

Versuch Nr. 101

Das Trägheitsmoment

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.1.2020

Abgabe: 28.1.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Einleitung	3
1.2	Trägheitsmoment	3
2	Durchführung	4
2.1	Einleitung	4
2.2	Apparatekonstante	5
2.3	Eigenträgheit	5
2.4	Trägheit der Körper	5
3	Auswertung	5
3.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße	5
3.2	Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse	6
3.3	Trägheitsmomente verschiedener Körper	8
3.3.1	Der kleine Zylinder	9
3.3.2	Der große Zylinder	10
3.3.3	Die Holzpuppe in der ersten Pose	10
3.3.4	Die Holzpuppe in der zweiten Pose	12
4	Diskussion	12
	Anhang: originale Messdaten	12
	Literatur	12

1 Theorie

1.1 Einleitung

Im folgenden Experiment soll das Trägheitsmoment dreier unterschiedlicher Körper bestimmt werden. Zusätzlich wird ein Körper verwendet, welcher seine Geometrie verändern kann, aber seine Masse beibehält, wodurch geometrische Beziehungen zum Trägheitsmoment untersucht werden können.

1.2 Trägheitsmoment ¹

Analog zur Masse in der Translation wird für Rotationsbewegungen das Massenträgheitsmoment I verwendet. Für eine vollständige Beschreibung der Rotationsdynamik werden zusätzlich die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ und das Drehmoment M benötigt. Letzteres ist das Äquivalent der Kraft F in der Translation. Im Vergleich wird die Beziehung deutlich

$$F = ma \quad , \quad I = M\dot{\omega} . \quad (1)$$

Dabei gilt für das Massenträgheitsmoment

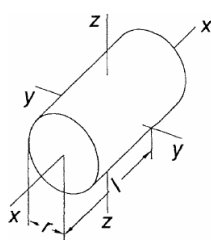
$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

für diskrete und

$$I = \int r^2 dm \quad (2)$$

für infinitesimale Massen.

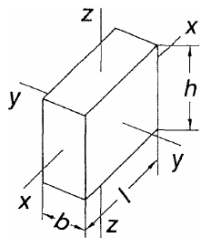
Da sich (2) aus den Massenabständen bezüglich einer Drehachse errechnet, ist die Bestimmung für einfache Geometrien nicht aufwendig und meist in Formelsammlungen zu finden. Bei komplexeren Körpern jedoch ist dies nicht mehr der Fall, sodass dieser mit den einfacheren Geometrien approximiert wird. Hilfreiche Referenzen sind Zylinder, dünne, lange Stäbe, Kugeln, Quader und Hohlzylinder, wobei Stäbe und Hohlzylinder Spezialfälle eines Zylinders darstellen.



Vollzylinder	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
dünne Scheibe ($l \ll r$)	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4}mr^2$
dünner Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{12}ml^2$

Abbildung 1: Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders.[2]

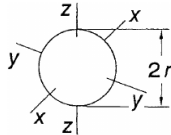
¹Unter Verwendung der Quellen [2], [1]



Quader

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12} m(b^2 + h^2) \\ J_y &= \frac{1}{12} m(l^2 + h^2) \\ J_z &= \frac{1}{12} m(l^2 + b^2) \end{aligned}$$

Abbildung 2: Das Massenträgheitsmoment eines Quaders.[2]



Kugel, massiv

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mr^2$$

dünne Kugelschale

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} mr^2$$

Abbildung 3: Das Massenträgheitsmoment einer Kugel.[2]

In den Abbildungen gilt $J \equiv I$.

Es ist nicht immer der Fall, dass die Rotationsachse auch eine der oben angezeigten Körperachsen entspricht. Um das Massenträgheitsmoment dennoch ohne aufwendige Integration bestimmen zu können, wird der *Steiner'sche Satz* angewendet. Wenn I für eine der Trägheitsachsen bekannt ist, wird der gesamte Körper parallel zu dieser Achse verschoben und mit der Gleichung

$$I = I_U + ma^2 \quad (3)$$

berechnet. Hier entspricht I_U dem ursprünglichen Massenträgheitsmoment und a dem Abstand zur Achse, um die parallel verschoben wird.

