

Versuch Nr. 355

## **Gekoppelte Schwingkreise**

Antonia Joëlle Bock  
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner  
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.12.2019

Abgabe: 07.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

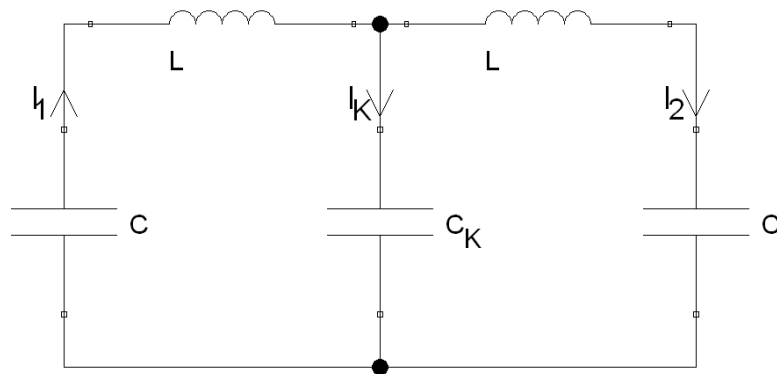
|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Theorie</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Einleitung . . . . .  | 3         |
| 1.2      | Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise, Eigenmoden, Schwebungen . . . . . | 3         |
| 1.3      | Erzwungene Schwingungen . . . . .                                     | 6         |
| <b>2</b> | <b>Durchführung</b>   | <b>7</b>  |
| 2.1      | Vorbereitung: Einstellung der Kapazität . . . . .                     | 8         |
| 2.2      | Messprogramm . . . . .  | 8         |
| <b>3</b> | <b>Auswertung</b>   | <b>10</b> |
| 3.1      | Vorbereitung . . . . .  | 10        |
| 3.2      | Fundamentalschwingungen und Ströme . . . . .                          | 10        |
| <b>4</b> | <b>Diskussion</b>   | <b>13</b> |
| 4.1      | Vorbereitung . . . . .  | 13        |
| 4.2      | Schwebung . . . . .   | 13        |
| 4.3      | Resonanzfrequenzen . . . . .  | 14        |
| 4.4      | Ströme . . . . .  | 15        |
| 4.5      | Abschluss . . . . .   | 15        |
| <b>5</b> | <b>Anhang: Originale Messdaten</b>                                    | <b>16</b> |
|          | <b>Literatur</b>  | <b>16</b> |

# 1 Theorie

## 1.1 Einleitung

Ziel dieses Experiments ist es, gekoppelte Schwingkreise genauer zu untersuchen. Konkret soll hier das Verhalten der Energieverteilung auf die gekoppelten Systeme, sowie der Einfluss eines schwingenden Erregers auf den Schwingkreis ergründet werden. Da elektromagnetische Schwingssysteme bei weitem einfacher zu vermessen sind als mechanische, werden die Messungen an ebensolchen durchgeführt. Die daraus gewonnen Erkenntnisse lassen sich problemlos auf andere gekoppelte Schwingssysteme übertragen.

## 1.2 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise, Eigenmoden, Schwebungen



**Abbildung 1:** Schaltbild eines kapazitiv gekoppelten Schwingkreises.

Die in 1 gezeigten Schwingkreise sind über einen Kondensator der Kapazität  $C_K$  gekoppelt, wie es später auch im Experiment der Fall sein wird. Gemäß der Knotenregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz) gilt die Beziehung

$$I_1 = I_2 + I_K. \quad (1)$$

Über die Maschenregel folgt für die über den Kondensatoren und Spulen abfallenden Spannungen

$$U_{C_1} + U_K = U_{L_1} \quad (2)$$

$$U_{C_2} = U_{L_2} + U_K \quad (3)$$

aus. Mit der Definition der Kapazität  $C = Q/U$ , der Induktionsspannung  $U = -L\dot{I}$  und (1) folgt hierfür nach einmaligem zeitlichen Ableiten

$$\dot{Q} = I = C\dot{U} \quad (4)$$

$$\frac{1}{C}\dot{Q}_{C_1} + L\ddot{I}_{L_1} + \frac{1}{C_K}\dot{Q}_K \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{C}I_1 + L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{C}\dot{Q}_{C_2} + L\ddot{I}_{L_2} - \frac{1}{C_K}\dot{Q}_K \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{C}I_2 + L\ddot{I}_2 - \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (6)$$

Eine Möglichkeit zur Lösung der beiden gekoppelten Differentialgleichungen besteht darin, (5) und (6) zu addieren und subtrahieren. So erhält man zwei voneinander entkoppelte Gleichungen der Variablen  $I_1 + I_2$  und  $I_1 - I_2$ , die einfach mit einem harmonischen Ansatz gelöst werden können:

$$L(\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (7)$$

$$L(\ddot{I}_1 - \ddot{I}_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)(I_1 - I_2) = 0 \quad (8)$$

Der harmonische Ansatz  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  liefert mit den Kreisfrequenzen  $\omega_+$  für (7) und  $\omega_-$  für (8) die Lösungen

$$(I_1 + I_2)(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \quad \text{mit} \quad \omega_+^2 = \frac{1}{LC}, \quad (9)$$

$$(I_1 - I_2)(t) = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \quad \text{mit} \quad \omega_-^2 = \frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_K} = \frac{C_K + 2C}{LCC_K} \quad (10)$$

mit den Integrationskonstanten  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $\varphi_+$  und  $\varphi_-$ . Die Schwingungsfrequenzen sind entsprechend  $f_{\pm} = \omega_{\pm}/2\pi$ . Um die Lösungen für die ursprünglichen Ströme  $I_1$  und  $I_2$  zu erhalten, addiert und subtrahiert man (9) und (10) erneut und dividiert durch zwei, sodass daraus

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (11)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (12)$$

resultiert.

