Отчет по лабораторной работе №4: Модель гармонических колебаний

дисциплина: Математическое моделирование

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

Список иллюстраций

1 Введение

1.1 Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать ознакомление с моделью гармонических колебаний.

1.2 Задачи работы

Можно выделить следующие задачи четвертой лабораторной работы:
1. изучение модели гармонических колебаний;
2. написать код, при помощи которого можно построить графики фазового портрета для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

1.3 Объект и предмет исследования

Объектом исследования четвертой лабораторной работы можно считать модель гармонических колебаний. Предметами же исследования можно считать случаи, которые рассматриваются в моем варианте лабораторной работе.

2 Модель гармонических колебаний

2.1 Линейный гармонический осциллятор

Линейный гармонический осциллятор - модель, выступающая в качестве основной модели в теории колебаний. Данной моделью можно описать многие системы в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях.

2.2 Простейшая модель гармонических колебаний

Уравнение свободных колабаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где x - переменная, описывающая состояние системы, γ - параметр, характеризующий потери эненргии, ω_0 - свободная частота колебаний, t - время, $\ddot{x} = \frac{\delta^2 x}{\delta t^2}, \dot{x} = \frac{\delta x}{\delta t}$.

Соответственно, данное уравнение - линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, которое является примером линейной динамической системы.

2.3 Модель математического маятника

Простейшую модель математического маятника можно описать так: при отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консеравтивного осциллятора, энергия колебания которого сохранятеся во времени:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где ω_0 высчитывается из второго закона Ньютона.

2.4 Алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

2.5 Фазовый портрет и фазовая траектория

Фазовое пространство (плоскость) системы - пространство, которое определяют независимые переменные x и y, в котором “движется” решение. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы.

Фазовая траектория - гладкая кривая, которая отвечает решению уравнения движения как функции времени.

Фазовый портрет - картина, образованная набором фазовых траекторий.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Формулировка задачи из варианта

Так как в третьей лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле $S_n mod 70 + 1$, где S_n - номер студенческого билета (в моем случае $S_n = 1032182581$):

```
1032182581%70 + 1
```

Соответственно, номер моего варианта - 32.

Вариант 32

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 5.2x = 0$;

2. колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 14\ddot{x} + 0.5x = 0$;

3. колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 13\dot{x} + 0.3x = 0.8 \sin 9t$;

на интервале $t \in [0; 59]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.5, y_0 = -1.5$.

3.2 Реализация алгоритмов

Решение лабораторной работы может быть реализовано на многих языках программирования. В моем случае это язык программирования Python. Далее будет представлен код на этом языке программирования.

3.2.1 Подключение библиотек

Для того, чтобы использовать многие формулы, а также для построения графиков, необходимо подключить определенные библиотеки, в которых эти формулы описаны:

```
import numpy as np
from math import sin, cos, sqrt
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

3.2.2 Функции, описывающие дифференциальные уравнения

Общий вид функции, описывающей правую часть дифференциального уравнения, имеет вид:

```
# Правая часть уравнения f(t)
def F(t):
    f = 0
    return f
```

где строка 'f = 0' имеет следующие значения:

```
# первый случай
f = 0
```

```
    # второй случай
    f = 0

    # третий случай
    f = 0.8 * sin(9 * t)
```

Функция для решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

```
    # Вектор-функция f(t, x)
    # для решения системы дифференциальных уравнений
    # x' = y(t, x)
    # где x - искомый вектор
    def dx(x, t):
        dx1 = x[1]
        dx2 = -w* w* x[0] - g * x[1] - F(t)
        return [dx1, dx2]
```

3.2.3 Построение графика функции

Для удобства вынесем построение графиков в отдельные функции:

```
# Функцкия построения фазового портрета
def draw_f_plot(x, y):
    plt.plot(x, y)
    plt.title("Фазовый портрет")
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('x`')
    plt.grid()
    plt.show()

