**Versuch Nr. 355**

# Gekoppelte Schwingkreise

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.12.2019 Abgabe: 07.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Theorie

## 1.1 Einleitung

Ziel dieses Experiments ist es, gekoppelte Schwingkreise genauer zu untersuchen. Konkret soll hier das Verhalten der Energieverteilung auf die gekoppelten Systeme, sowie der Einfluss eines schwingenden Erregers auf den Schwingkreis ergründet werden. Da elektromagnetische Schwingsysteme bei weitem einfacher zu vermessen sind als mechanische, werden die Messungen an ebensolchen durchgeführt. Die daraus gewonnen Erkenntnisse lassen sich problemlos auf andere gekoppelte Schwingsysteme übertragen.

## 1.2 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise, Eigenmoden, Schwebungen

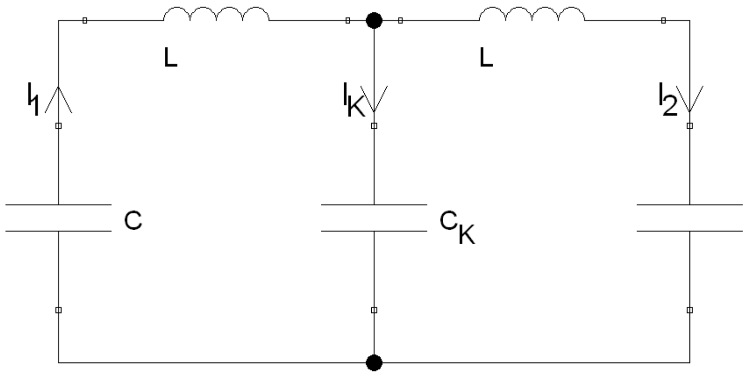


**Abbildung 1:** Schaltbild eines kapazitiv gekoppelten Schwingkreises.

Die in 1 gezeigten Schwingkreise sind über einen Kondensator der Kapazität $C_K$ gekoppelt, wie es später auch im Experiment der Fall sein wird. Gemäß der Knotenregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz) gilt die Beziehung

$$I_1 = I_2 + I_K. \tag{1}$$

Über die Maschenregel folgt für die über den Kondensatoren und Spulen abfallenden Spannungen

$$U_{C_1} + U_K = U_{L_1} \tag{2}$$

$$U_{C_2} = U_{L_2} + U_K \tag{3}$$

aus. Mit der Definition der Kapazität $C = {}^{Q}/_{U}$, der Induktionsspannung $U = -L\dot{I}$ und (1) folgt hierfür nach einmaligem zeitlichen Ableiten

$$\dot{Q} = I = C\dot{U} \tag{4}$$

$$\frac{1}{C}\dot{Q}_{C_1} + L\ddot{I}_{L_1} + \frac{1}{C_K}\dot{Q}_K \overset{(1)}{=} \frac{1}{C}I_1 + L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{C}\dot{Q}_{C_2} + L\ddot{I}_2 - \frac{1}{C_K}\dot{Q}_K \overset{(1)}{=} \frac{1}{C}I_2 + L\ddot{I}_2 - \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \tag{6}$$

Eine Möglichkeit zur Lösung der beiden gekoppelten Differentialgleichungen besteht darin, (5) und (6) zu addieren und subtrahieren. So erhält man zwei voneinander entkoppelte Gleichungen der Variablen $I_1 + I_2$ und $I_1 - I_2$, die einfach mit einem harmonischen Ansatz gelöst werden können:

$$L(\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \tag{7}$$

$$L(\ddot{I}_1 - \ddot{I}_2) + (\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K})(I_1 - I_2) = 0 \tag{8}$$

Der harmonische Ansatz $\ddot{x} = -\omega^2 x$ liefert mit den Kreisfrequenzen $\omega_+$ für (7) und $\omega_-$ für (8) die Lösungen

$$(I_1 + I_2)(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \quad \text{mit} \quad \omega_+^2 = \frac{1}{LC}, \tag{9}$$

$$(I_1 - I_2)(t) = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \quad \text{mit} \quad \omega_-^2 = \frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_K} = \frac{C_K + 2C}{LCC_K} \tag{10}$$

mit den Integrationskonstanten $A_+$, $A_-$, $\varphi_+$ und $\varphi_-$. Die Schwingungsfrequenzen sind entsprechend $f_\pm = {}^{\omega_\pm}/_{2\pi}$. Um die Lösungen für die ursprünglichen Ströme $I_1$ und $I_2$ zu erhalten, addiert und subtrahiert man (9) und (10) erneut und dividiert durch zwei, sodass daraus

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \tag{11}$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \tag{12}$$

resultiert.