Jedes durch  $N$  Systeme gekoppelte Schwingungssystem hat  $N$  Fundamentalschwingungen – auch bekannt unter Eigenmoden oder Normalschwingungen. Dies sind Schwingungen, die das System besonders „bevorzugt“ ausführt. Allgemein besteht dann die Lösung für die Schwingung aus der Überlagerung der Eigenmoden, die durch Anfangsbedingungen festgelegt wird.

In diesem Fall sind  $N = 2$  Systeme gekoppelt, die Eigenmoden sind durch  $I_1 + I_2$  mit  $\omega_+$  und  $I_1 - I_2$  mit  $\omega_-$  gegeben: Beginnt das System mit zwei gleichen Strömen  $I_1 = I_2$  zu schwingen, so gilt  $A_- = 0$ , sodass der Schwingkreis mit gleichen Strömen  $I_1$  und  $I_2$  mit der Frequenz  $f_+ = \omega_+/2\pi$ , die ein einzelner LC-Kreis ebenfalls hätte, schwingt und gemäß (1) kein Strom durch den Kopplungskondensator fließt. Dies ist die gleichphasige Normalschwingung – die Ströme sind stets in Phase. Wird das Gegenteil betrachtet, starten die Ströme  $I_1 = -I_2$  genau entgegengesetzt, oszilliert das System in der zweiten Eigenmode mit  $f_- = \omega_-/2\pi > f_+$ . Der Summenstrom  $I_1 + I_2$  verschwindet und die Ströme schwingen genau gegenphasig. Selbsterklärend ist dies die gegenphasige Eigenschwingung.

Ebenfalls zu betrachten sind sogenannte Schwebungen. In 1 kann eine beobachtet werden, wenn  $\omega_+ \approx \omega_-$  gilt, also  $C_K \gg C$  ist. Startbedingungen sind, dass einer der beiden Ströme, beispielsweise  $I_1$ , anfangs von null verschieden ist und der jeweils andere Strom, gemäß dem Beispiel also  $I_2$ , in Ruhe ist, entsprechend keine Amplitude hat. Dann ergeben sich für die Ströme die Lösungen

$$I_1(t) = \frac{A_+}{2}(\cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (13)$$

und

$$I_2(t) = \frac{A_+}{2}(\cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \cos(\omega_- t + \varphi_-)). \quad (14)$$

Mit

$$\tilde{\varphi}_+ := \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}, \quad \tilde{\varphi}_- := -\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} \quad (15)$$

und den Additionstheoremen

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (16)$$

$$\cos x + \cos(y + \pi) = \cos x - \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

$$= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (18)$$

lassen sich 13 und 14 zu

$$I_1(t) = A_+ \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t + \tilde{\varphi}_+\right) \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t - \tilde{\varphi}_+\right) \quad (19)$$

$$I_2(t) = -A_+ \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t + \tilde{\varphi}_+\right) \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t - \tilde{\varphi}_+\right) \quad (20)$$

umformen. Es ist zu erkennen, dass die Ströme mit der Frequenz

$$\omega_{\text{Schwingung}} = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \approx \omega_+ \quad (21)$$

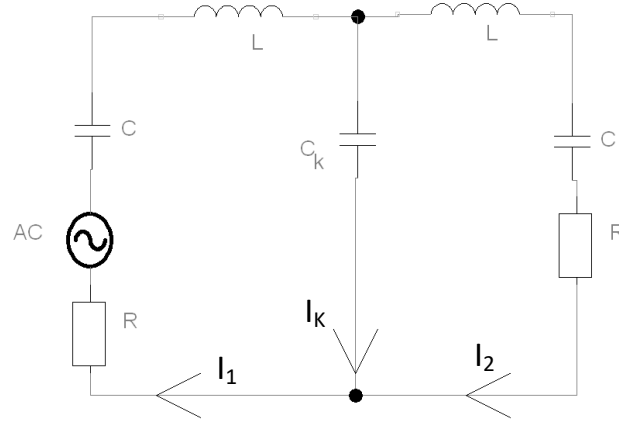
oszillieren, dass die Amplitude jedoch mit der bei weitem geringeren Frequenz

$$\omega_{\text{Amplitude}} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \ll \omega_+ \quad (22)$$

ebenfalls eine Oszillation aufweist. Das Doppelte der dazugehörigen Frequenz nennt sich Schwebungsfrequenz und ist

$$f_{\text{Schwebung}} = \frac{\omega_{\text{Amplitude}}}{\pi} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\pi}. \quad (23)$$

Sie gibt an, wie schnell die Energie zwischen den beiden Schwingungssystemen hin- und herpendelt. Werden nämlich die Schwingungen der Amplituden betrachtet – also die mit einer Kreisfrequenz von  $\omega_{\text{Amplitude}}$  –, ist zu erkennen, dass die von  $I_1$  jeweils gegenphasig zu  $I_2$  oszilliert. Dies indiziert den besagten Energieaustausch.



