

Versuch Nr. 355

Gekoppelte Schwingkreise

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.12.2019

Abgabe: 07.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Einleitung	3
1.2	Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise, Eigenmoden, Schwebungen	3
1.3	Erzwungene Schwingungen des gekoppelten Schwingkreises	6
2	Durchführung	7
2.1	Vorbereitung: Einstellung der Kapazität	7
2.2	Messprogramm	9
3	Auswertung	9
3.1	Messdaten	9
4	Diskussion	10
5	Anhang: originale Messdaten	10

1 Theorie

1.1 Einleitung

Ziel dieses Experiments ist es, gekoppelte Schwingkreise genauer zu untersuchen. Konkret soll hier das Verhalten der Energieverteilung auf die gekoppelten Systeme, sowie der Einfluss eines schwingenden Erregers auf den Schwingkreis ergründet werden. Da elektromagnetische Schwingssysteme bei weitem einfacher zu vermessen sind als mechanische, werden die Messungen an ebensolchen durchgeführt. Die daraus gewonnen Erkenntnisse lassen sich problemlos auf andere gekoppelte Schwingssysteme übertragen.

1.2 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise, Eigenmoden, Schwebungen

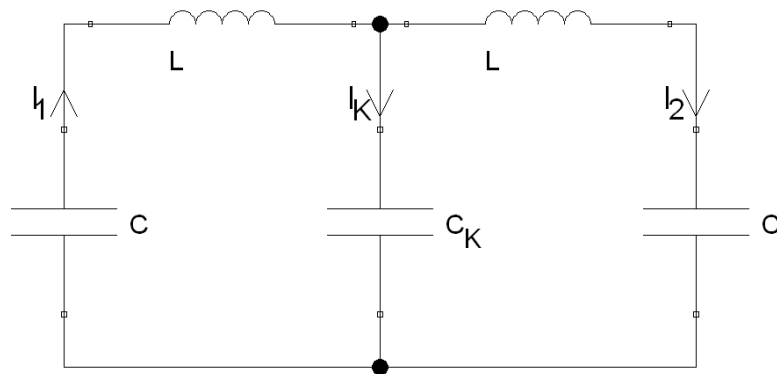


Abbildung 1: Schaltbild eines kapazitiv gekoppelten Schwingkreises.

Die in 1 gezeigten Schwingkreise sind über einen Kondensator der Kapazität C_K gekoppelt, wie es später auch im Experiment der Fall sein wird. Gemäß der Knotenregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz) gilt die Beziehung

$$I_1 = I_2 + I_K. \quad (1)$$

Über die Maschenregel folgt für die über den Kondensatoren und Spulen abfallenden Spannungen

$$U_{C_1} + U_K = U_{L_1} \quad (2)$$

$$U_{C_2} = U_{L_2} + U_K \quad (3)$$

aus. Mit der Definition der Kapazität $C = Q/U$, der Induktionsspannung $U = -L\dot{I}$ und (1) folgt hierfür nach einmaligem zeitlichen Ableiten

$$\dot{Q} = I = C\dot{U} \quad (4)$$

$$\frac{1}{C}\dot{Q}_{C_1} + L\ddot{I}_{L_1} + \frac{1}{C_K}\dot{Q}_K \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{C}I_1 + L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{C}\dot{Q}_{C_2} + L\ddot{I}_2 - \frac{1}{C_K}\dot{Q}_K \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{C}I_2 + L\ddot{I}_2 - \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (6)$$

Eine Möglichkeit zur Lösung der beiden gekoppelten Differentialgleichungen besteht darin, (5) und (6) zu addieren und subtrahieren. So erhält man zwei voneinander entkoppelte Gleichungen der Variablen $I_1 + I_2$ und $I_1 - I_2$, die einfach mit einem harmonischen Ansatz gelöst werden können:

$$L(\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (7)$$

$$L(\ddot{I}_1 - \ddot{I}_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)(I_1 - I_2) = 0 \quad (8)$$

Der harmonische Ansatz $\ddot{x} = -\omega^2 x$ liefert mit den Kreisfrequenzen ω_+ für (7) und ω_- für (8) die Lösungen

$$(I_1 + I_2)(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \quad \text{mit} \quad \omega_+^2 = \frac{1}{LC}, \quad (9)$$

$$(I_1 - I_2)(t) = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \quad \text{mit} \quad \omega_-^2 = \frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_K} = \frac{C_K + 2C}{LCC_K} \quad (10)$$

mit den Integrationskonstanten A_+ , A_- , φ_+ und φ_- . Die Schwingungsfrequenzen sind entsprechend $f_{\pm} = \omega_{\pm}/2\pi$. Um die Lösungen für die ursprünglichen Ströme I_1 und I_2 zu erhalten, addiert und subtrahiert man (9) und (10) erneut und dividiert durch zwei, sodass daraus

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (11)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (12)$$

resultiert.

