

**Versuch Nr. 353**

# **Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises**

Antonia Joëlle Bock

antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner

rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.01.2020

Abgabe: 21.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Theorie</b>	<b>3</b>
1.1 Einleitung . . . . .	3
1.2 Auf- und Entladen von Kondensatoren bei Gleichspannung . . . . .	3
1.3 Einfluss der Wechselspannung auf Amplitude und Phasenverschiebung .	4
1.4 Integration mithilfe eines RC-Kreises . . . . .	5
<b>2 Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>3 Auswertung</b>	<b>5</b>
3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten . . . . .	5
3.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude und der Phasenverschiebung . . .	8
3.3 Der RC-Kreis als Integrator . . . . .	9
<b>4 Diskussion</b>	<b>11</b>
4.1 Anregung durch eine Rechteckspannung . . . . .	11
4.2 Integrieren der Generatorspannung . . . . .	11
<b>Anhang: originale Messdaten</b>	<b>13</b>
<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Theorie<sup>1</sup>

## 1.1 Einleitung

Im folgenden Experiment soll das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises – also einer Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand  $R$  und einem Kondensator der Kapazität  $C$ , die mit einer Spannungsquelle verbunden sind – untersucht werden. Sowohl Gleichspannung als auch verschiedene Wechselspannungsformen sind hinsichtlich ihres Einflusses auf die Ladevorgänge des Kondensators von Interesse für den Versuch.

## 1.2 Auf- und Entladen von Kondensatoren bei Gleichspannung

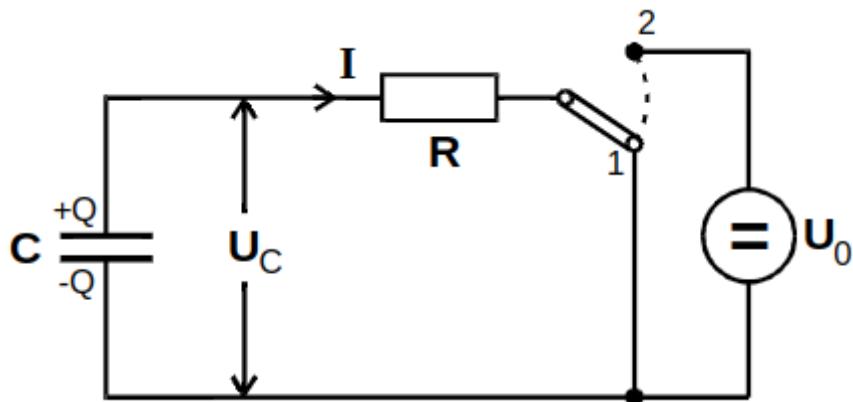


Abbildung 1: Ein typischer RC-Kreis.

In Abbildung 1 ist ein typischer RC-Kreis zu sehen. Eine Gleichspannung  $U_0$  kann den Kondensator über den Widerstand aufladen, wenn der Schalter in Position 2 ist. Entladen wird er, wenn Schalterposition 1 benutzt wird. Hier und im Folgenden wird die am Kondensator anliegende, der Speisespannung entgegengesetzten Spannung durch den Variablenamen  $U_C(t)$  dargestellt.

Um einen quantitativen Zusammenhang zwischen den Größen herzustellen, werden die Kirchhoff'schen Gesetze angewendet:

$$U_0 = RI(t) + U_C(t) \quad (1)$$

Der Strom  $I(t)$  entspricht der Ladungsänderung  $\dot{Q}(t)$  auf den Kondensatorplatten, außerdem definiert sich die Kapazität eines Kondensators über  $C = Q/U_C$ . Durch Einsetzen in (1) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC}U_C(t) = \frac{1}{RC}U_0, \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Unter Verwendung der Quelle [1].

die sich mit dem Ansatz

$$\int_{U_C(0)}^{U_C(t)} \frac{RC}{U_0 - U_C} dU_C = \int_0^t dt \quad (3)$$

lösen lässt zu

$$U_C(t) = U_0 + (U_C(0) - U_0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4)$$