**Abbildung 2:** Durch einen Sinusgenerator erzwungene Schwingungen mit verlustbehafteten Größen.

### 1.3 Erzwungene Schwingungen

Wird ein Sinusgenerator mit  $\tilde{U}(t) = U_0 e^{i\omega t}$  gemäß Abbildung 2 in den Schaltkreis eingebunden, und werden Verlustwiderstände als ohmsche Widerstände jeweils berücksichtigt, ergeben sich mit den Kirchhoff'schen Gesetzen die Zusammenhänge

$$\tilde{U} = \left( \frac{1}{i\omega C} + i\omega L + \frac{1}{i\omega C_K} + R \right) I_1 - \frac{1}{i\omega C_K} I_2 \quad (24)$$

$$\text{und } (i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R + \frac{1}{i\omega C_K}) I_2 - \frac{1}{i\omega C_K} I_1 = 0. \quad (25)$$

Nach einigen Umformungen kann ein betragsmäßiges Verhältnis von  $I_2$  und  $\tilde{U}$  aufgestellt werden, wobei eine Impedanz  $Z(\omega)$  der Übersicht halber mit

$$Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} \right)$$

definiert wird:

$$|I_2| = |\Omega| |\tilde{U}| \quad (26)$$

$$\text{mit } \Omega = \left( \sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left( \frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K \right)^2} \right)^{-1}. \quad (27)$$

Dabei stellt  $\Omega(\omega)$  den sogenannten Leitwert dar. Dieser geht jeweils für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  gegen Null und hat zwei Maxima für  $\omega = \omega_+$  und  $\omega = \omega_-$ . In diesen Fällen gilt:

$$\Omega(\omega_+) = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \approx \frac{1}{2R} \quad (28)$$

$$\Omega(\omega_-) = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}(1 + \frac{C_-}{C_K})}} \approx \frac{1}{2R} \quad (29)$$

Die Näherungen ergeben sich dadurch, dass Werte der üblichen Größenordnungen für die Widerstände eingesetzt werden. Daraus wird ersichtlich, dass der zweite Summand unter der Wurzel im Vergleich zur 4 unbedeutend klein wird.

Zur in 2 beschriebenen Vorjustierung seien hier noch kurz erzwungene Schwingungen eines einzelnen Schwingkreises aufgeführt. Dafür wird ein Sinusgenerator in Reihe eines Schwingkreises geschaltet, der mit einer Frequenz  $\omega$  antreibt. Hierbei sind die Amplitudenresonanzfunktion (30) und die Phasenverschiebung (31) des Stroms durch die erregende Spannung in Abhängigkeit der Frequenz  $\omega$  von Interesse. Gemäß [3] lauten diese

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (30)$$

und

$$\tan \varphi = \frac{R\omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (31)$$

Die Phasenverschiebung beträgt also genau  $\pi/2$ , wenn der Sinusgenerator mit der Eigenfrequenz – auch Resonanzfrequenz – den Schwingkreis antreibt.

## 2 Durchführung

Alle Messungen werden mit der in 3 gezeigten Schaltplatte durchgeführt.

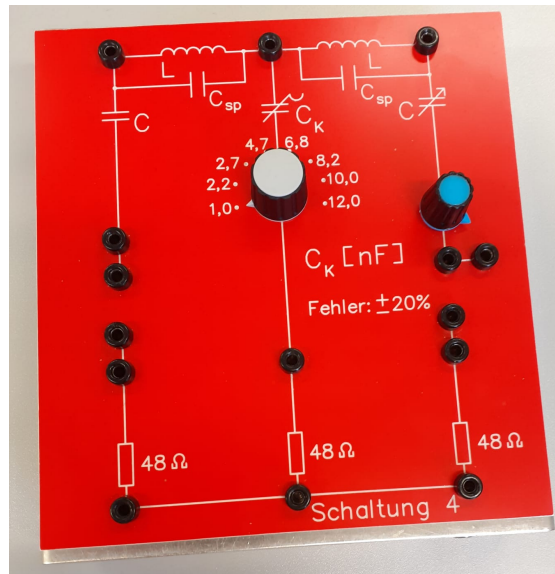


Abbildung 3: Die verwendete Schaltplatte.

