



Department
of Physics

Computational Physics

Exercise Sheet 06

RENE-MARCEL LEHNER

Summer Term
2023

E0: Comprehension Questions	3	E2: Der Wetterfrosch	15
E1: Bifurcation diagrams	4		

ASSIGNMENT N°

06



E0: Comprehension Questions

Task:

E1: Bifurcation diagrams

Task:

The Banach fixed point theorem predicts under certain conditions the existence of a unique fixed point of an iteration rule. While a numerical solution in these cases is usually unproblematic, it is all the more difficult to deal with problems where the theorem does not hold, i.e., those with unstable fixed points, orbits, and "chaos". Bifurcation diagrams are an illustrative way to capture these phenomena using a single parameter.

Calculate and plot bifurcation diagrams for

- Solve the logistic map ($x_n \in [0, 1]$) using the equation:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Solve the cubic map ($x_n \in [-\sqrt{1+r}, \sqrt{1+r}]$) using the equation:

$$x_{n+1} = rx_n - x_n^3$$

by numerical iteration. Proceed as follows:

- (1) Write a routine that, given r and x_0 , executes the respective map N times. This "warm-up" is to guarantee that one has converged to a fixed point/orbit, if this exists. Consider which values $r > 0$ may assume at most, so that x_n remains within the given intervals in each step.
- (2) Now write a routine that continues to iterate after the warm-up. Count the orbits on which the points are distributed for the different r .
- (3) Vary r in steps $\Delta r = 1 \times 10^{-3}$ and, thus, generate a bifurcation diagram for the respective map. Test different starting values x_0 , because certain fixed points/orbits can only be reached from certain starting values. Store those values of r for which the number of orbits doubles. Use those to determine the Feigenbaum constant. Furthermore, determine r_∞ , starting from which no more "real" orbits occur and the bifurcation diagram becomes chaotic. Since the orbit size from a certain point on grows very rapidly with r (keyword Feigenbaum constant), it is a good approximation to assume chaos already from an orbit size of $G > 64$ to determine r_∞ .

Note: Often the bifurcation diagrams are also drawn in the chaotic area, even if there are no more fixed points/orbits. This is mainly for the purpose of illustration, because a map becomes chaotic exactly at the point, where discrete lines in the bifurcation diagram change into a continuum.

Vorwort

Das Erstellen der Abbildungen ist herausfordernd.

Für die gesamte Aufgabe werden **zwei** Datensatz-Größen verwendet.

1. "*small*": 4000 bzw. 3000 Datenpunkte, für je die Logistische und die Kubische Abbildung. Dies entspricht den geforderten Schrittweiten von $\Delta r = 1 \times 10^{-3}$.
2. "*large*": 40000 bzw. 30000 Datenpunkte, also entsprechend das 10-fache des kleinen Datensatzes. Dies ist notwendig, um hochwertigere Abbildungen zu erstellen. Die Berechnung der Feigenbaum-Konstante erleichtert dies jedoch **nicht**.

Für alle **Warm-Ups** wurden 1000 Iterationsschritte angewendet.

Theorie

Sowohl die Logistische als auch die Kubische Abbildung sind rekursive Funktionen, die unter bestimmten Bedingungen Fixpunkte besitzen. Diese Fixpunkte können zum einen bestimmt werden, zum anderen aber auch auf Stabilität untersucht werden.

Besitzt eine Abbildung einen Fixpunkt, so gilt für die rekursive Folge, dass sie ihren Wert nicht mehr ändert und $x_{n+1} = x_n$ denselben Wert annehmen (bei Grenzwertbetrachtung).

Bezüglich der Stabilität können kleine Störungen in der Umgebung eines Fixpunktes betrachtet werden, die ein einfaches Kriterium liefern, um die Stabilität zu untersuchen.

Für kleine Störungen gilt

$$x_{n+1} = f(x^* + \varepsilon_n) \approx f(x^*) + \underbrace{f'(x^*)}_{\equiv \varepsilon_{n+1}} \varepsilon_n.$$

Der in erster Näherung approximierte Term ist der Störterm des nächsten Folge-Gliedes. Daher muss für Stabilität $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$ gelten; ansonsten ist der Fixpunkt instabil.

Zusammengefasst gilt also:

Fixpunkt stabil	$\iff f'(x^*) < 1$
Fixpunkt instabil	$\iff f'(x^*) > 1$,

wobei x^* den betrachteten Fixpunkt darstellt.

