Отчет по лабораторной работе №5: Модель хищник - жертва

дисциплина: Математическое моделирование

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

Список иллюстраций

1 Введение

1.1 Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать построение математической модели хищник - жертва.

1.2 Задачи работы

Можно выделить следующие задачи пятой лабораторной работы:

1. изучение модели хищник - жертва;
2. написать код, при помощи которого можно построить графики фазового портрета для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

1.3 Объект и предмет исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе является модель хищник - жертва, а предметом исследования - случай, представленный в моем варианте лабораторной работы.

2 Модель хищник - жертва

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - *модель Лотки-Вольтерры*. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени;
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника несущественны;
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

В общем виде математическую модель можно записать так:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases},$$

где:

- x - число жертв;
- y - число хищников;

- a - коэффициент, описывающий скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников;
- c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв.

Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

2.1 Стационарное состояние

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{d}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

2.2 Малое изменение модели

При малом изменении модели

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y) \\ \frac{dx}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

прибавленые к правым частям малые члены, учитывают конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв и т.п., а вывод о периодичности, справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии:

1. Равновесное состояние устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

2. Система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию.

3. В системе с неустойчивым стационарным состоянием с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния приводит не к малым колебаниям около этого состояния, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения)

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Формулировка задачи из варианта

Так как в третьей лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле $S_n mod 70 + 1$, где S_n - номер студенческого билета (в моем случае $S_n = 1032182581$):

```
1032182581%70 + 1
```

Соответственно, номер моего варианта - 32.

Вариант 32

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.25x(t) + 0.025x(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = 0.45y(t) - 0.045x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 11$. Найдите стационарное состояние системы.

3.2 Реализация алгоритмов

Решение лабораторной работы может быть реализовано на многих языках программирования. В моем случае это язык программирования Python. Далее будет представлен код на этом языке программирования.

3.2.1 Подключение библиотек

Для того, чтобы использовать многие формулы, а также для построения графиков, необходимо подключить определенные библиотеки, в которых эти формулы описаны:

```
import numpy as np
from math import sin, cos, sqrt
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

3.2.2 Функция, описывающая дифференциальные уравнения

Функция для решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

```
def dx(x, t):
  dx1 = - a * x[0] + c * x[0] * x[1]
  dx2 = b * x[1] - d * x[0] * x[1]
  return [dx1, dx2]
```

3.2.3 Построение графика функции

Для удобства вынесем построение графиков в отдельные функции:

```
# Функцкия построения фазового портрета
def draw_plot(x, y, xs, ys):
  plt.plot(x, y, label = 'Зависимость численности популяций')
  plt.plot(xs, ys, marker='o', label = 'Стационарная точка')
  plt.title("Фазовый портрет")
  plt.xlabel('y')
```

```
    plt.ylabel('x')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

# Функция построения графика решения
def draw_plot(x, y, t):
    plt.plot(t, x, label = 'Популяция хищников')
    plt.plot(t, y, label = 'Популяция жертв')
    plt.title("Решение дифференциального уравнения")
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('x(t), y(t)')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

3.2.4 Начальные значения

Начальные условия задаются следующим образом:

```
a = 0.25; # коэффициент естественной смертности хищников
b = 0.025; # коэффициент естественного прироста жертв
c = 0.45; # коэффициент увеличения числа хищников
d = 0.045; # коэффициент смертности жертв

# Интервал, в котором решается задача
t = np.arange(0, 400, 0.1)

# Начальные условия x и y
# (популяция хищников и популяция жертв)
v0 = np.array([8, 11])
```

3.2.5 Решение диффееренциального уравнения и построение графиков

```
# Решаем дифференциальные уравнения
x = odeint(dx, v0, t)

# Переписываем отдельно
# y в xpoint, x в ypoint
xpoint = [elem[0] for elem in x]
ypoint = [elem[1] for elem in x]

# Нахождение стационарной точки системы
xs = c/d
ys = a/b

# Построим фазовый портрет
draw_fplot(xpoint, ypoint, xs, ys)

# Построим график решений
draw_plot(xpoint, ypoint, t)
```

3.3 Построенные графики

При запуске получившейся программы получаем следующие графики, (рис. 3.1, рис. 3.2):

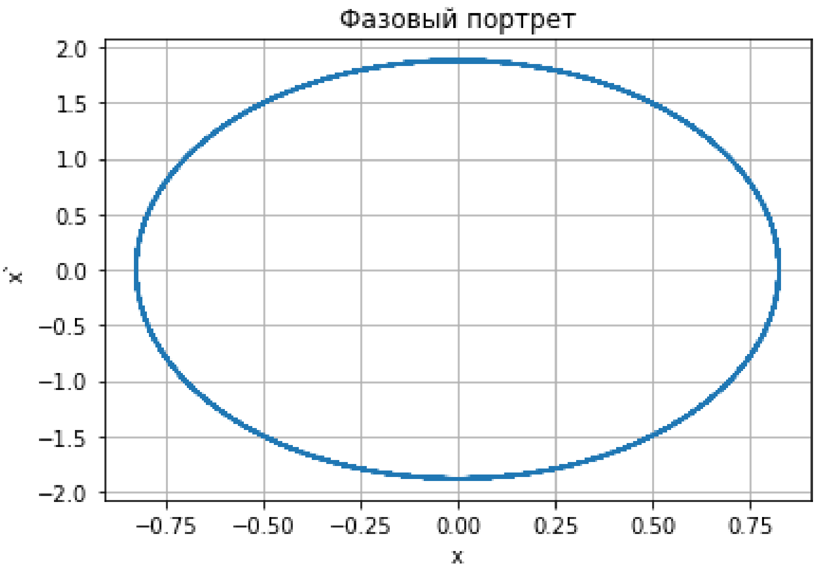

Рис. 3.1: Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями $y = 11, x = 8$

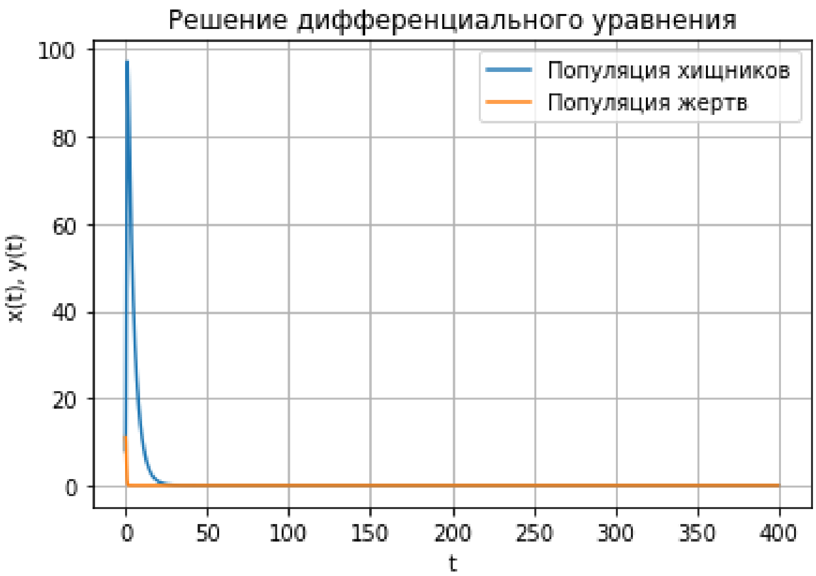

Рис. 3.2: Колебания изменения числа популяций хищников и жертв

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с моделью хищник - жертва, а также построены фазовый портрет, стационарная точка и график решений для заданных параметров модели.