

Versuch Nr. 353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Antonia Joëlle Bock

antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner

rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.01.2020

Abgabe: 21.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie	3
1.1 Einleitung	3
1.2 Auf- und Entladen von Kondensatoren bei Gleichspannung	3
1.3 Einfluss der Wechselspannung auf Amplitude und Phasenverschiebung .	4
1.4 Integration mithilfe eines RC-Kreises	5
2 Durchführung	5
2.1 Einleitung	5
2.2 Allgemeiner Aufbau	5
2.3 Messungen	6
2.3.1 Zeitkonstante	6
2.3.2 Frequenzabhängige Messungen	6
2.3.3 Integratorspannung	6
3 Auswertung	7
3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten	7
3.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude und der Phasenverschiebung . .	9
3.3 Der RC-Kreis als Integrator	11
4 Diskussion	12
4.1 Anregung durch eine Rechteckspannung	12
4.2 Integrieren der Generatorspannung	12
Anhang: originale Messdaten	14
Literatur	14

1 Theorie¹

1.1 Einleitung

Im folgenden Experiment soll das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises – also einer Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator der Kapazität C , die mit einer Spannungsquelle verbunden sind – untersucht werden. Sowohl Gleichspannung als auch verschiedene Wechselspannungsformen sind hinsichtlich ihres Einflusses auf die Ladevorgänge des Kondensators von Interesse für den Versuch.

1.2 Auf- und Entladen von Kondensatoren bei Gleichspannung

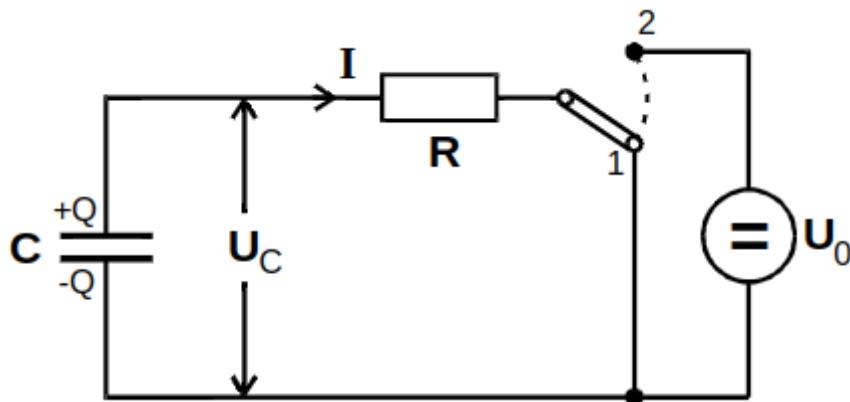


Abbildung 1: Ein typischer RC-Kreis.

In Abbildung 1 ist ein typischer RC-Kreis zu sehen. Eine Gleichspannung U_0 kann den Kondensator über den Widerstand aufladen, wenn der Schalter in Position 2 ist. Entladen wird er, wenn Schalterposition 1 benutzt wird. Hier und im Folgenden wird die am Kondensator anliegende, der Speisespannung entgegengesetzte Spannung durch den Variablenamen $U_C(t)$ dargestellt.

Um einen quantitativen Zusammenhang zwischen den Größen herzustellen, werden die Kirchhoff'schen Gesetze angewendet:

$$U_0 = RI(t) + U_C(t) \quad (1)$$

Der Strom $I(t)$ entspricht der Ladungsänderung $\dot{Q}(t)$ auf den Kondensatorplatten, außerdem definiert sich die Kapazität eines Kondensators über $C = Q/U_C$. Durch Einsetzen in (1) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC}U_C(t) = \frac{1}{RC}U_0, \quad (2)$$

¹Unter Verwendung der Quelle [1].

die sich mit dem Ansatz

$$\int_{U_C(0)}^{U_C(t)} \frac{RC}{U_0 - U_C} dU_C = \int_0^t dt \quad (3)$$

lösen lässt zu

$$U_C(t) = U_0 + (U_C(0) - U_0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4)$$

Das Aufladen geschieht demnach gemäß

$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (5)$$

Die Differentialgleichung des Entladevorgangs besitzt keine Inhomogenität wie (2), unterscheidet sich abgesehen davon aber nicht. Sie wird erfüllt durch die Gleichung

$$U_C(t) = U_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (6)$$

Beiden Lösungstermen ist die Zeitkonstante $\tau = RC$ gemein, die konventionellerweise eine Kenngröße des jeweiligen RC-Kreises darstellt: Nach einer Zeit von $t = \tau$ hat sich die jeweilig zu betrachtende Größe um etwa 63.2% ihrem Langzeitzustand angenähert.

