

**VERSUCH 302**

# **BRÜCKENSCHALTUNGEN**

Antonia Joëlle Bock  
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner  
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2019

Abgabe: 17.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Komplexe Widerstände . . . . .	3
2.2	Die Kirchhoff'schen Gesetze . . . . .	3
2.3	Brückenschaltungen . . . . .	4
2.3.1	Wheatstone'sche Brückenschaltung . . . . .	5
2.3.2	Kapazitätsmessbrücke . . . . .	6
2.3.3	Induktionsmessbrücke . . . . .	7
2.3.4	Maxwell-Brücke . . . . .	8
2.3.5	Wien-Robinson-Brücke . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>10</b>
3.1	Wheatstone . . . . .	10
3.2	Kapazitätsmessbrücke . . . . .	10
3.3	Induktionsmessbrücke . . . . .	10
3.4	Wien-Robinson-Brücke . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>10</b>
4.1	Messung mit der Wheatstone'schen Brücke . . . . .	11
4.2	Messung mit der Kapazitätsmessbrücke . . . . .	11
4.3	Messung mit der Induktivitätsmess- und der Maxwell-Brücke . . . . .	12
4.4	Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke	13
4.5	Klirrfaktor-Messung . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>16</b>
	<b>Anhang: originale Messdaten</b>	<b>18</b>
	<b>Literatur</b>	<b>19</b>

# 1 Einleitung

Ziel dieses Experiments ist die Messung von Impedanzen mithilfe sogenannter Brückenschaltungen. Sie sind dafür besonders geeignet, da sie eine hohe Genauigkeit bei der Berechnung gewährleisten, sodass der Einfluss von Messfehlern möglichst gering gehalten werden kann. Je nach Form der Impedanz gibt es Variationen der Brückenschaltungen, die in 2 vorgestellt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Komplexe Widerstände

Bevor die Brückenschaltungen im Einzelnen betrachtet werden, muss zwischen verschiedenen Formen von elektrischen Widerständen – auch *Impedanzen* – unterschieden werden. Neben den ohmschen Widerständen  $R$  sorgen auch Spulen mit der Induktivität  $L$  und Kondensatoren mit der Kapazität  $C$ , die sich mit im Stromkreis befinden, für eine Veränderung des Strom- und Spannungsverhaltens. Der ohmsche Widerstand sorgt für einen Spannungsabfall von

$$U = RI. \quad (1)$$

Kondensatoren und Spulen hingegen bewirken zusätzlich eine Phasenverschiebung des Wechselstroms und der Wechselspannung, die den Stromkreis betreiben. In der reellen Schreibweise mit trigonometrischen Funktionen recht kompliziert, vereinfacht sich die Darstellung dessen mit komplexen Zahlen: Ohmsche sowie induktive und kapazitive Widerstände werden zu einer komplexwertigen Impedanz zusammengefasst. Dabei stellen letztere beiden den Imaginäranteil dar, wodurch die Phasenverschiebung algebraisch umgesetzt wird. Da sie in dem Sinne keinen effektiven Spannungsabfall bewirken, sind sie auch unter dem Namen *Scheinwiderstand* geläufig. Somit hat die Impedanz  $Z$  von den drei in Reihe geschalteten Widerständen die Form

$$Z = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}, \quad (2)$$

wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz der angelegten Wechselspannung  $\tilde{U} = \hat{U}e^{i\omega t}$  ist. Mit der komplexen Impedanz kann wie mit dem ohmschen Widerstand in (1) die Spannung und der Strom berechnet werden.

### 2.2 Die Kirchhoff'schen<sup>1</sup> Gesetze

Das erste Gesetz, ebenfalls unter der Knotenregel bekannt, leitet sich aus der Ladungserhaltung ab. An einem Knoten in einem Stromkreis muss die Summe der zufließenden Ströme gleich der der abfließenden sein. Definiert man eine entsprechende Vorzeichenregelung (z.B. alle abfließenden Ströme sind positiv, alle zufließenden negativ) erhält man den Ausdruck:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>nach Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887), deutscher Physiker

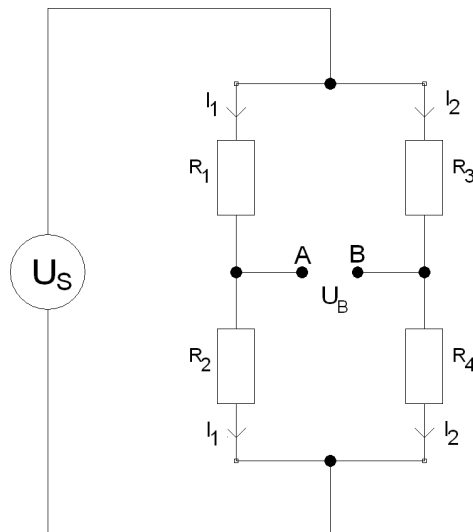
Das zweite Gesetz beruht auf die Energieerhaltung und die Existenz eines eindeutigen elektrischen Potentials. Als Folgerung daraus ergibt sich die sogenannte Maschenregel, die

$$\sum_k U_k = 0 \quad (4)$$

innerhalb eines geschlossenen Leiters – also einer Masche – postuliert. Dabei sind die Spannungsquellen und -abfälle  $U_k$  jeweils mit einem entsprechenden Vorzeichen versehen, je nachdem, ob sie in gleicher oder verschiedener Richtung gepolt sind.

