

Versuch Nr. 602

Röntgenemission und -absorption

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Durchführung: 05.05.2020

Abgabe: 19.05.2020

1.1

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Naturkonstanten	3
2.2 Röntgenstrahlung und ihr Spektrum	3
2.3 Die Bragg-Reflexion	4
2.4 Absorption von Röntgenstrahlen	5
2.5 Das Moseley'sche Gesetz	6
3 Durchführung	6
4 Auswertung	7
4.1 Vorbereitung	7
4.2 Die Bragg-Bedingung	8
4.3 Das Emissionsspektrum der Kupfer-Röntgenröhre	9
4.4 Das Absorptionsspektrum und die Absorptionskante	12
4.5 Die Rydberg-Konstante	13
5 Diskussion	15
Anhang: Messdaten	17
Literatur	17

1 Zielsetzung

Ziel des im Folgenden protokollierten Experiments ist die Analyse des Emissionsspektrums einer Kupfer-Röntgenröhre hinsichtlich der kontinuierlichen Brems- und der diskreten charakteristischen Strahlung. Ebenso werden die K-Absorptionskanten verschiedener Stoffe bestimmt, sowie die Rydberg-Energie.



2 Theorie

2.1 Naturkonstanten

Für mehr Übersichtlichkeit sind in der folgenden Tabelle alle benutzten Naturkonstanten gesammelt aufgetragen, um im weiteren Verlauf darauf zurückgreifen zu können.

Tabelle 1: Literaturwerte der Naturkonstanten [4].

	Wert	Einheit	Unsicherheit
Planck'sches Wirkungsquantum h	$6,626\,070\,04 \cdot 10^{-34}$	J s	$\pm 8,1 \cdot 10^{-42}$
	$4,135\,667\,662 \cdot 10^{-15}$	eV s	$\pm 2,5 \cdot 10^{-23}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c	299 792 458,0	m/s	0,0
Elementarladung e	$1,602\,176\,620\,8 \cdot 10^{-19}$	A s	$\pm 9,8 \cdot 10^{-28}$
Rydberg-Konstante R_∞	10 973 731,568 508	m ⁻¹	$\pm 6,5 \cdot 10^{-5}$
Rydberg-Energie E_R	$2,179\,872\,324\,984 \cdot 10^{-18}$	J	$\pm 2,7 \cdot 10^{-26}$
	13,605 693 009 65	eV	$\pm 1,9 \cdot 10^{-7}$
Feinstrukturkonstante α	0,007 297 352 566 4	1	$\pm 1,7 \cdot 10^{-12}$

3.1

2.2 Röntgenstrahlung und ihr Spektrum

Als Röntgenstrahlung wird allgemein elektromagnetische Strahlung in einem Wellenlängenbereich von 1 nm bis etwa 1 pm [6] bezeichnet. Sie entsteht bei der Abbremsung von Elektronen in einer Röntgenröhre [1, S. 253–256]: Dort werden Elektronen aus einer beheizten Kathode herausgelöst und auf eine positive Anode hin beschleunigt. Sie durchlaufen die sogenannte Beschleunigungsspannung U_B und erhalten deshalb maximal eine kinetische Energie von

$$E_{\max, \text{kin}} = e \cdot U_B.$$

Die entsprechende minimal mögliche Wellenlänge ist mit (2) also

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_B}. \quad (1)$$

Beim Auftreffen der Elektronen auf der Anode werden diese stark abgebremst. Die verlorene Energie geht – neben Reibungsverlusten – in Energiequanten der Röntgenstrahlen – auch *Photonen* – über. Diese werden entsprechend der schrägen Oberfläche der Anode

im rechten Winkel zur Beschleunigungsstrecke der Elektronen abgelenkt und aus der Röntgenröhre gesandt. Die Frequenz ν der Strahlung hängt von der übertragenen Energie ab, da die Energie von elektromagnetischer Strahlung direkt proportional zur Energie ist [1, S. 80]:

$$E_{\text{EM}} = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (2)$$

Je nachdem, wie viel Energie der abgebremsten Elektronen in Photonen transformiert wird, moduliert sich die Frequenz der Röntgenstrahlen und die entstehende Strahlung verteilt sich kontinuierlich über einen entsprechenden Wellenlängenbereich.

Zusätzlich hierzu existiert das Phänomen der charakteristischen Strahlung, deren Ausprägung von dem Material der Anode abhängt. Die kinetische Energie der Elektronen kann auch dazu aufgewendet werden, ein in dem Atom gebundenes Elektron anzuregen, wodurch eine Lücke in einer energetisch niedrigeren Atomschale entsteht. Aufgrund dessen wechselt ein Elektron eines höheren Energieniveaus auf diesen leeren Platz und die diskrete Energiedifferenz wird ebenfalls in Form von elektromagnetischer Strahlung emittiert. Da jedes Element unterschiedliche Energieniveaus besitzt, sind das charakteristische Spektrum und somit auch die zugehörigen Wellenlängen der Strahlung diskret und von Material zu Material verschieden.

Die Linien, die im Spektrum sichtbar sind, werden gemäß Konvention [2] mit dem Buchstaben der Schale, aus der das Elektron herausgelöst wird, (K, L, M,...) und einem Index mit griechischem Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ betitelt. Dieser zeigt an, aus welcher Schale das Elektron, welches den leeren Platz annimmt, kommt (Stellung des Buchstaben im Alphabet entsprechend der Schalendifferenz).

