ЛЕКЦИЯ 6

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД.

§1. Понятие функциональных рядов. Равномерная сходимость рядов.

Пусть $\{u_k(z)\}$ -- последовательность комплексных функций $u_n(z)$, однозначных и аналитических в области G. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \tag{1}$$

Эту сумму будем называть функциональным рядом. Если z фиксировано, то этот ряд будем числовым рядом.

Определение 1. *Функциональный ряд* (1) *сходится в области* G *, если при любом фиксированном* $z \in G$ *соответствующий ему числовой ряд сходится*.

Сходящийся ряд задает некоторую функцию $f(z)$ в области G, которую называют суммой ряда, и пишут $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$. Из определения 1 следует, что для любого $z \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ сколь угодно малого существует число $N(\varepsilon, z)$ такое, что при всяком $n \geq N(\varepsilon, z)$ выполняется неравенство

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon$$

Если обозначить частичную сумму $\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ ряда (1) через $S_n(z)$, то условие сходимости ряда в области G можно записать в виде

$$\lim_{n \to \infty} S_n(z) = f(z), \; z \in G.$$

Определение 2. *Функциональный ряд* (1) *будем называть равномерно сходящимся к функции* $f(z)$ *в области* G*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N(\varepsilon)$ *такое, что при любом фиксированном* $n \geq N(\varepsilon)$ *неравенство*

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon \tag{2}$$

<u>*выполняется сразу для всех точек* z *из области*</u> G.

Определение 2 отличается от определения 1 тем, что число N не зависит от z, поэтому неравенство (2) выполняется сразу для всех точек z из области G.

Определение 3. *Числовой ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *называют мажорирующим функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$*, если при любом* k *выполняются неравенства* $|u_k(z)| \le |a_k|$ *для всех* $z \in G$

Теорема 1 (признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

Если всюду в области G *члены ряда* (1) *мажорируются членами абсолютно сходящегося числового ряда, то ряд* (1) *сходится равномерно*.

Доказательство опускаем. Свойства равномерно сходящихся рядов.

1. Если члены $u_n(z)$ исследуемого ряда непрерывны в области G, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится в G *равномерно* к $f(z)$, то

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

есть непрерывная функция своего аргумента.

2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ непрерывных функций $u_k(z)$ сходится к $f(z)$ в области G, то интеграл от этой функции вдоль кривой L, целиком лежащей в G, можно получить путем почленного интегрирования самого ряда:

$$\int_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_L u_k(z)dz, \; L \subset G$$

§2. Разложение аналитической функции в степенной ряд

Ранее мы исследовали задачу о сходимости степенного комплексного ряда. Было показано, что степенной ряд в круге сходимости является аналитической функцией аргумента z, производная степенного ряда может быть получена путем почленного дифференцирования ряда. Показано, что степенной ряд бесконечно дифференцируем.

На практике часто приходится решать обратную задачу: задана функция $f(z)$, ее надо разложить в степенной ряд.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$ -- *однозначная и аналитическая функция в области* G. *Если* $z_0 \in G$ *и* r -- *расстояние от* z_0 *до границы области* G*, тогда в круге* $|z - z_0| < r$ *функция* $f(z)$ *разлагается в сходящийся ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, *коэффициенты которого имеют вид*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta ,$$

где γ_r – окружность радиуса r с центром в z_0

Доказательство. Пусть z -- точка круга $|z-z_0|<r$. Рассмотрим концентрический круг радиуса $\rho\ (0<\rho<r)$, содержащий эту точку внутри (см. рис. 2). Пусть γ_ρ -- граница круга. Тогда, по формуле Коши имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

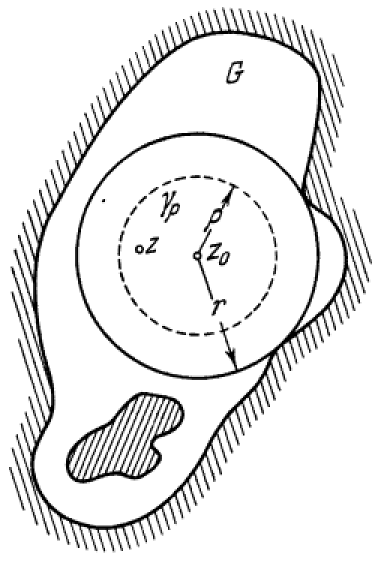

Рис. 1

Разложим $(\zeta-z)^{-1}$ в ряд по $(z-z_0)$:

$$\frac{1}{(\zeta-z)}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

Воспользуемся известным рядом для функции $(1-q)^{-1}$

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+q^3+\cdots$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится абсолютно при $|q|<1$. Тогда можем записать, что

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n \tag{4}$$

Здесь $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$, так как $\zeta\in\gamma_\rho$. Поэтому ряд (4) сходится абсолютно.

