I. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

I.I. Основные определения

Понятие определенного интеграла вводится для функции, заданной на конечном отрезке. Необходимое условие существования определенного интеграла заключается в том, что функция должна быть ограничена на этом отрезке. Отказ от конечности промежутка интегрирования или от ограниченности функции приводит к понятию несобственного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < +\infty$.

Определение I.I. Несобственным интегралом по промежутку $[a, +\infty)$ от функции $f(x)$ называется следующий предел:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\eta \to +\infty} \int_a^{\eta} f(x)\,dx.$$

Если этот предел конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, если бесконечен или вообще не существует – то расходящимся.

Заметим, что так как для любого $c \in [a, +\infty)$

$$\int_a^{\eta} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\eta} f(x)\,dx,$$

то по свойствам пределов $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \int_a^{\eta} f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \int_c^{\eta} f(x)\,dx$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится только в том случае, когда сходится $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$. Поэтому при сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Так как по определению

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^{c} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

то

$$\lim_{c \to +\infty} \int_c^{+\infty} f(x)\,dx = 0. \qquad (I.I)$$

Последнее равенство называется необходимым условием сходимости несобственного интеграла.

Теперь обратимся к случаю неограниченной функции. Пусть $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$, интегрируема на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, и $f(x) \to \infty$ при $x \to b-$.

Определение I.2. Несобственным интегралом по промежутку $[a, b)$ от функции $f(x)$ называется предел

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-} \int_a^{\eta} f(x)\,dx.$$

Аналогично определению I.I, если этот предел конечен, то несобственный интеграл $\int_a^{b} f(x)\,dx$ называется сходящимся, если бесконечен или вообще не существует – то расходящимся.

Точно так же из равенства

$$\int_a^{\eta} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\eta} f(x)\,dx, \text{ где } a < c < \eta < b,$$

следует, что интеграл $\int_a^{b} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_c^{b} f(x)\,dx$ при произвольном $c \in [a, b)$. При сходимости интеграла $\int_a^{c} f(x)\,dx$ из равенства

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b} f(x)\,dx$$

вытекает аналогичное (I.I) необходимое условие сходимости интеграла $\int_a^{b} f(x)\,dx$:

к несобств. интегралам.
на $[a,b]$, ограничена

$$\lim_{c \to b-} \int_c^b f(x)\,dx = 0. \qquad (I.2)$$

Следовательно, несобственные интегралы обоих видов и их свойства можно записать единым образом. Если $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, интегрируема на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, причем $f(x) \to \infty$ при $x \to b-$, если $b < +\infty$, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-} \int_a^\eta f(x)\,dx.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться единой записью.

Теперь определим несобственный интеграл с особенностью в левом конце промежутка. Пусть $f(x)$ определена на $(a, b]$, $-\infty \leq a < b < +\infty$, и интегрируема на любом отрезке $[\xi, b]$, $a < \xi < b$, причем $f(x) \to \infty$ при $x \to a+$, если $-\infty < a$.

<u>Определение I.3.</u> Несобственным интегралом по промежутку $(a, b]$ от функции $f(x)$ называется предел

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a+} \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Так как

$$\int_\xi^b f(x)\,dx = \int_\xi^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

при $a < c < b$, то по свойству пределов интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ при произвольном $c \in (a, b]$. В случае сходимости этого интеграла из равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \text{ где } a<c<b,$$

следует необходимое условие сходимости:

$$\lim_{c \to a+} \int_a^c f(x)\,dx = 0. \qquad (I.3)$$

Если особенности есть в обоих концах промежутка интегрирования, т.е. $f(x)$ определена на (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, и интег-

рируема на любом отрезке $[\xi, \eta]$, причем $f(x) \to \infty$ при $x \to a+$, если $-\infty < a$, и $f(x) \to \infty$ при $x \to b-$, если $b < +\infty$, то несобственный интеграл будет представлять собой два независимых предела.

<u>Определение I.4.</u> Несобственный интеграл по промежутку (a, b) от функции $f(x)$ есть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi \to a+ \\ \eta \to b-}} \int_\xi^\eta f(x)\,dx.$$

Из равенства $\int_\xi^c f(x)\,dx + \int_c^\eta f(x)\,dx = \int_\xi^\eta f(x)\,dx$ для $\xi < c < \eta$ получаем, что данное определение эквивалентно равенству

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

при $c \in (a, b)$, где интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует только в случае существования обоих интегралов $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$.

