

Versuch Nr. 406

Beugung am Spalt

Antonia Joëlle Bock

antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner

rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 02.06.2020

Abgabe: 09.06.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Klassische Physik vs. Quantenmechanik	3
2.2 Beugung am Spalt	3
2.3 Einzelspalt	3
2.3.1 Einschub: Nahfeld und Fernfeld	4
2.4 Amplituden-Funktion	5
2.5 Doppelspalt	7
2.6 Fouriertransformation	7
2.7 Umrechnung der Abstandsmessung zum Abstrahlwinkel	8
3 Durchführung	9
4 Auswertung	11
4.1 Einzelspalt	11
4.2 Doppelspalt	13
4.3 Erweiterte Auswertung	15
4.3.1 Einschub: Methode der kleinsten Quadrate	15
4.3.2 Parameterebenen	15
4.3.3 Einzelspalt	15
4.3.4 Doppelspalt	16
5 Diskussion	22
5.1 Versuchsaufbau	22
5.2 Zuverlässigkeit der Vorhersagen und Messungen	22
5.3 Vergleich mit der Herstellerangabe	22
5.4 Eignung der Theorie	23
6 Erweiterte Diskussion	23
6.1 Einzelspalt	23
6.2 Doppelspalt	24
6.2.1 Spaltabstand s	25
6.3 Parameterebene und Ausgleichsrechnung	26
6.3.1 Tool zum Testen des Beugungsmusters	27
6.4 Fazit	27
Anhang: Messdaten	28
Literatur	29

1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist es, die Beugung am Einzel- sowie Doppelspalt nachzuweisen. Dabei sollen die aus der Theorie vorhergesagten Zusammenhänge zwischen Abstrahlwinkel und Beugungserscheinung bestätigt werden. Als Schlüsselexperiment der Physik bezieht sich dieser Versuch auf den *Wellen-Teilchen-Dualismus* und demonstriert den Wellencharakter des Lichts.

2 Theorie

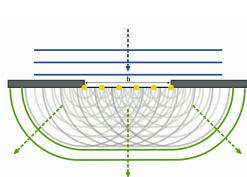
2.1 Klassische Physik vs. Quantenmechanik

Die Ausbreitung des Lichts unterliegt den Gesetzen der geometrischen Optik und kann makroskopisch sehr genau vorhergesagt werden. Schattenwurf, Streuung/Spiegelung an festen Objekten oder die Brechung des Lichts an Linsen oder Prismen unterliegen einfachen geometrischen Beziehungen, wie etwa der *Linsengleichung*[4, S. 286]. Es gibt jedoch Bedingungen, bei denen diese Modelle nicht mehr angewendet werden können. Diese Abweichungen treten unter anderem dann auf, wenn Licht auf Hindernisse trifft und der Strahldurchmesser größer als das Hindernis selbst ist. Sie treten auch dann auf, wenn das Licht auf Spalte in Schirmen trifft.

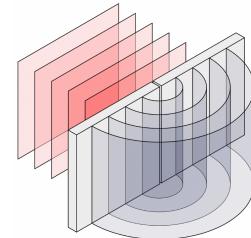
Es kann jedoch über eine große Anzahl von Lichtquanten gemittelt und die Phänomene über das klassische Wellenmodell erklärt werden. Dieser Ansatz wird hier genutzt.

2.2 Beugung am Spalt

Grundlage für die Beugung des Lichts ist das *Huygens-Prinzip*. Nach diesem Prinzip ist jeder Punkt einer Wellenfront stets Erzeugungspunkt neuer Kugelwellen, den sogenannten *Elementarwellen*. Bei einem langen, schmalen Spalt entstehen durch diese Eigenschaft Zylinderwellen entlang der Spaltebene.



(a) Überlagerung von Kugelwellen an einem Einzelspalt.[5]



(b) Zylinderwellen am Einzelspalt.[1]

2.3 Einzelspalt

Die am Spalt entstehenden Zylinderwellen überlagern sich und interferieren miteinander. Das daraus entstehende Abbild, die *Beugungsfigur*, ist eine Amplituden-Funktion

$B(\varphi, \lambda, b, d)$ des Abstrahlwinkels φ , der Wellenlänge λ , der Spaltbreite b und des Abstandes d zum Beobachtungspunkt. In diesem Versuch wird die Funktion in Abhängigkeit des Abstrahlwinkels untersucht, sodass die anderen Parameter konstant bleiben. Gesucht ist also die Funktion $B(\varphi)$.

2.3.1 Einschub: Nahfeld und Fernfeld

Geometrisch bedingt weist eine Beugungsfigur in einem Nahfeld nur wenig Interferenz auf und ist für diesen Versuch nicht von Interesse. Damit zwei Wellen interferieren, muss die Richtung des Wellenvektors \vec{k} parallel, oder in etwa gleich sein. Im Falle der Zylinderwellen reduziert sich die Bedingung an die Raumrichtung auf nur eine Dimension, und damit auf den Abstrahlwinkel φ . Da die Winkelunterschiede in einem Nahfeld zu groß werden, entsteht keine oder nur wenig Interferenz.

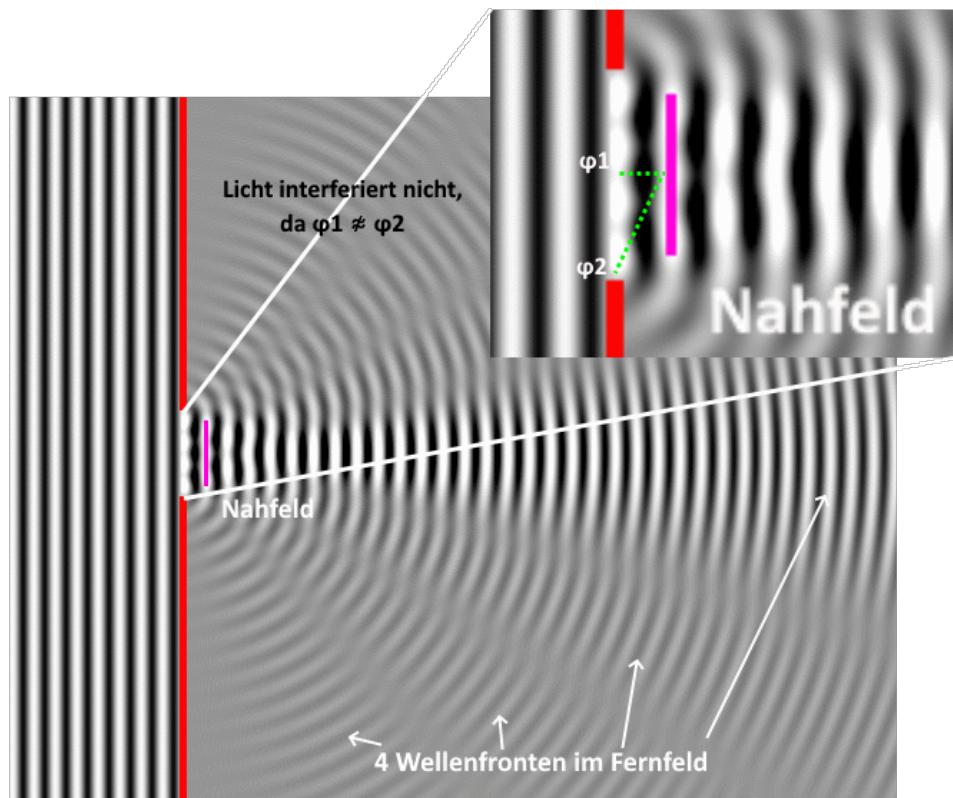


Abbildung 2: Beugung ebener Welle am Einzelpunkt mit $b = 4\lambda$.¹ [7]

Dieser Grenzfall kann ausgeschlossen werden, indem der Abstand zwischen Spalt und Schirm hinreichend groß gewählt wird (s. Abb. 3). In diesem Fall wird eine Sammellinse verwendet, um die von der Spaltöffnung ausgehenden, parallelen Lichtstrahlen mit gleichem Abstrahlwinkel auf einen Beobachtungspunkt P zu fokussieren. Die Lichtfront

¹ $b \hat{=} \text{Spaltbreite}$ und $\lambda \hat{=} \text{Wellenlänge der ebenen Wellen}$.

kommt hierbei aus dem Unendlichen. Dieser Fall wird *Fraunhofer-Beugung* genannt. Falls keine Sammellinse verwendet wird liegen Lichtquelle und Beobachtungspunkt P im Endlichen und es gilt $b \ll d : \varphi_1 \approx \varphi_2$.² Dieser Fall heißt *Fresnel-Beugung* (s. Abb. 3).

