Отчет по лабораторной работе №2: Задача о погоне

*дисциплина: Математическое моделирование*

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

# Введение

## Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать ознакомление с простейшими моделями боевых действий - моделями Ланчестера.

## Задачи работы

Можно выделить следующие задачи третьей лабораторной работы:  
1. изучение моделей Ланчестера для трех случаев ведения боевых действий;  
2. написать код, при помощи которого можно построить графики изменения численности войск армий для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

## Объект и предмет исследования

Объектом исследования третьей лабораторной работы можно считать модели Ланчестера. Предметами же исследования можно считать случаи, которые рассматриваются в моем варианте лабораторной работе.

# Модель боевых действий

В общем случае главной характеристикой соперников в модели боевых действий являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

## Боевые действия между регулярными войсками.

Численность регулярных войск определяется следующими факторами: - скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);  
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);  
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

Модель боевых действий описывается следующим образом:

где

- величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери, не связаннын с боевыми действиями,

- коэффиценты, указывающие на эффективность боевых действий со стороны и соответственно,

- функции, учитывающие возможность подхода подкрепления к войскам Х и У в течение одного дня.

Данные обозначения будут использованы в ходе описания лабораторной работы.

## Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Модель усложняется, в борьбу добавляются партизанские отряды. Темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан:

## Боевые действия между партизанскими отрядами

## Модель боевых действий между регулярными войсками с постоянными коэффициентами

**Особенности модели:** - коэффициенты постоянны; - потери, не связанные с боевыми действиями, не учитываются; - не учитывается возможность подхода подкрепления; - , - численность противостоящих армий.

Точное решение:

,

При:  
- - армия выигрывает;  
- - армия выигрывает;  
- - истребление обеих армий (требуется бесконечно большое время).

**Вывод модели:** для борьбы с вдвое большей армией нужно в 4 раза более мощьное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т.д..

## Модель боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов с постоянными коэффициентами

Модель принимает вид:

где

- темп изменения численности рнегулярных войск,

- темп изменения численности партизанских войск.

При заданных начальных условиях уравнение имеет единственное решение:

При:  
- - партизаны побеждают;  
- - регулярная армия выигрывает;  
- - истребление обоих войск (требуется бесконечно большое время).

Чтобы партизаны одержали победу, необходимо увеличить коэффицент и повысить начальную численность. Это увеличение должно расти пропорционально второй степени (начальная численность регулярных войск).

**Вывод:** регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск.

# Выполнение лабораторной работы

## Формулировка задачи из варианта

Так как в третьей лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле , где - номер студенческого билета (в моем случае ):

1032182581%70 + 1

Соответственно, номер моего варианта - 32.

**Вариант 32**

Между страной и страной идет война. Численности состава войск исчисляются от начала войны, и являются временными функциями и . В начальный момент времени страна имеет армию численностью человек, а в распоряжении страны армия численностью человек. Для упрощения модели считаем, что коэфициенты постоянны. Также считаем  и непрерывными функциями.

Постройте графики изменения численности войск армии

 для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками
2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

## Реализация алгоритмов

### Реализация модели боевых действий между регулярными войсками

Инициализация библиотек:

import numpy as np  
 from math import sin, cos  
 from scipy.integrate import odeint  
 import matplotlib.pyplot as plt

Начальные значения:

x0 = 61000 # численность первой армии  
 y0 = 45000 # численность второй армии  
  
 v0 = np.array([x0, y0]) # вектор начальных условий

Временные точки:

t0 = 0 # начальный момент времени  
 tmax = 1 # предельный момент времени  
 dt =0.05 # шаг изменения времени  
  
 t = np.arange(t0, tmax, dt) # массив значений времени

Константы:

a = 0.22 # степень влияния различных факторов на потери армии X  
 b = 0.82 # эффективность боевых действий армии Y  
 c = 0.45 # эффективность боевых действий армии X  
 h = 0.67 # степень влияния различных факторов на потери армии Y

