

Versuch Nr. 606

Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 02.06.2020

Abgabe: 09.06.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Verwendete Naturkonstanten im Überblick	3
2.2 Berechnung der Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe	3
2.3 Die Hund'schen Regeln und das Pauli-Prinzip hinsichtlich Seltener-Erd- Verbindungen	4
2.4 Messung der Suszeptibilität	5
2.5 Eliminieren der Störspannungen	7
2.6 Sonstiges	7
3 Durchführung	8
4 Auswertung	9
4.1 Vorbereitung: Berechnung der Theorie-Werte	9
4.2 Filterkurve des Selektivverstärkers	11
4.3 Berechnung der experimentellen Werte für die Suszeptibilität	12
5 Diskussion	13
Anhang: Messdaten	15
Literatur	15

1 Zielsetzung

Ziel des Experiments ist die Untersuchung paramagnetischer Stoffe hinsichtlich deren magnetischen Eigenschaften. Hierfür stellt vor allem die Suszeptibilität χ eine markante Messgröße dar und wird exemplarisch für verschiedene Metalle der Seltenen Erden bestimmt, die in ionisierter Form in Verbindung mit Sauerstoff vorliegen. Die dafür notwendigen theoretischen Grundlagen und Messmethoden werden im Folgenden vorgestellt.

2 Theorie

2.1 Verwendete Naturkonstanten im Überblick

Die in Tabelle 1 zusammengestellten Naturkonstanten sind [2] entnommen. Das Bohr'sche Magneton ist über

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{eh}{4m_e\pi}$$

definiert.

Tabelle 1: Für das Protokoll benötigte Naturkonstanten auf einen Blick.

Naturkonstante	Formelzeichen	Wert	Einheit
Elementarladung	e	$1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$	C
Planck'sches Wirkungsquantum	h	$6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$	J s
Boltzmann-Konstante	k_B	$1,380\,649 \cdot 10^{-23}$	J/K
Magnetische Permeabilität	μ_0	$1,256\,637\,061\,4 \cdot 10^{-6}$	N/A ²
Masse eines Elektrons	m_e	$9,109\,383\,701\,5 \cdot 10^{-31}$	kg
Avogadro-Konstante	N_A	$6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$	1/mol
Bohr'sches Magneton	μ_B	$9,274\,010\,078\,4 \cdot 10^{-24}$	J/T

2.2 Berechnung der Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe

Die magnetische Flussdichte \vec{B}_0 im Vakuum ist mit der magnetischen Feldstärke \vec{H} durch $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ gegeben. Diese Flussdichte unterscheidet sich von der in Materie. In einem solchen Fall gilt

$$\vec{B}_M = \vec{B}_0 + \vec{M}. \quad (1)$$

\vec{M} stellt hierbei die Magnetisierung dar und lässt sich auf das durchschnittliche magnetische Moment der Elementarteilchen zurückführen, welche multipliziert mit der Anzahl pro Volumeneinheit und der magnetischen Feldkonstante eben die Magnetisierung ergeben. Eine ebenfalls gültige Formel wird durch

$$\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H}$$

ausgedrückt. Die Suszeptibilität χ ist an dieser Stelle die für einen Stoff charakteristische Größe.

Bei Diamagneten liegt der Wertebereich zwischen -1 und 0 , sie werden aus einem Bereich höherer Feldstärke rausgedrückt, Paramagneten mit einer positiven Suszeptibilität werden hineingezogen; sie verstärken das äußere Magnetfeld.

Das atomare magnetische Moment, dessen Mittelung die Magnetisierung definiert, hängt eng mit den Drehimpulsen der einzelnen Elektronen in der Atomhülle zusammen. Der Drehimpuls des Atomkerns kann – vor allem bei den in diesem Experiment zu untersuchenden Stoffen – vernachlässigt werden; ausschlaggebend wird er vor allem dann, wenn ein starkes äußeres Magnetfeld vorhanden ist.

Somit setzt sich der atomare Gesamtdrehimpuls \vec{J} aus dem Bahndrehimpuls \vec{L} der Elektronenhülle und dem Eigendrehimpuls – dem Spin – \vec{S} der Elektronen zusammen:

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}.$$

Durch Berücksichtigung der Quantisierung bestimmter Größen lässt sich

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3kT} \quad (2)$$

für die Suszeptibilität herleiten[1]. Näherungen werden bei dem gyromagnetischen Verhältnis des freien Elektrons g_S vorgenommen, welches in den Zwischenrechnungen auftaucht und abgesehen von ein paar Promillen Abweichungen den Wert 2 annimmt. Ebenfalls lässt sich die sogenannte Brillouin-Funktion nähern, da im Experiment bei Zimmertemperatur und mit Magnetfeldern, die nicht größer als 1 T sind, gearbeitet wird.

