

Beugung am Spalt

1. Einleitung

Unter der Beugung des Lichtes versteht man die Abweichungen der Lichtausbreitung von den Gesetzen der geometrischen Optik, die immer dann auftreten, wenn das Licht durch Öffnungen in Schirmen hindurchtritt oder wenn es auf undurchlässige Hindernisse trifft, deren Abmessungen kleiner als der Strahldurchmesser sind. Die beobachteten Phänomene kann man recht gut erklären, wenn man die Lichtausbreitung als einen Wellenvorgang auffasst. Man wird damit zwar der Natur des Lichtes nicht gerecht – sie lässt sich nur quantenmechanisch beschreiben – aber immer dann, wenn man über eine große Zahl von Lichtquanten mitteln kann, stellt das klassische Wellenmodell eine brauchbare Näherung dar. Genau das ist aber bei der Lichtausbreitung (im Vakuum) möglich. Man kann daher zur Erklärung der Beugungsphänomene beispielsweise das **Huygenssche Prinzip**¹ anwenden. Das soll im folgenden Kapitel an einem geometrisch einfachen Objekt – nämlich einem parallelen Spalt – vorgeführt werden. Als Ergebnis erhält man eine Funktion $I(\varphi)$, welche die Intensität des Lichtes in Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung φ angibt („Beugungsfigur“). Anschließend wird ein allgemeiner Zusammenhang zwischen der Gestalt des beugenden Objektes, der sogenannten Aperturfunktion, und der Amplitudenverteilung des abgebeugten Lichtes vorgestellt. Es zeigt sich, dass beide Funktionen unter bestimmten Voraussetzungen durch eine Fourier-Transformation in einander überführt werden können.

Im Schlussteil wird eine Apparatur beschrieben, die es gestattet, die Beugungsfigur eines beliebigen Beugungsobjektes auf eine einfache Weise zu messen. Mit dieser soll dann ein einfaches Beugungsobjekt untersucht werden. Die erhaltenen Ergebnisse kann man verwenden, um mit Hilfe einer nicht-linearen Ausgleichsrechnung die Wellenlänge des eingestrahlteten Lichtes zu bestimmen und um durch eine Fourier-Transformation der Messwerte die Aperturfunktion des Beugungsobjektes zu errechnen.

2. Berechnung der Intensität des abgebeugten Lichtes in Abhängigkeit vom Beugungswinkel bei der Beugung an einem Parallelschlitz

Bevor die Rechnung begonnen wird, soll zunächst auf zwei grundsätzliche Versuchsanordnungen hingewiesen werden, die bei Beugungsuntersuchungen auftreten können: Man unterscheidet zwischen der **Fresnelschen** und der **Fraunhoferschen** Lichtbeugung. Beide Fälle sind in Abb.1 veranschaulicht.

¹ Eine weitere Anwendung des Huygensschen Prinzips findet man in V402 bei der Erklärung der Brechung von Lichtstrahlen.