1.3 Einfluss der Wechselspannung auf Amplitude und Phasenverschiebung

Wird nun eine periodische Wechselspannung der Form $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ angelegt, bekommt die Differentialgleichung eine entsprechende periodische Inhomogenität:

$$\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC}U_C(t) = \frac{1}{RC}U_0 \cos(\omega t). \quad (7)$$

Da hier ausschließlich der Fall betrachtet wird, dass der Kondensator am Anfang ungeladen ist, ist die homogene Lösung $U_{C,\text{hom}}(t) = A \exp(-t/RC)$ an dieser Stelle nicht relevant (weil $A = 0$). Wird der Ansatz der rechten Seite $U_C(t) = D \sin(\omega t) + E \cos(\omega t)$ in (7) eingesetzt, ergeben sich folgende Umformungen:

$$\stackrel{\text{in (7)}}{\rightarrow} \omega D \cos(\omega t) - \omega E \sin(\omega t) + \frac{D}{RC} \sin(\omega t) + \frac{E}{RC} \cos(\omega t) \stackrel{!}{=} \frac{U_0}{RC} \cos(\omega t) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow D = RC\omega E \quad \wedge \quad \omega D + \frac{E}{RC} = \frac{U_0}{RC} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{U_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad \wedge \quad D = \frac{RC\omega U_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (10)$$

$$D \sin x + E \cos x = F \cos(x + \varphi) \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{-D}{E}\right) = \arctan(-RC\omega) \quad (12)$$

$$\wedge F = \sqrt{D^2 + E^2} = E\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2} \quad (13)$$

Die Lösungsfunktion der Kondensatorspannung hat also die Form

$$U_C(t) = F(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (14)$$

mit der frequenzabhängigen Amplitude und Phasendifferenz:

$$F(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \quad (15)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-RC\omega) \quad (16)$$

Die Phasendifferenz verschwindet für $\omega \rightarrow 0$, beträgt $\pi/4$ für $\omega = 1/RC$ und geht gegen $\pi/2$ für $\omega \rightarrow \infty$. Die Amplitude nimmt für $\omega \rightarrow 0$ den Amplitudenwert der Generatorspannung an – also U_0 –, verkleinert sich um den Faktor $1/\sqrt{2}$ für $\omega = 1/RC$ und nähert sich mit wachsender Frequenz immer mehr der Null. Diese Eigenschaften können zum Filtern von bestimmten Frequenzen von Nutzen sein.

1.4 Integration mithilfe eines RC-Kreises

Wird eine Spannung mit sehr hoher Frequenz $\omega \gg 1/RC$ angelegt, mutiert (7) zu

$$\frac{U(t)}{RC} = \frac{dU_C(t)}{dt}, \quad (17)$$

da unter genannten Voraussetzungen $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$ gelten. Die Differenti-algleichung (17) zu einem Lösungsansatz umgeformt ergibt

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt', \quad (18)$$

was die integrierende Eigenschaft eines RC-Kreises bei hinreichend großer Frequenz ω deutlich macht, die ebenfalls im Verlauf des Experiments untersucht werden soll.

2 Durchführung

2.1 Einleitung

Ziel der Durchführung ist es, die charakteristischen Eigenschaften eines RC-Gliedes zu messen und mit Hilfe eines Oszilloskops zu visualisieren. Hierbei werden neben dem Auf- und Entladevorgang des Kondensators auch die frequenzabhängigen Amplituden und Phasenverschiebungen gemessen.