Daraus leitet sich folgende Herangehensweise ab:

1. Setze $x_{n+1} = x_n = x$ und bestimme alle Fixpunkte x_i^* .
2. Bestimme die Ableitung $|f'(x)|$, setze einen Fixpunkt x_i^* ein und bestimme über die Bedingung $|f'(x^*)| < 1$ den gültigen Wertebereich für den freien Parameter r .
3. Wähle einen plausiblen Bereich für r , um das deterministische Verhalten (stabile Fixpunkte) dem chaotischen Verhalten (instabile Fixpunkte) gegenüberzustellen.

Logistische Abbildung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \text{ mit } x_n \in [0, 1] \text{ und } r > 0$$

1) Fixpunkte bestimmen:

$$r < 1$$

$$x = rx(1 - x)$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$1 < r < 3$$

$$x = rx(1 - x)$$

$$\Leftrightarrow 1 = r - rx$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r}$$

$$r > 3 \quad \text{Fixpunkte instabil}$$

2) Ableitung und Wertebereich bestimmen:

$$|f'(x)| = |r - 2rx| = |r(1 - 2x)| \text{ mit } r > 0$$

$$x = 0$$

$$|f'(x)| = r < 1$$

$$\Rightarrow 0 < r < 1$$

$$x = \frac{r-1}{r}$$

$$|f'(x)| = \left| r - 2r \frac{r-1}{r} \right| = |r - 2r + 2| = |2 - r| < 1$$

$$\Rightarrow 1 < r < 3$$

- 3) Es wird ein deterministisches Verhalten von $0 < r < 3$ erwartet. Für die logistische Funktion ist es üblich, auf einen Bereich von $0 < r < 4$ abzubilden. Die relativ geringfügige Erhöhung der oberen Grenze reicht bereits aus, um das chaotische Verhalten abzubilden und zu diskutieren.

Visualisierung

Zur Darstellung der Bifurkations-Diagramme wird der Große Datensatz mit über 12 Millionen Datenpunkten verwendet. Da die resultierenden PDF-Dateien unhandlich sind, werden hier stattdessen hochauflöste PNGs verwendet.

Die Wahl von sehr kleinen Punkten und einem geringen Alpha-Wert ermöglichen die Darstellung einer Dichte.

Das Verhalten der logistischen Funktion auf dem gesamten Bereich $0 < r < 4$ ist in Abb. 1.1 zu sehen.

Eine beschränktere Version dieser Abbildung (1.2) zeigt mehr Struktur in der chaotischen Region.

Auffällig ist, dass trotz des chaotischen Verhaltens bzw. instabiler Fixpunkte dennoch Strukturen zu erkennen sind. Teilweise sind chaos-freie Bänder zu sehen, die im Rahmen der Untersuchung von Unimodalen Funktionen auf eine **Selbstähnlichkeit** deuten.

Diese **Selbstähnlichkeit** beschreibt fraktale Eigenschaften des Bifurkationsdiagrammes. Abbildung 1.3 zeigt, dass es selbst nach Eintritt von Chaos Wertebereiche gibt, die chaos-frei sind und die Funktion dort wieder von neuem beginnt.

Bereiche des Bifurkationsdiagrammes

Das Bifurkationsdiagramm lässt sich qualitativ in **drei** Bereiche einteilen.

1. Stabiler bzw. Deterministischer Bereich $0 < r < 3$

Hier gibt es genau einen Fixpunkt, der analytisch berechenbar ist.

2. Instabiler bzw. Chaotischer Bereich, periodische Fixpunkte $3 < r < 3.5699$

Dieser Bereich ist dadurch gekennzeichnet, dass nach jeder Iteration von x_{n+1} abwechselnd ein anderer, **fester** Fixpunkt eingenommen wird.

Durch eine zweifache Aufspaltung an bestimmten Punkten (Stichwort: Feigenbaum-Konstante) sind diese Iterationen 2-, 4-, bzw. 2^p -periodisch.

3. Instabiler bzw. Chaotischer Bereich, kontinuierliches Fixpunkt-Spektrum $r > 3.5699 =: r_\infty$

Bei einem bestimmten Wert für r , der nur numerisch berechnet werden kann, geht das System in vollständiges Chaos über. Es kann keine Periodizität der Fixpunktiterationen mehr festgestellt werden und die 1-dimensionalen Linien gehen in Flächen über.