2 Durchführung

2.1 Einleitung

Ziel des Versuchs ist es, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu bestimmen. Hierfür wird ein Stativ verwendet, an dem eine Spiralfeder angebracht ist. Die Spiralfeder ist nach oben beziehungsweise unten ausgerichtet. In der Mitte der Feder befindet sich eine zylinderförmige Halterung, welche nach oben gerichtet ist und sich frei bewegen kann. Das äußere Ende ist an dem Stativ angebracht, welches U-förmig um die Spiralfeder herum führt. Auf dem Stativ befindet sich eine Scheibe mit einem Loch, an der man Winkel ablesen kann. Durch das Loch führt die Halterung, welche mittig aus der Feder hervorgeht. Mit dieser Konfiguration können Objekte an der Halterung angebracht und Auslenkungen an der Lochscheibe abgelesen werden.

2.2 Apparatekonstante

Zu Beginn werden Messungen durchgeführt, um die Apparatekonstante D zu bestimmen. Dazu wird eine lange, leichte Stange horizontal an der Halterung befestigt. Daraufhin wird die Winkelscheibe so ausgerichtet, dass sich Auslenkungen genau ablesen lassen. Mit einer Federwaage, welche Kräfte bis zu 1 N misst, wird die Stange nun an einer anfangs beliebigen Stelle ausgelenkt. Dabei ist es wichtig, dass die Federwaage orthogonal an der Stange zieht, und nicht abgewinkelt. So muss kein Winkel beim Betrag des Drehmoments $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ berücksichtigt werden. Die Kraft wird in Abhängigkeit des Winkels aufgeschrieben und die Messung insgesamt zehn mal durchgeführt. Hierbei wird ausschließlich die Auslenkung beziehungsweise die Kraft, jedoch nicht der Abstand zur Drillachse variiert. Es werden also alle Messungen mit demselben Abstand durchgeführt.

2.3 Eigentragheit

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der Drillachse selbst werden zwei Gewichte verwendet, deren Masse zunächst gewogen wird. Die Massen sind Hohlzylinder und besitzen eine Feststellschraube, um sie auf der Stange fixieren zu können. Es wird an je einer Seite der Stange eine Masse angebracht. Wenn sie fixiert sind, wird der Abstand zur Drillachse notiert und die Stange anschließend sehr leicht, um etwa 10° - 20° ausgelenkt. Nach dem Loslassen wird die Schwingungsdauer der Stange gemessen. Dies wird insgesamt zehn mal unter Variation des Abstands der Massen zur Drehachse durchgeführt.

2.4 Trägheit der Körper

Für die Messungen der einzelnen Testkörper wird immer gleich vorgegangen. Der Körper wird an der Halterung befestigt und anschließend um 10° - 20° ausgelenkt. Daraufhin wird die Schwingungsdauer gemessen. Dies wird fünf Mal wiederholt. Gemessen werden die Werte für zwei beliebige Körper und für eine menschliche Gliederpuppe aus Holz. Alle Testkörper werden gewogen und ausgemessen. Die Holzpuppe kann beliebig klein angenähert, jedoch mindestens in sechs Einzelteile aufgeteilt werden; Kopf, zwei Arme, zwei Beine, Torso. Die Holzfigur wird in verschiedene Posen gebracht, zu der jeweils fünf Messwerte nach obiger Beschreibung aufgenommen werden. Zudem wird die Geometrie der Posen vermessen und notiert, um im Anschluss das Trägheitsmoment bestimmen zu können.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Messung wird mit einem senkrechten Abstand von $r = 4,0 \text{ cm}$ durchgeführt. Der Auslenkwinkel φ und die aufgewendete Kraft F sind in 1 dargestellt, ebenso wie die sich daraus ergebenden Werte für die Winkelrichtgröße D . Sie berechnet sich, wie aus der

Theorie zu entnehmen ist, über

$$D = \frac{Fr}{\varphi} . \quad (4)$$

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Winkelrichtgröße.

φ	φ / π	F / N	$D / 10^{-3} \text{ N m}$
26°	0,14	0,19	17,3
30°	0,17	0,21	15,7
37°	0,21	0,29	17,6
45°	0,25	0,41	20,9
60°	0,33	0,49	18,9
70°	0,39	0,61	19,9
81°	0,45	0,70	19,8
93°	0,52	0,74	18,1
100°	0,56	0,91	20,7
110°	0,61	0,97	20,2

Somit ergibt sich als experimenteller Wert $D = (18,9 \pm 1,6) \cdot 10^{-3} \text{ N m}$ für die Winkelrichtgröße. Die Abweichung der Größe berechnet sich über

$$\Delta D = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2} \quad (5)$$

mit dem arithmetischen Mittel \bar{D} .