Das Aufladen geschieht demnach gemäß

$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (5)$$

Die Differentialgleichung des Entladevorgangs besitzt keine Inhomogenität wie (2), unterscheidet sich abgesehen davon aber nicht. Sie wird erfüllt durch die Gleichung

$$U_C(t) = U_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (6)$$

Beiden Lösungstermen ist die Zeitkonstante  $\tau = RC$  gemein, die konventionellerweise eine Kenngröße des jeweiligen RC-Kreises darstellt: Nach einer Zeit von  $t = \tau$  hat sich die jeweilig zu betrachtende Größe um etwa 63.2% ihrem Langzeitzustand angenähert.

### 1.3 Einfluss der Wechselspannung auf Amplitude und Phasenverschiebung

Wird nun eine periodische Wechselspannung der Form  $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$  angelegt, bekommt die Differentialgleichung eine entsprechende periodische Inhomogenität:

$$\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC} U_C(t) = \frac{1}{RC} U_0 \cos(\omega t). \quad (7)$$

Da hier ausschließlich der Fall betrachtet wird, dass der Kondensator am Anfang ungeladen ist, ist die homogene Lösung  $U_{C,\text{hom}}(t) = A \exp(-t/RC)$  an dieser Stelle nicht relevant (weil  $A = 0$ ). Wird der Ansatz der rechten Seite  $U_C(t) = D \sin(\omega t) + E \cos(\omega t)$  in (7) eingesetzt, ergeben sich folgende Umformungen:

$$\stackrel{\text{in (7)}}{\rightarrow} \omega D \cos(\omega t) - \omega E \sin(\omega t) + \frac{D}{RC} \sin(\omega t) + \frac{E}{RC} \cos(\omega t) \stackrel{!}{=} \frac{U_0}{RC} \cos(\omega t) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow D = RC\omega E \quad \wedge \quad \omega D + \frac{E}{RC} = \frac{U_0}{RC} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{U_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad \wedge \quad D = \frac{RC\omega U_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (10)$$

$$D \sin x + E \cos x = F \cos(x + \varphi) \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{-D}{E}\right) = \arctan(-RC\omega) \quad (12)$$

$$\wedge F = \sqrt{D^2 + E^2} = E\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2} \quad (13)$$

Die Lösungsfunktion der Kondensatorspannung hat also die Form

$$U_C(t) = F(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (14)$$

mit der frequenzabhängigen Amplitude und Phasendifferenz:

$$F(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \quad (15)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-RC\omega) \quad (16)$$

Die Phasendifferenz verschwindet für  $\omega \rightarrow 0$ , beträgt  $\pi/4$  für  $\omega = 1/RC$  und geht gegen  $\pi/2$  für  $\omega \rightarrow \infty$ . Die Amplitude nimmt für  $\omega \rightarrow 0$  den Amplitudenwert der Generatorspannung an – also  $U_0$  –, verkleinert sich um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  für  $\omega = 1/RC$  und nähert sich mit wachsender Frequenz immer mehr der Null. Diese Eigenschaften können zum Filtern von bestimmten Frequenzen von Nutzen sein.

## 1.4 Integration mithilfe eines RC-Kreises

Wird eine Spannung mit sehr hoher Frequenz  $\omega \gg 1/RC$  angelegt, mutiert (7) zu

$$\frac{U(t)}{RC} = \frac{dU_C(t)}{dt}, \quad (17)$$

da unter genannten Voraussetzungen  $|U_C| \ll |U_R|$  und  $|U_C| \ll |U|$  gelten. Die Differentialgleichung (17) zu einem Lösungsansatz umgeformt ergibt

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt', \quad (18)$$

was die integrierende Eigenschaft eines RC-Kreises bei hinreichend großer Frequenz  $\omega$  deutlich macht, die ebenfalls im Verlauf des Experiments untersucht werden soll.

