

Versuch Nr. 355

## **Gekoppelte Schwingkreise**

Antonia Joëlle Bock  
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner  
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.12.2019

Abgabe: 07.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

## Inhaltsverzeichnis

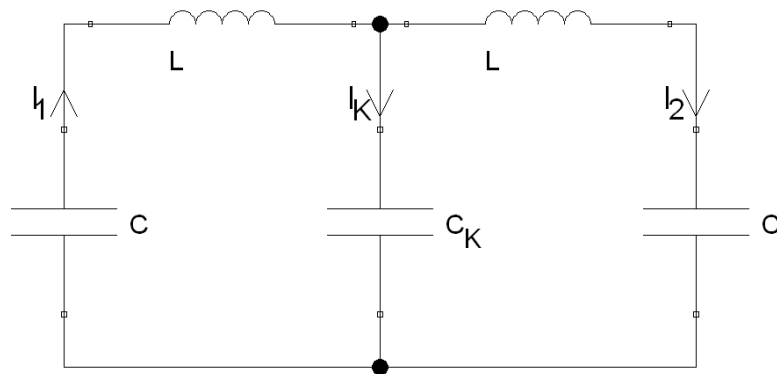
<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Einleitung . . . . .	3
1.2	Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise, Eigenmoden, Schwebungen . . . . .	3
1.3	Erzwungene Schwingungen . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
2.1	Vorbereitung: Einstellung der Kapazität . . . . .	6
2.2	Messprogramm . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
3.1	Messdaten . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Anhang: originale Messdaten</b>	<b>8</b>

# 1 Theorie

## 1.1 Einleitung

Ziel dieses Experiments ist es, gekoppelte Schwingkreise genauer zu untersuchen. Konkret soll hier das Verhalten der Energieverteilung auf die gekoppelten Systeme, sowie der Einfluss eines schwingenden Erregers auf den Schwingkreis ergründet werden. Da elektromagnetische Schwingssysteme bei weitem einfacher zu vermessen sind als mechanische, werden die Messungen an ebensolchen durchgeführt. Die daraus gewonnen Erkenntnisse lassen sich problemlos auf andere gekoppelte Schwingssysteme übertragen.

## 1.2 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise, Eigenmoden, Schwebungen



**Abbildung 1:** Schaltbild eines kapazitiv gekoppelten Schwingkreises.

Die in 1 gezeigten Schwingkreise sind über einen Kondensator der Kapazität  $C_K$  gekoppelt, wie es später auch im Experiment der Fall sein wird. Gemäß der Knotenregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz) gilt die Beziehung

$$I_1 = I_2 + I_K. \quad (1)$$

Über die Maschenregel folgt für die über den Kondensatoren und Spulen abfallenden Spannungen

$$U_{C_1} + U_K = U_{L_1} \quad (2)$$

$$U_{C_2} = U_{L_2} + U_K \quad (3)$$

aus. Mit der Definition der Kapazität  $C = Q/U$ , der Induktionsspannung  $U = -L\dot{I}$  und (1) folgt hierfür nach einmaligem zeitlichen Ableiten

$$\dot{Q} = I = C\dot{U} \quad (4)$$

$$\frac{1}{C}\dot{Q}_{C_1} + L\ddot{I}_{L_1} + \frac{1}{C_K}\dot{Q}_K \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{C}I_1 + L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{C}\dot{Q}_{C_2} + L\ddot{I}_2 - \frac{1}{C_K}\dot{Q}_K \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{C}I_2 + L\ddot{I}_2 - \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (6)$$

Eine Möglichkeit zur Lösung der beiden gekoppelten Differentialgleichungen besteht darin, (5) und (6) zu addieren und subtrahieren. So erhält man zwei voneinander entkoppelte Gleichungen der Variablen  $I_1 + I_2$  und  $I_1 - I_2$ , die einfach mit einem harmonischen Ansatz gelöst werden können:

$$L(\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (7)$$

$$L(\ddot{I}_1 - \ddot{I}_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)(I_1 - I_2) = 0 \quad (8)$$