3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

Im Folgenden sei die Annahme eines nahezu masselosen Stabs, an dem zwei Punktmassen – demnach ohne Ausdehnung – gleicher Masse $m = 222,89 \text{ g}$ befestigt sind. In 2 sind die Messwerte entsprechend dargestellt. Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Quadraten der Periode T und dem Abstand a der Massen:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + m(a_1^2 + a_2^2)) =: \frac{4\pi^2}{D} (I_D + ma^2) \quad (6)$$

Nun werden diese Werte in einem Diagramm aufgetragen. Mithilfe linearer Regression lässt sich aus dem Y-Achsenabschnitt b der Eigenträgheitsmoment I_D bestimmen. Die Steigung c ergibt sich unter Vergleich mit (6) aus

$$y = b + cx \quad (7)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + ma^2) \quad (8)$$

$$\Rightarrow y = T^2, \quad b = \frac{4\pi^2}{D} I_D, \quad c = \frac{4\pi^2}{D} m, \quad x = a^2 \quad (9)$$

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D .

a_1 / cm	a_2 / cm	$(a_1^2 + a_2^2) / \text{cm}^2$	T / s	T^2 / s^2
4,5	5,5	50,5	2,50	6,25
6,5	7,5	98,5	2,93	8,58
8,5	9,5	162,5	3,21	10,30
10,5	11,5	242,5	3,83	14,67
12,5	13,5	338,5	4,16	17,31
14,5	15,5	450,5	4,70	22,09
16,5	17,5	578,5	5,27	27,77
18,5	19,5	722,5	5,79	33,52
20,5	21,5	882,5	6,27	39,31
22,5	23,5	1058,5	6,78	45,97

Unter Zuhilfenahme von *Python 3.7.3* wird die lineare Regression durchgeführt, wie in Abbildung 4 zu sehen ist, und es ergibt sich der y-Achsenabschnitt $b = (4,42 \pm 0,25) \text{ s}^2$ und eine Steigung von $c = (396,0 \pm 4,4) \text{ kg/J}$. Daraus lässt sich das Eigenträgheitsmoment zu

$$I_D = \frac{D}{4\pi^2} b = \frac{m}{c} b = (2,49 \pm 0,14) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (10)$$

bestimmen.

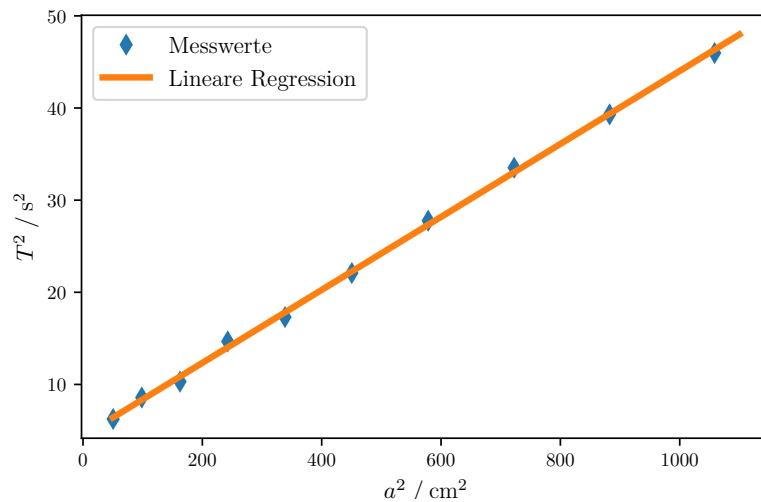
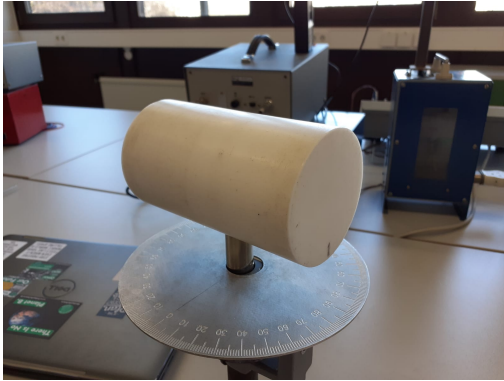