Hat das Element, aus dem die Anode besteht, mehrere Hüllenelektronen, sorgt das für zusätzliche Wechselwirkungen im Coulomb-Feld zwischen den negativen Elektronen und dem positiven Atomkern. Die inneren Elektronen schwächen beispielsweise die anziehende Coulomb-Kraft, die auf weiter außen gelegene Elektronen wirkt, ab. Daraus lässt sich eine etwas geringere, als erwartete Bindungsenergie ableiten, die durch die Einführung einer effektiven Kernladungszahl $z_{\text{eff}} = z - \sigma_n$ analytisch modelliert wird. Hierbei stellt σ_n eine sogenannte Abschirmkonstante dar, die für jedes Hüllenelektron und Material unterschiedlich ist. Es ergibt sich für die Bindungsenergie der n -ten Schale der Wert [2]

$$E_n = -E_{\text{R}} z_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (3)$$

2.3 Die Bragg-Reflexion

Die Bragg-Reflexion beschreibt das Phänomen, dass elektromagnetische Strahlung, die beispielsweise unter einem Winkel θ auf die Oberfläche eines Kristalls – im Experiment wird es ein Lithiumfluorid-Kristall sein, abgekürzt mit LiF – trifft, abhängig von ihrer Wellenlänge nur unter bestimmten *Glanzwinkeln* reflektiert wird [1, S. 416]. Diese hängen von den Materialeigenschaften des verwendeten Beugungsobjekt ab, bei Kristallen insbesondere von deren Netzaabstand d :

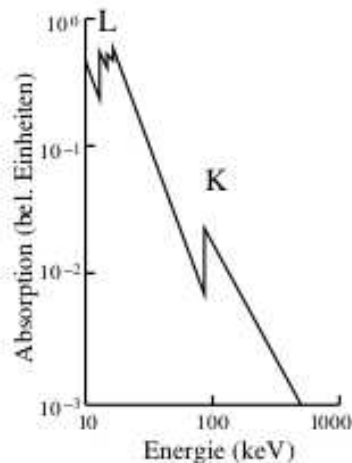
$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Gesprochen wird hier von Glanzwinkeln n -ter Ordnung. Im Experiment wird diese Gesetzmäßigkeit ausgenutzt, um die Verteilung der Wellenlängen der Röntgenröhre zu bestimmen.

2.4 Absorption von Röntgenstrahlen

Treffen Röntgenstrahlen auf ein Material, wird ein Teil der Strahlung durchgelassen und der restliche Teil absorbiert. Das Verhältnis der absorbierten Strahlung zur einfallenden wird unter dem Absorptionskoeffizienten zusammengefasst. Dieser sinkt mit steigender Energie der elektromagnetischen Strahlung, das heißt mit steigender Frequenz beziehungsweise sinkender Wellenlänge gemäß 2[2]. Ein exemplarischer Verlauf dieser Korrelation ist in Abbildung 1 zu sehen. Die „Zacken“ der Kurve sind mithilfe der diskre-

Abbildung 1: Ein exemplarischer Verlauf der Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Energie der auftreffenden Strahlung[2].



ten Energieniveaus zu erklären: Erreicht die Energie einen gewissen, diskreten Wert, der ausreicht, ein Elektron aus der nächsten inneren Schale herauszulösen, wird dieser Teil der Energie dafür verwendet, und die Absorptionsrate steigt infolgedessen. Die Energie der Strahlung, die für die jeweiligen Schalen charakteristisch ist, wird als *Absorptionskante* bezeichnet, ebenfalls mit einem entsprechenden Buchstaben (K, L, M,...) gekennzeichnet, der die betreffende Schale indiziert. Diese Absorptionskanten $h\nu_{\text{abs}}$ können somit mithilfe des sprunghaften Anstiegs der Absorption experimentell ermittelt werden. Die Bindungsenergie der Elektronen wird durch die Sommerfeld'sche Feinstrukturformel[2]

$$E_{n,j} = -E_R \left(z_{\text{eff},1}^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \alpha^2 z_{\text{eff},2}^4 \cdot \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right) \quad (5)$$

angegeben, die zusätzlich noch die Feinstruktur – feine Variationen des eigentlich diskreten Energieniveaus – der höheren Atomschalen berücksichtigt. Es sind n die Hauptquantenzahl

und j der Gesamtdrehimpuls.

2.5 Das Moseley'sche Gesetz

Das Moseley'sche Gesetz beschreibt die Korrelation zwischen der Energie der K_α -Strahlung E_K und der Kernladungszahl z :

$$E_K = E_R \cdot (z - \sigma)^2. \quad (6)$$

Der Vorfaktor E_R stellt hierbei die Rydberg-Energie (vergleiche Tabelle 1) dar, aus der gemäß (2) die sogenannte Rydberg-Frequenz ν_R

$$\nu_R = \frac{E_R}{h} \quad (7)$$

bestimmt werden kann.

3 Durchführung

Abbildung 2: Der im Experiment verwendete Röntgenapparat [2].



Gearbeitet wird mit einem Röntgenapparat (vergleiche 2), in dem eine Kupfer-Röntgenröhre, eine Vorrichtung zur Befestigung beispielsweise eines Beugungsgegenstandes und ein Geiger-Müller-Zählrohr integriert sind. Ebenfalls kann mithilfe dieses Apparats der benötigte Beugungswinkel eingestellt, sowie die Integrationszeit des Zählrohrs festgelegt werden. Es besteht die Möglichkeit die Justierung des Zählrohrs so festzulegen, dass es automatisch auf den doppelten Beugungswinkel gestellt wird. Die Anzahl der Impulse der dort auftreffenden Photonen wird entsprechend an einem Bildschirm angezeigt.

Die verwendete Beschleunigungsspannung und der Anodenstrom werden direkt zu Beginn des Experiments eingestellt und nicht mehr verändert. Sie betragen hier $U_B = 35 \text{ keV}$ und $I_A = 1 \text{ mA}$. Außerdem wird durchweg ein Lithiumfluorid-Kristall benutzt, auf den der Photonenstrahl fällt.

