

Versuch Nr. 101

## Das Trägheitsmoment

Antonia Joëlle Bock  
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner  
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.1.2020

Abgabe: 28.1.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Einleitung . . . . .	3
1.2	Trägheitsmoment . . . . .	3
1.3	Winkelrichtgröße . . . . .	4
1.4	Zusatz: Trägheitsmoment spezieller Körper . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>7</b>
2.1	Einleitung . . . . .	7
2.2	Apparatekonstante . . . . .	7
2.3	Eigenträgheit . . . . .	8
2.4	Trägheit der Körper . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
3.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße . . . . .	8
3.2	Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse . . . . .	9
3.3	Trägheitsmomente verschiedener Körper . . . . .	10
3.3.1	Der kleine Zylinder . . . . .	12
3.3.2	Der große Zylinder . . . . .	12
3.3.3	Die Holzpuppe in der ersten Pose . . . . .	13
3.3.4	Die Holzpuppe in der zweiten Pose . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>16</b>
	<b>Anhang: originale Messdaten</b>	<b>18</b>
	<b>Literatur</b>	<b>18</b>

# 1 Theorie

## 1.1 Einleitung

Im folgenden Experiment soll das Trägheitsmoment dreier unterschiedlicher Körper bestimmt werden. Zusätzlich wird ein Körper verwendet, welcher seine Geometrie verändern kann, aber seine Masse beibehält, wodurch geometrische Beziehungen zum Trägheitsmoment untersucht werden können.

## 1.2 Trägheitsmoment <sup>1</sup>

Analog zur Masse in der Translation wird für Rotationsbewegungen das Massenträgheitsmoment  $I$  verwendet. Für eine vollständige Beschreibung der Rotationsdynamik werden zusätzlich die Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}$  und das Drehmoment  $M$  benötigt. Letzteres ist das Äquivalent der Kraft  $F$  in der Translation. Im Vergleich wird die Beziehung deutlich

$$F = ma \quad , \quad M = I\dot{\omega} . \quad (1)$$

Dabei gilt für das Massenträgheitsmoment

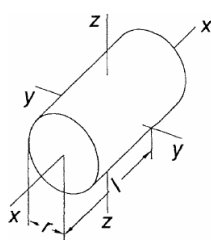
$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

für diskrete und

$$I = \int r^2 dm \quad (2)$$

für infinitesimale Massen.

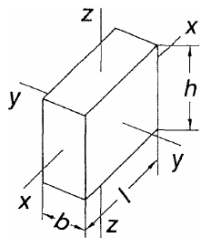
Da sich (2) aus den Massenabständen bezüglich einer Drehachse errechnet, ist die Bestimmung für einfache Geometrien nicht aufwendig und meist in Formelsammlungen zu finden. Bei komplexeren Körpern jedoch ist dies nicht mehr der Fall, sodass dieser mit den einfacheren Geometrien approximiert wird. Hilfreiche Referenzen sind Zylinder, dünne, lange Stäbe, Kugeln, Quader und Hohlzylinder, wobei Stäbe und Hohlzylinder Spezialfälle eines Zylinders darstellen.



Vollzylinder	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
dünne Scheibe ( $l \ll r$ )	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4}mr^2$
dünner Stab ( $l \gg r$ ) unabhängig von der Form des Querschnitts	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{12}ml^2$

Abbildung 1: Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders.[2]

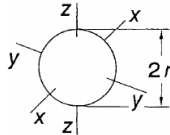
<sup>1</sup>Unter Verwendung der Quellen [2], [1]



Quader

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12} m(b^2 + h^2) \\ J_y &= \frac{1}{12} m(l^2 + h^2) \\ J_z &= \frac{1}{12} m(l^2 + b^2) \end{aligned}$$

Abbildung 2: Das Massenträgheitsmoment eines Quaders.[2]



Kugel, massiv

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mr^2$$

dünne Kugelschale

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} mr^2$$

Abbildung 3: Das Massenträgheitsmoment einer Kugel.[2]

In den Abbildungen gilt  $J \equiv I$ .

Es ist nicht immer der Fall, dass die Rotationsachse auch eine der oben angezeigten Körperachsen entspricht. Um das Massenträgheitsmoment dennoch ohne aufwendige Integration bestimmen zu können, wird der *Steiner'sche Satz* angewendet. Wenn  $I$  für eine der Trägheitsachsen bekannt ist, wird der gesamte Körper parallel zu dieser Achse verschoben und mit der Gleichung

$$I = I_U + ma^2 \quad (3)$$

berechnet. Hier entspricht  $I_U$  dem ursprünglichen Massenträgheitsmoment und  $a$  dem Abstand zur Achse, um die parallel verschoben wird.

### 1.3 Winkelrichtgröße

Das Direktionsmoment  $D$ , auch Winkelrichtgröße genannt, entspricht analog der Federkonstanten bei longitudinalen Auslenkungen. Das Moment ist also die Proportionalitätskonstante bei einer mechanischen Torsion zwischen dem Drehwinkel  $\vec{\varphi}$  und dem Drehmoment  $\vec{M}$

$$\vec{M} = D \cdot \vec{\varphi} \quad , \quad \vec{F} = k \cdot \vec{s} \quad (4)$$

Zudem gilt die Beziehung

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \quad , \quad (5)$$

wobei  $\vec{F}$  einer angreifenden Kraft auf den drehbaren Körper bei dem Abstand  $\vec{r}$  entspricht. Das Drehmoment  $M$  ist bei Spiralfedern eine lineare Funktion der Auslenkung  $\varphi$  mit dem Konstanten Vorfaktor  $D$ . Es stellt also eine rücktreibende Kraft dar, die auf den drehbaren Körper wirkt. Durch die lineare Natur des Drehmoments entspricht die Dynamik die einer harmonischen Schwingung bei vorhandener Auslenkung. Die bei realen Schwingern vorhandene Dämpfung wird für diesen Versuch nicht berücksichtigt.