## 2.1 Vorbereitung: Einstellung der Kapazität

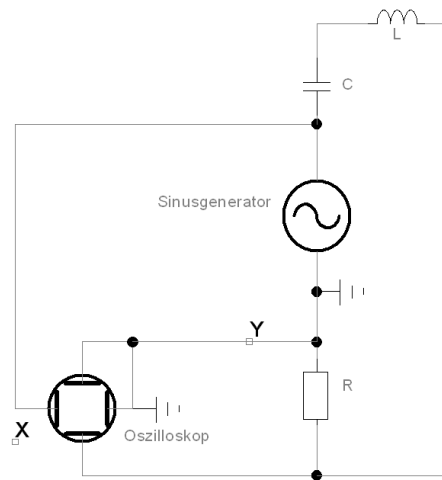
Damit ein Energieaustausch wie in 1 möglich ist, müssen beide Schwingkreise die gleiche Resonanzfrequenz aufweisen. Deshalb wird im Folgenden die Resonanzfrequenz des einen Schwingkreises mit fester Induktivität und fester Kapazität bestimmt und im Anschluss die Messung an dem zweiten Schwingkreis wiederholt – mit dem Unterschied, dass hier die regelbare Kapazität so eingestellt wird, dass die Messung die gleiche Resonanzfrequenz ergibt.

Die Schaltung wird gemäß 4 aufgebaut. Der Sinusgenerator erzwingt die Schwingungen mit regelbarer Kreisfrequenz  $\omega$  im Schwingkreis. Am Oszilloskop kann im XY-Betrieb die Phasenverschiebung zwischen dem Generator und des Schwingkreises anhand der Lissajous-Figuren abgelesen werden. Wie in 1.3 erläutert, ist die zur Resonanzfrequenz gehörige Phasenverschiebung  $\pi/2$ . Dies entspricht der kreisförmigen Lissajous-Figur.

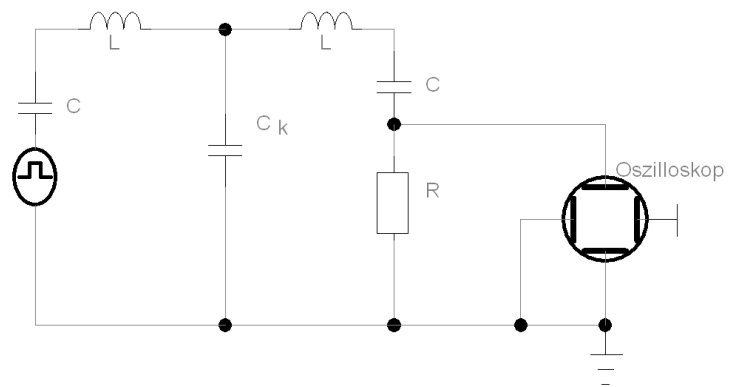
## 2.2 Messprogramm

Zuerst wird der Schaltplan gemäß 5 aufgebaut. Der linke Schwingkreis soll hier über ein Rechteck-Signal des Sinus-Generators angeregt werden. Zum rechten Schwingkreis gelangt die Schwingungsenergie demnach ausschließlich über die gemeinsame Kopplungsleitung. Die über den Widerstand abfallende Spannung wird über den Y-Eingang an den Oszillographen gegeben. Dort kann jetzt der zeitliche Schwingungsverlauf der Spannung verfolgt werden. Von Interesse sei hier das Verhältnis von Schwingungs- zu Schwebungs-frequenz. Hierfür sind die Schwingungsmaxima zu zählen und durch die Anzahl der Schwebungen, in denen diese Schwingungsmaxima zu finden sind, zu teilen. Dies wird für verschiedene Werte der Kopplungskapazität gemacht, die auf die festen Werte 4,7 nF,





**Abbildung 4:** Schaltbild der Vorjustierung.



**Abbildung 5:** Schaltplan des Messprogramms.

6,8 nF, 8,2 nF, 10,0 nF und 12,0 nF eingestellt werden kann. Niedrigere Frequenzen sind zwar auch möglich, wie aus Abbildung 3 ersichtlich ist, aber nicht sinnvoll. Die Anzahl der Schwingungen je Schwebung wäre zu gering und schwierig abzuzählen.

Als nächstes wird der Stromkreis anstelle von Rechteck-Schwingungen mit Sinus-Schwingungen erregt. Außerdem wird der Oszillograph erneut auf den XY-Modus gestellt und der Generator auf die X-Achse gegeben. Unter Variation der Kopplungskapazität sollen nun die Frequenzen  $\omega_+$  und  $\omega_-$  gesucht und gemessen werden, also die Frequenzen, bei denen die Lissajous-Figur entsprechend einen Phasenunterschied von 0 beziehungsweise  $\pi$  indiziert. Zeitgleich dazu wird die über den ohmschen Widerstand  $R = 48 \Omega$  abfallende Spannung gemessen, sodass im Anschluss daran der entsprechende Strom mit  $U = RI$  berechnet werden kann, der sich aus dem Experiment ergibt.

### 3 Auswertung

#### 3.1 Vorbereitung

Bei der Vorbereitung wird für den verwendeten Kondensator und die Spule eine Eigenfrequenz von  $f_{\text{mess}} = 33,0 \text{ kHz}$  bei einer Phasendifferenz von  $90^\circ$  gemessen. Die Referenzwerte der Bauteile lauten  $C = 0,8015 \text{ nF}$  und  $L = 32,351 \text{ mH}$ . Zudem weist die Spule eine Kapazität von  $C_{\text{Sp}} = 0,037 \text{ nF}$  auf. Der Kondensator mit regelbarer Kapazität wird so eingestellt, dass der zweite Schwingkreis die gleiche Eigenfrequenz besitzt.