## 2.3 Brückenschaltungen

Das Konzept der Brückenschaltung basiert auf den Kirchhoff'schen Gesetzen. Mit einer Parallelschaltung und den vorliegenden Gesetzen kann bei bekannten Widerständen ein unbekannter Widerstand bestimmt werden. Diese Schaltungen werden wegen ihrer hohen Genauigkeit in der Messtechnik häufig eingesetzt. Dabei ist die Auflösung davon abhängig, wie gut die Bauelemente bekannt sind, wie hoch ihre Ungenauigkeiten sind und wie hoch die Speisespannung ist. In Abb. 1 ist der konzeptionelle Aufbau einer Brückenschaltung zu sehen.



**Abbildung 1:** Eine allgemeine Brückenschaltung.

Zwischen den Punkten A und B kann eine Spannung gemessen werden, welche als Brückenspannung  $U_B$  bezeichnet wird. Mit der sogenannten Nullmethode können bspw. die Widerstände 2, 3 und 4 derart variiert werden, sodass die Brückenspannung  $U_B = 0$  wird. So kann mit der Bekanntheit der drei genannten Widerstände  $R_1$  berechnet werden. Über die Maschenregel 3 gilt

$$M_1 : U = R_1 I_1 - R_3 I_2.$$

Außerdem gilt

$$M_2 : U = R_2 I_1 - R_4 I_2.$$

Daraus folgt, dass

$$U_B = I_1 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Die Speisespannung können wir über die Maschenregel ausdrücken als

$$U_S = R_1 I_1 + R_2 I_1.$$

Somit erhalten wir eine Gleichung, welche die Brückenspannung in Abhängigkeit von den Widerständen und der Speisespannung angibt.

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S \quad (5)$$

Folgt nun, dass der Zähler des Ausdrucks Null wird, so verschwindet  $U_B$  und ist nur noch von den Widerstandsverhältnissen und nicht mehr von der Eingangsspannung  $U_S$  abhängig.

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \quad (6)$$

Auf diesem Prinzip bauen alle Brückenschaltungen auf.  $U_B$  ist hier immer noch proportional zu  $U_S$ , weswegen eine höhere Messgenauigkeit erreicht wird, wenn die Speisespannung hoch ist. Eine Brückenschaltung, dessen Brückenspannung Null ist, nennt man abgeglichen.

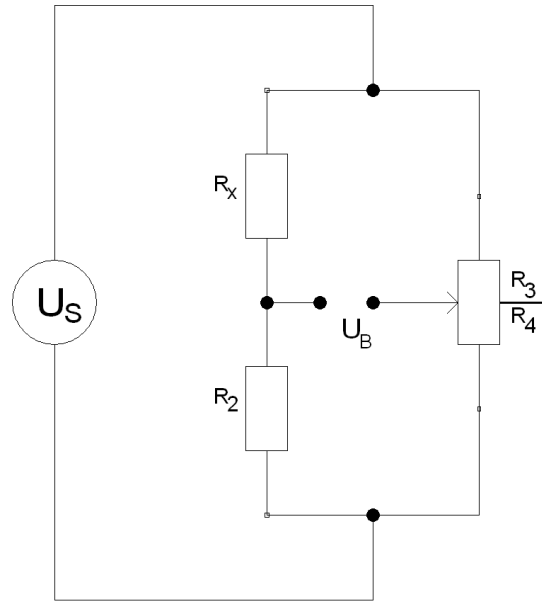
### 2.3.1 Wheatstone'sche<sup>2</sup> Brückenschaltung

Die Wheatstone'sche Brückenschaltung nutzt ohmsche Widerstände, um einen unbekannten Widerstand  $R_x$  zu ermitteln. Hier wird für die eine Seite der Parallelschaltung ein Potentiometer verwendet, sodass das Widerstandsverhältnis  $R_3$  zu  $R_4$  stufenlos eingestellt werden kann, bis die Brückenspannung Null wird. Da  $R_2$  bei dieser Schaltung fest und bekannt ist, errechnet sich der gesuchte Widerstand durch