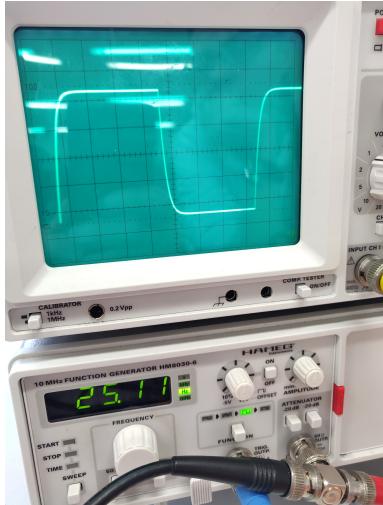
## 2 Durchführung

## 3 Auswertung

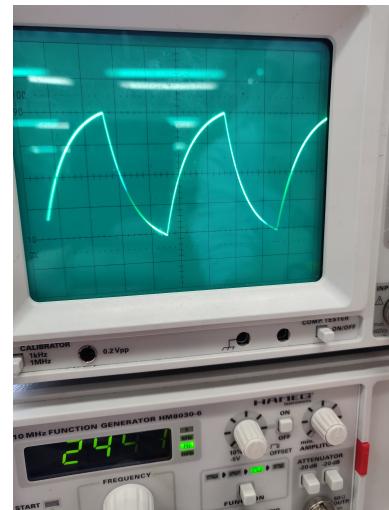
### 3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten

Weil das vom Oszilloskop angezeigte Bild teilweise etwas flackerte, sind zur Aufnahme der Messwerte die in 2 gezeigten Fotos aufgenommen worden. Hierbei wird durch Abbildung a die Amplitude der Generatorspannung indirekt angezeigt: Bei niedriger Frequenz – hier 25,11 Hz – wird der Kondensator nahezu vollständig geladen und ebenso wieder entladen. Somit wird eine Generatorspannung von  $U_0 = 4,8$  V abgelesen (gemäß der verwendeten Skalierung entspricht ein Kästchen einem Volt).

In b beläuft sich eine Periodendauer auf genau vier Kästchen auf der Zeitachse. Mit der Frequenz  $f = 244,1$  Hz und  $T = 1/f$  kann eine entsprechende Relation zwischen der Anzahl der Kästchen und der Zeit  $t$  hergestellt werden.



(a) Asymptotisch genäherte maximale Spannung des Kondensators.



(b) Zeitverlauf beim Auf- und Entladen.

**Abbildung 2:** Verwendete Fotos zur Aufnahme der Messwerte.

**Tabelle 1:** Messwerte zur Bestimmung der Zeitkonstanten  $\tau$ .

Anzahl Kästchen (Zeit)	$t / 10^{-3} \text{ s}$	$U_C / \text{V}$
-2,4	-2,458	4,35
-2,2	-2,253	3,2
-2,0	-2,048	2,6
-1,8	-1,843	2,0
-1,6	-1,638	1,6
-1,4	-1,434	1,2
-1,2	-1,229	0,9
-1,0	-1,024	0,7
-0,8	-0,819	0,55
-0,6	-0,614	0,48
-0,4	-0,410	0,35

In Tabelle ?? sind die entsprechenden Messwerte aufgeführt, die für die folgende Ausgleichsrechnung verwendet werden. Wie in 1.2 geschildert, verhält sich die Spannung eines Kondensators beim Entladen gemäß

$$U_C(t) = U_0 \exp\left(-\frac{1}{RC}(t - B)\right). \quad (19)$$

Durch Ausgleichsrechnung mithilfe von *Python 3.7.3* werden die Konstanten  $A$  und  $B$  von der Gerade

$$(\ln U_C)(t) = \ln U_0 - \frac{1}{RC}(t - B) =: \ln U_0 - A(t - B) \quad (20)$$

bestimmt.  $B$  wird hier für die Verschiebung der Gerade benutzt, da bei  $t = 0\text{s}$  der Kondensator im Experiment keine Spannung von  $U_0$  erreicht.

