

# Modelo SEIR mejorado del COVID-19 y sus dinámicas

Rafael Mejía Zuluaga

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación  
Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
rmejiaz@unal.edu.co

**Resumen**—El presente documento es un análisis del artículo *SEIR modeling of the COVID-19 and its dynamics* [1]. Primero, se hace una breve descripción del modelo SEIR clásico y del modelo presentado por los autores, el cual es una versión mejorada del mismo. Luego, se presentan los resultados y el análisis de algunas simulaciones realizadas en *Python* y por último se exponen algunas conclusiones.

**Palabras Clave**— Modelo SEIR, Modelado Epidemiológico, COVID-19, Bifurcaciones, Predicciones, Caos

## I. INTRODUCCIÓN

Los modelos SEIR son ampliamente utilizados en el campo de la epidemiología para modelar el compartamiento de enfermedades infecciosas como lo es en la actualidad el COVID-19. Utilizando estos modelos es posible hacer predicciones con respecto a la evolución y propagación de enfermedades infecciosas dentro de una población, que luego pueden ser utilizadas por los entes gubernamentales en la toma de decisiones.

El modelo SEIR clásico parte de un principio fundamental, el cual consiste en dividir a la población total en cuatro grupos diferentes:  $S$  (susceptibles),  $E$  (expuestos),  $I$  (infectados) y  $R$  (recuperados). La idea es que a medida que pasa el tiempo, todos los individuos de la población van a pertenecer a todos los grupos, siguiendo la ruta  $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$ . Las variables del sistema son precisamente la cantidad de personas en cada uno de estos grupos. El modelo también parte de la base que la cantidad total de individuos  $N$  se mantiene constante (no toma en cuenta los nacimientos ni las muertes), por lo que la cantidad de personas que salen de un grupo necesariamente deben entrar a otro de los grupos, y en todo momento se cumple  $N = S + E + I + R$ .

## II. MODELO SEIR MEJORADO

El modelo propuesto por He et al. [1] es una versión ampliada del modelo SEIR clásico, en el cual se incluyen dos variables más:  $H$  (hospitalizados) y  $Q$  (en cuarentena). Además, se divide la categoría de infectados en dos grupos:  $I_1$  (infectados sin intervención) e  $I_2$  (infectados con intervención).

A diferencia del modelo SEIR clásico, en este modelo se tienen dos canales principales, el primero es  $S \rightarrow E \rightarrow I_1 \rightarrow R$  y el segundo  $S \rightarrow Q \rightarrow I_2 \rightarrow H \rightarrow R$ . El primer caso ilustra el comportamiento natural de una pandemia y equivale al SEIR clásico, mientras que el segundo hace referencia a los mecanismos de control impuestos por los gobiernos tales como cuarentenas y hospitalizaciones. Por último, otra diferencia importante de este modelo con respecto al SEIR clásico es que en este los individuos pueden pasar de  $R$  nuevamente a  $S$ , pues se ha demostrado que es

posible contagiarse más de una vez. A continuación se muestra el modelo propuesto:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{S}{N} (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \chi E) + \rho_1 Q - \rho_2 S + \alpha R \\ \dot{E} = \frac{S}{N} (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \chi E) - \theta_1 E - \theta_2 E \\ \dot{I}_1 = \theta_1 E - \gamma_1 I_1 \\ \dot{I}_2 = \theta_2 E - \gamma_2 I_2 - \phi I_2 + \lambda (A + Q) \\ \dot{R} = \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \phi H - \alpha R \\ \dot{H} = \phi I_2 - \phi H \\ \dot{Q} = A + \rho_2 S - \lambda (A + Q) - \rho_1 Q \end{cases} \quad (1)$$

Los cuadros I y II contienen las descripciones de las variables y los parámetros del modelo respectivamente.