Die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz einer harmonischen, longitudinalen Federschwingung wird vorausgesetzt als

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Durch die in (1) gezeigte Analogie ergibt<sup>2</sup> sich dann für  $T$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (7)$$

Das Direktionsmoment  $D$  wird in einer *statischen Methode* durch Messung der Auslenkung  $\varphi$  als Funktion der Kraft  $F$  mit (5) und (4) berechnet. Ist das Massenträgheitsmoment  $I$  bekannt, wird  $D$  in einer *dynamischen Methode* durch Messung der Schwingungsdauer  $T$  mit (7) bestimmt.

## 1.4 Zusatz: Trägheitsmoment spezieller Körper

**Abgeschnittene Kugel** Für die Auswertung bestimmter Körper sei hier noch ein etwas speziellerer Körper vorgestellt, mit seiner Masse und seinem Trägheitsmoment. Es handelt sich um eine Kugel mit Radius  $R$ , die oben und unten zu gleichen Anteilen „abgeschnitten“ ist, sodass sie die Höhe  $h < R$  besitzt. Die verwendeten Kugelkoordinaten lauten

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta). \quad (8)$$

Zur Berechnung des Volumens wird der Körper in zwei Zylinder und einen Kugelkörper, für dessen Polarwinkel  $\arccos(\frac{h}{2R}) \leq \vartheta \leq \pi - \arccos(\frac{h}{2R})$  gilt, aufgeteilt. Die Zylinder haben eine Höhe von  $h/2$  und einen Radius von  $a = \sqrt{R^2 - h^2/4}$ .

$$V_1 = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=\arccos \frac{h}{2R}}^{\pi-\arccos \frac{h}{2R}} r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \quad (9)$$

$$= \left(\frac{1}{3}R^3\right)\left(2\frac{h}{2R}\right)(2\pi) \quad (10)$$

$$= \frac{2}{3}\pi h R^2 \quad (11)$$

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} X_{\text{Grundfläche}} Y_{\text{Höhe}} \quad (12)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \left( \pi \left( R^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right) \right) \frac{h}{2} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{3} \pi h \left( R^2 - \frac{h^2}{4} \right) = \pi h \left( \frac{R^2}{3} - \frac{h^2}{12} \right) \quad (14)$$

$$V = V_1 + V_2 = \pi h \left( R^2 - \frac{h^2}{12} \right) \quad (15)$$

---

<sup>2</sup>In realen Fällen muss beachtet werden, dass die Drillachse ein eigenes Trägheitsmoment  $I_D$  besitzt, welches für genaue Berechnungen zuerst bestimmt werden muss.

$$I_1 = \rho_0 \int_V r_{\perp}^2 dV \quad | \quad r_{\perp}^2 = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta \quad (16)$$

$$= \rho_0 \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=\arccos \frac{h}{2R}}^{\pi-\arccos \frac{h}{2R}} r^4 \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) d\vartheta d\varphi dr \quad (17)$$

$$= \rho_0 2\pi \frac{1}{5} R^5 \left[ -\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_{\arccos \frac{h}{2R}}^{\pi-\arccos \frac{h}{2R}} \quad (18)$$

$$= \frac{m_1}{\frac{2\pi}{3} h R^2} \frac{2\pi}{5} R^5 \left( \frac{h}{R} + \frac{h^3}{12R^3} \right) \quad (19)$$

$$= \frac{3}{5} m_1 \left( R^2 + \frac{h^2}{12} \right) \quad (20)$$

$$I_{\text{Kegel}} = \frac{3}{10} m r^2 \quad (21)$$

$$I_2 = \frac{3}{5} m_2 \left( R^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (22)$$

$$(23)$$

$$m_1 = \frac{V_1}{V} m = \frac{\frac{2}{3} \pi h R^2}{\pi h \left( R^2 - \frac{h^2}{12} \right)} m = \frac{8R^2}{12R^2 - h^2} m \quad (24)$$

$$m_2 = \frac{V_2}{V} m = \frac{\frac{1}{3} \pi h \left( R^2 - \frac{h^2}{4} \right)}{\pi h \left( R^2 - \frac{h^2}{12} \right)} m = \frac{4R^2 - h^2}{12R^2 - h^2} m \quad (25)$$

$$I_1 = \frac{3}{5 \cdot 12} (12R^2 + h^2) \frac{8R^2}{12R^2 - h^2} m = \frac{2}{5} \cdot \frac{12R^2 + h^2}{12R^2 - h^2} R^2 m \quad (26)$$

$$I_2 = \frac{3}{5 \cdot 4} (4R^2 - h^2) \frac{4R^2 - h^2}{12R^2 - h^2} m = \frac{3}{20} \frac{(4R^2 - h^2)^2}{12R^2 - h^2} m \quad (27)$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{5} \frac{12R^2 + h^2}{12R^2 - h^2} R^2 m + \frac{3}{20} \frac{(4R^2 - h^2)^2}{12R^2 - h^2} m \quad (28)$$

$$= \frac{1}{12R^2 - h^2} \frac{m}{20} (8 \cdot (12R^2 + h^2) R^2 + 3 \cdot (4R^2 - h^2)^2) \quad (29)$$

