Отчет по лабораторной работе №4: Модель гармонических колебаний

*дисциплина: Математическое моделирование*

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

# Введение

## Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать ознакомление с моделью гармонических колебаний.

## Задачи работы

Можно выделить следующие задачи четвертой лабораторной работы:  
1. изучение модели гармонических колебаний;  
2. написать код, при помощи которого можно построить графики фазового портрета для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

## Объект и предмет исследования

Объектом исследования четвертой лабораторной работы можно считать модель гармонических колебаний. Предметами же исследования можно считать случаи, которые рассматриваются в моем варианте лабораторной работе.

# Модель гармонических колебаний

## Линейный гармонический осциллятор

**Линейный гармонический осциллятор** - модель, выступающая в качестве основной модели в теории колебаний. Данной моделью можно описать многие системы в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях.

## Простейшая модель гармонических колебаний

Уравнение свободных колабаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

где - переменная, описывающая состояние системы, - параметр, характеризующий потери эненргии, - свободная частота колебаний, - время, , .

Соответственно, данное уравнение - линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, которое является примером линейной динамической системы.

## Модель математического маятника

Простейшую модель математического маятника можно описать так: при отсутствии потерь в системе () получаем уравнение консеравтивного осциллятора, энергия колебания которого сохранятеся во времени:

где высчитывается из второго закона Ньютона.

## Алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо два начальных условия вида

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

Начальные условия для системы примут вид:

## Фазовый портрет и фазовая траектория

**Фазовое пространство (плоскость) системы** - пространство, которое определяют независимые переменные и , в котором “движется” решение. Значение фазовых координат , в любой момент времени полностью определяет состояние системы.

**Фазовая траектория** - гладкая кривая, которая отвечает решению уравнения движения как функции времени.

**Фазовый портрет** - картина, образованная набором фазовых траекторий.

# Выполнение лабораторной работы

## Формулировка задачи из варианта

Так как в третьей лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле , где - номер студенческого билета (в моем случае ):

1032182581%70 + 1

Соответственно, номер моего варианта - 32.

**Вариант 32**

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы ;
2. колебания гармонического осциллятора c затуханием и без действий внешней силы ;
3. колебания гармонического осциллятора c затуханием и под действием внешней силы ;

на интервале (шаг ) с начальными условиями , .

## Реализация алгоритмов

Решение лабораторной работы может быть реализовано на многих языках программирования. В моем случае это язык программирования Python. Далее будет представлен код на этом языке программирования.

### Подключение библиотек

Для того, чтобы использовать многие формулы, а также для построения графиков, необходимо подключить определенные библиотеки, в которых эти формулы описаны:

import numpy as np  
 from math import sin, cos, sqrt  
 from scipy.integrate import odeint  
 import matplotlib.pyplot as plt

### Функции, описывающие дифференциальные уравнения

Общий вид функции, описывающей правую часть дифференциального уравнения, имеет вид:

# Правая часть уравнения f(t)  
 def F(t):  
 f = 0  
 return f

где строка ‘f = 0’ имеет следующие значения:

# первый случай  
 f = 0  
  
 # второй случай  
 f = 0  
  
 # третий случай  
 f = 0.8 \* sin(9 \* t)

Функция для решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

# Вектор-функция f(t, x)  
 # для решения системы дифференциальных уравнений  
 # x' = y(t, x)  
 # где x - искомый вектор  
 def dx(x, t):  
 dx1 = x[1]  
 dx2 = -w\* w\* x[0] - g \* x[1] - F(t)  
 return [dx1, dx2]

### Построение графика функции

Для удобства вынесем построение графиков в отдельные функции:

# Функцкия построения фазового портрета  
def draw\_f\_plot(x, y):  
 plt.plot(x, y)  
 plt.title("Фазовый портрет")  
 plt.xlabel('x')  
 plt.ylabel('x`')  
 plt.grid()  
 plt.show()