Im ersten Schritt wird, wie angekündigt, die Bragg-Bedingung überprüft. Hierfür wird der Lithiumfluorid-Kristall (im Folgenden mit LiF abgekürzt) in einem festen Winkel von $\theta = 14^\circ$ befestigt und der Winkel α_{GM} des Geiger-Müller-Zählrohrs in 0.1° -Intervallen ausgehend von 26.0° bis 30.0° variiert. Die Anzahl der auftreffenden Röntgenphotonen wird mit einer Integrationszeit von $\Delta t = 5 \text{ s}$ von dem Zählrohr aufgenommen.

Im Anschluss daran wird das Röntgenspektrum der Kupfer-Röntgenröhre gemessen, indem die Strahlung 0.1° -Schritten mit einer Messzeit von $\Delta t = 10 \text{ s}$ aufgenommen wird. Die Messreihe startet bei einem Winkel von 8.0° und endet bei 25.0° .

Anschließend werden die Absorptionskanten sechs verschiedener Elementen untersucht: Zink, Germanium, Brom, Rubidium, Strontium und Zirkonium. Dafür wird der betreffende Stoff zwischen LiF-Kristall und Geiger-Müller-Zählrohr befestigt und mit einer Integrationszeit von $\Delta t = 20 \text{ s}$ die Anzahl der auftreffenden Photonen gemessen. Ein passender Winkelbereich muss jeweils den Elementen entsprechend gewählt werden, was unter anderem mithilfe der im Vorhinein recherchierten Literaturwerte möglich ist. Variiert wird der Winkel erneut in 0.1° -Schritten.

Aus diesen Messdaten werden – wie in 4 näher erläutert – die Absorptionskanten, die Abschirmkonstanten und die Rydberg-Konstante R_∞ bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Vorbereitung

Da für die folgende Auswertung immer wieder Literaturwerte zum Vergleich herangezogen werden, sind diese in der Tabelle 2 sowie in (8) für mehr Übersichtlichkeit gesammelt zusammengetragen. Ebenfalls sei nochmal an Tabelle 1 in Kapitel 2 erinnert.

Tabelle 2: Literaturwerte gemäß [5, S. 467] und [7].

Element	Ordnungszahl Z	$E_{K,Lit} / \text{keV}$	$\theta_{Lit} / ^\circ$	σ_{Lit}
Zink Zn	30	9.66855	18.56	3.545
Gallium Ga	31	10.37776	17.25	3.606
Germanium Ge	32	11.11382	16.08	3.665
Brom Br	35	13.48386	13.20	3.838
Rubidium Rb	37	15.20774	11.68	3.943
Strontium Sr	38	16.11526	11.01	3.990
Zirkonium Zr	40	18.00815	9.84	4.090

Die Energien der Cu- K_α - und Cu- K_β -Linie sind gemäß [5, S. 467]

$$K_\alpha = 8,038 \text{ keV} \quad \text{und} \quad K_\beta = 8,941 \text{ keV} . \quad (8)$$

4.2 Die Bragg-Bedingung

Tabelle 3: Messwerte zum Überprüfen der Bragg'schen Reflexionsbedingung.

$\alpha_{\text{GM}} / ^\circ$	N	$*$	Impulse	N / s^{-1}	$\alpha_{\text{GM}} / ^\circ$	N	$*$	Impulse	N / s^{-1}
26,0	280	\pm	17	$56,0 \pm 3,3$	28,1	1075	\pm	33	$215,0 \pm 6,6$
26,1	290	\pm	17	$58,0 \pm 3,4$	28,2	1090	\pm	33	$218,0 \pm 6,6$
26,2	270	\pm	16	$54,0 \pm 3,3$	28,3	1075	\pm	33	$215,0 \pm 6,6$
26,3	310	\pm	18	$62,0 \pm 3,5$	28,4	1040	\pm	32	$208,0 \pm 6,4$
26,4	290	\pm	17	$58,0 \pm 3,4$	28,5	945	\pm	31	$189,0 \pm 6,1$
26,5	340	\pm	18	$68,0 \pm 3,7$	28,6	945	\pm	31	$189,0 \pm 6,1$
26,6	360	\pm	19	$72,0 \pm 3,8$	28,7	880	\pm	30	$176,0 \pm 5,9$
26,7	415	\pm	20	$83,0 \pm 4,1$	28,8	820	\pm	29	$164,0 \pm 5,7$
26,8	445	\pm	21	$89,0 \pm 4,2$	28,9	745	\pm	27	$149,0 \pm 5,5$
26,9	475	\pm	22	$95,0 \pm 4,4$	29,0	690	\pm	26	$138,0 \pm 5,3$
27,0	525	\pm	23	$105,0 \pm 4,6$	29,1	625	\pm	25	$125,0 \pm 5,0$
27,1	595	\pm	24	$119,0 \pm 4,9$	29,2	555	\pm	24	$111,0 \pm 4,7$
27,2	625	\pm	25	$125,0 \pm 5,0$	29,3	535	\pm	23	$107,0 \pm 4,6$
27,3	705	\pm	27	$141,0 \pm 5,3$	29,4	475	\pm	22	$95,0 \pm 4,4$
27,4	770	\pm	28	$154,0 \pm 5,5$	29,5	385	\pm	20	$77,0 \pm 3,9$
27,5	785	\pm	28	$157,0 \pm 5,6$	29,6	365	\pm	19	$73,0 \pm 3,8$
27,6	830	\pm	29	$166,0 \pm 5,8$	29,7	290	\pm	17	$58,0 \pm 3,4$
27,7	900	\pm	30	$180,0 \pm 6,0$	29,8	280	\pm	17	$56,0 \pm 3,3$
27,8	940	\pm	31	$188,0 \pm 6,1$	29,9	265	\pm	16	$53,0 \pm 3,3$
27,9	1055	\pm	32	$211,0 \pm 6,5$	30,0	265	\pm	16	$53,0 \pm 3,3$
28,0	1060	\pm	33	$212,0 \pm 6,5$					