Наконец, рассмотрим определение несобственного интеграла для общего случая. Функция $f(x)$ определена на промежутке от a до b за исключением, быть может, конечного числа точек $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = b$, где $-\infty \leq a < x_1 < \ldots < x_{k-1} < b \leq +\infty$, причем $f(x) \to \infty$ при $x \to x_i+$ или при $x \to x_i-$, если $-\infty < x_i < +\infty$. Функция $f(x)$ также интегрируема на любом отрезке $[\xi, \eta]$, где $x_{i-1} < \xi < \eta < x_i$ при некотором $i = 1, \ldots, k$.

<u>Определение I.5.</u> Несобственным интегралом на промежутке $\langle a, b \rangle$ от функции $f(x)$ называется сумма

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

Таким образом, общее определение I.5 сводится к определениям I.1, I.2 и I.3 несобственных интегралов, у которых особенности имеются только в одном из концов промежутка интегрирования. Поэтому в дальнейшем все свойства и теоремы будем формулировать для несобственного интеграла с особенностью только в правом конце промежутка.

Заметим, что обычный определенный интеграл в отличие от введенного несобственного интеграла называют собственным.

I.2. Свойства несобственного интеграла

Будем предполагать, что функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$, и интегрируема на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, причем $f(x) \to \infty$ при $x \to b-$, если $b < +\infty$. На несобственные интегралы переносятся следующие свойства определенных интегралов.

I. Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ в полуинтервале $[a, b)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b, \tag{I.4}$$

где под $F(b)$ понимается предел $\lim\limits_{x \to b-} F(x)$ и равенство понимается в том смысле, что оно имеет место и, следовательно, интеграл сходится только в том случае, когда существует указанный предел. Равенство (I.4) - это формула Ньютона - Лейбница для несобственных интегралов.

Напомним, что под первообразной здесь понимается непрерывная на промежутке $[a, b)$ функция $F(x)$, которая дифференцируема внутри него и такая, что $F'(x) = f(x)$. Поэтому для $a < \eta < b$

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = F(\eta) - F(a),$$

при $\eta \to b-$ предел левой части равенства существует тогда и только тогда, когда существует предел правой части. Переходя в этом равенстве к пределу при $\eta \to b-$, получаем формулу (I.4).

2. Свойство линейности. Если интегралы $\int_a^b f_1(x)\,dx$ и $\int_a^b f_2(x)\,dx$ существуют, то существует интеграл $\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]\,dx$, где C_1 и C_2 - константы, и

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]\,dx = C_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{I.5}$$

Действительно, из линейности определенного интеграла для любого $a < \eta < b$ следует

$$\int_a^\eta [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]\,dx = C_1 \int_a^\eta f_1(x)\,dx + C_2 \int_a^\eta f_2(x)\,dx.$$

Так как пределы в правой части равенства

$$\lim_{\eta \to b-} \int_a^\eta f_1(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{\eta \to b-} \int_a^\eta f_2(x)\,dx = \int_a^b f_2(x)\,dx$$

существуют по условию, то по свойству пределов при $\eta \to b-$ существует предел левой части равенства. Переходя в этом равенстве к пределу при $\eta \to b-$, получаем (I.5).

3. Интегрирование неравенства. Если $f(x) \le g(x)$ для $x \in [a, b)$ и интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ существуют, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{I.6}$$

Действительно, по свойству определенных интегралов для $a < \eta < b$

$$\int_a^\eta f(x)\,dx \le \int_a^\eta g(x)\,dx.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\eta \to b-$, получаем неравенство (I.6).

4. Замена переменных. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$, $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема и возрастает на $[\alpha, \beta)$, где $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < b = \lim\limits_{t \to \beta-} \varphi(t)$ при $\alpha \le t < \beta$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{I.7}$$

причем оба интеграла одновременно либо сходятся, либо нет.

Так как функция $\varphi(t)$ возрастает, то для любого $\xi \in [\alpha, \beta)$ отрезок $[\alpha, \xi]$ отображается функцией φ на отрезок $[a, \varphi(\xi)]$.

Кроме того, выполнены остальные условия для функций $f(x)$ и $g(x)$ для замены переменных на указанных отрезках. Поэтому

$$\int_a^{\varphi(\xi)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\xi f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Так как по условию $\varphi(\xi) \to b-$ при $\xi \to \beta-$, то из записанного равенства несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ как пределы левой и правой частей равенства при $\xi \to \beta-$ существуют или нет одновременно. В случае их существования, переходя в этом равенстве к пределу при $\xi \to \beta-$, получаем формулу (I.7).

5. Интегрирование по частям. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b)$, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \qquad (I.8)$$

причем из существования любых двух выражений (I.8) следует существование третьего.

