Отчет по лабораторной работе №5: Модель хищник - жертва

*дисциплина: Математическое моделирование*

Родина Дарья Алексеевна, НФИбд-03-18

Содержание

# Введение

## Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать построение математической модели хищник - жертва.

## Задачи работы

Можно выделить следующие задачи пятой лабораторной работы:  
1. изучение модели хищник - жертва;  
2. написать код, при помощи которого можно построить графики фазового портрета для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

## Объект и предмет исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе является модель хищник - жертва, а предметом исследования - случай, представленный в моем варианте лабораторной работы.

# Модель хищник - жертва

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - *модель Лотки-Вольтерры*. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв и хищников зависят только от времени;
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника несущественны;
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

В общем виде математическую модель можно записать так:

где:

* - число жертв;
* - число хищников;
* - коэффициент, описывающий скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников;
* - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв.

Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены и в правой части уравнения).

## Стационарное состояние

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: . Если начальные значения задать в стационарном состоянии , то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей . Колебания совершаются в противофазе.

## Малое изменение модели

При малом изменении модели

прибавленые к правым частям малые члены, учитывают конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв и т.п., а вывод о периодичности, справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

В зависимости от вида малых поправок и возможны следующие сценарии:

1. Равновесное состояние устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.
2. Система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию.
3. В системе с неустойчивым стационарным состоянием с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния приводит не к малым колебаниям около этого состояния, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения)

**Вывод:** жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

# Выполнение лабораторной работы

## Формулировка задачи из варианта

Так как в третьей лабораторной работе 70 вариантов, то номер моего варианта вычисляется по формуле , где - номер студенческого билета (в моем случае ):

1032182581%70 + 1

Соответственно, номер моего варианта - 32.

**Вариант 32**

Для модели «хищник-жертва»:

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: . Найдите стационарное состояние системы.

## Реализация алгоритмов

Решение лабораторной работы может быть реализовано на многих языках программирования. В моем случае это язык программирования Python. Далее будет представлен код на этом языке программирования.

### Подключение библиотек

Для того, чтобы использовать многие формулы, а также для построения графиков, необходимо подключить определенные библиотеки, в которых эти формулы описаны:

import numpy as np  
 from math import sin, cos, sqrt  
 from scipy.integrate import odeint  
 import matplotlib.pyplot as plt

### Функция, описывающая дифференциальные уравнения

Функция для решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

def dx(x, t):  
 dx1 = - a \* x[0] + c \* x[0] \* x[1]  
 dx2 = b \* x[1] - d \* x[0] \* x[1]   
 return [dx1, dx2]

### Построение графика функции

Для удобства вынесем построение графиков в отдельные функции:

# Функцкия построения фазового портрета  
 def draw\_plot(x, y, xs, ys):  
 plt.plot(x, y, label = 'Зависимость численности популяций')  
 plt.plot(xs, ys, marker='o', label = 'Стационарная точка')  
 plt.title("Фазовый портрет")  
 plt.xlabel('y')  
 plt.ylabel('x')  
 plt.legend()  
 plt.grid()  
 plt.show()

# Функция построения графика решения  
 def draw\_plot(x, y, t):  
 plt.plot(t, x, label = 'Популяция хищников')  
 plt.plot(t, y, label = 'Популяция жертв')  
 plt.title("Решение дифференциального уравнения")  
 plt.xlabel('t')  
 plt.ylabel('x(t), y(t)')  
 plt.legend()  
 plt.grid()  
 plt.show()

### Начальные значения

Начальные условия задаются следующим образом:

a = 0.25; # коэффициент естественной смертности хищников  
 b = 0.025; # коэффициент естественного прироста жертв  
 c = 0.45; # коэффициент увеличения числа хищников  
 d = 0.045; # коэффициент смертности жертв  
  
 # Интервал, в котором решается задача  
 t = np.arange(0, 400, 0.1)  
  
 # Начальные условия x и y  
 # (популяция хищников и популяция жертв)  
 v0 = np.array([8, 11])

### Решение диффееренциального уравнения и построение графиков

# Решаем дифференциальные уравнения  
 x = odeint(dx, v0, t)  
  
 # Переписываем отдельно   
 # y в xpoint, x в ypoint  
 xpoint = [elem[0] for elem in x]   
 ypoint = [elem[1] for elem in x]  
  
 # Нахождение стационарной точки системы  
 xs = c/d  
 ys = a/b

### Решение диффееренциального уравнения и построение графиков

# Построим фазовый портрет   
 draw\_fplot(xpoint, ypoint, xs, ys)  
  
 # Построим график решений  
 draw\_plot(xpoint, ypoint, t)

## Построенные графики

При запуске получившейся программы получаем следующие графики, (рис. 1, рис. 2):

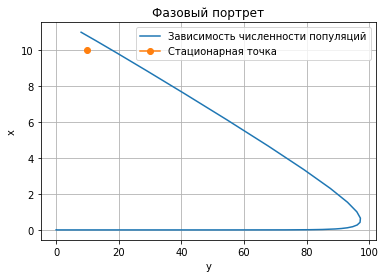


Figure 1: Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями ,

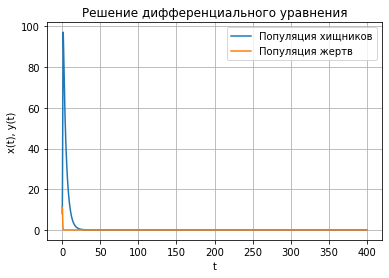


Figure 2: Колебания изменения числа популяций хищников и жертв

# Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с моделью хищник - жертва, а также построены фазовый портрет, стационарная точка и график решений для заданных параметров модели.