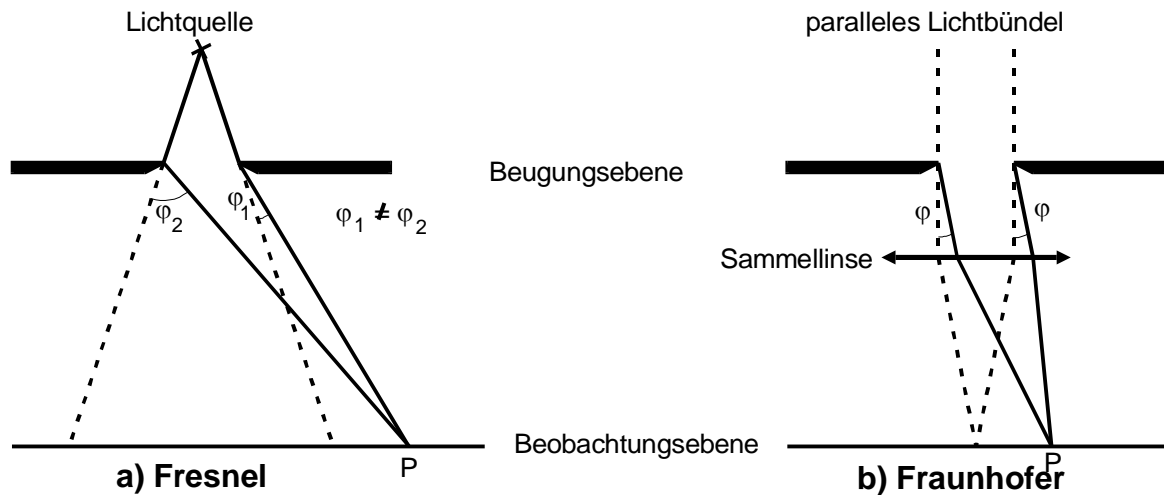


Abb.1: Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung an einem Spalt (Die gestrichelten Linien deuten den Strahlenverlauf bei der geometrischen Optik an.)

Bei der Fresnelschen Anordnung liegen Lichtquelle und Beobachtungspunkt P im Endlichen, sodass divergente Strahlenbündel auftreten (siehe Abb.1a). Das hat zur Konsequenz, dass im Aufpunkt P Strahlen interferieren, die unter verschiedenen Winkeln gebeugt werden. Bei der Fraunhoferschen Anordnung verlegt man die Lichtquelle dagegen ins Unendliche, sodass man ein paralleles Lichtbündel mit einer ebenen Wellenfront erhält. Häufig bildet man das abgebeugte Strahlenbündel mittels einer Sammellinse in ihrer Brennebene ab. Damit bringt man auch den Aufpunkt quasi ins Unendliche. Das bedeutet, dass alle Strahlen, die in P interferieren, unter demselben Winkel φ abgebeugt werden. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass die Fraunhofersche Beugung mathematisch einfacher zu behandeln ist. Daher soll im Folgenden das Problem der Beugung an einem Parallelschlitz nur für diese Versuchsanordnung gelöst werden.

Als Beugungsobjekt wird ein Schlitz benutzt, dessen Länge groß gegen seine Breite b ist, sodass das Lichtbündel praktisch nur in einer Dimension (und zwar der X-Koordinate in Abb.2) begrenzt wird. Es falle nun eine ebene Welle mit der Feldstärke

$$(1) \quad A(z,t) = A_0 \exp \{ i(\omega t - 2\pi z/\lambda) \}$$

pro Längeneinheit der Wellenfront aus der Z-Richtung ein. Diese Annahme lässt sich gut mit einem Laser als Lichtquelle realisieren. Der Beobachtungsort wird in eine Entfernung verlegt, die sehr groß gegen die Schlitzbreite ist; damit kommen, wie vorausgesetzt, in einem Beobachtungspunkt nur Strahlen zur Wirkung, die unter demselben Winkel φ abgebeugt wurden.

Eine Erklärung der zu beobachtenden Beugungserscheinungen ist möglich mit Hilfe einer Kombination aus dem Huygensschen Prinzip der Elementarwellen und dem Interferenzprinzip, wie sie erstmalig von A. Fresnel 1818 angegeben wurde: Jeder Punkt einer Wellenfläche sendet zur gleichen Zeit sogenannte Elementarwellen aus, die die Form von Kugelwellen haben. Diese Wellen interferieren miteinander und erzeugen eine neue Wellenfront, die gleich der Einhüllenden der Elementarwellen ist. Den Schwingungszustand eines beliebigen Punktes im Wellenfeld bekommt man durch

Überlagerung sämtlicher Elementarwellen, die zum gleichen Zeitpunkt in dem betrachteten Punkt ankommen.