Der harmonische Ansatz  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  liefert mit den Kreisfrequenzen  $\omega_+$  für (7) und  $\omega_-$  für (8) die Lösungen

$$(I_1 + I_2)(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \quad \text{mit} \quad \omega_+^2 = \frac{1}{LC}, \quad (9)$$

$$(I_1 - I_2)(t) = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \quad \text{mit} \quad \omega_-^2 = \frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_K} = \frac{C_K + 2C}{LCC_K} \quad (10)$$

mit den Integrationskonstanten  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $\varphi_+$  und  $\varphi_-$ . Die Schwingungsfrequenzen sind entsprechend  $f_{\pm} = \omega_{\pm}/2\pi$ . Um die Lösungen für die ursprünglichen Ströme  $I_1$  und  $I_2$  zu erhalten, addiert und subtrahiert man (9) und (10) erneut und dividiert durch zwei, sodass daraus

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (11)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (12)$$

resultiert.

Jedes durch  $N$  Systeme gekoppelte Schwingungssystem hat  $N$  Fundamentalschwingungen – auch bekannt unter Eigenmoden oder Normalschwingungen. Dies sind Schwingungen, die das System besonders „bevorzugt“ ausführt. Allgemein besteht dann die Lösung für die Schwingung aus der Überlagerung der Eigenmoden, die durch Anfangsbedingungen festgelegt wird.

In diesem Fall sind  $N = 2$  Systeme gekoppelt, die Eigenmoden sind durch  $I_1 + I_2$  mit  $\omega_+$  und  $I_1 - I_2$  mit  $\omega_-$  gegeben: Beginnt das System mit zwei gleichen Strömen  $I_1 = I_2$  zu schwingen, so gilt  $A_- = 0$ , sodass der Schwingkreis mit gleichen Strömen  $I_1$  und  $I_2$  mit der Frequenz  $f_+ = \omega_+/2\pi$ , die ein einzelner LC-Kreis ebenfalls hätte, schwingt und gemäß (1) kein Strom durch den Kopplungskondensator fließt. Dies ist die gleichphasige Normalschwingung – die Ströme sind stets in Phase. Wird das Gegenteil betrachtet, starten die Ströme  $I_1 = -I_2$  genau entgegengesetzt, oszilliert das System in der zweiten Eigenmode mit  $f_- = \omega_-/2\pi > f_+$ . Der Summenstrom  $I_1 + I_2$  verschwindet und die Ströme schwingen genau gegenphasig. Selbsterklärend ist dies die gegenphasige Eigenschwingung.

Ebenfalls zu betrachten sind sogenannte Schwebungen. In 1 kann eine beobachtet werden, wenn  $\omega_+ \approx \omega_-$  gilt, was äquivalent zu  $C_K \gg C$  ist. Startbedingungen sind, dass einer der beiden Ströme, beispielsweise  $I_1$ , anfangs von null verschieden ist und der jeweils andere Strom, gemäß dem Beispiel also  $I_2$ , in Ruhe ist, entsprechend keine Amplitude hat. Dann ergeben sich für die Ströme die Lösungen

$$I_1(t) = \frac{A_+}{2} (\cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \quad (13)$$

und

$$I_2(t) = \frac{A_+}{2} (\cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \cos(\omega_- t + \varphi_-)). \quad (14)$$

Mit

$$\tilde{\varphi}_+ := \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}, \quad \tilde{\varphi}_- := -\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} \quad (15)$$

und den Additionstheoremen

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (16)$$

$$\cos x + \cos(y + \pi) = \cos x - \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

$$= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (18)$$

lassen sich 13 und 14 zu

$$I_1(t) = A_+ \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t + \tilde{\varphi}_+\right) \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t - \tilde{\varphi}_+\right) \quad (19)$$

$$I_2(t) = -A_+ \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t + \tilde{\varphi}_+\right) \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t - \tilde{\varphi}_+\right) \quad (20)$$

umformen. Es ist zu erkennen, dass die Ströme mit der Frequenz

$$\omega_{\text{Schwingung}} = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \approx \omega_+ \quad (21)$$

oszillieren, dass die Amplitude jedoch mit der bei weitem geringeren Frequenz

$$\omega_{\text{Amplitude}} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \ll \omega_+ \quad (22)$$

ebenfalls eine Oszillation aufweist. Die Schwebungsfrequenz ist

$$f_{\text{Schwebung}} = \frac{\omega_{\text{Amplitude}}}{\pi} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\pi}. \quad (23)$$