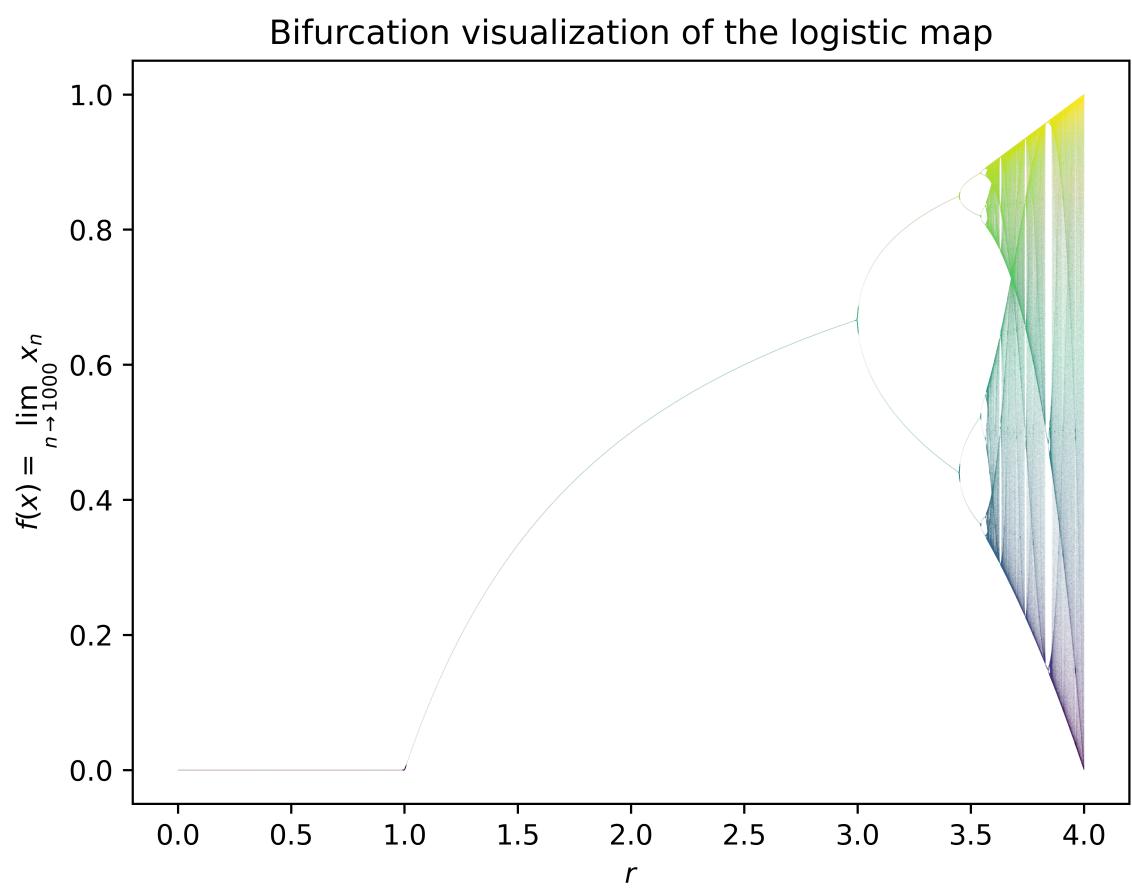


Figure 1.1: Logistic map bifurcation visualization with 12 Million data points.