# Функция построения графика решения
def draw_plot(x, y, t):
```

```
plt.plot(t, x, label = 'x')
plt.plot(t, y, label = 'x`')
plt.title("Решение дифференциального уравнения")
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

3.2.4 Начальные значения

В задаче присутствуют как общие для всех трех случаев начальные значения, так и локальные. Далее будут приведены значения, общие для всех трех случаев:

```
t0 = 0 # Начальный момент времени
tmax = 59 # Конечный момент времени
dt = 0.05 # Шаг изменения времени

# Интервал, в котором решается задача
t = np.arange(t0, tmax, dt)

# Начальные условия
# x(t0) = x0
x0 = 0.5
y0 = -1.5

# Вектор начальных условий
v0 = np.array([x0, y0])
```

Также в задаче присутствуют несколько начальных значений, различных для трех случаев. В общем виде они задаются в программе следующим образом:

```
# Параметры осциллятора
# x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
# w - частота
# g - затухание
w = sqrt(1)
g = 0
```

где:

```
# первый случай
w = sqrt(5.2)
g = 0

# второй случай
w = sqrt(0.5)
g = 14

# третий случай
w = sqrt(0.3)
g = 13
```

3.2.5 Решение диффеереренциального уравнения и построение графика

```
# Решаем дифференциальные уравнения
# с начальным условием x(t0) = x0
# на интервале t
# с правой частью, заданной y
# и записываем решение в матрицу x
x = odeint(dx, v0, t)
```

```
# Переписываем отдельно
# x в xpoint, x' в ypoint
xpoint = [elem[0] for elem in x]
ypoint = [elem[1] for elem in x]

# Построим фазовый портрет
draw_plot(xpoint, ypoint)

# Построим график решений
draw_plot(xpoint, ypoint, t)
```

3.3 Построенные графики

3.3.1 Первый случай

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 5.2x = 0$ имеют следующий фазовый портрет (рис. 3.1) и график решений уравнения (рис. 3.2):

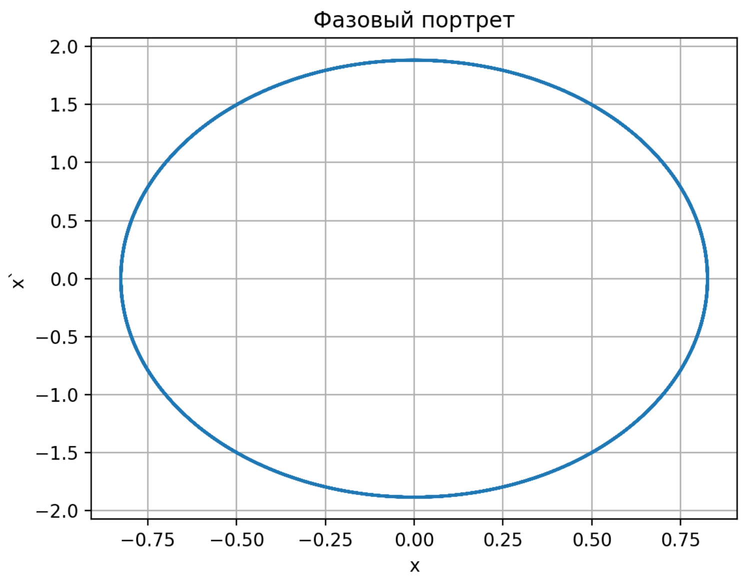

Рис. 3.1: Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 5.2$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