Der Landé-Faktor g_J wird an dieser Stelle durch

$$g_J = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (3)$$

gegeben, wobei S , L und J die Quantenzahlen der bereits genannten Drehimpulse darstellen, die sich aus der Summe der Quantenzahlen der an der Magnetisierung beteiligten Elektronen ergeben – die Drehimpulsquantenzahlen der restlichen Elektronen summieren sich gerade zu Null und tragen deshalb nicht zur Magnetisierung bei.

2.3 Die Hund'schen Regeln und das Pauli-Prinzip hinsichtlich Seltener-Erd-Verbindungen

Der Landé-Faktor Seltener-Erd-Verbindungen lässt sich mithilfe der Hund'schen Regeln berechnen. Sie beschreiben, welche Quantenzahlen J , L und S in Gleichung (3) eingesetzt werden müssen.

Seltene Erden haben eine voll besetzte Elektronenhülle bis zur 5p-Schale. Darauf aufbauend befinden sich je nach Element und Ionisationszustand noch zwei 6s-Elektronen und weitere 4f-Elektronen in der Elektronenhülle. Die 4f-Elektronen sind die für die Magnetisierung entscheidenden Teilchen – sie legen die Quantenzahlen fest, die der anderen Schalen kompensieren sich gegenseitig.

Die Hund'schen Regeln sind[1]:

1. Der Eigendrehimpuls beziehungsweise der Spin S ist maximal, woraus eine möglichst parallele Orientierung der einzelnen Elektronenspins resultiert.
2. Der Bahndrehimpuls L ist unter Berücksichtigung der ersten Regel maximal, also ebenfalls nach Möglichkeit parallel.
3. Wenn eine Unterschale maximal zur Hälfte gefüllt ist, ergibt sich $J = |L - S|$, andernfalls $J = L + S$.

Wichtig zu wissen ist hierbei:

- Der Spin eines Elektrons ist allgemein $1/2$. Die Länge seines Gesamtspins ist $\sqrt{3}/2\hbar$.
- Die Quantenzahl s des Spins eines einzelnen Elektrons, welche hier der Projektion des Spins entlang einer Achse, beispielsweise der z -Achse, entspricht, kann die Werte $1/2$ oder $-1/2$ annehmen.
- Die Quantenzahlen des gesamten Atoms summieren sich über die magnetischen Quantenzahlen des Bahndrehimpulses und des Spins (hier sind sie mit s_i und l_i benannt), die einer Projektion entlang der z -Achse entsprechen; also: $S = \sum_i s_i$ und $L = \sum_i l_i$.
- Die ausschlaggebende Unterschale ist 4f; die zugehörige Hauptquantenzahl ist $n = 4$ und der Buchstabe f gibt die Nebenquantenzahl $l_{\max} = 3$ an.
- Für die magnetischen Quantenzahlen des Bahndrehimpuls dieser Schale gilt folglich: $|l_i| \in [0, l_{\max}] \Rightarrow l_i \in [-3, 3]$.

Ein letzter wichtiger Aspekt für die Bestimmung der Quantenzahlen stellt das Pauli-Prinzip dar, welches aus der quantenmechanischen Ununterscheidbarkeit der Elektronen eines Atoms gefolgert werden kann. Es besagt, dass die zu einem Elektron gehörigen Quantenzahlen (n, l_{\max}, l, s) nicht doppelt innerhalb eines Atoms vorkommen dürfen. Das bedeutet für die 4f-Schale, dass $n = 4$ und $l_{\max} = 3$ sind und somit (l, s) innerhalb der befindlichen Schale paarweise verschieden sein müssen.

Mithilfe dieser Gesetzmäßigkeiten können im Nachhinein die Theorie-Werte für die Suszeptibilität der entsprechenden Stoffe bestimmt werden.

2.4 Messung der Suszeptibilität

Wird eine Spule mit Materie gefüllt, verstärkt sich (bei positiver Suszeptibilität) die magnetische Flussdichte gemäß (1). Dadurch vergrößert sich auch die Induktivität L einer langen Spule um den Betrag

$$\Delta L = \mu_0 \chi Q \frac{n^2}{l}, \quad (4)$$

wobei Q die Querschnittsfläche des Füllmaterials, n die Windungszahl und l die Länge der Spule sind.

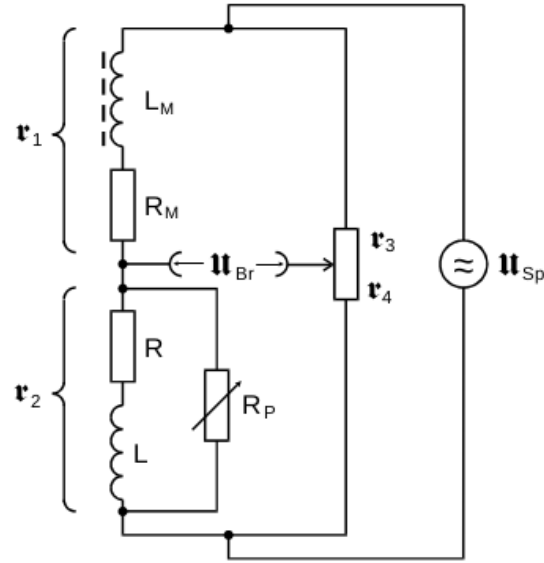


Abbildung 1: Eine Brückenschaltung zur Bestimmung der Suszeptibilität[1].