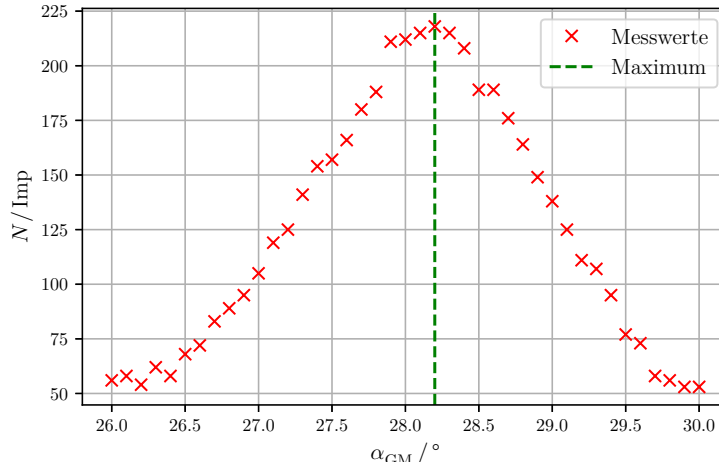
Das aus der Abbildung 3 abgelesene Maximum befindet sich bei einem Winkel von $\alpha_{\text{GM}} = 28.2^\circ$, bestätigt wird dieser Wert mit einem Blick auf die Messdaten in Tabelle 3. Die Messunsicherheit der aufgenommenen Impulse ergeben sich aus einer Poisson-Verteilung der Messfehler [3].

Angesichts dessen, dass der Vergleich mit dem Theoriewert die gesamte folgende Auswertung der restlichen Daten beeinflussen kann, werden im Folgenden bereits mögliche Abweichungen vom Theoriewert in verkürzter Form diskutiert und nicht erst ausschließlich in 5.

Da der Photonenstrahl gemäß des in 2.3 vorgestellten Modells der Bragg'schen Reflexion unter demselben Winkel vom Kristall wegpropagiert, unter dem er dort aufgetroffen ist, liegt der theoretisch zu erwartende Winkel $\alpha_{\text{GM,th}}$ des Geiger-Müller-Zählrohrs bei $2 \cdot \theta = 28.0^\circ$.

Die Abweichung von $0.2/28.0 = 0.7\%$ ist vergleichsweise gering und kann leicht mit einer gewissen Messunsicherheit der Messapparatur in solch kleinen Winkelgrößen erklärt werden. Von der Funktionstüchtigkeit des Reglers des Winkels des Zählrohrs in Abhängigkeit von dem des Kristalls kann ausgegangen werden.

Abbildung 3: Graphische Darstellung der Messdaten zur Überprüfung der Bragg'schen Bedingung.



4.3 Das Emissionsspektrum der Kupfer-Röntgenröhre

Die Messwerte sind entsprechend der durchgeführten Messung in Abbildung 4 aufgetragen. Die Wellenlänge, unterhalb der kein Spektrum zu messen sein sollte, ergibt sich aus (1). In der Durchführung des Experiments wird $U_B = 35 \text{ kV}$ benutzt, aus der eine minimale Wellenlänge von

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_B} = 35,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

resultiert. Dies entspricht gemäß der Bragg'schen Reflexionsbedingung (4) mit Beugungsordnung $n = 1$ und dem Nettabstand eines Lithiumfluorid-Kristalls von $d_{\text{LiF}} = 201,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ einem minimalen Winkel von

$$\theta_{\min} = \arcsin\left(\frac{\lambda_{\min}}{2d}\right) = \arcsin\left(\frac{hc}{2deU_B}\right) \approx 5,0^\circ.$$

Der kleinste vermessene Winkel beträgt bei dieser Messung $8,0^\circ > \theta_{\min}$, weshalb die maximale Energie beziehungsweise die minimale Wellenlänge des Bremsbergs nicht anhand der Messdaten bestimmt werden kann.

Zur Bestimmung der Halbwertsbreite ist in Abbildung 5 das charakteristische Spektrum nochmals in höherer Auflösung aufgetragen. Die zu den Übergängen gehörigen Winkel lassen sich aus der Graphik bei

$$\theta_\alpha = 22,5^\circ \quad \text{und} \quad \theta_\beta = 20,2^\circ$$

ablesen. Für die Halbwertsbreiten – vergleiche Abbildung 5, insbesondere die Hilfslinien zur graphischen Bestimmung – ergeben sich die Winkeldifferenzen

$$\Delta\theta_\alpha = 22,85^\circ - 22,36^\circ = 0,49^\circ \quad \text{und} \quad \Delta\theta_\beta = 20,55^\circ - 20,07^\circ = 0,48^\circ. \quad (9)$$

Abbildung 4: Die Impulsrate der von der Kupfer-Anode ausgehenden Röntgenphotonen, aufgetragen gegen den Winkel θ des LiF-Kristalls.