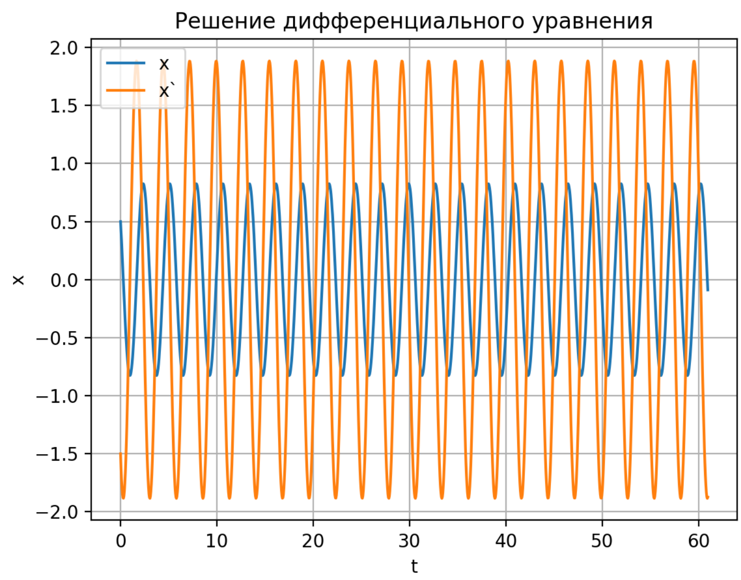

Рис. 3.2: График решений уравнения гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 5.2$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

3.3.2 Второй случай

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 14\ddot{x} + 0.5x = 0$ имеют следующий фазовый портрет (рис. 3.3) и график решений уравнения (рис. 3.4):

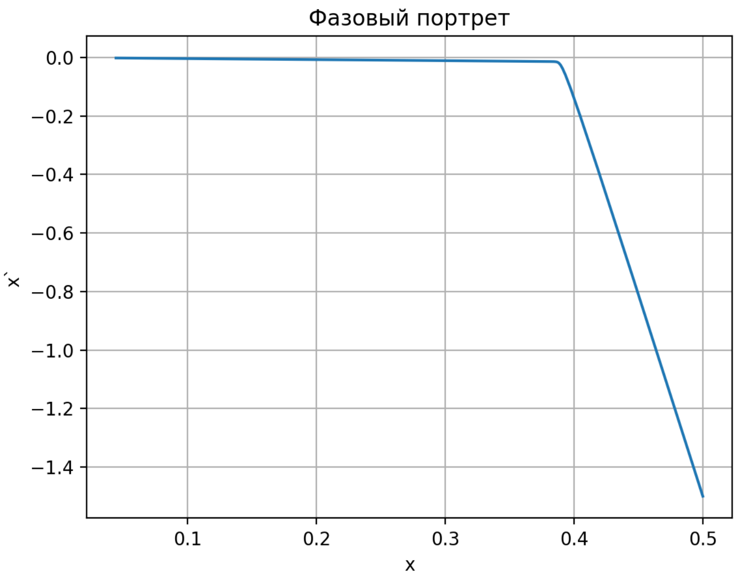

Рис. 3.3: Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 0.5$, с параметром, характеризующим потери энергии $\gamma = 14$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

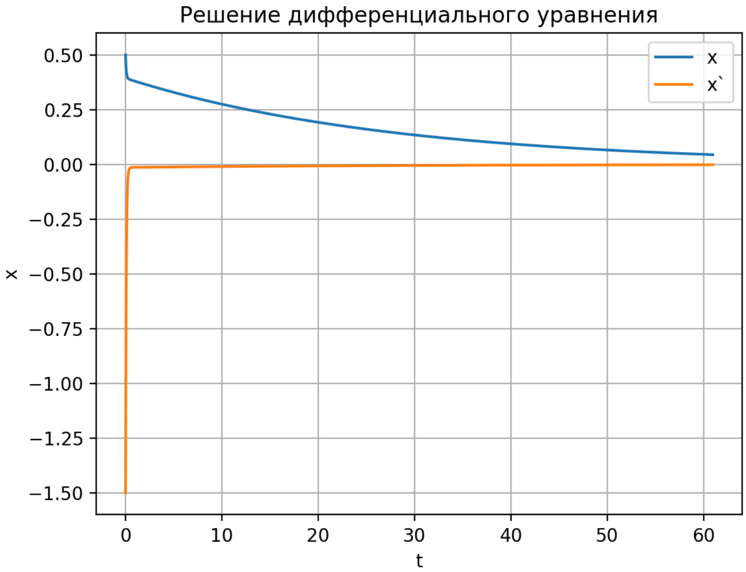

Рис. 3.4: График решений уравнения гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 0.5$, с параметром, характеризующим потери энергии $\gamma = 14$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