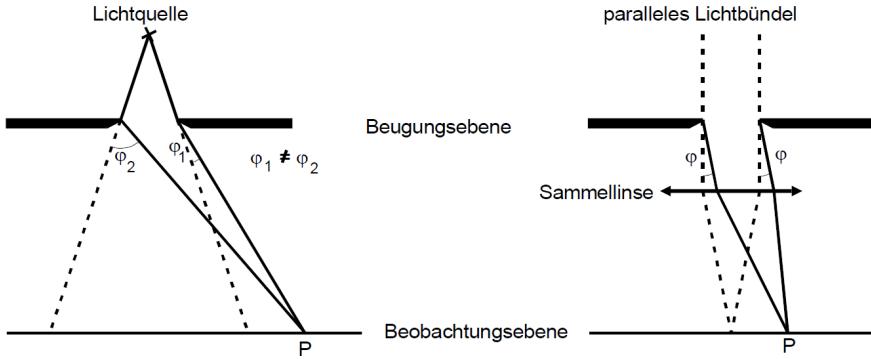


Abbildung 3: Fresnel- (links) und Fraunhofer-Beugung (rechts) an einem Einzelspalt.³

2.4 Amplituden-Funktion

Der Phasenunterschied δ zweier paralleler Lichtstrahlen steht in geometrischer Beziehung zum Entstehungspunkt auf der Spalteinheit (s. Abb. 4). Die absolute Länge s der Phasendifferenz zu einem gleichzeitig entstehenden Lichtstrahl mit Abstand x ist mit einem Abstrahlwinkel von φ

$$s = x \sin \varphi . \quad (1)$$

Daraus folgt die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{s}{\lambda} 2\pi . \quad (2)$$

Eine ebene Welle besitzt die Amplituden-Funktion

$$A(z, t) = A_0 e^{i(\omega t - kz)} . \quad (3)$$

Eine zusätzliche Phasendifferenz drückt sich in einer Addition des Exponenten aus.

$$A(z, t) = A_0 e^{i(\omega t - kz + \delta)}$$

Um die überlagerte Amplitude unter Berücksichtigung der Phasendifferenz zu erhalten, wird über die gesamte Spaltbreite b integriert. Die Abhängigkeit des Phasenunterschiedes von φ liefert somit eine indirekte Ortsangabe des Beobachtungspunktes. Es wird über infinitesimale Abstände dx der Lichtstrahlen integriert.

² $d \hat{=} \text{Abstand Spalt-Beobachtungspunkt.}$

³Abbildung angelehnt an Versuchsanleitung.[3]

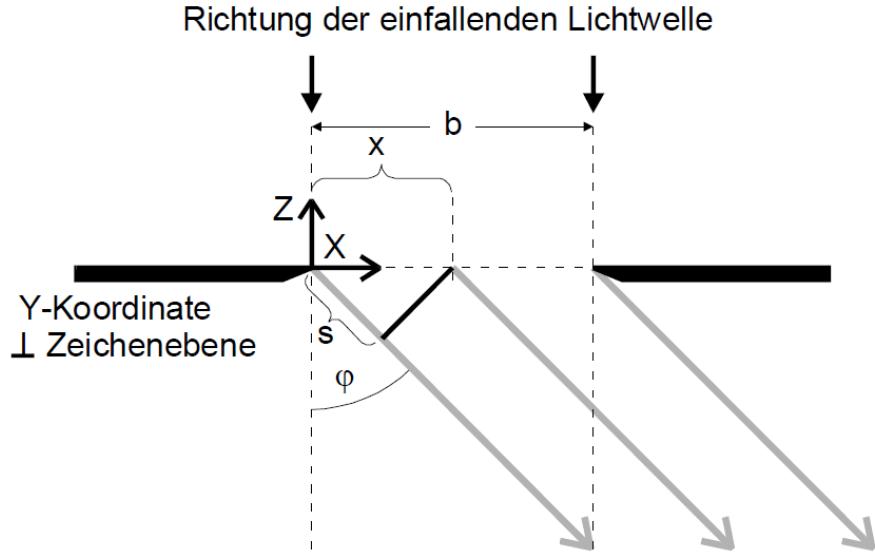


Abbildung 4: Geometrische Betrachtung der Beugung am Spalt.[3]

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \int_0^b e^{i(\omega t - kz + \delta(\varphi))} dx \quad (4)$$

Nach einsetzen von (1) in (2) und (2) in (4) folgt

$$B(z, t, \varphi) = A_0 e^{i(\omega t - kz)} \int_0^b e^{\frac{i2\pi x \sin \varphi}{\lambda}} dx .$$

Lösen des Integrals führt zu

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \frac{\lambda}{i2\pi \sin \varphi} e^{i(\omega t - kz)} \left(e^{\frac{i2\pi b \sin \varphi}{\lambda}} - 1 \right) . \quad (5)$$

Als Hilfestellung wird die eulersche Formel für den Sinus verwendet.

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad (6)$$

Ausklammern in Gl. (5) ergibt

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} e^{i(\omega t - kz)} e^{\frac{i\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \frac{1}{2i} (e^{\frac{i\pi b \sin \varphi}{\lambda}} - e^{-\frac{i\pi b \sin \varphi}{\lambda}}) . \quad (7)$$

Wird nun die eulersche Formel aus (6) in (7) angewendet, reduziert sich die Funktion zu

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} e^{i(\omega t - kz)} e^{\frac{i\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \sin \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} . \quad (8)$$

Der Faktor $e^{i(\omega t - kz)}$ ist der orts- und zeitabhängige Amplitudenkoeffizient und kann experimentell nicht berücksichtigt werden. Stattdessen wird mit A_0 gemittelt und der Term reduziert. Der zweite Term $e^{\frac{i\pi b \sin \varphi}{\lambda}}$ stellt einen Phasenfaktor dar und fällt wegen der Mittelung über alle Lichtquanten ebenfalls weg. Wird ein zusammenfassender Ausdruck $\gamma := \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$ in (8) eingesetzt, vereinfacht sich die Amplituden-Funktion mit einer alleinigen Abhängigkeit von φ zu

$$B(\varphi) = A_0 b \frac{\sin \gamma}{\gamma} \quad (9)$$

mit $\gamma := \gamma(\varphi)$.

Gemessen wird die nicht-negative Lichtintensität $I(\varphi)$, welche näherungsweise quadratisch mit der Amplitude wächst.

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} \quad (10)$$

2.5 Doppelspalt

Die Beugungsfigur des Doppelspalts ist eine multiplikative Überlagerung der beiden Einzelspalte. Die Intensitätsverteilung der Figur ist gegeben durch eine zusätzliche Cosinus-Verteilung[3]

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\gamma s}{b}\right) \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} \quad (11)$$

mit der zusätzlichen Größe s ; dem Abstand der beiden Spalte.

2.6 Fouriertransformation

Die Amplituden-Funktion $B(\varphi)$ kann als Fourier-Transformierte aufgefasst werden. Wird nun der Ansatz

$$B(\eta) = \int_0^b A_0 e^{ix\eta} \quad (12)$$

gelöst, ergibt sich

$$B(\eta) = \frac{2A_0}{\eta} e^{\frac{i\eta b}{2}} \sin \frac{2\eta}{b}. \quad (13)$$

Wird der Realteil separiert und $\eta := \frac{2\pi \sin \varphi}{b}$ gewählt, ist das Ergebnis die ursprüngliche Funktion aus (11).

$$\operatorname{Re}(e^{\frac{i\eta b}{2}}) = \cos \frac{\eta b}{2} \quad (14)$$

$$B(\eta) = 2A_0 b \cos\left(\frac{\eta b}{2}\right) \frac{\sin \frac{2\eta}{b}}{\frac{2\eta}{b}} \quad (15)$$

Die Gleichung (15) kann nun mit $\gamma = \frac{2\eta}{b}$ in (11) überführt werden.

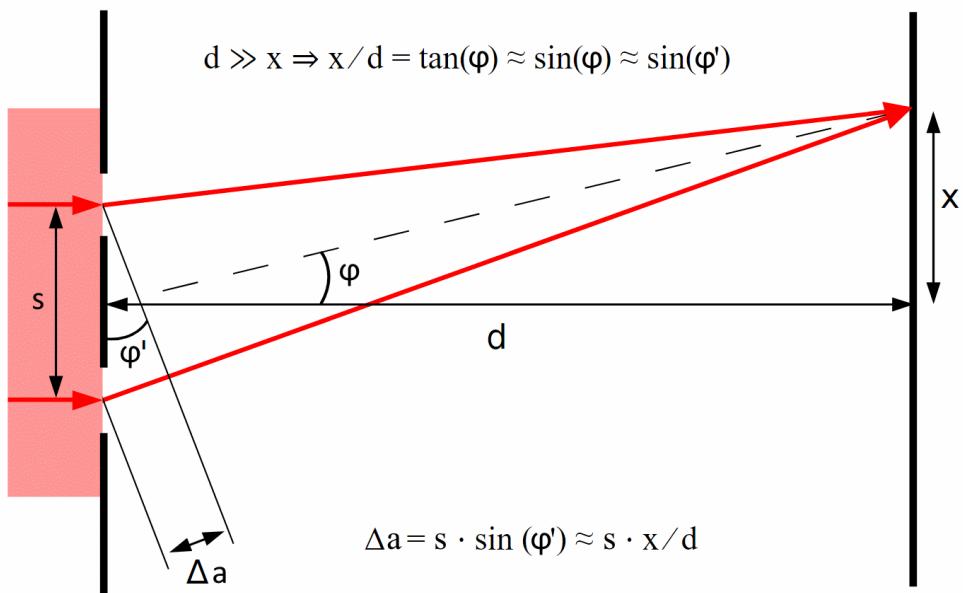


Abbildung 5: Schematische Darstellung eines Doppelspalts.[2]

2.7 Umrechnung der Abstandsmessung zum Abstrahlwinkel

Gemessen wird die absolute Position x des Sensors mit unbekanntem Winkel φ zur optischen Achse. Der Winkel wird indirekt über den Abstand des Photoelementes zum Intensitätsmaximum x_0 bestimmt. Das Maximum wird hierbei aus den Messdaten ermittelt.