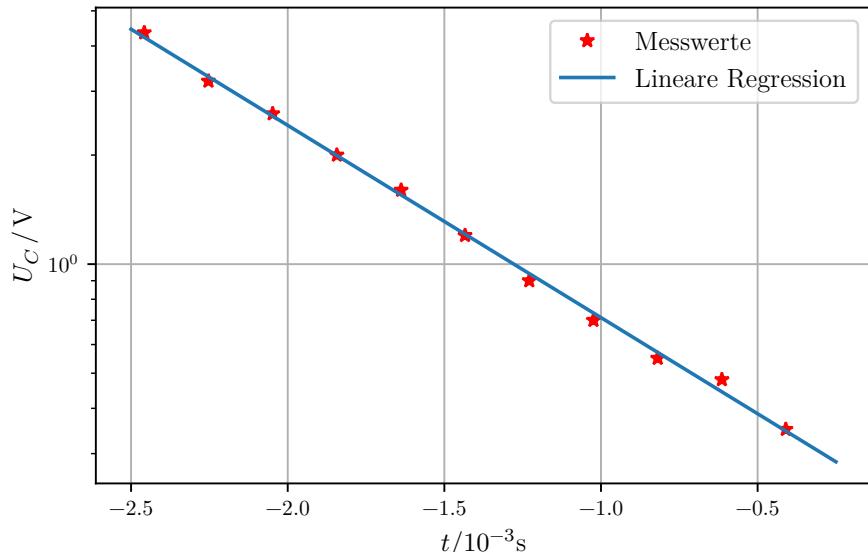
$$y = a \cdot x + b \quad (21)$$

$$y \hat{=} \ln U_C, \quad x \hat{=} t, \quad (22)$$

$$a \hat{=} -A = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}, \quad b \hat{=} \ln U_0 + B \cdot A = \ln U_0 + B \cdot \frac{1}{RC} \quad (23)$$

$$\Rightarrow \tau = RC = \frac{1}{A} = (0,82 \pm 0,01) \cdot 10^{-3}\text{s}, \quad B = (-2,56 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}\text{s} \quad (24)$$

Die Messwerte inklusive der Geraden (20) sind in 3 mit der entsprechenden Achsenkalierung aufgetragen.



**Abbildung 3:** Die Messwerte und die zugehörige Ausgleichsgerade der ersten Messung.

Dem aus dem Experiment bestimmten Wert für die Zeitkonstante  $\tau$  kann der theoretisch zu erwartende Wert gegenüber gestellt werden. Die Referenzbauteile haben die Kenn-

größen  $R = (15,058 \pm 0,600) \text{ k}\Omega$  und  $C = 93,3 \text{ nF}$ . Daraus ergibt sich die theoretische Zeitkonstante zu  $\tau_{\text{theo}} = (1,405 \pm 0,056) \text{ ms}$ .

### 3.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude und der Phasenverschiebung

**Tabelle 2:** Messung in der kleinsten Größenordnung.

$f / \text{Hz}$	$U / \text{V}$	$\Delta\phi / \pi$
15,25	2,50	0,035
20,50	2,50	0,037
23,25	2,50	0,050
26,65	2,50	0,047
30,20	2,50	0,051
39,50	2,45	0,067
45,40	2,50	0,077
57,25	2,40	0,092
63,50	2,40	0,098
71,40	2,39	0,112
76,20	2,36	0,120
80,40	2,34	0,127
85,60	2,30	0,132
92,60	2,24	0,143
99,90	2,22	0,151
108,2	2,20	0,157
112,1	2,18	0,169
121,7	2,12	0,179
125,0	2,10	0,187
131,3	2,09	0,193

