Modélisation Papier

1. • On introduit les variables x_{ij} pour $ij \in E$ tq

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si sommets } i \text{ et } j \text{ sont dans le même cluster} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte à ce que la fonction objectif soit $\sum_{ij \in E} l_{ij} x_{ij}$

• Pour cela on introduit aussi les variables y_v^k pour $k \in \{1, \dots, K\}$ et $v \in V$ tq

$$y_v^k = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } v \text{ est dans le cluster no } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Pour $k \in \{1, \dots, K\}$, $ij \in E$, on a $x_{ij} = 1$ si $y_i^k = y_j^k = 1$. On peut écrire la contrainte $y_i^k + y_j^k \leq 1 + x_{ij}$

• De même si $y_i^k = 1$ et $y_j^k = 0$, ou $y_i^k = 0$ et $y_j^k = 1$ alors $x_{ij} = 0$ ce qui est équivalent à rajouter la contrainte $|y_i^k - y_j^k| \leq 1 - x_{ij}$

• Pour que chaque sommet $v \in V$ soit pris une et une seule fois dans un des cluster, on écrit : $\sum_{k=1}^{K} y_v^k = 1$

Ainsi, le problème statique s'écrit :

$$\min \sum_{ij \in E} l_{ij} x_{ij}$$

s.c.

$$y_i^k + y_j^k \leq 1 + x_{ij} \quad \forall ij \in E$$

$$y_i^k - y_j^k \leq 1 - x_{ij} \quad \text{——}$$

$$-y_i^k + y_j^k \leq 1 - x_{ij} \quad \text{——}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_v^k = 1 \quad \forall v \in V$$

$$\sum_{v \in V} w_v y_v^k \leq B \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall ij \in E$$

$$y_v^k \in \{0,1\} \quad \forall v \in V \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

2. Si $\mathcal{X}^{comb} = \Big\{ \left(\{x_{ij}\}_{ij \in E}, \{y_v^k\}_{\substack{k \in \{1,\dots,K\} \\ v \in V}} \right) \in \{0,1\}^{|E|} \times \{0,1\}^{|V| \times K}$:

$$
\begin{aligned}
& y_i^k + y_j^k \leq 1 + x_{ij} \quad \forall ij \in E \\
& y_i^k - y_j^k \leq 1 - x_{ij} \quad \text{---} \\
& -y_i^k + y_j^k \leq 1 - x_{ij} \quad \text{---} \\
& \sum_{k=1}^{K} y_v^k = 1 \quad \forall v \in V \Big\}
\end{aligned}
$$

et $\mathcal{X}^{num} = \Big\{ \left(\{x_{ij}\}_{ij \in E}, \{y_v^k\}_{\substack{k \in \{1,\dots,K\} \\ v \in V}} \right) \in \{0,1\}^{|E|} \times \{0,1\}^{|V| \times K}$:

$$\forall k \in \{1, \dots, K\}, \ \sum_{v \in V} w_v^2 y_v^k \leq B, \ \forall w^2 \in \mathcal{U}^2 \Big\}$$

le problème robuste s'écrit

$$\min_{x \in \mathcal{X}^{comb}} \left\{ \max_{l' \in \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in E} l_{ij}^1 x_{ij} \right. \\ \left. x \in \mathcal{X}^{num} \right\}$$