Zoomed bifurcation visualization of the logistic map

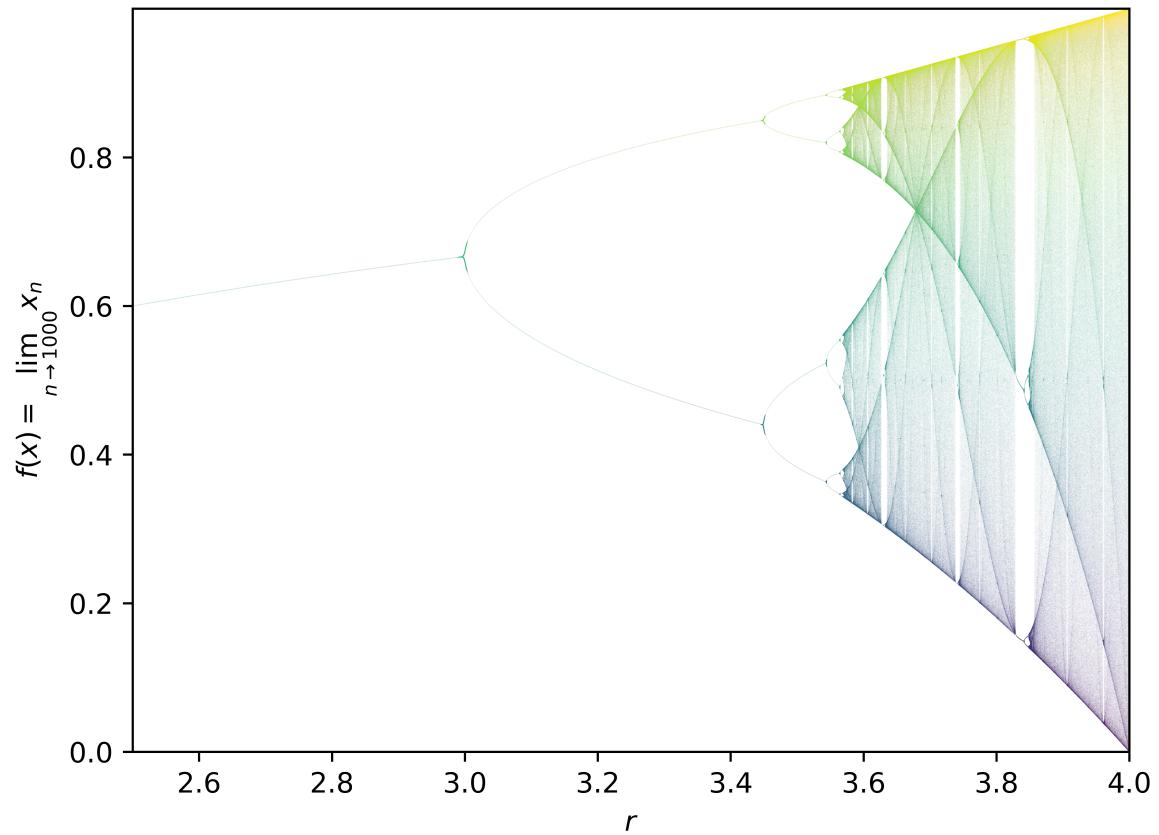


Figure 1.2: A zoomed in version of the logistic map bifurcation visualization.