# Функция построения графика решения  
def draw\_plot(x, y, t):  
 plt.plot(t, x, label = 'x')  
 plt.plot(t, y, label = 'x`')  
 plt.title("Решение дифференциального уравнения")  
 plt.xlabel('t')  
 plt.ylabel('x')  
 plt.legend()  
 plt.grid()  
 plt.show()

### Начальные значения

В задаче присутствуют как общие для всех трех случаев начальные значения, так и локальные. Далее будут приведены значения, общие для всех трех случаев:

t0 = 0 # Начальный момент времени   
 tmax = 59 # Конечный момент времени   
 dt = 0.05 # Шаг изменения времени  
  
 # Интервал, в котором решается задача  
 t = np.arange(t0, tmax, dt)  
  
 # Начальные условия  
 # x(t0) = x0  
 x0 = 0.5  
 y0 = -1.5  
  
 # Вектор начальных условий  
 v0 = np.array([x0, y0])

Также в задаче присутствуют несколько начальных значений, различных для трех случаев. В общем виде они задаются в программе следующим образом:

# Параметры осциллятора   
 # x'' + g\* x' + w^2\* x = f(t)   
 # w - частота  
 # g - затухание  
 w = sqrt(1)  
 g = 0

где:

# первый случай  
 w = sqrt(5.2)  
 g = 0  
  
 # второй случай  
 w = sqrt(0.5)  
 g = 14  
  
 # третий случай  
 w = sqrt(0.3)  
 g = 13

### Решение диффееренциального уравнения и построение графика

# Решаем дифференциальные уравнения  
 # с начальным условием x(t0) = x0  
 # на интервале t  
 # с правой частью, заданной y  
 # и записываем решение в матрицу x  
 x = odeint(dx, v0, t)  
  
 # Переписываем отдельно   
 # x в xpoint, x' в ypoint  
 xpoint = [elem[0] for elem in x]   
 ypoint = [elem[1] for elem in x]  
  
 # Построим фазовый портрет  
 draw\_plot(xpoint, ypoint)  
  
 # Построим график решений  
 draw\_plot(xpoint, ypoint, t)

## Построенные графики

### Первый случай

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы имеют следующий фазовый портрет (рис. 1) и график решений уравнения (рис. 2):