**Kegelstumpf** Der Kegelstumpf habe die Höhe  $h$  und die Radien  $R_{\max}$  und  $R_{\min}$ . Für die folgenden Betrachtungen sei an dieser Stelle festgelegt, dass die Größen bezüglich des Kegels mit Radius  $r = R_{\max}$  und mit dem gleichen Neigungswinkel der Mantelfläche wie beim Kegelstumpf mit dem Index „groß“ versehen werden. Dem Kegel mit  $r = R_{\min}$  und ebenfalls gleichem Neigungswinkel sei der Index „diff“ zugehörig.

Mithilfe der Kongruenzsätze lassen sich die Volumina von beiden Kegeln berechnen, sowie die Massen dieser:

$$h_{\text{groß}} = \frac{h}{R_{\text{max}} - R_{\text{min}}} R_{\text{max}} \quad (30)$$

$$h_{\text{diff}} = \frac{h}{R_{\text{max}} - R_{\text{min}}} R_{\text{max}} - h \quad (31)$$

$$V_{\text{groß}} = \frac{1}{3}(\pi R_{\text{max}}^2) \left( \frac{h}{R_{\text{max}} - R_{\text{min}}} R_{\text{max}} \right) \quad (32)$$

$$V_{\text{diff}} = \frac{1}{3}(\pi R_{\text{min}}^2) \left( \frac{h}{R_{\text{max}} - R_{\text{min}}} R_{\text{max}} - h \right) \quad (33)$$

$$V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{groß}} - V_{\text{diff}} \quad (34)$$

$$m_{\text{groß}} = \frac{V_{\text{groß}}}{V_{\text{Stumpf}}} m_{\text{Stumpf}} \quad (35)$$

$$m_{\text{diff}} = \frac{V_{\text{diff}}}{V_{\text{Stumpf}}} m_{\text{Stumpf}} \quad (36)$$

Werden diese Formeln nun in die folgenden Gleichungen eingesetzt, kann auf die Gleichung des Trägheitsmoments eines Kegelstumpfs geschlussfolgert werden.

$$I_{\text{Kegel}} = \frac{3}{10} m R^2 \quad (37)$$

$$I_{\text{groß}} = \frac{3}{10} m_{\text{groß}} R_{\text{max}}^2 \quad (38)$$

$$I_{\text{diff}} = \frac{3}{10} m_{\text{diff}} R_{\text{min}}^2 \quad (39)$$

$$I_{\text{Stumpf}} = I_{\text{groß}} - I_{\text{diff}} \quad (40)$$

## 2 Durchführung

### 2.1 Einleitung

Ziel des Versuchs ist es, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu bestimmen. Hierfür wird ein Stativ verwendet, an dem eine Spiralfeder angebracht ist. Die Spiralfeder ist nach oben beziehungsweise unten ausgerichtet. In der Mitte der Feder befindet sich eine zylinderförmige Halterung, welche nach oben gerichtet ist und sich frei bewegen kann. Das äußere Ende ist an dem Stativ angebracht, welches U-förmig um die Spiralfeder herum führt. Auf dem Stativ befindet sich eine Scheibe mit einem Loch, an der man Winkel ablesen kann. Durch das Loch führt die Halterung, welche mittig aus der Feder hervorgeht. Mit dieser Konfiguration können Objekte an der Halterung angebracht und Auslenkungen an der Lochscheibe abgelesen werden.

### 2.2 Apparatekonstante

Zu Beginn werden Messungen durchgeführt, um die Apparatekonstante  $D$  zu bestimmen. Dazu wird eine lange, leichte Stange horizontal an der Halterung befestigt. Daraufhin

wird die Winkelscheibe so ausgerichtet, dass sich Auslenkungen genau ablesen lassen. Mit einer Federwaage, welche Kräfte bis zu 1 N misst, wird die Stange nun an einer anfangs beliebigen Stelle ausgelenkt. Dabei ist es wichtig, dass die Federwaage orthogonal an der Stange zieht, und nicht abgewinkelt. So muss kein Winkel beim Betrag des Drehmoments  $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$  berücksichtigt werden. Die Kraft wird in Abhängigkeit des Winkels aufgeschrieben und die Messung insgesamt zehn mal durchgeführt. Hierbei wird ausschließlich die Auslenkung beziehungsweise die Kraft, jedoch nicht der Abstand zur Drillachse variiert. Es werden also alle Messungen mit demselben Abstand durchgeführt.

## 2.3 Eigentragheit

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der Drillachse selbst werden zwei Gewichte verwendet, deren Masse zunächst gewogen wird. Die Massen sind Hohlzylinder und besitzen eine Feststellschraube, um sie auf der Stange fixieren zu können. Es wird an je einer Seite der Stange eine Masse angebracht. Wenn sie fixiert sind, wird der Abstand zur Drillachse notiert und die Stange anschließend sehr leicht, um etwa 10°-20° ausgelenkt. Nach dem Loslassen wird die Schwingungsdauer der Stange gemessen. Dies wird insgesamt zehn mal unter Variation des Abstands der Massen zur Drehachse durchgeführt.