Zoomed bifurcation visualization of the logistic map

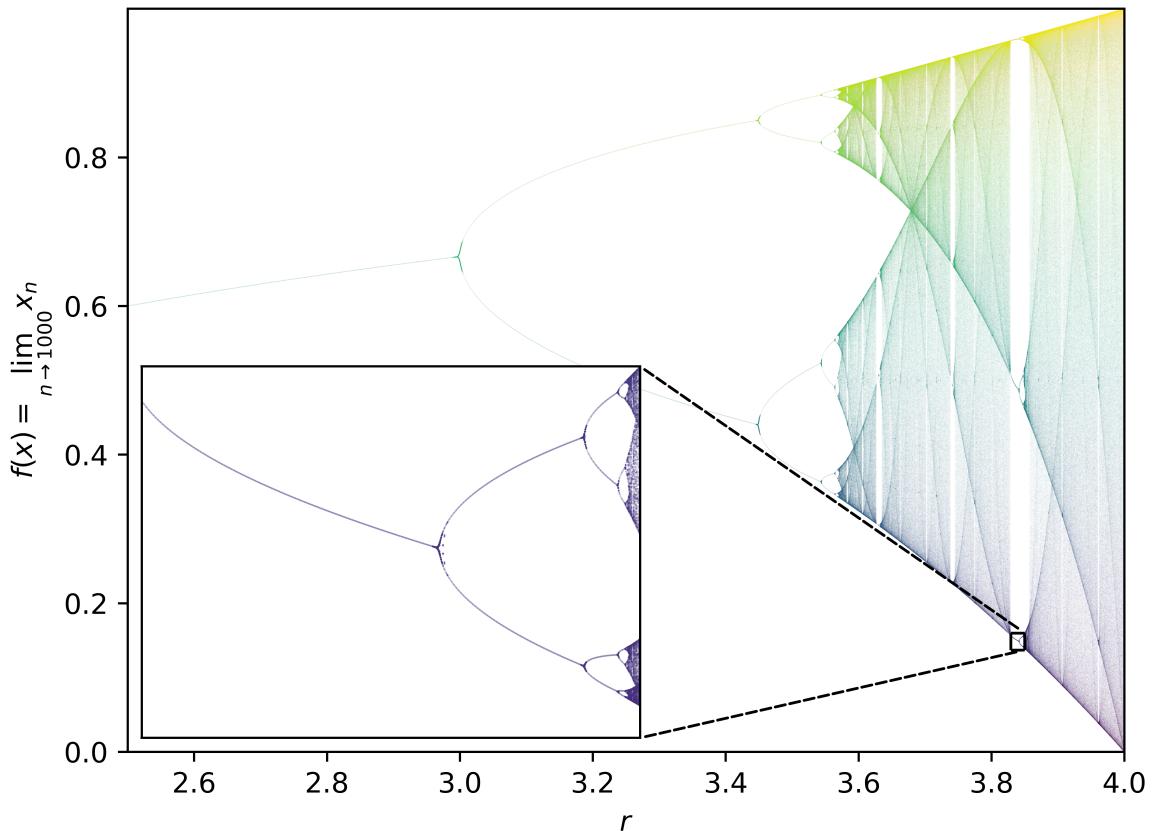


Figure 1.3: **Illustration of Self-Similarity** in the bifurcation diagram of the logistic map. The diagram displays a recurrent pattern of bifurcations - a hallmark of fractal geometry - that initiates from $r = 3$. This pattern demonstrates a transition from order to chaos and back to order, evidencing the property of self-similarity. Such self-similar patterns reveal how order and predictability can emerge from seemingly random phenomena.

Orbits und Feigenbaum-Konstante

Die Bifurkationen, also die Verdopplung der Perioden, treten nach der ersten Bifurkation in immer kleineren Intervallen auf. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass das Verhältnis der Längen dieser Intervalle einer **Konstanten** entspricht.

Diese Konstante ist **unsiversal** für Bifurkationsdiagramme unimodaler Funktionen, weswegen das hier berechnete Intervallverhältnis auch für die kubische Abbildung erwartet wird.

Schwierigkeiten

Das Berechnen der Feigenbaum-Konstante gestaltet sich äußerst schwierig.

Grund dafür ist zum einen die Instabilität an den Bifurkationspunkten, die für einen gauß- oder δ -peak-artigen Anstieg der Orbits sorgt.

Für alle Untersuchungen wurde der **Median** dieses Peaks verwendet, da dieser gut auf die bereits bekannten instabilen Punkte $r = 1$ und $r = 3$ abgebildet hat. Dennoch sorgt diese Unreinheit dafür, dass die Daten händisch abgelesen werden müssen. Eine Bereinigung gestaltet sich schwierig.

Es stellt sich jedoch auch die Schrittweite von $\Delta r = 1 \times 10^{-3}$ als bedeutend zu klein heraus, um Periodizitäten bis 64 zu untersuchen. Selbst mit der hier verwendeten Schrittweite von $\Delta r = 1 \times 10^{-4}$ fluktuiert der Wert für die Feigenbaum-Konstante stark.

Abbildung 1.4 zeigt das allgemeine Verhalten der Bifurkationsorbits. Der chaotische Bereich ist dadurch gekennzeichnet, dass es meist mehr als 64 Orbits gibt (was in diesen Rechnungen die Iterations-Obergrenze ist), sich vereinzelt aber dennoch eine geringere Anzahl von Orbits finden, die keine 2-er Potenzen ergeben. Der Datensatz ist für die Darstellung der Orbits erheblich bereinigt, indem Duplikate entfernt worden sind. Die berechneten **Bifurkationspunkte**, **Intervalllängen** (zwischen den Bifurkationspunkten) und **Feigenbaum-Konstanen** finden sich in Tabelle 1.1.

Es wird Chaos ab etwa $r_\infty \approx 3.56959$ beobachtet.

Periodizität	Bifurkationspunkt	Intervalllänge	Feigenbaum-Konstante
1	0.00000	3.00000	-
2	3.00000	0.45119	6.64914
4	3.45119	0.09290	4.85657
8	3.54409	0.02040	4.55392
16	3.56449	0.00420	4.85714
32	3.56869	0.00090	4.66667
64	3.56959	-	-

Table 1.1: Feigenbaum-Konstante bis zu einer Periodizität von 64. In den Bifurkationspunkten wird der Median des Orbit-Peaks verwendet. Der chaotische Bereich ist durch viele Instabilitäten und damit nicht-periodische Orbits gekennzeichnet. Hier wird der kleine Datensatz verwendet.