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}. \quad (7)$$

---

<sup>2</sup>Charles Wheatstone (1802 - 1875), britischer Physiker



**Abbildung 2:** Die Wheatstone'sche Brückenschaltung.

### 2.3.2 Kapazitätsmessbrücke

Impedanzen, die aus einem Wirkwiderstand und einem Blindwiderstand bestehen, werden mit einem Real- und Imaginäranteil angegeben, die zusammen als komplexe Zahl angegeben werden. Dabei gibt es zwei grundlegende Bauelemente, zwischen denen man unterscheidet. Die Impedanz eines Kondensators  $C$  und einer Spule  $L$ , wobei

$$Z_R = R \quad , \quad Z_L = i\omega L \quad \text{und} \quad Z_C = -\frac{i}{\omega C}.$$

Bekanntlich sind zwei komplexe Zahlen gleich, wenn ihre Real- und Imaginäranteile gleich sind. Es folgen damit aus 6

$$Z_2 Z_3 = Z_1 Z_4$$

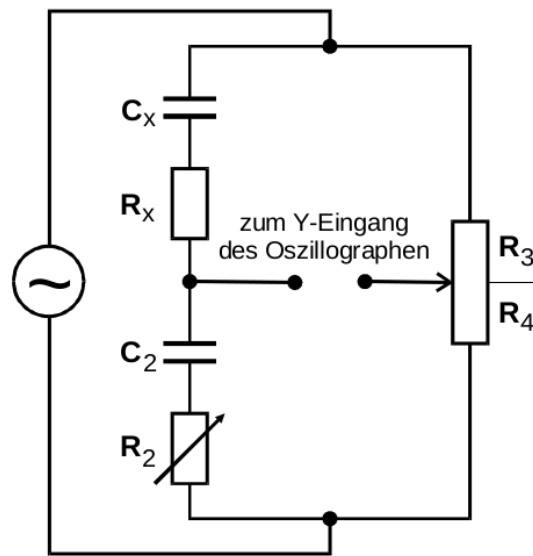
zwei Gleichungen

$$x_2 x_3 - y_2 y_3 = x_1 x_4 - y_1 y_4 \quad (8)$$

und

$$x_2 y_3 + x_3 y_2 = x_1 y_4 + x_4 y_1. \quad (9)$$

Hierbei sind  $x$  und  $y$  Real- und Imaginäranteil der Impedanzen  $Z_1$  bis  $Z_4$ . Es müssen bei einer Kapazitätsmessbrücke also nicht nur die Wirkwiderstände, also die ohm'schen Anteile verschwinden, sondern auch die Blindwiderstände, also der Phasenanteil. Reale Kondensatoren speichern nicht nur Energie, sondern weisen auch einen geringen ohm'schen Widerstand auf. In einem Schaltbild wird so ein realer Kondensator also als ein ohm'scher



**Abbildung 3:** Eine Kapazitätsmessbrücke.

Widerstand und einem in Reihe geschalteten Kondensator dargestellt. Die Brückenschaltung kann genau wie bei der Wheatstone'schen Brücke aufgebaut werden. Nach den zuletzt genannten Gleichungen ergibt sich

$$y_3 = y_4 = 0 \quad , \quad y_1 = \frac{-1}{\omega C_x} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{-1}{\omega C_2}.$$

und damit zusätzlich zu 6 auch noch

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (10)$$

Es muss also nur noch ein weiterer Widerstand  $R_2$  variiert werden, welcher unabhängig von dem  $R_3 R_4$ -Potentiometer ist.

### 2.3.3 Induktionsmessbrücke

Eine Induktionsmessbrücke verhält sich analog zur Kapazitätsmessbrücke. Lediglich 10 ändert sich zu

$$L_x = L_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (11)$$

Da jedoch gerade bei niedrigen Frequenzen die Wirkanteile der Spulen zu große Verluste aufweisen, greift man oft auf eine Kapazität zurück. Solch eine Schaltung ist dann die Maxwell-Brücke.

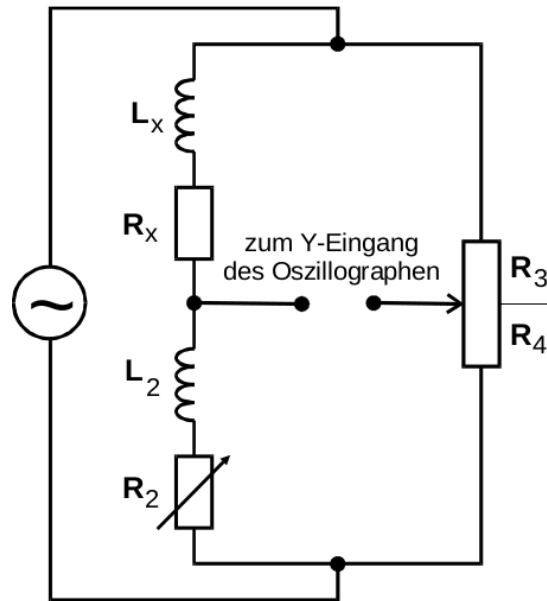


Abbildung 4: Eine Induktivitätsmessbrücke.