**Tabelle 3:** Messungen in den beiden größeren Größenordnungen.

$f / \text{Hz}$	$U / \text{V}$	$\Delta\phi / \pi$	$f / \text{Hz}$	$U / \text{V}$	$\Delta\phi / \pi$
184,8	1,82	0,243	699	0,68	0,400
216,8	1,68	0,265	791	0,60	0,413
250,0	1,58	0,256	892	0,55	0,415
284,0	1,42	0,296	1020	0,48	0,422
310,8	1,35	0,300	1111	0,43	0,423
347,5	1,23	0,337	1222	0,40	0,421
378,6	1,16	0,340	1333	0,38	0,429
414,1	1,08	0,365	1444	0,35	0,426
442,7	1,01	0,353	1555	0,32	0,436
476,2	0,97	0,354	1666	0,29	0,432
507,7	0,92	0,362	1777	0,25	0,446
531,5	0,88	0,366	1888	0,23	0,436
556,6	0,85	0,369	1999	0,22	0,424
599,0	0,80	0,385	2112	0,21	0,432
			5701	0,07	0,438

### 3.3 Der RC-Kreis als Integrator

Dieser Part ist wie in 2 beschrieben durchgeführt worden. Dafür wird wegen der in 1 erläuterten analytischen Zusammenhänge eine möglichst hohe Frequenz eingestellt, damit der RC-Kreis die Generatorspannung um  $\pi/2$  versetzt auf dem Oszilloskop ausgeben kann. Das Ergebnis auf dem Oszilloskop ist erneut mit der Kamera festgehalten, wie aus den Abbildungen 4 und 5 a, b ersichtlich ist.

Angemerkt sei noch, dass die Amplituden der beiden Spannungen unterschiedlich skaliert sind, weil die bei hoher Frequenz beim Kondensator an kommende Spannung sehr viel geringer ist als die Generatorspannung. Das an den Abbildungen zu Betrachende ist demnach ausschließlich der Verlauf und die Phasenverschiebung der Spannungskurven.

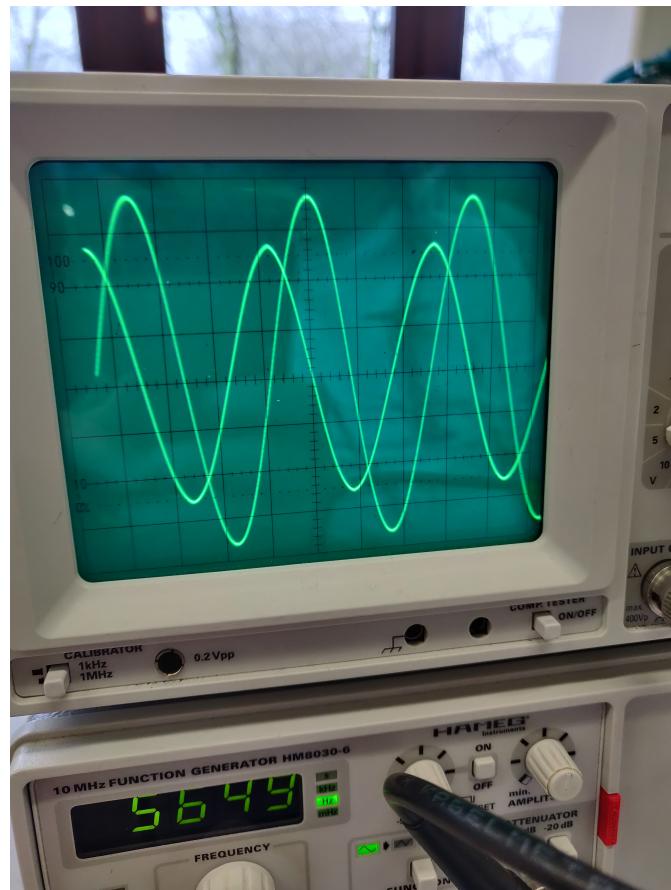
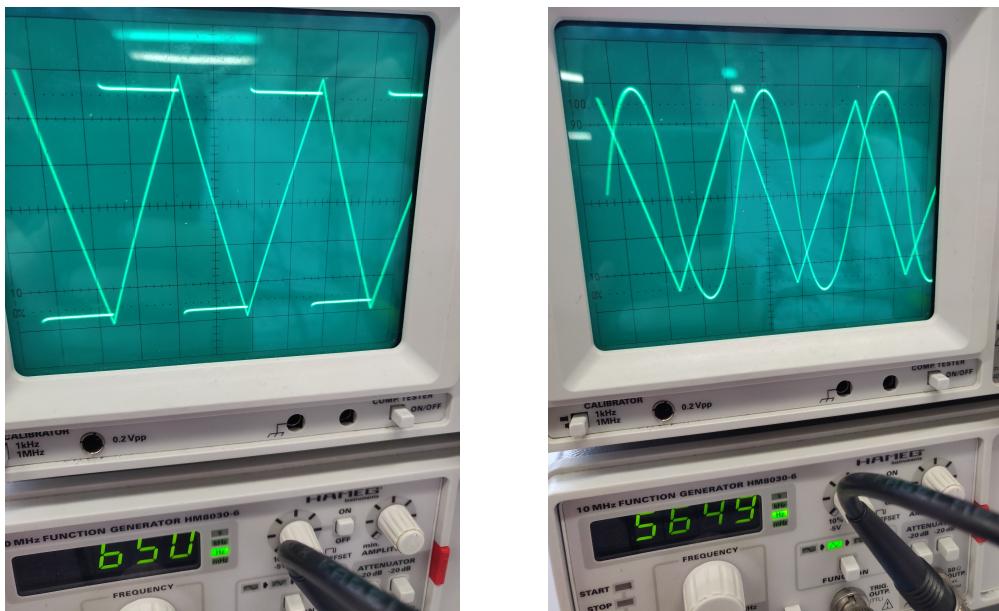


