Versuch Nr. 101

Das Trägheitsmoment

Antonia Joëlle Bock
antoniajoelle.bock@tu-dortmund.de

Rene-Marcel Lehner
rene.lehner@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.1.2020 Abgabe: 28.1.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

2 Durchführung

2.1 Einleitung

Ziel des Versuchs ist es, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu bestimmen. Hierfür wird ein Stativ verwendet, an dem eine Spiralfeder angebracht ist. Die Spiralfeder ist nach oben beziehungsweise unten ausgerichtet. In der Mitte der Feder befindet sich eine zylinderförmige Halterung, welche nach oben gerichtet ist und sich frei bewegen kann. Das äußere Ende ist an dem Stativ angebracht, welches U-förmig um die Spiralfeder herum führt. Auf dem Stativ befindet sich eine Lochscheibe, an der man Winkel ablesen kann. Durch das Loch führt die Halterung, welche mittig aus der Feder hervorgeht. Mit dieser Konfiguration können Objekte an der Halterung angebracht und Auslenkungen an der Lochscheibe abgelesen werden.

2.2 Apparatekonstante

Zu Beginn werden Messungen durchgeführt, um die Apparatekonstantezu bestimmen. Dazu wird eine lange, leichte Stange orthogonal an der Halterung befestigt. Daraufhin wird die Winkelscheibe genau ausgerichtet, sodass sich Auslenkungen genau ablesen lassen. Mit einer Federwaage, welche Kräfte bis zu $1\,\mathrm{N}$ misst, wird die Stange nun an einer anfangs beliebigen Stelle ausgelenkt. Dabei ist es wichtig, dass die Federwaage orthogonal an der Stange zieht, und nicht abgewinkelt. Es wird das Wertepaar des Winkels und der Kraft aufgeschrieben und die Messungen insgesamt zehn mal durchgeführt. Variiert werden die Auslenkung beziehungsweise die Kraft, jedoch nicht der Abstand zur Drillachse. Es werden also alle Messungen mit demselben Abstand durchgeführt.

2.3 Eigenträgheit

Zur Bestimmung des Trägheitheitsmomentes der Drillachse selbst werden zwei Gewichte verwendet, dessen Masse zunächst gewogen wird. Die Massen sind Hohlkegel und besitzen eine Feststellschraube, um sie auf der Stange fixieren zu können. Es wird an je einer Seite der Stange eine Masse angebracht. Wenn sie fixiert sind wird der Abstand zur Drillachse notiert und die Stange anschließend sehr leicht, um etwa 10°-20° ausgelenkt. Nach dem Loslassen wird die Schwingungsdauer der Stange gemessen. Dies wird insgesamt zehn mal durchgeführt, wobei der Abstand der Massen zur Drillachse variiert wird.

2.4 Trägheit der Körper

Für die Messungen der einzelnen Testkörper wird immer gleich vorgegangen. Der Körper wird an der Halterung befestigt und anschließend um 10°-20° ausgelenkt. Daraufhin wird die Schwingungsdauer gemessen. Dieser Prozess wird insgesamt fünf Mal wiederholt. Gemessen werden die Werte für zwei beliebige Körper und einer menschlichen Gliederpuppe aus Holz. Alle Testkörper werden gewogen und ausgemessen. Die Holzpuppe kann beliebig klein angenähert, jedoch mindestens in sechs Einzelteile aufgeteilt werden; Kopf, zwei Arme, zwei Beine, Torso. Die Holzfigur wird in verschiedene Posen gebracht, zu der jeweils fünf Messwerte nach obiger Beschreibung aufgenommen werden. Zudem werden die Posen als Geometrie notiert, um das Trägheitsmoment bestimmen zu können.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Messung wird mit einem senkrechten Abstand von $r = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ durchgeführt. Der Auslenkwinkel φ und die aufgewendete Kraft F sind in 1 dargestellt, ebenso wie die sich daraus ergebenden Werte für die Winkelrichtgröße D. Sie berechnet sich, wie aus der Theorie zu entnehmen ist, über

$$D = \frac{Fr}{\varphi}\,. \tag{1}$$

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Winkelrichtgröße.

