Отчет по лабораторной работе №6: Задача об эпидемии

дисциплина: Математическое моделирование

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Введение

1.1 Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать ознакомление с задачей об эпидемии.

1.2 Задачи

Можно выделить три основные задачи данной лабораторной работы:
1. изучение теоретической части;
2. реализация модели на языке программирования python.

1.3 Объект и предмет исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе является задача об эпидемии, а предметом исследования - задача, описанная в моем варианте лабораторной работы.

2 Задача об эпидеми

2.1 Простейшая модель эпидемии

Предположим, что существует некая популяция, состоящая из N особей, которая подразделяется на три группы:
1. восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи - $S(t)$;
2. число инфицированных особей, которые также являются распространителями инфекции - $I(t)$;
3. здоровые особи с иммунитетом к болезни - $R(t)$.
До того, как число заболевших не превышает критического значения I', считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I'$, тогда инфицированные способны заражать восприимчивых к болезни особей.
Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} \alpha S, \text{если } I(t) > I' \\ 0, \text{если } I(t) \geq I' \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболеет, сама становится инфецированной, то скорость изменения числа инфецированных особей представляет разность за еденицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, \text{если } I(t) > I' \\ -\beta I, \text{если } I(t) \geq I' \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей и иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \geq I'$ и $I(0) > I'$.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Формулировка задачи из варианта

Так как в шестой лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле $S_n mod 70 + 1$, где S_n - номер студенческого билета (в моем случае $S_n = 1032182581$):

```
1032182581%70 + 1
```

Соответственно, номер моего варианта - 32.

Вариант 32

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 11900$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 290$, а число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 52$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. $I(0) \geq I'$

2. $I(0) > I'$

3.2 Реализация алгоритмов

3.2.1 Подключение библиотек

Для того, чтобы использовать многие формулы, а также для построения графиков, необходимо подключить определенные библиотеки, в которых эти формулы описаны:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

3.2.2 Функция, описывающая дифференциальные уравнения

Функция для решение системы дифференциальных уравнений для первого случая имеет вид:

```
# I(0) <= I
def dy_more(x, t):
    dy1 = 0
    dy2 = - beta * x[1]
    dy3 = beta * x[1]
    return [dy1, dy2, dy3]
```

для второго случая имеет вид:

```
# I(0) > I
def dy_less(x, t):
    dy1 = alpha * x[0]
    dy2 = alpha * x[0] - beta * x[1]
    dy3 = beta * x[1]
    return [dy1, dy2, dy3]
```

3.2.3 Построение графика функции

Для удобства вынесем построение графика в отдельную функцию:

```
def draw_plot(S, I, R, t):
    plt.plot(t, S, label = 'S(t)')
    plt.plot(t, I, label = 'I(t)')
    plt.plot(t, R, label = 'R(t)')
    plt.title("Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп")
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

3.2.4 Начальные значения

Начальные условия задаются следующим образом:

```
alpha = 0.01 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.02 # коэффициент выздоровления
N = 11900 # общая численность популяции
I0 = 290 # количество инфицированных особей в t0 = 0
R0 = 52 # количество здоровых особей с иммунитетом в t0 = 0
S0 = N - I0 - R0 # количество восприимчивых к болезни особей в t0 = 0

# временной промежуток
t0 = 0
t = np.arange(0, 200, 0.01)

# вектор начальных значений
y0 = np.array([S0, I0, R0])
```

3.2.5 Решение диффееренциального уравнения и построение графиков

```
y = odeint(dy_more, y0, t)

S = [elem[0] for elem in y]
I = [elem[1] for elem in y]
R = [elem[2] for elem in y]

draw_plot(S, I, R, t)

y = odeint(dy_less, y0, t)

S = [elem[0] for elem in y]
I = [elem[1] for elem in y]
R = [elem[2] for elem in y]

draw_plot(S, I, R, t)
```

3.3 Построенные графики

При запуске получившейся программы получаем следующие графики (рис. 3.1, рис. 3.2):

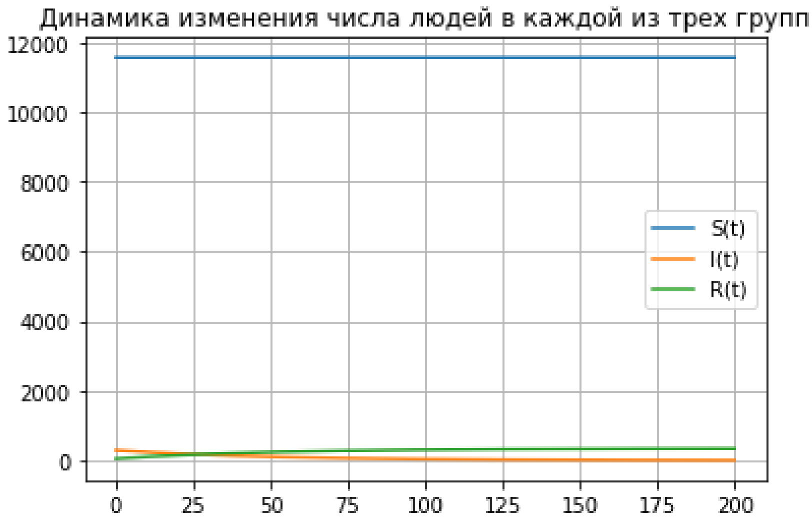

Рис. 3.1: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I(t) \geq I'$, с начальными условиями $I_0 = 290$, $R_0 = 53$, $S_0 = 11610$

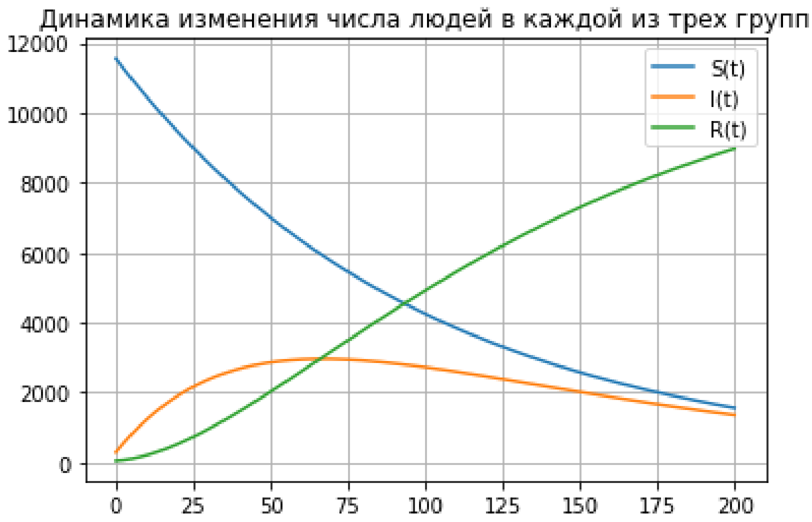

Рис. 3.2: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I(t) > I'$, с начальными условиями $I_0 = 290$, $R_0 = 53$, $S_0 = 11610$

4 Вывод

При выполнении лабораторной работы мною были усвоены основные прицsmåпы задачи об эпидемии, а также проведена реализация данной модели в рамках моего варианта лабораторной работы.