# ЛЕКЦИЯ 7
# РЯД ЛОРАНА

В предыдущей лекции мы познакомились с разложением аналитической функции $f(z)$ в степенной ряд, ряд Тейлора. Сейчас рассмотрим более общие степенные ряды, которые позволяют исследовать поведение функции в окрестности особых точек. Это позволит нам глубже проникнуть в природу аналитических функций.

## §1. **Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.**

Ранее рассмотрели представление $f(z)$ в виде ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Теперь рассмотрим ряды, содержащие степенные члены с отрицательными показателями:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \cdots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

Здесь $z_0$ фиксированная точка плоскости, $c_n$ -- комплексные коэффициенты.

Итак, имеем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Этот ряд называется ***рядом Лорана***. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ называют ***правильной частью***, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ -- ***главной частью*** ряда Лорана.

Какова область сходимости этого ряда? Очевидна, она представляет собой пересечение областей сходимости ряда с положительными степенями и ряда с отрицательными степенями.

Мы уже знаем, что область сходимости первого ряда есть круг с центром в точке $z_0$ и радиуса $R_1$. В этом круге имеем $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $|z-z_0|<R_1$.

Как определить круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$? Это сделать несложно. Положим $\zeta = \frac{1}{(z-z_0)}$. Тогда будем иметь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$, который является обычным степенным рядом и в круге сходимости $|\zeta|<R_2^{-1}$ он будет описывать аналитическую функцию

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$$

Возвращаемся к старой переменной, будем иметь

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n},\quad f_2(z)=\varphi\left(\frac{1}{(z-z_0)}\right)$$

Круг сходимости принимает вид

$$\left|\frac{1}{(z-z_0)}\right|<R_2^{-1} \;\Rightarrow\; |z-z_0|>R_2$$

Итак, область сходимости ряда по отрицательным степеням $n$ есть область, внешняя к окружности радиуса $R_2$ с центром в $z_0$.

Положим $R_2 < R_1$. Тогда существует область сходимости ряда Лорана:

$$f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad R_2 < |z - z_0| < R_1$$

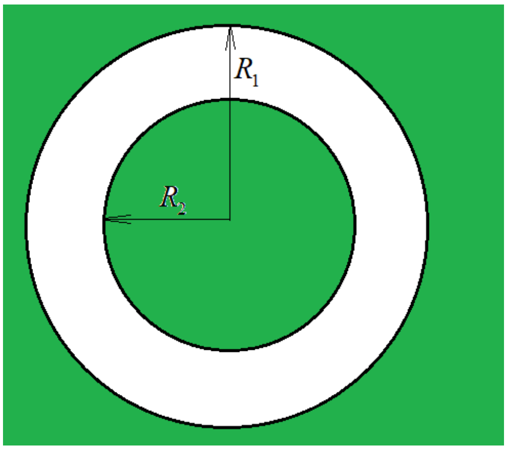


Рис. 1 Белое кольцо – область сходимости ряда Лорана

Итак, внутри области сходимости ряд Лорана сходится к аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Спрашивается, можно ли разложить произвольную функцию, аналитическую в кольце, в ряд Лорана?

**Терема Лорана (1843).** ***Функция*** $f(z)$***, аналитическая в круговом кольце*** $R_2 < |z - z_0| < R_1$***, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана***

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

***коэффициенты которого вычисляются по формулам***

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm1, \pm2 \ldots,$$

***где*** $C$ ***-- произвольный контур, принадлежащий кольцу и охватывающий точку*** $z_0$.

*Доказательство.*

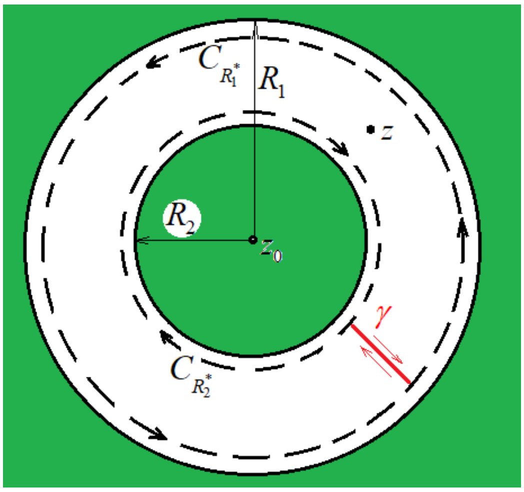


Рис. 2

Фиксируем точку $z$ в кольце $D$: $R_2 < |z - z_0| < R_1$ (**D -- белая область).** Указываем еще две окружности $C_{R_1^*}$, $C_{R_2^*}$ радиусов $R_1^*$, $R_2^*$ $\left(R_2 < R_2^* < R_1^* < R_1\right)$ (пунктирные кривые). Кольцо $D'$: $R_2^* < |z - z_0| < R_1^*$ является двусвязной областью, принадлежащей D, причем $z \in D'$. Заметим, что кольца $D$, $D'$ не содержат точку $z_0$, в которой функция $f(z)$ может быть неаналитической.

Применяем интегральную формулу Коши для области D (см. лекцию 5), выбирая в качестве замкнутой кривой L, принадлежащей D вместе со своей внутренностью, две штрихованные окружности $C_{R_1^*}$, $C_{R_2^*}$, соединенные кривой $\gamma$ (разрезом). Обходим эту кривую L в *положительном направлении* (внутренность кривой L, т.е. $D' \setminus \gamma$, остается слева). Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1^*} + C_{R_2^*} + \gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1^*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2^*}^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (1)$$

Здесь учитывается, что кривая $\gamma$ проходится дважды в разных направлениях, поэтому интеграл вдоль $\gamma$ равен нулю. Обход вдоль кривой $C_{R_2^*}$ заменили на противоположный, поменяв знак перед интегралом. Тогда оба контура $C_{R_1^*}$ и $C_{R_2^*}^-$ обходятся против хода стрелки часов!