Sie gibt an, wie schnell die Energie zwischen den beiden Schwingungssystemen hin- und herpendelt.

### 1.3 Erzwungene Schwingungen

Wird ein Sinusgenerator mit  $\tilde{U}(t) = U_0 e^{i\omega t}$  gemäß Abbildung (<HIER: Referenz zum Schaltbild einfügen>) in den Schaltkreis eingebunden, und werden Verlustwiderstände als ohmsche Widerstände jeweils berücksichtigt, ergeben sich mit den Kirchhoff'schen Gesetzen die Zusammenhänge

$$\tilde{U} = \left( \frac{1}{i\omega C} + i\omega L + \frac{1}{i\omega C_K} + R \right) I_1 - \frac{1}{i\omega C_K} I_2 \quad (24)$$

$$\text{und } (i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R + \frac{1}{i\omega C_K}) I_2 - \frac{1}{i\omega C_K} I_1 = 0. \quad (25)$$

Nach einigen Umformungen kann ein betragsmäßiges Verhältnis von  $I_2$  und  $\tilde{U}$  aufgestellt werden, wobei die Impedanz  $Z(\omega)$  mit

$$Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} \right)$$

definiert wird:

$$|I_2| = |\Omega| |\tilde{U}| \quad (26)$$

$$\text{mit } \Omega = \left( \sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left( \frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K^2 \right)^2} \right)^{-1}. \quad (27)$$

Dabei stellt  $\Omega(\omega)$  den sogenannten Leitwert dar. Dieser geht jeweils für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  gegen Null und hat zwei Maxima für  $\omega = \omega_+$  und  $\omega = \omega_-$ . In diesen Fällen gilt:

$$\Omega(\omega_+) = \frac{1}{R \sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \approx \frac{1}{2R} \quad (28)$$

$$\Omega(\omega_-) = \frac{1}{R \sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC} \left( 1 + \frac{C}{C_K} \right)}} \approx \frac{1}{2R} \quad (29)$$

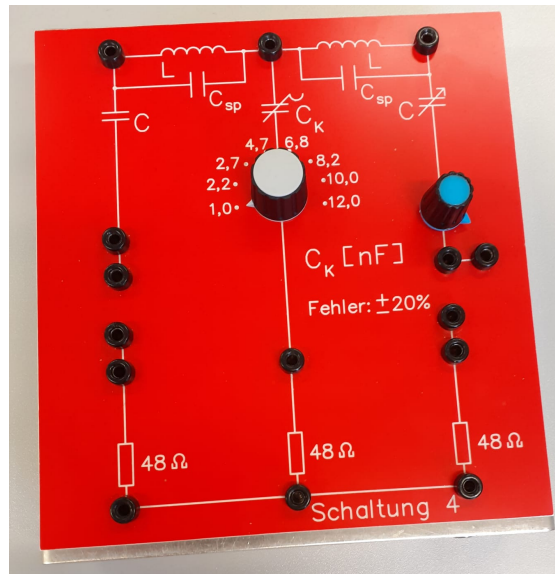
Die Näherungen ergeben sich dadurch, dass Werte der üblichen Größenordnungen für die Widerstände eingesetzt werden. Daraus wird ersichtlich, dass der zweite Summand unter der Wurzel im Vergleich zur 4 unbedeutend klein ist.

## 2 Durchführung

Alle Messungen werden mit der in 2 gezeigten Schaltplatte durchgeführt.