## 2.4 Trägheit der Körper

Für die Messungen der einzelnen Testkörper wird immer gleich vorgegangen. Der Körper wird an der Halterung befestigt und anschließend um 10°-20° ausgelenkt. Daraufhin wird die Schwingungsdauer gemessen. Dies wird fünf Mal wiederholt. Gemessen werden die Werte für zwei beliebige Körper und für eine menschliche Gliederpuppe aus Holz. Alle Testkörper werden gewogen und ausgemessen. Die Holzpuppe kann beliebig klein angenähert, jedoch mindestens in sechs Einzelteile aufgeteilt werden; Kopf, zwei Arme, zwei Beine, Torso. Die Holzfigur wird in verschiedene Posen gebracht, zu der jeweils fünf Messwerte nach obiger Beschreibung aufgenommen werden. Zudem wird die Geometrie der Posen vermessen und notiert, um im Anschluss das Trägheitsmoment bestimmen zu können.

# 3 Auswertung

## 3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Messung wird mit einem senkrechten Abstand von  $r = 4,0 \text{ cm}$  durchgeführt. Der Auslenkwinkel  $\varphi$  und die aufgewendete Kraft  $F$  sind in 1 dargestellt, ebenso wie die sich daraus ergebenden Werte für die Winkelrichtgröße  $D$ . Sie berechnet sich, wie aus der Theorie zu entnehmen ist, über

$$D = \frac{Fr}{\varphi}. \quad (41)$$



**Tabelle 1:** Messwerte zur Bestimmung der Winkelrichtgröße.

$\varphi$	$\varphi / \pi$	$F / \text{N}$	$D / 10^{-3} \text{ N m}$
26°	0,14	0,19	17,3
30°	0,17	0,21	15,7
37°	0,21	0,29	17,6
45°	0,25	0,41	20,9
60°	0,33	0,49	18,9
70°	0,39	0,61	19,9
81°	0,45	0,70	19,8
93°	0,52	0,74	18,1
100°	0,56	0,91	20,7
110°	0,61	0,97	20,2

Somit ergibt sich als experimenteller Wert  $D = (18,9 \pm 1,6) \cdot 10^{-3} \text{ N m}$  für die Winkelrichtgröße. Die Abweichung der Größe berechnet sich über

$$\Delta D = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2} \quad (42)$$

mit dem arithmetischen Mittel  $\bar{D}$ .

### 3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

Im Folgenden sei die Annahme eines nahezu masselosen Stabs, an dem zwei Punktmassen – demnach ohne Ausdehnung – gleicher Masse  $m = 222,89 \text{ g}$  befestigt sind. In 2 sind die Messwerte entsprechend dargestellt. Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Quadraten der Periode  $T$  und dem Abstand  $a$  der Massen:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + m(a_1^2 + a_2^2)) =: \frac{4\pi^2}{D} (I_D + ma^2) \quad (43)$$

Nun werden diese Werte in einem Diagramm aufgetragen. Mithilfe linearer Regression lässt sich aus dem Y-Achsenabschnitt  $b$  das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  bestimmen. Die Steigung  $c$  ergibt sich unter Vergleich mit (43) aus

$$y = b + cx \quad (44)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + ma^2) \quad (45)$$

$$\Rightarrow y = T^2, \quad b = \frac{4\pi^2}{D} I_D, \quad c = \frac{4\pi^2}{D} m, \quad x = a^2 \quad (46)$$

Unter Zuhilfenahme von **Python 3.7.3** wird die lineare Regression durchgeführt, wie in Abbildung 4 zu sehen ist, und es ergibt sich der y-Achsenabschnitt  $b = (4,42 \pm 0,25) \text{ s}^2$

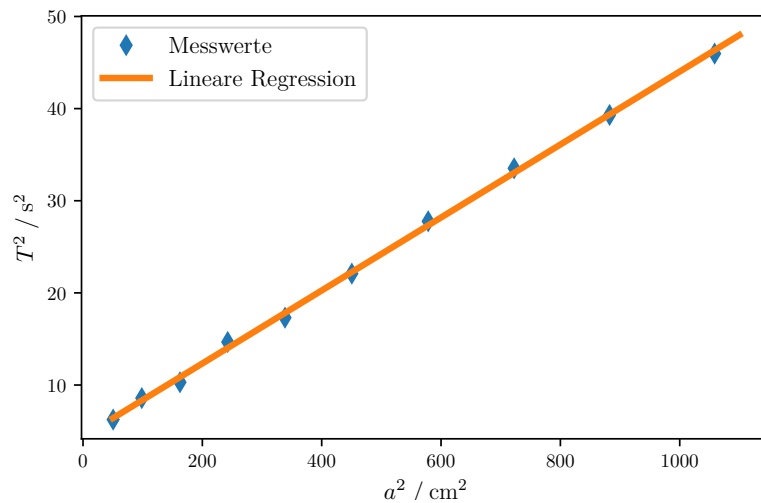
**Tabelle 2:** Messwerte zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments  $I_D$ .