Variable	Descripción
$S$	Susceptibles
$E$	Expuestos
$I_1$	Infectados sin intervención
$I_2$	Infectados con intervención
$R$	Recuperados
$Q$	En cuarentena
$H$	Hospitalizados

Cuadro I

DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES DEL SISTEMA

Parámetros	Descripción
$\alpha$	Tasa de inmunidad temporal
$\beta_1, \beta_2$	Tasa de transmisión por contacto con la clase de infectados
$\chi$	Probabilidad de transmisión por contacto con individuos expuestos
$\theta_1, \theta_2$	Tasa de transición de individuos a la clase de infectados
$\gamma_1, \gamma_2$	Tasa de recuperación de infectados sintomáticos a recuperados
$\phi$	Tasa de transición de infectados con síntomas a hospitalizados
$\phi$	Tasa de recuperación de individuos infectados en cuarentena
$\lambda$	Tasa de transición de individuos en cuarentena a infectados
$\rho_1, \rho_2$	Tasa de transición entre susceptibles y en cuarentena y vice versa
$\Lambda$	Entrada externa de otros países o regiones

Cuadro II

DESCRIPCIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA

La figura 1 muestra un diagrama de flujo del modelo con los diferentes canales.

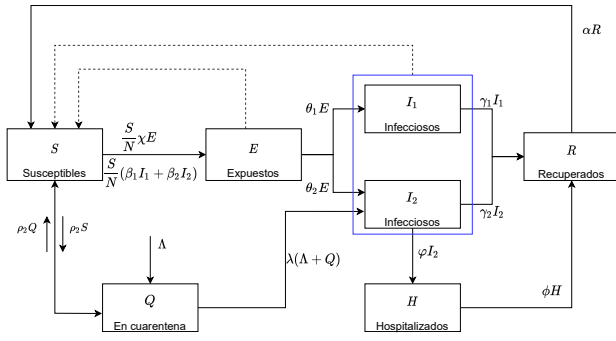


Figura 1. Diagrama de flujo del modelo

Como puede verse, el modelo tiene una gran cantidad de parámetros, los cuales deben ser cuidadosamente seleccionados según las dinámicas de cada región. Por ejemplo, los mecanismos de control impuestos por los gobiernos pueden variar en cada país.

En el caso del artículo original, se utiliza el algoritmo PSO (*particle swarm optimization*), en español optimización por enjambre de partículas, para estimar los parámetros del modelo de acuerdo a un conjunto de datos de la provincia de Hubei, en China, de donde también se toman las condiciones iniciales del sistema.

Los cuadros IV y III muestran las condiciones iniciales y los parámetros utilizados.

Parámetros	Valores
$\alpha$	$1,2048 \times 10^{-4}$
$\beta_1$	$1,0538 \times 10^{-1}$
$\beta_2$	$1,0538 \times 10^{-1}$
$\chi$	$1,6221 \times 10^{-1}$
$\theta_1$	$9,5 \times 10^{-4}$
$\theta_2$	$3,5412 \times 10^{-2}$
$\gamma_1$	$8,5 \times 10^{-3}$
$\gamma_2$	$1,0037 \times 10^{-3}$
$\lambda$	$9,4522 \times 10^{-2}$
$\rho_1$	$2,8133 \times 10^{-3}$
$\rho_2$	$1,2668 \times 10^{-1}$

Cuadro III

PARÁMETROS UTILIZADOS ESTIMADOS A PARTIR DEL ALGORITMO PSO

Variable	Valor
$N$	$6,5563 \times 10^4$
$E$	5077
$I_1$	$I_2 \times 0,01$
$I_2$	729
$H$	658
$R$	32
$Q$	4711
$\Lambda$	10

Cuadro IV

CONDICIONES INICIALES DEL SISTEMA

La figura 2 muestra una simulación del problema de valor inicial, utilizando los mismos parámetros y valores iniciales de los cuadros III y IV

### III. INFECCIÓN ESTOCÁSTICA Y ESTACIONAL

La estacionalidad es ampliamente utilizada en modelos epidemiológicos. A pesar de que no se sabe a ciencia cierta