Abbildung 4: Die integrierte Spannung einer Sinusspannung.



(a) Die integrierte Spannung einer Rechtecksspannung. (b) Die integrierte Spannung einer Dreiecksspannung.

**Abbildung 5:** Die Rechtecks- und Dreicksspannung.

## 4 Diskussion

### 4.1 Anregung durch eine Rechteckspannung

muss ich mir noch überlegen, wieso tau KLEiner ist als der theoretische wert... wenn er größer wäre, könnte man das über zusätzliche verluste an den kabeln erklären, aber so... ich schaue mal...

### 4.2 Integrieren der Generatorenspannung

Bei allen drei Spannungen kann sehr gut die Phasenverschiebung um  $\pi/2$  beobachtet werden, die wenn überhaupt nur minimal kleiner ist. Dies ist kohärent mit der Theorie, da nur für eine unendlich große Frequenz eine solche Phasendifferenz bewerkstelligt werden kann. Eine im mathematischen Sinne unendlich große Frequenz ist selbstredend in der Praxis nur näherungsweise zu realisieren.

Bereits bei der Durchführung fällt auf, dass die Skala der Kondensatorspannung stark vergrößert werden muss, um Amplituden vergleichbarer Größenordnung auf dem Oszilloskop beobachten zu können. Dies röhrt daher, dass bei hoher Frequenz ein vergleichsweise sehr kleiner Anteil der Spannung beim Kondensator ankommt, wie in der Theorie ausführlich erklärt wird.

Somit entspricht die integrierte Sinusschwingung in 4 den Erwartungen. Ein wenig komplizierter wird es bei den anderen beiden Schwingungen, logische Erklärungen lassen sich dennoch dafür finden: Hervorgehoben sei nochmal die Tatsache, dass die Spannung

aufgrund der hohen Frequenz nur im geringen Maße zum Kondensator durchkommt: Der Kondensator lädt sich langsam auf, aber noch lange, bevor er einen vollständig geladenen Zustand erreichen kann, springt die treibende Spannung wieder um, sodass der Kondensator langsam wieder die Ladung verliert, die er eben erst aufgebaut hat. Unter Berücksichtigung dieses Vorgangs können die unterschiedlichen Spannungsverläufe der Rechtecks- und Dreiecksschwingungen in 5 a und b erklärt werden: Der Kondensator würde sich in a vollständig aufladen und so die gleiche Struktur wie die generierte Rechtecksspannung aufweisen, wenn er genügend Zeit pro Periode hätte. Da er diese nicht hat, ist nur der bloße lineare Anstieg der Spannung zu sehen, und es entsteht ein dreieckiger Schwingungsverlauf beim Kondensator. Genauso bei der Dreiecksschwingung: Der Kondensator reagiert nur zeitverzögert und im geringen Maße auf die linear verlaufende Dreiecksspannung, sodass die Kondensatorspannung „abgerundete Ecken“ dort hat, wo die Dreiecksschwingung nicht differenzierbar ist.  
Die möglicherweise vorerst überraschende Unterschiedlichkeit der Spannungsverläufe lassen sich somit problemlos mit den theoretischen Grundlagen vereinbaren.