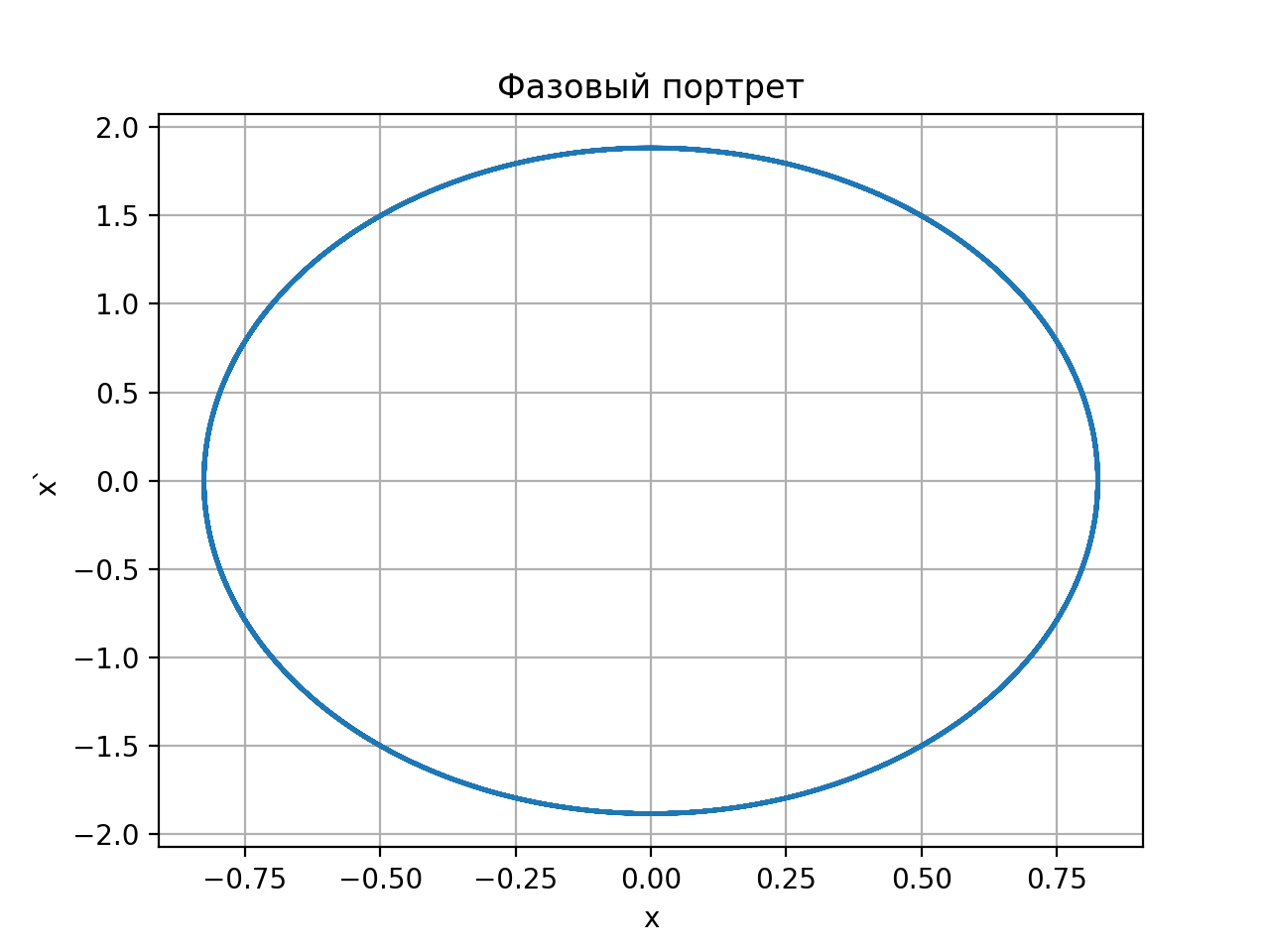


Figure 1: Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания по горизонтальной оси значения , по вертикальной оси значения