Jedes durch N Systeme gekoppelte Schwingungssystem hat N Fundamentalschwingungen – auch bekannt unter Eigenmoden oder Normalschwingungen. Dies sind Schwingungen, die das System besonders „bevorzugt“ ausführt. Allgemein besteht dann die Lösung für die Schwingung aus der Überlagerung der Eigenmoden, die durch Anfangsbedingungen festgelegt wird.

In diesem Fall sind $N = 2$ Systeme gekoppelt, die Eigenmoden sind durch $I_1 + I_2$ mit ω_+ und $I_1 - I_2$ mit ω_- gegeben: Beginnt das System mit zwei gleichen Strömen $I_1 = I_2$ zu schwingen, so gilt $A_- = 0$, sodass der Schwingkreis mit gleichen Strömen I_1 und I_2 mit der Frequenz $f_+ = \omega_+/2\pi$, die ein einzelner LC-Kreis ebenfalls hätte, schwingt und gemäß (1) kein Strom durch den Kopplungskondensator fließt. Dies ist die gleichphasige Normalschwingung – die Ströme sind stets in Phase. Wird das Gegenteil betrachtet, starten die Ströme $I_1 = -I_2$ genau entgegengesetzt, oszilliert das System in der zweiten Eigenmode mit $f_- = \omega_-/2\pi > f_+$. Der Summenstrom $I_1 + I_2$ verschwindet und die Ströme schwingen genau gegenphasig. Selbsterklärend ist dies die gegenphasige Eigenschwingung.

Ebenfalls zu betrachten sind sogenannte Schwebungen. In 1 kann eine beobachtet werden, wenn $\omega_+ \approx \omega_-$ gilt, also $C_K \gg C$ ist. Startbedingungen sind, dass einer der beiden Ströme, beispielsweise I_1 , anfangs von null verschieden ist und der jeweils andere Strom, gemäß dem Beispiel also I_2 , in Ruhe ist, entsprechend keine Amplitude hat. Dann ergeben sich für die Ströme die Lösungen

$$I_1(t) = \frac{A_+}{2}(\cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (13)$$

und

$$I_2(t) = \frac{A_+}{2}(\cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \cos(\omega_- t + \varphi_-)). \quad (14)$$

Mit

$$\tilde{\varphi}_+ := \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}, \quad \tilde{\varphi}_- := -\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} \quad (15)$$

und den Additionstheoremen

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (16)$$

$$\cos x + \cos(y + \pi) = \cos x - \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

$$= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (18)$$

lassen sich 13 und 14 zu

$$I_1(t) = A_+ \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t + \tilde{\varphi}_+\right) \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t - \tilde{\varphi}_+\right) \quad (19)$$

$$I_2(t) = -A_+ \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t + \tilde{\varphi}_+\right) \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t - \tilde{\varphi}_+\right) \quad (20)$$

umformen. Es ist zu erkennen, dass die Ströme mit der Frequenz

$$\omega_{\text{Schwingung}} = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \approx \omega_+ \quad (21)$$

oszillieren, dass die Amplitude jedoch mit der bei weitem geringeren Frequenz

$$\omega_{\text{Amplitude}} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \ll \omega_+ \quad (22)$$

ebenfalls eine Oszillation aufweist. Das Doppelte der dazugehörigen Frequenz nennt sich Schwebungsfrequenz und ist

$$f_{\text{Schwebung}} = \frac{\omega_{\text{Amplitude}}}{\pi} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\pi}. \quad (23)$$

Sie gibt an, wie schnell die Energie zwischen den beiden Schwingungssystemen hin- und herpendelt. Werden nämlich die Schwingungen der Amplituden betrachtet – also die Schwingungen mit $\omega_{\text{Amplitude}}$ –, ist zu erkennen, dass die von I_1 jeweils gegenphasig zu I_2 oszilliert. Dies indiziert den besagten Energieaustausch.

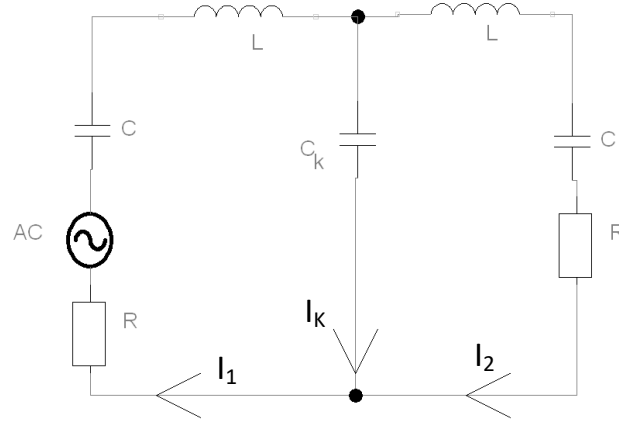


Abbildung 2: Durch einen Sinusgenerator erzwungene Schwingungen mit verlustbehafteten Größen.