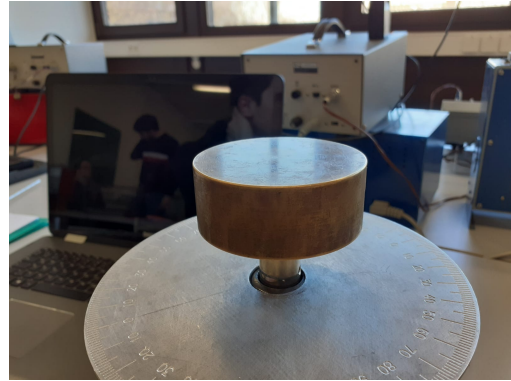
Abbildung 4: Lineare Regression zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments.

3.3 Trägheitsmomente verschiedener Körper

In den Tabellen 3 und 4 sind die Messwerte aufgetragen, die zur Bestimmung der Trägheitsmomente zweier verschiedener Zylinder und einer Holzpuppe in zwei unterschiedlichen Posen aufgenommen worden sind. In 4 berechnet sich der Messfehler ebenfalls über (5).

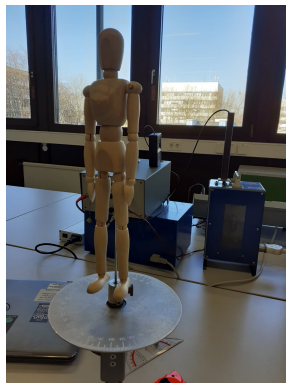


(a) Der große Zylinder.

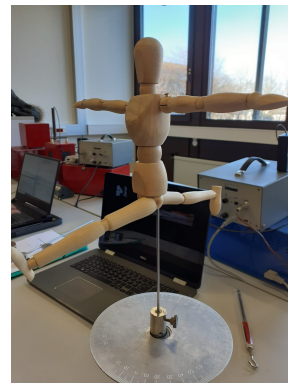


(b) Der kleine Zylinder.

Abbildung 5: Die verwendeten Zylinder und ihre Drehachsen im Experiment.



(a) Pose 1.



(b) Pose 2.

Abbildung 6: Die Holzpuppe in zwei verschiedenen Stellungen.

Tabelle 3: Messwerte aller Schwingungsdauern.

$T_{\text{Zyl,gro\ss}} / \text{s}$	$T_{\text{Zyl,klein}} / \text{s}$	$T_{\text{Pose1}} / \text{s}$	$T_{\text{Pose2}} / \text{s}$
1.08	2.31	0.38	0.92
1.27	2.23	0.41	0.89
1.13	2.17	0.43	0.94
1.18	2.30	0.39	0.91
1.16	2.26	0.41	0.91

Tabelle 4: Messunsicherheiten aller Schwingungsdauern.

	T / s
großer Zylinder	$2,25 \pm 0,05$
kleiner Zylinder	$1,16 \pm 0,06$
Holzfigur Pose 1	$0,40 \pm 0,02$
Holzfigur Pose 2	$0,91 \pm 0,02$

3.3.1 Der kleine Zylinder

Tabelle 5: Maße des kleinen Zylinders und der zugehörigen Halterung.

Zylinder	Halterung
m 1119,4 g	h 1,8 cm
h 3,0 cm	d 0,6 cm
d 7,45 cm	

Das erwartete Trägheitsmoment anhand der geometrischen Abmessungen ist

$$m_{\text{ges}} = 1119,4 \text{ g}, \quad m_{\text{Zyl}} = m_{\text{ges}} \frac{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}}}{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}} + d_{\text{Halt}}^2 h_{\text{Halt}}} = 1115,1 \text{ g} \quad (11)$$

$$m_{\text{Halt}} = m_{\text{ges}} - m_{\text{Zyl}} = 4,3 \text{ g} \quad (12)$$

$$I_{\text{kl,geo}} = \frac{1}{2} m_{\text{Zyl}} \frac{d_{\text{Zyl}}^2}{4} + \frac{1}{2} m_{\text{Halt}} \frac{d_{\text{Halt}}^2}{4} = 7,74 \text{ kg cm}^2. \quad (13)$$

Wird hingegen die gemittelte Periode und die Winkelrichtgröße inklusive der Messfehler verwendet, um über

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (14)$$

das Trägheitsmoment zu berechnen, ergibt sich

$$I'_{\text{kl,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} - I_{\text{D}} = (6,44 \pm 0,55) \text{ kg cm}^2. \quad (15)$$

Von diesem Wert müsste eigentlich noch das Trägheitsmoment der Drillachse von $I_D = (2,49 \pm 0,14) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ abgezogen werden. Da sich für diesen Fall jedoch ein negativer Wert für den kleinen Zylinder ergeben würde und dies sehr unphysikalisch ist, kannes sich hierbei nur um einen Messfehler handeln, auf den nochmal ausführlicher in der Diskussion eingegangen wird.