Die Anzahl der Maxima/Minima innerhalb einer Schwebeperiode sind in der folgenden Tabelle 1 der regelbaren Kapazität  $C_K$  gegenübergestellt.

**Tabelle 1:** Anzahl Maxima der Schwebung.

| $C_K / \text{nF}$ | Schwingungsmaxima |
|-------------------|-------------------|
| 4.7               | 2                 |
| 6.8               | 3                 |
| 8.2               | 4                 |
| 10.0              | 4                 |
| 12.0              | 5                 |

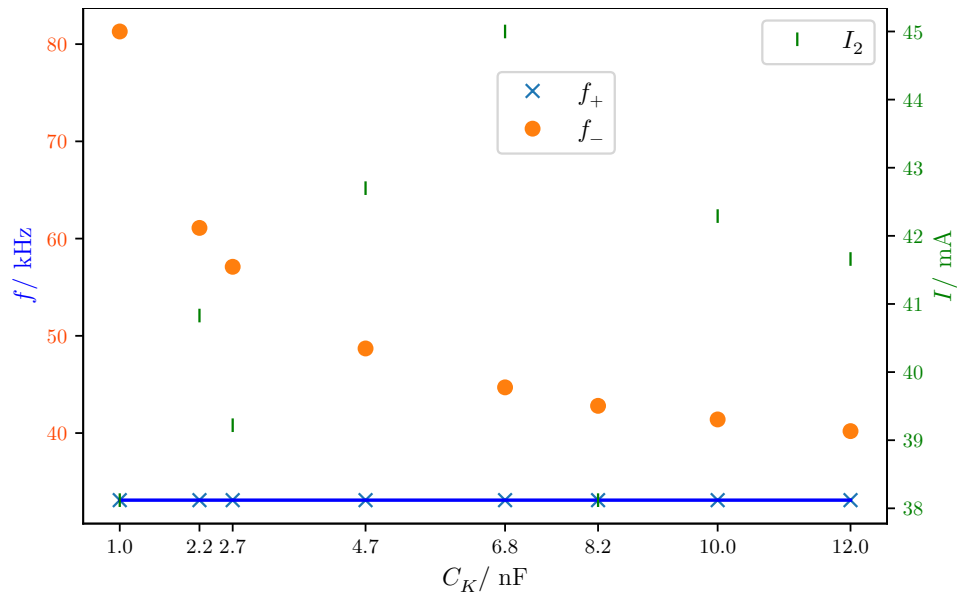
#### 3.2 Fundamentalschwingungen und Ströme

Im Weiteren werden die beiden Fundamentalschwingungen in Abhängigkeit der Kapazität  $C_K$  bestimmt. Für die erste Fundamentalschwingung wird bei allen Kapazitäten ein Wert von  $f_+ = 33,1 \text{ kHz}$  gemessen. Mit einem Phasenunterschied von  $180^\circ$  zwischen den Schwingungen der beiden Schwingkreise werden hingegen von  $C_K$  abhängige Werte gemessen, welche in 2 aufgelistet sind. Hierbei handelt es sich um die zweite Fundamentalschwingung ( $I_1 - I_2$ ).

Der Strom  $I_2$  wird über den Widerstand  $R = 48 \Omega$  berechnet.

**Tabelle 2:** Resonanzfrequenzen verschiedener Kondensatoren.

| $f_+ / \text{kHz}$ | $f_- / \text{kHz}$ | $C_K / \text{nF}$ | Amplitudenspannung / mV | Strom $I_2 / \text{mA}$ |
|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|
| 33.1               | 81.3               | 1.0               | 1830                    | 38.12                   |
| 33.1               | 61.1               | 2.2               | 1960                    | 40.83                   |
| 33.1               | 57.1               | 2.7               | 1883                    | 39.22                   |
| 33.1               | 48.7               | 4.7               | 2050                    | 42.70                   |
| 33.1               | 44.7               | 6.8               | 2160                    | 45.00                   |
| 33.1               | 42.8               | 8.2               | 1830                    | 38.12                   |
| 33.1               | 41.4               | 10.0              | 2030                    | 42.29                   |
| 33.1               | 40.2               | 12.0              | 2000                    | 41.66                   |



**Abbildung 6:** Die aufgenommenen Messwerte.

Zu erkennen ist die fallende Frequenz mit ansteigender Kapazität. Dies liegt an der rückstellenden Kraft der Kopplung über den Kondensator  $C_K$ , was in (10) zu erkennen ist.