Jedes durch $N$ Systeme gekoppelte Schwingungssystem hat $N$ Fundamentalschwingungen – auch bekannt unter Eigenmoden oder Normalschwingungen. Dies sind Schwingungen, die das System besonders „bevorzugt“ ausführt. Allgemein besteht dann die Lösung für die Schwingung aus der Überlagerung der Eigenmoden, die durch Anfangsbedingungen festgelegt wird.

In diesem Fall sind $N = 2$ Systeme gekoppelt, die Eigenmoden sind durch $I_1 + I_2$ mit $\omega_+$ und $I_1 - I_2$ mit $\omega_-$ gegeben: Beginnt das System mit zwei gleichen Strömen $I_1 = I_2$ zu schwingen, so gilt $A_- = 0$, sodass der Schwingkreis mit gleichen Strömen $I_1$ und $I_2$ mit der Frequenz $f_+ = {}^{\omega_+}/_{2\pi}$, die ein einzelner LC-Kreis ebenfalls hätte, schwingt und gemäß (1) kein Strom durch den Kopplungskondensator fließt. Dies ist die gleichphasige Normalschwingung – die Ströme sind stets in Phase. Wird das Gegenteil betrachtet, starten die Ströme $I_1 = -I_2$ genau entgegengesetzt, oszilliert das System in der zweiten Eigenmode mit $f_- = {}^{\omega_-}/_{2\pi} > f_+$. Der Summenstrom $I_1 + I_2$ verschwindet und die Ströme schwingen genau gegenphasig. Selbsterklärend ist dies die gegenphasige Eigenschwingung.

Ebenfalls zu betrachten sind sogenannte Schwebungen. In 1 kann eine beobachtet werden, wenn $\omega_+ \approx \omega_-$ gilt, also $C_K \gg C$ ist. Startbedingungen sind, dass einer der beiden Ströme, beispielsweise $I_1$, anfangs von null verschieden ist und der jeweils andere Strom, gemäß dem Beispiel also $I_2$, in Ruhe ist, entsprechend keine Amplitude hat. Dann ergeben sich für die Ströme die Lösungen

$$I_1(t) = \frac{A_+}{2}(\cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \cos(\omega_- t + \varphi_-)) \tag{13}$$

und

$$I_2(t) = \frac{A_+}{2}(\cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \cos(\omega_- t + \varphi_-)). \tag{14}$$

Mit

$$\tilde{\varphi}_+ := \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}, \qquad \tilde{\varphi}_- := -\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} \tag{15}$$

und den Additionstheoremen

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) \tag{16}$$

$$\cos x + \cos(y+\pi) = \cos x - \cos y = 2\cos(\frac{x+y}{2} + \frac{\pi}{2})\cos(\frac{x-y}{2} - \frac{\pi}{2}) \tag{17}$$

$$= -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}) \tag{18}$$

lassen sich 13 und 14 zu

$$I_1(t) = A_+ \cos(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t + \tilde{\varphi}_+)\cos(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t - \tilde{\varphi}_+) \tag{19}$$

$$I_2(t) = -A_+ \sin(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t + \tilde{\varphi}_+)\sin(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t - \tilde{\varphi}_+) \tag{20}$$

umformen. Es ist zu erkennen, dass die Ströme mit der Frequenz

$$\omega_{\text{Schwingung}} = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \approx \omega_+ \tag{21}$$

oszillieren, dass die Amplitude jedoch mit der bei weitem geringeren Frequenz

$$\omega_{\text{Amplitude}} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \ll \omega_+ \tag{22}$$

ebenfalls eine Oszillation aufweist. Das Doppelte der dazugehörigen Frequenz nennt sich Schwebungsfrequenz und ist

$$f_{\text{Schwebung}} = \frac{\omega_{\text{Amplitude}}}{\pi} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\pi}. \tag{23}$$

Sie gibt an, wie schnell die Energie zwischen den beiden Schwingungssystemen hin- und herpendelt. Werden nämlich die Schwingungen der Amplituden betrachtet – also die mit einer Kreisfrequenz von $\omega_{\text{Amplitude}}$ –, ist zu erkennen, dass die von $I_1$ jeweils gegenphasig zu $I_2$ oszilliert. Dies indiziert den besagten Energieaustausch.

