

Отчет по лабораторной работе №2: Задача о погоне

дисциплина: Математическое моделирование

Родина Дарья Алексеевна, НФИБд-03-18

Содержание

1	Введение	5
1.1	Цель работы	5
1.2	Задачи	5
1.3	Объект и предмет исследования	5
2	Теоретические сведения: Задача о погоне	6
2.1	Формулировка задания	6
2.2	Постановка задачи	7
3	Реализация модели	9
3.1	Подключение библиотек	9
3.2	Функции, описывающие движение лодки и катера	9
3.3	Функция перехода из декартовых координат в полярные	10
3.4	Начальные значения	10
3.5	Нахождение промежуточных координат и построение графиков .	11
3.6	Построенный график	11
4	Выводы	14

Список таблиц

Список иллюстраций

3.1	График движения лодки браконьеров и катера береговой охраны при $s = 11.5, n = 3.5, \theta = 0, r_0 = 11.5/4.5$	12
3.2	График движения лодки браконьеров и катера береговой охраны при $s = 11.5, n = 3.5, \theta = -\pi, r_0 = 11.5/2.5$	13

1 Введение

1.1 Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать Построение математической модели для выбора правильной стратегии при решении задачи о погоне.

1.2 Задачи

Можно выделить три основные задачи данной лабораторной работы:

1. Провести рассуждения и вывод дифференциальных уравнений, если скорость катера больше скорости лодки в 5.5 раз;
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев;
3. Определить по графику точку пересечения катера и лодки.

1.3 Объект и предмет исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе является задача о погоне, а предметом исследования - траектории движения лодки браконьеров и катера береговой охраны при заданных начальных условиях.

2 Теоретические сведения: Задача о погоне

2.1 Формулировка задания

Так как во второй лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле $S_n \bmod 70 + 1$, где S_n - номер студенческого билета (в моем случае $S_n = 1032182581$):

$$1032182581 \% 70 + 1$$

Соответственно, номер моего варианта - 32.

Вариант 32

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,5 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,5 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки.

2.2 Постановка задачи

1. Принимаем $t_0 = 0$, $x_{l0} = 0$ - место нахождения браконьеров в момент обнаружения, $x_{k0} = 11,5$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{l0} ($\theta = x_{l0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны,
3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были в одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки.

Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса, удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние x (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение, Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдет это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/3,5v$ (во втором случае $x + k/3,5v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{k-x}{3,5v}$ в первом случае или $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{3,5v}$ во втором случае. Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{3} = \frac{11,5}{4,5}$ и $x_2 = k = \frac{11,5}{2,5}$.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и

начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v .

Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенсальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем, что $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенсальная скорость - это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ r $v = r \frac{d\theta}{dt}$.

$$v_\tau = \sqrt{12,25v^2 - v^2} = \sqrt{11,25}v \quad v r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{11,25}v.$$

6. Решение исходной задачи сводится к решению дифференциального уравнения $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{11,25}}$ с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{11,5}{4,5} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{11,5}{2,5} \end{cases}$$

3 Реализация модели

3.1 Подключение библиотек

Для того, чтобы использовать многие формулы, а также для построения графиков, необходимо подключить определенные библиотеки, в которых эти формулы описаны:

```
import numpy as np
from math import sqrt, pi, tan
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

3.2 Функции, описывающие движение лодки и катера

Для катера береговой охраны:

```
def dx(r, theta):
    dr = r / sqrt(11.25)
    return dr
```

Для лодки браконьеров:

```
def dxdx(t):
    xt = tan(fi) * t
    return xt
```

3.3 Функция перехода из декартовых координат в полярные

```
def cart2pol(x, y):  
    rho = np.sqrt(x**2 + y**2)  
    phi = np.arctan2(y, x)  
    return(rho, phi)
```

3.4 Начальные значения

Начальные условия задаются следующим образом:

```
s = 11.5 # Начальное расстояние от лодки до катера  
fi = 3 * pi / 4
```

```
# Для случая 1  
# Для катера береговой охраны  
r0 = 11.5 / 4.5  
theta0 = 0  
theta = np.arange(theta0, 2 * pi, 0.01)  
# Для лодки браконьеров  
t0 = 0  
t = np.arange(t0, 13, 1)
```

```
# Для случая 2  
# Для катера береговой охраны  
r0 = 11.5 / 2.5  
theta0 = - pi  
theta = np.arange(theta0, 2 * pi, 0.01)  
# Для лодки браконьеров
```

```
t0 = 0  
t = np.arange(t0, 60, 1)
```

3.5 Нахождение промежуточных координат и построение графиков

```
r = odeint(dx, r0, theta)  
  
