VERSUCH 302

BRÜCKENSCHALTUNGEN

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2019 Abgabe: 17.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel dieses Experiments ist die Messung von Impedanzen mithilfe sogenannter Brückenschaltungen. Sie sind dafür besonders geeignet, da sie eine hohe Genauigkeit bei der Berechnung gewährleisten, sodass der Einfluss von Messfehlern möglichst gering gehalten werden kann. Je nach Form der Impedanz gibt es Variationen der Brückenschaltungen, die in 2 vorgestellt werden.

2 Theorie

2.1 Komplexe Widerstände

Bevor die Brückenschaltungen im Einzelnen betrachtet werden, muss zwischen verschiedenen Formen von elektrischen Widerständen – auch *Impedanzen* – unterschieden werden. Neben den ohmschen Widerständen R sorgen auch Spulen mit der Induktivität L und Kondensatoren mit der Kapazität C, die sich mit im Stromkreis befinden, für eine Veränderung des Strom- und Spannungsverhalten. Der ohmsche Widerstand sorgt für einen Spannungsabfall von

$$U = RI. \tag{1}$$

Kondensatoren und Spulen hingegen bewirken zusätzlich eine Phasenverschiebung des Wechselstroms und der Wechselspannung, die den Stromkreis betreiben. In der reellen Schreibweise mit trigonometrischen Funktionen recht kompliziert, vereinfacht sich die Darstellung dessen mit komplexen Zahlen: Ohmsche sowie induktive und kapazitive Widerstände werden zu einer komplexwertigen Impedanz zusammengefasst. Dabei stellen letztere beiden den Imaginäranteil dar, wodurch die Phasenverschiebung algebraisch umgesetzt wird. Da sie in dem Sinne keinen effektiven Spannungsabfall bewirken, sind sie auch unter dem Namen *Scheinwiderstand* geläufig. Somit hat die Impedanz Z von den drei in Reihe geschalteten Widerständen die Form

$$Z = R + \mathrm{i}\omega L - \mathrm{i}\frac{1}{\omega C}, \tag{2}$$

wobei ω die Kreisfrequenz der angelegten Wechselspannung $\tilde{U} = \hat{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ ist. Mit der komplexen Impedanz kann wie mit dem ohmschen Widerstand in (1) die Spannung und der Strom berechnet werden.

2.2 Die Kirchhoff'schen Gesetze

Das erste Gesetz, ebenfalls unter der Knotenregel bekannt, leitet sich aus der Ladungserhaltung ab. An einem Knoten in einem Stromkreis muss die Summe der zufließenden Ströme gleich der der abfließenden sein. Definiert man eine entsprechende Vorzeichenregelung (z.B. alle abfließenden Ströme sind positiv, alle zufließenden negativ) erhält man den Ausdruck:

$$\sum_k I_k = 0. \tag{3}$$

Das zweite Gesetz beruft sich auf die Energieerhaltung und die Existenz eines eindeutigen elektrischen Potentials. Als Folgerung daraus ergibt sich die sogenannte Maschenregel, die

$$\sum_k U_k = 0 \tag{4}$$

innerhalb eines geschlossenen Leiters – also einer Masche – postuliert. Dabei sind die Spannungsquellen und -abfälle U_k jeweils mit einem entsprechenden Vorzeichen versehen, je nachdem, ob sie in gleicher oder verschiedener Richtung gepolt sind.

2.3 Brückenschaltungen

Abbildung 1: Eine allgemeine Brückenschaltung.

2.3.1 Wheatstone'sche Brückenschaltung

3 Durchführung

4 Auswertung

Gemäß [**Versuchsanleitung**] wird für die Referenzbauteile, wenn nicht anders erwähnt, ein Fehler von $\pm 0.2\%$ angenommen. Das verwendete Potentiometer hat eine Toleranz von $\pm 0.5\%$ – hiermit sind meist die Widerstände R_3 und R_4 eingestellt worden. Die Fehlerrechnungen sind jeweils mit iPython 7.8.0 mit dem Paket *uncertainties* durchgeführt worden.

Aus einigen Messungen resultieren mehrere Messergebnisse mit jeweiliger Unsicherheit. Um ein Endresultat der Größe aus der den Messungen zu erhalten, werden diese mittels

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{5}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)^2} \tag{6}$$

zu einem endgültigen Ergebnis zusammengefasst.