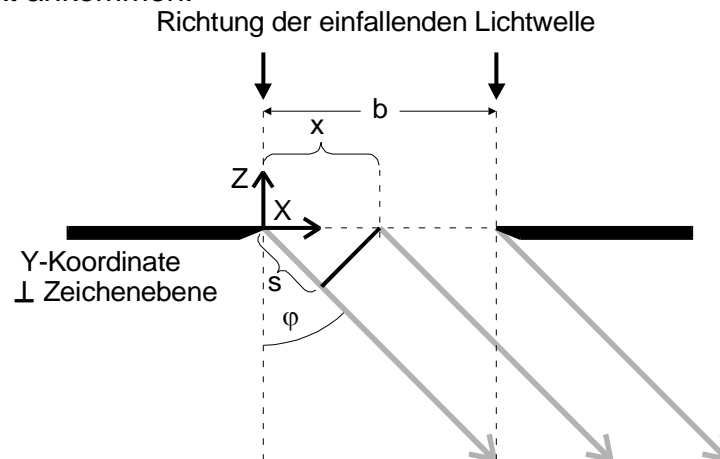


Abb.2: Skizze zur Ableitung einer Phasenbeziehung zwischen 2 Teilstrahlen bei der Fraunhoferschen Beugung am Spalt

Wendet man also das Huygens-Fresnelsche Prinzip auf die Beugungserscheinungen am Spalt an, so erkennt man sofort, dass sich das Licht nach Durchtritt durch den Spalt nicht mehr ausschließlich in der ursprünglichen Einfallsrichtung ausbreiten kann; denn von jedem Punkte der Spaltöffnung gehen ja Kugelwellen aus, die nach allen Richtungen hin fortschreiten. Wenn man zum Beispiel die Amplitude des in Richtung φ (siehe Abb.1) abgebeugten Strahlbündels berechnen will, muss man über alle Strahlbündel, die von sämtlichen Punkten in der Spaltöffnung in Richtung φ emittiert werden, summieren. Die Wellenfronten dieser Strahlenbündel stellen infinitesimal breite Ausschnitte aus Kugelwellenflächen, deren Normalen in Richtung φ weisen, dar. Greift man zwei Strahlenbündel heraus, die von zwei um das Stück x voneinander entfernten Punkten in der Spaltöffnung ausgehen, dann haben diese aufgrund ihres Wegunterschiedes s (siehe Abb.2) eine Phasendifferenz von

$$(2) \quad \delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \varphi}{\lambda} .$$

Dieser Phasenunterschied muss bei der Summation berücksichtigt werden. Sie geht wegen der infinitesimal kleinen Breiten dx der Strahlenbündel in eine Integration über die gesamte Spaltbreite über. Man erhält demnach für die Amplitude B in Richtung φ aus (1) und (2)

$$\begin{aligned} B(z, t, \varphi) &= A_0 \int_0^b \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta \right) \right\} dx \\ &= A_0 \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right\} \int_0^b \exp \left(\frac{2\pi i x \sin \varphi}{\lambda} \right) dx . \end{aligned}$$

Nach Ausführung der Integration und Ausklammerung des Faktors $\exp(\pi i b \sin \varphi / \lambda)$ folgt

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right\} \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \exp \left\{ \frac{\pi i b \sin \varphi}{\lambda} \right\} \cdot \frac{1}{2i} \left(\exp \left\{ \frac{\pi i b \sin \varphi}{\lambda} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\pi i b \sin \varphi}{\lambda} \right\} \right).$$

Mit der Eulerschen Formel

$$(3) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

bekommt man daraus

$$(4) \quad B(z, t, \varphi) = A_0 \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{\pi i b \sin \varphi}{\lambda} \right\} \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\}.$$