1.3 Erzwungene Schwingungen des gekoppelten Schwingkreises

Wird ein Sinusgenerator mit $\tilde{U}(t) = U_0 e^{i\omega t}$ gemäß Abbildung 2 in den Schaltkreis eingebunden, und werden Verlustwiderstände als ohmsche Widerstände jeweils berücksichtigt, ergeben sich mit den Kirchhoff'schen Gesetzen die Zusammenhänge

$$\tilde{U} = \left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L + \frac{1}{i\omega C_K} + R \right) I_1 - \frac{1}{i\omega C_K} I_2 \quad (24)$$

$$\text{und } (i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R + \frac{1}{i\omega C_K}) I_2 - \frac{1}{i\omega C_K} I_1 = 0. \quad (25)$$

Nach einigen Umformungen kann ein betragsmäßiges Verhältnis von I_2 und \tilde{U} aufgestellt werden, wobei eine Impedanz $Z(\omega)$ der Übersicht halber mit

$$Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} \right)$$

definiert wird:

$$|I_2| = |\Omega| |\tilde{U}| \quad (26)$$

$$(27)$$

$$\text{mit } \Omega = \left(\sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K \right)^2} \right)^{-1}. \quad (28)$$

Dabei stellt $\Omega(\omega)$ den sogenannten Leitwert dar. Dieser geht jeweils für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ gegen Null und hat zwei Maxima für $\omega = \omega_+$ und $\omega = \omega_-$. In diesen Fällen gilt:

$$\Omega(\omega_+) = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \approx \frac{1}{2R} \quad (29)$$

$$\Omega(\omega_-) = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}\left(1 + \frac{C_-}{C_K}\right)}} \approx \frac{1}{2R} \quad (30)$$

Die Näherungen ergeben sich dadurch, dass Werte der üblichen Größenordnungen für die Widerstände eingesetzt werden. Daraus wird ersichtlich, dass der zweite Summand unter der Wurzel im Vergleich zur 4 unbedeutend klein ist.

2 Durchführung

Alle Messungen werden mit der in 3 gezeigten Schaltplatte durchgeführt.

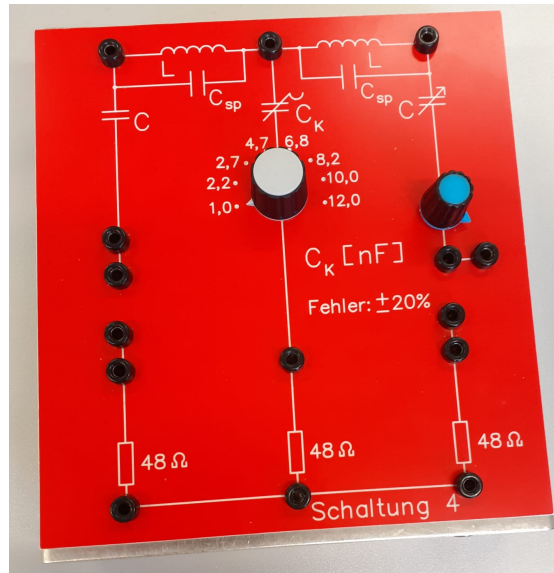


Abbildung 3: Die verwendete Schaltplatte.

2.1 Vorbereitung: Einstellung der Kapazität

Damit ein Energieaustausch wie in 1 möglich ist, müssen beide Schwingkreise die gleiche Resonanzfrequenz aufweisen. Deshalb wird im Folgenden die Resonanzfrequenz des einen Schwingkreises mit fester Induktivität und fester Kapazität bestimmt und im Anschluss die Messung an dem zweiten Schwingkreis wiederholt – mit dem Unterschied, dass hier