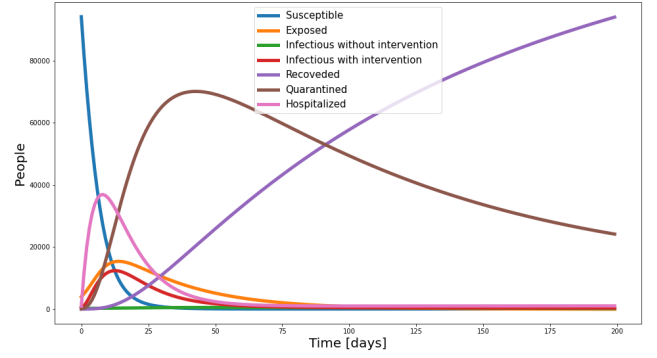


Figura 2. Solución numérica del problema de valores iniciales

su efecto en la propagación del COVID-19 (por lo menos a la fecha de publicación del artículo original), se intenta introducir estacionalidad al sistema para analizar el caos, por fines netamente académicos.

Además de esto, existen muchos factores impredecibles que afectan las diferentes tasas de contagio, por lo que es conveniente estudiar también el efecto del ruido en estas.

En particular, se analizan 3 casos diferentes, introduciendo estacionalidad y ruido a diferentes parámetros.

**III-1. Caso 1:** El parámetro  $\beta_1$  contiene estacionalidad e infección estocástica, y las tres tasas de contacto e infección se definen como:

$$\beta_2 = 30,03, \chi = 30,40$$

$$\beta_1(t) = \beta_0(1 + \varepsilon_1 \sin(2\pi t) + \varepsilon_2 \xi(t))$$

Donde  $\beta_0 = 2 \times \beta_1 = 60$ ,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son grados de infección estacional y estocástica respectivamente.  $\langle \xi(t) \rangle$  es ruido blanco gaussiano, el cual tiene las propiedades de  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  y  $\langle \xi(t), \xi(\tau) \rangle = \delta(t - \tau)$

La figura 3 muestra algunas simulaciones de este caso variando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  y  $\alpha$ . En particular se analizan 3 casos: uno sin infección estacional ni estocástica, otro con infección únicamente estacional, y por ultimo uno con infección estacional y estocástica.

Para el primer caso, puede verse como el sistema se estabiliza en una región confinada, mientras que con infección estacional y estocástica el sistema presenta oscilaciones alrededor de un punto. En ambos casos las órbitas no son únicas; por el contrario existen diferentes órbitas (caos) las cuales en el caso de infección estacional no se hacen tan evidentes por su proximidad, mientras que en el caso estacional y estocástico se pueden apreciar claramente numerosas órbitas.

**III-2. Caso 2:** El parámetro  $\beta_2$  contiene infección estocástica y estacional, mientras que las otras dos tasas de infección permanecen constantes. Los parámetros quedan definidos como:

$$\beta_1 = 30, \chi = 30,40$$

$$\beta_2(t) = \beta_0(1 + \varepsilon_1 \sin(2\pi t) + \varepsilon_2 \xi(t))$$

Donde  $\beta_0 = 2 \times \beta_2 = 60$ ,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son grados de infección