Damit ist das Problem der Beugung an einem Parallelschlitz bereits gelöst. Die beiden Exponentialfunktionen in (4) stellen nur Phasenfunktionen dar. Die erste beschreibt die Zeit- und Ortsabhängigkeit der Amplitude in Ausbreitungsrichtung der Welle. Die zweite stellt einen richtungsabhängigen Phasenfaktor dar, der keinen Einfluss auf die Intensitätsmessung hat. Von Bedeutung für eine experimentelle Überprüfung der Beziehung (4) sind nur die beiden letzten Faktoren. Mit der Abkürzung

$$\eta := \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$$

lässt sich $B(\varphi)$ in der Form

$$B(\varphi) = A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta}$$

darstellen. Das ist eine gerade Funktion mit unendlich vielen Nulldurchgängen sowie lokalen Maxima und Minima, deren Beträge mit wachsendem η gegen Null gehen. Sie hat etwa die in Abb.3 wiedergegebene Gestalt. Die Nullstellen liegen bei

$$\sin \varphi_n = \pm n \frac{\lambda}{b} \quad . \quad (n = 1, 2, \dots)$$

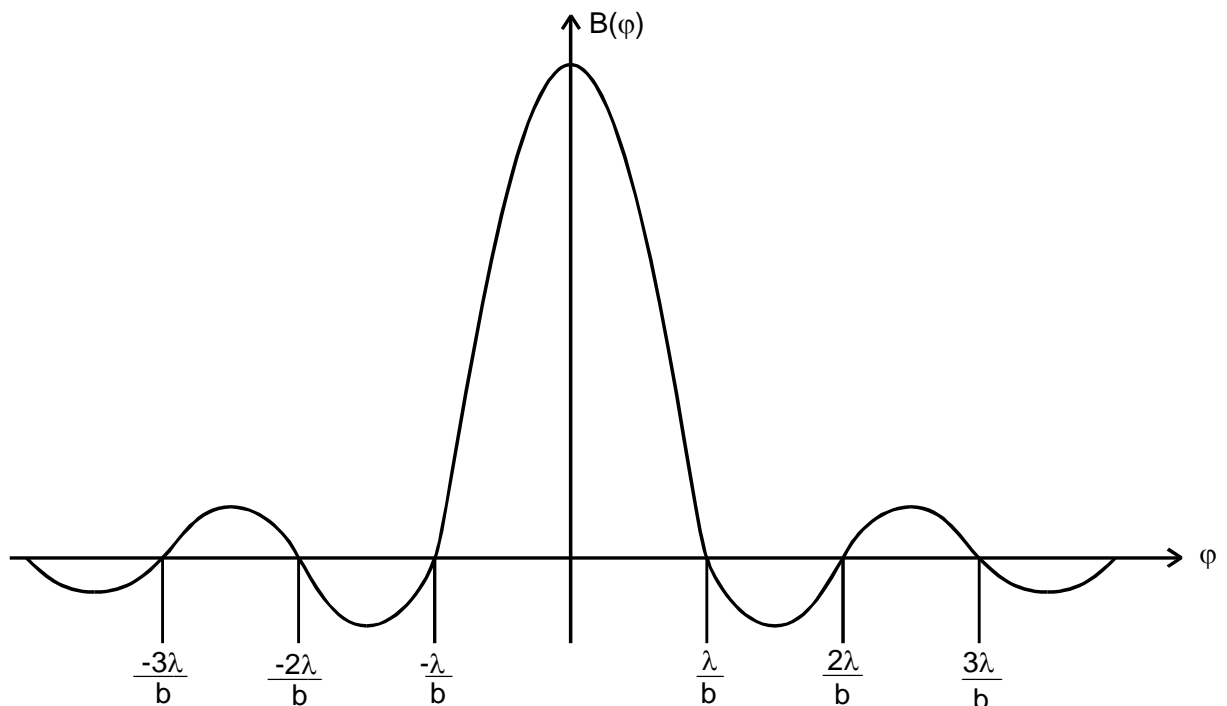


Abb.3: Amplitude einer an einem Parallelschlitz gebeugten, ebenen Welle

Da die Amplitude einer Lichtwelle wegen der hohen Lichtfrequenz von $\omega = 10^{14}$ bis 10^{15} Hz einer unmittelbaren Messung nicht zugänglich ist, muss man sich mit der Messung der zeitlich gemittelten Intensität begnügen. Die Intensität $I(\varphi)$ des an einem Parallelschlitz gebeugten Lichtes lässt sich durch

$$(5) \quad I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right\}^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\}$$

beschreiben. Die durch (5) beschriebene, nicht negative Funktion („Beugungsfigur“) besitzt bei den Nulldurchgängen der Amplitudenfunktion (4) Minima. Die Höhe der dazwischen liegenden Maxima nimmt näherungsweise mit dem Quadrat des Beugungswinkels ab.

