

Versuch Nr. 903

Dopplersonographie

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.07.2020

Abgabe: 21.07.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Zielsetzung | 3 |
| 2 Theorie | 3 |
| 3 Durchführung | 3 |
| 4 Auswertung | 3 |
| 4.1 Vorbereitung und technische Daten | 3 |
| 4.2 Die Strömungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Doppler-Winkels . . . | 3 |
| 4.3 Strömungsprofil der Doppler-Flüssigkeit | 6 |
| 5 Diskussion | 10 |
| Anhang: Messdaten | 11 |
| Literatur | 11 |

1 Zielsetzung

2 Theorie

3 Durchführung

4 Auswertung

4.1 Vorbereitung und technische Daten

Tabelle 1: Technische Daten.

| Medium | Größe | Variable | Wert |
|---------------|-----------------------|----------|-------------------------|
| Flüssigkeit | Dichte | ρ | 1,15 g/cm ³ |
| | Schallgeschwindigkeit | c_L | 1800 m/s |
| | Viskosität | η | $12 \cdot 10^{-3}$ Pa s |
| Prisma | Schallgeschwindigkeit | c_P | 2700 m/s |
| | Vorlaufstrecke | l | 30,7 mm |
| Strömungsrohr | Innendurchmesser | d_i | 10 mm |
| | Außendurchmesser | d_a | 15 mm |

Das verwendete Prisma hat drei verschiedene (Prisma-)Winkel θ , unter denen die Strömung in den Rohren untersucht wird. Der daraus resultierende Doppler-Winkel α wird über

$$\alpha = 90^\circ - \arcsin\left(\sin \theta \cdot \frac{c_L}{c_P}\right)$$

berechnet. Die Kenndaten c_L und c_P sind in Tabelle 1 zu finden. Die Werte für die Winkel sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Tabelle 2: Prisma- und Doppler-Winkel.

| Prisma-Winkel θ | Doppler-Winkel α |
|------------------------|-------------------------|
| 15° | 80,064° |
| 30° | 70,529° |
| 45° | 61,874° |

4.2 Die Strömungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Doppler-Winkels

Die aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 3 zu finden. Der Rechner für die Datenaufnahme zeigt jeweils zwei Werte für die Frequenzverschiebung an: Zum einen die maximale, zum anderen die gemittelte Frequenzdifferenz. Beide Werte sind für die Auswertung

Tabelle 3: Messwerte der Frequenzverschiebungen in Abhängigkeit des Prisma-Winkels θ .

| rpm | $\Delta\nu_{\max} / \text{Hz}$ | | | $\Delta\nu_{\text{mean}} / \text{Hz}$ | | |
|------|--------------------------------|-----|------|---------------------------------------|-----|------|
| | 15° | 30° | 45° | 15° | 30° | 45° |
| 2000 | 90 | 120 | -105 | 49 | 73 | -61 |
| 2800 | 94 | 235 | -145 | 61 | 134 | -85 |
| 3600 | 135 | 375 | -220 | 85 | 208 | -122 |
| 4400 | 200 | 555 | -330 | 110 | 293 | -165 |
| 5200 | 290 | 820 | -470 | 146 | 415 | -232 |

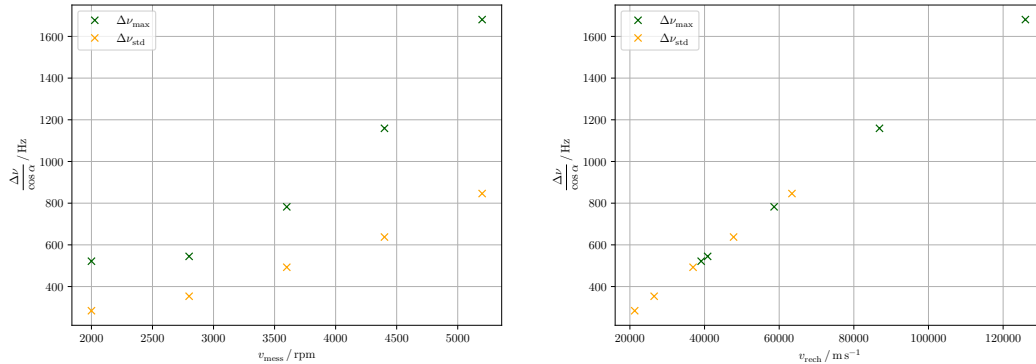
aufgenommen worden, um vergleichen zu können, welche eine stärkere experimentelle Aussage zulassen.