Функции подсчета возможности подхода подкрепления к армиям:

def P(t): # возможность подхода подкрепления к армии X  
 p = 2\*sin(4\*t)  
 return p  
  
 def Q(t): # возможность подхода подкрепления к армии Y  
 q = 2\*cos(4\*t)  
 return q

Функция системы дифференциальных уравнений:

def syst(y, t): # система дифференциальных уравнений  
 # изменение численности армии X  
 dy1 = - a\*y[0] - b\*y[1] + P(t)  
 # изменение численности армии Y   
 dy2 = - c\*y[0] - h\*y[1] + Q(t)  
 return [dy1, dy2]

Решение системы ОДУ:

y = odeint(syst, v0, t) # решение систесы  
  
 xpoint = [elem[0] for elem in y] # решение ОДУ для армии X  
 ypoint = [elem[1] for elem in y] # решение ОДУ для армии Y

Построение графиков:

plt.title("Model 1") # добавление названия графика  
 # построение графика изменения численности армии X  
 plt.plot(t, xpoint, label = 'Army X')   
 # построение графика изменения численности армии Y  
 plt.plot(t, ypoint, label = 'Army Y')   
  
 plt.xlabel('time') # добавление названия оси абцисс  
 plt.ylabel('Count of Army') # добавление названия оси ординат  
 plt.legend() # добавление легенды графика  
 plt.grid() # добавление координатной сетки  
 plt.show() # отображение графика

После выполнения программы выведется следующий график (рис. 1):

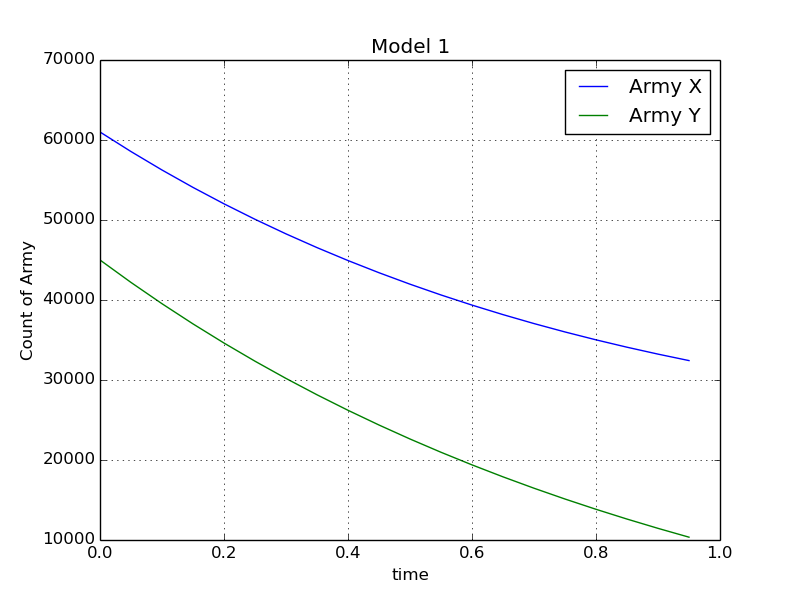


Figure 1: Изменение численности армий X и Y в процессе боевых действий при условии участия только регулярных войск (с подкреплением)

### Реализация модели ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Инициализация библиотек:

import numpy as np  
 from math import sin, cos  
 from scipy.integrate import odeint  
 import matplotlib.pyplot as plt

Начальные значения:

x0 = 61000 # численность первой армии  
 y0 = 45000 # численность второй армии  
  
 v0 = np.array([x0, y0]) # вектор начальных условий

Временные точки:

t0 = 0 # начальный момент времени  
 tmax = 1 # предельный момент времени  
 dt =0.05 # шаг изменения времени  
  
 t = np.arange(t0, tmax, dt) # массив значений времени

Константы:

a = 0.28 # степень влияния различных факторов на потери армии X  
 b = 0.83 # эффективность боевых действий армии Y  
 c = 0.31 # эффективность боевых действий армии X  
 h = 0.75 # степень влияния различных факторов на потери армии Y