$a_1 / \text{cm}$	$a_2 / \text{cm}$	$(a_1^2 + a_2^2) / \text{cm}^2$	$T / \text{s}$	$T^2 / \text{s}^2$
4,5	5,5	50,5	2,50	6,25
6,5	7,5	98,5	2,93	8,58
8,5	9,5	162,5	3,21	10,30
10,5	11,5	242,5	3,83	14,67
12,5	13,5	338,5	4,16	17,31
14,5	15,5	450,5	4,70	22,09
16,5	17,5	578,5	5,27	27,77
18,5	19,5	722,5	5,79	33,52
20,5	21,5	882,5	6,27	39,31
22,5	23,5	1058,5	6,78	45,97

und eine Steigung von  $c = (396,0 \pm 4,4) \text{ kg/J}$ . Daraus lässt sich das Eigenträgheitsmoment zu

$$I_D = \frac{D}{4\pi^2} b = \frac{m}{c} b = (2,49 \pm 0,14) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (47)$$

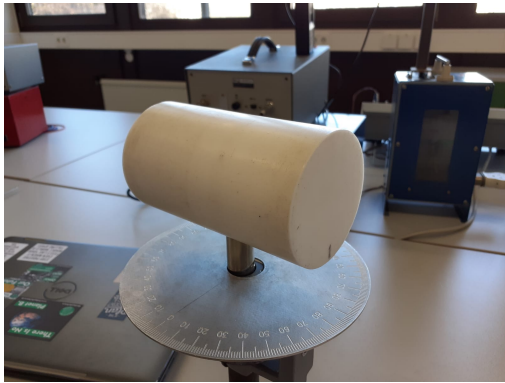
bestimmen.



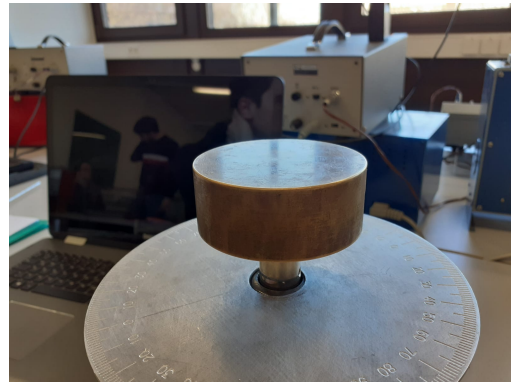
**Abbildung 4:** Lineare Regression zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments.

### 3.3 Trägheitsmomente verschiedener Körper

In den Tabellen 3 und 4 sind die Messwerte aufgetragen, die zur Bestimmung der Trägheitsmomente zweier verschiedener Zylinder und einer Holzpuppe in zwei unterschiedlichen Posen aufgenommen worden sind. In 4 berechnet sich der Messfehler ebenfalls über (42).

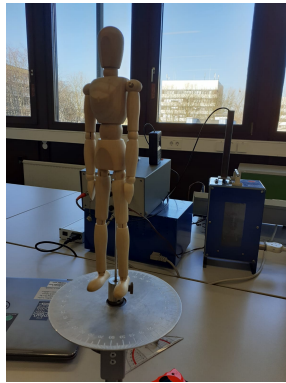


(a) Der große Zylinder.

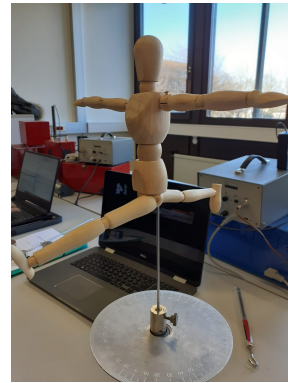


(b) Der kleine Zylinder.

**Abbildung 5:** Die verwendeten Zylinder und ihre Drehachsen im Experiment.



(a) Pose 1.



(b) Pose 2.

**Abbildung 6:** Die Holzpuppe in zwei verschiedenen Stellungen.

**Tabelle 3:** Messwerte aller Schwingungsdauern.

$T_{\text{Zyl,gro\ss}} / \text{s}$	$T_{\text{Zyl,klein}} / \text{s}$	$T_{\text{Pose1}} / \text{s}$	$T_{\text{Pose2}} / \text{s}$
1.08	2.31	0.38	0.92
1.27	2.23	0.41	0.89
1.13	2.17	0.43	0.94
1.18	2.30	0.39	0.91
1.16	2.26	0.41	0.91

**Tabelle 4:** Messunsicherheiten aller Schwingungsdauern.

	T / s
großer Zylinder	$2,25 \pm 0,05$
kleiner Zylinder	$1,16 \pm 0,06$
Holzfigur Pose 1	$0,40 \pm 0,02$
Holzfigur Pose 2	$0,91 \pm 0,02$

### 3.3.1 Der kleine Zylinder

**Tabelle 5:** Maße des kleinen Zylinders und der zugehörigen Halterung.

Zylinder		Halterung	
$m$	1119,4 g	$h$	1,8 cm
$h$	3,0 cm	$d$	0,6 cm
$d$	7,45 cm		

Das erwartete Trägheitsmoment anhand der geometrischen Abmessungen ist

$$m_{\text{ges}} = 1119,4 \text{ g}, \quad m_{\text{Zyl}} = m_{\text{ges}} \frac{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}}}{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}} + d_{\text{Halt}}^2 h_{\text{Halt}}} = 1115,1 \text{ g} \quad (48)$$

$$m_{\text{Halt}} = m_{\text{ges}} - m_{\text{Zyl}} = 4,3 \text{ g} \quad (49)$$

$$I_{\text{kl,geo}} = \frac{1}{2} m_{\text{Zyl}} \frac{d_{\text{Zyl}}^2}{4} + \frac{1}{2} m_{\text{Halt}} \frac{d_{\text{Halt}}^2}{4} = 7,74 \text{ kg cm}^2. \quad (50)$$

Wird hingegen die gemittelte Periode und die Winkelrichtgröße inklusive der Messfehler verwendet, um über

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (51)$$

das Trägheitsmoment zu berechnen, ergibt sich

$$I'_{\text{kl,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (6,44 \pm 0,55) \text{ kg cm}^2. \quad (52)$$

Von diesem Wert müsste eigentlich noch das Trägheitsmoment der Drillachse von  $I_{\text{D}} = (24,9 \pm 1,4) \text{ kg cm}^2$  abgezogen werden. Da sich für diesen Fall jedoch ein negativer Wert für den kleinen Zylinder ergeben würde und dies unphysikalisch ist, kann es sich hierbei nur um einen Messfehler handeln.