Diese Größe ist für gewöhnlich sehr klein, deshalb muss die Messapparatur präzise Messungen der Induktivität ermöglichen. Eine mögliche Messschaltung ist in Abbildung 1 zu sehen. Verwendet wird eine sogenannte Brückenschaltung und zwei Spulen, die eine mit der zu untersuchenden Füllung, die andere ohne. Aus der Regulierung der Brückenwiderstände R_3 und R_4 kann die Brückenspannung U_{Br} auf nahezu Null abgeglichen werden. Dies lässt Rückschlüsse auf die verschiedenen Widerstände zu.

In diesem Fall führen folgende Annahmen zur Berechnung der Suszeptibilität:

Die Verlustwiderstände R und R_M sind annähernd gleich, da es sich bei den Spulen – ungeachtet etwaiger Materiefüllungen – um baugleiche Exemplare handelt. Und eben weil es sich um Verlustwiderstände handelt, sollten sie im Vergleich zu dem Widerstand R_P gering sein, also R beziehungsweise $R_M \ll R_P$.

Des Weiteren sei der regelbare Widerstand über das Potentiometer rein ohmsch, das heißt, er bewirkt keine Phasenverschiebung des Stroms und die physikalische Größen des Widerstands sind reell. Zudem sei die Annahme, dass $R_3 \approx R_4$, da die Spulen wie bereits erwähnt nahezu gleiche Induktivitäten haben ($\Delta L \ll L$) und daher keine große Differenzen bei den Brückenwiderständen zu erwarten sind.

Die Feststellung, dass $\Delta L \ll L$, wird ebenfalls zur Herleitung der Formel verwendet.

Unter der Annahme, dass die Frequenz hinreichend groß ist, sodass $\omega^2 L^2 \gg R^2$ gilt, lässt sich die Suszeptibilität zu

$$\chi = 4 \frac{F U_{Br}}{Q U_{Sp}} \quad (5)$$

mit der Querschnittsfläche F der Spule und der Speisespannung U_{Sp} bestimmen[1].

Ein weiterer Ausdruck für die Suszeptibilität ohne Verwendung der angelegten Spannungen ergibt sich aus der sogenannten Abgleichbedingung der Brückenschaltung. Auch wird

wieder die Annahme $\Delta L \ll L$ benutzt. Zusätzlich wird noch die Größe ΔR mit

$$R'_3 = R_3 + \Delta R$$

definiert, die die Änderung des Widerstands R_3 bei Einführen von Materie in die eine Spule quantisiert. Dementsprechend gilt

$$R'_4 = R_4 - \Delta R \approx R_3 - \Delta R.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung[1]

$$\chi = 2 \frac{\Delta R \cdot F}{R_3 \cdot Q}. \quad (6)$$

2.5 Eliminieren der Störspannungen

An den Ausgängen der Brückenschaltung werden nicht vermeidbare Störspannungen gemessen, die die geringen Signalspannungen der in Kapitel 2.4 beschriebenen Messungen vollkommen überlagern würden. Eine Möglichkeit besteht dennoch bei Verwendung eines sogenannten Selektivverstärkers, der bei einer bestimmten Frequenz ν_0 die Eingangsspannung U_E unverfälscht als Ausgangsspannung U_A durchlässt. Er kann also zur Unterdrückung von Spannungen mit unerwünschter Frequenz verwendet werden. Darin liegt der Nutzen für diese Messung: Die Signalspannungen haben nur eine Frequenz, nämlich die der Speisespannung, wohingegen die Störspannungen sich – vermutlich kontinuierlich – über ein ganzes Spektrum erstrecken. Mithilfe des Selektivverstärkers können also alle Störspannungen weitestgehend herausgefiltert werden, die nicht die Durchlassfrequenz ν_0 haben.

Eine wichtige Kenngröße eines Selektivverstärkers ist hierbei die sogenannte Güte Q – nicht zu verwechseln mit der Querschnittsfläche Q des Füllmaterials. Sie gibt das Verhältnis der Breite der Glockenkurve zur Durchlassfrequenz an, also mit Blick auf Abbildung 2

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_+ - \nu_-}.$$

Pauschal lässt sich also ein umso besserer Selektivverstärker feststellen, je größer seine Güte ist.