Die Frequenz für die erste Fundamentalschwingung errechnet sich aus

$$f_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (32)$$

und für die zweite aus

$$f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{CC_K}{2C+C_K}}} . \quad (33)$$

Um die Theoriewerte genau bestimmen zu können, werden die geringen Kapazitäten der beiden Spulen ebenfalls berücksichtigt. So ergeben sich für die Gesamtkapazität je

$$C_{+, \text{ges}} = C + C_{\text{Sp}} \quad (34)$$

und

$$C_{-, \text{ges}} = \frac{CC_K}{2C + C_K} + C_{\text{Sp}}. \quad (35)$$

Eingesetzt in (32) und (33) berechnen sich die Werte über

$$f_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_{\text{Sp}})}} \quad (36)$$

$$f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{CC_K}{2C + C_K} + C_{\text{Sp}}\right)}}. \quad (37)$$

Der theoretisch zu erwartende Strom  $I_2$  berechnet sich über (26) und wird neben den anderen Werten in 3 dargestellt.

**Tabelle 3:** Die erwarteten Theoriewerte.

| $f_+ / \text{kHz}$ | $f_{+, \text{theo}} / \text{kHz}$ | $f_- / \text{kHz}$ | $f_{-, \text{theo}} / \text{kHz}$ | $C_K / \text{nF}$ | $I_2 / \text{mA}$ | $I_{2, \text{theo}} / \text{mA}$ |
|--------------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------------------------|-------------------|-------------------|----------------------------------|
| 33.1               | 30.5                              | 81.3               | 47.6                              | 1.0               | 38.125            | 38.124                           |
| 33.1               | 30.5                              | 61.1               | 39.5                              | 2.2               | 40.833            | 40.830                           |
| 33.1               | 30.5                              | 57.1               | 38.0                              | 2.7               | 39.229            | 39.225                           |
| 33.1               | 30.5                              | 48.7               | 35.1                              | 4.7               | 42.708            | 42.696                           |
| 33.1               | 30.5                              | 44.7               | 33.7                              | 6.8               | 45.000            | 44.974                           |
| 33.1               | 30.5                              | 42.8               | 33.2                              | 8.2               | 38.125            | 38.093                           |
| 33.1               | 30.5                              | 41.4               | 32.8                              | 10.0              | 42.291            | 42.241                           |
| 33.1               | 30.5                              | 40.2               | 32.4                              | 12.0              | 41.666            | 41.595                           |

## 4 Diskussion

### 4.1 Vorbereitung

Bei der Justierung wird eine reale Eigenfrequenz von 33,1 kHz gemessen. Mit einem Theoriewert von  $f_+ = 1/2\pi\sqrt{L(C+C_{sp})} = 30,5 \text{ kHz}$  ergibt dies eine Abweichung von 2,6 kHz bzw. 8,5%. Dies kann zum einen an abweichenden Angaben der Bauteile selbst liegen, zum anderen an der Genauigkeit der Messtechnik. Außerdem lässt sich der stufenlose Regler für die justierbare Kapazität  $C$  nicht höher drehen, als es notwendig wäre; denn die am Oszilloskop abzulesende Lissajous-Figur erreicht nur annähernd einen Kreis. Somit sind die Kapazitäten der beiden Schwingkreise wesentlich unterschiedlich. Die bei der Durchführung maximal erreichte Lissajous-Figur ist in Abbildung 7 zu sehen.

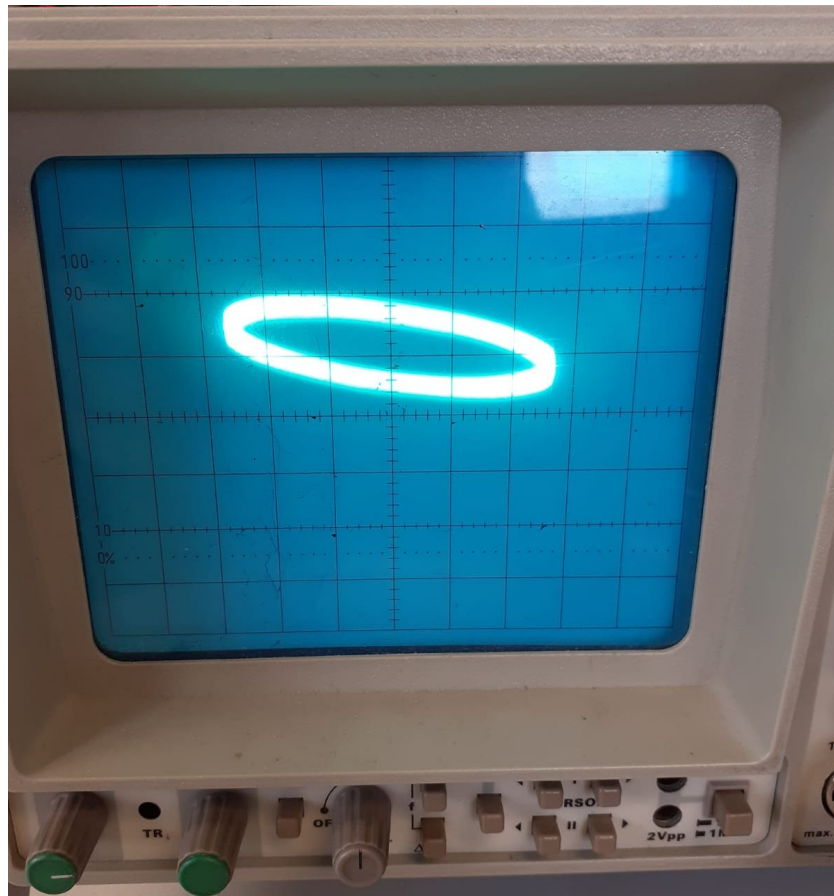


Abbildung 7: Lissajous-Figur der Justierung.