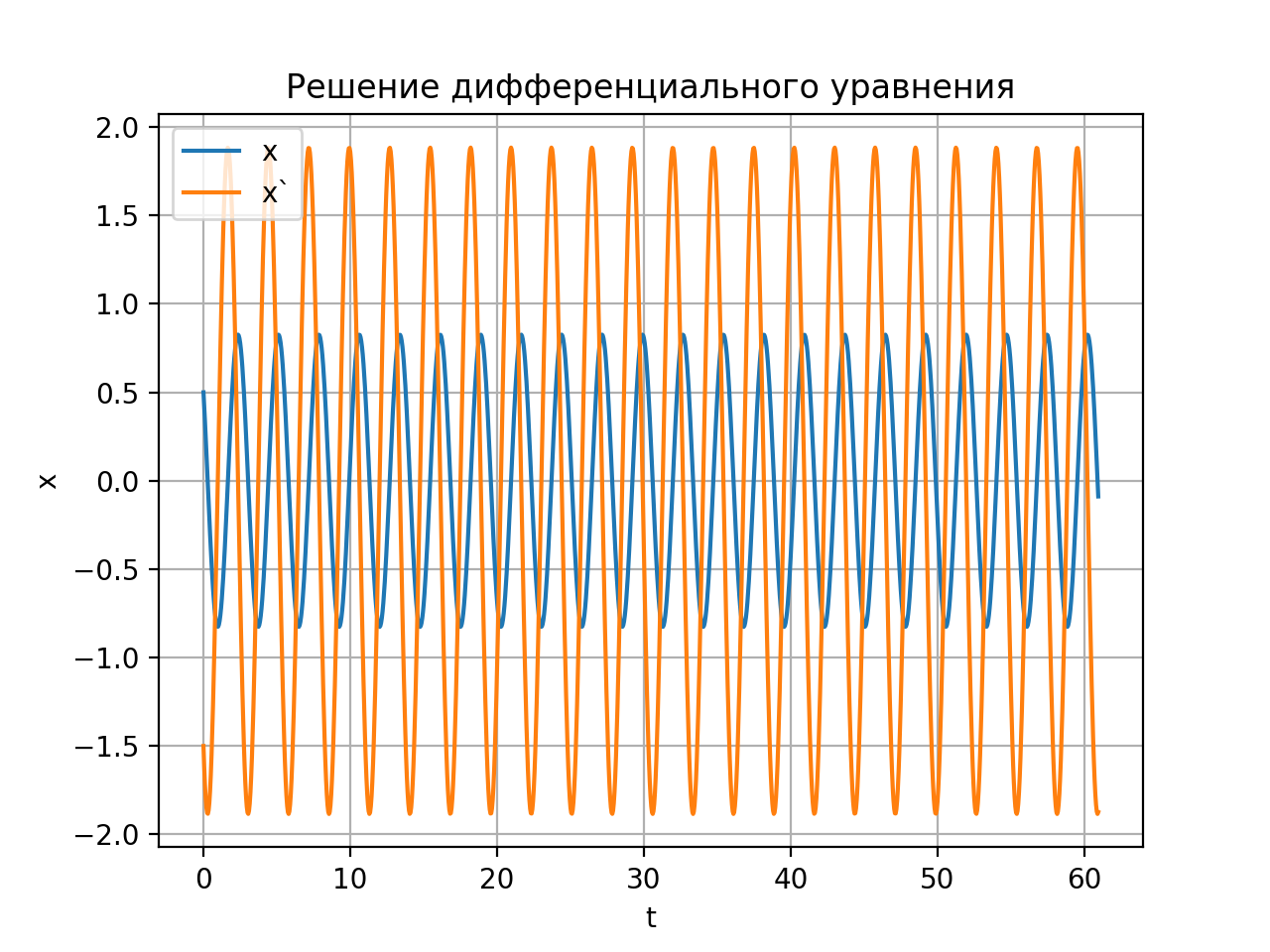


Figure 2: График решений уравнения гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания по горизонтальной оси значения , по вертикальной оси значения

### Второй случай

Колебания гармонического осциллятора c затуханием и без действий внешней силы имеют следующий фазовый портрет (рис. 3) и график решений уравнения (рис. 4):