3.3.2 Der große Zylinder

Dasselbe Verfahren wird nun für den großen Zylinder angewendet, mit dem Unterschied, dass die Drehachse hier senkrecht zur Symmetrieachse des Zylinders steht und deshalb eine etwas abgewandelte, in der Theorie erläuterte Formel verwendet wird.

Tabelle 6: Maße des großen Zylinders und der zugehörigen Halterung.

Zylinder		Halterung	
m	1525,6 g	h	1,4 cm
h	13,95 cm	d	0,55 cm
d	7,95 cm		

$$m_{\text{ges}} = 1525,6 \text{ g}, \quad m_{\text{Zyl}} = m_{\text{ges}} \frac{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}}}{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}} + d_{\text{Halt}}^2 h_{\text{Halt}}} = 1524,9 \text{ g} \quad (16)$$

$$m_{\text{Halt}} = m_{\text{ges}} - m_{\text{Zyl}} = 0,7 \text{ g} \quad (17)$$

$$I_{\text{gr,geo}} = m_{\text{Zyl}} \left(\frac{d_{\text{Zyl}}^2}{16} + \frac{h_{\text{Zyl}}^2}{12} \right) + \frac{1}{2} m_{\text{Halt}} \frac{d_{\text{Halt}}^2}{4} = 30,75 \text{ kg cm}^2 \quad (18)$$

$$I'_{\text{gr,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (24,24 \pm 2,32) \text{ kg cm}^2 \quad (19)$$

Auch hier ergibt sich nach Abzug des Eigenträgheitsmoments ein negativer, unphysikalischer Wert für das Trägheitsmoment, dessen mögliche Ursachen im folgenden Kapitel diskutiert werden.

3.3.3 Die Holzpuppe in der ersten Pose

Zuerst wird das sich aus der Periodendauer ergebende Trägheitsmoment wie bei den Zylindern berechnet:

$$I'_{\text{P1,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (0,77 \pm 0,10) \text{ kg cm}^2 \quad (20)$$

$$I_{\text{P1,T}} = I'_{\text{P1,T}} - I_D < 0 \quad (21)$$

Nun wird anhand geometrischer Annäherungen das Trägheitsmoment bestimmt: Die Masse der Puppe beläuft sich auf einen Wert von $m = 116,29$ g. Die Beine werden als je zwei Zylinder – Ober- und Unterschenkel – mit einem Abstand von etwa $a_{\text{Beine}} = 1,25$ cm zwischen Dreh- und Symmetrieachse angenähert.

$$l_{\text{Ober}} = 6,0 \text{ cm} \quad l_{\text{Unter}} = 7,0 \text{ cm} \quad (22)$$

$$d_{\text{Ober}} = 1,8 \text{ cm} \quad d_{\text{Unter}} = 1,6 \text{ cm} \quad (23)$$

$$V_{\text{Ober}} = 15,3 \text{ cm}^3 \quad V_{\text{Unter}} = 14,1 \text{ cm}^3 \quad (24)$$

Die Füße werden als zwei liegende, entlang der Symmetrieachse durchgeschnittene Zylinder betrachtet, die den gleichen Abstand zur Drehachse wie die Beine haben: $a_{\text{Füße}} = a_{\text{Beine}}$.

$$l_{\text{Fuß}} = 4,2 \text{ cm} \quad R_{\text{Fuß}} = 0,7 \text{ cm} \quad (25)$$

$$V_{\text{Fuß}} = 6,5 \text{ cm}^3 \quad (26)$$

Die Symmetrieachse des Beckens, des Torsos und des kugelförmige Verbindungsstück, sowie des Kopf falle mit der Drehachse zusammen. Das Becken wird als aufrecht stehender Zylinder angesehen:

$$R_{\text{Becken}} = 2,0 \text{ cm} \quad h_{\text{Becken}} = 3,3 \text{ cm} \quad (27)$$

$$V_{\text{Becken}} = 41,5 \text{ cm}^3 \quad (28)$$

Zwischen dem als Quader angesehenen Torso und dem Becken befindet sich eine Kugel, die oben und unten jeweils um die gleiche Differenz abgeschnitten ist.