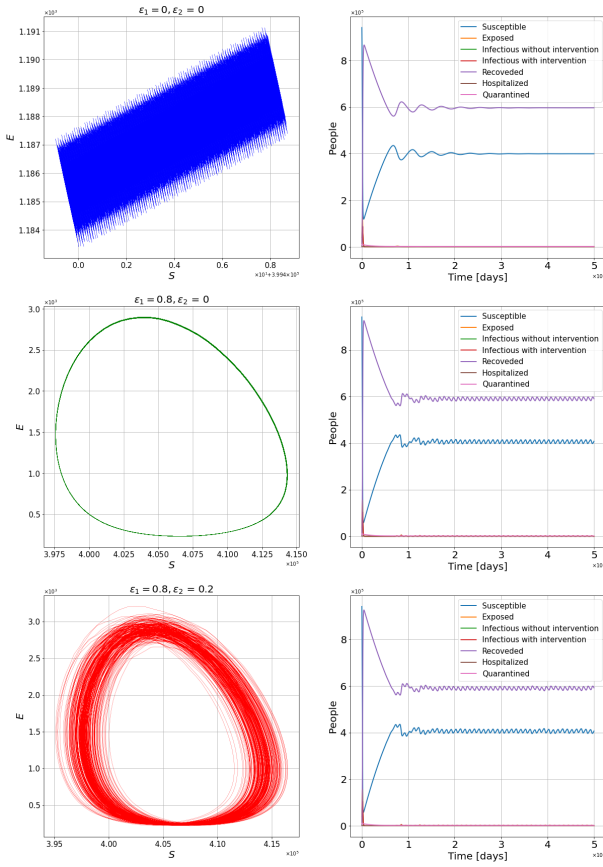


Figura 3. Diagramas de fase y en el tiempo para el caso 1. La primera fila representa el caso en el que  $\varepsilon_1 = 0$  y  $\varepsilon_2 = 0$  (sin infección estacional ni estocástica). La segunda fila para  $\varepsilon_1 = 0,8$  y  $\varepsilon_2 = 0$  (infección estacional pero no estocástica) y la tercera para  $\varepsilon_1 = 0,8$  y  $\varepsilon_2 = 0,2$  (infección estacional y estocástica)

estocástica y estacional respectivamente.

Al igual que en el caso 1, en este se varían los parámetros de diferentes formas para analizar diferentes escenarios, como se puede ver en la figura 4. Dado que ya se demostró en el caso 1 que el sistema sin infección estacional ni estocástica no presenta caos, este caso se obvia. Para los otros dos casos (solo estacional y tanto estacional como estocástica) se utilizan diferentes valores de  $\alpha$ . En general, los resultados son muy similares a los del caso 1. En ambos casos se evidencia presencia de caos, aunque claramente y por obvias razones más marcada en el caso de infección estocástica. A pesar de que las figuras lucen todas iguales, hay variaciones en las escalas por lo que se puede concluir que el parámetro  $\alpha$  afecta la amplitud de las oscilaciones generadas por la estacionalidad de la infección.

**III-3. Caso 3:** El parámetro  $\chi$  contiene infección estocástica y estacional, y  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes. En este caso, los parámetros estarían dados por:

$$\beta_1 = 30, \beta_2(t) = 30$$

$$\chi = \chi_0(1 + \varepsilon_1 \sin(2\pi t) + \varepsilon_2 \xi(t))$$

Donde  $\chi_0 = 2\chi = 60,8$ ,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son grados de infección estocástica y estacional respectivamente.

Como se puede ver en la figura 5, se realizan simulaciones

para 3 casos diferentes variando  $\alpha, \varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ . Al igual que con los dos casos anteriores, en este también se presentan diferentes tipos de órbitas, siendo de mayor amplitud la de mayor  $\alpha$ . Esto se puede ver tanto en el diagrama de fase como en la solución en el tiempo. Además, también es evidente que el caso en el que  $\alpha = 0,08$  el sistema se estabiliza mucho más rápido que los otros dos.

### III-A. Caso 4

Infección estacional y estocástica con período interpretable. Los 3 casos analizados anteriormente tenían una estacionalidad con un período muy bajo, por lo que de alguna forma carecen de interpretabilidad. En este caso se introduce la estacionalidad de la misma forma, pero fijando el período a un año.

$$T = 365$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{365}$$

El parámetro  $\chi$  contiene infección estocástica y estacional, con período de un año y  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes. En este caso, los parámetros estarían dados por:

$$\beta_1 = 30, \beta_2(t) = 30$$

$$\chi = \chi_0(1 + \varepsilon_1 \sin(\frac{2\pi}{365}t) + \varepsilon_2 \xi(t))$$

Donde  $\beta_0 = 2\chi = 60,8$ ,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son grados de infección estocástica y estacional respectivamente.

La figura 6 muestra simulaciones para diferentes valores de  $\alpha, \varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$

En todos los casos, el ruido blanco gaussiano se simuló utilizando una variable aleatoria con función de distribución normal, con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 0,1$ .

El cuadro V contiene los valores de los demás parámetros utilizados en esta sección. Los cuales pueden parecer demasiado grandes para tratarse de un modelo epidemiológico, sin embargo estos pueden tener sentido, ya que dentro del modelo se multiplica por  $S/N$ . Estos parámetros no son los mismos que se estimaron con el algoritmo PSO, sino que se seleccionaron porque se encontró que con estos puede encontrarse caos en el sistema.

