

Отчет по лабораторной работе №8: Модель конкуренции двух фирм

дисциплина: Математическое моделирование

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

1	Введение	4
1.1	Цель работы	4
1.2	Задание	4
1.3	Объект и предмет исследования	4
2	Модель конкуренции двух фирм	5
2.1	Модель одной фирмы	5
3	Выполнение лабораторной работы	9
3.1	Формулировка задачи из варианта	9
3.2	Реализация алгоритмов	11
3.2.1	Подключение библиотек	11
3.2.2	Начальные значения	11
3.2.3	Функция, описывающая дифференциальные уравнения . .	13
3.2.4	Решение дифференциального уравнения и построение графиков	13
3.3	Построенные графики	14
3.3.1	Случай 1	14
3.3.2	Случай 2	14
4	Вывод	16

Список иллюстраций

3.1	График динамики изменения оборотных средств двух фирм . . .	14
3.2	График динамики изменения оборотных средств двух фирм . . .	15

1 Введение

1.1 Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать построение математической модели конкуренции двух фирм.

1.2 Задание

Можно выделить две основные задачи данной лабораторной работы:

1. изучить теоретическую часть модели конкуренции двух фирм;
2. реализовать частные случаи модели из моего варианта на одном из представленных языков программирования.

1.3 Объект и предмет исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе является модель, описывающая конкуренцию двух фирм, а предметом исследования - частные случаи, представленные в моем варианте лабораторной работы.

2 Модель конкуренции двух фирм

2.1 Модель одной фирмы

Модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют. Обозначим:

N - число потребителей производимого продукта;

S - доходы потребителей данного продукта (считаем, что доходы всех потребителей одинаковы);

M - оборотные средства предприятия;

τ - длительность производственного цикла;

p - рыночная цена товара;

\tilde{p} - себестоимость продукта;

δ - доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек;

k - постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k \frac{p}{S} = q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}} \right)$$

где q - максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени, p_{cr} - критическая стоимость продукта. Эта функция падает при

$p = p_{cr}$. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa \quad (2.1)$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})) \quad (2.2)$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ . При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво. В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0 \quad (2.3)$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq}) \quad (2.4)$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa \quad (2.5)$$

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы. В

этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\frac{dM_1}{dt} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_1 \frac{dM_2}{dt} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_2 \quad (2.6)$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины N_1 и N_2 – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы. Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене p . Тогда

$$\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \quad (2.7)$$

где \tilde{p}_1 и \tilde{p}_2 – себестоимости товаров в первой и второй фирме. С учетом (10) представим (11) в виде

$$\frac{dM_1}{dt} = -\frac{M_1}{\tau_1} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}\right) - \kappa_1 \frac{dM_2}{dt} = -\frac{M_2}{\tau_2} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}\right) - \kappa_2 \quad (2.8)$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma \left(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - N q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \right) \quad (2.9)$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим

$$p = p_{cr} \left(1 - \frac{1}{Nq} \left(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} \right) \right) \quad (2.10)$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\frac{dM_1}{dt} = c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \frac{dM_2}{dt} = c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2 \quad (2.11)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}, c_2 = \frac{p_{cr} \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки (κ_1, κ_2) пренебрежимо малы. И введем нормировку $t = c_1 \theta$. Получим следующую систему:

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \quad (2.12)$$

Пусть помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Формулировка задачи из варианта

Так как в седьмой лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле $S_n \bmod 70 + 1$, где S_n - номер студенческого билета (в моем случае $S_n = 1032182581$):

$$1032182581 \% 70 + 1$$

Соответственно, номер моего варианта - 32.

Вариант 32

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2$$

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \left(\frac{b}{c_1} + 0.00033\right)M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2$$

Для обоих случаев задача рассматривается со следующими начальными условиями и параметрами:

N – число потребителей производимого продукта

τ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

\tilde{p} – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции

q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

$\theta = \frac{t}{c_1}$ - безразмерное время

$M_0^1 = 5.5, M_0^2 = 3.5, p_{cr} = 28, N = 30, q = 1, \tau_1 = 10, \tau_2 = 12, \tilde{p}_1 = 10, \tilde{p}_2 = 8.2$

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

$t = c_1 \theta$ - условие нормировки

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

3.2 Реализация алгоритмов

3.2.1 Подключение библиотек

Для того, чтобы использовать многие формулы, а также для построения графиков, необходимо подключить определенные библиотеки, в которых эти формулы описаны:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

3.2.2 Начальные значения

Начальные условия задаются следующим образом:

```
# критическая стоимость продукта
p_cr=26

# длительность производственного цикла фирмы 1
tau1=24
```

```
# себестоимость продукта у фирмы 1
```

```
p1=5.5
```

```
# длительность производственного цикла фирмы 2
```

```
tau2=14
```

```
# себестоимость продукта у фирмы 2
```

```
p2=11
```

```
# число потребителей производимого продукта
```

```
N=33
```

```
# максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
```

```
q=1
```