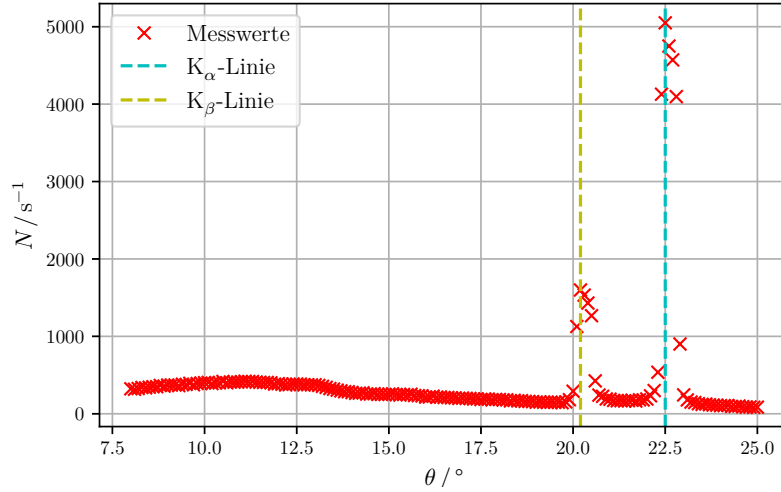
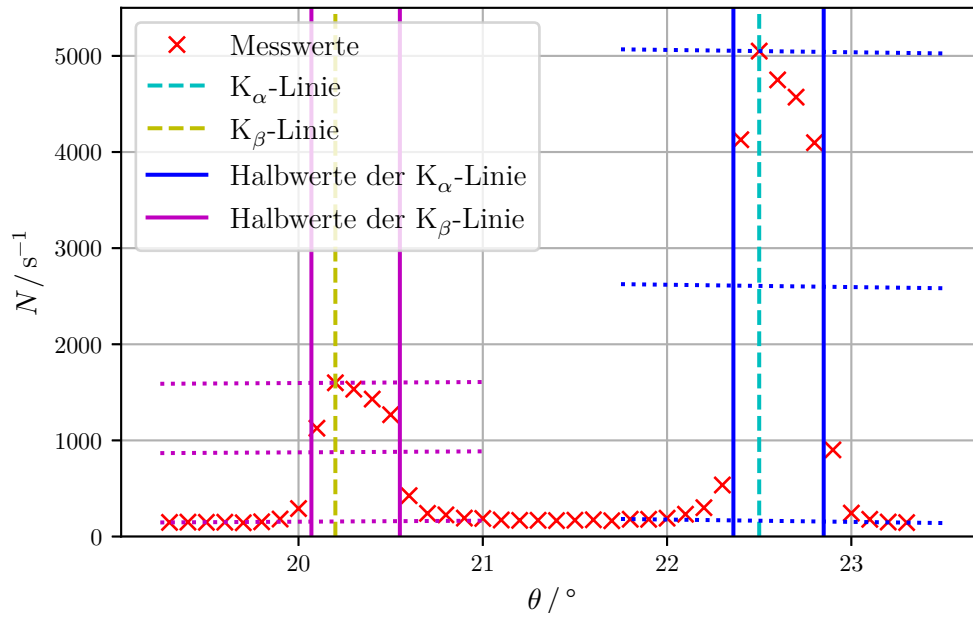


Abbildung 5: Das charakteristische Spektrum in höherer Auflösung zur Bestimmung der Halbwertsbreite.



Hierfür werden jeweils zwei zueinander parallele Geraden durch das Maximum des Peaks als auch durch das darunter liegende Bremspektrum und eine dritte in der Mitte dieser beiden gezeichnet. Diese kennzeichnet die mittlere Höhe des Peaks, der ausschließlich durch Ionisationsvorgänge der Anode entsteht, also abzüglich der darunter liegenden Bremsstrahlung. Von den Winkeln, die der mittleren Gerade jeweils am nächsten kommen, wird die Differenz (9) gebildet. Die zu einem Winkel gehörige Energie berechnet sich mit (2) und (4) über

$$E = h \frac{c}{\lambda} = \frac{hc}{2d \sin \theta}, \quad (10)$$

woraus sich für die zu den Halbwertsbreiten und zu den Winkeln maximaler Impulsrate gehörigen Energien

$$\begin{aligned} \Delta E_\alpha &= 3,6 \cdot 10^5 \text{ eV} \quad \text{und} \quad \Delta E_\beta = 3,7 \cdot 10^5 \text{ eV}, \\ E_\alpha &= 8,0 \text{ keV} \quad \text{und} \quad E_\beta = 8,9 \text{ keV} \end{aligned} \quad (11)$$

ergibt. Daraus resultiert das Auflösungsvermögen $A = E/\Delta E$ sowohl der K_α -, als auch der K_β -Linie:

$$A_\alpha = 0.022 \quad \text{und} \quad A_\beta = 0.024. \quad (12)$$

Auch in diesem Fall hat die Deutung dieses Werts Einfluss auf die Relevanz der Messfehlerrechnung der restlichen Auswertung, weshalb hier der Diskussion vorgegriffen wird: Das Auflösungsvermögen (12) ist so gering – das indiziert eine sehr genaue, wenig streuende Messung –, dass es an dieser Stelle wenig Sinn ergibt, statistische Fehler für die Lage der K_α - und K_β -Linie zu bestimmen. Sie würden vermutlich im nicht mehr signifikanten Zahlenbereich der Werte liegen, die sich aus den Messdaten berechnen, und wären dahingehend nicht mehr relevant für die weitere Datenverarbeitung. Deshalb ist es ausreichend, die Energiewerte für diese Energien ohne (statistischen) Messfehler anzugeben. Bestätigt wird diese Begründung anhand des Vergleichs mit den Literaturwerten in (8): Ein relativer Fehler würde sich ausschließlich aus der geringeren Anzahl an signifikanten Ziffern der experimentell bestimmten Werte ergeben. Gerundet auf dieselbe Anzahl an signifikanten Ziffern sind die Literaturwerte identisch mit den Messwerten.

Im folgenden Schritt werden die Abschirmkonstanten σ_1 , σ_2 und σ_3 bestimmt. Hierfür wird die Absorptionsenergie $E_{K,abs}$ benötigt, die mit der verwendeten Apparatur in dieser speziellen Durchführung nicht bestimmen wird. Deshalb sei hier der Literaturwert laut [7] mit

$$E_{K,abs} = (8,987\,96 \pm 0,000\,15) \text{ keV} \quad (13)$$

gegeben. Die Abschirmkonstanten berechnen sich über die Sommerfeld'sche Feinstrukturformel (5) mit $n = 1$, $m = 2$ und $l = 3$, bei der der Drehimpulsbeitrag vernachlässigt wird; es werden die Werte (11) und (13) für die Energien und $z = 29$ als Ordnungszahl verwendet:

$$E_{K,abs} = E_R(z - \sigma_1)^2 \quad \Rightarrow \sigma_1 = 3.3 \quad (14)$$

$$E_\alpha = E_R(z - \sigma_1)^2 - E_R \frac{1}{4} \cdot (z - \sigma_2)^2 \quad \Rightarrow \sigma_2 = 11.9 \quad (15)$$

