

VERSUCH NUMMER

TITEL

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.1.2020

Abgabe: 28.1.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Einleitung	3
1.2	Trägheitsmoment	3
2	Durchführung	4
2.1	Einleitung	4
2.2	Apparatekonstante	5
2.3	Eigenträgheit	5
2.4	Trägheit der Körper	5
3	Auswertung	5
3.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße	5
3.2	Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse	6
3.3	nächste section	7
4	Diskussion	9
	Anhang: originale Messdaten	9
	Literatur	9

1 Theorie

1.1 Einleitung

Im folgenden Experiment soll das Trägheitsmoment dreier unterschiedlicher Körper bestimmt werden. Zusätzlich wird ein Körper verwendet, welcher seine Geometrie verändern kann, aber seine Masse beibehält, wodurch geometrische Beziehungen zum Trägheitsmoment untersucht werden können.

1.2 Trägheitsmoment ¹

Analog zur Masse in der Translation wird für Rotationsbewegungen das Massenträgheitsmoment I verwendet. Für eine vollständige Beschreibung der Rotationsdynamik werden zusätzlich die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ und das Drehmoment M benötigt. Letzteres ist das Äquivalent der Kraft F in der Translation. Im Vergleich wird die Beziehung deutlich

$$F = ma \quad , \quad I = M\dot{\omega} . \quad (1)$$

Dabei gilt für das Massenträgheitsmoment

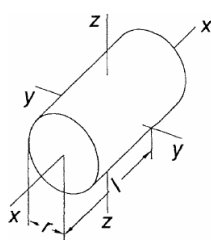
$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

für diskrete und

$$I = \int r^2 dm \quad (2)$$

für infinitesimale Massen.

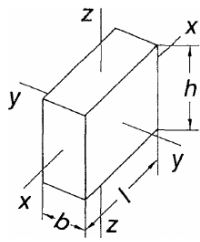
Da sich (2) aus den Massenabständen bezüglich einer Drehachse errechnet, ist die Bestimmung für einfache Geometrien nicht aufwendig und meist in Formelsammlungen zu finden. Bei komplexeren Körpern jedoch ist dies nicht mehr der Fall, sodass dieser mit den einfacheren Geometrien approximiert wird. Hilfreiche Referenzen sind Zylinder, dünne, lange Stäbe, Kugeln, Quader und Hohlzylinder, wobei Stäbe und Hohlzylinder Spezialfälle eines Zylinders darstellen.



Vollzylinder	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
dünne Scheibe ($l \ll r$)	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4}mr^2$
dünner Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$J_x = \frac{1}{2}mr^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{12}ml^2$

Abbildung 1: Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders.[2]

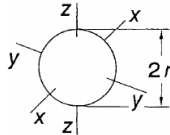
¹Unter Verwendung der Quellen [2], [1]



Quader

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12} m(b^2 + h^2) \\ J_y &= \frac{1}{12} m(l^2 + h^2) \\ J_z &= \frac{1}{12} m(l^2 + b^2) \end{aligned}$$

Abbildung 2: Das Massenträgheitsmoment eines Quaders.[2]



Kugel, massiv

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mr^2$$

dünne Kugelschale

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} mr^2$$

Abbildung 3: Das Massenträgheitsmoment einer Kugel.[2]

In den Abbildungen gilt $J \equiv I$.

Es ist nicht immer der Fall, dass die Rotationsachse auch eine der oben angezeigten Körperachsen entspricht. Um das Massenträgheitsmoment dennoch ohne aufwendige Integration bestimmen zu können, wird der *Steiner'sche Satz* angewendet. Wenn I für eine der Trägheitsachsen bekannt ist, wird der gesamte Körper parallel zu dieser Achse verschoben und mit der Gleichung

$$I = I_U + ma^2 \quad (3)$$

berechnet. Hier entspricht I_U dem ursprünglichen Massenträgheitsmoment und a dem Abstand zur Achse, um die parallel verschoben wird.

2 Durchführung

2.1 Einleitung

Ziel des Versuchs ist es, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu bestimmen. Hierfür wird ein Stativ verwendet, an dem eine Spiralfeder angebracht ist. Die Spiralfeder ist nach oben beziehungsweise unten ausgerichtet. In der Mitte der Feder befindet sich eine zylinderförmige Halterung, welche nach oben gerichtet ist und sich frei bewegen kann. Das äußere Ende ist an dem Stativ angebracht, welches U-förmig um die Spiralfeder herum führt. Auf dem Stativ befindet sich eine Lochscheibe, an der man Winkel ablesen kann. Durch das Loch führt die Halterung, welche mittig aus der Feder hervorgeht. Mit dieser Konfiguration können Objekte an der Halterung angebracht und Auslenkungen an der Lochscheibe abgelesen werden.