Literaturwert Feigenbaum-Konstante: 4.66920

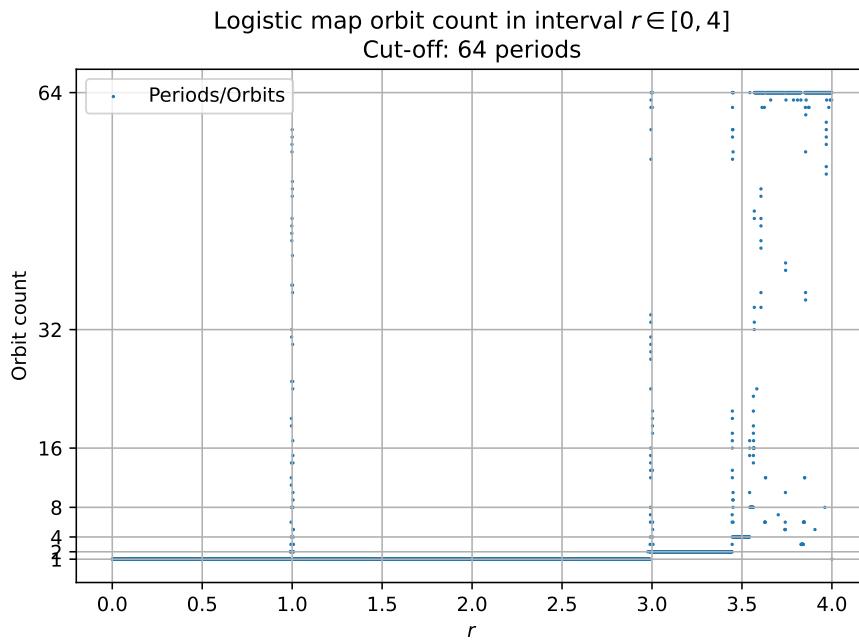


Figure 1.4: **Quantification of Orbit Count for the Smaller Data Set.** The chaotic region is characterized by an oscillating number of orbits or periods. Interestingly, bifurcation points, as well as the points $r = 1$ and $r = 3$, demonstrate non-periodic behavior, implying their instability. This diagram can be used to illustrate the **Feigenbaum constant**: The periodic doubling is observable up to about $3.5699 = r_\infty$.

Kubische Abbildung

$$x_{n+1} = rx_n - x_n^3 \text{ mit } x_n \in [-\sqrt{1+r}, \sqrt{1+r}] \text{ und } r > 0$$

Für die kubische Abbildung wird vollständig analog vorgegangen. Es gelten dieselben Bedingungen sowie Diskussionen.

1) Fixpunkte bestimmen:

$$r < 1$$

$$x = rx - x^3$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$1 < r < 2$$

$$1 = r - x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{r-1}$$

$$r > 2 \quad \text{Fixpunkte instabil}$$

2) Ableitung und Wertebereich bestimmen:

$$f'(x) = r - 3x^2 \text{ mit } r > 0$$

$$x = 0$$

$$|f'(x)| = r < 1$$

$$\Rightarrow 0 < r < 1$$

$$x = \pm\sqrt{r-1}$$

$$|f'(x)| = |r - 3(r-1)| = |r - 3r + 3| = |3 - 2r| < 1$$

$$\Rightarrow 1 < r < 2$$

- 3) Es wird ein deterministisches Verhalten von $0 < r < 2$ erwartet. Ähnlich wie für die logistische Funktion wird dieser Wertebereich erweitert, um das chaotische Verhalten darzustellen. Für die weiteren Untersuchungen wird der Wertebereich $0 < r < 3$ gewählt.

Visualisierung

Die Darstellung der kubischen Abbildung ist vollständig analog zur logistischen Abbildung. Es wird eine Schrittweite von $\Delta r = 1 \times 10^{-4}$ gewählt, um den chaotischen Bereich besser zu illustrieren.

Auffällig in Abbildung 1.5 ist, dass das Bifurkationsdiagramm vollständig symmetrisch wirkt und dieselbe Form des Bifurkationsdiagrammes der logistischen Abbildung aufweist.

