

## Capítulo 5. Sistemas Lineales

### 5.3 Love Affairs - Romances

5.3.1 (Name-calling) Suggest names for the four romantic styles, determined by the signs of  $a$  and  $b$  in  $\dot{R} = aR + bJ$

Dado el modelo de los sentimientos entre Romeo ( $R$ ) y Julieta ( $J$ ):

$$\dot{R} = aR + bJ$$

$$\dot{J} = bR + aJ$$

a) determina la Caveta, es decir, la respuesta producida por los sentimientos propios

b) determina la respuesta producida por los sentimientos del otro

Casos:

$$\underline{a < 0, b < 0}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad T(A) = 2a < 0$$

$$\det(A) = a^2 - b^2$$

$$T^2 - 4\det(A) = 4a^2 - 4a^2 + 4b^2 = 4b^2 > 0$$

Si  $a^2 > -b^2 \rightarrow (0,0)$  es un nodo estable

Si  $a^2 < b^2 \rightarrow (0,0)$  es un punto de silla

$$\det \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)^2 - b^2 = 0$$

$$a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2a}{2} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 4a^2 + 4b^2}{4}}$$

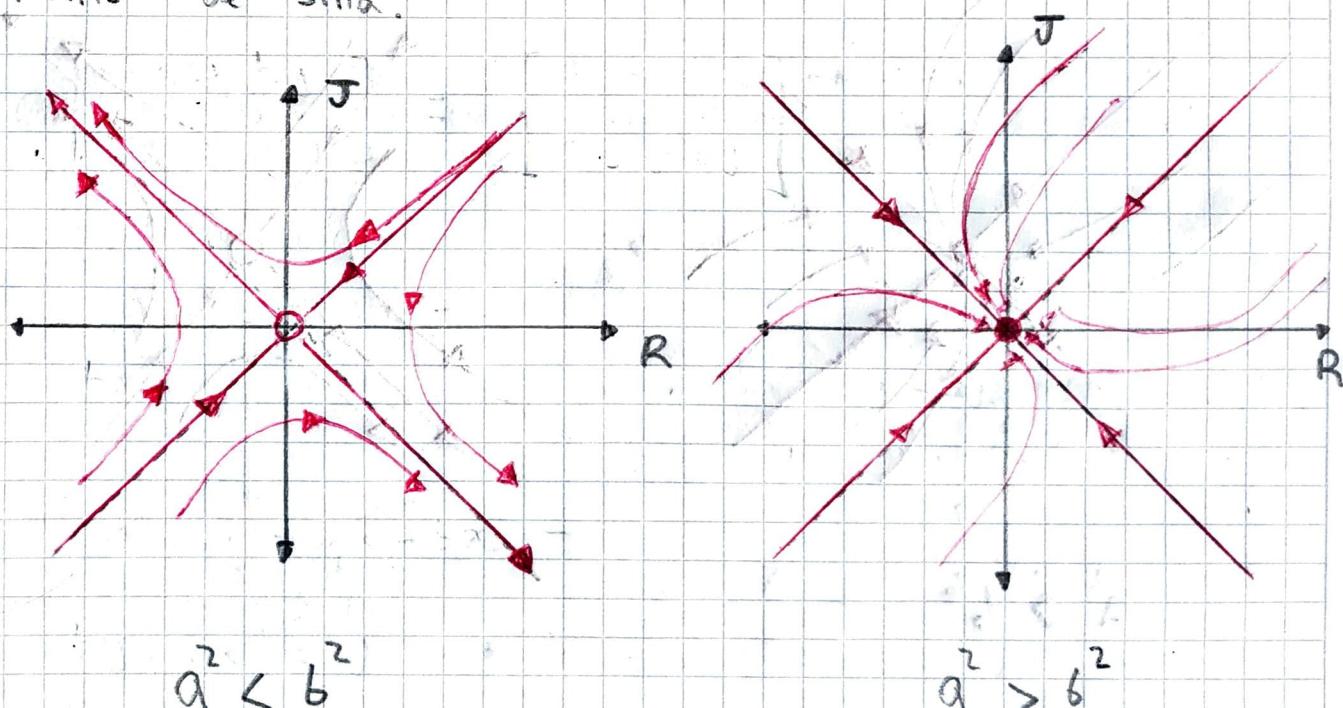
$$\lambda = a \pm b$$

$$\lambda_1 = a+b \rightarrow V_1 = [1, 1]$$

$$\lambda_2 = a-b \rightarrow V_2 = [1, -1]$$

Como:  $a+b < a-b$  el vector propio  $[1, -1]$

Genera el colectivo inestable cuando el origen es un punto de silla.