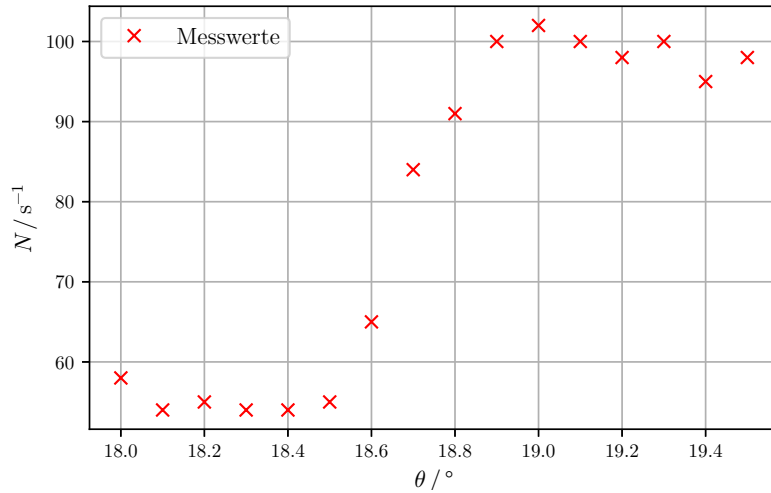
$$E_\beta = E_R(z - \sigma_1)^2 - E_R \frac{1}{9} \cdot (z - \sigma_3)^2 \quad \Rightarrow \sigma_3 = 21.4 \quad (16)$$

4.4 Das Absorptionsspektrum und die Absorptionskante

Im Folgenden werden die Absorptionskanten von insgesamt sechs Elementen ausgewertet. Zuerst wird die von Zink etwas ausführlicher berechnet, im Anschluss daran die restlichen Elemente in etwas abgekürzter Version, aber nach demselben Verfahren, welches nun folgt.

Die Zählrate der durch Zink durchgelassenen Photonen im Experiment ist in 6 graphisch dargestellt. Um die Relation zwischen Winkel, Energie und Absorption zu veranschauli-

Abbildung 6: Die Impulsrate N aufgetragen auf den Winkel θ des Absorbers Zink.



lichen, sind einmalig für das Element Zink die Impulsraten auf die zu den Winkeln gehörigen Energien – ganz nach (10) – in Abbildung 7 aufgetragen, als Pendant zur Abbildung 1 im Kapitel 2.4.

Die Anzahl der Photonen ist äquivalent mit der Energie, die auf das Zählrohr auftrifft, und somit auch die Impulsrate. Deshalb kann die Impulsrate im Folgenden als Äquivalent für die Intensität angenommen werden.

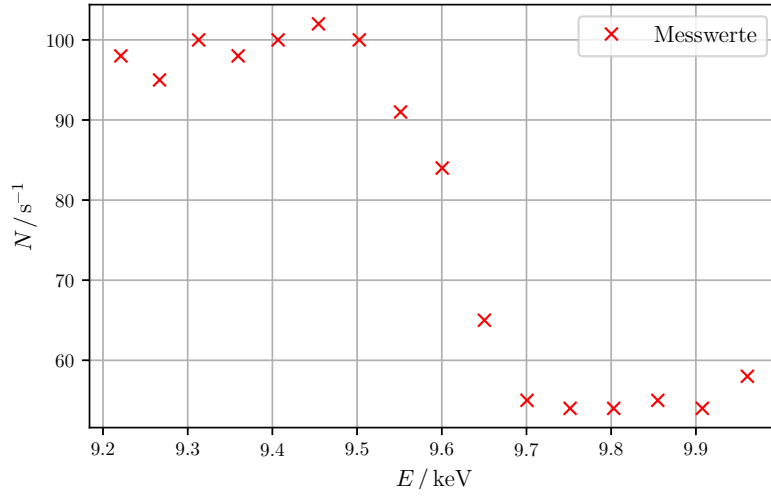
Für die Bestimmung der Absorptionsenergie wird die minimale und die maximale Intensität aus der Graphik abgelesen. Daraus wird der Mittelwert der beiden Werte gebildet und der zu dieser Intensität – beziehungsweise Impulsrate – gehörige Winkel aus der Graphik abgelesen. Der zu diesem ermittelten Winkel gehörige Energiewert stellt den experimentell bestimmten Wert für die Absorptionsenergie dar und wird über (10)

$$E_K = h \frac{c}{\lambda} = \frac{hc}{2d \sin \theta}$$

berechnet. Hieraus wird mithilfe Gleichung (5) die Abschirmkonstante der K-Kante – also $n = 1$ – bestimmt:

$$\sigma_K = z - \sqrt{\frac{E_K}{E_R} - \frac{\alpha^2 z^4}{4}}.$$

Abbildung 7: Die Impulsrate N aufgetragen auf die Energie E mit Zink als Absorber.



Die relative Abweichung, welche in 5 thematisiert wird, der Größe f_{exp} von dem Literaturwert f_{theo} wird ebenfalls berechnet; dafür wird auf Tabelle 2 zurückgegriffen.

$$\Delta f_{\text{exp}} = \frac{|f_{\text{exp}} - f_{\text{theo}}|}{f_{\text{theo}}}$$

Tabelle 4: Die experimentellen Werte für die Absorptionsenergien der sechs Elemente inklusive relativer Abweichungen und Zwischenergebnisse.