### 3.3.2 Der große Zylinder

Dasselbe Verfahren wird nun für den großen Zylinder angewendet, mit dem Unterschied, dass die Drehachse hier senkrecht zur Symmetrieachse des Zylinders steht und deshalb eine etwas abgewandelte, in der Theorie erläuterte Formel verwendet wird.

**Tabelle 6:** Maße des großen Zylinders und der zugehörigen Halterung.

Zylinder		Halterung	
$m$	1525,6 g	$h$	1,4 cm
$h$	13,95 cm	$d$	0,55 cm
$d$	7,95 cm		

$$m_{\text{ges}} = 1525,6 \text{ g}, \quad m_{\text{Zyl}} = m_{\text{ges}} \frac{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}}}{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}} + d_{\text{Halt}}^2 h_{\text{Halt}}} = 1524,9 \text{ g} \quad (53)$$

$$m_{\text{Halt}} = m_{\text{ges}} - m_{\text{Zyl}} = 0,7 \text{ g} \quad (54)$$

$$I_{\text{gr,geo}} = m_{\text{Zyl}} \left( \frac{d_{\text{Zyl}}^2}{16} + \frac{h_{\text{Zyl}}^2}{12} \right) + \frac{1}{2} m_{\text{Halt}} \frac{d_{\text{Halt}}^2}{4} = 30,75 \text{ kg cm}^2 \quad (55)$$

$$I'_{\text{gr,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (24,24 \pm 2,32) \text{ kg cm}^2 \quad (56)$$

Auch hier ergibt sich nach Abzug des Eigenträgheitsmoments ein negativer, unphysikalischer Wert für das Trägheitsmoment.

### 3.3.3 Die Holzpuppe in der ersten Pose

Zuerst wird das sich aus der Periodendauer ergebende Trägheitsmoment wie bei den Zylindern berechnet:

$$I'_{\text{P1,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (0,77 \pm 0,10) \text{ kg cm}^2 \quad (57)$$

$$I_{\text{P1,T}} = I'_{\text{P1,T}} - I_{\text{D}} < 0 \quad (58)$$

Nun wird anhand geometrischer Annäherungen das Trägheitsmoment bestimmt; die zugehörigen Formeln für Volumina und ihre Trägheitsmomente sind in 1.4 zu finden. Die Masse der Puppe beläuft sich auf einen Wert von  $m = 116,29 \text{ g}$ . Die Beine werden als je zwei Zylinder – Ober- und Unterschenkel – mit einem Abstand von etwa  $a_{\text{Beine}} = 1,25 \text{ cm}$  zwischen Dreh- und Symmetrieachse angenähert.

$$l_{\text{Ober}} = 6,0 \text{ cm} \quad d_{\text{Ober}} = 1,8 \text{ cm} \quad V_{\text{Ober}} = 15,3 \text{ cm}^3 \quad (59)$$

$$l_{\text{Unter}} = 7,0 \text{ cm} \quad d_{\text{Unter}} = 1,6 \text{ cm} \quad V_{\text{Unter}} = 14,1 \text{ cm}^3 \quad (60)$$

Die Füße werden als zwei liegende, entlang der Symmetrieachse durchgeschnittene Zylinder betrachtet, die den gleichen Abstand zur Drehachse wie die Beine haben:  $a_{\text{Füße}} = a_{\text{Beine}}$ .

$$l_{\text{Fuß}} = 4,2 \text{ cm} \quad R_{\text{Fuß}} = 0,7 \text{ cm} \quad V_{\text{Fuß}} = 3,2 \text{ cm}^3 \quad (61)$$

Die Symmetrieachsen des Beckens, des Torsos und des kugelförmigen Verbindungsstücks sowie des Kopf fallen mit der Drehachse zusammen. Das Becken wird als aufrecht stehender Zylinder angesehen:

$$R_{\text{Becken}} = 2,0 \text{ cm} \quad h_{\text{Becken}} = 3,3 \text{ cm} \quad V_{\text{Becken}} = 41,5 \text{ cm}^3 \quad (62)$$

Zwischen dem als Quader angenäherten Torso und dem Becken befindet sich eine Kugel, die oben und unten jeweils um die gleiche Differenz abgeschnitten ist.

$$b_{\text{Torso}} = 4,0 \text{ cm} \quad h_{\text{Torso}} = 5,0 \text{ cm} \quad (63)$$

$$t_{\text{Torso}} = 4,7 \text{ cm} \quad V_{\text{Torso}} = 94,0 \text{ cm}^3 \quad (64)$$

$$R_{\text{Kugel}} = 1,4 \text{ cm} \quad h_{\text{Kugel}} = 1,8 \text{ cm} \quad (65)$$

$$V_{\text{Kugel}} = 9,6 \text{ cm}^3 \quad (66)$$

Der längliche Kopf wird als umgedrehter Kegelstumpf genähert.