### 4.2 Schwebung

Eine Schwebung ist am Oszilloskop erst ab einer Kapazität von  $C_K = 4,7 \text{ kHz}$  ablesbar. Die Anzahl der Amplituden innerhalb einer Schwebungsperiode steigt mit ansteigen-

der Kapazität, was bedeutet, dass sich die überlagerten Frequenzen der gekoppelten Schwingkreise weiter annähern und die Differenz nach (23) geringer wird. Wahrscheinlich liegt die Erklärung in der Koppelkapazität, welche einen Energieaustausch zwischen den beiden Systemen möglich macht. Hierdurch können die rückstellenden beziehungsweise treibenden Kräfte die Frequenzen der beiden Schwingkreise einander angleichen.

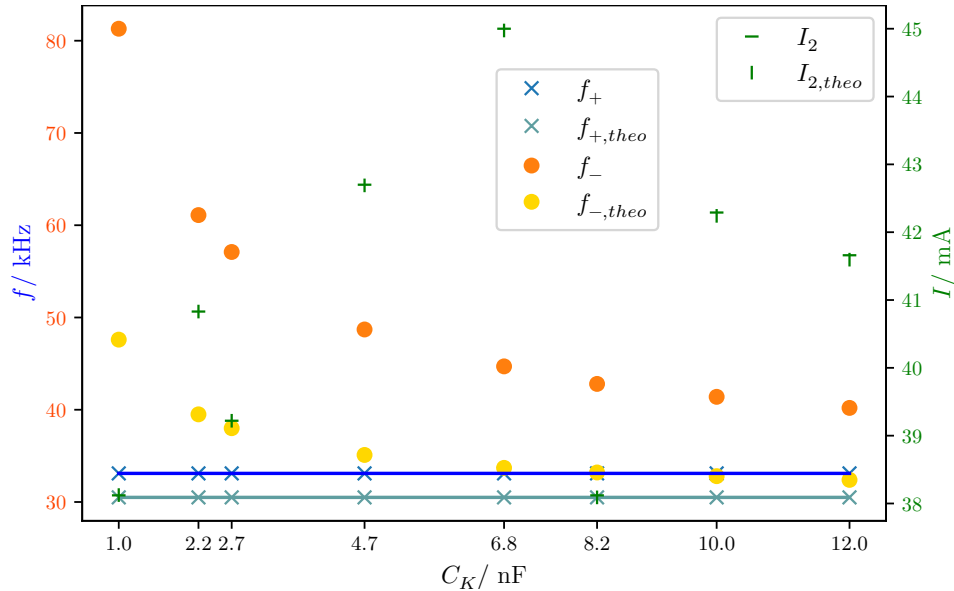


Abbildung 8: Mess- und Theoriewerte im Vergleich.

### 4.3 Resonanzfrequenzen

Bei der Messung der Fundamentalschwingungen nimmt  $f_+$  für alle Kapazitäten denselben Wert von 33,1 kHz an. Dies entspricht genau der Erwartung, da bei der 1. Fundamentalschwingung kein Strom durch  $C_K$  fließt - und somit als normaler Leiter in dem Schaltkreis betrachtet wird. Entgegen der Erwartung beträgt der Theoriewert 30,5 kHz. Wie bereits erwähnt werden hierbei entweder die Werte der Spule beziehungsweise des Kondensators höher sein. Ungenauigkeiten in der Messtechnik können eine zusätzliche Fehlerquelle darstellen.

– Für alle Vergleiche werden entweder Abbildung 8 oder Tabelle 3 betrachtet. –

Die zweite Fundamentalschwingung verhält sich vom Verlauf her wie vorhergesagt, dennoch weicht die Messung bei  $C_K = 1,0$  nF um etwa 71% ab. Der einer reziproken linearen Funktion ähnelnde Verlauf startet in der Theorie wesentlich tiefer und fällt deutlich langsamer. Die Werte, gegen die die Mess- und Theoriewerte konvergieren, liegen hingegen näher beieinander – bei  $C_K = 12,0$  nF und bei einer Abweichung von etwa 24%. Solch eine Differenz lässt sich nur noch schwer durch abweichende Werte für Spule und Kondensator erklären. Der Kondensator  $C_K$  wird mit einem Fehler von  $\pm 20\%$  angegeben. Wird der Fehler maximal eingerechnet, ergibt sich für den ersten Wert von  $C_K$  eine Kapazität von 1,2 nF. Der Abgleich aus der ersten Fundamentalschwingung von Mess- und Theoriewert

legt die Annahme nahe, dass, wenn  $C_{ges} = C + C_{Sp} = 0,8015 \text{ nF} + 0,037 \text{ nF} = 0,8385 \text{ nF}$  ist,  $L = 1/4\pi^2 f_+^2 C_{ges} = 4,57 \text{ mH}$  sein müsste (im Vergleich zum angegebenen Wert von  $L = 32,351 \text{ mH}$ ). Selbst mit dem eingerechneten Fehler liegt die Resonanzfrequenz durch Einsetzen in (37) sogar noch höher bei  $f_- = 120,7 \text{ kHz}$ .