3.3.3 Третий случай

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 13\dot{x} + 0.3x = 0.8 \sin 9t$ имеют следующий фазовый портрет (рис. 3.5) и график решений уравнения (рис. 3.6):

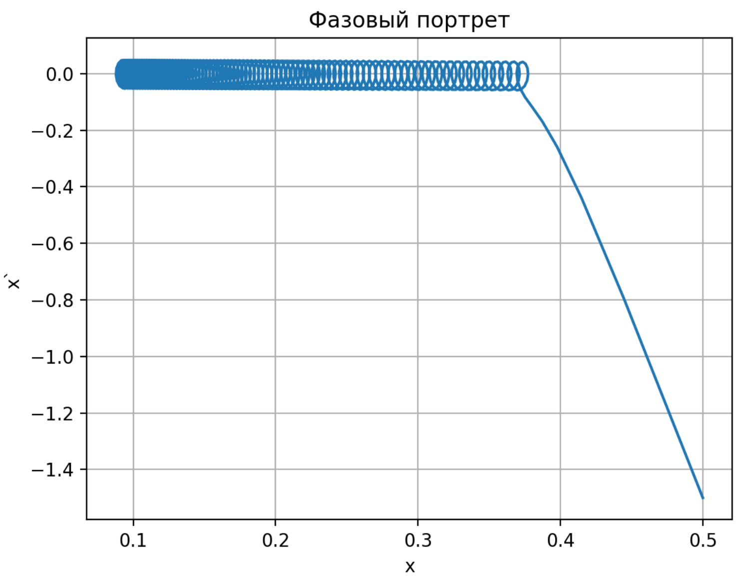

Рис. 3.5: Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиям, под действием внешней силы $\vec{F} = 0.8\sin 9t$, с собственной частотой колебания $\omega = 0.3$, с параметром, характеризующим потери энергии $\gamma = 13$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

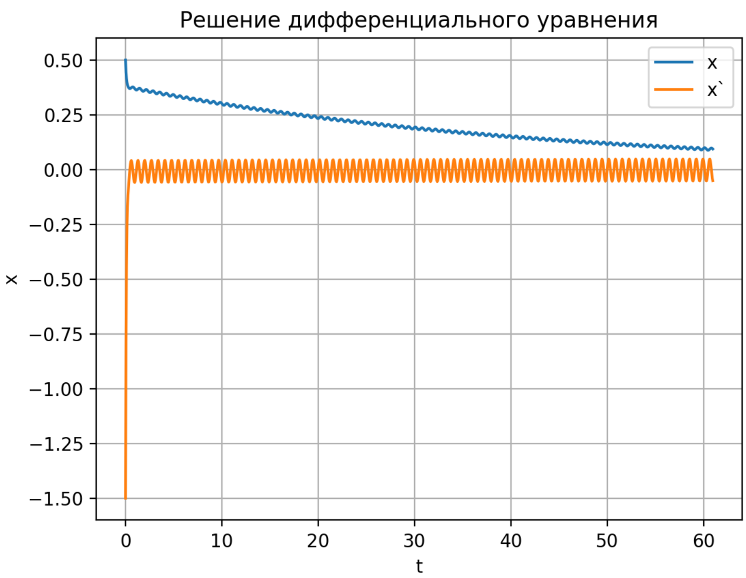

Рис. 3.6: График решений уравнения гармонического осциллятора с затуханиям, под действием внешней силы $\vec{F} = 0.8 \sin 9t$, с собственной частотой колебания $\omega = 0.3$, с параметром, характеризующим потери энергии $\gamma = 13$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с простейшими моделями гармонического осциллятора, а также построены фазовые портреты моделей.