$$b_{\text{Torso}} = 4,0 \text{ cm} \quad h_{\text{Torso}} = 5,0 \text{ cm} \quad (29)$$

$$t_{\text{Torso}} = 4,7 \text{ cm} \quad V_{\text{Torso}} = 94 \text{ cm}^3 \quad (30)$$

$$R_{\text{Kugel}} = 1,4 \text{ cm} \quad h_{\text{Kugel}} = 1,8 \text{ cm} \quad (31)$$

$$(32)$$

$$V_{\text{Kugel}} = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=\arccos \frac{h}{2R}}^{\pi-\arccos \frac{h}{2R}} r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr + 2 \cdot \frac{1}{3} X_{\text{Grundfläche}} Y_{\text{Höhe}} \quad (33)$$

$$= \frac{1}{3} R^3 2 \frac{h}{2R} 2\pi + 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\pi \left(R^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) \right) \frac{h}{2} \quad (34)$$

$$= \frac{2}{3} \pi h R^2 + \frac{1}{3} \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{12} \right) \quad (35)$$

$$= 9,6 \text{ cm}^3 \quad (36)$$

Der längliche Kopf wird als umgedrehter Kegelstumpf genähert.

$$h_{\text{Kopf}} = 5,0 \text{ cm} \quad R_{\text{oben}} = 1,9 \text{ cm} \quad R_{\text{unten}} = 1,4 \text{ cm} \quad (37)$$

$$V_{\text{Kopf}} = V_{\text{ges}} - V_{\text{diff}} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{h}{R_o - R_u} \pi R_o^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{h R_o}{R_o - R_u} - h \right) \pi R_u^2 \quad (39)$$

$$= 9,1 \text{ cm}^3 \quad (40)$$

Die zylinderförmigen Arme haben einen durchschnittlichen Abstand von $a_{\text{Arme}} = 3,0 \text{ cm}$ zur Drehachse.

$$l_{\text{Ober}} = 5,5 \text{ cm} \quad l_{\text{Unter}} = 4,5 \text{ cm} \quad l_{\text{Hand}} = 3,0 \text{ cm} \quad (41)$$

$$R_{\text{Ober}} = 0,75 \text{ cm} \quad R_{\text{Unter}} = 0,75 \text{ cm} \quad R_{\text{Hand}} = 0,75 \text{ cm} \quad (42)$$

$$V_{\text{Ober}} = 9,7 \text{ cm}^3 \quad V_{\text{Unter}} = 8,0 \text{ cm}^3 \quad V_{\text{Hand}} = 5,3 \text{ cm}^3 \quad (43)$$

So, es ist zu spät, ich kann jetzt das nicht noch fertig machen. Werde erst morgen Abend wieder dazu kommen. Weiteres Vorgehen wäre jetzt: Teilmassen der Gliedmaßen/Körperteile bestimmen mittels Dreisatz und dann die zugehörigen Trägheitsmomente ggf. mit Satz von Steiner. Kann ich auch machen, wenn du dich vorher schon daran setzt, kannst du dich ja an Pose 2 machen oder so... ich glaube, wenn das ein und dieselbe Person macht, ist es einfacher, den Überblick zu behalten, was man sich wo wie gedacht hat :) Frohes Schaffen!

3.3.4 Die Holzpuppe in der zweiten Pose

Der sich aus der Periodendauer ergebende Trägheitsmoment ist:

$$I'_{\text{P2,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (4,0 \pm 0,4) \text{ kg cm}^2 \quad (44)$$

$$I_{\text{P2,T}} = I'_{\text{P2,T}} - I_{\text{D}} < 0 \quad (45)$$

4 Diskussion

Anhang: originale Messdaten

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V353: RC-Kreise*. 2019.
- [2] Ekbert Hering, Rolf Martin und Martin Stohrer. *Taschenbuch der Mathematik und Physik*. 6. Aufl. Springer Vieweg, 2017.