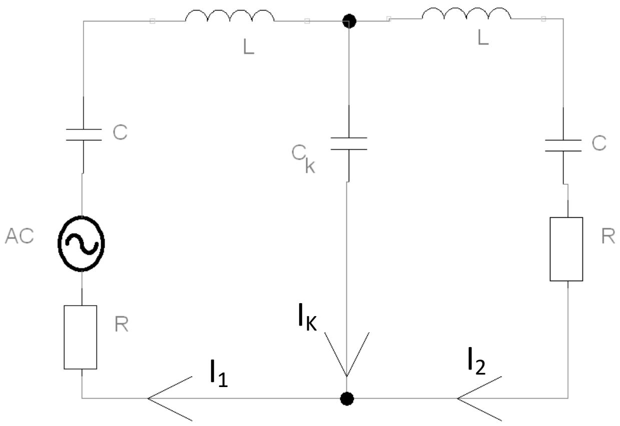


**Abbildung 2:** Durch einen Sinusgenerator erzwungene Schwingungen mit verlustbehafteten Größen.

## 1.3 Erzwungene Schwingungen

Wird ein Sinusgenerator mit $\tilde{U}(t) = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ gemäß Abbildung 2 in den Schaltkreis eingebunden, und werden Verlustwiderstände als ohmsche Widerstände jeweils berücksichtigt, ergeben sich mit den Kirchhoff'schen Gesetzen die Zusammenhänge

$$\tilde{U} = (\frac{1}{\mathrm{i}\omega C} + \mathrm{i}\omega L + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C_K} + R)I_1 - \frac{1}{\mathrm{i}\omega C_K} I_2 \tag{24}$$

$$\text{und} \quad (\mathrm{i}\omega L + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} + R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C_K})I_2 - \frac{1}{\mathrm{i}\omega C_K} I_1 = 0. \tag{25}$$

Nach einigen Umformungen kann ein betragsmäßiges Verhältnis von $I_2$ und $\tilde{U}$ aufgestellt werden, wobei eine Impedanz $Z(\omega)$ der Übersicht halber mit

$$Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega}(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K})$$

definiert wird:

$$|I_2| = |\varOmega||\tilde{U}| \tag{26}$$

$$\text{mit} \quad \varOmega = \left(\sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + (\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K)^2}\right)^{-1}. \tag{27}$$

Dabei stellt $\Omega(\omega)$ den sogenannten Leitwert dar. Dieser geht jeweils für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ gegen Null und hat zwei Maxima für $\omega = \omega_+$ und $\omega = \omega_-$. In diesen Fällen gilt:

$$\Omega(\omega_+) = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \approx \frac{1}{2R} \tag{28}$$

$$\Omega(\omega_-) = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}(1 + \frac{C}{C_K})}} \approx \frac{1}{2R} \tag{29}$$

Die Näherungen ergeben sich dadurch, dass Werte der üblichen Größenordnungen für die Widerstände eingesetzt werden. Daraus wird ersichtlich, dass der zweite Summand unter der Wurzel im Vergleich zur 4 unbedeutend klein wird.
Zur in 2 beschriebenen Vorjustierung seien hier noch kurz erzwungene Schwingungen eines einzelnen Schwingkreises aufgeführt. Dafür wird ein Sinusgenerator in Reihe eines Schwingkreises geschaltet, der mit einer Frequenz $\omega$ antreibt. Hierbei sind die Amplitudenresonanzfunktion (30) und die Phasenverschiebung (31) des Stroms durch die erregende Spannung in Abhängigkeit der Frequenz $\omega$ von Interesse. Gemäß [1] lauten diese

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \text{mit} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{30}$$

und

$$\tan\varphi = \frac{R\omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{31}$$

Die Phasenverschiebung beträgt also genau $\pi/2$, wenn der Sinusgenerator mit der Eigenfrequenz – auch Resonanzfrequenz – den Schwingkreis antreibt.

