

Доклад: Центральная предельная теорема

дисциплина: Математическое моделирование

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

1	Введение	3
2	Центральная предельная теорема	4
3	Выводы из центральной предельной теоремы	6
4	Заключение	9
5	Список литературы	10

1 Введение

Практика изучения случайных явлений показывает, что хотя результаты отдельных наблюдений, даже проведенных в абсолютно одинаковых условиях, могут сильно отличаться, средние же результаты для достаточно большого числа наблюдений устойчивы и слабо зависят от результатов отдельных наблюдений. Теоретическим обоснованием этого замечательного свойства случайных явлений является закон больших чисел. Закон больших чисел утверждает, что среднее арифметическое большого числа случайных величин ведет себя как среднее арифметическое их математических ожиданий. Если же обобщить, то можно сформулировать такой вывод: совместное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая.

Закон больших чисел дополняет центральная предельная теорема. Она, как и закон больших чисел, имеет ряд форм. Во всех формах закона больших чисел устанавливается факт сходимости по вероятности каких-то случайных величин к постоянным, неслучайным при увеличении числа опытов n или числа наблюдаемых случайных величин. А согласно центральной предельной теореме достаточно большая сумма сравнительно малых случайных величин ведет себя как нормальная случайная величина.

Различные формы закона больших чисел вместе с различными вариантами центральной предельной теоремы образуют совокупность так называемых предельных теорем теории вероятностей и имеют большой практический смысл, так как составляют теоретическую основу математической статистики.

2 Центральная предельная теорема

Центральные предельные теоремы - класс предельных теорем, определяющих условия возникновения нормального распределения (закона Гаусса). Нормальное распределение — наиболее распространенное в природе распределение непрерывных величин, возникающее тогда, когда суммируется много независимых (или слабо зависимых) случайных величин, сравнимых по порядку своего влияния на рассеивание суммы. Центральная предельная теорема в различных ее формах устанавливает условия, накладываемые на распределения образующих сумму случайных слагаемых X_1, X_2, \dots, X_n , при которых возникает нормальное распределение и нарушение которых ведет к распределению, отличному от нормального. Чем жестче эти условия, тем легче доказывается теорема; чем они шире, тем труднее доказательство.

Центральная предельная теорема позволяет сформулировать статистические критерии, основанные на характеристиках нормальной кривой и применять их даже в тех случаях, когда совокупность, из которой взята выборка, не распределена нормально. В этом случае оценивание будет проводится с погрешностью, которая будет уменьшаться при увеличении количества данных в выборке.

Наиболее полно эта теорема раскрыта в работах П.Л.Чебышева и А.М.Ляпунова. А.М.Ляпунов доказал, что если выборки извлечены случайно из любой совокупности, то выборочные средние, вычисленные для этих данных, имеют распределение, которое стремится к нормальному распределению при увеличении объема выборки при условии, что совокупность обладает

конечной медианой и ограниченной дисперсией. Моделирование, которое проводилось для подтверждения этой теоремы, показало, что выборочные средние, даже если исходные данные имели любое из всех возможных распределений, при увеличении объема выборки будут стремиться иметь нормальное распределение.

Предположим, берется выборка из U-образного распределения. Большая часть наблюдений может быть получена из двух краев распределения, в этом случае при расчете среднеарифметического значения, большие значения погашаются низкими значениями и среднеарифметическое значение находится близко к центру распределения. Если этот эксперимент повторить тысячу раз, то окажется, что выборочные средние будут располагаться всегда ближе к центру U-образного распределения и их распределение будет нормальным. Так как распределение выборочных средних значений стремится к нормальному распределению, то его можно описать двумя статистиками – средним и дисперсией.

3 Выводы из центральной предельной теоремы

Как и любая основополагающая теорема, центральная предельная теорема имеет выводы, которые являются определяющими в работе с ней. Так, ЦПТ имеет три вывода, необходимые для корректного моделирования процессов.

1. Среднее значение выборочных средних при увеличении количества данных в выборке будет стремиться к истинному среднему, то есть $\chi_{\bar{x}} = \mu$.

П.Л.Чебышев первый вывод теоремы формулирует таким образом, что при достаточно большом числе независимых наблюдений можно с вероятностью близкой к 1 утверждать, что отклонение средней выборочных средних от истинного среднего будет сколь угодно малой.

2. Дисперсия выборочных средних при увеличении количества данных в выборке стремится к дисперсии совокупности, деленной на объем выборки.

Стандартное отклонение выборочных средних значений принято называть стандартной ошибкой среднего или просто стандартной ошибкой. Она описывает изменчивость, которую можно ожидать при повторных случайных отборах из той же совокупности. П.Л.Чебышев доказал, что величина ошибки выборочного наблюдения или погрешности не должна превышать стандартную ошибку среднего, определяемую по формуле:

$$S_E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

,

где S_E – стандартная ошибка, σ – стандартное отклонение генеральной совокупности, n – количество данных в выборке.

Величина стандартной ошибки прямо пропорционально зависит от истинной дисперсии и обратно пропорционально зависит от количества данных в выборке, то есть, увеличивая количество данных наблюдения в выборке, можно уменьшить погрешность определения такого параметра как среднее.

3. Доверительный интервал выборки определяется по следующей формуле:

$$\delta = \frac{t(n, p)\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t(n, p)$ – число определяется по специальным таблицам критических точек распределения Стьюдента.

Доверительный интервал (интервал доверия) – расстояние между границами, внутри которых с большой вероятностью может заключаться истинное среднее значение генеральной совокупности.

Так как распределение выборочных средних при большом числе независимых наблюдений стремится к нормальному распределению, то и для определения того, с какой вероятностью истинное среднее может находиться внутри доверительного интервала, также можно применить правило трех σ (правило трех стандартных отклонений). Так как границы интервала доверия определяется плюсом и минусом половины стандартной ошибки, то можно сказать, что μ находится в доверительном интервале с вероятностью близкой к 68.3%. Если увеличить доверительный интервал и определить его плюсом и минусом из двух стандартных отклонений от среднего выборочных средних, то истинное среднее находится в интервале доверия с большей вероятностью

равной 95.4%. Чем больше пределы, в которых допускается возможная ошибка, тем с большей вероятностью мы судим о ее величине.

4 Заключение

Центральная предельная теорема еще долго будет являться одной из важнейших теорем теории вероятности и математической статистики. Ее многозадачность и фундаментальность позволяют оценивать выборки любого вида. Более того, у многих принципов математической статистики в основе лежит именно центральная предельная теорема.

Замечательным является то, что даже если распределение выборки не является нормальным, использование центральной предельной теоремы все равно возможно, но с погрешностью, которую можно уменьшить с увеличением значений выборки.

Более того, подсчет доверительных интервалов дает высокую точность оценке вероятностных событий по значениям выборки. Это значит, что после анализа всех данных, мы можем быть уверены в том или ином событии на очень высоком уровне.

5 Список литературы

1. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Е. А. Трофимова, Н. В. Кисляк, Д. В. Гилёв; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой]; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 160 с.
2. Центральная предельная теорема и ее практическое применение - <https://helpiks.org/9-64316.html>
3. Central limit theorem - https://en.wikipedia.org/wiki/Central_limit_theorem
4. Математическая статистика: учеб. пособие /Д.К. Агишева, С.А. Зотова, Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград, 2010. – 159 с.: ил.