$$\sin \varphi = \frac{x'}{d'} = \frac{x'}{\sqrt{d^2 + x'^2}} \quad (16)$$

$$x' = |x - x_0| \quad (17)$$

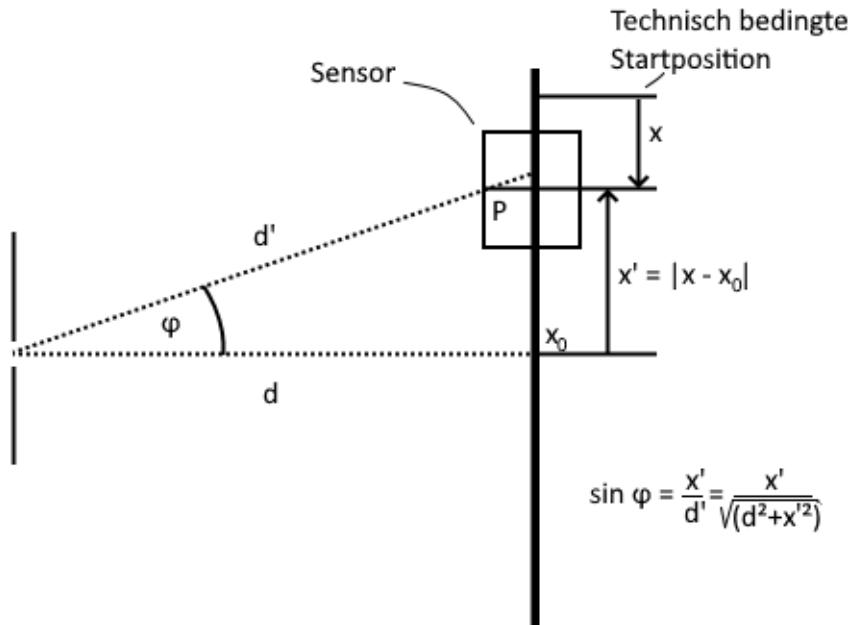


Abbildung 6: Relation zwischen Winkel φ und Messgröße x .

3 Durchführung

Für den Versuchsaufbau wird eine 100 cm lange Führungsschiene verwendet, auf der alle Mess- und Versuchsinstrumente befestigt werden. Dabei wird versucht, den Abstand zwischen Spalt und Lichtstärkesensor so groß wie möglich zu halten. Ein He-Ne-Laser mit einer Wellenlänge von $\lambda = 633$ nm wird als kohärente Lichtquelle verwendet.

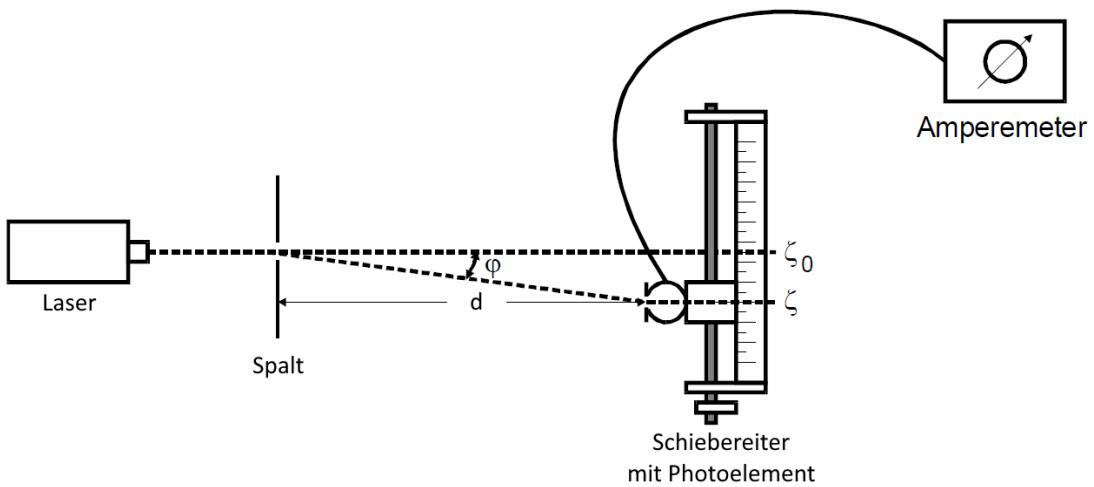


Abbildung 7: Schematischer Versuchsaufbau.⁴

Die Instrumente müssen kalibriert und der Laser vorgeheizt werden. Zur Kalibrierung wird der Laser und die Spaltblende derart ausgerichtet, dass der Lichtstrahl mittig auf den zu messenden Einzel- beziehungsweise Doppelspalt trifft. Für die Messungen des Beugungsmusters wird ein Photosensor verwendet, welcher einen schmalen Spalt als Öffnung besitzt, der in Richtung des Lasers ausgerichtet wird. Der Photosensor wird mit einem Amperemeter ausgelesen und misst die Lichtintensität. Für eine genaue Auswertung der Daten muss der Dunkelstrom I_d bestimmt werden. I_d ist die Stromstärke, die der Photosensor im Leerlauf misst; also bei fertigem Aufbau, aber ausgeschaltetem Laser. Das Beugungsbild muss bei eingeschaltetem Laser vertikal mittig auf das Photoelement treffen. Die Kalibrierung ist abgeschlossen, wenn sichergestellt ist, dass sich Laser und Spalthalterung nicht mehr bewegen können und das Photoelement auf dem Schieberegler hinreichend nach links und rechts verstellt werden kann.

Es werden je nach Verfügbarkeit der Blenden ein Einzel- und ein Doppelspalt gemessen. Für die einzelnen Messungen wird der Sensor auf dem Schieberegler in äquidistanten Schritten von links nach rechts bewegt und die absoluten Abstände aufgeschrieben. Jede Messreihe besteht aus mindestens 50 Messwerten.

⁴Zeichnung angelehnt an Versuchsanleitung.[3]

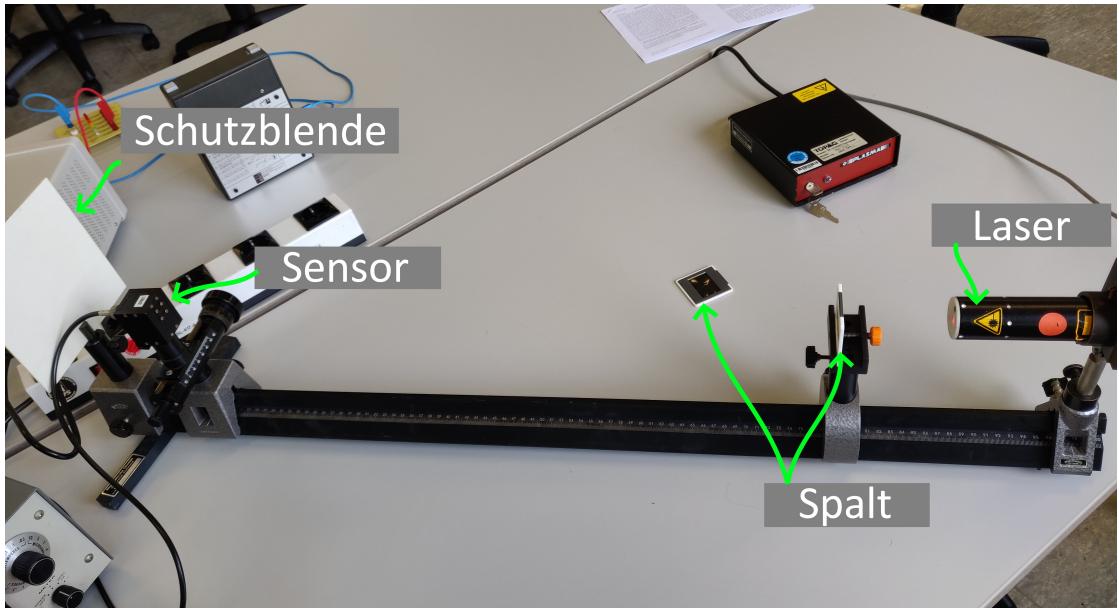


Abbildung 8: Realer Versuchsaufbau.

4 Auswertung

Ziel der Auswertung ist das Bestimmen der Spaltbreite b_i und ein anschließender Vergleich mit der Herstellerangabe. Für den Versuch werden alle zur Verfügung stehenden Randdaten in Tabelle 1 dokumentiert.

Tabelle 1: Kenndaten der Versuchsdurchführung.

	s / mm	b_i / mm	λ / nm	d / mm	I_d / μA
Doppelspalt	0.75	0.150	633	626.1	0.63
Einzelspalt		0.075	633	626.1	0.70

4.1 Einzelspalt

Für die Ausgleichskurve des Einzelspalts wird eine an 10 angelehnte Funktion der Form

$$I(\varphi) = (a \frac{\sin \gamma}{\gamma})^2 + c \quad (18)$$

verwendet⁵ mit

$$\gamma = \frac{\pi b_{par,1} \sin \varphi}{\lambda} \quad (19)$$

⁵In der Diskussion⁶ wird diese Form weiter diskutiert.