Запишем для отрезка $[a,\eta]$, $a<\eta<b$ формулу интегрирования по частям для определенного интеграла (функции u и v удовлетворяют нужным условиям):

$$\int_a^\eta u\,dv = uv\Big|_a^\eta - \int_a^\eta v\,du.$$

По свойству пределов из существования при $\eta \to b-$ пределов любых двух выражений в этом равенстве вытекает существование предела и третьего выражения. Переходя к пределу при $\eta \to b-$ в этом равенстве, получаем формулу интегрирования по частям (I.8).

Пример I.I. Рассмотреть интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ и исследовать его существование, т.е. решить, при каких α он сходится и при каких α расходится.

Решение. Если $\alpha>1$, то по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$

так как $\alpha-1>0$.

При $\alpha = 1$ имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

И, наконец, при $\alpha>1$ по той же формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = +\infty,$$

так как $1-\alpha>0$.

Таким образом, рассматриваемый несобственный интеграл сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Пример I.2. Рассмотреть интеграл от той же функции (см. пример I.I) по другому промежутку интегрирования: $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Особенность интеграла состоит в том, что при $\alpha>0$ подынтегральная функция не определена в левом конце промежутка, в точке 0, и стремится к бесконечности при $x\to 0+$. С помощью формулы Ньютона – Лейбница получаем:

при $\alpha>1$:

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty,$$

так как $\alpha-1>0$;

при $\alpha=1$:

$$\int_0^1\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_0^1 = +\infty;$$

при $\alpha<1$:

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\geqslant 1$.

Пример I.3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}e^{-x}dx$.

Решение. $\int_1^{+\infty}e^{-x}dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{\eta}e^{-x}dx = \lim_{\eta\to+\infty}(e^{-1}-e^{-\eta}) = \frac{1}{e}$

сходится.

2. СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

2.I. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

В этом разделе подробно остановимся на несобственных интегралах от неотрицательных функций. В математике часто при вычислении несобственного интеграла достаточно знать, сходится он или нет. Для неотрицательных функций существуют довольно мощные признаки, позволяющие решить этот вопрос. Для доказательства этих признаков нам понадобится необходимое и достаточное условие сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций. Как мы предположили выше, $f(x)$ определена на $[a,b)$, $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, и интегрируема на любом отрезке $[a,\eta]$, $a<\eta<b$.

Теорема 2.I. Пусть $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a, b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда все собственные интегралы $\int_a^\eta f(x)\,dx$ ограничены сверху в совокупности, т.е. существует M, такое, что $\int_a^\eta f(x)\,dx \leq M$ при любом $\eta \in [a, b)$.

Доказательство. Если мы рассмотрим функцию $F(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx$, являющуюся интегралом с переменным верхним пределом, то она не убывает на промежутке $[a, b)$, потому что при любых $\eta_1 < \eta_2$ из этого промежутка

$$F(\eta_2) = \int_a^{\eta_2} f(x)\,dx = \int_a^{\eta_1} f(x)\,dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx \geq \int_a^{\eta_1} f(x)\,dx = F(\eta_1),$$

так как $\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx \geq 0$ в силу неотрицательности функции.

По теореме о существовании предела монотонной ограниченной функции для неубывающей на $[a, b)$ функции существует конечный предел при $x \to b-$, если функция ограничена сверху, и предел равен $+\infty$, если функция не ограничена сверху. Отсюда в силу того, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-} \int_a^\eta f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-} F(\eta),$$

получаем утверждение нашей теоремы.

Прежде чем перейти к формулировке признаков сходимости интеграла, напомним одно понятие из сравнения функций. Запись $f(x) = O(g(x))$ при $x \to b-$ означает, что существует левая окрестность точки b, т.е. интервал (η_0, b) (b может быть и $+\infty$), в которой $f(x) = \psi(x)\,g(x)$ для некоторой ограниченной функции $\psi(x)$. Следовательно, если $|\psi(x)| \leq C$ при $x \in (\eta_0, b)$ для некоторого C, то $|f(x)| \leq C\,|g(x)|$ при $x \in (\eta_0, b)$. В случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, функция $\psi(x)$ также неотрицательна и $\psi(x) \leq C$, $f(x) \leq C \cdot g(x)$ при $x \in (\eta_0, b)$.

Теорема 2.2 (признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на $[a, b)$. Если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to b-$, то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$

или, что то же самое, из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. По условию существует левая окрестность (η_0, b) точки b, в которой $f(x) \leq C \cdot g(x)$ для некоторого C. Если интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится (см. разд. I.I), то сходится и интеграл $\int_{\eta_0}^b g(x)\,dx$.