Die Zentrifugalpumpe gibt hierbei ihre Umdrehungen pro Zeiteinheit in rpm (*revolutions per minute*) an; es wird erwartet, dass die Umdrehungszahl proportional zur Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit ist. In den Abbildungen 1a, 2a und 3a sind die Frequenzverschiebungen gegen die Umdrehungszahl aufgetragen. In den nebenstehenden Abbildungen 1b, 2b und 3b ist jeweils die Frequenzverschiebung gegen die Strömungsgeschwindigkeit v aufgetragen, die über die Formel

$$\Delta\nu = 2\nu_0 \frac{v}{c} \cos \alpha$$

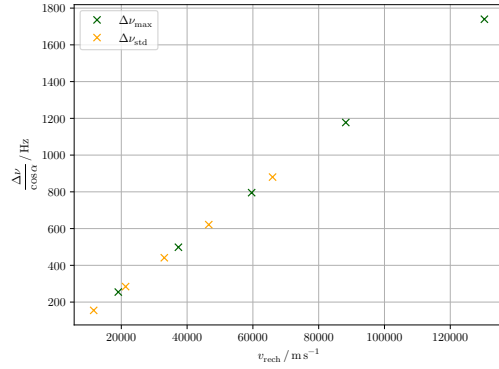
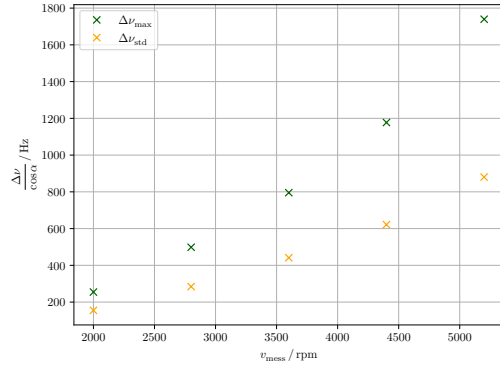
berechnet wird. Verwendet wird eine 2 MHz-Sonde, deshalb ist $\nu_0 = 2 \text{ MHz}$.

Aufgrund des als proportional angenommenen Zusammenhangs zwischen der Drehzahl der Pumpe und der Strömungsgeschwindigkeit wird angenommen, dass die Messpunkte in den Graphiken 1, 2 und 3 einen ähnlichen Verlauf haben.



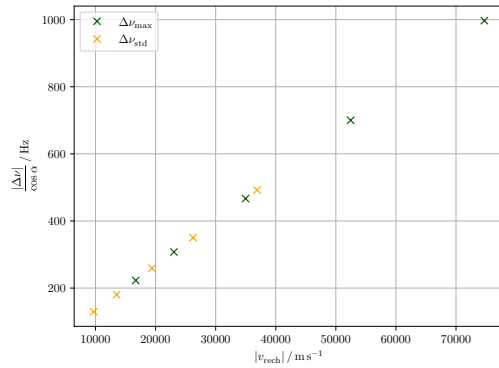
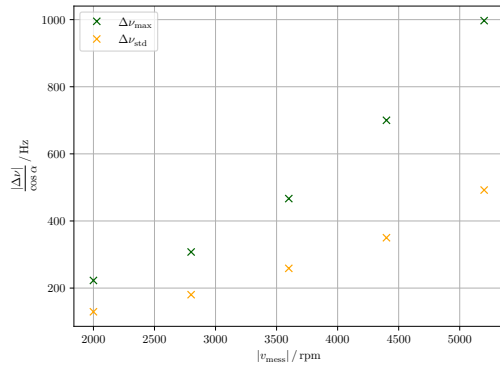
(a) Mit der Geschwindigkeit, die durch die Zentrifugalpumpe gegeben wird. (b) Theoretisch berechnete Strömungsgeschwindigkeit.

Abbildung 1: Graphiken zum Prisma-Winkel $\theta = 15^\circ$.



- (a) Mit der Geschwindigkeit, die durch die Zentri-fugalpumpe gegeben wird. (b) Theoretisch berechnete Strömungsgeschwindigkeit.

Abbildung 2: Graphiken zum Prisma-Winkel $\theta = 30^\circ$.