φ	$\varphi\,/\,\pi$	$F\,/\,\mathrm{N}$	$D\,/\,10^{-3}\,\mathrm{N\,m}$
26°	0,14	0,19	17,3
30°	0,17	0,21	15,7
37°	0,21	0,29	17,6
45°	0,25	0,41	20,9
60°	0,33	0,49	18,9
70°	0,39	0,61	19,9
81°	0,45	0,70	19,8
93°	0,52	0,74	18,1
100°	0,56	0,91	20,7
110°	0,61	0,97	20,2

Somit ergibt sich als experimenteller Wert $D = (18{,}9 \pm 1{,}6) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N\,m}$ für die Winkelrichtgröße. Die Abweichung der Größe berechnet sich über

$$\Delta D = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(D_i - \bar{D})^2} \tag{2}$$

mit dem arithmetischen Mittel $\bar{D}$.

3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

Im Folgenden sei die Annahme eines nahezu masselosen Stabs, an dem zwei Punktmassen – demnach ohne Ausdehnung – gleicher Masse $m = 222{,}89\,\mathrm{g}$ befestigt sind. In 2 sind die Messwerte entsprechend dargestellt. Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Quadraten der Periode T und dem Abstand a der Massen:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}(I_\text{D} + m(a_1^2 + a_2^2)) =: \frac{4\pi^2}{D}(I_\text{D} + ma^2) \tag{3}$$

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D.

a_1 / cm	a_2 / cm	$(a_1^2 + a_2^2)$ / cm^2	T / s	T^2 / s^2
4,5	5,5	50,5	2,50	6,25
6,5	7,5	98,5	2,93	8,58
8,5	9,5	162,5	3,21	10,30
10,5	11,5	242,5	3,83	14,67
12,5	13,5	338,5	4,16	17,31
14,5	15,5	450,5	4,70	22,09
16,5	17,5	578,5	5,27	27,77
18,5	19,5	722,5	5,79	33,52
20,5	21,5	882,5	6,27	39,31
22,5	23,5	1058,5	6,78	45,97

Nun werden diese Werte in einem Diagramm aufgetragen. Mithilfe linearer Regression lässt sich aus dem Y-Achsenabschnitt b der Eigenträgheitsmoment I_D bestimmen. Die Steigung c ergibt sich unter Vergleich mit (3) aus

$$y = b + cx \tag{4}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}(I_\text{D} + ma^2) \tag{5}$$

$$\Rightarrow y = T^2, \quad b = \frac{4\pi^2}{D} I_\text{D}, \quad c = \frac{4\pi^2}{D} m, \quad x = a^2 \tag{6}$$

Unter Zuhilfenahme von *Python 3.7.3* wird die lineare Regression durchgeführt, wie in Abbildung 1 zu sehen ist, und es ergibt sich der y-Achsenabschnitt $b = (4{,}42 \pm 0{,}25)\,\text{s}^2$ und eine Steigung von $c = (396{,}0 \pm 4{,}4)\,\text{kg/J}$. Daraus lässt sich das Eigenträgheitsmoment zu

$$I_\text{D} = \frac{D}{4\pi^2} b = \frac{m}{c} b = (2{,}49 \pm 0{,}14) \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{7}$$

bestimmen.