### 2.3.4 Maxwell<sup>3</sup>-Brücke

In dieser Schaltung werden die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  variiert. Unbekannt sind  $L_x$  und  $R_x$ . Es ist

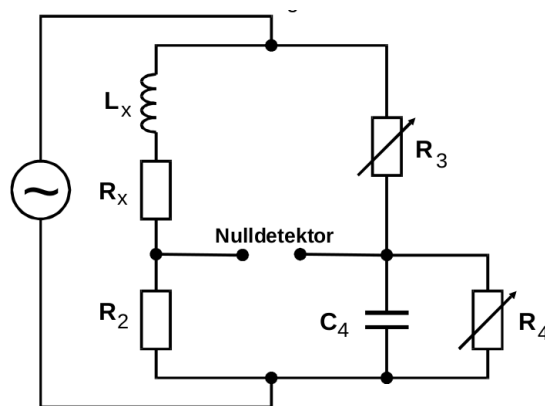


Abbildung 5: Die Maxwell-Brücke.

$$Z_1 = R_x + i\omega L_x.$$

Mit den Abgleichbedingungen 11 und 6 ergibt sich die Gleichung

$$R_x R_4 (1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2) = R_2 R_3 (1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2).$$

---

<sup>3</sup>James Clerk Maxwell (1831 - 1879), britischer Physiker



Daraus folgt wieder 6, aber auch

$$L_x = R_2 R_3 C_4. \quad (12)$$

Es ist sofort erkennbar, dass die Frequenzabhängigkeit im abgeglichenen Zustand verschwindet. Außerdem werden somit die niederfrequenten Störeffekte umgangen.

### 2.3.5 Wien-Robinson-Brücke<sup>4</sup>

Anders zu den anderen Brückenschaltungen ist die Wien-Robinson-Brückenschaltung frequenzabhängig. Aus 5 ergibt sich für Impedanzen

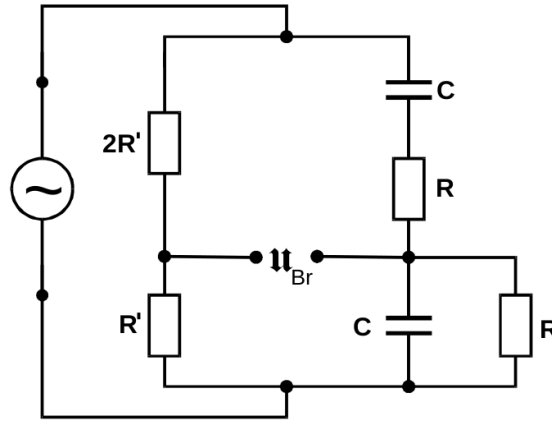


Abbildung 6: Wien-Robinson-Brücke.

$$U = \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{(Z_3 + Z_4)(Z_1 + Z_2)} U_S.$$

Nach ein paar Doppelbrüchen kann das Verhältnis von Brücken- zu Speisespannung als Funktion der Frequenz angegeben werden. Daraus folgt das Betragsquadrat

$$\left| \frac{U_B}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9[(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2]}. \quad (13)$$

Daraus folgt wieder, dass die Brückenspannung genau dann verschwindet, wenn

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

Die Gleichung wird dann zu

$$\left| \frac{U_B}{U_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{\left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^2}{\left( 1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 9 \frac{\omega}{\omega_0}^2}. \quad (14)$$

<sup>4</sup>Max Wien (1866 - 1938). Der Oszillator wurde erstmals von William Hewlett und David Packard gebaut und vermarktet. Für diesen Zweck gründeten sie Hewlett-Packard, wodurch Wiens Erfindung als Fundament der Firma diente.

An 14 ist ersichtlich, dass die Schaltung einem Filter ähnelt, welcher um die Kreisfrequenz  $\omega_0$  Schwingungen entfernt. Es schwächt alle naheliegenden Schwingungen ab.

## 3 Durchführung

### 3.1 Wheatstone

Für die Wheatstone'sche Brückenschaltung werden alle Kabel gemäß der Abbildung verbunden. Die Speisespannung wird daraufhin an der Spannungsquelle maximal eingestellt. Die Brückenspannung wird mit Hilfe eines Oszilloskops dargestellt. Nun wird an dem Potentiometer so weit gedreht, sodass die Brückenspannung Null wird. Der eingestellte Widerstand wird abgelesen und der Vorgang mit Austauschen des Widerstands  $R_2$  insgesamt 3 mal durchgeführt.

### 3.2 Kapazitätsmessbrücke

Es werden wieder die Bauelemente nach der Abbildung verschaltet. Nun jedoch müssen beim Abgleichen die zwei Potentiometer individuell variiert werden, sodass nicht nur Spannung, sondern auch die Phase verschwindet. Wird dies erreicht, wird der Messwert abgelesen und alles ebenfalls 3 mal durchgeführt.