[rho, phi] = cart2pol(t, dxdx(t))  
  
plt.polar(theta, r)  
plt.polar(phi, rho)
```

3.6 Построенный график

В первом случае при запуске получившейся программы получаем следующий график (рис. 3.1):

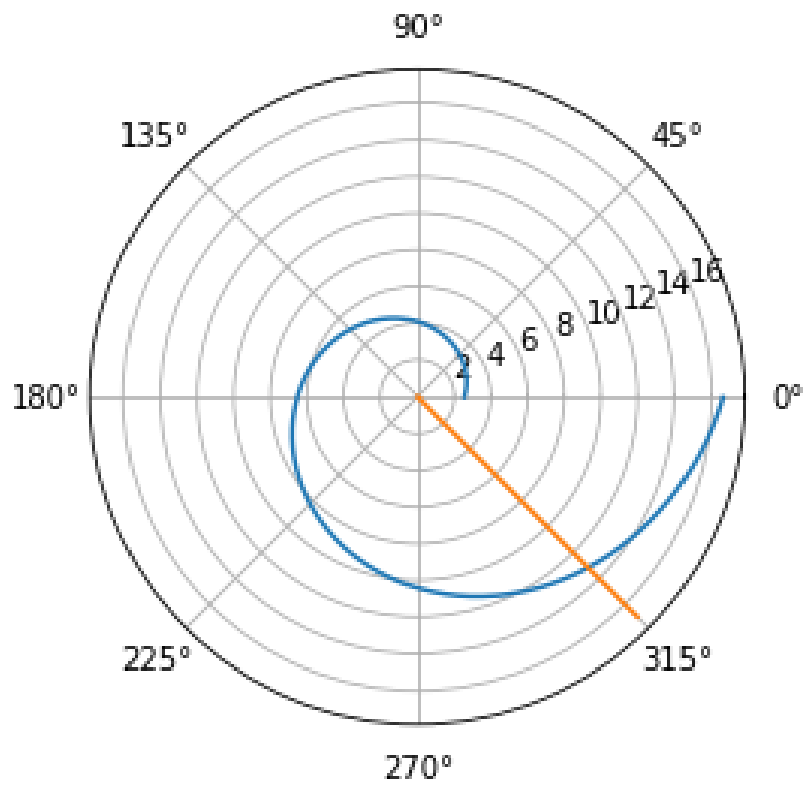


Рис. 3.1: График движения лодки браконьеров и катера береговой охраны при $s = 11.5, n = 3.5, \theta = 0, r_0 = 11.5/4.5$

Во втором случае при запуске получившейся программы получаем следующий график (рис. 3.2):

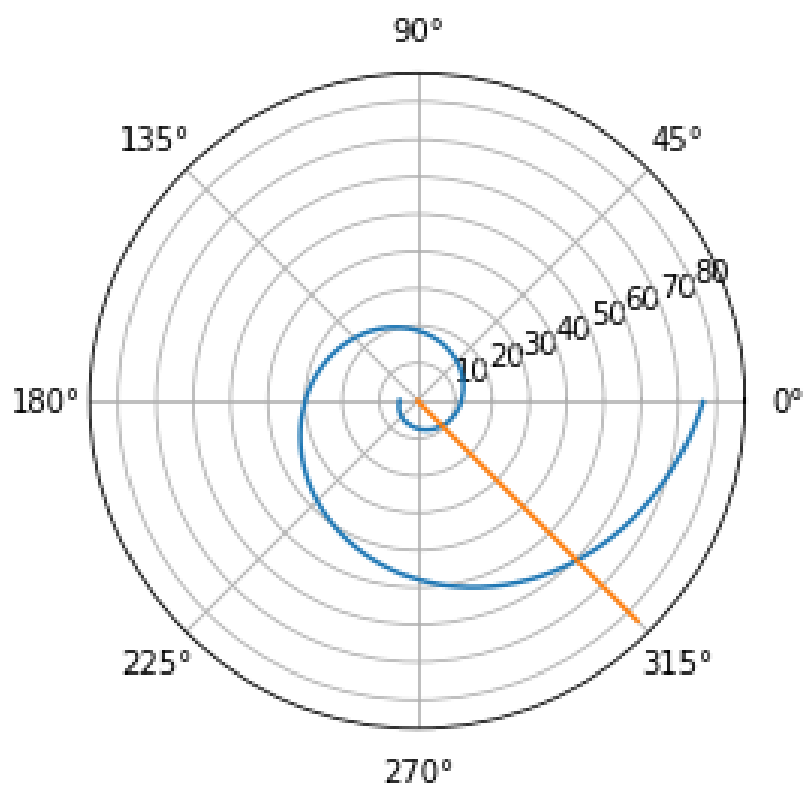


Рис. 3.2: График движения лодки браконьеров и катера береговой охраны при $s = 11.5, n = 3.5, \theta = -\pi, r_0 = 11.5/2.5$

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель задачи о погоне, а также способ ее решения.