2.2 Allgemeiner Aufbau

Das zu messende Schaltelement ist eine Serienschaltung aus einem Widerstand und einem Kondensator. Als Messtechnik dient ein Oszilloskop im Verbund mit einem Sinusspannungsgenerator, über den sowohl die Spannung, wie Frequenz als auch die Art des

erzeugten Signals eingestellt werden kann. Mögliche Einstellungen sind Sinus-, Rechteck-, Dreieck- und gepulste Rechteckspannung.

Der Ausgang des Generators wird über ein T-Stück zum einen mit dem RC-Kreis verbunden, zum anderen auf einen Kanal des Oszilloskops gelegt. Der andere Kanal wird parallel zum Kondensator geschaltet. Für genaue Messungen und statische Bilder wird der Triggerausgang des Generators mit dem externen Triggereingang des Oszilloskops verbunden, wodurch insgesamt vier Kabel notwendig sind.

2.3 Messungen

2.3.1 Zeitkonstante

Um die Zeitkonstante des RC-Kreises bestimmen zu können, ist nur die Darstellung des parallelgeschalteten Kanals notwendig. Hierfür wird eine Rechteckspannung auf $\approx 250\text{ Hz}$ eingestellt und die Spannungskurve am Oszilloskop abgelesen. Dabei zeichnen sich die charakteristischen Auflade- und Entladekurven des Kondensators ab, über dessen zeitabhängigen Amplituden dann die Zeitkonstante bestimmt werden kann.

2.3.2 Frequenzabhängige Messungen

Es werden sowohl die Größen der Amplituden, als auch die Phasenunterschiede der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Der zweite Kanal gibt die Generatorenspannung wieder und dient als visueller Vergleich zu der Spannung des RC-Kreises auf dem ersten Kanal. Die Messreihe wird in circa 20 Messwerte auf je drei Größenordnungen aufgeteilt; beginnend bei etwa 15 Hz bis 150 Hz über 150 Hz bis 600 Hz, bis zum Bereich 600 Hz bis 2100 Hz. Um sich eine Kalibrierung zu sparen, reicht es, wenn die Kästchen auf dem Oszilloskop abgelesen werden, um Amplituden- und Phasenverschiebungen bezüglich der Generatorenspannung abzulesen. Für die Phasenverschiebung wird entsprechend pro Messung die Anzahl der Kästchen für eine halbe Periode abgelesen und als Nenner für die Periodendauer in Kästchen der RC-Spannung verwendet. Hieraus ergibt sich ein Verhältnis in Pi und ist damit bereits die zu bestimmende Phasenverschiebung. Für die Amplituden wird zu Beginn einmalig die der Generatorenspannung abgelesen und im Anschluss die Amplituden der RC-Spannung als Verhältnis dagegengemessen. Wichtig hierbei ist, dass die Auflösung der Spannung für beide Kanäle während aller Messungen nicht verändert wird.

2.3.3 Integratorspannung

Um zu zeigen, dass ein RC-Kreis unter bestimmten Bedingungen auch als Integrator dienen kann, wird für die Sinus- und Dreieckspannung eine Frequenz von $\approx 5600\text{ Hz}$ eingestellt und die Spannungen am Oszilloskop dargestellt. Wenn das Oszilloskop keine Screenshot-Funktion besitzt, wird das Bild abfotografiert. Für die Rechteckspannung empfiehlt sich eine Frequenz von etwa 650 Hz, um zu sehen, dass eine Dreieckspannung daraus entsteht, und somit die Ableitung der Ursprungsspannung darstellt.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten

Weil das vom Oszilloskop angezeigte Bild teilweise etwas flackerte, sind zur Aufnahme der Messwerte die in 2 gezeigten Fotos aufgenommen worden. Hierbei wird durch Abbildung a die Amplitude der Generatorenspannung indirekt angezeigt: Bei niedriger Frequenz – hier 25,11 Hz – wird der Kondensator nahezu vollständig geladen und ebenso wieder entladen. Somit wird eine Generatorenspannung von $U_0 = 4,8 \text{ V}$ abgelesen (gemäß der verwendeten Skalierung entspricht ein Kästchen einem Volt).