- (a) Mit der Geschwindigkeit, die durch die Zentri-fugalpumpe gegeben wird. (b) Theoretisch berechnete Strömungsgeschwindigkeit.

Abbildung 3: Graphiken zum Prisma-Winkel $\theta = 45^\circ$.

4.3 Strömungsprofil der Doppler-Flüssigkeit

Die aufgenommenen Messwerte für die verschiedenen Leistungen 70 % und 45 % sind in den Tabellen 4 und 5 zusammengefasst. Die Aufträge der Geschwindigkeit und der Intensität gegen die Messtiefe sind entsprechend in den Abbildungen 4 und 5 zu sehen. Das Dopplerprisma, welches eine Vorlaufstrecke von $l = 30,7 \text{ mm}$ hat entsprechend der Relation für Acryl $4 \mu\text{s} \hat{=} 10 \text{ mm}$ eine Eindringtiefe von $12,3 \mu\text{s}$. Entsprechend wird die Messtiefe bei einer Eindringtiefe von $12,0 \mu\text{s}$ gestartet. Bei der Betrachtung der Messwerte ist noch zu beachten, dass die Rohre ebenfalls eine Ausdehnung (Rohrwand) von 5 mm haben (vgl. Tabelle 1). Das Rohr hat einen Innendurchmesser von 10 mm , dementsprechend hat die Flüssigkeit nach $4 \mu\text{s} \hat{=} 6 \text{ mm}$ eine Messtiefe von $6,7 \text{ mm}$.

Tabelle 4: Messwerte bei einer Pumpleistung von 70 %.

| Messtiefe in μs | Strömungsgeschwindigkeit in cm/s | Streuintensität in $10^3 \text{ V}^2/\text{s}$ |
|----------------------------|---|--|
| 12.0 | 44.6 | 19 |
| 12.5 | 44.6 | 60 |
| 13.0 | 54.1 | 115 |
| 13.5 | 63.6 | 170 |
| 14.0 | 73.2 | 230 |
| 14.5 | 85.9 | 270 |
| 15.0 | 89.1 | 300 |
| 15.5 | 92.3 | 330 |
| 16.0 | 85.9 | 400 |
| 16.5 | 70.0 | 450 |
| 17.0 | 57.3 | 450 |
| 17.5 | 47.7 | 310 |
| 18.0 | 44.6 | 200 |
| 18.5 | 50.9 | 110 |
| 19.0 | 60.5 | 90 |
| 19.5 | 60.5 | 100 |

Das Strömungsprofil einer Röhre mit Radius R ist gegeben durch

$$v(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}, \quad (1)$$

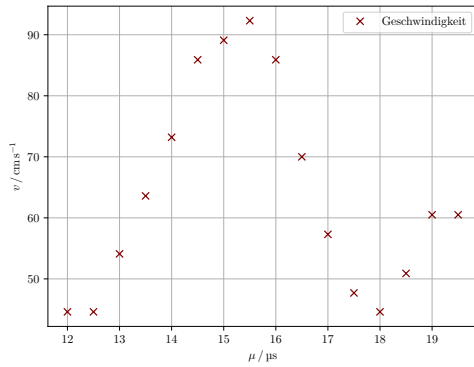
wobei r den Abstand zur Symmetrieachse des Rohrs angibt (also immer $r > 0$). Ist die Strömung laminar (Reynoldszahl kleiner als etwa 2000), ist die Geschwindigkeitskurve parabelförmig, also $n = 2$. n ist schwach von der Reynoldszahl abhängig; außerdem hat die Rauheit der Rohrrinnenwand Einfluss auf die Größe der Zahl. Für eine sehr große Reynoldszahl $> 2 \cdot 10^6$ konvergiert der invertierte Exponent n gegen $n = 10$.