2.6 Sonstiges

Die Materie-Proben liegen in Pulverform vor, welches sich in dünnen Glasröhrchen befindet. Das Pulver hat hierbei eine geringere Dichte, als die gleiche Substanz hätte, wäre es ein Ein-Kristall. Deswegen wird eine effektiv wirkende Querschnittsfläche Q_{eff} bei der Auswertung der Messdaten verwendet, die umso kleiner ist, je dekompakter das Pulver der Probe ist. Sie berechnet sich über

$$Q_{\text{eff}} = Q \frac{\rho_{\text{Pulver}}}{\rho_w} = \frac{M_{\text{Pulver}}}{L \rho_w} \quad (7)$$

und wird mithilfe der Masse M der Probe, der Länge L der Probe (und somit die der Spule) und der Dichte ρ_w des Ein-Kristalls bestimmt.

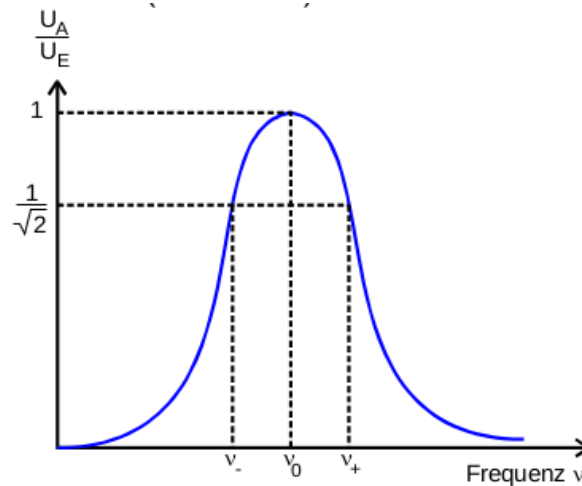


Abbildung 2: Die Glocken-förmige Filterkurve eines Selektivverstärkers[1].

3 Durchführung

Für die gesamten Messungen wird die in Abbildung 3 gezeigte Schaltung verwendet. Aufgrund der relativ geringen Signalspannungen müssen diese zusätzlich verstärkt werden. Die Speisespannung wird von einem Sinusgenerator mit Möglichkeit zur Einstellung

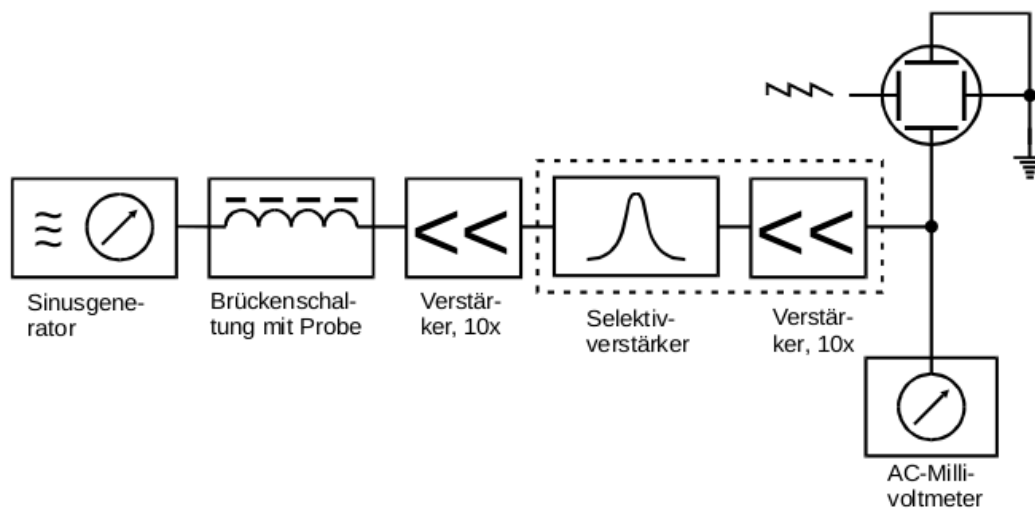


Abbildung 3: Schaltbild der einzelnen Elemente bei der Messung[1].

der Frequenz bezogen. Das Modul für die Brückenschaltung, welches bei der Messung verwendet wird, ist in Abbildung 4 zu sehen. Der Selektivverstärker wird auf eine Güte von $Q = 100$ eingestellt. Nach mehrmaliger Verstärkung des Signals kann zum Schluss die Ausgangsspannung an einem Voltmeter abgelesen werden.