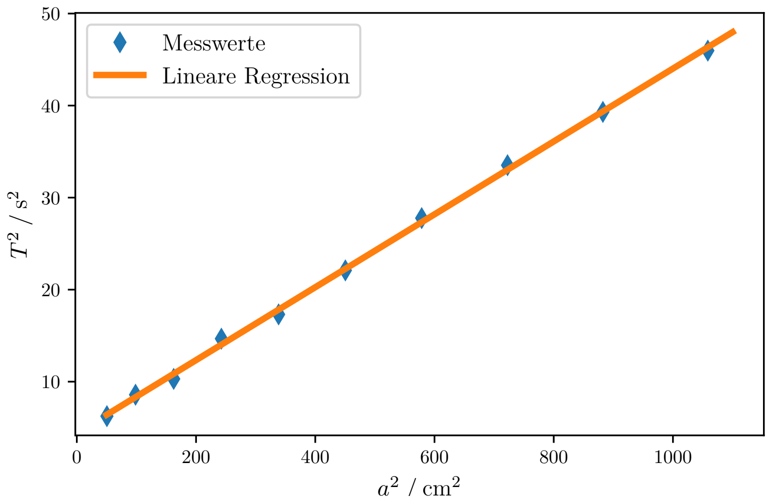
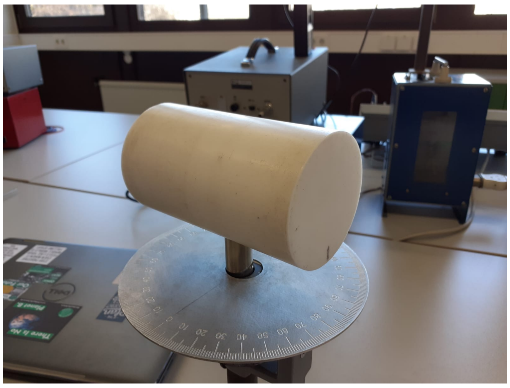


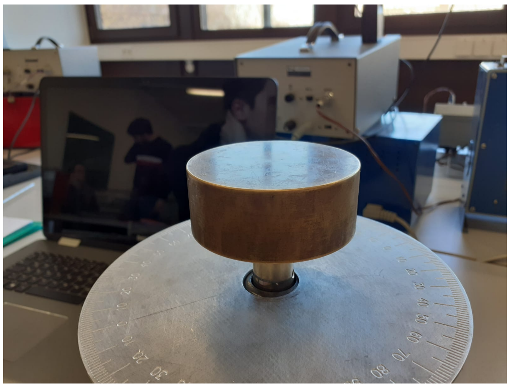
Abbildung 1: Lineare Regression zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments.

3.3 Trägheitsmomente verschiedener Körper

In den Tabellen 3 und 4 sind die Messwerte aufgetragen, die zur Bestimmung der Trägheitsmomente zweier verschiedener Zylinder und einer Holzpuppe in zwei unterschiedlichen Posen aufgenommen worden sind. In 4 berechnet sich der Messfehler ebenfalls über (2).

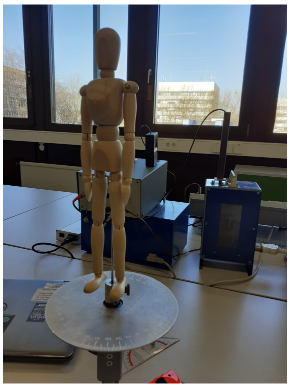


(a) Der große Zylinder.

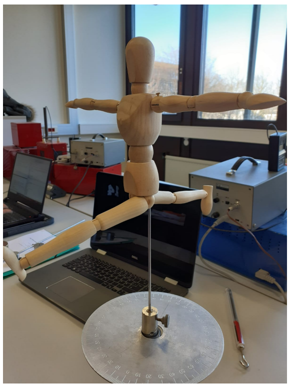


(b) Der kleine Zylinder.

Abbildung 2: Die verwendeten Zylinder und ihre Drehachsen im Experiment.



(a) Pose 1.



(b) Pose 2.

Abbildung 3: Die Holzpuppe in zwei verschiedenen Stellungen.

Tabelle 3: Messwerte aller Schwingungsdauern.

$T_{\text{Zyl,groß}}$ / s	$T_{\text{Zyl,klein}}$ / s	T_{Pose1} / s	T_{Pose2} / s
1.08	2.31	0.38	0.92
1.27	2.23	0.41	0.89
1.13	2.17	0.43	0.94
1.18	2.30	0.39	0.91
1.16	2.26	0.41	0.91

Tabelle 4: Messunsicherheiten aller Schwingungsdauern.