2.2 Apparatkonstante

Zu Beginn werden Messungen durchgeführt, um die Apparatkonstante zu bestimmen. Dazu wird eine lange, leichte Stange orthogonal an der Halterung befestigt. Daraufhin wird die Winkelscheibe genau ausgerichtet, sodass sich Auslenkungen genau ablesen lassen. Mit einer Federwaage, welche Kräfte bis zu 1 N misst, wird die Stange nun an einer anfangs beliebigen Stelle ausgelenkt. Dabei ist es wichtig, dass die Federwaage orthogonal an der Stange zieht, und nicht abgewinkelt. Es wird das Wertepaar des Winkels und der Kraft aufgeschrieben und die Messungen insgesamt zehn mal durchgeführt. Variiert werden die Auslenkung beziehungsweise die Kraft, jedoch nicht der Abstand zur Drillachse. Es werden also alle Messungen mit demselben Abstand durchgeführt.

2.3 Eigenträgheit

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der Drillachse selbst werden zwei Gewichte verwendet, dessen Masse zunächst gewogen wird. Die Massen sind Hohlkegel und besitzen eine Feststellschraube, um sie auf der Stange fixieren zu können. Es wird an je einer Seite der Stange eine Masse angebracht. Wenn sie fixiert sind wird der Abstand zur Drillachse notiert und die Stange anschließend sehr leicht, um etwa 10° - 20° ausgelenkt. Nach dem Loslassen wird die Schwingungsdauer der Stange gemessen. Dies wird insgesamt zehn mal durchgeführt, wobei der Abstand der Massen zur Drillachse variiert wird.

2.4 Trägheit der Körper

Für die Messungen der einzelnen Testkörper wird immer gleich vorgegangen. Der Körper wird an der Halterung befestigt und anschließend um 10° - 20° ausgelenkt. Daraufhin wird die Schwingungsdauer gemessen. Dieser Prozess wird insgesamt fünf Mal wiederholt. Gemessen werden die Werte für zwei beliebige Körper und einer menschlichen Gliederpuppe aus Holz. Alle Testkörper werden gewogen und ausgemessen. Die Holzpuppe kann beliebig klein angenähert, jedoch mindestens in sechs Einzelteile aufgeteilt werden; Kopf, zwei Arme, zwei Beine, Torso. Die Holzfigur wird in verschiedene Posen gebracht, zu der jeweils fünf Messwerte nach obiger Beschreibung aufgenommen werden. Zudem werden die Posen als Geometrie notiert, um das Trägheitsmoment bestimmen zu können.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Messung wird mit einem senkrechten Abstand von $r = 4,0\text{ cm}$ durchgeführt. Der Auslenkwinkel φ und die aufgewendete Kraft F sind in 1 dargestellt, ebenso wie die sich daraus ergebenden Werte für die Winkelrichtgröße D . Sie berechnet sich, wie aus der Theorie zu entnehmen ist, über

$$D = \frac{Fr}{\varphi} . \quad (4)$$

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Winkelrichtgröße.

φ	φ / π	F / N	$D / 10^{-3} \text{ N m}$
26°	0,14	0,19	17,3
30°	0,17	0,21	15,7
37°	0,21	0,29	17,6
45°	0,25	0,41	20,9
60°	0,33	0,49	18,9
70°	0,39	0,61	19,9
81°	0,45	0,70	19,8
93°	0,52	0,74	18,1
100°	0,56	0,91	20,7
110°	0,61	0,97	20,2

Somit ergibt sich als experimenteller Wert $D = (18,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ N m}$ für die Winkelrichtgröße. Der Fehler des Mittelwerts berechnet sich über

$$\Delta D = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2} \quad (5)$$

mit dem arithmetischen Mittel \bar{D} .