En el caso que  $a^2 > b^2$  se tiende a la indiferencia mutua

En el caso que  $a^2 < b^2$  se tiene un amor no

Correspondido, pues los sentimientos no tienden a ser mutuos

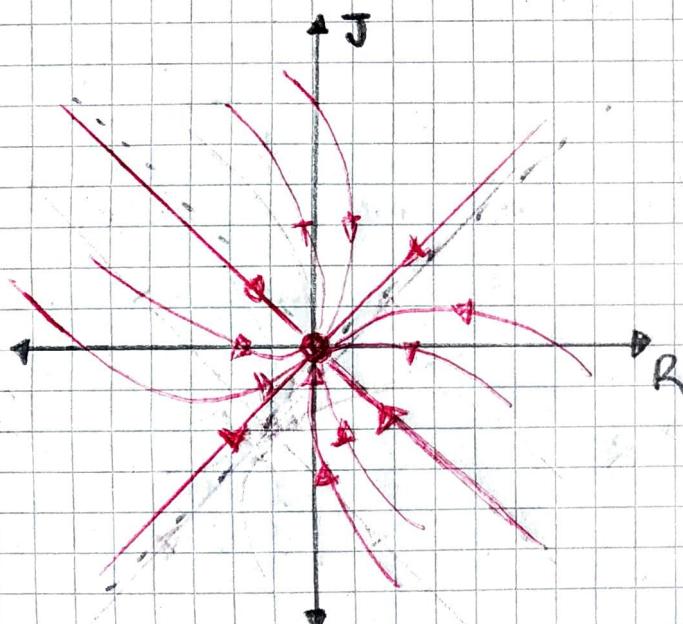
$$\underline{a < 0, b > 0}$$

Los eigen vectores y eigen valores siguen siendo lo mismo, pero su estabilidad o inestabilidad cambia:

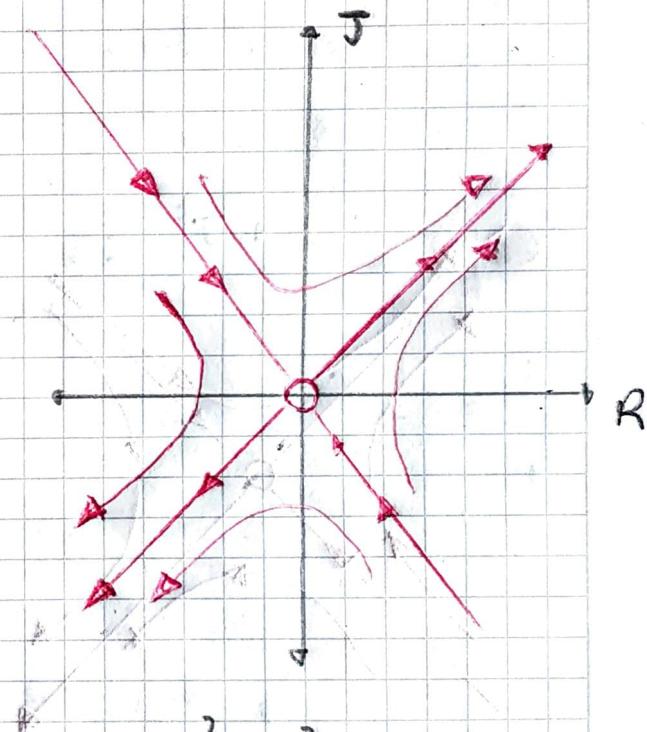
$$a+b > a-b$$

$$V_1 = [1, 1] \rightarrow \text{Colectar instable}$$

$$V_2 = [1, -1]$$



$$a^2 > b^2$$

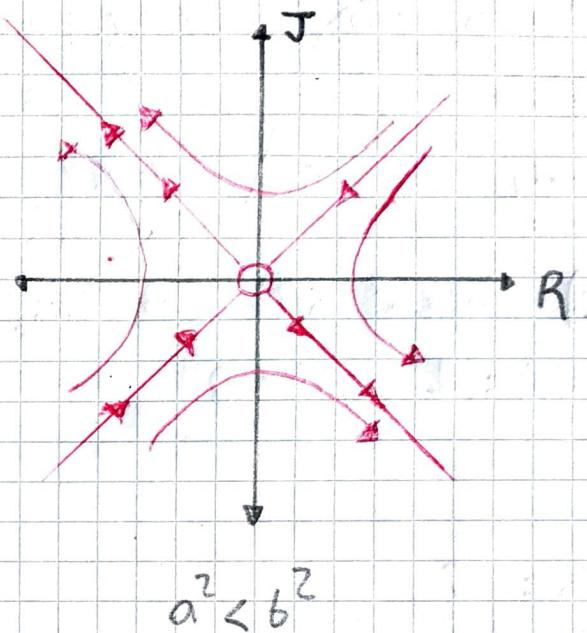
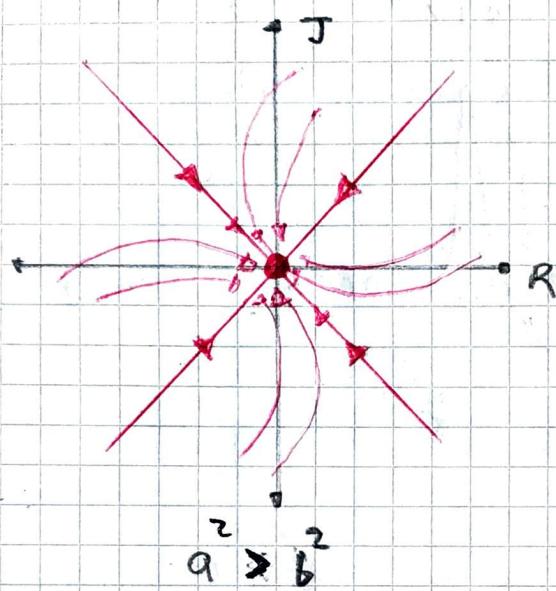


$$a^2 < b^2$$

La relación es explosiva si  $a^2 < b^2$ , pero tiende a la indiferencia si  $a^2 > b^2$

$$\underline{a > 0, b < 0}$$

$$a+b < a-b$$



Es una relación destinada al fracaso; en el mejor de los casos tiende a la indiferencia mutua. Pero puede terminar siendo un amor no correspondido.

$$\underline{a > 0, b > 0}$$

$$\underline{a+b > a-b}$$

para  $a^2 > b^2$ : Tiende a la indiferencia mutua

para  $a^2 < b^2$ : Relación explosiva, tiende al amor o al odio mutuo

5.3.2

Consider the affair described by  $R = J$ ,  $\dot{J} = -R + J$

- Characterize the Romantic styles of Romeo and Juliet
- Classify the fixed points at the origin. What does this imply for the affair?
- Sketch  $R(t)$  and  $J(t)$  as functions of  $t$ , assuming  $R(0) = 1$ ,  $J(0) = 0$

$$\dot{R} = J$$

$$\dot{J} = -R + J$$

$$\dot{X} = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

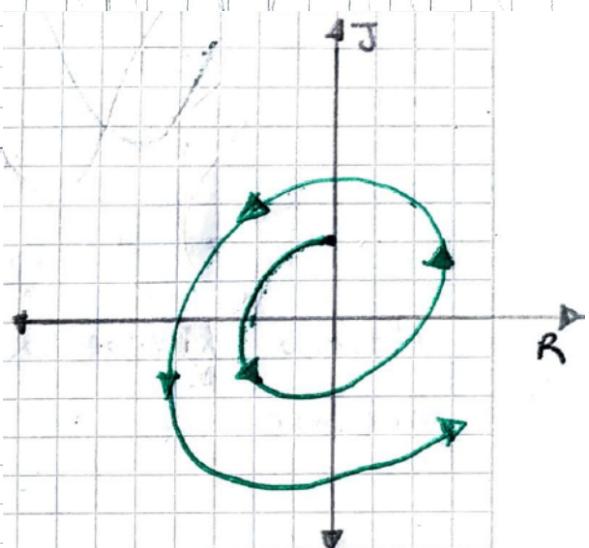
$$-\lambda(1-\lambda) + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