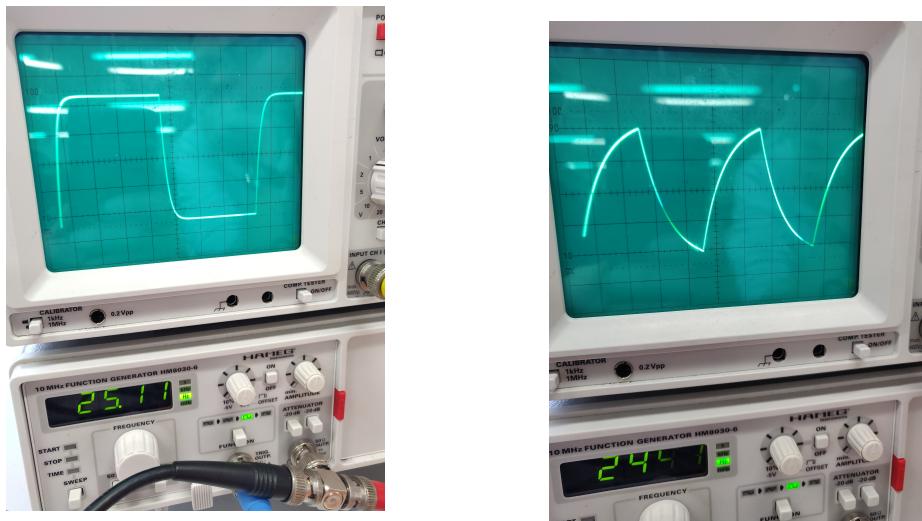


Abbildung 2: Verwendete Fotos zur Aufnahme der Messwerte.

In b beläuft sich eine Periodendauer auf genau vier Kästchen auf der Zeitachse. Mit der Frequenz $f = 244,1 \text{ Hz}$ und $T = 1/f$ kann eine entsprechende Relation zwischen der Anzahl der Kästchen und der Zeit t hergestellt werden.

In Tabelle ?? sind die entsprechenden Messwerte aufgeführt, die für die folgende Ausgleichsrechnung verwendet werden. Wie in 1.2 geschildert, verhält sich die Spannung eines Kondensators beim Entladen gemäß

$$U_C(t) = U_0 \exp\left(-\frac{1}{RC}(t - B)\right). \quad (19)$$

Durch Ausgleichsrechnung mithilfe von *Python 3.7.3* werden die Konstanten A und B von der Gerade

$$(\ln U_C)(t) = \ln U_0 - \frac{1}{RC}(t - B) =: \ln U_0 - A(t - B) \quad (20)$$

bestimmt. B wird hier für die Verschiebung der Gerade benutzt, da bei $t = 0 \text{ s}$ der

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Zeitkonstanten τ .

Anzahl Kästchen (Zeit)	$t / 10^{-3} \text{ s}$	U_C / V
-2,4	-2,458	4,35
-2,2	-2,253	3,2
-2,0	-2,048	2,6
-1,8	-1,843	2,0
-1,6	-1,638	1,6
-1,4	-1,434	1,2
-1,2	-1,229	0,9
-1,0	-1,024	0,7
-0,8	-0,819	0,55
-0,6	-0,614	0,48
-0,4	-0,410	0,35

Kondensator im Experiment keine Spannung von U_0 erreicht.

$$y = a \cdot x + b \quad (21)$$

$$y \hat{=} \ln U_C, \quad x \hat{=} t, \quad (22)$$

$$a \hat{=} -A = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}, \quad b \hat{=} \ln U_0 + B \cdot A = \ln U_0 + B \cdot \frac{1}{RC} \quad (23)$$

$$\Rightarrow \tau = RC = \frac{1}{A} = (0,82 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad B = (-2,56 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (24)$$

Die Messwerte inklusive der Geraden (20) sind in 3 mit der entsprechenden Achsenkalierung aufgetragen.