### 3.3 Induktionsmessbrücke

Die Messung erfolgt vollkommen analog zur Kapazitätsmessbrücke.

### 3.4 Wien-Robinson-Brücke

Es wird erneut die Schaltung nach Plan aufgebaut. Für diese Messungen jedoch wird ein anderes Gerät verwendet, bei dem die eingestellte Frequenz digital abgelesen und fein eingestellt werden kann. Es wird zunächst der Bereich gesucht, an dem die Brückenspannung und -phase verschwindet. Anschließend werden 10 Werte nah um die eingestellte Frequenz abgetastet, und danach weitere 14 Werte in einem größeren Frequenzbereich um  $\omega_0$  aufgenommen.

## 4 Auswertung

Gemäß [1] wird für die Referenzbauteile, wenn nicht anders erwähnt, ein Fehler von  $\pm 0.2\%$  angenommen. Das verwendete Potentiometer hat eine Toleranz von  $\pm 0.5\%$  – hiermit sind meist die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  eingestellt worden. Die Fehlerrechnungen sind jeweils mit iPython 7.8.0 mit dem Paket *uncertainties* durchgeführt worden. Aus einigen Messungen resultieren mehrere Messergebnisse mit jeweiliger Unsicherheit.

Um ein Endresultat der Größe aus der den Messungen zu erhalten, werden diese mittels

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (15)$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (16)$$

zu einem endgültigen Ergebnis zusammengefasst.

#### 4.1 Messung mit der Wheatstone'schen Brücke

**Tabelle 1:** Messdaten für die Wheatstone'sche Brückenschaltung.

$R_x$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
Wert 12	$332,0 \pm 0,7$	$542 \pm 3$	$458 \pm 2$
	$500,0 \pm 1,0$	$440 \pm 2$	$560 \pm 3$
	$1000 \pm 2$	$282 \pm 1$	$718 \pm 4$
Wert 11	$332,0 \pm 0,7$	$598 \pm 3$	$402 \pm 2$
	$500,0 \pm 1,0$	$497 \pm 2$	$503 \pm 3$
	$1000 \pm 2$	$330 \pm 2$	$670 \pm 3$

Laut der Abgleichbedingung 7 ergeben sich für die Werte 12 und 11 folgende Ergebnisse:

**Tabelle 2:** Messergebnisse der Wheatstone-Brücke.

Widerstand	Messung Nr.	$R_x / \Omega$
Wert 12	1	$393 \pm 3$
	2	$393 \pm 3$
	3	$393 \pm 3$
Endresultat		$393 \pm 2$
Wert 11	1	$494 \pm 4$
	2	$494 \pm 4$
	3	$493 \pm 4$
Endresultat		$494 \pm 2$

#### 4.2 Messung mit der Kapazitätsmessbrücke

Die erste Kapazität (Wert 1) wurde mit einer Frequenz von  $f = 40 \text{ kHz}$ , die zweite (Wert 3) mit  $f = 36 \text{ kHz}$  gemessen.

**Tabelle 3:** Messdaten für die Kapazitätsmessbrückenschaltung.

$C_x$	$C_2 / \text{nF}$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
Wert 1	$450 \pm 1$	$408 \pm 1$	$592 \pm 1$
	$597 \pm 1$	$487 \pm 1$	$513 \pm 1$
	$992 \pm 2$	$611 \pm 1$	$389 \pm 1$
Wert 3	$597 \pm 1$	$595 \pm 1$	$405 \pm 1$
	$992 \pm 2$	$711 \pm 1$	$289 \pm 1$
	$750 \pm 2$	$643 \pm 1$	$377 \pm 1$

Aus der Abgleichbedingung

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (17)$$

resultieren die in 4 dargestellten Werte. Da sich bei der Durchführung dieser Messung

**Tabelle 4:** Messergebnisse der Kapazitätsmessbrücke.

Kapazität	Messung Nr.	$C_x / \text{nF}$
Wert 1	1	$653 \pm 2$
	2	$629 \pm 2$
	3	$632 \pm 2$
Endresultat		$638 \pm 4$
Wert 3	1	$406 \pm 1$
	2	$403 \pm 2$
	3	$440 \pm 2$
Endresultat		$416 \pm 17$

mit einer RC-Kombination Schwierigkeiten auftraten, muss an dieser Stelle auf eine Auswertung diesbezüglich verzichtet werden. Die Praktikumsaufsicht zeigte sich damit einverstanden.

### 4.3 Messung mit der Induktivitätsmess- und der Maxwell-Brücke

Bei Messung der verlustbehafteten Induktivität (Wert 19) mit der Induktivitätsmessbrücke wurde eine Frequenz von  $f = 100 \text{ Hz}$  benutzt, bei der mit der Maxwell-Brücke  $f = 40,2 \text{ kHz}$ . Für die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  wird bei der Maxwell-Brücke eine Toleranz von  $\pm 3\%$  angenommen [1].