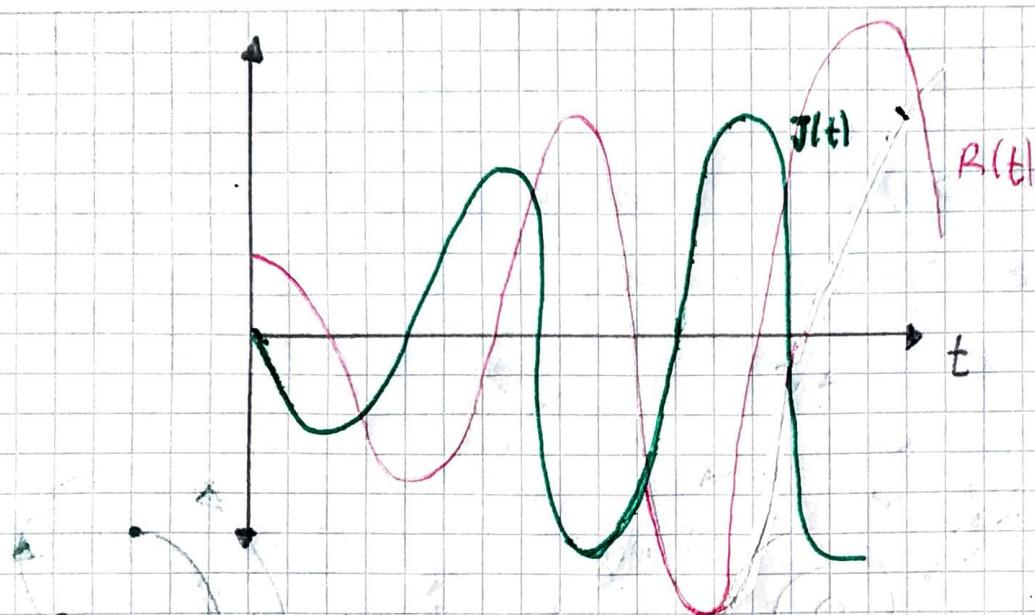
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Como  $\Re(\lambda) > 0$ , los sentimientos del uno por el otro oscilan de forma creciente



A medida que pasa el tiempo los sentimientos entre ambos se vuelven cada vez más intensos, pero no tienen ninguna estabilidad: en ocasiones es Mirlo y en otros son no correspondidos

El origen es un punto de equilibrio inestable, esto quiere decir que el romance nunca tenderá a la indiferencia



Romeo tiende a copiar los sentimientos de Julieta, mientras que Julieta se "opone" a los de Romeo.

In each of the following problems, predict the course of the love affair, depending on the signs and relative sizes of  $a$  and  $b$ .

### 5.3.3

(out of touch with their own feelings) Suppose Romeo and Juliet react to each other but not to themselves:  
 $\dot{R} = aJ$ ,  $\dot{J} = bR$ . What happens?

$$\dot{R} = aJ$$

$$\dot{J} = bR$$

$$\begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -ab$$

$$T(A) = 0$$

Valores Propios:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - ab = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{ab}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{ab}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{ab}$$

Vectores Propios:

$$AV_1 = \lambda_1 V_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\sqrt{ab} \\ y\sqrt{ab} \end{bmatrix}$$

$$ay = x\sqrt{ab} \rightarrow y = x \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$$bx = y\sqrt{ab}$$

$$bx = x \frac{\sqrt{ab}}{a} \sqrt{ab}$$

$$bx = xb$$

Fijamos  $x$  en 1

$$y = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{ab}}{a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{ab}^T x \\ -\sqrt{ab}^T y \end{bmatrix}$$

$$ay = -\sqrt{ab}^T x \rightarrow y = -\frac{\sqrt{ab}^T}{a} x$$

$$bx = -\sqrt{ab}^T y \rightarrow bx = -\sqrt{ab} \frac{\sqrt{ab}^T}{a} x$$

$$bx = -bx$$

$$\text{Fijamos } x = -1$$

$$y = \frac{\sqrt{ab}^T}{a}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{ab}}{a} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{ab}^T \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{ab}}{a} \end{bmatrix}$$