Но по теореме 2.I тогда будет существовать такое M, что $\int_{\eta_0}^\eta f(x)\,dx \leq M$ для $\eta \in [\eta_0, b)$. Следовательно, по свойству определенных интегралов для $\eta \in [\eta_0, b)$

$$\int_{\eta_0}^\eta f(x)\,dx \leq C \int_{\eta_0}^\eta g(x)\,dx \leq CM.$$

Применяя теорему 2.I, только теперь в обратную сторону, получаем сходимость интеграла $\int_{\eta_0}^b f(x)\,dx$, а из нее – сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Если теперь предположить, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ будет также расходиться. В противном случае из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следовала бы сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Как следствие этой теоремы получим предельный признак сравнения.

Теорема 2.3 (предельный признак сравнения).

Если для неотрицательных на промежутке $[a, b)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ существует предел $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, может быть и бесконечный, то:

1) при $0 \le K < +\infty$ из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$;

2) при $0 < K \le +\infty$ из расходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Следствие 2.I</u>. При $0 < K < +\infty$ интегралы $\int_a^b g(x)\,dx$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>Доказательство теоремы 2.3</u>. Если $0 \le K < +\infty$, то по определению предела для $\varepsilon = 1$ существует такая левая окрестность (η_1, b) точки b, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon = 1, \qquad \text{т.е. } K-1 < \frac{f(x)}{g(x)} < K+1$$

и $f(x) \le (K+1)\,g(x)$ при $x \in (\eta_1, b)$, так как $g(x)$ неотрицательна. Из последнего неравенства по теореме 2.2 следует, что сходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ влечет за собой сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Если $0 < K \le +\infty$, то по свойству пределов существует такая левая окрестность (η_2, b) точки b, что $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{K}{2}$ при $x \in (\eta_2, b)$. В силу положительности $g(x)$ и K получаем $g(x) < \frac{2}{K} f(x)$ при $x \in (\eta_2, b)$, и, следовательно, по теореме 2.2 из расходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Рассмотрим некоторые примеры применения этих признаков.

<u>Пример 2.I</u>. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$.

<u>Решение</u>. Интеграл несобственный, поскольку у него бесконечный предел интегрирования и $\frac{1}{\ln x} \to \infty$ при $x \to 1+$. Поэтому для его

сходимости по определению должен сходиться каждый из интегралов $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ и $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$.

Из известного неравенства $\ln x < x$ следует, что $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ при $x \ge 2$. Но интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ из примера I.I расходится. Следовательно, расходится по признаку сравнения интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$, а таким образом, и исходный интеграл.

<u>Пример 2.2</u>. Исследовать на сходимость интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \ln \frac{x^2+1}{x^2}}{x^p}\,dx$, который является несобственным за счет бесконечного предела интегрирования.

<u>Решение</u>. Разложив подынтегральную функцию по формуле Тейлора, получим

$$\frac{\sin \ln \frac{x^2+1}{x^2}}{x^p} = \frac{\sin \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^p} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} = \frac{1}{x^{p+2}} + o\left(\frac{1}{x^{p+2}}\right).$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sin \ln \frac{x^2+1}{x^2}}{x^p}}{\dfrac{1}{x^{p+2}}} = \lim_{x\to+\infty} (1 + o(1)) = 1.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{p+2}}$ (см. пример I.I) сходится при $p+2>1$ и расходится при $p+2 \le 1$. Следовательно, по предельному признаку сравнения (см. теорему 2.3) интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \ln \frac{x^2+1}{x^2}}{x^p}\,dx$ также сходится при $p > -1$ и расходится при $p \le -1$.

2.2. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

Напомним обычный критерий Коши для существования предела функции, который удобен тем, что в нем отсутствует число, являющееся пределом: функция $g(x)$ имеет предел при $x \to a$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $a - \delta < x', x'' < a + \delta$ $(x', x'' \neq a)$ будет выполняться неравенство $|g(x') - g(x'')| < \varepsilon$.

Для того чтобы переформулировать этот критерий для сходимости несобственного интеграла, нужно только заметить, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-} F(\eta), \qquad \text{где} \qquad F(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx.$$

Теорема 2.4 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов).

Для того чтобы интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\eta_\varepsilon \in [a, b)$, что при $\eta_\varepsilon < \eta', \eta'' < b$ выполнялось неравенство

$$|F(\eta'') - F(\eta')| = \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

2.3. Абсолютная и условная сходимость

Для произвольной функции $f(x)$ рассмотрим наряду с интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{2.1}$$

интеграл от модуля этой функции:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. Если оба интеграла (2.1) и (2.2) сходятся, то интеграл (2.1) называется абсолютно сходящимся. Если интеграл (2.1) сходится, а интеграл (2.2) расходится, то интеграл (2.1) называется условно сходящимся.