	N_{\min} / s^{-1}	N_{\max} / s^{-1}	\bar{N} / s^{-1}	$\bar{\theta} / ^\circ$	E_K / keV	σ_K	$\Delta E_K / \%$	$\Delta \sigma_K / \%$
Zn	54.0	102.0	78.0	18.67	9.62	3.62	0.55	2.10
Ga	66.0	122.0	94.0	17.35	10.3	3.68	0.54	2.07
Br	9.0	27.0	18.0	13.20	13.5	3.84	0.03	0.13
Rb	10.0	64.0	37.0	11.77	15.1	4.07	0.76	3.32
Sr	40.0	196.0	118.0	11.09	16.0	4.11	0.70	3.06
Zr	120.0	301.0	210.5	9.97	17.8	4.33	1.27	5.77

Für möglichst viel Übersichtlichkeit sind die ermittelten Werte und Zwischenergebnisse gebündelt in der Tabelle 4 dargestellt. Außerdem sind die verwendeten Graphiken gesammelt im Anhang zu finden.

4.5 Die Rydberg-Konstante

Im letzten Schritt der Auswertung wird die Rydberg-Energie beziehungsweise die Rydberg-Frequenz experimentell bestimmt. Hierfür wird das Moseley'sche Gesetz (6) zu einer

Geradengleichung zwischen der Wurzel der Energie $\sqrt{E_K}$ und der Ordnungszahl z

$$\sqrt{E_K} = \sqrt{hcR_\infty} \cdot (z - \sigma) \quad \rightarrow \quad y = m \cdot x + b \quad (17)$$

umgeformt, wodurch die Rydberg-Konstante R_∞ mittels linearer Regression ermittelt wird.

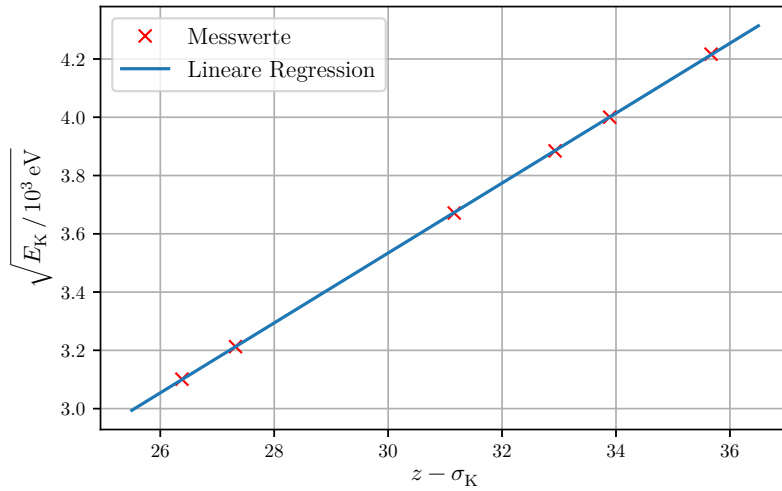
Mithilfe von [4], welches die Methode der kleinsten Quadrate verwendet, werden die Geradenparameter zu

$$m = 0,120 \pm 0,000 \sqrt{\text{keV}}$$

$$b = -0,065 \pm 0,006 \sqrt{\text{keV}}$$

bestimmt. Die zugehörige lineare Regression ist in Abbildung 8 zu sehen.

Abbildung 8: Die Wurzel der Energie aufgetragen auf die effektive Kernladungszahl und deren lineare Regression.



Für die Rydberg-Konstante ergibt sich der Wert

$$m = \sqrt{hcR_\infty} \quad \Leftrightarrow \quad R_\infty = \frac{m^2}{hc} = 1,16 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}.$$

Der experimentelle Wert hat einen absoluten Fehler – im Vergleich mit Tabelle 1 – von

$$F = (1,16 \cdot 10^7 - 1,097\,373\,156\,850\,8 \cdot 10^7) \frac{1}{\text{m}} = 0,06 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$$

woraus sich der relative Fehler zu

$$\Delta R_\infty = \frac{|F|}{R_{\infty, \text{theo}}} = 5.5 \%$$

ergibt.

5 Diskussion

Direkt zu Beginn wird die Bragg-Bedingung überprüft und eine Abweichung von 0,7 % festgestellt(4.2). Wäre die Abweichung signifikant größer, beispielsweise mehr als 3°, müsste davon ausgegangen werden, dass das Geiger-Müller-Zählrohr und der Kristall nicht so verdrillt sind, wie gewollt, und somit Verschiebungen oder Skalierungen des Winkels bei weiteren Messungen mit berücksichtigt werden müssten. Da jedoch die Fehlerquelle aus der alleinigen Tatsache eines verschobenen Winkels des Zählrohrs nicht ersichtlich ist – falsche Skalierung des Winkels oder Verschiebung um eine feste Konstante oder gänzlich mangelhafte Funktionstüchtigkeit –, wäre eine Auswertung an dieser Stelle nicht mehr sinnvoll gewesen. Da dies nicht der Fall ist, sind die Messwerte hinsichtlich des Messwinkels anscheinend valide und können normal ausgewertet werden.

Ebenso zeigt das in (12) bestimmte Auflösungsvermögen, dass die zu erwartenden statistischen Abweichungen gering sein müssen, wie erläutert, sodass eine Messfehlerrechnung entfällt aufgrund von verschwindenden Fehlern im nicht mehr signifikanten Zifferbereich. Nicht widerlegt wird diese Erkenntnis durch den im gleichen Schritt durchgeführte Vergleich mit den Literaturwerten für die Energien der K_α - und K_β -Linie.

Werden mithilfe der Literaturwerte (8) und mit (10) die von der Literatur her zu erwartenden Werte für den Glanzwinkel bestimmt, ergibt sich entsprechend

$$\theta_\alpha = 22,52^\circ \quad \text{und} \quad \theta_\beta = 20,14^\circ.$$

Die Abweichung zu den experimentellen Werten $\theta_\alpha = 22,5^\circ$ und $\theta_\beta = 20,2^\circ$ ist an dieser Stelle ebenfalls verschwindend gering.