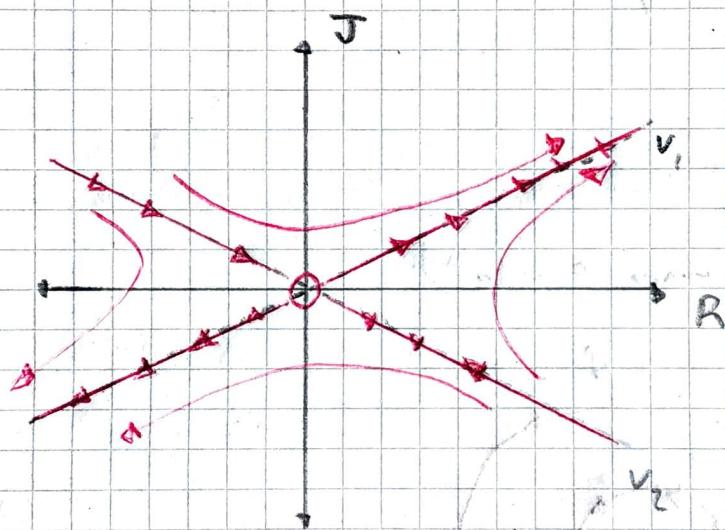
$$\lambda_2 = -\sqrt{ab} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{ab}}{a} \end{bmatrix}$$

Si  $a < 0, b < 0$

$\det(A) = -ab < 0 \rightarrow$  El punto de equilibrio es un punto de silla

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

$$\sqrt{ab} > -\sqrt{ab}$$



Tienden al odio mutuo o al amor mutuo, sin embargo, la intensidad de los sentimientos depende de los parámetros. (No necesariamente tienden a amarse o odiarse con la misma intensidad)

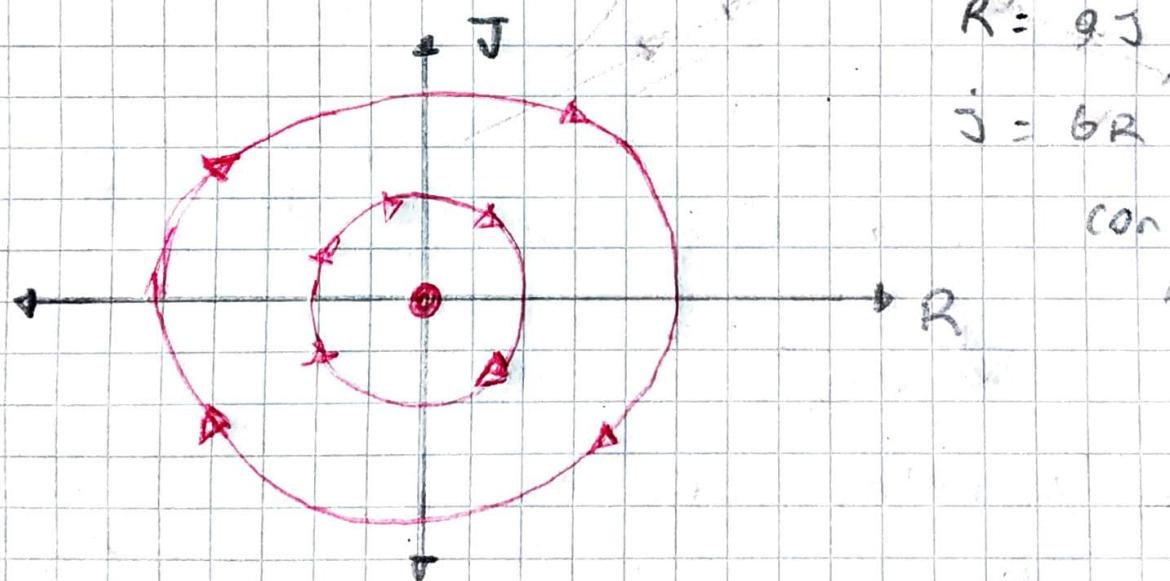
Si  $a > 0, b < 0$

$$\det(A) = -ab > 0$$

$$\lambda_1 = \sqrt{ab} = i\sqrt{|ab|} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{|ab|}$$

Como  $\text{Re}(\lambda) = 0$ , se tienen órbitas estables.

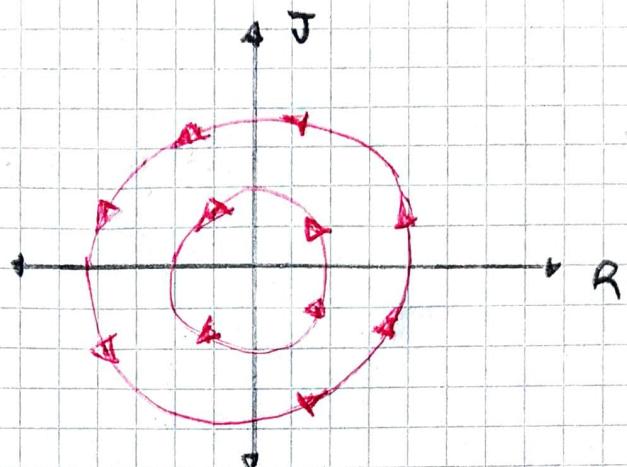
El origen es "Límite estable"



Es un ciclo amor - odio sin fin.

