Projet 3 : Chaînes de Markov à temps discret

Gauvain Jodie et Bielle Benjamin

11 décembre 2013

Sommaire

Chapitre 1

Processus de naissance et de mort

La figure **1.1** montre les performances du système en fonction de K.
On remarque que le temps de résolution augmente de manière “linéaire” en fonction du temps et de la taille de K.

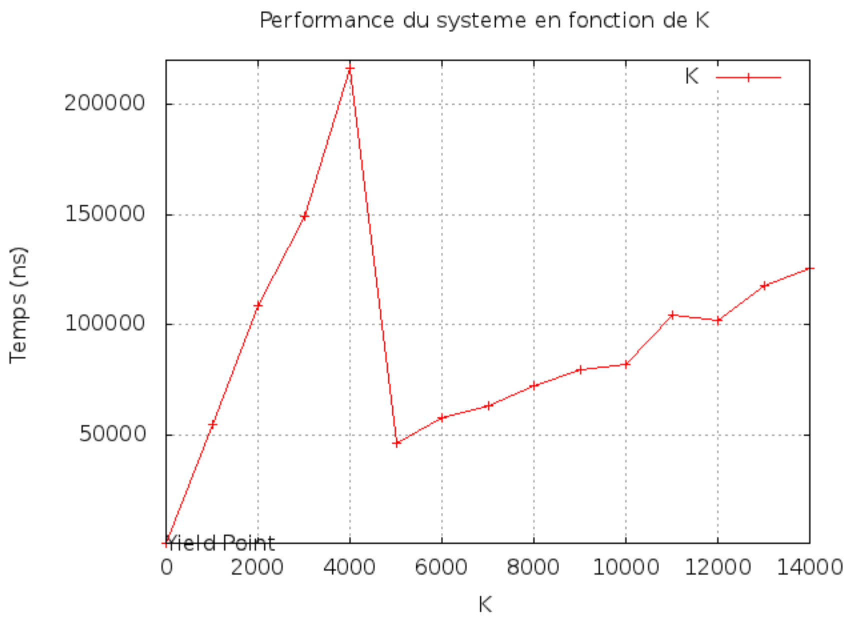

FIGURE 1.1 – performance du systéme

La figure **1.2** montre la diminution de l’écart entre la méthode exacte et la méthode des puissances en fonction du nombre d’itérations. On peut en conclure qu’en augmentant le nombre d’itérations l’écart entre les résultats des deux méthodes diminue.

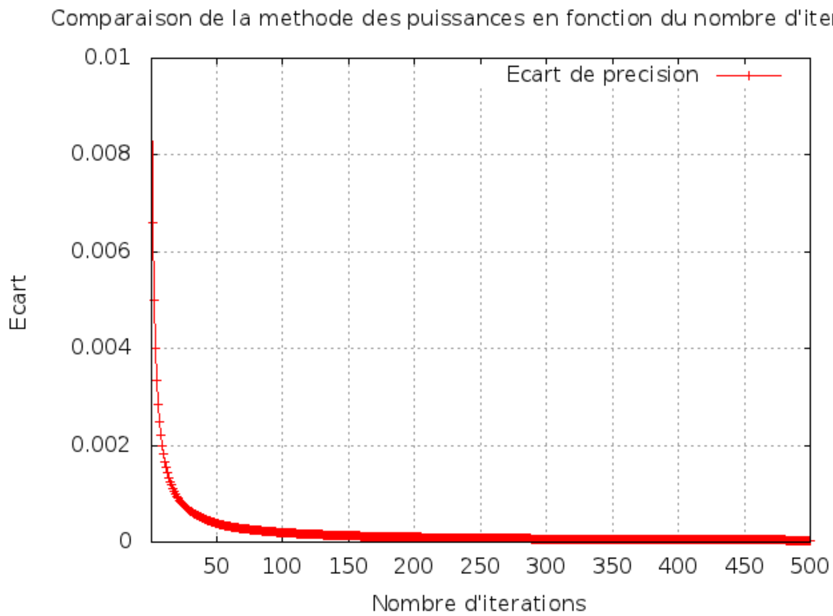

Figure 1.2 – comparaison entre la méthode des puissances et la méthode exacte

Dans un premier temps, nous avons proposé un critère de convergence peu adapté basé sur un nombre d'itérations fixe. Nous avons testé la méthode des puissances avec différentes en faisant varier K, p et q. Selon leurs valeurs, il faut un nombre d'iterations variable pour que la méthode des puissances converge et soit suffisamment précise. En fonction des valeurs des paramètres, le nombre d'iterations fixé peut être largement supérieur au nombre nécessaire pour converger - perte de temps - ou trop faible dans d'autres cas - perte de précision.

