5. Résolution par dualisation

a) $$\min_{\substack{x \in X^{cont} \\ x \in X^{num}}} \max_{\delta^1 \in [0,3]^{|E|}} \sum_{ij \in E} l_{ij} x_{ij} + \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij}$$

$$\text{s.c} \quad \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} \leq L$$

$$= \min_{x \in X^{cont} \cap X^{num}} \left\{ \sum_{ij \in E} l_{ij} x_{ij} + \max_{\{\delta^1_{ij}\}} \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \right\}$$

$$\text{s.c} \quad \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} \leq L$$

$$\delta^1_{ij} \in [0,3] \quad \forall ij \in E$$

b) Problème interne : $$\max_{\{\delta^1_{ij}\}} \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij}$$

$$\text{s.c} \quad \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} \leq L \quad (\lambda)$$

$$\delta^1_{ij} \in [0,3], \ \forall ij \in E \rightarrow \delta^1_{ij} \leq 3 \quad (z_{ij})$$

c) Dualisation : $$\min_{\lambda, \{z_{ij}\}_{ij \in E}} \lambda L + 3 \sum_{ij \in E} z_{ij}$$

$$\text{s.c.} \quad \lambda + z_{ij} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \quad \forall ij \in E$$

$$\lambda \geq 0, \ z_{ij} \geq 0 \ \forall ij \in E.$$

d) pour $k \in \{1, \dots, K\}$, $\sum_{v \in V} w^2_v y^k_v \leq B \quad \forall w^2 \in \mathcal{U}^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{v \in V} w_v y^k_v + \sum_{v \in V} w_v \delta^2_v y^k_v \leq B \\ \sum_{v \in V} \delta^2_v \leq W \ ; \ \delta^2_v \in [0,3] \ \forall v \in V \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{v\in V} w_v y_v^k + \max_{\{\delta_v^2\}} \left\{ \sum_{v\in V} w_v \delta_v^2 y_v^k \quad \text{s.c} \quad \sum_{v\in V} \delta_v^2 \leq W, \quad \delta_v^2 \in [0, W_v] \ \forall v \in V \right\} \leq B$$

e) Problème interne n°k pour $k \in \{1, \dots, K\}$:

$$\max_{\{\delta_v^2\}_{v\in V}} \sum_{v\in V} w_v \delta_v^2 y_v^k$$

$$\text{s.c} \quad \sum_{v\in V} \delta_v^2 \leq W \qquad (\mu^k)$$

$$\delta_v^2 \leq W_v \quad \forall v \in V \qquad (\beta_v^k)$$

$$\delta_v^2 \geq 0 \quad \forall v \in V$$

f) Pour $k \in \{1, \dots, K\}$, le dual est

$$\min_{\mu^k, \{\beta_v^k\}_{v\in V}} W\mu^k + \sum_{v\in V} W_v \beta_v^k$$

$$\text{s.c} \quad \mu^k + \beta_v^k \geq w_v y_v^k$$

$$\mu^k \geq 0, \ \beta_v^k \geq 0 \ \forall v \in V$$

g) Par dualisation, la contrainte robuste peut se réécrire : $\forall k \in \{1, \dots, K\}$,

$$\begin{cases} \sum_{v\in V} w_v y_v^k + W\mu^k + \sum_{v\in V} W_v \beta_v^k \\ \mu^k + \beta_v^k \geq w_v y_v^k \end{cases}$$

en introduisant les variables $\mu^k \geq 0$, $\beta_v^k \geq 0$ $\forall v \in V$

Ainsi, le problème robuste s'écrit :

$$\min_{\substack{\{x_{ij}\},\{y_v^k\}\\ \{z_{ij}\},\{\beta_v^k\}\\ \lambda,\mu}} \sum_{ij\in E} l_{ij} x_{ij} + \lambda L + 3 \sum_{ij\in E} z_{ij}$$

s.c.

$$y_i^k + y_j^k \leq 1 + x_{ij} \qquad \forall ij \in E$$

$$y_i^k - y_j^k \leq 1 - x_{ij} \qquad \text{—}$$

$$-y_i^k + y_j^k \leq 1 - x_{ij} \qquad \text{—}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_v^k = 1 \qquad \forall v \in V$$

$$\lambda + z_{ij} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \qquad \forall ij \in E$$

$$\sum_{v\in V} w_v y_v^k + W\mu^k + \sum_{v\in V} W_v \beta_v^k \leq B \qquad \forall k \in \{1,\dots,K\}$$

$$\mu^k + \beta_v^k \geq w_v y_v^k \qquad \text{—}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall ij \in E, \quad y_v^k \in \{0,1\} \quad \forall v \in V, \forall k \in \{1,\dots,K\}$$

$$z_{ij} \geq 0 \quad \text{—}, \quad \beta_v^k \geq 0 \quad \text{—}$$

$$\lambda, \mu \geq 0.$$