3. Beugung am Doppelschlitz

In analoger Weise lässt sich die Intensitätsverteilung $I(\varphi)$ bei der Beugung am Doppelschlitz berechnen. Dabei kann man die Beugungsverteilung als Überlagerung zweier Einfach-Schlitz der Breite b im Abstand s behandeln.

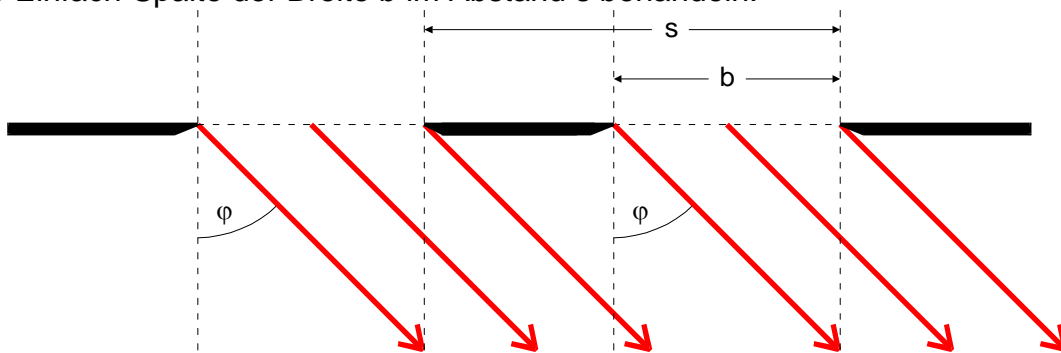


Abb. 4: Beugung am Doppelschlitz

Trifft paralleles Licht mit der Wellenlänge λ auf einen Doppelschlitz, so ist die Intensitätsverteilung des Beugungsbildes durch

$$(6) \quad I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi \cdot s \cdot \sin \varphi}{\lambda} \right) \cdot \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right\}^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\}$$

gegeben. Die Intensitätsverteilung (6) des Doppelschlitzes setzt sich aus der Intensitätsverteilung (5) des Einzelschlitzes und einer \cos^2 -Verteilung zusammen. Zusätzlich zu den Minima der einzelnen Schlitz (Minima 1^{ter} Ordnung) beobachtet man Intensitätsminima an den Stellen

$$\varphi(k) = \arcsin \left(\frac{2k+1}{2s} \right) \cdot \lambda \quad \text{mit } k=0,1,2,3,\dots$$

an der die \cos^2 -Verteilung Nullstellen hat.

4. Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation

Die Berechnung der Amplitudenverteilung bei der Fraunhoferschen Beugung ist auch auf eine allgemeinere Weise möglich. Es zeigt sich, dass man $B(\varphi)$ als Fourier-Trans-

formierte der Amplitudenverteilung der einfallenden Welle in der Beugungsebene (= Aperturfunktion) auffassen kann. Unter der Fouriertransformierten einer Funktion $f(x)$ versteht man allgemein den Ausdruck

$$(7) \quad g(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathbf{e}^{ix\xi} dx \quad .$$

Im vorliegenden Beispiel der Beugung an einem unendlich ausgedehnten Spalt der Breite b kann die Aperturfunktion $f(x)$ durch

$$(8) \quad \begin{cases} f(x) = A_0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ f(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden. Setzt man (8) in (7) ein, dann erhält man für $g(\xi)$

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathbf{e}^{ix\xi} dx = A_0 \int_0^b \mathbf{e}^{ix\xi} dx = \frac{A_0}{i\xi} \left(-1 + \mathbf{e}^{i\xi b} \right) \quad .$$

Daraus folgt wieder durch Anwendung der Eulerschen Formel (3)

$$(9) \quad g(\xi) = \frac{2A_0}{\xi} \exp\left(\frac{i\xi b}{2}\right) \sin \frac{\xi b}{2} \quad .$$

Man findet Übereinstimmung zwischen $g(\xi)$ aus (9) und $B(\varphi)$ aus (4), wenn man in (9)

$$(10) \quad \xi := \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}$$

setzt.