4.1 Messung mit der Wheatstone'schen Brücke

Tabelle 1: Messdaten für die Wheatstone'sche Brückenschaltung.

R_x	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Wert 12	$332{,}0 \pm 0{,}7$	542 ± 3	458 ± 2
	$500{,}0 \pm 1{,}0$	440 ± 2	560 ± 3
	1000 ± 2	282 ± 1	718 ± 4
Wert 11	$332{,}0 \pm 0{,}7$	598 ± 3	402 ± 2
	$500{,}0 \pm 1{,}0$	497 ± 2	503 ± 3
	1000 ± 2	330 ± 2	670 ± 3

Laut der Abgleichbedingung

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \tag{7}$$

ergeben sich für die Werte 12 und 11 folgende Ergebnisse:

Tabelle 2: Messergebnisse der Wheatstone-Brücke.

Widerstand	Messung Nr.	R_x / Ω
Wert 12	1	393 ± 3
	2	393 ± 3
	3	393 ± 3
Endresultat		393 ± 2
Wert 11	1	494 ± 4
	2	494 ± 4
	3	493 ± 4
Endresultat		494 ± 2

4.2 Messung mit der Kapazitätsmessbrücke

Die erste Kapazität (Wert 1) wurde mit einer Frequenz von $f = 40\,\mathrm{kHz}$, die zweite (Wert 3) mit $f = 36\,\mathrm{kHz}$ gemessen.

Tabelle 3: Messdaten für die Kapazitätsmessbrückenschaltung.

C_x	C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Wert 1	450 ± 1	408 ± 1	592 ± 1
	597 ± 1	487 ± 1	513 ± 1
	992 ± 2	611 ± 1	389 ± 1
Wert 3	597 ± 1	595 ± 1	405 ± 1
	992 ± 2	711 ± 1	289 ± 1
	750 ± 2	643 ± 1	377 ± 1

Aus der Abgleichbedingung

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \tag{8}$$

resultieren die in 4 dargestellten Werte. Da sich bei der Durchführung dieser Messung

Tabelle 4: Messergebnisse der Kapazitätsmessbrücke.

Kapazität	Messung Nr.	C_x / nF
Wert 1	1	653 ± 2
	2	629 ± 2
	3	632 ± 2
Endresultat		638 ± 4
Wert 3	1	406 ± 1
	2	403 ± 2
	3	440 ± 2
Endresultat		416 ± 17

mit einer RC-Kombination Schwierigkeiten auftaten, muss an dieser Stelle auf eine Auswertung diesbezüglich verzichtet werden. Die Praktikumsaufsicht zeigte sich damit einverstanden.

4.3 Messung mit der Induktivitätsmess- und der Maxwell-Brücke

Bei Messung der verlustbehafteten Induktivität (Wert 19) mit der Induktivitätsmessbrücke wurde eine Frequenz von $f = 100\,\mathrm{Hz}$ benutzt, bei der mit der Maxwell-Brücke $f = 40{,}2\,\mathrm{kHz}$. Für die Widerstände R_3 und R_4 wird bei der Maxwell-Brücke eine Toleranz von $\pm 3\%$ angenommen [**Versuchsanleitung**].
Mithilfe der Abgleichbedingungen für die Induktivitätsmessbrücke

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \tag{9}$$

Tabelle 5: Messdaten zur Ermittlung der Induktivität mit Wert 19.

Messmethode	L_2 / mH	C_4 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Ind.-Br.	14.6 ± 0.03		332.0 ± 0.7	255 ± 1	745 ± 4
	14.6 ± 0.03		500.0 ± 1.0	185 ± 1	815 ± 4
	14.6 ± 0.03		664 ± 1	145 ± 1	855 ± 4
Maxwell		750 ± 2	664 ± 1	57 ± 2	270 ± 8

und denen für die Maxwell-Brücke

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} L_x = C_4 R_2 R_3 \tag{10}$$

ergibt sich für die verlustbehaftete Spule:

Tabelle 6: Innenwiderstand und Induktivität der verwendeten Spule.