Также необходимо посчитать коэффициенты, участвующие в решении дифференциального уравнения:

```
a1=p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)
```

```
a2=p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)
```

```
b=p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)
```

```
c1=(p_cr-p1)/(tau1*p1)
```

```
c2=(p_cr-p2)/(tau2*p2)
```

Начальные значения системы:

```
x0 = np.array([3.3, 2.2])
```

```
t = np.arange(0, 3, 0.001)
```

```
t = t/c1
```

3.2.3 Функция, описывающая дифференциальные уравнения

Для первого случая:

```
def syst1(x,t):  
    dx0=x[0]-(a1/c1)*x[0]*x[0]-(b/c1)*x[0]*x[1]  
    dx1=(c2/c1)*x[1]-(a2/c1)*x[1]*x[1]-(b/c1)*x[0]*x[1]  
    return [dx0,dx1]
```

Для второго случая:

```
def syst2(x,t):  
    dx0=x[0]-(a1/c1)*x[0]*x[0]-(b/c1)*x[0]*x[1]  
    dx1=(c2/c1)*x[1]-(a2/c1)*x[1]*x[1]-(b/c1+0.00033)*x[0]*x[1]  
    return [dx0,dx1]
```

3.2.4 Решение дифференциального уравнения и построение графиков

Для первого случая:

```
x = odeint(syst1, x0, t)
```

```
plt.plot(t, x)
```

Для второго случая:

```
x = odeint(syst2, x0, t)
```

```
plt.plot(t, x)
```

3.3 Построенные графики

3.3.1 Случай 1

При построении графика для случая, когда конкурентная борьба ведётся только рыночными методами, получила следующий результат (рис. 3.1):

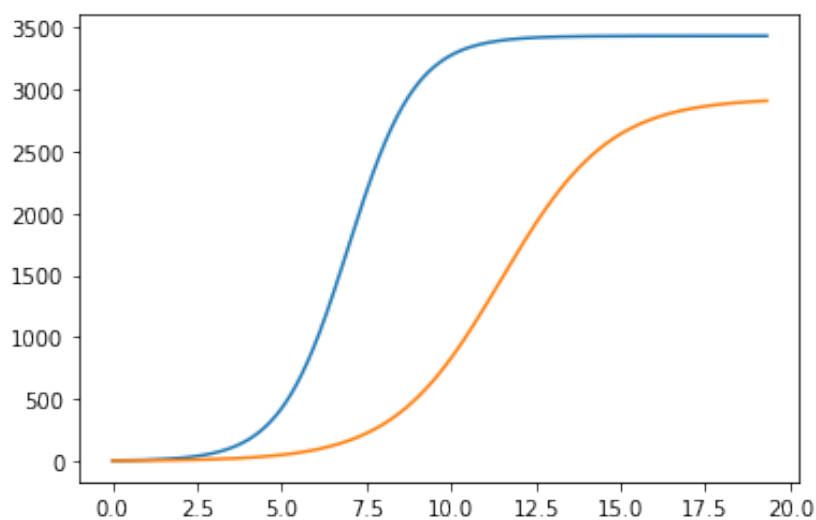


Рис. 3.1: График динамики изменения оборотных средств двух фирм

3.3.2 Случай 2

При построении графика для случая, когда, помимо экономического фактора влияния, используются еще и социально-психологические факторы (рис. 3.2):

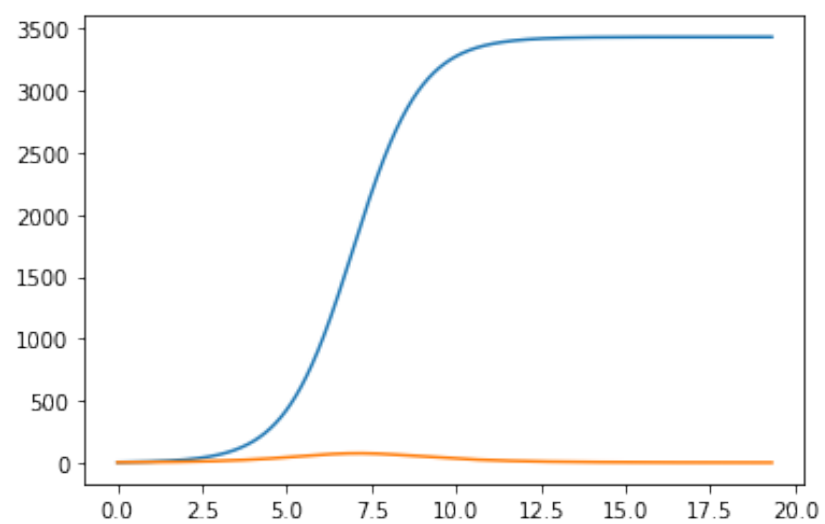


Рис. 3.2: График динамики изменения оборотных средств двух фирм

4 Вывод

При выполнении лабораторной работы мною были усвоены основные принципы модели конкуренции двух фирм, а также проведена реализация данной модели в рамках моего варианта лабораторной работы.