Dans un deuxième temps, nous avons mis en oeuvre un critère qui consiste a stopper les iterations lorsqu'on trouve un écart inférieure à une valeur epsilon avec l'étape d'avant. En faisant varier sa valeur, nous avons observq́ue plus espilon est petit, c'est à dire plus on veut un résultat proche de la résolution exacte, plus il faut de temps (d'itérations) pour que la méthode converge.

C'est pourquoi nous avons finalement choisi un critère combiné á partir des deux idées précédentes : s'arrête soit quand on trouve un écart inférieur à epsilon, soit quand on dépasse un certain nombre d'itérations. On évite ainsi un temps de calcul excessif lorsqu'il faut un nombre d'iterations élevé, quitte à perdre en précision.

Chapitre 2

Comparaison des méthodes numériques

Intuitivement, on s’attend à ce que la méthode Gauss-Seidel converge plus rapidement que celle des puissances car elle utilise des valeurs mises à jour à l’étape courante et pas uniquement celles de l’étape précédente, contrairement à la méthode des puissances.

Nous remarquons que la méthode de Gauss-Seidel est plus rapide en termes de nombre d’itérations que la méthode des puissances, et que celle-ci est aussi plus précise.
En effet, en fixant les valeurs de K, p et q à celles de l’´enoncé, nous remarquons que la méthode des puissances effectue 1389 itérations tandis que la méthodes de Gauss-Seidel en effectue seulement 28 (ces valeurs dépendent de la machine sur laquelle sont effectués les tests).
L’écart entre la méthode des puissances et la méthode exacte est supérieur à celui obtenu avec la méthode de Gauss-Seidel.
Voici les valeurs de ces écarts.

- Méthode des puissances : 3.1378838637238386E-4
- Méthode de Gauss-Seidel : 2.6232946496763943E-6 -> Méthode la plus performante

Nous pouvons donc dire que la méthode de Gauss-Seidel est plus performante que celle des puissances.

Nous avons effectué une série de tests pour vérifier cette conclusion.

En fixant les valeurs de p et q, nous avons comparé la vitesse de convergence des deux méthodes.
En faisant varier les valeurs de p et q, nous avons fait des tests dans un premier temps sur des grandes et des petites valeurs, puis dans un second temps sur des valeurs éloignées et proches.

On constate bien que la méthode de Gauss-Seidel effectue beaucoup moins d’itérations pour converger.

La figure **2.3** montre que pour un nombre d’états de la chaine croissant les deux méthodes réagissent différement.
En effet, nous remarquons que la méthode de Gauss-Seidel effectue largement moins d’itérations que la méthode des puissances. Entre outre Gauss-Seidel est plus précise.
Donc nous pouvons affirmer que la méthode de Gauss-Seidel est toujours plus performante que la méthode des puissances.