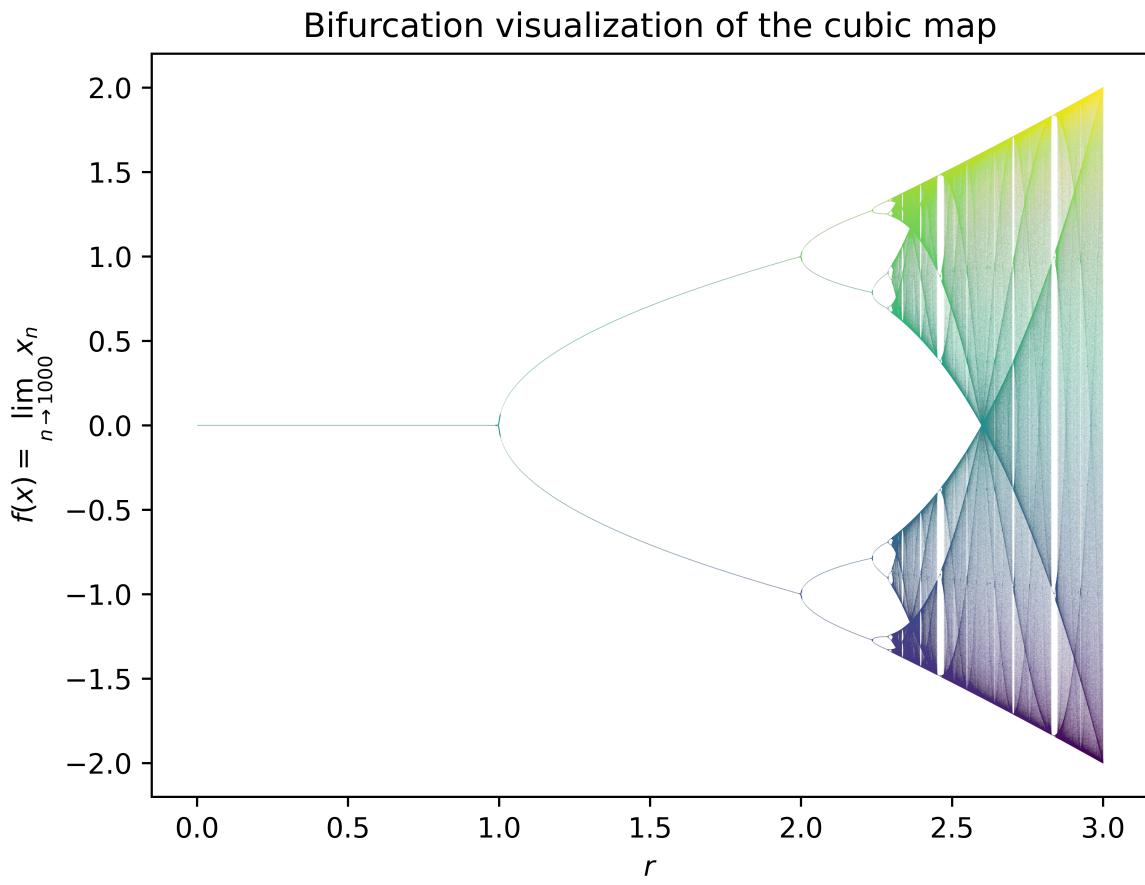


Figure 1.5: **Bifurcation Diagram for the Cubic Mapping**. It reveals not only **Self-Similarity**, inherent in its fractal-like recurrence, but also clearly demonstrates the **Universality** of unimodal functions. This universality is mirrored in the identical bifurcation behavior and the Feigenbaum constant shared among these functions.

Orbits und Feigenbaum-Konstante

Die Berechnung der Feigenbaum-Konstante gestaltet sich bei der kubischen Abbildung noch schwieriger und selbst die verkleinerte Schrittweise sorgt für große Fluktuationen des finalen Wertes. Die Berechnungen sind in Tabelle 1.2 zu sehen.

Wie erwartet jedoch scheint die Konstante gegen den Literaturwert zu konvergieren.

Abbildung 1.6 zeigt das Verhalten der Orbits entlang der r -Achse.

Der Wert, ab dem nur noch chaotisches Verhalten beobachtet wird, beträgt etwa $r_\infty \approx 2.30211$.