Для абсолютной сходимости достаточно сходимости одного интеграла (2.2).

Теорема 2.5 (теорема Коши). Если интеграл (2.2) сходится, то интеграл (2.1) абсолютно сходится.

Доказательство. Действительно, если интеграл (2.2) сходится, то по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon \in [a, b)$, что при $\eta_\varepsilon < \eta', \eta'' < b$ будет выполняться неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon.$$

Используя свойство определенного интеграла, получаем неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon,$$

из которого видно, что выполняется критерий Коши для интеграла (2.1), следовательно, он сходится.

Таким образом, в отличие от случая неотрицательных функций, где интеграл сходится или расходится, в случае произвольной функции при исследовании несобственного интеграла могут быть реализованы три возможности: абсолютная сходимость, условная сходимость, расходимость. Поэтому при исследовании на сходимость интеграла от произвольной функции, как правило, сначала рассматривают сходимость интеграла (2.2) от модуля этой функции, так как к такому интегралу, являющемуся интегралом от неотрицательной функции, можно применить признак сравнения, дающий хорошие результаты. Если этот интеграл сходится, то исходный интеграл будет абсолютно сходящимся. Если он расходится, то необходимо дальше исследовать сходимость самого интеграла (2.1) от произвольной функции. Для этого получим два достаточных признака сходимости.

Теорема 2.6 (признак Дирихле). Если 1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$; 2) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, монотонна на $[a, b)$ и $g(x) \to 0$ при $x \to b-$, то интеграл $\int_a^b f(x) g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – ограниченная первообразная для $f(x)$ на $[a, b)$. По условию $f(x) g(x)$ непрерывна на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, и, следовательно, интегрируема, т.е. можно рассматривать записанный в теореме несобственный интеграл.

Проинтегрировав по частям на отрезке $[a, \eta]$ получим:

$$\int_a^\eta f(x) g(x)\,dx = g(x) F(x)\Big|_a^\eta - \int_a^\eta F(x) g'(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Так как $F(x)$ ограничена, то существует такое M, что $|F(x)|\le M$ для $x\in[a,b)$. Поэтому $|g(\eta)F(\eta)|\le|g(\eta)|M$ и $g(\eta)F(\eta)\to 0$ при $\eta\to b-$, так как $g(x)\to 0$ при $x\to b-$. Таким образом, при $\eta\to b-$ существует предел первого слагаемого в правой части(2.3).

Так как $g(x)$ монотонна на $[a,b)$, то $g'(x)\le 0$ или $g'(x)\ge 0$ на $[a,b)$. В первом случае

$$\int_a^\eta |F(x)g'(x)|\,dx \le M\int_a^\eta |g'(x)|\,dx = -M\int_a^\eta g'(x)\,dx = M[g(a)-g(\eta)]\le Mg(a),$$

так как из условий теоремы следует, что $g(x)\ge 0$ на $[a,b)$.

Во втором случае

$$\int_a^\eta |F(x)g'(x)|\,dx \le M\left[g(\eta)-g(a)\right]\le -Mg(a),$$

так как по условию теоремы $g(x)\le 0$ на $[a,b)$.

Таким образом, в любом случае интегралы $\int_a^\eta |F(x)g'(x)|\,dx$ ограничены в совокупности.

Следовательно, по теореме 2.1 интеграл $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ сходится, т.е. интеграл $\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx$ сходится абсолютно. Поэтому при $\eta\to b-$ существует предел и второго слагаемого в правой части (2.3), а значит, предел и левой части этого равенства, что дает сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.

Теорема 2.7 (признак Абеля). Если 1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится; 2) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, монотонна и ограничена на $[a,b)$, то интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Точно так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, функция $f(x)\,g(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,\eta]$, $a<\eta<b$. Поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$, то по основной теореме интегрального исчисления функция $F(\eta)=\int_a^\eta f(x)\,dx$ является первообразной для $f(x)$ на $[a,b)$.

Интегрируя по частям на $[a,\eta]$, имеем

$$\int_a^\eta f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^\eta F'(x)g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_a^\eta - \int_a^\eta F(x)g'(x)\,dx. \quad (2.4)$$

Так как интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то существует конечный предел $\lim_{\eta\to b-} F(\eta) = \lim_{\eta\to b-}\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. По условию $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a,b)$, поэтому по теореме о существовании предела монотонной ограниченной функции она имеет предел при $\eta\to b-$. Следовательно, выражение $F(x)g(x)\Big|_a^\eta$ по свойству пределов также имеет предел при $\eta\to b-$.