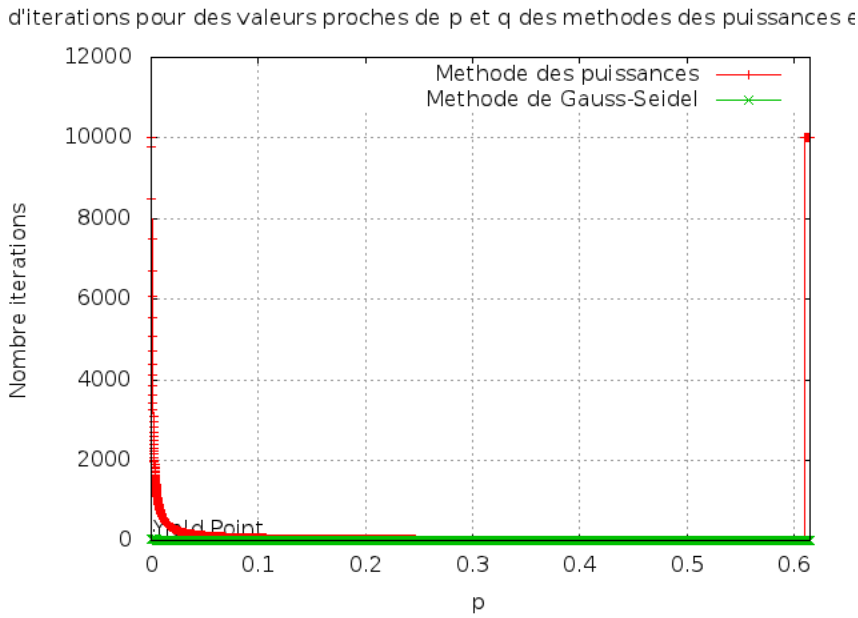

FIGURE 2.1 – Nombre d'itérations pour des valeurs proches de p et q

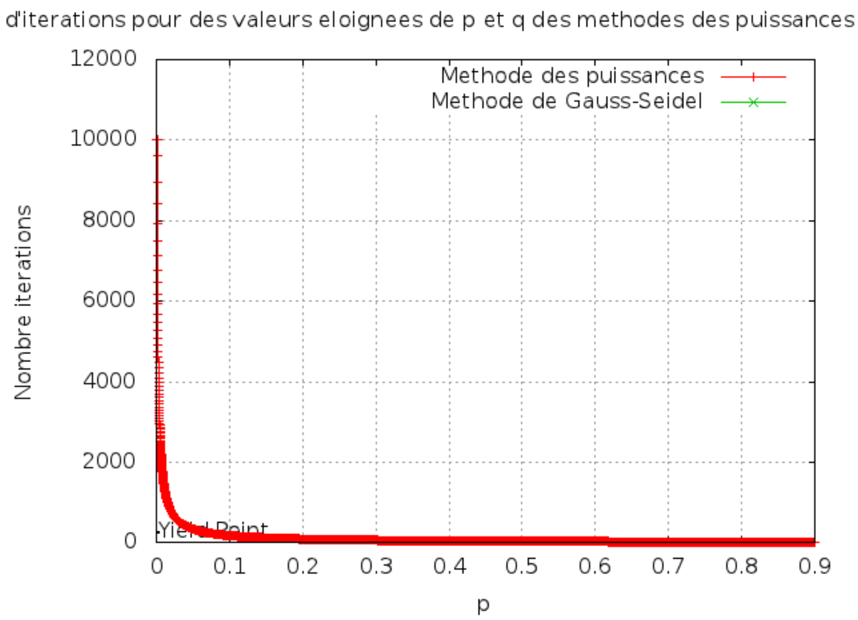

FIGURE 2.2 – Nombre d'itérations pour des valeurs éloignées de p et q

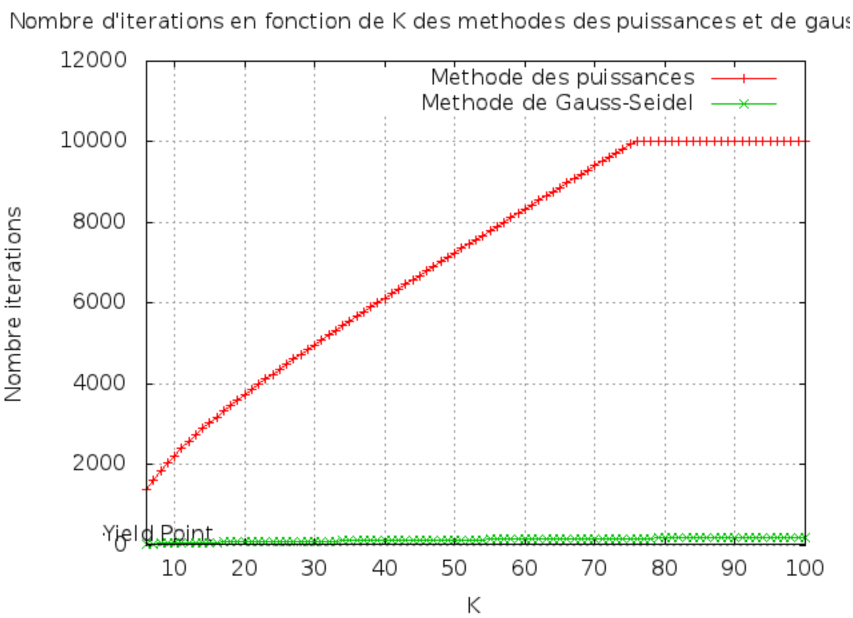

FIGURE 2.3 – Nombre d'itérations en fonction de K des méthodes de Gauss-Seidel et des puissances

Chapitre 3

Chaines infinies

On considère dans un premier temps une chaîne infinie à arrivées bernoulliennes, tronquée à une valeur K. Valeurs obtenues :

- Méthode des puissances : 30 itérations avec un écart de 0.008362535413575642 avec la méthode exacte.
- Méthode de Gauss-Seidel : 3 itérations avec un écart de 0.008361094780847884 avec la méthode exacte.

Nous remarquons que la méthode de Gauss-Seidel est plus performante que celle des puissances.

La troncature d'une chaine de Markov infinie est une dégradation de la chaine infinie. Donc nous avons une perte d'information et donc de précision.

Table des figures