Messung Nr.	R_x / Ω	L_x / mH
1	114 ± 1	$5{,}00 \pm 0{,}04$
2	113 ± 1	$3{,}31 \pm 0{,}03$
3	113 ± 1	$2{,}48 \pm 0{,}02$
Endresultat	$113 \pm 0{,}6$	$3{,}60 \pm 0{,}80$
4 (Maxwell)	140 ± 6	$28{,}4 \pm 1{,}0$

4.4 Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke

Bei dieser Messung wurden ein Kondensator mit einer Kapazität von $C = 660\,\mathrm{nF}$ und zwei ohmsche Widerstände $R = 400\,\Omega$ und $R' = 500{,}0\,\Omega$ verwendet und eine konstante, frequenzunabhängige Speisespannung von $U_{\mathrm{Sp}} = 4{,}0\,\mathrm{V}$ gemessen. Der Messwert der Frequenz der minimalen Brückenspannung ist $f_0 = 613{,}0\,\mathrm{Hz}$. Berechnet man diese mit den gegebenen Referenzwerten der Bauteile, erhält man einen Wert von

$$f_{0,\mathrm{rechn}} = \frac{1}{2\pi RC} = 603\,\mathrm{Hz}. \tag{11}$$

Tabelle 7: Messwerte der Wien-Robinson-Brücke.

f / Hz	$\Omega = f/f_0$	U_{Br} / mV	U_{Br}/U_{Sp}
213,0	0,3475	460	0,12
263,0	0,4290	360	0,09
313,0	0,5106	290	0,073
363,0	0,5922	230	0,058
413,0	0,6737	175	0,044
463,0	0,7553	122	0,031
513,0	0,8369	80	0,020
563,0	0,9184	38	0,0095
573,0	0,9347	32	0,0080
583,0	0,9511	24	0,0060
593,0	0,9674	16	0,0040
603,0	0,9837	10	0,0025
613,0	1,000	6	0,0015
623,0	1,016	10	0,0025
633,0	1,033	20	0,0050
643,0	1,049	30	0,0075
653,0	1,065	36	0,0090
663,0	1,082	40	0,010
713,0	1,163	67	0,017
763,0	1,245	95	0,024
813,0	1,326	125	0,031
863,0	1,408	148	0,037
913,0	1,489	170	0,043
963,0	1,571	190	0,048
1013,0	1,653	215	0,054

Die Messwerte sowie die erwartete Kurve sind, wie in der Versuchsanleitung beschrieben, in 2 aufgetragen.

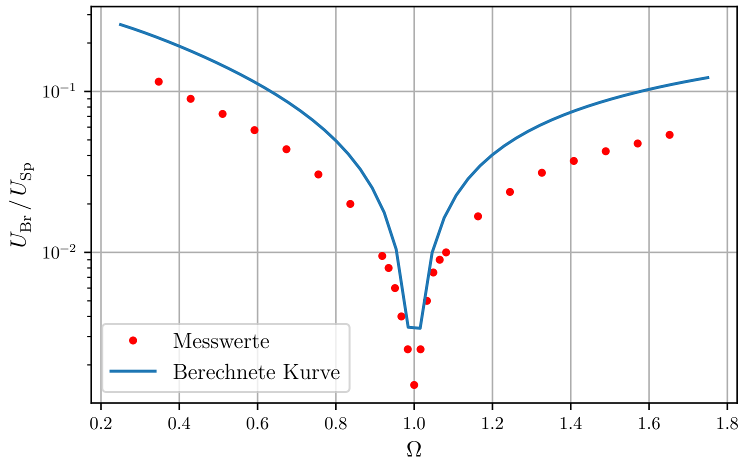

Abbildung 2: Messkurve der Wien-Robinson-Brücke.

4.5 Klirrfaktor-Messung

Zur Berechnung des Klirrfaktors k des Generators wird vereinfachend angenommen, dass ausschließlich Oberwellen der zweiten Oberwelle ausschlaggebend sind. So vereinfacht sich die Berechnung von n Oberwellen zu

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \ldots + U_n^2}}{U} = \frac{U_2}{U}. \tag{12}$$

Für die Spannung U gilt $U = U_{\mathrm{Sp}} = 4{,}0\,\mathrm{V} = \mathrm{const.}$ Die Amplitude der zweiten Oberwelle ($\varOmega = f_2/f_1 = 2$) berechnet sich über

$$U_2 = 3\,U_{\mathrm{Br}} \cdot \frac{\sqrt{(\varOmega^2 - 1)^2 + 9\varOmega^2}}{|\varOmega^2 - 1|} = 3 \cdot 6\,\mathrm{mV} \cdot \frac{\sqrt{9 + 36}}{3} = 3\sqrt{5} \cdot 6\,\mathrm{mV} \approx 40\,\mathrm{mV}. \tag{13}$$