Vorerst muss die Durchlassfrequenz des Selektivverstärkers möglichst genau bestimmt

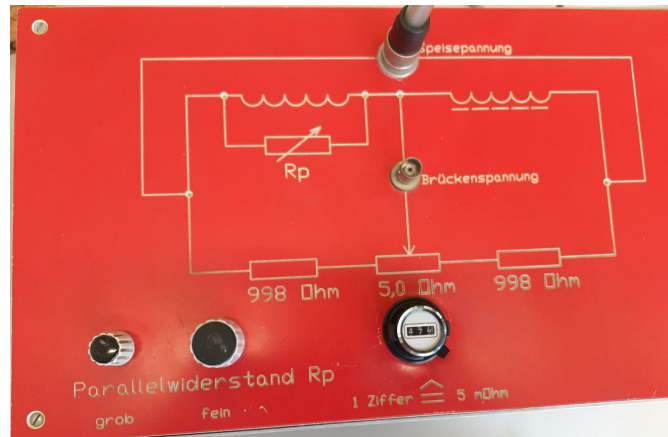


Abbildung 4: Das bei der Durchführung verwendete Brückenschaltmodul.

werden, um die Signalspannung bei den folgenden Messungen auf ebendiese Frequenz einstellen zu können. Hierfür wird in 1 kHz-Schritten der Frequenzbereich 20 kHz-40 kHz durchlaufen und die Ausgangsspannung am Voltmeter aufgezeichnet. Die von dem Sinusgenerator bezogene Speisespannung beträgt $1 V_{\text{eff}}$. Die Frequenz, bei der die Ausgangsspannung maximal wird, wird im Folgenden für die Messungen mit Materie verwendet. Um eine Veränderung der Induktivität bei Einführung von Materie zu messen, wird zuerst die Schaltung ohne jegliche Materie, also nur mit luftgefüllten Spulen, vermessen. Der Aufbau wird also entsprechend der Abbildung 3 realisiert.

Danach müssen die Brückenwiderstände und der Parallelwiderstand R_p so eingestellt werden, dass die Ausgangsspannung sich möglichst nah der Null nähert; die Brückenschaltung wird abgeglichen. Die Werte für die Brückenwiderstände und die Brückenspannung werden notiert.

Im Anschluss werden insgesamt drei verschiedene Metalle der Seltenen Erden untersucht. Hierfür stehen drei Glasröhrchen mit dem entsprechenden Stoff in Pulverform zur Verfügung. Da die Suszeptibilität temperaturabhängig ist (vergleiche Gleichung (2)), dürfen die Proben nicht zu lange in der Hand gehalten werden. Zudem sind die Röhrchen sowie die langen Spulen sehr empfindlich, weshalb diese mit Sorgfalt behandelt werden müssen, um Glasbruch oder Vergleichbares zu verhindern.

Nacheinander werden diese in eine Spule eingeführt und die Brückenwiderstände so reguliert, dass die Brückenspannung minimal wird. Erneut werden die Werte für die Brückenwiderstände und die -spannung festgehalten.

4 Auswertung

4.1 Vorbereitung: Berechnung der Theorie-Werte

Es werden die drei Elemente Neodymium, Gadolinium und Dysprosium untersucht, von denen jeweils zwei als dreifach positiv geladene Ione mit drei zweifach negativ geladenen Sauerstoff-Ionen ein Molekül bilden. Am Beispiel von Neodymium bedeutet dies Nd_2O_3

mit den Ionen Nd_3^+ und O_2^- . Ebenfalls sind alle drei Elemente bis zur 6s-Unterschale vollständig gefüllt, deren Quantenzahlen tragen somit nicht zur Magnetisierung bei. Hinsichtlich der Anzahl # der 4f-Elektronen unterscheiden sie sich. Dies ist auch der Fall, wenn sie im ionisierten Zustand sind: Jeweils zwei 6s-Elektronen und ein 4f-Elektron verschwindet; die Elektronen bis zur 5p-Schale bleiben unverändert. Da die 6s-Unterschale mit zwei Elektronen vollständig gefüllt ist, hat die vollständige Besetzung der Unterschale beziehungsweise das gänzliche Fehlen von Elektronen in dieser Unterschale keinen Einfluss auf die Berechnung der Gesamtquantenzahlen. Zur besseren Übersicht werden die Zwischenergebnisse in Tabelle 2 zusammengefasst.

Auf der 4f-Schale können sich maximal 14 Elektronen befinden: Die magnetische Quantenzahl des Drehimpulses l kann Werte zwischen -3 und 3 annehmen, also sind sieben verschiedene Werte möglich. Zusätzlich gibt es für jede Quantenzahl l maximal ein Elektron mit Spin-Up und eins mit Spin-Down. Daraus resultiert eine maximale Anzahl von vierzehn Elektronen auf dieser Schale. Dementsprechend wird gemäß der Hund'schen Regeln 2.3 bei einer Elektronenzahl von mehr als sieben die Quantenzahl des Gesamtdrehimpuls durch Addition $L + S$ berechnet, bei einer geringeren Zahl durch Subtraktion $L - S$.

Mithilfe der Quantenzahlen wird der Landé-Faktor gemäß Gleichung (3) berechnet.