Функции $F(x)$ и $g(x)$ ограничены, т.е. $|F(x)|\le M$, $|g(x)|\le K$ для некоторых M и K и $x\in[a,b)$. Первая – в силу того, что имеет предел при $\eta\to b-$, вторая – по условию. Так как $g(x)$ монотонна по условию на $[a,b)$, то $g'(x)\le 0$ или $g'(x)\ge 0$. В первом случае

$$\int_a^\eta |F(x)g'(x)|\,dx \le M\int_a^\eta |g'(x)|\,dx = -M\int_a^\eta g'(x)\,dx = M\left[g(a)-g(\eta)\right]\le 2MK,$$

во втором

$$\int_a^\eta |F(x)\,g'(x)|\,dx \le M\left[g(\eta)-g(a)\right]\le 2MK.$$

Таким образом, так же как в доказательстве теоремы 2.6, по теореме 2.1 получаем, что интеграл $\int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$ абсолютно сходится. Поэтому второе слагаемое в правой части (2.4) имеет конечный предел при $\eta\to b-$, следовательно, таковой имеет и левая часть этого равенства, т.е. интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Пример 2.3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

Решение. Так как $\frac{\sin x}{x^\alpha}\le\frac{1}{x^\alpha}$ при любом x и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$, то по признаку сравнения (см. теорему 2.2) исходный интеграл абсолютно сходится.

При $\alpha>0$ $g(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$, монотонно убывая, стремится к 0 при $x\to+\infty$ и является непрерывно дифференцируемой на $[1,+\infty)$. Кроме того, $f(x)=\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$. Следовательно, наш интеграл сходится при $\alpha>0$ по признаку Дирихле.

Теперь рассмотрим интеграл от модуля подынтегральной функции при $0<\alpha\leq 1$. Так как $|\sin x|\leq 1$, то

$$\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{2x^{\alpha}}-\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}. \qquad (2.5)$$

Поскольку точно так же, как и исходный интеграл, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx$ сходится при $\alpha>0$ по признаку Дирихле, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^{\alpha}}$ расходится при $0<\alpha\leq 1$, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}dx$ расходится, иначе бы интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^{\alpha}}$ сходился по свойству 2 (см. разд. I.2) несобственных интегралов. Тогда по признаку сравнения из (2.5) следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx$ расходится при $0<\alpha\leq 1$. Таким образом, исходный интеграл при $0<\alpha\leq 1$ будет условно сходящимся.

Теперь рассмотрим $-1<\alpha\leq 0$ и проинтегрируем исследуемый интеграл по частям

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx=-\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\Bigg|_1^{+\infty}-\alpha\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx.$$

Так как $0<\alpha+1\leq 1$, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx$ сходится пр признаку Дирихле. С другой стороны, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}$ не существует, поэтому по свойству 5 интегрирования по частям (см. разд. I.2) интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ расходится.

Аналогично при $-2<\alpha\leq -1$ интегрируя два раза по частям, получаем

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx=-\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\Bigg|_1^{+\infty}-\frac{\alpha\sin x}{x^{\alpha+1}}\Bigg|_1^{+\infty}-\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha+2}}dx.$$

Так как $0<\alpha+2\leq 1$, то по признаку Дирихле интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha+2}}dx$ сходится, а пределы при $x\to+\infty$ функций $\frac{\cos x}{x^{\alpha}}$, $\frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}$ не существуют. Поэтому опять по свойству интегрирования по частям исследуемый интеграл расходится.

Рассуждая подобным образом дальше, получаем, что интеграл расходится при $\alpha\leq 0$. Таким образом, мы полностью исследовали на сходимость исходный интеграл.

Пример 2.4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\,\sin 2x}dx.$$

Решение. Подынтегральная функция неотрицательна, особой точкой является 0. Здесь не удается применить признак Дирихле, выделить соответствующие функции $f(x)$ и $g(x)$, поэтому попробуем применить признак Абеля.

Интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится. Функция $g(x)=\frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$ непрерывно дифференцируема на $(0,1]$, и

$$g'(x)=\frac{\sin 2x-2(1+x)\cos 2x\,\ln(1+x)}{(1+x)\sin^2 2x}<0$$

при $x\in(0,1]$, т.е. $g(x)$ убывает. Кроме того, существует предел $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$, откуда следует, что $g(x)$ ограничена на $(0,1]$. Итак, по признаку Абеля исходный интеграл сходится.