Parámetros	Valores
$\theta_1$	20,054
$\theta_2$	20,12
$\gamma_1$	26
$\gamma_2$	26
$\varphi$	0,00009
$\phi$	0,8
$\lambda$	0,4
$\rho_1$	1/14
$\rho_2$	0,002
$\Lambda$	10

Cuadro V

PARÁMETROS UTILIZADOS PARA SIMULAR LOS DIFERENTES CASOS DE INFECCIÓN ESTACIONAL Y ESTOCÁSTICA

Por último cabe resaltar que para los diagramas de fase se graficaron únicamente los últimos valores de la simulación, para eliminar así el transitorio de esta. De lo contrario, por temas de escala no sería posible apreciar las órbitas que aparecen en el estado estacionario.

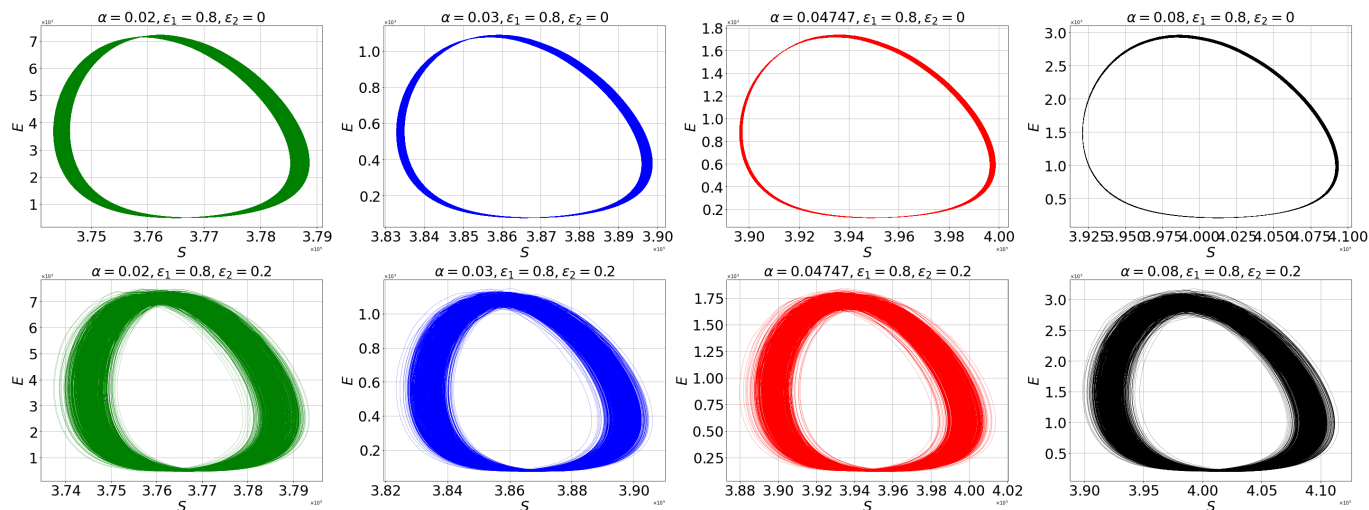


Figura 4. Diagramas de fase para diferentes valores de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  y  $\alpha$  para el caso 2. La primera fila con  $\varepsilon_1 = 0,8$  y  $\varepsilon_2 = 0$  (infección estacional pero no estocástica), mientras que en la segunda fila se encuentran  $\varepsilon_1 = 0,8$  y  $\varepsilon_2 = 0,2$  (infección estacional y estocástica). En cuanto al parámetro  $\alpha$ , este varía a lo largo de las columnas en el siguiente orden:  $\alpha = [0,02; 0,03; 0,04747; 0,08]$

Todas las simulaciones se realizaron utilizando el método de integración numérica Runge-Kutta de orden 5, con un tamaño de paso de 0,01 (ver anexo 1)

#### IV. CONCLUSIONES

- Los modelos SEIR pueden ser de gran utilidad para predecir el avance de una epidemia en una región determinada.
- La estimación de los parámetros de acuerdo a cada región es de vital importancia para obtener resultados útiles e interpretables.
- El modelo en cuestión presenta caos pero únicamente para los casos en los cuales se añaden tasas de infección estacionales y estocásticas, y las oscilaciones que se tienen son en realidad forzadas y no propias del sistema.