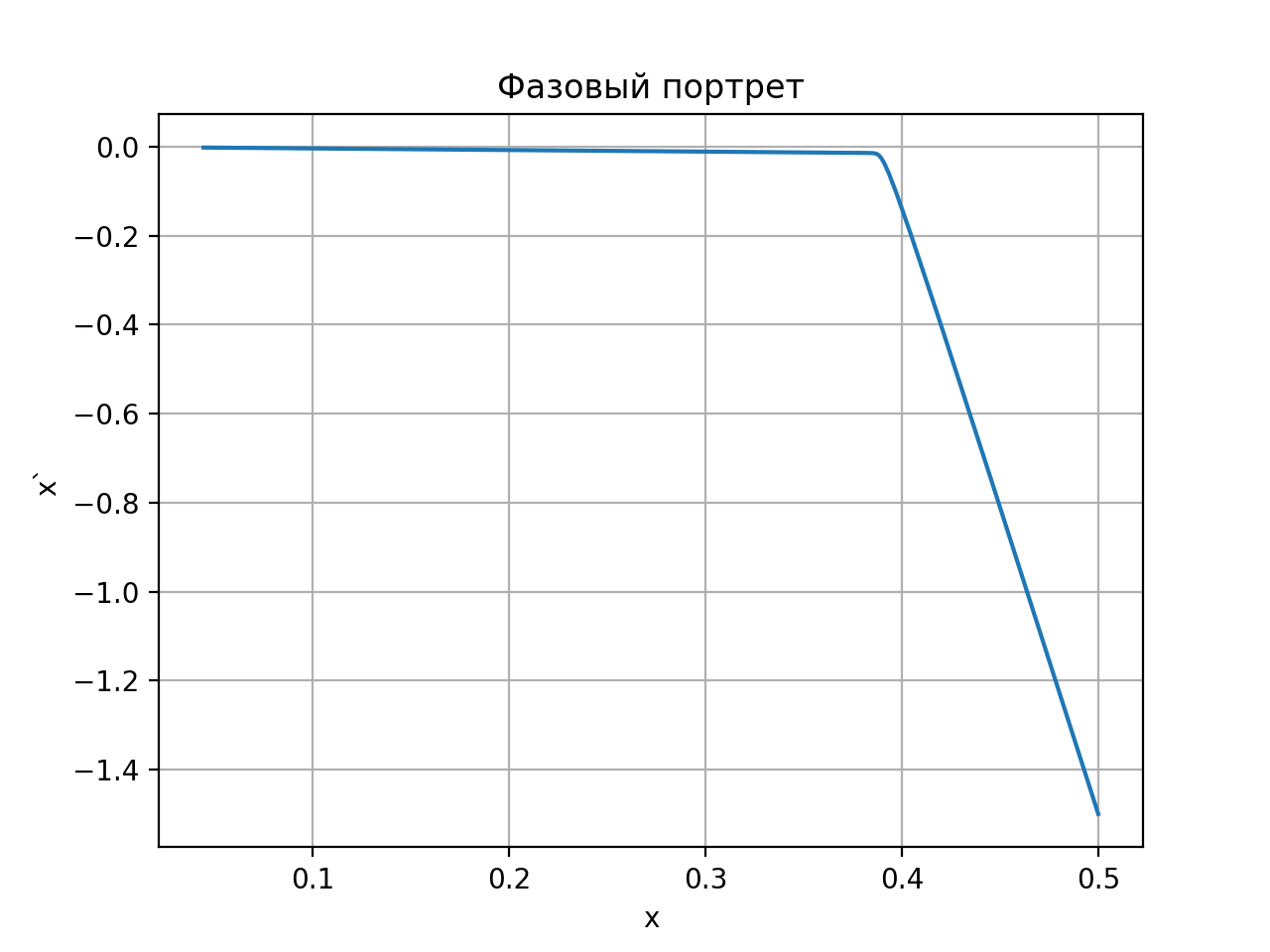


Figure 3: Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания , с параметром, характеризующим потери энергии по горизонтальной оси значения , по вертикальной оси значения