# 2 Durchführung

Alle Messungen werden mit der in 3 gezeigten Schaltplatte durchgeführt.

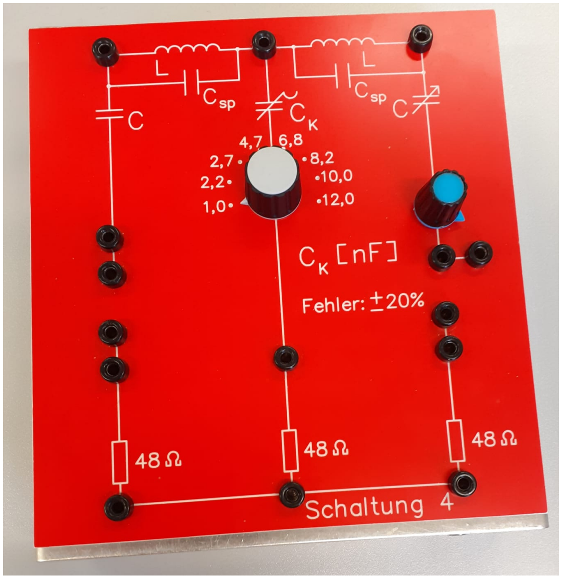


**Abbildung 3:** Die verwendete Schaltplatte.

## 2.1 Vorbereitung: Einstellung der Kapazität

Damit ein Energieaustausch wie in 1 möglich ist, müssen beide Schwingkreise die gleiche Resonanzfrequenz aufweisen. Deshalb wird im Folgenden die Resonanzfrequenz des einen Schwingkreises mit fester Induktivität und fester Kapazität bestimmt und im Anschluss die Messung an dem zweiten Schwingkreis wiederholt – mit dem Unterschied, dass hier die regelbare Kapazität so eingestellt wird, dass die Messung die gleiche Resonanzfrequenz ergibt.

Die Schaltung wird gemäß 4 aufgebaut. Der Sinusgenerator erzwingt die Schwingungen mit regelbarer Kreisfrequenz $\omega$ im Schwingkreis. Am Oszilloskop kann im XY-Betrieb die Phasenverschiebung zwischen dem Generator und des Schwingkreises anhand der Lissajous-Figuren abgelesen werden. Wie in 1.3 erläutert, ist die zur Resonanzfrequenz gehörige Phasenverschiebung $^{\pi}/_{2}$. Dies entspricht der kreisförmigen Lissajous-Figur.

## 2.2 Messprogramm

Zuerst wird der Schaltplan gemäß 5 aufgebaut. Der linke Schwingkreis soll hier über ein Rechteck-Signal des Sinus-Generators angeregt werden. Zum rechten Schwingkreis gelangt die Schwingungsenergie demnach ausschließlich über die gemeinsame Kopplungsleitung. Die über den Widerstand abfallende Spannung wird über den Y-Eingang an dden Oszillographen gegeben. Dort kann jetzt der zeitliche Schwingungsverlauf der Spannung verfolgt werden. Von Interesse sei hier das Verhältnis von Schwingungs- zu Schwebungsfrequenz. Hierfür sind die Schwingungsmaxima zu zählen und durch die Anzahl der Schwebungen, in denen diese Schwingungsmaxima zu finden sind, zu teilen. Dies wird für verschiedene Werte der Kopplungskapazität gemacht, die auf die festen Werte 4,7 nF, 6,8 nF,