Mit der Definition (10) der Variablen ξ erkennt man, dass die Fourier-Transformation (7) das Huygenssche Prinzip mathematisch formuliert; denn der unter dem Integral stehende Phasenfaktor $\mathbf{e}^{ix\xi}$ beschreibt gerade die Phasendifferenz einer vom Punkte x in der Beugungsebene ausgehenden Kugelwelle mit der Amplitude $f(x)$ relativ zu der vom Punkte $x = 0$ mit der Amplitude $f(0)$ emittierten Welle. Das in (3) angegebene Integral stellt nun, wie beim Huygensschen Prinzip verlangt wird, genau die phasengerechte Summation der von sämtlichen Erregungszentren in der Beugungsebene emittierten Kugelwellen dar.

Die Aperturfunktion $f(x)$ kann ohne Schwierigkeiten auf eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen erweitert werden. Es ist somit möglich, mit Hilfe der Fourier-Transformation auch die Beugung an zweidimensionalen Objekten (z.B. einer Kreisblende) zu berechnen.

Wichtig im Zusammenhang mit der Beugung ist auch die Umkehrbarkeit der Fourier-Transformation. So ist $f(x)$ die Fourier-Transformation von $B(\varphi)$. Das bedeutet, man kann aus der Amplitudenfunktion die Gestalt $f(x)$ des beugenden Objektes berechnen.

4. Aufgaben

- a) Messen sie die an einem festen Einfach-Spalt erzeugte Beugungsfigur punktweise aus. Wählen sie hierzu eine geeignete Schrittweite (mindestens 50 Messpunkte)

aus. Passen sie die theoretische Verteilung (5) und die Fourier-Transformierte (7) an die experimentellen Daten an und bestimmen sie so die Spaltbreite b . Messen sie die Spaltbreite mit einem Mikroskop aus. Welche Methode ist genauer?

- b) Messen sie die von einem variablen Einfach-Spalt erzeugte Beugungsfigur punktweise aus und passen sie Gleichung (5) an die gemessenen Werte an. Passen Sie die Fourier-Transformierte (7) an die experimentellen Daten an und bestimmen sie so die Breite des Einfachspaltes.
- c) Messen sie die vom Doppelspalt erzeugte Beugungsfigur und vergleichen sie diese mit der theoretischen Verteilung und der Beugungsfigur des Einfachspaltes.

5. Experimenteller Aufbau

Abb.5 zeigt eine Skizze des experimentellen Aufbaus. Ein He-Ne-Laser ($\lambda = 633\text{nm}$) beleuchtet einen ca 20-200 μm