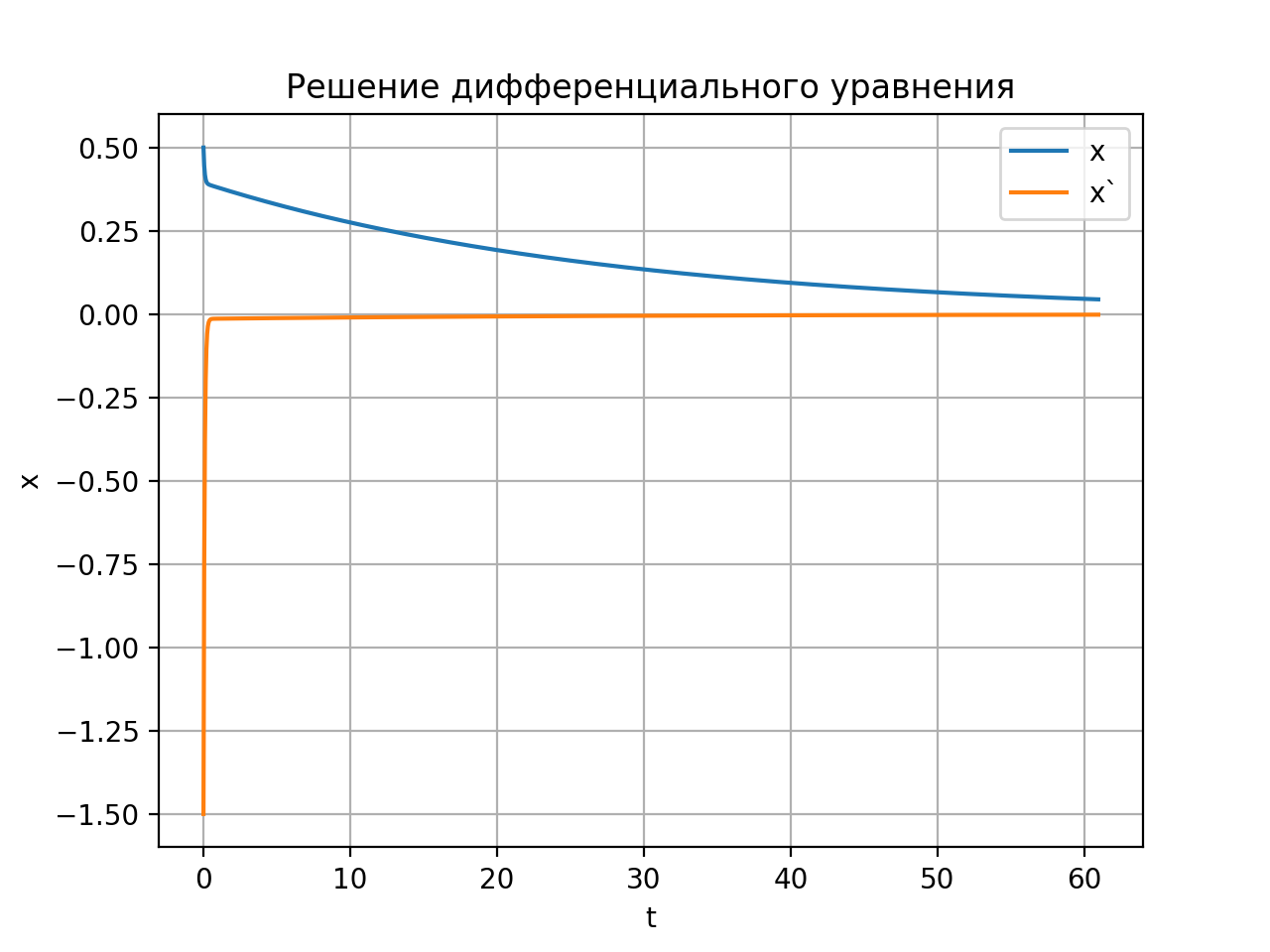


Figure 4: График решений уравнения гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания , с параметром, характеризующим потери энергии по горизонтальной оси значения , по вертикальной оси значения

### Третий случай

Колебания гармонического осциллятора c затуханием и под действием внешней силы имеют следующий фазовый портрет (рис. 5) и график решений уравнения (рис. 6):