Mithilfe der Abgleichbedingungen für die Induktivitätsmessbrücke

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (18)$$

**Tabelle 5:** Messdaten zur Ermittlung der Induktivität mit Wert 19.

Messmethode	$L_2 / \text{mH}$	$C_4 / \text{nF}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
Ind.-Br.	$14.6 \pm 0.03$		$332.0 \pm 0.7$	$255 \pm 1$	$745 \pm 4$
	$14.6 \pm 0.03$		$500.0 \pm 1.0$	$185 \pm 1$	$815 \pm 4$
	$14.6 \pm 0.03$		$664 \pm 1$	$145 \pm 1$	$855 \pm 4$
Maxwell		$750 \pm 2$	$664 \pm 1$	$57 \pm 2$	$270 \pm 8$

und denen für die Maxwell-Brücke

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} L_x = C_4 R_2 R_3 \quad (19)$$

ergibt sich für die verlustbehaftete Spule:

**Tabelle 6:** Innenwiderstand und Induktivität der verwendeten Spule.

Messung Nr.	$R_x / \Omega$	$L_x / \text{mH}$
1	$114 \pm 1$	$5,00 \pm 0,04$
2	$113 \pm 1$	$3,31 \pm 0,03$
3	$113 \pm 1$	$2,48 \pm 0,02$
Endresultat	$113 \pm 0,6$	$3,60 \pm 0,80$
4 (Maxwell)	$140 \pm 6$	$28,4 \pm 1,0$

#### 4.4 Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke

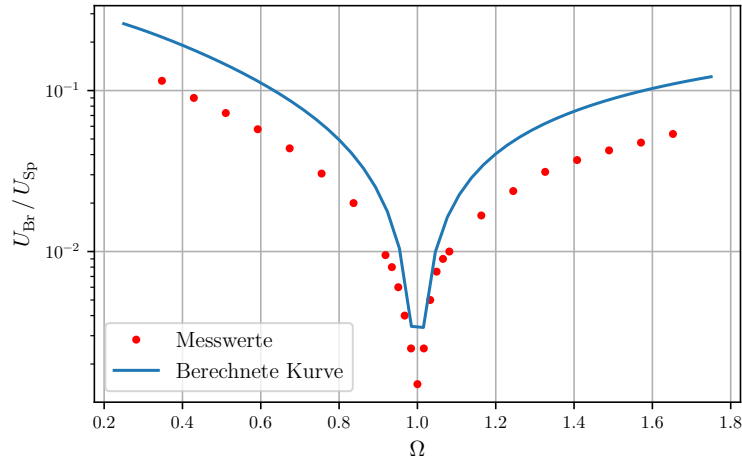
Bei dieser Messung wurden ein Kondensator mit einer Kapazität von  $C = 660 \text{ nF}$  und zwei ohmsche Widerstände  $R = 400 \Omega$  und  $R' = 500,0 \Omega$  verwendet und eine konstante, frequenzunabhängige Speisespannung von  $U_{\text{Sp}} = 4,0 \text{ V}$  gemessen. Der Messwert der Frequenz der minimalen Brückenspannung ist  $f_0 = 613,0 \text{ Hz}$ . Berechnet man diese mit den gegebenen Referenzwerten der Bauteile, erhält man einen Wert von

$$f_{0,\text{rechn}} = \frac{1}{2\pi RC} = 603 \text{ Hz}. \quad (20)$$

**Tabelle 7:** Messwerte der Wien-Robinson-Brücke.

$f / \text{Hz}$	$\Omega = f/f_0$	$U_{\text{Br}} / \text{mV}$	$U_{\text{Br}}/U_{\text{Sp}}$
213,0	0,3475	460	0,12
263,0	0,4290	360	0,09
313,0	0,5106	290	0,073
363,0	0,5922	230	0,058
413,0	0,6737	175	0,044
463,0	0,7553	122	0,031
513,0	0,8369	80	0,020
563,0	0,9184	38	0,0095
573,0	0,9347	32	0,0080
583,0	0,9511	24	0,0060
593,0	0,9674	16	0,0040
603,0	0,9837	10	0,0025
613,0	1,000	6	0,0015
623,0	1,016	10	0,0025
633,0	1,033	20	0,0050
643,0	1,049	30	0,0075
653,0	1,065	36	0,0090
663,0	1,082	40	0,010
713,0	1,163	67	0,017
763,0	1,245	95	0,024
813,0	1,326	125	0,031
863,0	1,408	148	0,037
913,0	1,489	170	0,043
963,0	1,571	190	0,048
1013,0	1,653	215	0,054

Die Messwerte sowie die erwartete Kurve sind, wie in der Versuchsanleitung beschrieben, in 7 aufgetragen.