Die Reynoldszahl einer Röhre berechnet sich über

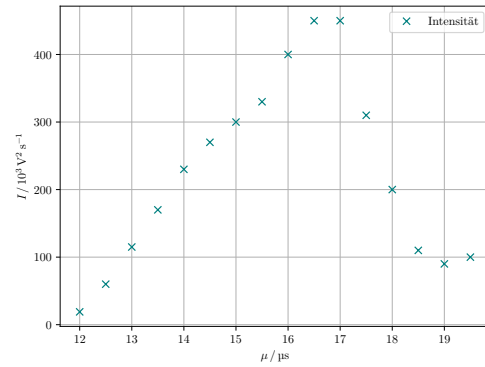
$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad (2)$$

Tabelle 5: Messwerte bei einer Pumpleistung von 45 %.

| Messtiefe in μs | Strömungsgeschwindigkeit in cm/s | Streuintensität in $10^3 \text{ V}^2/\text{s}$ |
|----------------------------|---|--|
| 12.0 | 47.7 | 7 |
| 12.5 | 27.0 | 30 |
| 13.0 | 27.0 | 80 |
| 13.5 | 31.8 | 100 |
| 14.0 | 35.0 | 170 |
| 14.5 | 38.2 | 230 |
| 15.0 | 41.4 | 250 |
| 15.5 | 41.4 | 280 |
| 16.0 | 38.2 | 300 |
| 16.5 | 31.8 | 330 |
| 17.0 | 28.6 | 300 |
| 17.5 | 25.5 | 200 |
| 18.0 | 25.5 | 100 |
| 18.5 | 28.6 | 50 |
| 19.0 | 30.0 | 50 |
| 19.5 | 30.0 | 60 |

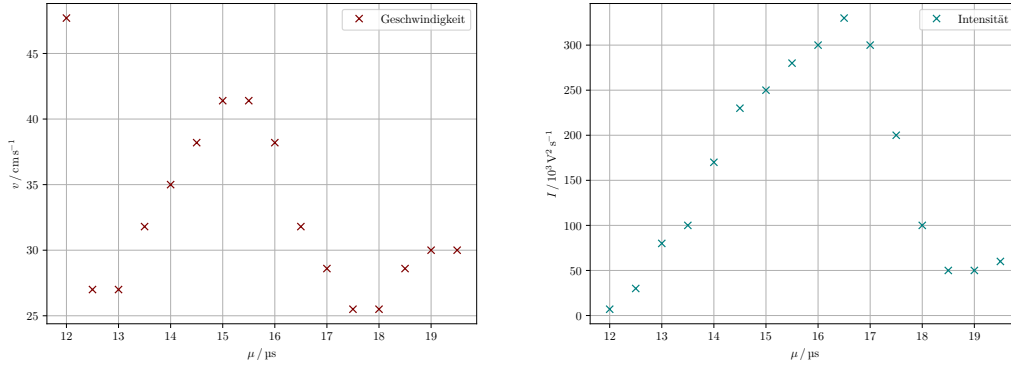


(a) Die Geschwindigkeit.



(b) Die Streuintensität.

Abbildung 4: Die bei 70 % Pumpleistung aufgenommenen Messpunkte.



(a) Die Geschwindigkeit.

(b) Die Streuintensität.

Abbildung 5: Die bei 45 % Pumpleistung aufgenommenen Messpunkte.

mit der Dichte ρ , der mittleren Geschwindigkeit v , der charakteristischen Länge d , die bei Rohren auf den Durchmesser festgelegt ist, sowie der dynamischen Viskosität η . Übersteigt die Reynoldszahl die kritische Reynoldszahl von etwa 2000, ist die Strömung nicht mehr laminar, sondern turbulent.

Wird für die gemittelte Geschwindigkeit jeweils die maximale Geschwindigkeit bei der Berechnung der Reynoldszahl verwendet, liegt die tatsächliche Reynoldszahl unter diesem Wert. Die Werte für diese obere Schranke sind in Tabelle 6 aufgeführt. Es ist ersichtlich, dass die Strömungen in den Rohren wirklich laminar sind. Somit kann Gleichung (1) mit $n = 2$ verwendet werden.

Tabelle 6: Obere Schranke für die Reynoldszahl der Strömungen.

| Pumpleistung | $v_{\max} / \text{cm/s}$ | Re_{\max} |
|--------------|--------------------------|-------------|
| 70 % | 92.3 | 885 |
| 45 % | 41.4 | 397 |

Um ein Maß für die experimentelle Abweichung zu bekommen, wird mit der Methode der kleinsten Quadrate von [1] die Gleichung (1) angenähert. Der Parameter R wird vorgegeben mit der Hälfte des Rohrrinnendurchmessers (vgl. Tabelle 1); außerdem wird die Messtiefe wieder in Längeneinheiten umgerechnet und der Definitionsbereich der Abszisse auf ein Intervall der Länge $2R$ so beschränkt, dass das Geschwindigkeitsmaximum in der Mitte liegt. Die Extremalstelle wird durch Vergleich der Abbildungen 4a und 5a auf $\mu_{\max} = 15,25 \mu\text{s}$ bestimmt. Außerdem muss noch beachtet werden, dass das Argument r per Definition immer positiv sein muss – r wird also durch $|r|$ ersetzt.