#### ANEXO 1: CUADERNO CON SIMULACIONES

Todas las simulaciones y códigos pueden ser consultados en el siguiente enlace:  
<https://github.com/Rmejiaz/ModeladoSimulacion/blob/main/Cuadernos/Proyecto.ipynb>

#### V. REFERENCIAS

1. He, S., Peng, Y. & Sun, K. SEIR modeling of the COVID-19 and its dynamics. *Nonlinear Dyn* 101, 1667–1680 (2020).  
<https://doi.org/10.1007/s11071-020-05743-y>

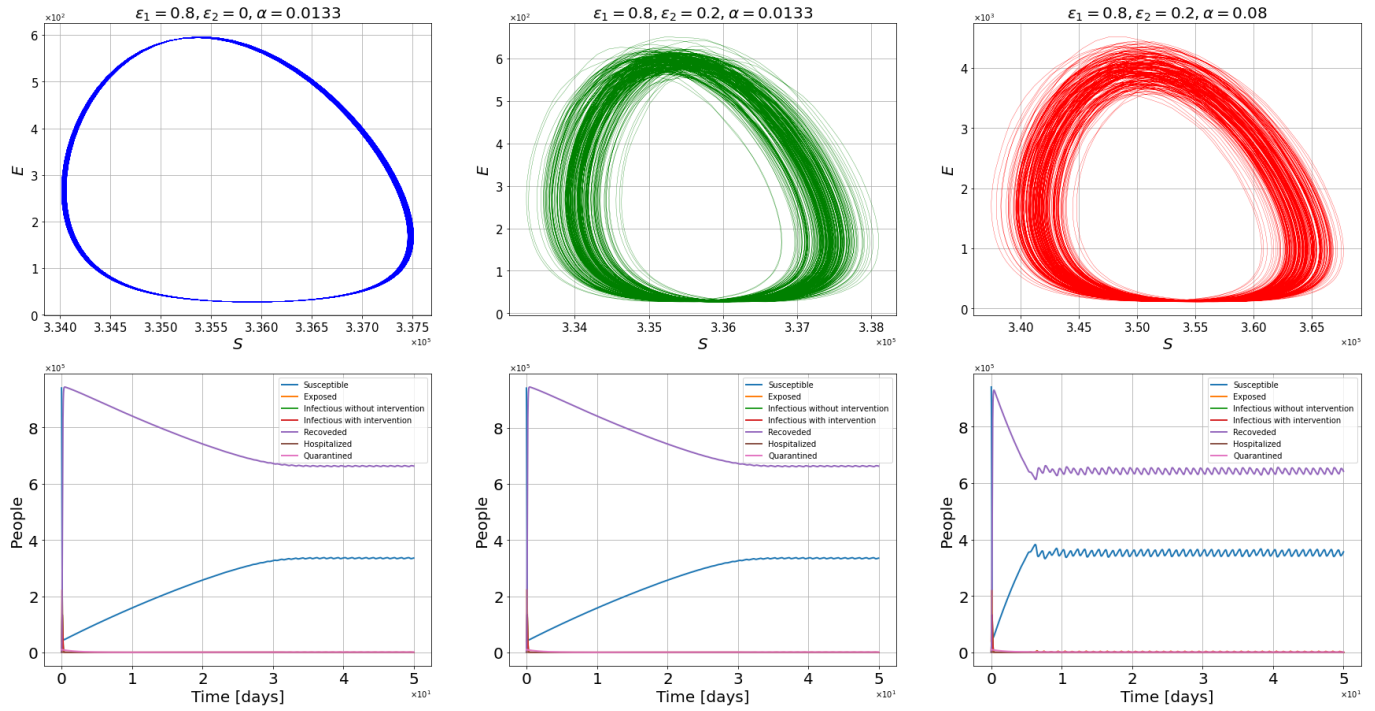


Figura 5. Diagramas de fase y en el tiempo del caso 3 para:  $\varepsilon_1 = 0,8, \varepsilon_2 = 0$  y  $\alpha = 0,01333$  (infección estacional);  $\varepsilon_1 = 0,8, \varepsilon_2 = 0,2$  y  $\alpha = 0,0133$  (infección estacional y estocástica);  $\varepsilon_1 = 0,8, \varepsilon_2 = 0,2$  y  $\alpha = 0,08$  (infección estacional y estocástica)