Рассмотрим первый интеграл:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1^*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Здесь $f(z)$ аналитична в кольце, при этом $\dfrac{1}{\zeta - z}$ можем разложить в ряд по $(z - z_0)$ в кольце так, как это делали при доказательстве теоремы о разложении $f(z)$ в обычный степенной ряд (лекция 6, формула (4)):

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \qquad \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \left|\frac{z - z_0}{R_1^*}\right| < 1 \qquad (2)$$

Ряд (2), рассматриваемый как функция $\zeta$ ($z$ и $z_0$ -- параметры), сходится на $C_{R_1^*}$. Подставляем этот ряд в подынтегральную функцию $f(\zeta)/(\zeta - z)$, получим равномерно сходящийся ряд

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

на $C_{R_1^*}$ (см. лекцию 6, доказательство равномерной сходимости ряда (5)). Проводим почленное его интегрирование:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_{R_1^*}} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

В результате имеем

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \; c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1^*}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Рассмотрим второй интеграл из (1):

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^-_{R_2^*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Здесь, учитывая, что $\zeta \in C^-_{R_2^*}$, получим

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \left|\frac{z - z_0}{R_2^*}\right| > 1,$$

поэтому ряд (2) будет расходится. Меняем ход рассуждений. Запишем ряд для функции

$$\frac{1}{z - \zeta} = -\frac{1}{\zeta - z}$$

Тогда в разложении (2) следует поменять $\zeta$ на $z$, $z$ на $\zeta$. Имеем

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}, \qquad \left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \left|\frac{R_2^*}{z - z_0}\right| < 1$$

Этот ряд сходится на $C_{R_2^*}$! Подставляем его в формулу для $f_2(z)$ и проводим почленное интегрирование:

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^-_{R_2^*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^n} \oint\limits_{C^-_{R_2^*}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta$$

Отсюда следует, что

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \; c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^-_{R_2^*}} \frac{f(\zeta)}{\left(\zeta - z_0\right)^{-n+1}} d\zeta$$

Далее, унифицируем форму записи для коэффициентов $c_n$, $c_{-n}$. Заметим, что подынтегральные функции в выражении для этих коэффициентов являются аналитическими в кольце, поэтому, по теореме о составном контуре, значения интегралов не изменяться при непрерывной деформации кривых $C^-_{R_1^*}, C^-_{R_2^*}$ в единую простую замкнутую кривую $C$, принадлежащую кольцу и охватывающую точку $z_0$. Кривая $C$ должна проходиться против хода стрелки часов.

Пусть $C$ – контур, принадлежащий кольцу и содержащий внутри точку $z_0$. Тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \tag*{.(3)}$$

В результате имеем:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{4}$$

**Теорема доказана**.

Заметим, что точка $z_0$ может быть правильной точкой (точкой аналитичности), либо особой. Необходимость разложения функции в ряд Лорана в окрестности правильной точки следует из примера 1

**Пример 1**. Разложим в ряд функцию $(z-1)^{-1}$ в окрестности точки $z_0 = 0$ для случая $|z| < 1$. Имеем ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

Пусть $|z|>1$. Ряд Тейлора расходится. Тогда эту функцию будем раскладывать в ряд по $1/z$:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)-1}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

Этот ряд сходится, так как $|1/z|<1$, при этом он представляет собой ряд Лорана в окрестности правильной точки $z_0=0$. Здесь под окрестностью подразумевается вырожденное кольцо $|z|>1$ с центром в начале координат.

Рассмотрим пример, в котором $z_0$ является особой.

**Пример 2**. Разложим в ряд Лорана в окрестности $z_0=0$ функцию

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}$$

Эта функция имеет две особые точки: $0$ и $1$, поэтому $z_0=0$ есть особая точка.

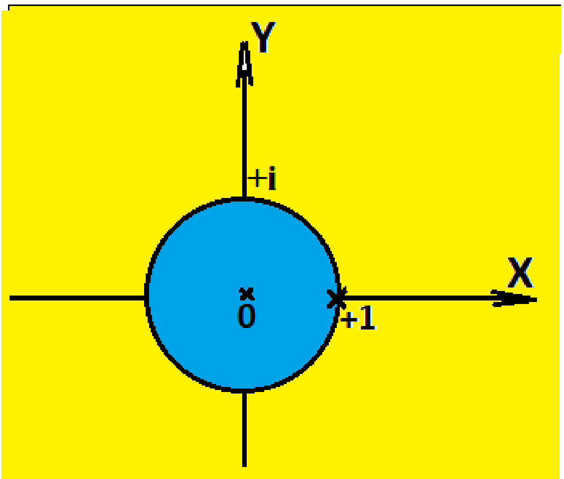


Рис.3

Рассмотрим две кольцевые области: a) $0<|z|<1$ (синий цвет, точка $z_0=0$ выколота),

b) $|z|>1$ (желтый цвет)

В кольце a) имеем

$$f(z)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}-\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)$$

Ряд состоит из главной части $z^{-1}$ и правильной части в виде ряда Тейлора, который сходится так как $|z|<1$.

В области b) разложение таково:

$$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

Ряд сходится, так как $\left|\frac{1}{z}\right|<1$.