Замечание. Признаки Дирихле и Абеля являются достаточными. Поэтому, если их условия не выполняются, то ничего нельзя сказать о сходимости интеграла.

Пример 2.5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}-\sin x}dx$ при $\alpha>0$

Решение. К этому интегралу не удается применить указанные признаки, так как для функции $g(x)=\frac{1}{x^{\alpha}-\sin x}$ производная

$g'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1} + \cos x}{(x^\alpha - \sin x)^2}$ при $\alpha < 1$ бесконечное число раз меняет знак на $[1, +\infty)$, т.е. $g(x)$ не монотонна.

Чтобы решить вопрос о сходимости интеграла, выделим главную часть подынтегральной функции при $x \to +\infty$, применив разложение функции $(1-t)^{-1}$, $-1<t<1$, по формуле Тейлора:

$$\frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x} = \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\frac{1}{1-\sin x/x^\alpha} = \frac{\sin x}{x^\alpha}\left[1+\frac{\sin x}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin x}{x^\alpha} + \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) = \frac{\sin x}{x^\alpha} + \frac{1}{2x^{2\alpha}} - \frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right). \quad (2.6)$$

Интегралы $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ и $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}}\,dx$ сходятся по признаку Дирихле при $\alpha>0$. Функция $\frac{1}{2x^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)$ — неотрицательная в некотором интервале $(\eta, +\infty)$, непрерывна на $[1,+\infty)$ из (2.6) как сумма непрерывных функций и эквивалентна неотрицательной функции $\frac{1}{2x^{2\alpha}}$ при $x\to+\infty$, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^{2\alpha}}$ от которой сходится при $\alpha>\frac{1}{2}$ и расходится при $\alpha\le\frac{1}{2}$. Следовательно, по предельному признаку сравнения (см. теорему 2.3) интеграл $\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{2x^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right]dx$ сходится и расходится при тех же α.

Таким образом, при $\alpha>\frac{1}{2}$ интегралы от слагаемых в правой части (2.6) сходятся, поэтому сходится и исследуемый интеграл. При $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ интегралы от двух слагаемых сходятся, а интеграл от третьего слагаемого $\frac{1}{2x^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)$ расходится. Следовательно, будет расходиться и исследуемый интеграл.

Заметим, что функции $\frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x}$ и $\frac{\sin x}{x^\alpha}$ эквивалентны для $\alpha>0$ при $x\to+\infty$, так как $\frac{\sin x}{x^\alpha} = \varphi(x)\frac{\sin x}{x^\alpha-\sin x}$, где $\varphi(x) = 1-\frac{\sin x}{x^\alpha}\to 1$ при $x\to+\infty$. Тем не менее при $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ интеграл от первой из них расходится, а от второй сходится. Объясняется это тем, что функции бесконечное число раз меняют знак на $[1,+\infty)$, а к таким функциям признак сравнения неприменим.

2.4. Главное значение несобственного интеграла

Главное значение несобственного интеграла определяется в следующих случаях.

Определение 2.2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке. Тогда главным значением интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется конечный предел $\lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)\,dx$.

Главное значение обозначается так:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}f(x)\,dx.$$

Определенное таким образом главное значение отличается от определения несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ тем, что в последнем $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta\to+\infty\\ \xi\to-\infty}}\int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx$, переменные η и ξ независимо друг от друга стремятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно. Очевидно, что в случае сходимости несобственного интеграла его главное значение тем более существует и совпадает с ним. Поэтому главное значение имеет смысл рассматривать для расходящихся интегралов.

Пример 2.6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$.

Решение. Очевидно, что интеграл расходится, так как не существует ни $\lim_{\eta\to+\infty}(-\cos\eta)$, ни $\lim_{\xi\to-\infty}(\cos\xi)$. Главное его значение существует

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\sin x\,dx = \lim_{\eta\to+\infty}(-\cos\eta+\cos(-\eta))=0.$$

Все вышесказанное относится и ко второму случаю определения главного значения, когда особенность интеграла находится внутри промежутка $\langle a, b\rangle$.

Определение 2.3. Пусть $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$, где $-\infty<a<c<b<+\infty$ и $\varepsilon>0$. Тогда главным значением несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется конечный предел

$$v.p.\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$

<u>Пример 2.7</u>. Найти главное значение интеграла $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$.

<u>Решение</u>. Несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$, как мы видели выше, не существует. Тем не менее у него есть главное значение:

$$v.p.\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln|-\varepsilon| - \ln|-1| + \ln 1 - \ln\varepsilon\right) = 0$$

Здесь $c = 0$.