### 2.1 Vorbereitung: Einstellung der Kapazität

Damit ein Energieaustausch wie in 1 möglich ist, müssen beide Schwingkreise die gleiche Resonanzfrequenz aufweisen. Deshalb wird im Folgenden die Resonanzfrequenz des einen



**Abbildung 2:** Die verwendete Schaltplatte.

Schwingkreises mit fester Induktivität und fester Kapazität bestimmt und im Anschluss die Messung an dem zweiten Schwingkreis wiederholt – mit dem Unterschied, dass hier die regelbare Kapazität so eingestellt wird, dass die gleiche Resonanzfrequenz gemessen werden kann.

Die Schaltung wird gemäß (HIER Referenz zur Abbildung hinzufügen) aufgebaut. Die Resonanzfrequenz liegt an, wenn im XY-Betrieb des Oszillographen die zu einem Phasenunterschied von  $\pi/2$  gehörige Lissajous-Figur – also ein Kreis – erkennbar wird.

## 2.2 Messprogramm

Zuerst wird der Schaltplan gemäß <Hier referenz zu Schaltplan einfügen> aufgebaut. Der linke Schwingkreis soll hier über ein Rechteck-Signal des Sinus-Generators angeregt werden. Zum rechten Schwingkreis gelangt die Schwingungsenergie demnach ausschließlich über die gemeinsame Kopplungsleitung. Die über den Widerstand abfallende Spannung wird über den Y-Eingang an den Oszillographen gegeben. Dort kann jetzt der zeitliche Schwingungsverlauf der Spannung verfolgt werden. Von Interesse sei hier das Verhältnis von Schwingungs- zu Schwebungsfrequenz. Hierfür sind die Schwingungsmaxima zu zählen und durch die Anzahl der Schwebungen, in denen diese Schwingungsmaxima zu finden sind, zu teilen. Dies wird für verschiedene Werte der Kopplungskapazität gemacht, die auf die festen Werte 4,7 nF, 6,8 nF, 8,2 nF, 10,0 nF und 12,0 nF eingestellt werden kann. Niedrigere Frequenzen sind zwar auch möglich, wie aus Abbildung <HIER Referenz einfügen> ersichtlich ist, aber nicht sinnvoll. Die Anzahl der Schwingungen je Schwebung wäre zu gering und schwierig abzuzählen.

Als nächstes wird der Stromkreis anstelle von Rechteck-Schwingungen mit Sinus-Schwingungen erregt. Außerdem wird der Oszillograph erneut auf den XY-Modus gestellt und der Gene-

rator auf die X-Achse gegeben. Unter Variation der Kopplungskapazität sollen nun die Frequenzen  $\omega_+$  und  $\omega_-$  gesucht und gemessen werden, also die Frequenzen, bei denen die Lissajous-Figur entsprechend einen Phasenunterschied von 0 beziehungsweise  $\pi$  indiziert. Zeitgleich dazu wird die über den ohmschen Widerstand  $R = 48\,\Omega$  abfallende Spannung gemessen, sodass im Anschluss daran der entsprechende Strom mit  $U = RI$  berechnet werden kann, der sich aus dem Experiment ergibt.

### **3 Auswertung**

#### **3.1 Messdaten**

Bei der Vorbereitung wird für den verwendeten Kondensator und die Spule eine Eigenfrequenz von  $f_{\text{mess}} = 33,0\,\text{kHz}$  bei einer Phasendifferenz von  $90^\circ$  gemessen. Die Referenzwerte der Bauteile lauten  $C = 0,8015\,\text{nF}$  und  $L = 32,351\,\text{mH}$ . Zudem weist die Spule eine Spulenkapazität von  $C_{\text{Sp}} = 0,037\,\text{nF}$  auf. Der Kondensator mit regelbarer Kapazität wird entsprechend eingestellt, sodass der zweite Schwingkreis die gleiche Eigenfrequenz besitzt.

### **4 Diskussion**

### **5 Anhang: originale Messdaten**