Отчет по лабораторной работе №2: Задача о погоне

дисциплина: Математическое моделирование

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Введение

1.1 Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать ознакомление с простейшими моделями боевых действий - моделями Ланчестера.

1.2 Задачи работы

Можно выделить следующие задачи третьей лабораторной работы:
1. изучение моделей Ланчестера для трех случаев ведения боевых действий;
2. написать код, при помощи которого можно построить графики изменения численности войск армий для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

1.3 Объект и предмет исследования

Объектом исследования третьей лабораторной работы можно считать модели Ланчестера. Предметами же исследования можно считать случаи, которые рассматриваются в моем варианте лабораторной работе.

2 Модель боевых действий

В общем случае главной характеристикой соперников в модели боевых действий являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

2.1 Боевые действия между регулярными войсками.

Численность регулярных войск определяется следующими факторами: - скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);

- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);

- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

Модель боевых действий описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

где

$a(t), h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери, не связаннын с боевыми действиями,

$b(t), c(t)$ - коэффиценты, указывающие на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно,

$P(t), Q(t)$ - функции, учитывающие возможность подхода подкрепления к войскам X и У в течение одного дня.

Данные обозначения будут использованы в ходе описания лабораторной работы.

2.2 Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Модель усложняется, в борьбу добавляются партизанские отряды. Темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

2.3 Боевые действия между партизанскими отрядами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

2.4 Модель боевых действий между регулярными войсками с постоянными коэффициентами

Особенности модели: - коэффициенты $b(t), c(t)$ постоянны; - потери, не связанные с боевыми действиями, не учитываются; - не учитывается возможность подхода подкрепления; - x, y - численность противостоящих армий.

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

Точное решение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$cxdx = bydy, cx^2 - by^2 = C$

При:

- $C < 0$ - армия y выигрывает;
- $C > 0$ - армия x выигрывает;
- $C = 0$ - истребление обеих армий (требуется бесконечно большое время).

Вывод модели: для борьбы с вдвое большей армией нужно в 4 раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т.д..

2.5 Модель боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов с постоянными коэффициентами

Модель принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -b(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) \end{cases},$$

где

$\frac{dx}{dt}$ - темп изменения численности рнегулярных войск,

$\frac{dy}{dt}$ - темп изменения численности партизанских войск.

При заданных начальных условиях уравнение $\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0$ имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$$

При:

- $C_1 < 0$ - партизаны побеждают;
- $C_1 > 0$ - регулярная армия выигрывает;
- $C_1 = 0$ - истребление обоих войск (требуется бесконечно большое время).

Чтобы партизаны одержали победу, необходимо увеличить коэффицент c и повысить начальную численность. Это увеличение должно расти пропорционально второй степени $x(0)$ (начальная численность регулярных войск).

Вывод: регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Формулировка задачи из варианта

Так как в третьей лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле $S_n mod 70 + 1$, где S_n - номер студенческого билета (в моем случае $S_n = 1032182581$):

```
1032182581%70 + 1
```

Соответственно, номер моего варианта - 32.

Вариант 32

Между страной X и страной Y идет война. Численности состава войск исчисляются от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 61000 человек, а в распоряжении страны Y армия численностью 45000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэфициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывными функциями.

Постройте графики изменения численности войск армии

для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dt} = -0.22x(t) - 0.82y(t) + 2\sin(4t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.45x(t) - 0.67y(t) + 2\cos(4t)$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0.28x(t) - 0.83x(t)y(t) + 1.5\sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.31x(t)y(t) - 0.75y(t) + 1.5\cos(t)$$

3.2 Реализация алгоритмов

3.2.1 Реализация модели боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dt} = -0.22x(t) - 0.82y(t) + 2\sin(4t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.45x(t) - 0.67y(t) + 2\cos(4t)$$

Инициализация библиотек:

```
import numpy as np
from math import sin, cos
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Начальные значения:

```python
x0 = 61000 # численность первой армии
y0 = 45000 # численность второй армии

v0 = np.array([x0, y0]) # вектор начальных условий
```

Временные точки:

```python
t0 = 0 # начальный момент времени
tmax = 1 # предельный момент времени
dt =0.05 # шаг изменения времени

t = np.arange(t0, tmax, dt) # массив значений времени
```

Константы:

```python
a = 0.22 # степень влияния различных факторов на потери армии X
b = 0.82 # эффективность боевых действий армии Y
c = 0.45 # эффективность боевых действий армии X
h = 0.67 # степень влияния различных факторов на потери армии Y
```

Функции подсчета возможности подхода подкрепления к армиям:

```python
def P(t): # возможность подхода подкрепления к армии X
    p = 2*sin(4*t)
    return p

def Q(t): # возможность подхода подкрепления к армии Y
    q = 2*cos(4*t)
    return q
```

Функция системы дифференциальных уравнений:

```
def syst(y, t): # система дифференциальных уравнений
    # изменение численности армии X
    dy1 = - a*y[0] - b*y[1] + P(t)
    # изменение численности армии Y
    dy2 = - c*y[0] - h*y[1] + Q(t)
    return [dy1, dy2]
```

Решение системы ОДУ:

```
y = odeint(syst, v0, t) # решение систесы

xpoint = [elem[0] for elem in y] # решение ОДУ для армии X
ypoint = [elem[1] for elem in y] # решение ОДУ для армии Y
```

Построение графиков:

```
plt.title("Model 1") # добавление названия графика
# построение графика изменения численности армии X
plt.plot(t, xpoint, label = 'Army X')
# построение графика изменения численности армии Y
plt.plot(t, ypoint, label = 'Army Y')

plt.xlabel('time') # добавление названия оси абцисс
plt.ylabel('Count of Army') # добавление названия оси ординат
plt.legend() # добавление легенды графика
plt.grid() # добавление координатной сетки
plt.show() # отображение графика
```

После выполнения программы выведется следующий график (рис. 3.1):

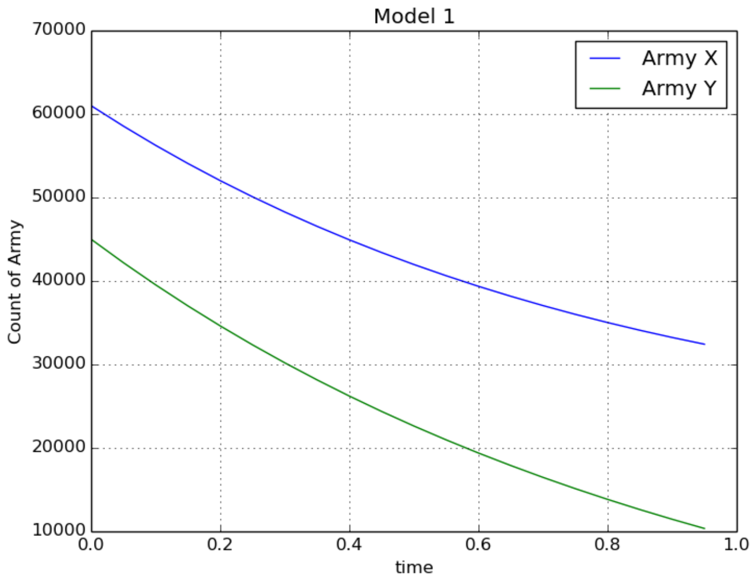

Рис. 3.1: Изменение численности армий X и Y в процессе боевых действий при условии участия только регулярных войск (с подкреплением)

3.2.2 Реализация модели ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0.28x(t) - 0.83x(t)y(t) + 1.5\sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.31x(t)y(t) - 0.75y(t) + 1.5\cos(t)$$

Инициализация библиотек:

```
import numpy as np
from math import sin, cos
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Начальные значения:

```
x0 = 61000 # численность первой армии
y0 = 45000 # численность второй армии
```

```
v0 = np.array([x0, y0]) # вектор начальных условий
```