Tabelle 2: Bestimmung der Quantenzahlen.

Element	neutral	ionisiert				
	# 4f	# 4f	S	L	J	g_J
Nd	4	3	$3 \cdot 1/2 = 3/2$	6	$9/2$	0.727
Gd	8	7	$7 \cdot 1/2 = 7/2$	0	$7/2$	2.000
Dy	10	9	$7 \cdot 1/2 + 2 \cdot -1/2 = \frac{5}{2}$	5	$15/2$	1.333

Zur Berechnung des theoretisch zu erwartenden Werts der Suszeptibilität χ wird ebenfalls die Anzahl N der atomaren magnetischen Dipolmomente pro Volumeneinheit benötigt. Hierfür wird die molare Masse zu

$$M_{\text{Molekül}} = 3M_{\text{O}} + 2M_{\text{SE}}$$

bestimmt mit der molaren Masse des Sauerstoff und der des jeweiligen Seltenen-Erd-Metalls. Je Molekül gibt es also zwei magnetische atomare Dipolmomente, die durch die Ionen des Metalls verursacht werden und deren Größe in Tabelle 2 bestimmt werden.

Die Stoffmenge der vorliegenden Proben ist

$$n_{\text{Molekül}} = \frac{m}{M_{\text{Molekül}}}$$

mit der Masse m . Sie gibt die Anzahl der Teilchen in Mol an, die in der Probe enthalten sind. Dementsprechend berechnet sich die Anzahl der Moleküle pro Volumen durch Division der Stoffmenge mit dem Volumen. Zu beachten ist hierbei, dass erneut ein effektives Volumen und somit auch die effektive Querschnittsfläche (7) verwendet werden

muss, da es sich um ein dekomprimiertes Pulver und nicht um einen Ein-Kristall handelt. Das muss noch mit zwei multipliziert werden, da auf ein Molekül, dessen Stoffmenge bisher betrachtet worden ist, stets zwei Ionen kommen. Die Anzahl der Mole der positiv geladenen Seltenen-Erd-Ionen in der gegebenen Probe ergibt sich also zu:

$$N_{\text{Ione,mol}} = 2 \cdot \frac{n_{\text{Molekül}}}{V_{\text{Probe,eff}}} = 2 \cdot \frac{n_{\text{Molekül}}}{Q_{\text{eff}}L} = 2 \cdot \frac{\rho_w n_{\text{Molekül}}}{m}.$$

Die Dichte ρ_w steht im Experiment bereits zur Verfügung und muss nicht extra aufgenommen werden. Die Anzahl N der Teilchen ohne Einheiten pro Volumeneinheit wird durch Multiplikation mit der Avogadro-Konstante N_A erreicht.

$$N = N_{\text{Ione,mol}} \cdot N_A = \frac{2N_A \rho_w}{M_{\text{Molekül}}}$$

Die entsprechenden Daten dazu sind in Tabelle 3 dargestellt. Die Werte für die molare Masse sind [3, S. 610] entnommen. Die des Sauerstoffs ist $M_O = 15,9994 \text{ g/mol}$.

Tabelle 3: Zwischenergebnisse zur Berechnung der Stoffmenge und des Landé-Faktors.

Element	$M_{\text{SE}} / \text{g/mol}$	$M_{\text{Molekül}} / \text{g/mol}$	m / g	$\rho_w / \text{g/cm}^3$	$N / 10^{28} / \text{m}^3$
Nd	144.22	336.44	9,0	7,24	2.592
Gd	157.25	362.50	14,08	7,40	2.459
Dy	162.50	373.00	14,38	7,8	2.519

Gemäß Gleichung (2) ist die Suszeptibilität temperaturabhängig. Der Versuch ist bei Raumtemperatur und Sommerwetter durchgeführt worden. Die Temperatur wird deshalb mit $T \approx (273,15 + 23,85) \text{ K} = 297 \text{ K}$ abgeschätzt. Daraus ergeben sich für die Suszeptibilität folgende theoretische Werte:

$$\chi_{\text{Nd}} = 2,98 \cdot 10^{-3} \quad (8)$$

$$\chi_{\text{Gd}} = 13,6 \cdot 10^{-3} \quad (9)$$

$$\chi_{\text{Dy}} = 25,1 \cdot 10^{-3} \quad (10)$$

4.2 Filterkurve des Selektivverstärkers

Die Messwerte sind in Abbildung 5 dargestellt, das bedeutet, dass die Ausgangsspannung gegen die Frequenz aufgetragen ist. Wichtig ist hierbei das Maximum, das sich eindeutig bei $\nu = 35 \text{ kHz}$ feststellen lässt. Dementsprechend wird ebendiese Frequenz für die weiteren Messungen benutzt. Ebenfalls ist aus der Graphik ersichtlich, wenn der Messbereich des Voltmeters gewechselt worden ist.