Функции подсчета возможности подхода подкрепления к армиям:

def P(t): # возможность подхода подкрепления к армии X  
 p = 1.5\*sin(t)  
 return p  
  
 def Q(t): # возможность подхода подкрепления к армии Y  
 q = 1.5\*cos(t)  
 return q

Функция системы дифференциальных уравнений:

def syst(y, t): # система дифференциальных уравнений  
 # изменение численности армии X  
 dy1 = - a\*y[0] - b\*y[0]\*y[1] + P(t)  
 # изменение численности армии Y   
 dy2 = - c\*y[0]\*y[1] - h\*y[1] + Q(t)  
 return [dy1, dy2]

Решение системы ОДУ:

y = odeint(syst, v0, t) # решение систесы  
  
 xpoint = [elem[0] for elem in y] # решение ОДУ для армии X  
 ypoint = [elem[1] for elem in y] # решение ОДУ для армии Y

Построение графиков:

plt.title("Model 2") # добавление названия графика  
 # построение графика изменения численности армии X  
 plt.plot(t, xpoint, label = 'Army X')   
 # построение графика изменения численности армии Y  
 plt.plot(t, ypoint, label = 'Army Y')   
  
 plt.xlabel('time') # добавление названия оси абцисс  
 plt.ylabel('Count of Army') # добавление названия оси ординат  
 plt.legend() # добавление легенды графика  
 plt.grid() # добавление координатной сетки  
 plt.show() # отображение графика

После выполнения программы выведется следующий график (рис. 2):

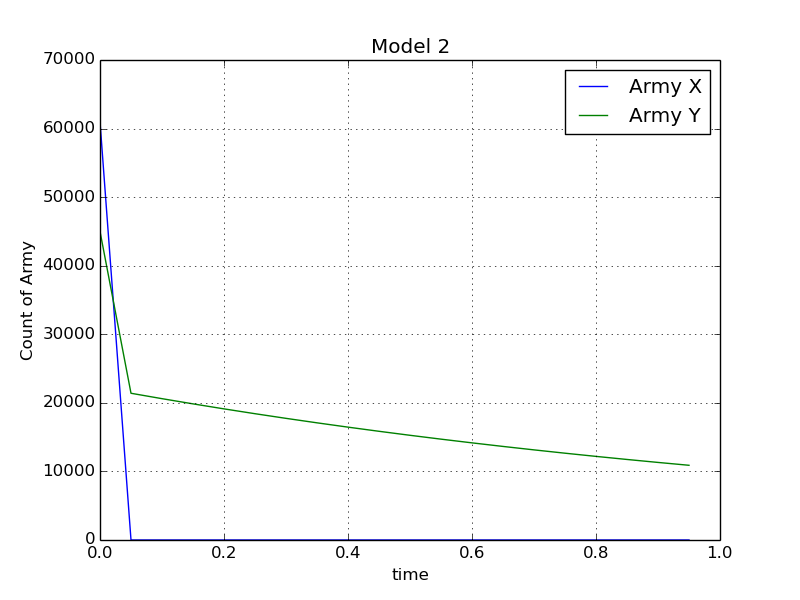


Figure 2: Изменение численности армий X и Y в процессе боевых действий при условии участия регулярных войск и партизанских отрядов (с подкреплением)

# Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с простейшими моделями боевых действий.

По построенным графикам моделей можно сделать вывод, что при участии партизанских отрядов, армия Y с большой вероятностью выйграет битву, в то время как армия X потерпит сокрушительное поражение. Если же партизанскии отряды не будут принимать участие в битве, то армия Y с большей вероятностью потерпит поражение, нежели чем армия X.