Dem aus dem Experiment bestimmten Wert für die Zeitkonstante τ kann der theoretisch zu erwartende Wert gegenüber gestellt werden. Die Referenzbauteile haben die Kenngrößen $R = (15,058 \pm 0,600) \text{ k}\Omega$ und $C = 93,3 \text{ nF}$. Daraus ergibt sich die theoretische Zeitkonstante zu $\tau_{\text{theo}} = (1,405 \pm 0,056) \text{ ms}$.

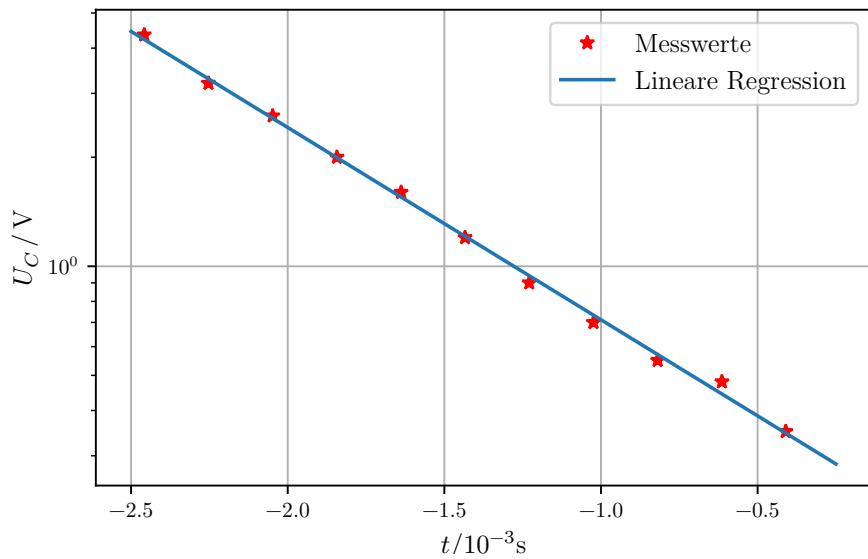


Abbildung 3: Die Messwerte und die zugehörige Ausgleichsgerade der ersten Messung.

3.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude und der Phasenverschiebung

Tabelle 2: Messung in der kleinsten Größenordnung.

f / Hz	U / V	$\Delta\phi / \pi$
15,25	2,50	0,035
20,50	2,50	0,037
23,25	2,50	0,050
26,65	2,50	0,047
30,20	2,50	0,051
39,50	2,45	0,067
45,40	2,50	0,077
57,25	2,40	0,092
63,50	2,40	0,098
71,40	2,39	0,112
76,20	2,36	0,120
80,40	2,34	0,127
85,60	2,30	0,132
92,60	2,24	0,143
99,90	2,22	0,151
108,2	2,20	0,157
112,1	2,18	0,169
121,7	2,12	0,179
125,0	2,10	0,187
131,3	2,09	0,193

Tabelle 3: Messungen in den beiden größeren Größenordnungen.

f / Hz	U / V	$\Delta\phi / \pi$	f / Hz	U / V	$\Delta\phi / \pi$
184,8	1,82	0,243	699	0,68	0,400
216,8	1,68	0,265	791	0,60	0,413
250,0	1,58	0,256	892	0,55	0,415
284,0	1,42	0,296	1020	0,48	0,422
310,8	1,35	0,300	1111	0,43	0,423
347,5	1,23	0,337	1222	0,40	0,421
378,6	1,16	0,340	1333	0,38	0,429
414,1	1,08	0,365	1444	0,35	0,426
442,7	1,01	0,353	1555	0,32	0,436
476,2	0,97	0,354	1666	0,29	0,432
507,7	0,92	0,362	1777	0,25	0,446
531,5	0,88	0,366	1888	0,23	0,436
556,6	0,85	0,369	1999	0,22	0,424
599,0	0,80	0,385	2112	0,21	0,432
			5701	0,07	0,438

3.3 Der RC-Kreis als Integrator

Dieser Part ist wie in 2 beschrieben durchgeführt worden. Dafür wird wegen der in 1 erläuterten analytischen Zusammenhänge eine möglichst hohe Frequenz eingestellt, damit der RC-Kreis die Generatorenspannung um $\pi/2$ versetzt auf dem Oszilloskop ausgeben kann. Das Ergebnis auf dem Oszilloskop ist erneut mit der Kamera festgehalten, wie aus den Abbildungen 4 und 5 a, b ersichtlich ist.