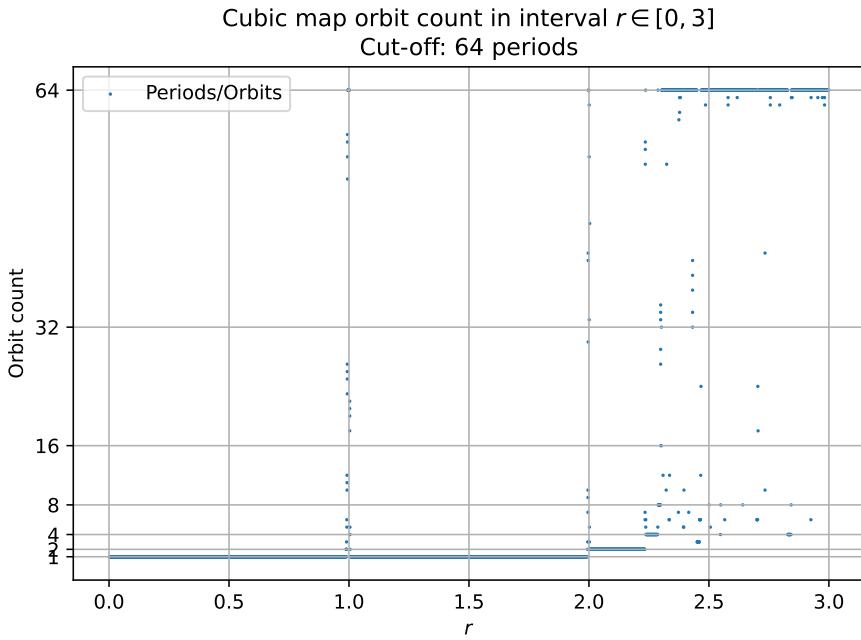


Figure 1.6: **Quantification of Orbit Count for the Smaller Data Set.** The chaotic region is characterized by an oscillating number of orbits or periods. Interestingly, bifurcation points, as well as the points $r = 1$ and $r = 2$, demonstrate non-periodic behavior, implying their instability. This diagram can be used to illustrate the **Feigenbaum constant**: The periodic doubling is observable up to about $2.30211 = r_\infty$.

Periodizität	Bifurkationspunkt	Intervalllänge	Feigenbaum-Konstante
1	0.00000	2.00000	-
2	2.00000	0.23623	8.46635
4	2.23623	0.05168	4.57060
8	2.28791	0.01130	4.57522
16	2.29921	0.00240	4.70833
32	2.30161	0.00050	4.80000
64	2.30211	-	-

Table 1.2: Feigenbaum-Konstante bis zu einer Periodizität von 64. In den Bifurkationspunkten wird der Median des Orbit-Peaks verwendet. Der chaotische Bereich ist durch viele Instabilitäten und damit nicht-periodische Orbits gekennzeichnet. Hier wird der kleine Datensatz verwendet.

Literaturwert Feigenbaum-Konstante: 4.66920

Flags und Ausführung der Datei

Der Code ist in [Python](#) geschrieben. Es gibt **drei Flags** zur Ausführung:

- `CASE = "small" or "large"`: Bestimmt die Größe des Datensatzes.
- `MAP = "logistic" or "cubic"`: Bestimmt die zu berechnende/darstellende Abbildung. `MAP = "logistic"`
- `GENERATE = True or False`: Der Datensatz wird in eine `.csv` gespeichert. Ist dieser Wert "True", werden die Daten neu generiert. Ist er "False" werden die Daten aus der `.csv` gelesen.

E2: Der Wetterfrosch

Task:

With the help of the so-called Poincaré cut, the continuous dynamics of a system can be mapped onto a discrete system. Thus, it is a useful tool to analyze deterministic chaos in several dimensions. In this task, we consider a simple DGL system that exhibits chaotic behavior in certain cases. To analyze this, among other things a Poincaré cut of the phase space is to be performed.

Predicting the weather is a complicated matter. A simple approach to the model-based investigation of the dynamics of complex weather phenomena is the chaotic Lorenz model, given by

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ.\end{aligned}$$

Here σ and b are dimensionless constants describing material properties of the system, and r is an external parameter that depends on the temperature difference in the system.

- (a) Integrate the differential equations using the fourth order Runge-Kutta method. Choose $\sigma = 10$ and $b = 8/3$. In particular, investigate the cases $r = 20$ and $r = 28$. What is the role of the initial conditions?
- (b) Plot the result graphically
 - (1) as a projection of the continuous motion onto the $X - Y$ plane.
 - (2) as a Poincaré cut to $Z = \text{const} = 20$ and $\dot{Z} < 0$. To determine the intersection on the plane $Z = \text{const} = 20$ more precisely, one should linearly interpolate between the last value above 20 and the first one below 20.
 - (3) as a 3D plot.

Time management and circumstances :(