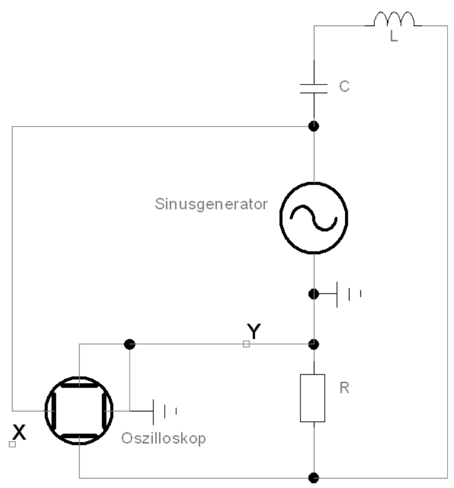


**Abbildung 4:** Schaltbild der Vorjustierung.

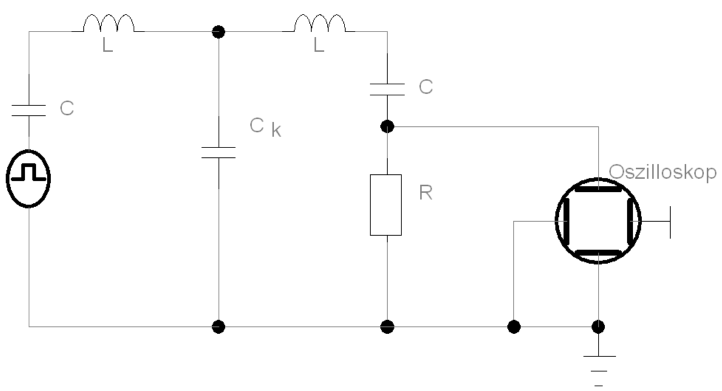


**Abbildung 5:** Schaltplan des Messprogramms.

8,2 nF, 10,0 nF und 12,0 nF eingestellt werden kann. Niedrigere Frequenzen sind zwar auch möglich, wie aus Abbildung 3 ersichtlich ist, aber nicht sinnvoll. Die Anzahl der Schwingungen je Schwebung wäre zu gering und schwierig abzuzählen.
Als nächstes wird der Stromkreis anstelle von Rechteck-Schwingungen mit Sinus-Schwingungen erregt. Außerdem wird der Oszillograph erneut auf den XY-Modus gestellt und der Generator auf die X-Achse gegeben. Unter Variation der Kopplungskapazität sollen nun die Frequenzen $\omega_+$ und $\omega_-$ gesucht und gemessen werden, also die Frequenzen, bei denen die Lissajous-Figur entsprechend einen Phasenunterschied von 0 beziehungsweise $\pi$ indiziert. Zeitgleich dazu wird die über den ohmschen Widerstand $R = 48\,\Omega$ abfallende Spannung gemessen, sodass im Anschluss daran der entsprechende Strom mit $U = RI$ berechnet werden kann, der sich aus dem Experiment ergibt.

# 3 Auswertung

## 3.1 Messdaten

Bei der Vorbereitung wird für den verwendeten Kondensator und die Spule eine Eigenfrequenz von $f_{\text{mess}} = 33{,}0\,\text{kHz}$ bei einer Phasendifferenz von 90° gemessen. Die Referenzwerte der Bauteile lauten $C = 0{,}8015\,\text{nF}$ und $L = 32{,}351\,\text{mH}$. Zudem weist die Spule eine Spulenkapazität von $C_{\text{Sp}} = 0{,}037\,\text{nF}$ auf. Der Kondensator mit regelbarer Kapazität wird entsprechend eingestellt, sodass der zweite Schwingkreis die gleiche Eigenfrequenz besitzt.

**Tabelle 1:** Anzahl Maxima der Schwebung.

| $C_K$ / nF | Schwingungsmaxima |
|---|---|
| 4.7 | |
| 6.8 | |
| 8.2 | |
| 10.0 | |
| 12.0 | |

**Tabelle 2:** Resonanzfrequenzen verschiedener Kondensatoren.

| $f_-$ / kHz | $f_+$ / kHz | $C_K$ / nF | *Amplitudenspannung* / mV |
|---|---|---|---|
| 33.1 | 81.3 | 1.0 | 1830 |
| 33.1 | 61.1 | 2.2 | 1960 |
| 33.1 | 57.1 | 2.7 | 1883 |
| 33.1 | 48.7 | 4.7 | 2050 |
| 33.1 | 44.7 | 6.8 | 2160 |
| 33.1 | 42.8 | 8.2 | 1830 |
| 33.1 | 41.4 | 10.0 | 2030 |
| 33.1 | 40.2 | 12.0 | 2000 |

# 4 Diskussion

# 5 Anhang: originale Messdaten

# Literatur

[1] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. 23. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.