Angemerkt sei noch, dass die Amplituden der beiden Spannungen unterschiedlich skaliert sind, weil die bei hoher Frequenz beim Kondensator ankommende Spannung sehr viel geringer ist als die Generatorenspannung. Das an den Abbildungen zu Betrachende ist demnach ausschließlich der Verlauf und die Phasenverschiebung der Spannungskurven.

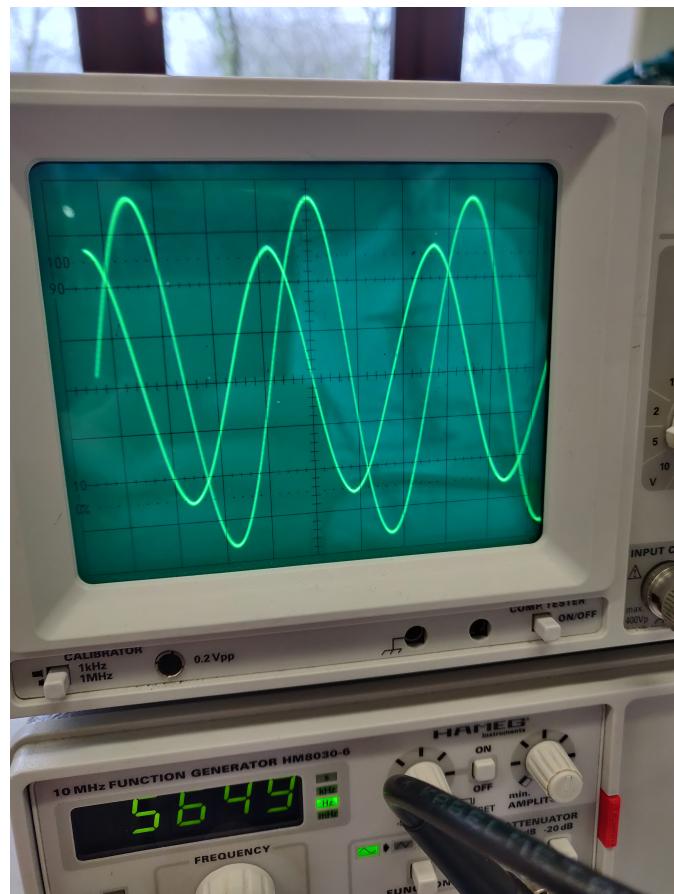
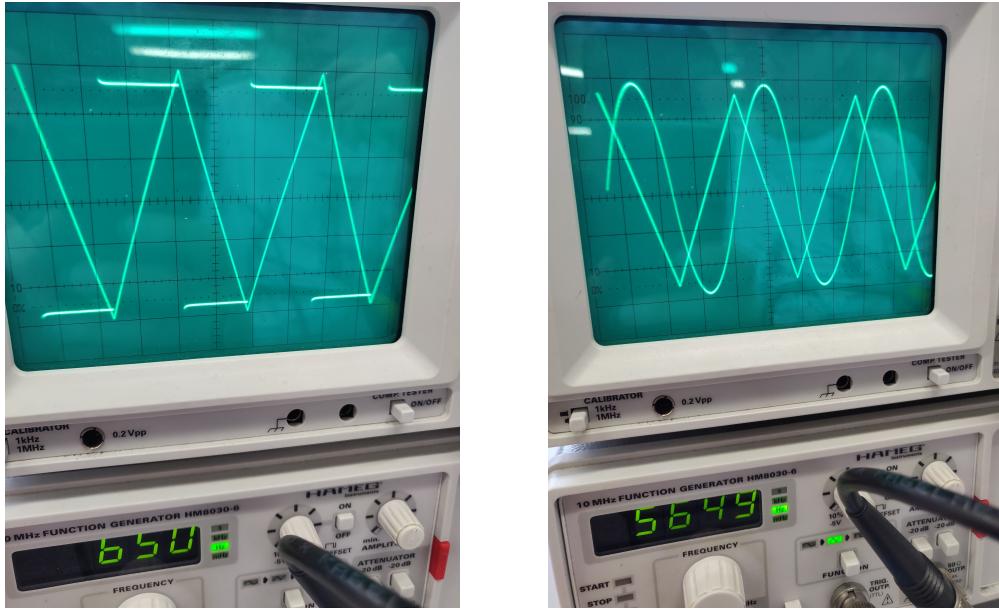


Abbildung 4: Die integrierte Spannung einer Sinusspannung.