Tabelle 2: Messwerte zum Einzelspalt.

x / mm	I / μA	x / mm	I / μA	x / mm	I / μA
0,0	0,880	8,5	3,300	17,0	0,865
0,5	0,840	9,0	5,000	17,5	0,990
1,0	0,778	9,5	7,000	18,0	1,150
1,5	0,740	10,0	9,000	18,5	1,260
2,0	0,758	10,5	10,700	19,0	1,290
2,5	0,854	11,0	12,100	19,5	1,220
3,0	1,000	11,5	12,700	20,0	1,100
3,5	1,200	12,0	12,700	20,5	0,975
4,0	1,340	12,5	12,250	21,0	0,880
4,5	1,430	13,0	10,600	21,5	0,842
5,0	1,400	13,5	8,850	22,0	0,879
5,5	1,250	14,0	6,790	22,5	0,945
6,0	1,050	14,5	4,780	23,0	1,000
6,5	0,900	15,0	3,000	23,5	1,060
7,0	0,910	15,5	1,920	24,0	1,070
7,5	1,260	16,0	1,200	24,5	1,025
8,0	2,040	16,5	0,890		

$$\sin \varphi = \frac{x'}{d'} \quad (20)$$

$$d' = \sqrt{d^2 + x'^2} \quad (21)$$

und

$$x' = |x - x_0|. \quad (22)$$

Die variablen Parameter der Funktion sind x_0 , a , $b_{par,1}$, und c , wobei x_0 das Intensitätsmaximum, a das A_0 aus (10), $b_{par,1}$ die Spaltbreite und c der Dunkelstrom I_d ist. Die Ausgleichsrechnung mit der Funktion mit `curve_fit`[6] liefert die Werte in Tabelle 3.

Tabelle 3: Parameterwerte des Einzelspalts.

	a	$b_{par,1}$ / mm	c / μA	x_0 / mm
Einzelspalt	$0,003\,481 \pm 0,000\,005$	$0,024\,95 \pm 0,000\,08$	$0,81 \pm 0,01$	$11,727 \pm 0,006$

Der Vergleich der Herstellerangabe mit dem errechneten Wert für die Spaltbreite ist um den Faktor 3 verschieden mit $b_{par,1} \approx 0,025$ mm

$$\frac{b_{par,1}}{b_1} = \frac{0,025 \text{ mm}}{0,075 \text{ mm}} = \frac{1}{3}. \quad (23)$$

Die relative Messunsicherheit von $b_{par,1}$ ist $\approx 0,32\%$.

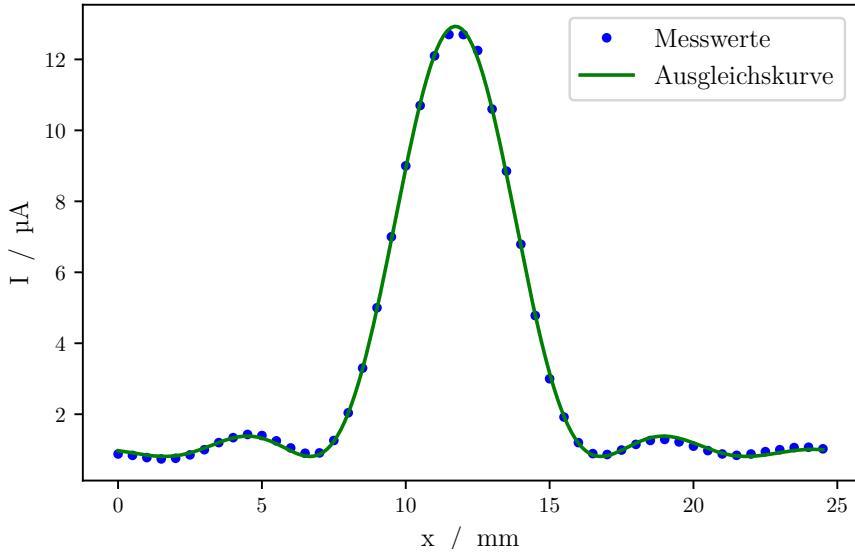


Abbildung 9: Messwerte und Ausgleichskurve zum Einzelspalt.

Der abgeschätzte Wert des Intensitätsmaximums x_0 liegt bei $(11,727 \pm 0,008)$ mm mit einer Abweichung von 0.07%.

4.2 Doppelspalt

Tabelle 4: Parameterwerte des Doppelspalts.

	a	$b_{par,2} / \text{mm}$	$c / \mu\text{A}$	x_0 / mm	s / mm
Doppelspalt	$0,00454 \pm 0,00001$	$0,0470 \pm 0,0003$	$0,8 \pm 0,1$	$11,077 \pm 0,005$	$0,022 \pm 0,003$

Für den Doppelspalt wird die angepasste Funktion (11) verwendet. Dabei entspricht das γ dem aus (19).

Als Kontrollwert der Parameter für den Doppelspalt eignet sich $x_0 = (11,077 \pm 0,005)$ mm, welcher eine gute und plausible Annäherung an das gemessene Intensitätsmaximum ist. (Vgl. Tab. 5 und Abb. 10)

Die Herstellerangabe zur Spaltbreite $b_2 = 0,15$ mm ist dem ermittelten Wert $b_{par,2} = (0,0470 \pm 0,0003)$ mm $\approx 0,05$ mm um den Faktor 3 verschieden.

$$\frac{b_{par,2}}{b_2} = \frac{0,05 \text{ mm}}{0,15 \text{ mm}} = \frac{1}{3} \quad (24)$$

Die relative Messunsicherheit von $b_{par,2}$ ist $\approx 0.6\%$.

Für den Spaltabstand weicht der errechnete Wert $s = (0,022 \pm 0,003)$ mm $\approx 0,02$ mm um den Faktor 37,5 von der Herstellerangabe $s_H = 0,75$ mm ab.

Tabelle 5: Messwerte zum Doppelspalt.

x / mm	$I / \mu\text{A}$	x / mm	$I / \mu\text{A}$	x / mm	$I / \mu\text{A}$
0,00	0,942	7,99	2,420	15,98	0,800
0,47	0,920	8,46	1,300	16,45	0,960
0,94	0,718	8,93	4,350	16,92	1,380
1,41	0,620	9,40	15,800	17,39	1,430
1,88	0,724	9,87	42,400	17,86	1,030
2,35	0,910	10,34	63,000	18,33	0,710
2,82	0,936	10,81	80,000	18,80	0,730
3,29	0,750	11,28	81,800	19,27	0,940
3,76	0,635	11,75	67,500	19,74	1,050
4,23	0,810	12,22	42,500	20,21	0,840
4,70	1,120	12,69	20,400	20,68	0,665
5,17	1,140	13,16	6,350	21,15	0,685
5,64	1,070	13,63	1,430	21,62	0,855
6,11	0,720	14,10	1,880	22,09	0,980
6,58	1,445	14,57	2,950	22,56	0,900
7,05	2,850	15,04	2,740	23,03	0,715
7,52	3,450	15,51	1,540		

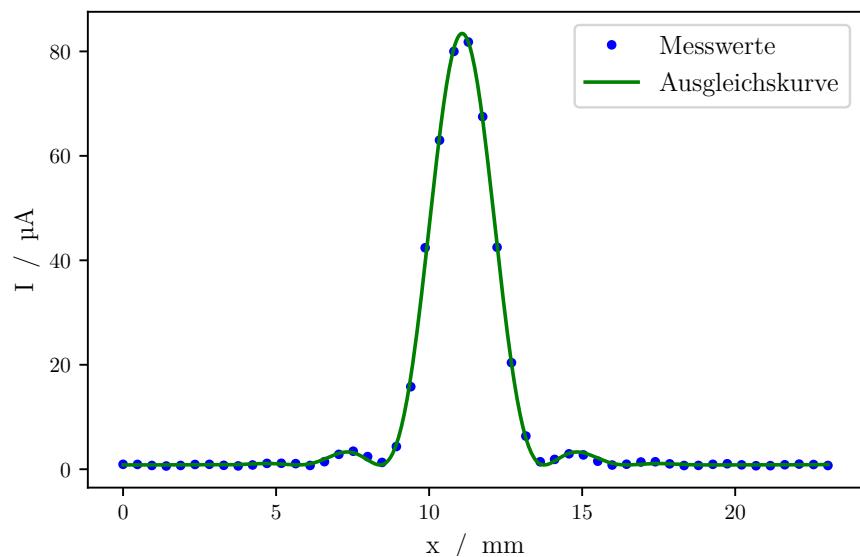


Abbildung 10: Messwerte und Ausgleichskurve zum Doppelspalt.

4.3 Erweiterte Auswertung

Die großen Abweichungen und die möglichen Ursachen werden in der erweiterten Diskussion 6 thematisiert. Im weiteren Verlauf wird die Methodik der Ausgleichsrechnung sowie alternative Parameter ausgewertet.

4.3.1 Einschub: Methode der kleinsten Quadrate

Das Berechnen der optimalen Parameter erfolgt über die *Methode der kleinsten Quadrate*, bei der das Minimum der Fehlerquadratsummen gesucht wird. Hierbei ist beispielsweise $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ die Menge aller Parameter. Die Summe berechnet sich dann über

$$S = \sum_i^n (y_i - f(x_i, \vec{\beta}))^2. \quad (25)$$

Die Menge aller Wertepaare $[(x_i, y_i)]$, $i \in [0, 1, \dots, n]$ stellt die Messdaten dar. Die Funktion f stammt aus demjenigen Modell, von dem das Verhalten der Messwerte vermutet wird. In diesem Falle sind das die Funktionen des Einzel- (10) und des Doppelspalts (11). Für das Minimum werden also die Parameter

$$\min_{\vec{\beta}} \sum_i^n (y_i - f(x_i, \vec{\beta}))^2 \quad (26)$$

gesucht. Für den Einzelpunkt sind das die Parameter a, b

$$\min_{a,b} \sum_i^n (y_i - f(x_i, a, b))^2. \quad (27)$$

4.3.2 Parameterebenen

Im folgenden werden die Parameter-Wertepaare $[(a_i, b_i)]$, $i \in [0, 1, \dots, m]$ als Ebene dargestellt. Jedes Wertepaar besitzt eine (positive) Fehlerquadratsumme, sodass die resultierende Ebene nach Minima untersucht werden kann. **Ziel der Ebenendarstellung** ist das Aufdecken möglicher Minima, die nicht unmittelbar nebeneinander liegen. Auf diese Weise wird überprüft, ob es plausible Parameter gibt (näher an den Herstellerangaben), für die die Ausgleichskurve zwar nicht optimal, aber dennoch hinreichend genau ist. **Erwartung:** Wellenartige Ebene mit tropfenförmigen Senken, bei denen die Parameter lokal gegen ein Minimum konvergieren.