Временные точки:

```
t0 = 0 # начальный момент времени
tmax = 1 # предельный момент времени
dt =0.05 # шаг изменения времени

t = np.arange(t0, tmax, dt) # массив значений времени
```

Константы:

```
a = 0.28 # степень влияния различных факторов на потери армии X
b = 0.83 # эффективность боевых действий армии Y
c = 0.31 # эффективность боевых действий армии X
h = 0.75 # степень влияния различных факторов на потери армии Y
```

Функции подсчета возможности подхода подкрепления к армиям:

```
def P(t): # возможность подхода подкрепления к армии X
    p = 1.5*sin(t)
    return p

def Q(t): # возможность подхода подкрепления к армии Y
    q = 1.5*cos(t)
    return q
```

Функция системы дифференциальных уравнений:

```
def syst(y, t): # система дифференциальных уравнений
    # изменение численности армии X
    dy1 = - a*y[0] - b*y[0]*y[1] + P(t)
```

```
    # изменение численности армии Y
    dy2 = - c*y[0]*y[1] - h*y[1] + Q(t)
    return [dy1, dy2]
```

Решение системы ОДУ:

```
y = odeint(syst, v0, t) # решение систесы

xpoint = [elem[0] for elem in y] # решение ОДУ для армии X
ypoint = [elem[1] for elem in y] # решение ОДУ для армии Y
```

Построение графиков:

```
plt.title("Model 2") # добавление названия графика
# построение графика изменения численности армии X
plt.plot(t, xpoint, label = 'Army X')
# построение графика изменения численности армии Y
plt.plot(t, ypoint, label = 'Army Y')

plt.xlabel('time') # добавление названия оси абцисс
plt.ylabel('Count of Army') # добавление названия оси ординат
plt.legend() # добавление легенды графика
plt.grid() # добавление координатной сетки
plt.show() # отображение графика
```

После выполнения программы выведется следующий график (рис. 3.2):

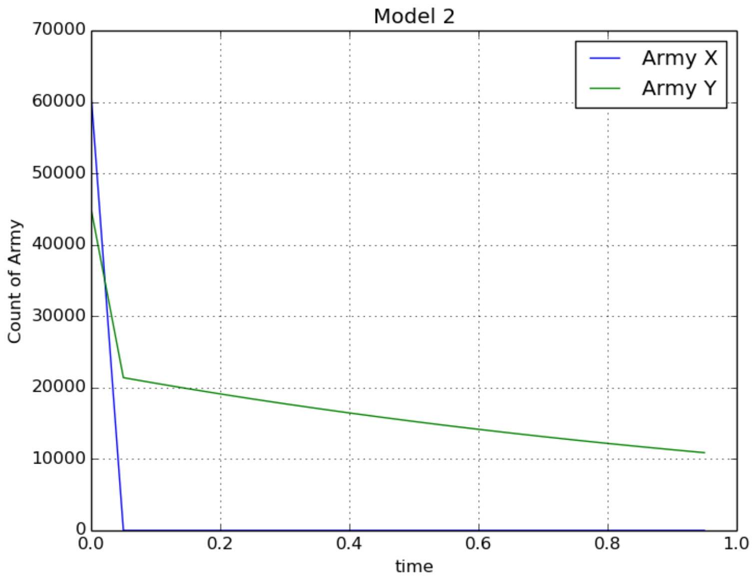

Рис. 3.2: Изменение численности армий X и Y в процессе боевых действий при условии участия регулярных войск и партизанских отрядов (с подкреплением)

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с простейшими моделями боевых действий.

По построенным графикам моделей можно сделать вывод, что при участии партизанских отрядов, армия Y с большой вероятностью выйграет битву, в то время как армия X потерпит сокрушительное поражение. Если же партизанскии отряды не будут принимать участие в битве, то армия Y с большей вероятностью потерпит поражение, нежели чем армия X.