(a) Die integrierte Spannung einer Rechtecksspannung. (b) Die integrierte Spannung einer Dreiecksspannung.

Abbildung 5: Die Rechtecks- und Dreicksspannung.

4 Diskussion

4.1 Anregung durch eine Rechteckspannung

Der theoretisch zu erwartende Wert für die Zeitkonstante ist $\tau_{\text{theo}} = (1,405 \pm 0,056) \text{ ms}$, der aus dem ersten Teil des Experiments ermittelte $\tau_{\text{exp}} = (0,82 \pm 0,01) \text{ ms}$. Da der experimentelle Wert deutlich außerhalb des Fehlerintervalls von τ_{theo} liegt, kann an dieser Stelle nicht von einer statistischen Abweichung ausgegangen werden. Der Fehler kann auch nicht an nicht berücksichtigten Innenwiderständen der Geräte oder an ohmschen Verlusten der Kabel liegen. Wahrscheinlicher ist ein systematischer Messfehler, der sich im Nachhinein nur schwerlich zu finden lässt. Möglichkeiten könnten überdrehte – und deshalb keine richtig skalierenden – Knöpfe am Oszilloskop sein, sodass alle abgelesenen Spannungswerte um einen Faktor verschieden von der tatsächlich angelegten Spannung sind.

4.2 Integrieren der Generatorenspannung

Bei allen drei Spannungen kann sehr gut die Phasenverschiebung um $\pi/2$ beobachtet werden, die wenn überhaupt nur minimal kleiner ist. Dies ist konsistent mit der Theorie, da nur für eine unendlich große Frequenz eine solche Phasendifferenz bewerkstelligt werden kann. Eine im mathematischen Sinne unendlich große Frequenz ist selbstredend in der Praxis nur näherungsweise zu realisieren.

Bereits bei der Durchführung fällt auf, dass die Skala der Kondensatorspannung stark vergrößert werden muss, um Amplituden vergleichbarer Größenordnung auf dem Oszilloskop beobachten zu können. Dies röhrt daher, dass bei hoher Frequenz ein vergleichsweise sehr kleiner Anteil der Spannung beim Kondensator ankommt, wie in der Theorie ausführlich erklärt wird.

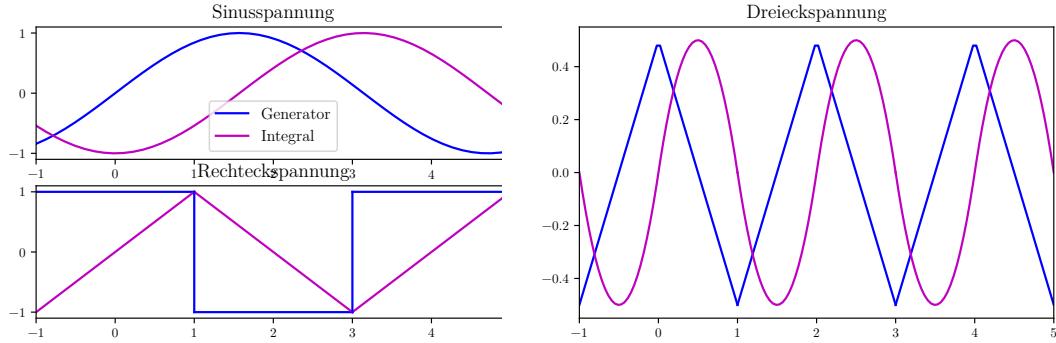


Abbildung 6: Die Spannungskurven und ihre zugehörigen Integrale.