**Abbildung 7:** Messkurve der Wien-Robinson-Brücke.

#### 4.5 Klirrfaktor-Messung

Zur Berechnung des Klirrfaktors  $k$  des Generators wird vereinfachend angenommen, dass ausschließlich Oberwellen der zweiten Oberwelle ausschlaggebend sind. So vereinfacht sich die Berechnung von  $n$  Oberwellen zu

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}}{U} = \frac{U_2}{U}. \quad (21)$$

Für die Spannung  $U$  gilt  $U = U_{Sp} = 4,0 \text{ V} = \text{const.}$  Die Amplitude der zweiten Oberwelle ( $\Omega = f_2/f_1 = 2$ ) berechnet sich über

$$U_2 = 3 U_{Br} \cdot \frac{\sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 + 9\Omega^2}}{|\Omega^2 - 1|} = 3 \cdot 6 \text{ mV} \cdot \frac{\sqrt{9 + 36}}{3} = 3\sqrt{5} \cdot 6 \text{ mV} \approx 40 \text{ mV}. \quad (22)$$

Hierbei wird der minimale Wert für die Brückenspannung verwendet, da bei dieser ausschließlich Oberwellen, in dem Fall also die zweite Oberwelle, für eine Spannung sorgen. Mit  $U = U_{Sp} = 4,0 \text{ V}$  ergibt sich der Klirrfaktor:

$$k = \frac{U_2}{U_{Sp}} = 0.010 \quad (23)$$

## 5 Diskussion

Bei Betrachtung der Ergebnisse fällt relativ schnell ins Auge, dass sich für die ohmschen Widerstände ein vergleichsweise eindeutiger Wert bestimmen lässt, wohingegen die kapazitiven und induktiven Widerstände größere Abweichungen aufweisen. Grund dafür könnte die Wahl der Frequenz sein. Für eine optimale Messung befinden sich die Wirk- und Blindwiderstände in der gleichen Größenordnung. Die Blindwiderstände bei der Kapazitätsmessbrücke mit der Kapazität  $C_2 \sim 5 \cdot 10^{-7}$  liegen mit Frequenzen  $f \sim 10^4$  in einer Größenordnung von  $\sim 10^1$ . Die ohmschen Widerstände sind in etwa  $\propto 5 \cdot 10^3$ . Durch die etwas höhere Wahl der Frequenz als der Referenzierten ist der Einfluss der Streukapazitäten in den Verdrahtungen größer. Da bei jedem Messvorgang unterschiedliche Kapazitäten und Widerstände verwendet worden sind, ist dieser Einfluss jeweils unterschiedlich ausschlaggebend und führt zu teils sehr verschiedenen Abweichungen vom Mittelwert. Zudem ist die der Kapazitätsmessbrücke zugrunde liegende Annahme, dass es sich um einen ohmschen verlustfreien Kondensator handelt, was zu Differenzen zwischen erwartetem und gemessenem Wert führt.

Die Messung der verlustbehafteten Induktivitäten zeigt große Abweichungen, insbesondere im Vergleich der Induktivitätsmessbrücke und der Maxwell-Brücke. Ebenfalls liegen hier die Blindwiderstände in einer um einen Faktor  $10^2$  verschobenen Größenordnung im Vergleich zu der der Wirkwiderstände. Daraus resultieren, wie erläutert, größere Auswirkungen der induktiven und kapazitiven Widerstände in den Leitern, die die gemessenen Werte verfälschen können. Die Abweichung, die der aus der Maxwell-Brücke berechnete Wert für die Induktivität aufweist, lässt sich hiermit jedoch kaum erklären. Nahe liegt die Vermutung, dass es sich um einen systematischen Messfehler handelt, der sich im Nachhinein nur schwerlich verifizieren lässt – zumal diese Messung nur einmal, ohne Wiederholung durchgeführt worden ist. Die konsequente Streuung der Messergebnisse der Induktivitätsmessbrücke um einen Mittelwert deutet darauf hin, dass der Messfehler bei der Maxwell-Brücke zu finden ist. Wirklich sicher kann dies jedoch nicht festgemacht werden, da systematische Messfehler die Werte der Induktivitätsmessbrücke ebenfalls im gleichen Maße verfälschen könnten.

Bei der Messung mit der Wien-Robinson-Brücke zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit fällt anhand Abbildung 7 auf, dass die Messwerte mit etwa gleicher Abweichung unterhalb der zu erwartenden Kurve des Spannungsverhältnisses liegen. Dies deutet auf einen systematischen Fehler hin, der vermutlich in nicht perfekten, verlustfreien Kabeln begründet ist. Die Speisespannung wird direkt am Generator gemessen, wohingegen die Brückenspannung erst mitten im Stromkreis abgegriffen wird. Nicht beachtet werden dabei ohmsche Verluste über die Kabel, über die der Strom bis zur Messstelle erst noch fließt.

Die Differenz der Nullfrequenz vom Messwert ist relativ gering und lässt sich gut über durch statistische Messunsicherheiten bedingte Abweichungen erklären.