4.3.3 Einzelpunkt

Die in Tabelle 3 berechneten, additiven Konstanten $x_0 = 11,727 \text{ mm}$ und $I_d = 0,8 \text{ nA}$ werden festgesetzt, damit die Funktion (10) $f : (x, a, b) \mapsto y$ abgesehen von x nur noch von den Parametern (a, b) abhängen. Anschließend wird die Fehlerquadratsumme für bestimmte Intervalle (a_{min}, a_{max}) und (b_{min}, b_{max}) berechnet und in einer Matrix $C =$

`mat(1000, 1000)` festgehalten. Jeder Matrixeintrag entspricht einem anderen Parameter-Wertepaar. Eine Parameterebene mit weit gefassten Intervallen ist in 11 zu sehen. Für alle Ebenen ist $n = 1000$ (n Schritte im Intervall).

Parameterebene Einzelpunkt - große Intervalle.

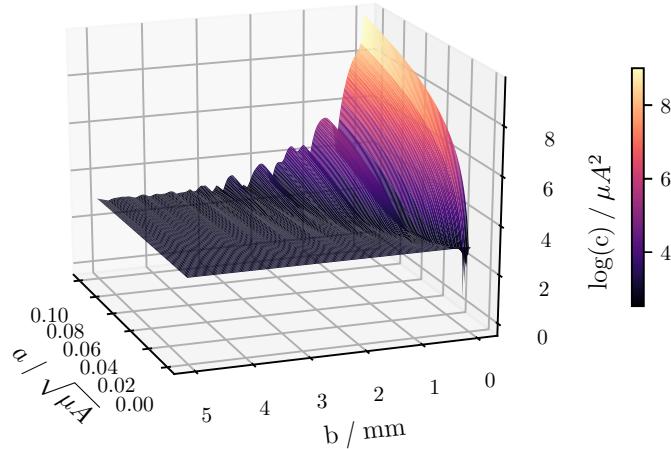


Abbildung 11: $a = (0.00001, 0.1)$, $b = (0.0001, 5)$.

Die Ebene ist wie erwartet wellenförmig, jedoch konvergieren die Parameterwerte nur in einem kleinen Bereich zu einem Minimum, nahe der 0.

Die weiteren Abbildungen 12, 13 und 14 zeigen jeweils einen vergrößerten Ausschnitt des Minimums. Abbildung 15 zeigt eine alternative, 2-Dimensionale Darstellung.

4.3.4 Doppelspalt

Die Parameterebene wird nach demselben Prinzip erstellt, jedoch wird die Funktion um einen Parameter s erweitert. Dadurch ist die Fehlerquadratsumme geometrisch schwieriger darzustellen. Für eine Gegenüberstellung wird der Parameter s konstant gehalten. Es werden zwei Fälle unterschieden:

1. Für s wird die Herstellerangabe verwendet.
2. Für s wird der optimale Parameterwert aus `curve_fit` verwendet.

Hierdurch können die Parameterebenen sowohl auf lokale Minima, als auch auf Verschiebungen dieser Minima durch den Parameterwechsel in s untersucht werden. Zum Vergleich werden einige Ausgleichskurven mit entsprechenden Parameterwerten gegenübergestellt. Dabei wird je ein Parameter als Herstellerangabe festgehalten und die nächstbeste Kurve berechnet.

Parameterebene Einzelpalt.

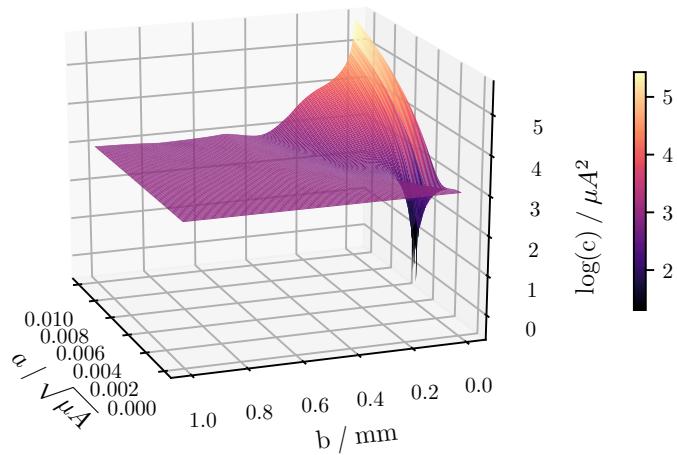


Abbildung 12: $a = (0.00001, 0.01)$, $b = (0.0001, 1)$.

Parameterebene Einzelpalt.

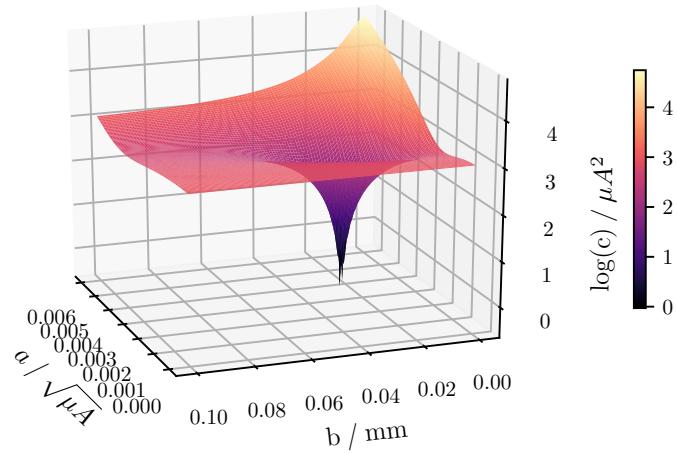


Abbildung 13: $a = (0.00001, 0.006)$, $b = (0.0001, 0.1)^6$.

Parameterebene Einzelspalt - maximale Vergößerung.

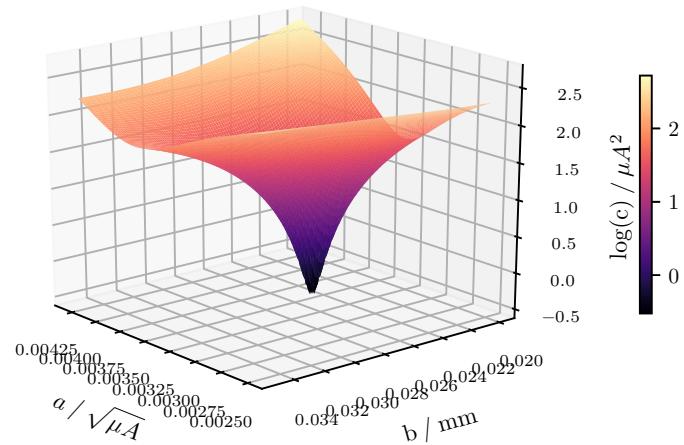


Abbildung 14: $a = (0.0025, 0.0043)$, $b = (0.02, 0.035)$.

Einzelspalt - Kurvenschar.

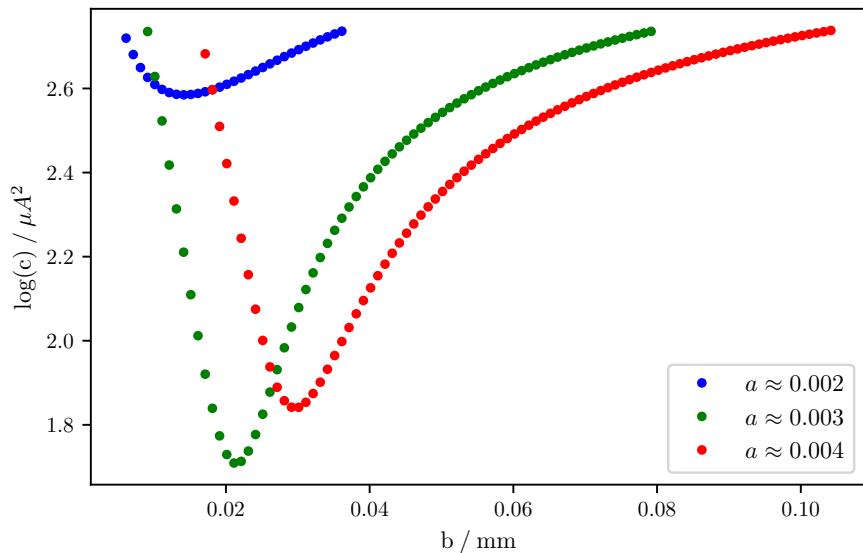


Abbildung 15: Kurvenschar der Fehlerquadratsumme in Abhängigkeit von a und b .