Um die Bilder vom Oszilloskop gut vergleichen zu können, sind in 6 die jeweiligen Spannungsarten mit zugehörigen Funktionsgraphen abgebildet, deren Ableitung die Spannungskurve ergibt. Der Übersicht halber wird an dieser Stelle auf eine explizite Darstellung der Funktionsdefinitionen von Dreiecks- und Rechteckskurven und deren Integrationen verzichtet. Sie bestehen aus trivialen linearen stückweise stetigen beziehungsweise differenzierbaren Funktionen.

Wie durch einen Vergleich der Abbildungen klar ersichtlich ist, entsprechen die theoretischen Überlegungen bezüglich der integrierenden Eigenschaft eines RC-Kreises den experimentellen Beobachtungen.

Anhang: originale Messdaten

14.01.20

[353] RC-Kreis

a) $f \approx 13\text{ MHz}$ zum Ground
 $f = 57,4\text{ Hz} \rightarrow$ Ablesen der Skala anhand des Fotos
 b.) 1 Kästchen auf dem Oszilloskop $\hat{=} 1\%$

$n \triangleq \# \text{ Kästchen}$

$f \text{ in Hz}$	$n \text{ Kondensator}$	$n \text{ Generator}$	Phasenunterschied $\Delta\phi$
45,4	2,5	2,7	$3/3 \text{ IT}$
39,5	2,45	2,7	$2/5 \text{ IT}$
39,2	2,45	2,7	$3/3 \text{ IT}$
15,25	2,5	2,7	$4/5 \text{ IT}$
20,5	2,5	2,7	$5/34 \text{ IT}$
23,25	2,5		$1/20 \text{ IT}$
26,65	2,5		$5/106 \text{ IT}$
57,25	2,4		$28/305 \text{ IT}$
63,5	2,4		$2/275 \text{ IT}$
71,4	2,39		$1/38 \text{ IT}$
76,2	2,36		$55/458 \text{ IT}$
80,4	2,34		$20/157 \text{ IT}$
85,6	2,3		$39/295 \text{ IT}$
92,6	2,24		$39/222 \text{ IT}$
99,9	2,22		$38/251 \text{ IT}$
108,2	2,2		$9/121 \text{ IT}$
112,1	2,18		$61/122 \text{ IT}$
121,7	2,12		$27/51 \text{ IT}$
125,0	2,1		$55/294 \text{ IT}$
131,3	2,09		$29/150 \text{ IT}$
134,8	1,92		$24/107 \text{ IT}$
246,8	1,68		$39/63 \text{ IT}$
250,0	1,58		$4/39 \text{ IT}$
284,5	1,42		$9/62 \text{ IT}$
340,8	1,35		$3/40 \text{ IT}$
347,5	1,23		$32/184 \text{ IT}$
378,6	1,16		$55/162 \text{ IT}$
414,1	1,08		$27/14 \text{ IT}$
442,7	1,01		$4/139 \text{ IT}$
476,2	0,97		$23/65 \text{ IT}$
507,2	0,91		$89/163 \text{ IT}$
534,5	0,88		$83/132 \text{ IT}$
556,6	0,85		$4/144 \text{ IT}$
579	0,8		$7/205 \text{ IT}$
679	0,68		$2/5 \text{ IT}$
711	0,6		$64/155 \text{ IT}$
871	0,35		$22/65 \text{ IT}$
1010	0,48		$11/45 \text{ IT}$
1111	0,43		$14/26 \text{ IT}$
1122	0,4		$8/19 \text{ IT}$
1588	0,38		$3/7 \text{ IT}$
1444	0,35		$29/54 \text{ IT}$
1555	0,32		$63/149 \text{ IT}$
1666	0,29		$10/219 \text{ IT}$
1777	0,25		$24/191 \text{ IT}$
1888	0,23		$7/65 \text{ IT}$
1999	0,22		$7/152 \text{ IT}$
2442	0,21		$4/133 \text{ IT}$
			$57/155 \text{ IT}$

S. Meuhans

Abbildung 7: Die originalen Messdaten.

Literatur

- [1] TU Dortmund. Versuch Nr. 353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises. 2019.