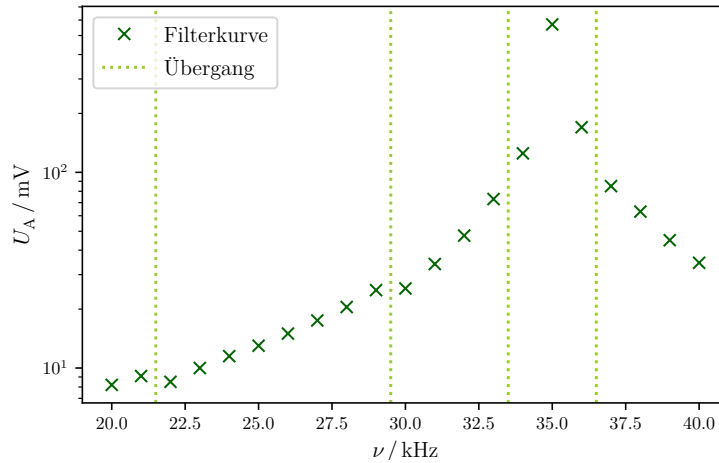


Abbildung 5: Filterkurve des Selektivverstärkers zur Bestimmung der Durchlassfrequenz.

4.3 Berechnung der experimentellen Werte für die Suszeptibilität

Die Kenngrößen und Messwerte werden der Übersicht halber in den Tabellen 4 und 5 zusammengefasst. Bereits berücksichtigt wird hierbei die Verstärkung der gemessenen Brückenspannung um den Faktor 100. Entsprechend wird 1 mV der Messwert $1 \cdot 10^{-2}$ mV zugeordnet.

Tabelle 4: Kenngrößen der Messapparaturen.

Größe	Wert
Frequenz ν	35,00 kHz
Speisespannung U_{Sp}	1,0 V
Windungszahl n	250
Querschnittsfläche Spule F	$86,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$
Spulenlänge l	$135 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Nun wird auf zwei Wegen die Suszeptibilität berechnet: Einmal χ_1 über Gleichung (5) mithilfe der Brückenspannung; und dann noch χ_2 über (6), die die Widerstände benutzt. Die Querschnittsfläche Q wird jeweils durch die effektive Querschnittsfläche Q_{eff} aus (7) substituiert. Es ergeben sich die in Tabelle 6 zusammengefassten Werte.

Tabelle 5: Messwerte der Brückenwiderstände und -spannung in Abhängigkeit der Spulenfüllung.

Füllung	R_3 / Ω	$\Delta R / \Omega$	R_4 / Ω	$U_{\text{Br}} / 10^{-5} \text{ V}$
ohne	2.58	-	2.42	1.50
Nd	2.73	0.15	2.27	1.45
Gd	3.47	0.74	1.53	1.35
Dy	4.16	1.43	0.84	1.15

Tabelle 6: Die experimentell berechneten Werte für die Suszeptibilität.

Element	$m / 10^{-3} \text{ kg}$	$\rho_w / 10^3 \text{ kg/m}^3$	$Q_{\text{eff}} / 10^{-6} \text{ m}^2$	χ_1	χ_2
Nd	9,0	7,24	9,21	$5,45 \cdot 10^{-4}$	$1,04 \cdot 10^{-3}$
Gd	14,08	7,40	14,09	$3,32 \cdot 10^{-4}$	$3,16 \cdot 10^{-3}$
Dy	14,38	7,8	13,66	$2,92 \cdot 10^{-4}$	$4,83 \cdot 10^{-3}$

5 Diskussion

Die Bestimmung der Durchlassfrequenz ist recht eindeutig, da die umliegenden Werte bei $\nu = 35,0 \text{ kHz}$ deutlich unter dem Maximum liegen. Das Wechseln der Messbereiche bei dem verwendeten Voltmeter schlägt sich in dem abrupten leichten Abfallen oder Steigen der Spannung nieder, welche im Prinzip im Bereich vor dem Maximum und im Bereich nach dem Maximum monoton steigen beziehungsweise fallen sollte. Durch Wechsel des Messbereichs wird in dem Voltmeter ein anderer Innenwiderstand geschaltet, und sollten diese nicht so fein abgestimmt sein, wie theoretisch zu erwarten, hat das die beschriebenen Variationen zur Folge. Diese Beobachtung zeigt, dass die mit dem Voltmeter gemessenen Werte bereits ein gewisses Maß an Unsicherheit haben. Die Durchlassfrequenz kann dennoch als valide angenommen werden, da das Maximum und direkt umliegende Werte in ein und demselben Messbereich aufgenommen sind.