Si  $a < 0$  y  $b > 0$

Igual al anterior, pero las órbitas van en el  
otro sentido:



$$\dot{R} = aJ$$

$$J = bR$$

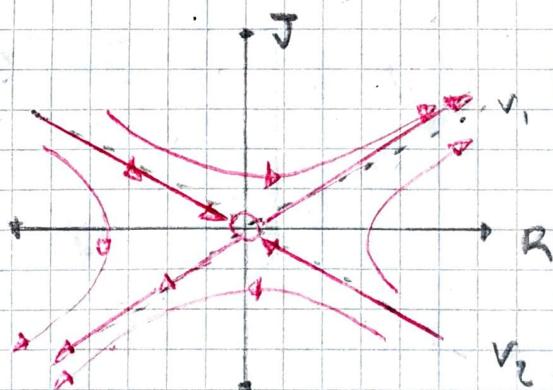
con  $a < 0$   
 $b > 0$

Si  $a > 0$  y  $b > 0$

$$\lambda_1 = \sqrt{ab} \quad \lambda_2 = -\sqrt{ab}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{ab}{a}} \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{\frac{ab}{a}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 > \lambda_2$$



La relación es explosiva, pueden tender al amor o al odio mutuo.

### 5.3.5

(Peas in a Pod) If Romeo and Juliet are Romantic clones ( $R = aR + bJ$ ,  $J = bR - aJ$ ), should they expect boredom or bliss?

(Ver Ejercicio 5.3.1)

En resumen, pueden esperar dicha o aburrimiento, dependiendo de los valores de  $a$  y  $b$  y de las condiciones iniciales. En el mejor de los casos su amor crece de forma exponencial, y en los peores casos terminan por odiarse mutuamente, o por ser un amor no correspondido (el amor del uno crece en la medida que el odio del otro crece). En otras circunstancias, tienden a la indiferencia mutua.

### 5.3.6

(Romeo de Robot) Nothing could ever change the way Romeo feels about Juliet:  $\dot{R} = 0$ ,  $\dot{J} = aR + bJ$ . Does Juliet end up loving him or hating him?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0$$

$$\text{Tr}(A) = b$$

$$\lambda_1 = b \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

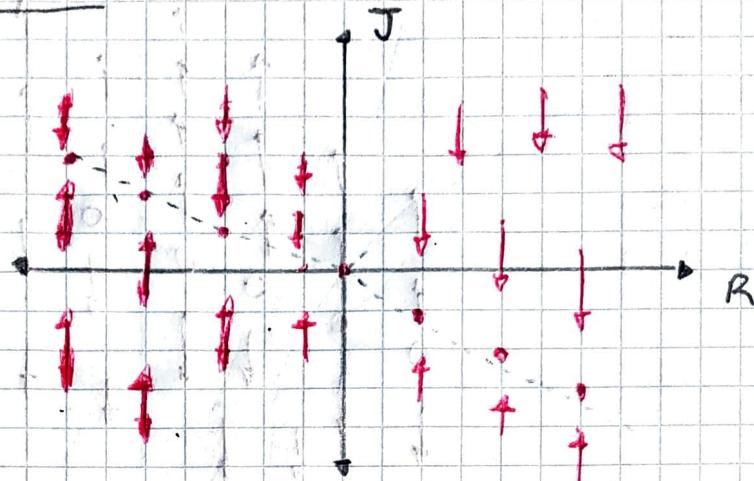
$$\lambda_2 = 0 \quad V_2 = \begin{bmatrix} -b/a \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a < 0, b < 0}$$