Parameterebene Doppelspalt - fester Spaltabstand

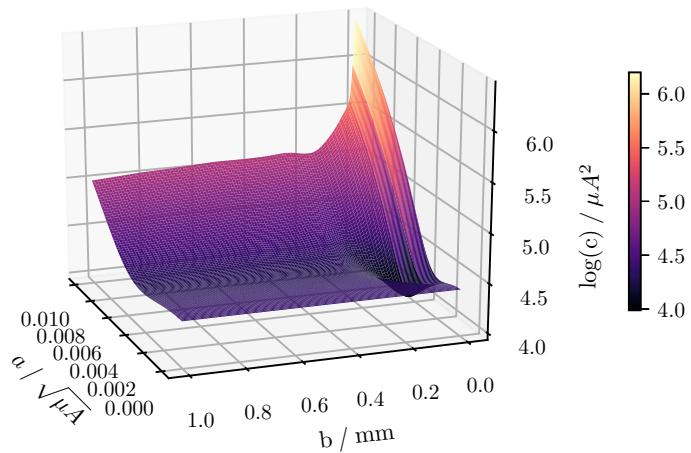


Abbildung 16: $s = 0,75 \text{ mm}$ (Herstellerangabe), $a = (0.00001, 0.01)$, $b = (0.0001, 1)$.

Parameterebene Doppelspalt - bester Fit, dynamische Parameter

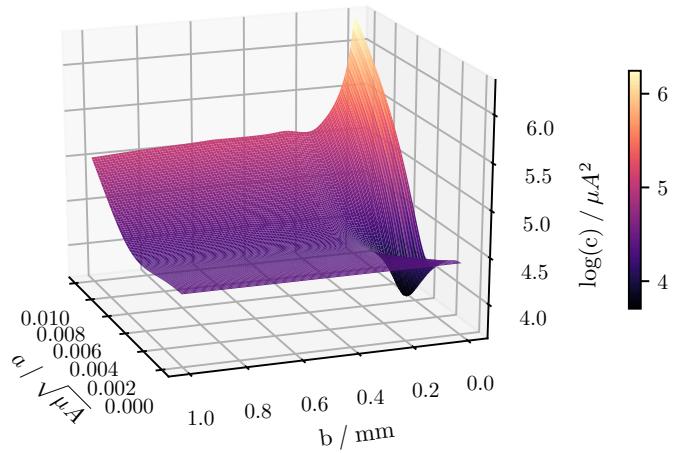


Abbildung 17: $s = 0,022 \text{ mm}$, $a = (0.00001, 0.01)$, $b = (0.0001, 1)$.

Parameterebene Doppelspalt - fester Spaltabstand, kleine Intervalle

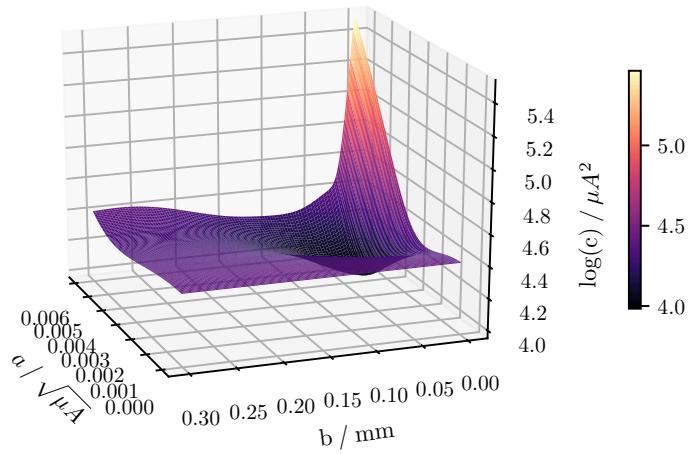


Abbildung 18: $s = 0,75 \text{ mm}$ (Herstellerangabe), $a = (0.00001, 0.006)$, $b = (0.0001, 0.3)$.

Parameterebene Doppelspalt - bester Fit, dynamische Parameter, kleine Intervalle

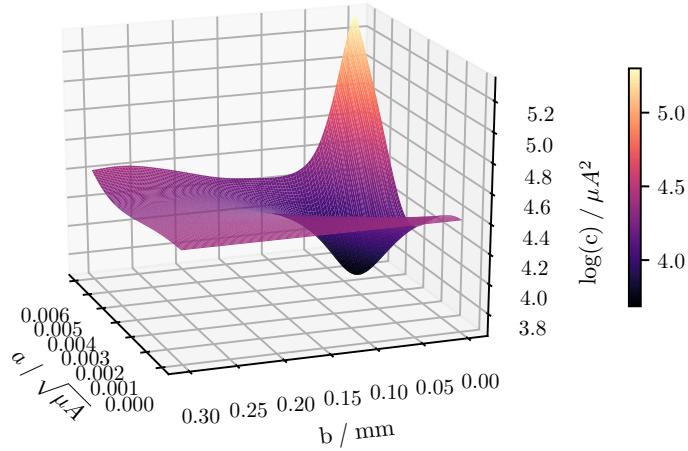
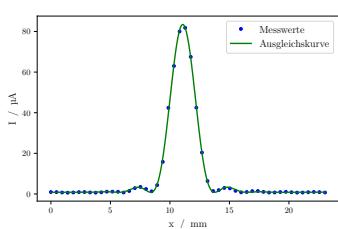
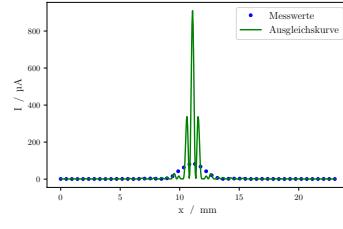


Abbildung 19: $s = 0,022 \text{ mm}$, $a = (0.00001, 0.006)$, $b = (0.0001, 0.3)$.

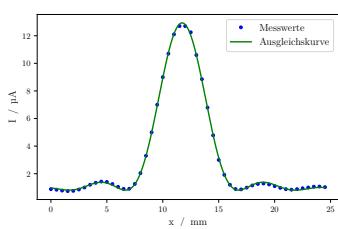


(a) $s \approx 0,022 \text{ mm}$ mit $a \approx 0.005$, $b \approx 0.047$.

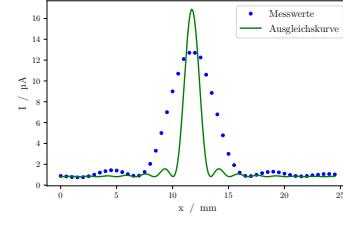


(b) $s = 0,75 \text{ mm}$ mit $a \approx 0.015$, $b \approx 0.13$

Abbildung 20: Doppelspalt nach `curve_fit` (vgl. Tabelle 4) vs. $s = 0,75 \text{ mm}$. Für alle: $x_0 = 11.077$, $I_d = 0.82$.



(a) $b \approx 0.025 \text{ mm}$ mit $a \approx 0.0035$.



(b) $b = 0,075 \text{ mm}$ mit $a \approx 0.004$

Abbildung 21: Einzelpunkt nach `curve_fit` (vgl. Tabelle 3) vs. $b = 0,075 \text{ mm} = const.$ Für alle: $x_0 = 11.727$, $I_d = 0.81$.

5 Diskussion

5.1 Versuchsaufbau

Der Aufbau des Versuchs ist etwas instabil, weil der Laser und der Sensor sich höhentechnisch nicht aufeinander abstimmen lassen. Stattdessen muss der Laser nach oben *gekippt* und mit beispielsweise einem Stück Papier in der Halterung eingeklemmt werden. Die Konstruktion ist daher anfällig für Stöße am Tisch oder der Führungsschiene selbst.

5.2 Zuverlässigkeit der Vorhersagen und Messungen

Die Versuchsanleitung hat einen kleinen Fehler in Gleichung (6), in der das A_0 fehlt. Wird dieser variable Faktor in der Ausgleichsrechnung nicht berücksichtigt, funktioniert die komplette Rechnung nicht. Erst ein Rückschluss über die Fourier-Transformierte $g(\xi)$ deckt diesen Fehler auf. Das Auswerten über `curve_fit` ist **extrem** fehleranfällig, da es viele Versuchspараметer gibt, die nicht exakt bestimmt sind. Es **müssen** geeignete Startwerte übergeben werden, da ansonsten stark abweichende Parameterwerte gefunden werden. Auch die Parameter wie etwa c für den Dunkelstrom I_d oder x_0 für das Intensitätsmaximum sollten nicht fest eingetragen werden, da die Covarianz ansonsten gegen unrealistische Werte für b konvergiert. Daher sind die Werte variabel gehalten, werden in der Funktion selbst aber mit Startwerten versehen.

Zudem ist der Dunkelstrom I_d nicht genau bestimmbar, da die Wolkenlage starken Einfluss auf diese Messung hat. Der Versuch wurde zu Sommerbeginn in der Uhrzeit zwischen 14 und 17 Uhr durchgeführt und fand an einer nordseitigen Fensterfront statt.

Die Abweichungen des gemessenen Dunkelstroms $I_d = (0,7 \mu\text{A}, 0,63 \mu\text{A})$ mit dem errechneten $(c_1, c_2) = ((0,81 \pm 0,01) \mu\text{A}, (0,8 \pm 0,1) \mu\text{A})$ ist also auf die Wetterlage zurückzuführen und liegt mit Abweichungen von $0.75 < I_d/c_i < 0.8$ in einem sehr plausiblen Bereich. Letztlich ist dieser Faktor lediglich eine Verschiebung des y-Achsen-Abschnitts und hat darüber hinaus keinen Einfluss auf die Ausgleichsrechnung beziehungsweise -kurve. Dennoch sei erwähnt, dass die eigene Sitzposition oder das Vorbeilaufen an dem Versuch einen nennenswerten Einfluss auf den Dunkelstrom hat und ein Trend in den Messdaten sichtbar werden kann. Von einem Umsetzen während der Messung oder einer Drehung der gesamten Führungsschiene ist daher abzuraten. Dass die über die Ausgleichsrechnung berechneten Werte für beide Dunkelströme nahezu gleich sind und nur eine Abweichung von etwa 15 – 27% zum Realwert aufweisen, kann als erste Bestätigung für die Eignung des verwendeten Modells aufgefasst werden – in diesem Falle der nicht-klassische Ansatz mit den explizit gegebenen Funktionen (10) und (11).

