les nations ne se livreront plus de guerre à cause des semi-conducteurs électroniques mais à cause des semi-conducteurs mécaniques.

Ce temps viendra où on aura des immeubles mouvants

Ce temps est proche où l'on entendra parler de la mécanique embarquée

Ce temps arrivera où toute une station spatiale sera faite rien que des composants à usage mécanique

Ce temps est proche où la mécanique connaîtra sa révolution

Ce temps viendra où la mécanique atteindra son apogée

En effet cinq siècles ne passeront sans que cette prophétie se réalise

## **CONCLUSION**

Le document que nous venons de vous présenter est le résultat de plusieurs années d'études et de recherches. Nous admettons n'avoir pas fait un travail idéal ; nous sommes ce que nous sommes. Nous avons écrit ce document durant les moments les plus difficiles de notre vie. Nous ne remettons pas en cause les travaux des savants par quête de visibilité. En matière de connaissance, Émile Clapeyron est une école et fait partie des plus grands de tous ; mais le caractère dynamique de la science oblige à porter une approche critique sur les œuvres et travaux des prédécesseurs. Nous pouvons nous tromper sur notre considération et nous espérons une amélioration ou une remise en cause de notre étude. Soyez juste diplomatique dans les reproches car ce n'est pas facile la vie d'un scientifique ou d'un aspirant à la science.