Представим теперь подынтегральную функцию в интеграле (3) в виде ряда:

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \tag{5}$$

Этот ряд сходится равномерно по ζ на окружности γ_ρ в силу признака Вейерштрасса, так как ряд мажорируется абсолютно сходящимся рядом, члены которого не зависят от ζ. Действительно, имеем

$$\left|f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|\le\max_{\gamma_\rho}|f(\zeta)|\frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}=b_n$$

Мажорирующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится абсолютно как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = |z - z_0| / \rho < 1$, первый член которой есть $b_1 = \max\limits_{\gamma_\rho} |f(\zeta)| / \rho$, последующие вычисляются по формуле $b_{n+1} = b_1 q^n$.

Итак, на основании признака равномерной сходимости Вейерштрасса, ряд (5) сходится равномерно по ζ. Подставляя ряд (5) в интегральную формулу Коши вместо подинтегральной функции и почленно интегрируя, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \, (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (6)$$

Здесь a_n вычисляются по формуле

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta} \quad (7)$$

Заметим, что коэффициент a_n не зависит от радиуса ρ, что следует из теоремы о составном контуре, примененной к двусвязной области, ограниченной контурами γ_ρ и γ_r (интеграл по γ_ρ равен интегралу по γ_r, при этом контуры обходятся против часовой стрелки):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Итак, установлено, что для произвольной точки z круга $|z - z_0| < r$ справедливо разложение (6), (7) функции $f(z)$ в ряд по $(z - z_0)$. **Теорема доказана**.

***Замечание* 1 (**неравенство Коши**).** Положим $M(\rho) = \max\limits_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)|$. Из полученных формул для коэффициентов a_n следует неравенство

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\rho} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| |d\zeta| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M(\rho)}{\rho^n}$$

Это неравенство позволяет оценивать сверху модуль коэффициентов степенного ряда.

***Замечание* 2.** Согласно доказанной теореме, радиус сходимости ряда Тейлора, т.е. число r, есть кратчайшее расстояние от точки z_0 до границы области G. Границу можно отодвигать, увеличивая область G и увеличивая радиус сходимости r до тех пор, пока $f(z)$ остается аналитической в области G. Как только появится особая точка (точка неаналитичности) функции $f(z)$ на границе области G, процесс «расширения» области G следует прекратить. Дело в том, что в особой точке ряд Тейлора расходится: либо он принимает бесконечно большие значения, либо его сумма не определена вовсе. Итак, радиус сходимости ряда Тейлора – кратчайшее расстояние от z_0 до ближайшей особой точки! Это правило позволяет вам вычислить радиус сходимости ряда Тейлора чисто геометрически, не используя формулу Коши-Адамара.

Пример. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. Эта функция аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z_{1,2}=\pm i$. Эта функция представима, в силу доказанной теоремы, рядом Тейлора. Чтобы его построить, воспользуемся формулой, описывающей сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

Это и есть ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$. Круг его сходимости есть $|z|<1$, радиус сходимости -- $R=1$. Как видим, радиус сходимости ряда есть расстояние от точки $z_0=0$ до особых точек $\pm i$.

§3. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций

Теорема 3. *Любая функция $f(z)$, аналитическая в области G, имеет производные всех порядков, т.е. бесконечно дифференцируема. Более того, если L -- замкнутая жорданова кривая, принадлежащая области G вместе со своей внутренностью D, то в каждой точке $z\in D$ для любого натурального n справедливо равенство*

$$\boxed{\frac{d^n f(z)}{dz^n}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\left(\zeta-z\right)^{n+1}}d\zeta} \tag{8}$$

Доказательство. В силу доказанной теоремы 2, аналитическая функция $f(z)$ разлагается в сходящийся степенной ряд в окрестности точки $z_0\in D$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\ ,$$

поэтому бесконечно дифференцируема в соответствующей окрестности на основании теоремы 1 лекции 4. Более того, в теореме 1 лекции 4 была доказана формула

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ ,$$

где a_n -- коэффициенты степенного ряда. Отсюда, учитывая формулу (7), следует равенство (8) (интегрирование в (7) по кривой γ_ρ можно заменить на интегрирование по L в силу теоремы о составном контуре; z_0 следует заменить на z). **Теорема доказана**