$$\lambda_1 < 0$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{bmatrix}$$



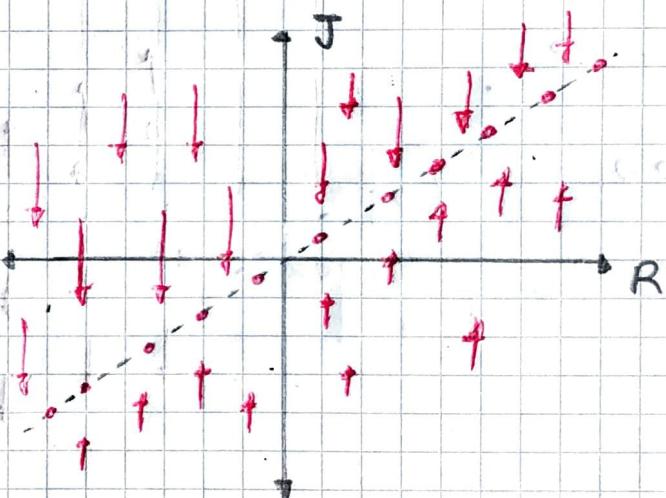
Si Romeo ama a Julieta, esto lo termina odiando,  
Pero si Romeo odia a Julieta, esto lo termina  
amando

$$\underline{a > 0, b < 0}$$

$$\lambda_1 = b < 0$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -b/a \\ 1 \end{bmatrix}$$



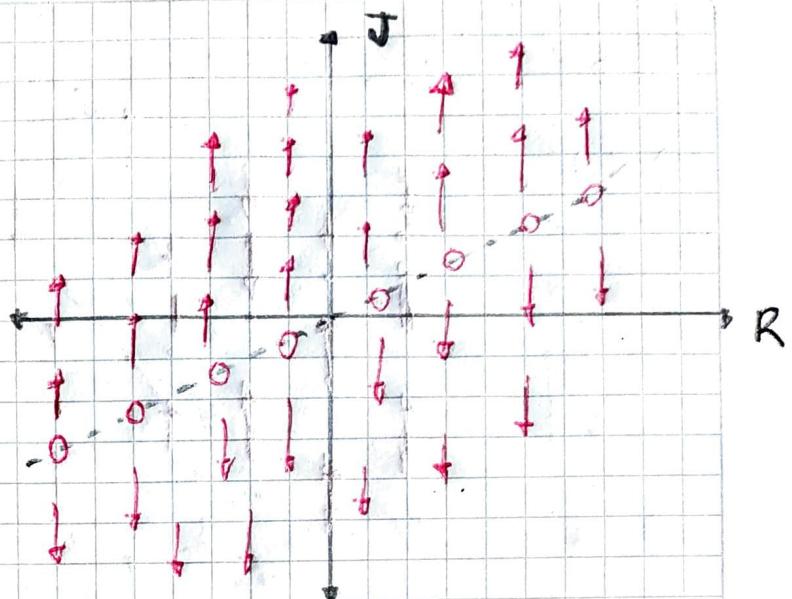
Los sentimientos de Julieta por Romeo terminan siendo  
proporcionales a los de él por ella

$\alpha < 0, b > 0$

$$\lambda_1 = b > 0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -b/a \\ 1 \end{bmatrix}$$



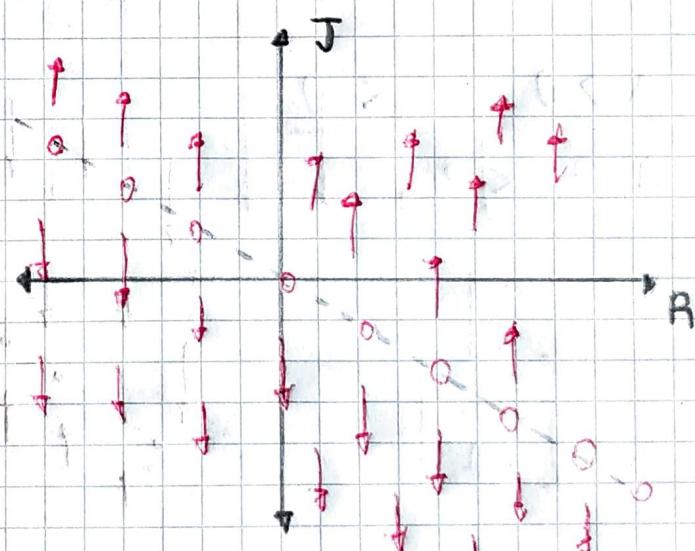
Juliet Prede terminar amando a Romeo u odiándolo,  
dependiendo de su estado inicial

$\alpha > 0, b > 0$

$$\lambda_1 = b > 0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -b/a \\ 1 \end{bmatrix}^{CO}$$



Al igual que en el caso anterior, los sentimientos  
de Juliet por Romeo dependen de su estado  
initial.