## Anhang: originale Messdaten

14.01.20

[353] RC-Kreis

a)  $f \approx 13\text{ MHz}$  zum Ground  
 $f = 57,4\text{ Hz} \rightarrow$  Ablesen der Skala anhand des Fotos  
 b.) 1 Kästchen auf dem Oszilloskop  $\hat{=} 1\%$

$n \triangleq \# \text{ Kästchen}$

$f \text{ in Hz}$	$n \text{ Kondensator}$	$n \text{ Generator}$	Phasenunterschied $\Delta\phi$
45,4	2,5	2,7	$3/3 \text{ IT}$
39,5	2,45	2,7	$2/5 \text{ IT}$
39,2	2,45	2,7	$3/3 \text{ IT}$
15,25	2,5	2,7	$4/5 \text{ IT}$
20,5	2,5	2,7	$5/3 \text{ IT}$
23,25	2,5	2,7	$1/20 \text{ IT}$
26,65	2,5		$5/106 \text{ IT}$
57,25	2,4		$28/305 \text{ IT}$
63,5	2,4		$2/275 \text{ IT}$
71,4	2,39		$11/38 \text{ IT}$
76,2	2,36		$55/458 \text{ IT}$
80,4	2,34		$20/157 \text{ IT}$
85,6	2,3		$39/295 \text{ IT}$
92,6	2,24		$39/222 \text{ IT}$
99,9	2,22		$38/251 \text{ IT}$
108,2	2,2		$9/121 \text{ IT}$
112,1	2,18		$61/122 \text{ IT}$
121,7	2,12		$27/51 \text{ IT}$
125,0	2,1		$55/294 \text{ IT}$
131,3	2,09		$29/150 \text{ IT}$
134,8	1,92		$24/107 \text{ IT}$
246,8	1,68		$39/63 \text{ IT}$
250,0	1,58		$4/39 \text{ IT}$
284,5	1,42		$9/62 \text{ IT}$
340,8	1,35		$3/40 \text{ IT}$
347,5	1,23		$32/184 \text{ IT}$
378,6	1,16		$55/162 \text{ IT}$
414,1	1,08		$27/14 \text{ IT}$
442,7	1,01		$4/139 \text{ IT}$
476,2	0,97		$23/65 \text{ IT}$
507,2	0,91		$89/243 \text{ IT}$
534,5	0,88		$83/132 \text{ IT}$
556,6	0,85		$4/144 \text{ IT}$
579	0,8		$7/205 \text{ IT}$
679	0,68		$2/5 \text{ IT}$
711	0,6		$64/155 \text{ IT}$
871	0,35		$22/65 \text{ IT}$
1010	0,48		$11/45 \text{ IT}$
1111	0,43		$14/26 \text{ IT}$
1122	0,4		$8/19 \text{ IT}$
1588	0,38		$3/7 \text{ IT}$
1444	0,35		$23/54 \text{ IT}$
1555	0,32		$63/149 \text{ IT}$
1666	0,29		$10/219 \text{ IT}$
1777	0,25		$24/191 \text{ IT}$
1888	0,23		$7/65 \text{ IT}$
1999	0,22		$7/142 \text{ IT}$
2442	0,21		$4/133 \text{ IT}$
			$570,1 \text{ 0,07 } 3/4 \text{ IT}$

*S. Meuhans*

Abbildung 6: Die originalen Messdaten.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. Versuch Nr. 353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises. 2019.