$$h_{\text{Kopf}} = 5,0 \text{ cm} \quad R_{\text{oben}} = 1,9 \text{ cm} \quad R_{\text{unten}} = 1,4 \text{ cm} \quad (67)$$

$$V_{\text{Kopf}} = 43,1 \text{ cm}^3 \quad (68)$$

Die zylinderförmigen Arme und Hände haben einen durchschnittlichen Abstand von  $a_{\text{Arme}} = 3,0 \text{ cm}$  zur Drehachse.

$$l_{\text{Ober}} = 5,5 \text{ cm} \quad l_{\text{Unter}} = 4,5 \text{ cm} \quad l_{\text{Hand}} = 3,0 \text{ cm} \quad (69)$$

$$R_{\text{Ober}} = 0,75 \text{ cm} \quad R_{\text{Unter}} = 0,75 \text{ cm} \quad R_{\text{Hand}} = 0,75 \text{ cm} \quad (70)$$

$$V_{\text{Ober}} = 9,7 \text{ cm}^3 \quad V_{\text{Unter}} = 8,0 \text{ cm}^3 \quad V_{\text{Hand}} = 5,3 \text{ cm}^3 \quad (71)$$

Aus diesen Werten lässt sich nun mittels einer einfachen Dreisatzrechnung das Gesamtvolumen und mithilfe der Gesamtmasse  $m_{\text{Ges}} = 116,29 \text{ g}$  die Teilmassen der Körperteile bestimmen, woraus im Anschluss das Trägheitsmoment jeweils errechnet wird.

Werden alle in 8 notierten Trägheitsmomente entsprechend ihrer Anzahl addiert, ergibt sich ein Gesamt-Trägheitsmoment von

$$I_{\text{geo, Pose1}} = 232,1 \text{ kg cm}^2. \quad (72)$$

**Tabelle 7:** Volumina und Massen der einzelnen Körperteile.

Körperteil	Anzahl	$V_i / \text{cm}^3$	$m_i / \text{g}$
Oberschenkel	2	15,3	5,8
Unterschenkel	2	14,2	5,4
Fuß	2	6,5	2,5
Becken	1	41,5	15,8
Torso	1	94,0	35,7
Kugel	1	9,6	3,6
Kopf	1	43,1	16,4
Oberarm	2	9,7	3,7
Unterarm	2	8,0	3,0
Hand	2	5,3	2,0
$V_{\text{Ges}} = 306,2 \text{ cm}^3$		$m_{\text{Ges}} = 116,29 \text{ g}$	

**Tabelle 8:** Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile unter Berücksichtigung des Satzes von Steiner.

Körperteil	Anzahl	$I_i / \text{kg cm}^2$
Oberschenkel	2	11,4
Unterschenkel	2	10,2
Fuß	2	5,9
Becken	1	31,6
Torso	1	113,3
Kugel	1	4,2
Kopf	1	23,2
Oberarm	2	1,0
Unterarm	2	0,8
Hand	2	0,6

### 3.3.4 Die Holzpuppe in der zweiten Pose

Das sich aus der Periodendauer ergebende Trägheitsmoment ist:

$$I'_{P2,T} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (4,0 \pm 0,4) \text{ kg cm}^2 \quad (73)$$

$$I_{P2,T} = I'_{P2,T} - I_D < 0 \quad (74)$$

Zur geometrischen Berechnung des Trägheitsmoment wird festgestellt, dass die des Torsos, der abgeschnitten Kugel, des Beckens und des Kopfes übernommen werden können. Die Beine und Arme seien nahezu horizontal positioniert und werden mit den gleichen geometrischen Körpern angenähert wie bei der ersten Pose. Die Arme sind somit diesmal horizontal ausgerichtete Zylinder, ebenso wie die Hände und die Beine. Die Füße sind vertikal aufgestellte Halbzylinder. Die Abstände vom Schwerpunkt der Zylinder zur Drehachse sind

$$a_{\text{Hand}} = 14,2 \text{ cm}, \quad a_{\text{Unterarm}} = 10,4 \text{ cm}, \quad a_{\text{Oberarm}} = 5,4 \text{ cm}, \quad (75)$$

$$a_{\text{Fuß}} = 14,0 \text{ cm}, \quad a_{\text{Unterschenkel}} = 10,2 \text{ cm}, \quad a_{\text{Oberschenkel}} = 3,8 \text{ cm}. \quad (76)$$

Daraus ergeben sich die in 9 aufgeführten Werte und ein Trägheitsmoment von

$$I_{\text{geo,Pose2}} = 3260,3 \text{ kg cm}^2 \quad (77)$$

**Tabelle 9:** Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile in Pose 2 unter Berücksichtigung des Satz von Steiner.

Körperteil	Anzahl	$I_i / \text{kg cm}^2$
Oberschenkel	2	102,3
Unterschenkel	2	584,7
Fuß	2	4,2
Becken	1	31,6
Torso	1	113,3
Kugel	1	4,2
Kopf	1	23,2
Oberarm	2	117,7
Unterarm	2	330,0
Hand	2	405,1

## 4 Diskussion

Es fällt auf, dass das Trägheitsmoment der Drillachse vergleichsweise hoch ist. Hierdurch ergeben sich schnell negative Momente für die einzelnen Körper. Dafür jedoch ist der erwartete Wert des kleinen Zylinders  $I_{\text{kl,geo}} = 7,74 \text{ kg}^2 \text{ cm}$  zufriedenstellend nahe an dem gemessenen Wert  $(6,44 \pm 0,55) \text{ kg}^2 \text{ cm}$ .