Ebenfalls können die in (14) bis (16) aus den Energieniveaus berechneten Werte für die Abschirmkonstanten abgesehen von Rundungsabweichungen als korrekt angesehen werden.

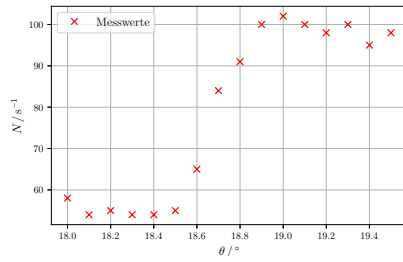
Eine ähnliche Genauigkeit schlägt sich in der Bestimmung der experimentellen Werte für die Absorptionskanten und die Abschirmkonstanten der verschiedenen Absorber nieder: Die maximalen relativen Abweichungen hat Zirkonium mit 1.27 % bei der Energie und mit 5.77 % bei der Abschirmkonstante. Am genauesten können die Werte für Brom bestimmt werden, bei dem die Abweichungen 0.03 % und 0.13 % sind.

Bei der Berechnung der Rydberg-Konstante R_∞ werden die Geradenparameter im Zusammenhang mit dem Moseley'schen Gesetz bestimmt und die sechs ermittelten Werte für die Absorptionskanten und Abschirmkonstanten der Materialien verwendet. Bemerkenswert ist hier die verschwindende Abweichung des Geradenparameters m im signifikanten Zahlenbereich, was die Konsistenz des Datensatzes nahelegt beziehungsweise bekräftigt. Die geringen, aber dennoch vorhandenen Abweichungen beispielsweise in Tabelle 4 lassen sich neben statistischen Streuungen in Verbindung mit der ebenfalls minimalen Abweichung des Winkels bei der Überprüfung der Bragg-Reflexion bringen. Eine kleine Ungenauigkeit bei der Einstellung der Winkel des Kristalls beziehungsweise des Zählrohrs ist gut möglich und kann hinreichend die relativen Abhängigkeiten erklären.

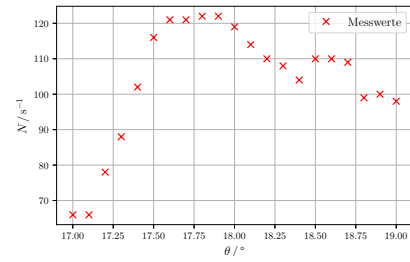
Abschließend kann zusammengefasst werden, dass die in 1 genannten Ziele mit Erfolg mithilfe des vorliegenden Experiments erreicht werden können. Alle relativen Abweichun-

gen lassen sich gut begründen, und viele aus Messwerten berechnete Größen lassen sich exakt mit den Literaturwerten in Verbindung bringen.

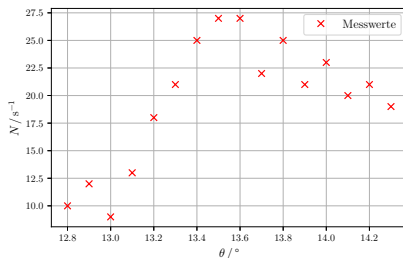
Anhang: Messdaten



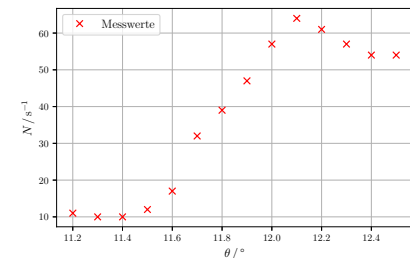
(a) Absorptionslinie von Zink.



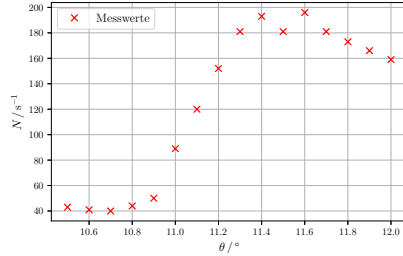
(b) Absorptionslinie von Gallium.



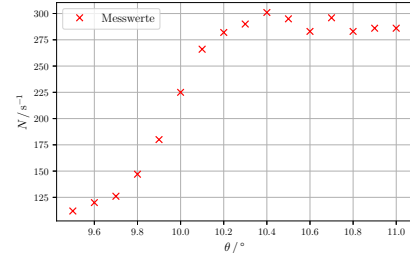
(a) Absorptionslinie von Brom.



(b) Absorptionslinie von Rubidium.



(a) Absorptionslinie von Strontium.



(b) Absorptionslinie von Zirkonium.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 4. Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. 4. Aufl. Springer, 2014.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V602: Röntgenemission und -absorption*. 2020.
- [3] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V603: Der Compton-Effekt*. 2020.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.

- [5] Friedrich Kohlrausch. *Praktische Physik 3*. 24. Aufl. B. G. Teubner Stuttgart 1996, 1996.
- [6] Joachim Herz Stiftung LEIFIphysik. *Röntgenstrahlung*. (Besucht am 14.05.2020).
- [7] National Institute of Standards und Technology (NIST). *X-Ray Transition Energies Database*. (Besucht am 09.05.2020).

Index der Kommentare

- 1.1 Grüne Kommentare sind Lob, Anmerkungen oder Kommentare. Diese müssen nicht angepasst oder verändert werden, sondern sind lediglich meine subjektive Meinung.

Blaue Kommentare sind Kritikpunkte und Korrekturen. Diese sollen verbessert werden, und sind nach dem vorgegeben Korrekturschema.
- 3.1 Das musst du nicht machen. Es reicht bei einer Formel zB (1) zu sagen "Die entsprechende minimal mögliche Wellenlänge ist mit gegeben, wobei c die Lichtgeschwindigkeit, h das Planksche Wirkungsquantum und e die Elementarladung darstellt."
- 5.1 Bildunterschriften, Tabellenüberschriften
- 8.1 Abweichungen und Theoriewerte nur in der Diskussion.