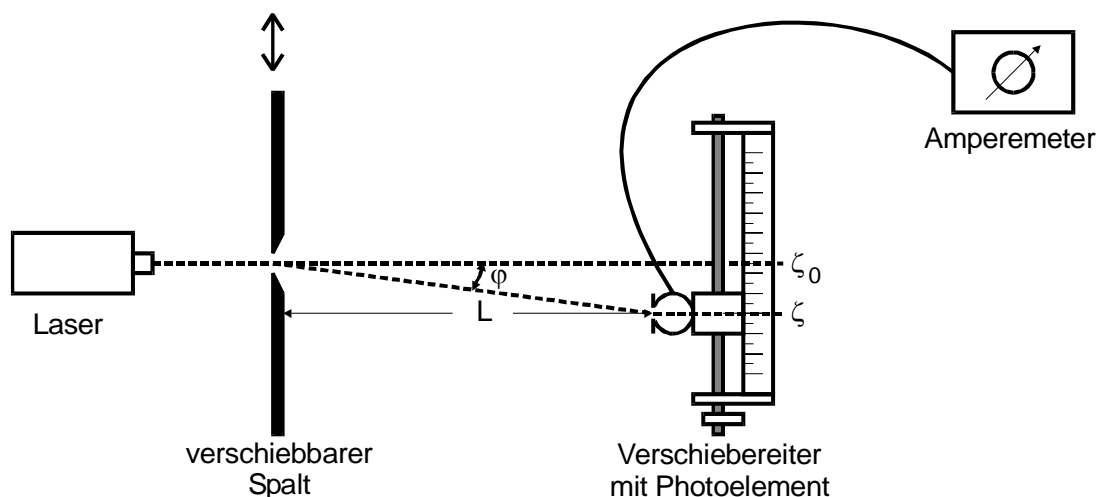


Abb.5: Versuchsanordnung zur Ausmessung einer Beugungsfigur

breiten Parallelschlitz. In etwa 100 - 120 cm Entfernung vom Spalt ist ein lichtempfindlicher Detektor aufgebaut, der mit einem Messverschiebereiter senkrecht zur optischen Achse verstellt werden kann. Der Detektor besteht aus einer Photodiode, mit der das Beugungsbild aufgenommen werden kann. Es ist insbesondere bei der Messung kleiner Lichtintensitäten zu beachten, dass das Photoelement einen (thermischen) Dunkelstrom I_{du} abgibt; das heißt, auch bei einem unbelichteten Element fließt bereits ein messbarer Strom. I_{du} muss bei abgedeckter Detektorblende gemessen werden.

6. Hinweise zur Bedienung der Apparatur und zur Durchführung der Messungen

Bevor man die Breite b des Beugungsschlitzes mit dem Mikroskop ausmessen kann, muss dieses geeicht werden. Beim Blick in das Gerät erkennt man eine lineare Skala mit willkürlicher Teilung, welche in der Brennebene des Okulars liegt. Diese Skala muss nun in μm geeicht werden. Zu diesem Zwecke legt man auf den Objektisch ein Objektmikrometer. Das ist eine Glasplatte, in die eine lineare Skala eingätzt ist, bei der der Abstand zweier Teilstriche 10 μm entspricht. Nach der Fokussierung auf das Objektmikrometer, kann man beide Skalen mit einander vergleichen und somit die Okularteilung in μm ausdrücken.

Zur Justierung der optischen Anordnung wird zunächst der Detektor in der Mittelstellung des Messverschiebereiters fixiert. Die Spaltblende wird dann solange senkrecht zur optischen Bank verschoben, bis die Mitte des Hauptmaximums im Beugungsbild mit dem Detektorspalt zur Deckung kommt und die n-ten Nebenmaxima links und rechts des Hauptmaximums etwa die gleiche Intensität haben.

Die abgebeugte Intensität $I(\zeta)$ wird dann bei 4b in Abhängigkeit von der Detektorstellung ζ über einen Verschiebeweg von 50mm punktweise ausgemessen. Die Detektorstellung kann unmittelbar auf der Millimeterteilung des Messverschiebereiters abgelesen werden. Eine Trommelumdrehung entspricht 1 mm; ein Teilstrich auf der Trommel 10 μm . Um die aufgenommene Intensitätskurve $I(\zeta)$ mit dem nach (5) berechneten Verlauf $I(\varphi)$ vergleichen zu können, muss der Beugungswinkel φ aus der Stellung ζ bestimmt werden. Es ist nach Abb.5

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\zeta - \zeta_0}{L} .$$

Hierbei sind ζ_0 die Detektorstellung für die Richtung des ungebeugten Strahles und L der Abstand des Beugungsspalt von der Detektorblende.

In der selben Art und Weise misst man die Intensitätsverteilung des Doppelspalt aus.

7. Literatur

Grant R. Fowles, Introduction to Modern Optics, by Holt, Rinehard an Winston
Bergmann, Schäfer, Einführung in die Experimentalphysik, Bd.III