	T / s
$\text{Zylinder}_{\text{gross}}$	$2{,}25 \pm 0{,}05$
$\text{Zylinder}_{\text{klein}}$	$1{,}16 \pm 0{,}06$
Holzfigur Pose 1	$0{,}40 \pm 0{,}02$
Holzfigur Pose 2	$0{,}91 \pm 0{,}02$

3.3.1 Der kleine Zylinder

Tabelle 5: Maße des kleinen Zylinders und der zugehörigen Halterung.

Zylinder	
m	1119,4 g
h	3,0 cm
d	7,45 cm

Halterung	
h	1,8 cm
d	0,6 cm

Das erwartete Trägheitsmoment anhand der geometrischen Abmessungen ist

$$m_{\text{ges}} = 1119{,}4\,\text{g}\,, \qquad m_{\text{Zyl}} = m_{\text{ges}} \frac{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}}}{d_{\text{Zyl}}^2 h_{\text{Zyl}} + d_{\text{Halt}}^2 h_{\text{Halt}}} = 1115{,}1\,\text{g} \tag{8}$$

$$m_{\text{Halt}} = m_{\text{ges}} - m_{\text{Zyl}} = 4{,}3\,\text{g} \tag{9}$$

$$I_{\text{kl,geo}} = \frac{1}{2} m_{\text{Zyl}} \frac{d_{\text{Zyl}}^2}{4} + \frac{1}{2} m_{\text{Halt}} \frac{d_{\text{Halt}}^2}{4} = 7{,}74\,\text{kg}\,\text{cm}^2\,. \tag{10}$$

Wird hingegen die gemittelte Periode und die Winkelrichtgröße inklusive der Messfehler verwendet, um über

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \tag{11}$$

das Trägheitsmoment zu berechnen, ergibt sich

$$I_{\text{kl,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (6{,}44 \pm 0{,}55)\,\text{kg}\,\text{cm}^2\,. \tag{12}$$

3.3.2 Der große Zylinder

Dasselbe Verfahren wird nun für den großen Zylinder angewendet, mit dem Unterschied, dass die Drehachse hier senkrecht zur Symmetrieachse des Zylinders steht und deshalb eine etwas abgewandelte, in der Theorie erläuterte Formel verwendet wird.

Tabelle 6: Maße des großen Zylinders und der zugehörigen Halterung.

Zylinder	
m	1525,6 g
h	13,95 cm
d	7,95 cm

Halterung	
h	1,4 cm
d	0,55 cm

$$m_{\mathrm{ges}} = 1525{,}6\,\mathrm{g}\,, \qquad m_{\mathrm{Zyl}} = m_{\mathrm{ges}} \frac{d_{\mathrm{Zyl}}^2 h_{\mathrm{Zyl}}}{d_{\mathrm{Zyl}}^2 h_{\mathrm{Zyl}} + d_{\mathrm{Halt}}^2 h_{\mathrm{Halt}}} = 1524{,}9\,\mathrm{g} \tag{13}$$

$$m_{\mathrm{Halt}} = m_{\mathrm{ges}} - m_{\mathrm{Zyl}} = 0{,}7\,\mathrm{g} \tag{14}$$

$$I_{\mathrm{gr,geo}} = m_{\mathrm{Zyl}} \left(\frac{d_{\mathrm{Zyl}}^2}{16} + \frac{h_{\mathrm{Zyl}}^2}{12} \right) + \frac{1}{2} m_{\mathrm{Halt}} \frac{d_{\mathrm{Halt}}^2}{4} = 30{,}75\,\mathrm{kg\,cm^2}\,. \tag{15}$$

$$I_{\mathrm{gr,T}} = T^2 \frac{D}{4\pi^2} = (24{,}24 \pm 2{,}32)\,\mathrm{kg\,cm^2}\,. \tag{16}$$

4 Diskussion

Anhang: originale Messdaten