Hierbei wird der minimale Wert für die Brückenspannung verwendet, da bei dieser ausschließlich Oberwellen, in dem Fall also die zweite Oberwelle, für eine Spannung sorgen. Mit $U = U_{\mathrm{Sp}} = 4{,}0\,\mathrm{V}$ ergibt sich der Klirrfaktor:

$$k = \frac{U_2}{U_{\mathrm{Sp}}} = 0.010 \tag{14}$$

5 Diskussion

Bei Betrachtung der Ergebnisse fällt relativ schnell ins Auge, dass sich für die ohmschen Widerstände ein vergleichsweise eindeutiger Wert bestimmen lässt, wohingegen die kapazitiven und induktiven Widerstände größere Abweichungen aufweisen. Grund dafür könnte die Wahl der Frequenz sein. Für eine optimale Messung befinden sich die Wirk- und Blindwiderstände in der gleichen Größenordnung. Die Blindwiderstände bei der Kapazitätsmessbrücke mit der Kapazität $C_2 \sim 5 \cdot 10^{-7}$ liegen mit Frequenzen $f \sim 10^4$ in einer Größenordnung von $\sim 10^1$. Die ohmschen Widerstände sind in etwa $\propto 5 \cdot 10^3$. Durch die etwas höhere Wahl der Frequenz als der Referenzierten ist der Einfluss der Streukapazitäten in den Verdrahtungen größer. Da bei jedem Messvorgang unterschiedliche Kapazitäten und Widerstände verwendet worden sind, ist dieser Einfluss jeweils unterschiedlich ausschlaggebend und führt zu teils sehr verschiedenen Abweichungen vom Mittelwert. Zudem ist die der Kapazitätsmessbrücke zugrunde liegende Annahme, dass es sich um einen ohmschen verlustfreien Kondensator handelt, was zu Differenzen zwischen erwartetem und gemessenen Wert führt.
Die Messung der verlustbehafteten Induktivitäten zeigt große Abweichungen, insbesondere im Vergleich der Induktivitätsmessbrücke und der Maxwell-Brücke. Ebenfalls liegen hier die Blindwiderstände in einer um einen Faktor 10^2 verschobenen Größenordnung im Vergleich zu der der Wirkwiderstände. Daraus resultieren, wie erläutert, größere Auswirkungen der induktiven und kapazitiven Widerstände in den Leitern, die die gemessenen Werte verfälschen können. Die Abweichung, die der aus der Maxwell-Brücke berechnete Wert für die Induktivität aufweist, lässt sich hiermit jedoch kaum erklären. Nahe liegt die Vermutung, dass es sich um einen systematischen Messfehler handelt, der sich im Nachhinein nur schwerlich verifizieren lässt – zumal diese Messung nur einmal, ohne Wiederholung durchgeführt worden ist. Die konsequente Streuung der Messergebnisse der Induktivitätsmessbrücke um einen Mittelwert deutet darauf hin, dass der Messfehler bei der Maxwell-Brücke zu finden ist. Wirklich sicher kann dies jedoch nicht festgemacht werden, da systematische Messfehler die Werte der Induktivitätsmessbrücke ebenfalls im gleichen Maße verfälschen könnten.
Bei der Messung mit der Wien-Robinson-Brücke zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit fällt anhand Abbildung 2 auf, dass die Messwerte mit etwa gleicher Abweichung unterhalb der zu erwartenden Kurve des Spannungsverhältnisses liegen. Dies deutet auf einen systematischen Fehler hin, der vermutlich in nicht perfekten, verlustfreien Kabeln begründet ist. Die Speisespannung wird direkt am Generator gemessen, wohingegen die Brückenspannung erst mitten im Stromkreis abgegriffen wird. Nicht beachtet werden dabei ohmsche Verluste über die Kabel, über die der Strom bis zur Messstelle erst noch fließt.
Die Differenz der Nullfrequenz vom Messwert ist relativ gering und lässt sich gut über durch statistische Messunsicherheiten bedingte Abweichungen erklären.
Die in 4.5 durchgeführte Klirrfaktor-Berechnung bestätigt die Vermutung, dass sich ein idealer Sinusgenerator von einem realen durch den Gehalt an Oberwellen unterscheidet. Weil $k \neq 0$, sind beim Minimum der Brückenspannung noch Wellen messbar, was beim idealen Sinusgenerator nicht der Fall wäre.

6 Anhang: originale Messdaten