5.3 Vergleich mit der Herstellerangabe

Die Abweichungen der ermittelten Spaltenbreiten gegenüber den Herstellerangaben weichen auffälligerweise beide je um einen Faktor 3 ab. Die relativen Messunsicherheiten sind $(b_{par,1}, b_{par,2}) \approx (0.32\%, 0.6\%)$. Die Werte lassen sich nähern zu

$b_{par,1} = (0,024\,95 \pm 0,000\,08) \text{ mm} \approx 0,025 \text{ mm}$ und
 $b_{par,2} = (0,0470 \pm 0,0003) \text{ mm} \approx 0,05 \text{ mm}$. Auffällig sind wie erwähnt sie ganzzahligen Zusammenhänge

$$\frac{b_{par,1}}{b_1} = \frac{0,025 \text{ mm}}{0,075 \text{ mm}} = \frac{1}{3}$$

und

$$\frac{b_{par,2}}{b_2} = \frac{0,05 \text{ mm}}{0,15 \text{ mm}} = \frac{1}{3}$$

Da jedoch Faktoren wie falsches Ablesen der Daten oder unvollständige Überträge der Gleichungen in ein Python-Programm ausgeschlossen werden können, wird ein anderer, systematischer Zusammenhang vermutet. Die Abweichungen können unter anderem durch ungeeignete Näherungen innerhalb der Theorie selbst entstehen (s. Fresnel- vs. Fraunhofer-Beugung 3).

5.4 Eignung der Theorie

Die für die Rechnung verwendete Theorie der Fraunhofer-Beugung ist nur geeignet, wenn die Abstrahlwinkel auf der Spaltebene annähernd parallel sind. (s. Abb. 3) Denkbar ist, dass der Abstand d mit 626,1 mm nicht groß genug ist, um eine Annäherung über $\sin \varphi$ zu ermöglichen. Der in der Versuchsanleitung empfohlene Mindestabstand von 100 cm – 120 cm kann auf der Führungsschiene nicht realisiert werden. Mit $d = 62,6 \text{ cm}$ ist dieser Wert um knapp die Hälfte unterschritten. Zudem wurde keine Sammellinse verwendet, um diesen Abstandsverlust zu kompensieren.

6 Erweiterte Diskussion

Vor allem die Ausgleichsrechnung für den Doppelspalt ist mit der Funktion `curve_fit` schwer realisierbar und unterstützt die Theorie nicht vollständig. Hier soll diskutiert werden, welche Methoden angewendet wurden und welche Ursachen die Abweichungen haben können.

6.1 Einzelpunkt

Die Parameter a und $b_{par,1}$ aus (18) scheinen zunächst negativ korreliert zu sein, da sie miteinander multipliziert werden. Jedoch findet sich der Parameter $b_{par,1}$ auch in dem Term für den Sinus, wodurch die Parameter dann doch gegen optimale Werte als lokale Minima konvergieren können. Um negative Parameterwerte für die `curve_fit`-Funktion auszuschließen, wird der optionale Parameter `bounds=(0, 15)` spezifiziert, was die Werte auf das Intervall [0, 15] einschränkt. Ohne diese Einschränkung schlägt die Funktion auch tatsächlich fehl. In einer ersten Version dieses Protokolls stimmten die Angaben aus der Auswertung (Gl. (18)) und die in Python verwendete Funktion nicht

ganz überein. Beide Gleichungen waren nicht richtig. Mit der nun richtigen Funktion ändert sich glücklicherweise die Qualität der Ausgleichskurve nicht, damit jedoch auch nicht das errechnete $b_{par,1}$. Die Parameter x_0 und c können variabel gehalten werden, da sie als additive Konstanten den Graphen nur nach oben, unten, links und rechts verschieben und somit keine Fehlerquelle darstellen. Zudem ist mit $x_0 = (11,727 \pm 0,006)$ mm das Intensitätsmaximum und mit $c = (0,81 \pm 0,01)$ μA der von dem gemessenen Dunkelstrom abweichende, und damit vermutlich genauere, Wert bestimmt.

Für eine bessere Nachvollziehbarkeit sei in Abbildung 22 ein Code-Auszug gezeigt. Außerdem findet sich in der Literatur[8] ein Link zum Download des Verzeichnisses mit allen notwendigen Dateien und Abbildungen. Die Python-Dateien sind sofort ausführbar, sofern `numpy`, `scipy` und `matplotlib` für Python installiert sind.

Analog befinden sich in diesem Verzeichnis auch die Dateien für den Doppelspalt.

```

lam = 633*10**-6      # Wellenlänge
_d = 626.1            # Abstand zum Sensor
_b = 0.075             # Spaltbreite
_Id = 0.7              # Dunkelstrom

def forReal(x, x0, a, b, c):
    x_ = abs(x - x0)
    d_ = np.sqrt(_d**2 + x_**2)
    sin_phi = x_ / d_
    eta = (np.pi * b * sin_phi) / lam
    return ((a*np.sinc(eta))**2)*10**6 + c

params, cov = curve_fit(forReal, I2[0], I2[1], p0=[12, 0.001, _b, _Id], bounds=(0, 15))

```

Abbildung 22: Code-Auszug für den Einzelspalt.

6.2 Doppelspalt

Die Ausgleichskurve für den Doppelspalt ist eine *sehr* gute Näherung an die Messwerte.

Allerdings sind die Abweichungen zu den Herstellerangaben signifikant. Mit diesen Parameterwerten wird klar, dass eine oder mehrere grundlegende Annahmen falsch sind. Zunächst wird geprüft, ob die Spaltschablone richtig ausgerichtet und der Doppelspalt getroffen wurde, und nicht etwa nur einer der beiden Einzelspalte. Hierfür wird für die

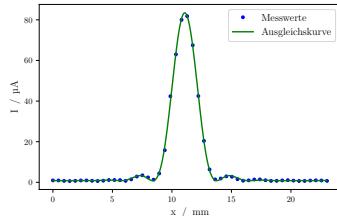
Ausgleichsrechnung die Funktion des Einzelspalts verwendet (s. Abb. ??).

Die Einzelspaltfunktion eignet sich der Abbildung nach ebenfalls für eine Ausgleichsrechnung, ist qualitativ jedoch etwas schlechter. Die errechneten Parameterwerte sind aber ähnlich plausibel. Der Wert der Einzelspaltfunktion mit

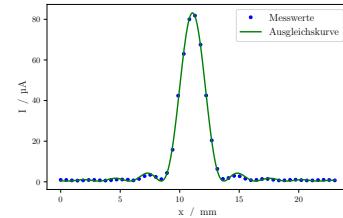
$$b_{par,2e} = (0,0479 \pm 0,0002) \text{ mm}$$

$$b_{par,2} = (0,0470 \pm 0,0003) \text{ mm}$$

kaum verschieden, und der Dunkelstrom $c_{par,2e} = (0,4 \pm 0,1)$ μA ist im Vergleich zu dem real gemessenen Wert von 0,63 μA ebenfalls in einem sinnvollen Bereich. Der Parameter s wird in dieser Rechnung nicht berücksichtigt.



(a) Ausgleichskurve mit Doppelspaltfunktion.



(b) Ausgleichskurve mit Einzelpaltfunktion.

Tabelle 6: Parameterwerte des Doppelspalts mit der Einzelpaltfunktion.

	a	$b_{par,1} / \text{mm}$	$c / \mu\text{A}$	x_0 / mm
Doppelspalt	$0,009\ 10 \pm 0,000\ 03$	$0,0479 \pm 0,0003$	$0,4 \pm 0,1$	$11,077 \pm 0,006$

Die Funktion für den Einzelpalt ist in 22 abgebildet. Die für den Doppelspalt in Abbildung 24.

```

lam = 633*10**-6      # Wellenlänge
_d = 626.1             # Abstand zum Sensor
_Id = 0.7               # Dunkelstrom
_s = 0.75              # Spaltabstand
_b = 0.15              # Spaltbreite

def forImaginary(x, x0, a, b, c, s):
    x_ = abs(x - x0)
    d_ = np.sqrt(_d**2 + x_**2)
    sin_phi = x_ / d_
    eta = (np.pi * sin_phi) / lam
    return ((2*a*np.sinc(eta*b)*np.cos(eta*s))**2)*10**6 + c

params, cov = curve_fit(forImaginary, I2[0], I2[1], p0=[11, 0.01, _b, Id, 0.01], bounds=(0, 15))

```

Abbildung 24: Code-Auszug für den Doppelspalt.

6.2.1 Spaltabstand s

Der Spaltabstand ist eine Größe, die nur den Doppelspalt betrifft. Trotz der qualitativ hochwertigen Ausgleichskurve ist der ermittelte Wert für s mit einem Faktor von etwa 37.5 eine derart große Abweichung, dass die Theorie geprüft werden muss. Genau genommen können die wahrscheinlichsten Zusammenhänge wie folgt zusammengefasst werden.