Die entsprechenden Graphiken sind in Abbildung 6 und 7 zu finden. Die Geradenparameter sowie ihre relativen Abweichungen sind in Tabelle 7 zusammengefasst.

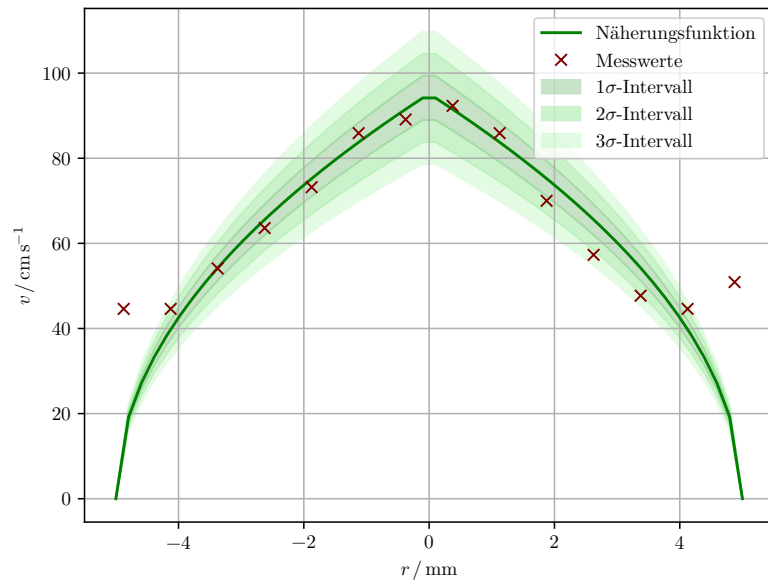


Abbildung 6: Regression des Strömungsprofils bei 70 % Leistung.

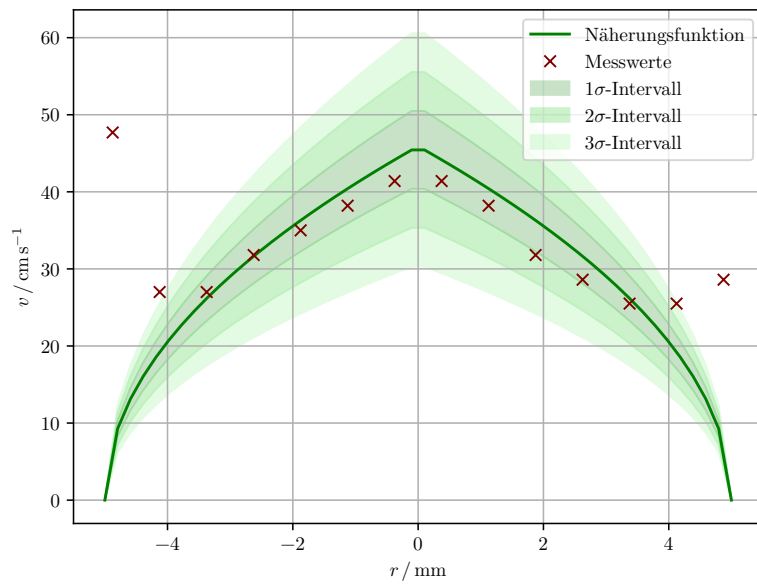


Abbildung 7: Regression des Strömungsprofils bei 45 % Leistung.

Tabelle 7: Die durch lineare Regression berechneten Maximalgeschwindigkeiten.

| Leistung | $v_{\max} / \text{cm/s}$ | $\Delta v_{\max} / \text{cm/s}$ | relative Abweichung $\Delta v/v$ |
|----------|--------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 70 % | 95.1 | 5.2 | 5.5 % |
| 45 % | 45.9 | 5.1 | 11.1 % |

5 Diskussion

Anhang: Messdaten

Literatur

- [1] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.