Gleiches gilt für den großen Zylinder mit  $I_{\text{gr,geo}} = 30,75 \text{ kg}^2 \text{ cm}$  und dem gemessenen Wert  $(24,24 \pm 2,32) \text{ kg}^2 \text{ cm}$ .

Auch bei der Puppe ergeben sich negative Massenträgheitsmomente nach Abziehen von  $I_D$ . Mögliche Gründe sind systematische Fehler der Messungen. Da sich diese aus vielen einzelnen Prozessen zusammensetzen, können Fehler beim Wiegen, der Längenmessungen, des Ablesens des Kraftmessers und der Auslenkungen, insbesondere aber beim Stoppen der Zeit nicht ausgeschlossen werden. Gerade bei der Holzpuppe ergeben sich sehr kurze Periodendauern, wodurch relative Fehler zunehmen. Außerdem ist die Holzpuppe nicht vollkommen starr und wackelt deutlich, sodass sie bei den Drehungen etwas nachgibt, anstatt träge zu sein.

Letztlich kann auch nicht ausgeschlossen werden, dass die Körper zu weit ausgelenkt werden. Da es sich bei der Theorie um Kleinwinkelnäherungen handelt, können etwas größere Auslenkungen die Messergebnisse stark verfälschen und unbrauchbar, oder vielmehr unplausibel machen.

Um auf andere Weise einen Vergleich der Messwerte auf ihre Validität hin zu erhalten, kann das Verhältnis der experimentellen Werte dem der theoretischen Werte gegenübergestellt werden:

$$\frac{I_{\text{geo,Pose1}}}{I_{\text{geo,Pose2}}} = 7,12 \% \qquad \frac{I'_{\text{P1,T}}}{I'_{\text{P2,T}}} = 19,25 \% \qquad (78)$$

Auch an dieser Stelle ist zu erkennen, dass die Abweichungen sehr groß sind und diese mit hoher Wahrscheinlichkeit unter dem Einfluss systematischer Messfehler zustandekommen. Somit erhärtet sich an dieser Stelle die Annahme, dass es sich hierbei um keine mit der Theorie konsistenten Messwerte handeln kann.

## Anhang: originale Messdaten

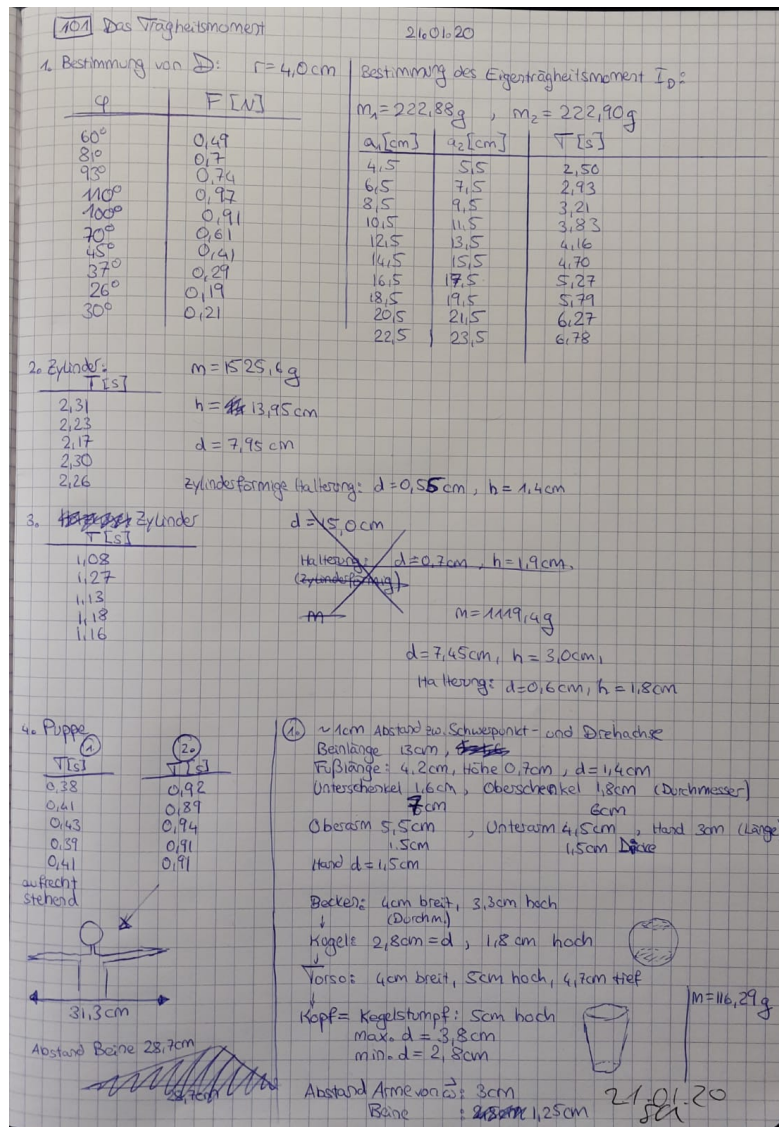


Abbildung 7: Originale Messdaten.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V101: Trägheitsmoment*. 2019.
- [2] Ekbert Hering, Rolf Martin und Martin Stohrer. *Taschenbuch der Mathematik und Physik*. 6. Aufl. Springer Vieweg, 2017.