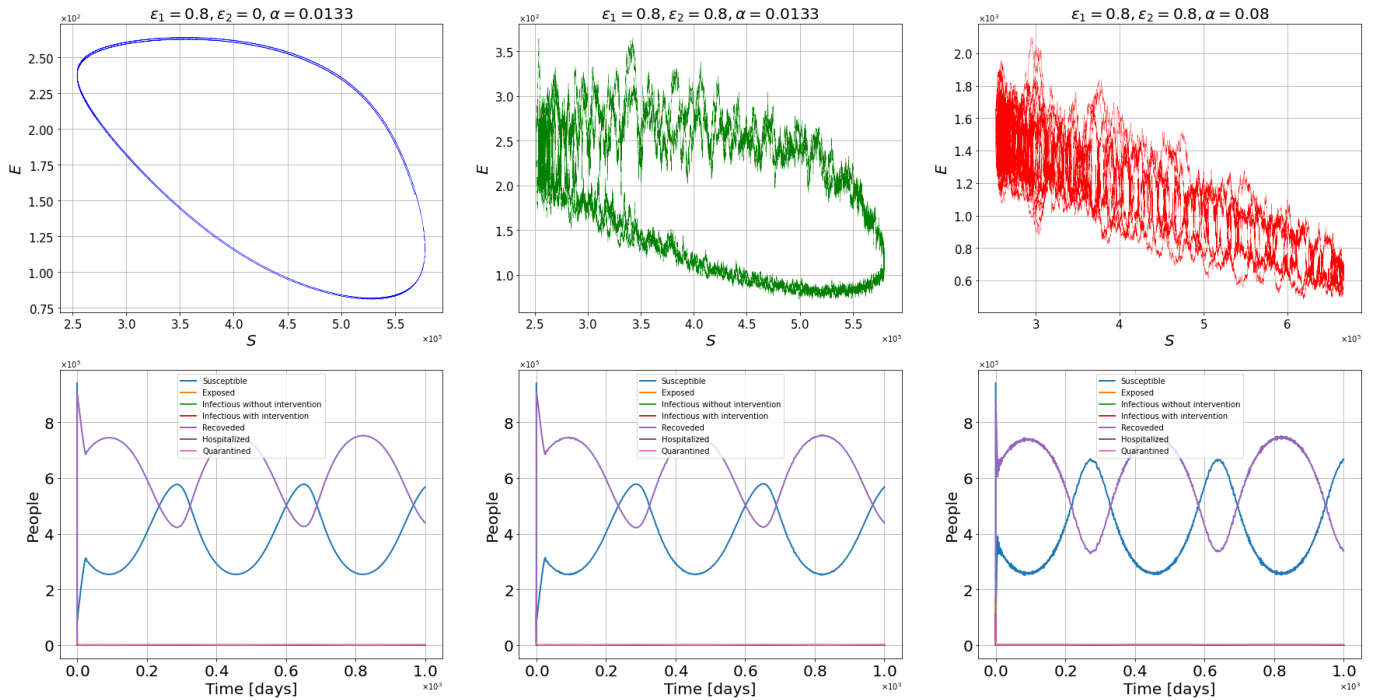


Figura 6. Diagramas de fase y en el tiempo del caso 4 para:  $\varepsilon_1 = 0,8, \varepsilon_2 = 0$  y  $\alpha = 0,01333$  (infección estacional);  $\varepsilon_1 = 0,8, \varepsilon_2 = 0,8$  y  $\alpha = 0,0133$  (infección estacional y estocástica);  $\varepsilon_1 = 0,8, \varepsilon_2 = 0,8$  y  $\alpha = 0,08$  (infección estacional y estocástica)