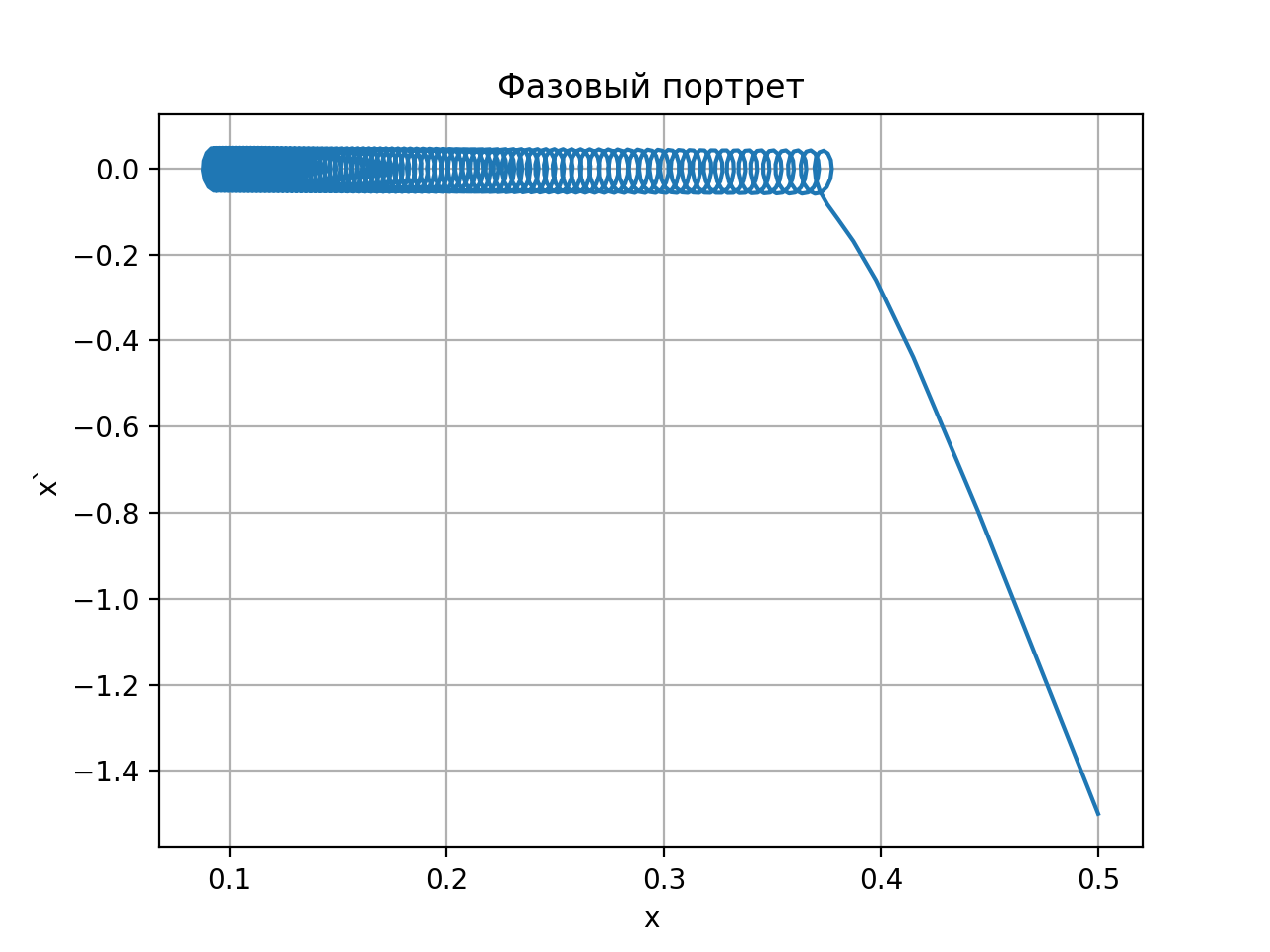


Figure 5: Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиям, под действием внешней силы , с собственной частотой колебания , с параметром, характеризующим потери энергии по горизонтальной оси значения , по вертикальной оси значения