Die in 4.5 durchgeführte Klirrfaktor-Berechnung bestätigt die Vermutung, dass sich ein idealer Sinusgenerator von einem realen durch den Gehalt an Oberwellen unterscheidet. Weil  $k \neq 0$ , sind beim Minimum der Brückenspannung noch Wellen messbar, was beim idealen Sinusgenerator nicht der Fall wäre.





## Anhang: originale Messdaten

U302: 10.12.19

a) Wheatstone'sche Brückenschaltung

Spannungsquelle: Frequenzangabe  $\pm 1,5\%$  Genauigkeit  
Potentiometer: relativer Fehler:  $\pm 0,5\%$

i)  $R_2 = 1,00 \text{ k}\Omega$   
 $R_x \hat{=} \text{Wert} + 12$ ,  $R_3 = 282 \Omega$ ,  $R_4 = 718 \Omega$

ii)  $R_2 = 332,0 \Omega$ ,  $R_3 = 542 \Omega$ ,  $R_4 = 458 \Omega$

iii)  $R_2 = 500,0 \Omega$ ,  $R_3 = 440 \Omega$ ,  $R_4 = 560 \Omega$

iv)  $R_x \hat{=} \text{Wert} + 11$   
 $R_2 = 500,0 \Omega$ ,  $R_3 = 497 \Omega$ ,  $R_4 = 503 \Omega$

v)  $R_2 = 332,0 \Omega$ ,  $R_3 = 598 \Omega$ ,  $R_4 = 402 \Omega$

vi)  $R_2 = 1,00 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 330 \Omega$ ,  $R_4 = 670 \Omega$

b) Kapazitätsmessbrücke:

i)  $C_x \hat{=} \text{Wert} + 1$ ,  $\nu = 40 \text{ kHz}$   
 $C_2 = 450 \text{ nF}$ ,  $R_3 = 408 \Omega$ ,  $R_4 = 592 \Omega$

ii)  $C_2 = 597 \text{ nF}$ ,  $R_3 = 487 \Omega$ ,  $R_4 = 513 \Omega$

iii)  $C_2 = 992 \text{ nF}$ ,  $R_3 = 611 \Omega$ ,  $R_4 = 389 \Omega$

iv)  $C_x \hat{=} \text{Wert} + 3$ ,  $\nu = 36 \text{ kHz}$   
 $C_2 = 597 \text{ nF}$ ,  $R_3 = 595 \Omega$ ,  $R_4 = 405 \Omega$

v)  $C_2 = 992 \text{ nF}$ ,  $R_3 = 711 \Omega$ ,  $R_4 = 289 \Omega$

vi)  $C_2 = 750 \text{ nF}$ ,  $R_3 = 643 \Omega$ ,  $R_4 = 377 \Omega$

c)  $L_x, R_x \hat{=} \text{Wert} + 19$ ,  $\nu = 100 \text{ Hz}$

i)  $L_2 = 14,6 \text{ mH}$ ,  $R_2 = 332,0 \Omega$ ,  $R_3 = 255 \Omega$ ,  $R_4 = 745 \Omega$

ii)  $L_2 = 14,6 \text{ mH}$ ,  $R_2 = 500,0 \Omega$ ,  $R_3 = 185 \Omega$ ,  $R_4 = 815 \Omega$

iii)  $L_2 = 14,6 \text{ mH}$ ,  $R_2 = 664 \Omega$ ,  $R_3 = 145 \Omega$ ,  $R_4 = 855 \Omega$

d)  $L_x, R_x \hat{=} \text{Wert} + 19$ ,  $\nu = 60,2 \text{ kHz}$   
 $R_2 = 664 \Omega$ ,  $C_4 = 750 \text{ nF}$ ,  $R_3 = 57 \Omega$ ,  $R_4 = 270 \Omega$

e)  $C = 660 \text{ nF}$ ,  $R = 400 \Omega$ ,  $R' = 500,0 \Omega$ ,  $U_s = 4,0 \text{ V}$

$\nu [\text{Hz}]$	$U_{BR} [\text{mV}]$	$\nu [\text{Hz}]$	$U_{BR} [\text{mV}]$	$\nu [\text{Hz}]$	$U_{BR} [\text{mV}]$
213,0	460	413,0	175	593,0	16
263,0	360	463,0	122	603,0	10
313,0	290	513,0	80	613,0	6
363,0	230	563,0	38	623,0	10
		573,0	32	633,0	20
		583,0	27		

$\nu [\text{Hz}]$	$U_{BR} [\text{mV}]$	$\nu [\text{Hz}]$	$U_{BR} [\text{mV}]$
53	36	863	148
63	40	913	170
13	67	963	190
63	95	1013	215
13	125		

## **Literatur**

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung Nr. 302: Elektrische Brückenschaltungen*. 2019.