3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

Im Folgenden sei die Annahme eines nahezu masselosen Stabs, an dem zwei Punktmassen – demnach ohne Ausdehnung – gleicher Masse $m = 222,89 \text{ g}$ befestigt sind. In 2 sind die Messwerte entsprechend dargestellt. Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Quadraten der Periode T und dem Abstand a der Massen:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + m(a_1^2 + a_2^2)) =: \frac{4\pi^2}{D} (I_D + ma^2) \quad (6)$$

Nun werden diese Werte in einem Diagramm aufgetragen. Mithilfe linearer Regression lässt sich aus dem Y-Achsenabschnitt b der Eigenträgheitsmoment I_D bestimmen. Die Steigung c ergibt sich unter Vergleich mit (6) aus

$$y = b + cx \quad (7)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + ma^2) \quad (8)$$

$$\Rightarrow y = T^2, \quad b = \frac{4\pi^2}{D} I_D, \quad c = \frac{4\pi^2}{D} m, \quad x = a^2 \quad (9)$$

Unter Zuhilfenahme von *Python 3.7.3* wird die lineare Regression durchgeführt, wie in Abbildung 4 zu sehen ist, und es ergibt sich der y-Achsenabschnitt $b = (4,42 \pm 0,25) \text{ s}^2$

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D .

a_1 / cm	a_2 / cm	$(a_1^2 + a_2^2) / \text{cm}^2$	T / s	T^2 / s^2
4,5	5,5	50,5	2,50	6,25
6,5	7,5	98,5	2,93	8,58
8,5	9,5	162,5	3,21	10,30
10,5	11,5	242,5	3,83	14,67
12,5	13,5	338,5	4,16	17,31
14,5	15,5	450,5	4,70	22,09
16,5	17,5	578,5	5,27	27,77
18,5	19,5	722,5	5,79	33,52
20,5	21,5	882,5	6,27	39,31
22,5	23,5	1058,5	6,78	45,97

und eine Steigung von $c = (396,0 \pm 4,4) \text{ kg/J}$. Daraus lässt sich das Eigenträgheitsmoment zu

$$I_D = \frac{D}{4\pi^2} b = \frac{m}{c} b = (2,49 \pm 0,14) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (10)$$

bestimmen.

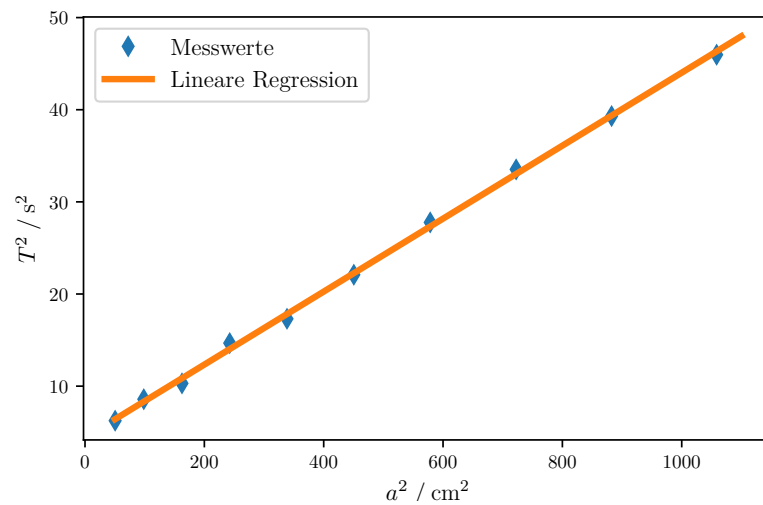


Abbildung 4: Lineare Regression zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments.

3.3 nächste section

Tabelle 3: Messwerte aller Schwingungsdauern.

$T_{zyl,gross} / s$	$T_{zyl,klein} / s$	T_{pose1} / s	T_{pose2} / s
1.08	2.31	0.38	0.92
1.27	2.23	0.41	0.89
1.13	2.17	0.43	0.94
1.18	2.30	0.39	0.91
1.16	2.26	0.41	0.91

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung der Eigenträgheit.

T_{eigen} / s	a_{m1} / cm	a_{m2} / cm
2.50	4.5	5.5
2.93	6.5	7.5
3.21	8.5	9.5
3.83	10.5	11.5
4.16	12.5	13.5
4.70	14.5	15.5
5.27	16.5	17.5
5.79	18.5	19.5
6.27	20.5	21.5
6.78	22.5	23.5

Tabelle 5: Messunsicherheiten aller Schwingungsdauern.

	T / s
Zylinder _{gross}	2.25 ± 0.05
Zylinder _{klein}	1.16 ± 0.06
Holzfigur Pose 1	0.40 ± 0.02
Holzfigur Pose 2	0.91 ± 0.02

4 Diskussion

Anhang: originale Messdaten

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V353: RC-Kreise*. 2019.
- [2] Ekbert Hering, Rolf Martin und Martin Stohrer. *Taschenbuch der Mathematik und Physik*. 6. Aufl. Springer Vieweg, 2017.