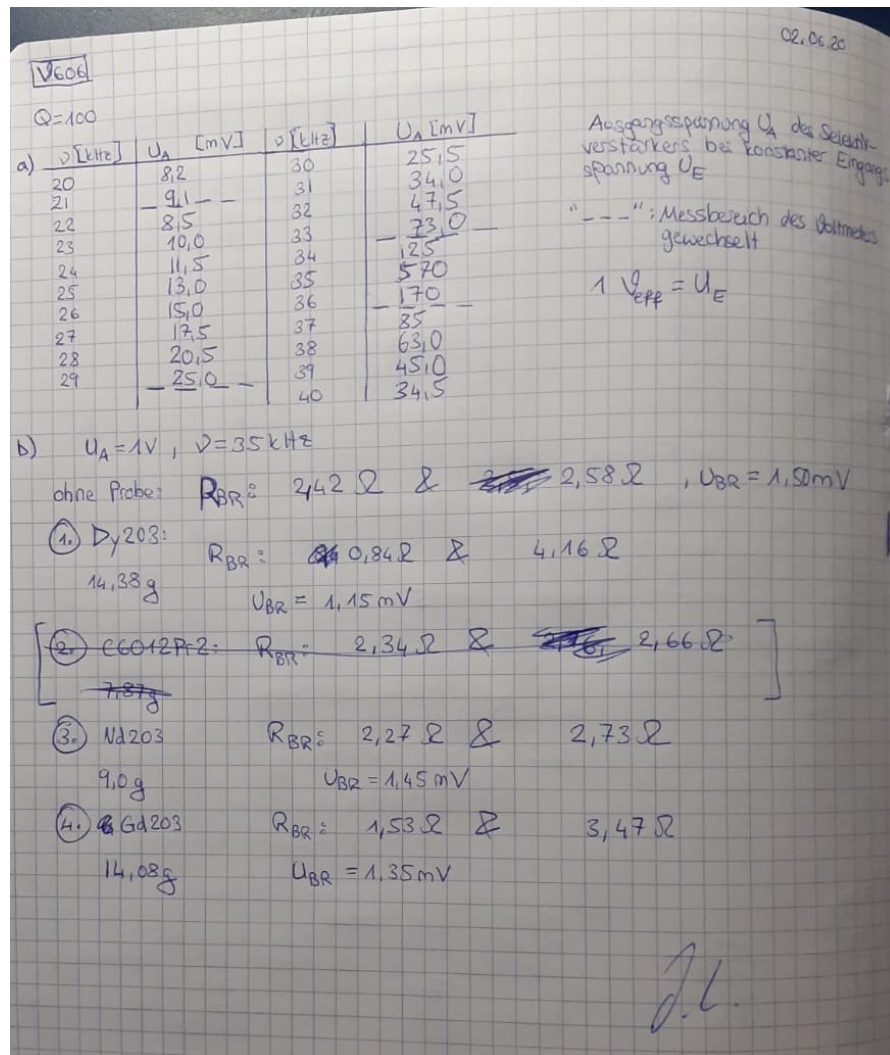
Auffällig bei der Auswertung der Suszeptibilitäten ist die Abweichungen von mehreren Größenordnungen von den Theoriewerten in (8) bis (10). Wird sie mithilfe der Spannung berechnet, reduziert sie sich um den Faktor 10^{-1} bis 10^{-2} ; über die Widerstände vergrößern sie sich um den Faktor 10^2 . Es ist recht offensichtlich, dass hier ein systematischer Messfehler vorliegt und dies keine statistisch zu erklärende Streuung ist.

Aufgrund der Annahme, dass $\Delta L \ll L$ ist, ist zu erwarten, dass bei der Messung ohne Füllung die Brückenwiderstände in etwa gleich sind. Mit Blick auf 5 bestätigt sich dies, die Widerstände weichen um 3.2% von dem idealen Wert $2,5 \Omega$ ab. Dementsprechend muss die Erhöhung des Widerstands R_3 bei Einführen von Materie – und damit ΔR – fehlerbehaftet und dadurch größer als erwartet sein. Da die Spulen in dem Schaltkasten 4 verborgen sind, kann von außen nicht beurteilt werden, ob möglicherweise sichtbare Schäden an den Spulen oder an dem Regelwiderstand zu sehen sind. Die Spulen sind wie beschrieben sehr empfindlich und könnten vielleicht bei vorherigen Verwendungen

beschädigt worden sein. Da die Auswirkungen auf die Messwerte von den genauen Schäden abhängig sind, können an dieser Stelle nur schwerlich Rückschlüsse auf ausgleichende Fehlerrechnungen gezogen werden.

Ebenso verhält es sich an dieser Stelle mit den Werten, die mithilfe der Brückenspannung berechnet werden.

Anhang: Messdaten



Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V606: Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen*. 2020.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Friedrich Kohlrausch. *Praktische Physik* 3. 24. Aufl. B. G. Teubner Stuttgart 1996, 1996.