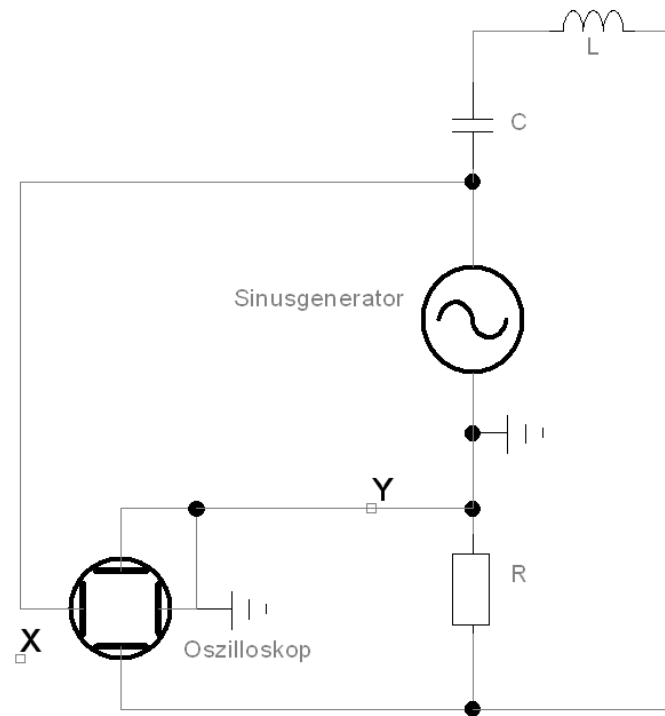


Abbildung 4: Schaltbild der Vorjustierung.

die regelbare Kapazität so eingestellt wird, dass die gleiche Resonanzfrequenz gemessen werden kann.

Die Schaltung wird gemäß 4 aufgebaut. Die Resonanzfrequenz liegt an, wenn im XY-Betrieb des Oszillographen die zu einem Phasenunterschied von $\pi/2$ gehörige Lissajous-Figur – also ein Kreis – erkennbar wird.

2.2 Messprogramm

Zuerst wird der Schaltplan gemäß <Hier referenz zu Schaltplan einfügen> aufgebaut. Der linke Schwingkreis soll hier über ein Rechteck-Signal des Sinus-Generators angeregt werden. Zum rechten Schwingkreis gelangt die Schwingungsenergie demnach ausschließlich über die gemeinsame Kopplungsleitung. Die über den Widerstand abfallende Spannung wird über den Y-Eingang an den Oszillographen gegeben. Dort kann jetzt der zeitliche Schwingungsverlauf der Spannung verfolgt werden. Von Interesse sei hier das Verhältnis von Schwingungs- zu Schwebungsfrequenz. Hierfür sind die Schwingungsmaxima zu zählen und durch die Anzahl der Schwebungen, in denen diese Schwingungsmaxima zu finden sind, zu teilen. Dies wird für verschiedene Werte der Kopplungskapazität gemacht, die auf die festen Werte 4,7 nF, 6,8 nF, 8,2 nF, 10,0 nF und 12,0 nF eingestellt werden kann. Niedrigere Frequenzen sind zwar auch möglich, wie aus Abbildung <HIER Referenz einfügen> ersichtlich ist, aber nicht sinnvoll. Die Anzahl der Schwingungen je Schwebung wäre zu gering und schwierig abzuzählen.

Als nächstes wird der Stromkreis anstelle von Rechteck-Schwingungen mit Sinus-Schwingungen erregt. Außerdem wird der Oszillograph erneut auf den XY-Modus gestellt und der Generator auf die X-Achse gegeben. Unter Variation der Kopplungskapazität sollen nun die Frequenzen ω_+ und ω_- gesucht und gemessen werden, also die Frequenzen, bei denen die Lissajous-Figur entsprechend einen Phasenunterschied von 0 beziehungsweise π indiziert. Zeitgleich dazu wird die über den ohmschen Widerstand $R = 48 \Omega$ abfallende Spannung gemessen, sodass im Anschluss daran der entsprechende Strom mit $U = RI$ berechnet werden kann, der sich aus dem Experiment ergibt.

3 Auswertung

3.1 Messdaten

Bei der Vorbereitung wird für den verwendeten Kondensator und die Spule eine Eigenfrequenz von $f_{\text{mess}} = 33,0 \text{ kHz}$ bei einer Phasendifferenz von 90° gemessen. Die Referenzwerte der Bauteile lauten $C = 0,8015 \text{ nF}$ und $L = 32,351 \text{ mH}$. Zudem weist die Spule eine Spulenkapazität von $C_{\text{Sp}} = 0,037 \text{ nF}$ auf. Der Kondensator mit regelbarer Kapazität wird entsprechend eingestellt, sodass der zweite Schwingkreis die gleiche Eigenfrequenz besitzt.

Tabelle 1: Anzahl Maxima der Schwebung.

C_K / nF	Schwingungsmaxima
4.7	
6.8	
8.2	
10.0	
12.0	

Tabelle 2: Resonanzfrequenzen verschiedener Kondensatoren.

f_- / kHz	f_+ / kHz	C_K / nF	<i>Amplitudenspannung</i> / mV
33.1	81.3	1.0	1830
33.1	61.1	2.2	1960
33.1	57.1	2.7	1883
33.1	48.7	4.7	2050
33.1	44.7	6.8	2160
33.1	42.8	8.2	1830
33.1	41.4	10.0	2030
33.1	40.2	12.0	2000

4 Diskussion

5 Anhang: originale Messdaten