1. Systematische Messfehler
2. Eignung der Theorie
3. Methodik der Ausgleichsrechnung

Systematische Fehler, die in der Sensorik liegen oder dem Aufbau geschuldet sind, können nicht ausgeschlossen, nachträglich aber auch nicht geprüft werden. Sie sind aufgrund des identischen, ganzzahligen Zusammenhangs der Spaltbreiten sehr wahrscheinlich.

Die **Eignung der Theorie** wurde bereits thematisiert. Von Bedeutung wären in diesem Falle ungeeignete Näherungen, die nicht gemacht werden dürfen, weil der Versuchsaufbau nicht den Anforderungen entspricht. Denkbar sind in diesem Zusammenhang auch nicht beachtete Störfunktionen, die in der Theorie nicht behandelt werden.

6.3 Parameterebene und Ausgleichsrechnung

Im weiteren Verlauf wird die Methodik der Ausgleichsrechnung diskutiert. Wie bereits in der Auswertung erklärt, sucht die Methode der kleinsten Quadrate nach Minima auf sogenannten Parameterebenen beziehungsweise -räumen. Die Auswertung stellt in den Abbildungen 11 bis 21b die Parameterebenen gegenüber, sodass Minima geometrisch dargestellt und abgelesen werden können. Der grundlegende Gedanke ist, dass sich kleinere, lokale Minima um das globale Minimum verteilen können. Letztlich ist dies auch der Grund, warum die Funktion `curve_fit` mit Startwerten versehen werden muss, da die Funktion nicht beliebig große Intervalle der Parameter durchläuft, und als Ergebnis nur ein lokales Minimum findet. So ein Verhalten ist auch nicht immer sinnvoll, da gesuchte Parameter oftmals einen Erwartungswert besitzen – etwa wie hier die Spaltbreite b . In den Abbildungen kann beobachtet werden, dass alle Parameterwerte gegen ein bestimmtes Wertepaar konvergieren. In der Umgebung des Minimums gibt es auch keine weiteren Minima. Zudem ist die Umgebung um den Punkt (a_0, b_0) streng monoton fallend. Hiermit wird ausgeschlossen, dass es ein zweit- oder drittbestes Optimum gibt. Die Kurvenschar des Einzelpalts 15 unterstreicht das konvergente Verhalten der Parameter und zeigt keine Anomalien für oder um den Realwert $b = 0.075$. Die Darstellung des Doppelpalts ist wie in der Auswertung bereits erwähnt schwieriger. Die hier verwendete Methode – um die Abhängigkeit dennoch geometrisch darzustellen – ist die Gegenüberstellung von verschiedenen Parameterebenen mit unterschiedlichen Werten für s . Sinnvoll erscheint eine Betrachtung der Ebene für den Realwert von s und für das errechnete Optimum. Ein Vergleich der beiden Ebenen, welche je einmal große und einmal kleine Intervalle für (a, b) besitzen, zeigt, dass das Verhalten der Konvergenz gleich bleibt. Das Minimum verschiebt sich nur minimal, wird aber bedeutend kleiner für $s \approx 0.022$. Auch hier finden sich keine Anomalien in der Umgebung des Realwertes für s . Letztlich sind noch zwei nicht optimale Ausgleichskurven für die Realwerte von b und s den optimalen Kurven in den Abbildungen 20 und 21 gegenübergestellt. Dort ist sichtbar, dass die realen Spaltbreiten beziehungsweise -abstände keine plausiblen Kurven erzeugen. Es gibt drei Voraussetzungen für die Methode der kleinsten Quadrate, die hier jedoch alle erfüllt sind.

1. Es liegen wesentlich mehr Messdaten als Parameterwerte vor.
2. Die Messwerte sind normalverteilt.
3. Das verwendete Modell beschreibt das Verhalten der Messwerte.

6.3.1 Tool zum Testen des Beugungsmusters

Es gibt ein Online-Tool, mit dem über verschiedene Slider die Form der Beugungsfigur in Abhängigkeit seiner Parameter verändert werden kann. Dies ist besonders hilfreich, um zu verstehen, dass es für jede Figur nur einen Parametervektor $\vec{\beta}$ geben kann, der die Messwerte genau approximiert.

Einzelpalt: [https://www.leifiphysik.de/optik/beugung-und-interferenz/
grundwissen/einzelpalt](https://www.leifiphysik.de/optik/beugung-und-interferenz/grundwissen/einzelpalt)

Doppelpalt: [https://www.leifiphysik.de/optik/beugung-und-interferenz/
grundwissen/doppelpalt](https://www.leifiphysik.de/optik/beugung-und-interferenz/grundwissen/doppelpalt)

6.4 Fazit

Der Versuch ist hinreichend durchführbar und die Ergebnisse bestätigen den Wellencharakter des Lichts. Trotz der veränderten Wolkenlage sind die Messwerte um das Intensitätsmaximum symmetrisch. Lediglich die Rahmenbedingung des Aufbaus sind genau zu bestimmen und an manchen Stellen anzupassen. Die Form der gemessenen Beugungsfigur selbst besitzt jedoch keine sichtbaren Anomalien. Vernünftige Stative für den Laser wären eine nennenswerte Verbesserung. Außerdem würde eine Sammellinse wesentlich stabilere Messungen ermöglichen. Zudem können mit einer Sammellinse ungeeignete Näherungen innerhalb der Theorie ausgeschlossen werden. Die Auswertung der Parameterebenen schließt ebenfalls unerwünschte Anomalien aus, die die Punkt-erzeugende `curve_fit`-Funktion sonst ignoriert. Zum Schluss sei erwähnt, dass eine Schutzklappe beziehungsweise -vorrichtung für den Laser, oder ausdrückliche Sicherheitshinweise ratsam sind, da der Laser vorheizen muss und nicht sofort absehbar ist, ob der Laser eingeschaltet ist beziehungsweise funktioniert.

Anhang: Messdaten

NLG06

02.06.20

Abstand Spalt-Sensor:	626,1 mm				
Absolute Distanz Laser:	864 mm				
Abstand Laser-Spalt 2:	86 mm				
Dunkelstrom Tageslicht:	$\approx 0,6 \mu\text{A} - 0,76 \mu\text{A}$				
Dunkelstrom Dunkel:	0,01 nA				
Doppelspalt					
	$0,75 \text{ mm} : \text{Abstandspalt}$				
	$0,15 \text{ mm} : \text{Spaltbreite}$				
Abstand d [mm]	Intensität [μA]	d [mm]	I [μA]	d [mm]	I [μA]
0,00	0,942	7,99	2,420	15,98	0,1800
0,47	0,920	8,46	1,300	16,45	0,1900
0,94	0,718	8,93	4,350	16,92	1,380
1,41	0,620	9,40	15,80	17,89	1,430
1,88	0,724	9,87	42,40	17,86	1,030
2,35	0,910	10,34	63,00	18,83	0,710
2,82	0,936	10,81	80,00	18,80	0,730
3,29	0,750	11,28	81,80	19,27	0,940
3,76	0,635	11,75	67,50	19,74	1,050
4,23	0,810	12,22	42,50	20,21	0,840
4,70	1,120	12,69	20,40	20,68	0,1665
5,17	1,140	13,16	6,350	21,15	0,1685
5,64	1,070	13,63	1,430	21,62	0,855
6,11	0,720	14,10	1,830	22,09	0,980
6,58	1,145	14,57	2,950	22,56	0,900
7,05	2,856	15,04	2,740	23,03	0,715
7,52	3,450	15,51	1,540		
Einzelspalt: 0,075 mm Breite					
d [mm]	I [μA]	d [mm]	I [μA]	d [mm]	I [μA]
0,0	0,880	8,5	3,300	17,0	0,865
0,5	0,840	9,0	5,000	17,5	0,990
1,0	0,778	9,5	7,000	18,0	1,150
1,5	0,740	10,0	9,000	18,5	1,260
2,0	0,758	10,5	10,70	19,0	1,240
2,5	0,854	11,0	12,10	19,5	1,220
3,0	1,000	11,5	12,90	20,0	1,100
3,5	1,200	12,0	12,70	20,5	0,975
4,0	1,340	12,5	12,25	21,0	0,880
4,5	1,430	13,0	16,60	21,5	0,842
5,0	1,400	13,5	8,850	22,0	0,879
5,5	1,250	14,0	6,710	22,5	0,945
6,0	1,050	14,5	4,780	23,0	1,000
6,5	0,900	15,0	3,000	23,5	1,060
7,0	0,910	15,5	1,920	24,0	1,070
7,5	1,260	16,0	1,200	24,5	1,025
8,0	2,040	16,5	0,890		

J.L.

Abbildung 25: Originale Messdaten.

Literatur

- [1] *Beugung*. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Beugung_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Beugung_(Physik)) (besucht am 09. 06. 2020).
- [2] *Doppelspaltexperiment*. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Doppelspaltexperiment> (besucht am 09. 06. 2020).
- [3] TU Dortmund. *Versuch V406: Beugung am Spalt*. 2020.
- [4] Ekbert Hering, Rolf Martin und Martin Stohrer. *Taschenbuch der Mathematik und Physik*. 6. Aufl. Springer Vieweg, 2017.
- [5] *Huygens'sches Prinzip*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Huygenssches_Prinzip (besucht am 09. 06. 2020).
- [6] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [7] *Optischer Spalt*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Optischer_Spalt (besucht am 09. 06. 2020).
- [8] *Verzeichnis der Pythondateien und Abbildungen*. URL: <https://mega.nz/folder/kR4DQKaS#OPG6ExJXZVkqbZNdJeIFFg> (besucht am 10. 07. 2020).