Eine Bewertung über die einzelnen Schaltkreiselemente ist also weder plausibel noch sinnvoll. Naheliegender ist ein systematischer Fehler, der erneut auf die Messtechnik zurückzuführen ist. Außerdem können die Dämpfungseffekte durch den ferromagnetischen Spulenkern ebenfalls die Messung beeinflussen. Die Ummagnetisierungsverluste sind jedoch zu gering, um derartige Abweichungen zu erklären.

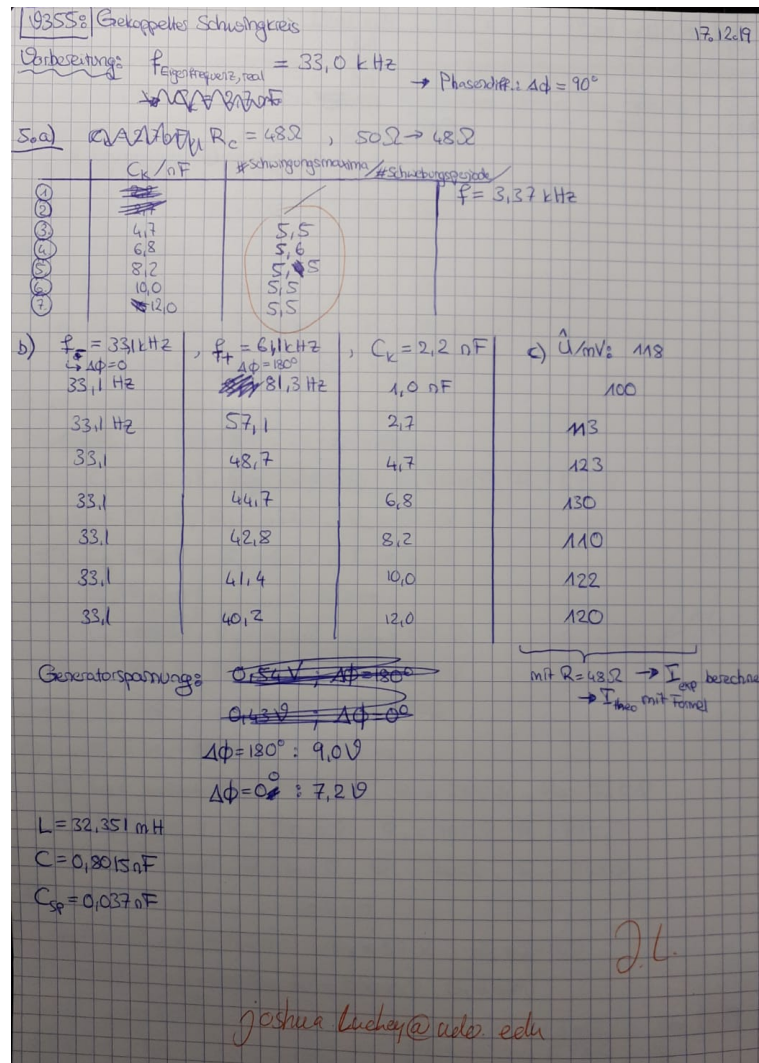
#### 4.4 Ströme

Die Erwartungswerte des Stromes  $I_2$  liegen bemerkenswert nahe an den Messungen – mit Abweichungen im Promille-Bereich. Das heißt, dass sowohl das Oszilloskop gut kalibriert ist, als auch dass die Angabe des Widerstandes mit  $R = 48 \Omega$  stimmt, sowie aber auch, dass der Generator die Spannung liefert, die er auch anzeigt. Allerdings macht diese Genauigkeit keine Aussage über den Sinusgenerator der Spannungsquelle. Der mögliche systematische Fehler lässt sich also nur bedingt eingrenzen.

#### 4.5 Abschluss

Die Schaltung 5, welche in diesem Versuch verwendet wird, ist durchaus fehlerbehaftet. Eine mögliche Verbesserung ist also das Austauschen oder Überprüfen dieses Schaltkreises. Da das Oszilloskop die Spannung sehr genau angibt, kann hiermit gut gearbeitet werden. Es ist zudem sinnvoll vor dem Versuch das Oszilloskop zu überprüfen, ob der Sinusgenerator die Frequenz erzeugt, die er angibt. Wenn letzterer Abgleich erfolgreich ist, müssen systematische Fehler in der Schaltung liegen. Denkbar sind noch falsche Verkabelungen oder äußere Magnetfelder; diese sind aber auch als Erstes auszuschließen.

## 5 Anhang: Originale Messdaten



## Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2. Elektrizität und Optik*. 4. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2006.
- [2] TU Dortmund. *Versuch Nr. 355: Gekoppelte Schwingkreise*. 2019.
- [3] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. 23. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.