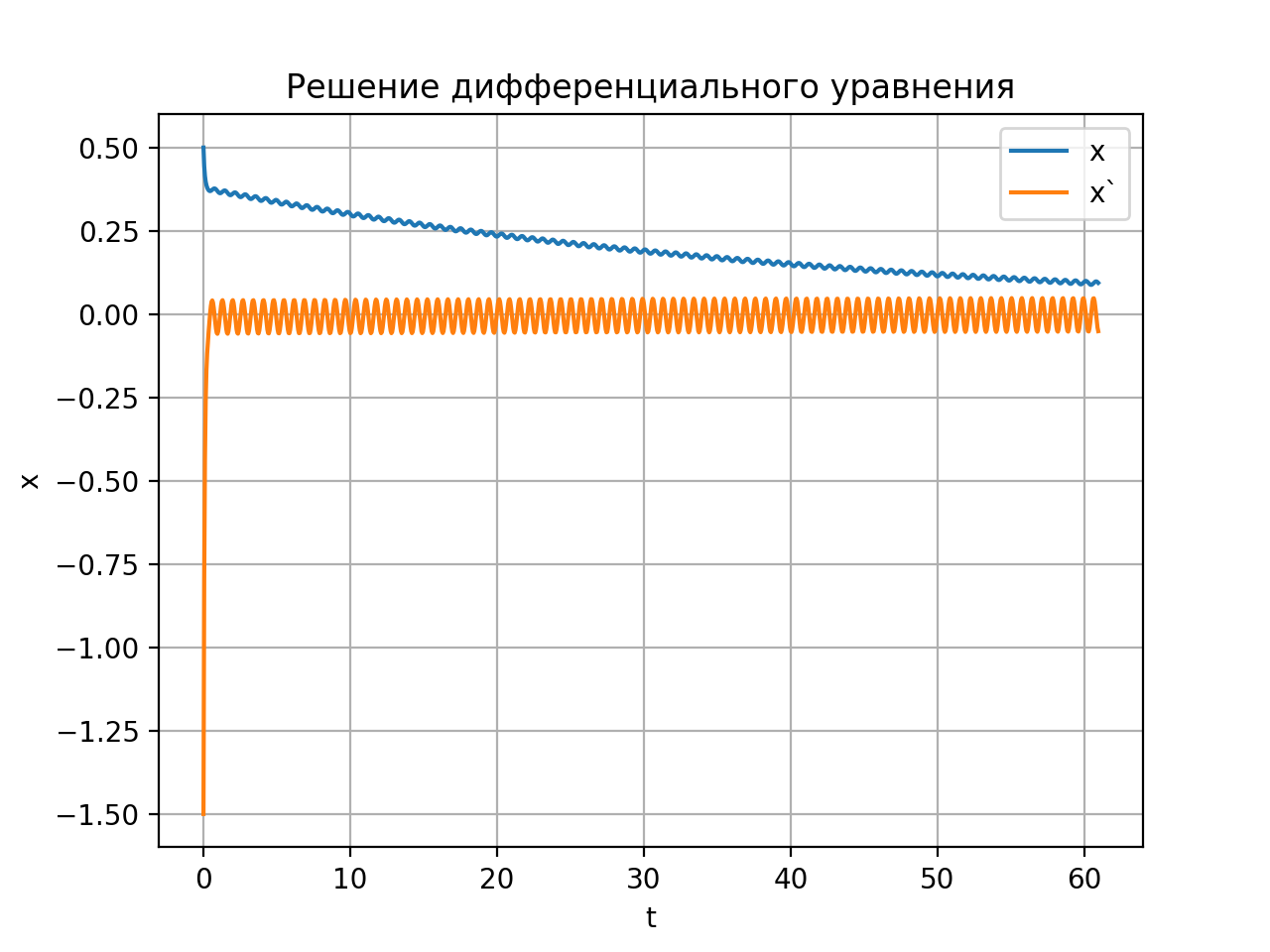


Figure 6: График решений уравнения гармонического осциллятора с затуханиям, под действием внешней силы , с собственной частотой колебания , с параметром, характеризующим потери энергии по горизонтальной оси значения , по вертикальной оси значения

# Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с простейшими моделями гармонического осциллятора, а также построены фазовые портреты моделей.