2.5. <u>Решение типовых примеров</u>

<u>Пример 2.8</u>. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx.$$

<u>Решение</u>. В этом примере бесконечный промежуток интегрирования и, кроме того, при $\alpha < 0$ неограничена подынтегральная функция в правой полуокрестности точки $x = 0$. Разделим эти особенности, представив данный интеграл в виде суммы $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$, где

$$\mathcal{J}_1 = \int\limits_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx, \qquad \mathcal{J}_2 = \int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx.$$

Подынтегральная функция положительна. Исследуем на сходимость интеграл $\mathcal{J}_1$. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x^\alpha} = \frac{\pi}{2}$, поэтому по теореме 2.3 необходимым и достаточным условием сходимости интеграла $\mathcal{J}_1$ является сходимость интеграла $\int\limits_0^1 x^\alpha dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{-\alpha}}$, который сходится, если $-\alpha < 1$ (см. пример I.2), т.е. при $\alpha > -1$.

Исследуем теперь на сходимость интеграл $\mathcal{J}_2$. Очевидно, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x^{\alpha-1}} = 1,$$

так как при $x\to+\infty$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Следовательно, интеграл $\mathcal{J}_2$ сходится, если только сходится

$$\int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha-1}dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1-\alpha}}.$$

Этот интеграл сходится при условии $1-\alpha > 1$ (см. пример I.I), т.е. при $\alpha < 0$. Итак, окончательно находим, что интеграл $\mathcal{J}$ сходится, если $-1 < \alpha < 0$.

<u>Пример 2.9</u>. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{|x-1|^\beta}\,dx.$$

<u>Решение</u>. Здесь подынтегральная функция не является знакопостоянной, поэтому рассмотрим отдельно случаи абсолютной и условной сходимости. Кроме того, имеются две особые точки $x = 0$ и $x = 1$, в окрестности которых подынтегральная функция неограничена, и бесконечный интервал интегрирования. Поэтому представим данный интеграл в виде суммы $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$, где

$$\mathcal{J}_1 = \int\limits_0^{1/2} \frac{x^\alpha \sin x}{|x-1|^\beta}\,dx,\quad \mathcal{J}_2 = \int\limits_{1/2}^{2} \frac{x^\alpha \sin x}{|x-1|^\beta}\,dx,\quad \mathcal{J}_3 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{|x-1|^\beta}\,dx.$$

Так как функция $\frac{x^\alpha \sin x}{|x-1|^\beta}$ на отрезке $[0, 2]$ знакопостоянна, то интегралы $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ могут сходиться только абсолютно. Для исследования их сходимости воспользуемся предельным признаком сравнения:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^\alpha \sin x}{|x-1|^\beta}}{\frac{1}{x^{-\alpha-1}}} = 1,$$

$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^{-\alpha-1}}$ сходится, если $-\alpha-1 < 1$, т.е. $\alpha > -2$ (см. пример I.2):

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{x^\alpha \sin x}{|x-1|^\beta}}{\frac{1}{|x-1|^\beta}} = \sin 1,$$

$$\int_{1/2}^{2}\frac{dx}{|x-1|^\beta}=\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{(1-x)^\beta}+\int_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^\beta}$$

сходится, если $\beta<1$ (см. пример I.2, только теперь особая точка x = I, а не x = 0).

Определим условие абсолютной сходимости интеграла $\mathcal{I}_3$.

Из неравенства

$$\frac{x^\alpha|\sin x|}{|x-1|^\beta}\leq\frac{x^\alpha}{(x-1)^\beta}\qquad(x>2)$$

и предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^\alpha}{(x-1)^\beta}}{\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}}=1$ находим, что интеграл $\mathcal{I}_3$ сходится, если $\beta-\alpha>1$. Точно так же, как в примере 2.3, можно показать, что если $\beta-\alpha\leq1$, интеграл $\mathcal{I}_3$ расходится, значит, расходится и исходный интеграл.

Итак, данный интеграл абсолютно сходится, если выполнены неравенства: $\alpha>-2$, $\beta<1$, $\beta-\alpha>1$.

Исследуем теперь этот интеграл на условную сходимость. Из сказанного выше вытекает, что условия $\alpha>-2$, $\beta<1$ сходимости интегралов $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ сохраняются и в этом случае. Рассмотрим интеграл $\mathcal{I}_3=\int_2^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{(x-1)^\beta}\,dx$ (знак модуля в знаменателе здесь можно опустить, так как $x-1>0$ в интервале $x\geq2$). При $\beta-\alpha>0$ функция $g(x)=\dfrac{x^\alpha}{(x-1)^\beta}$ монотонно убывает, стремится к 0 при $x\to+\infty$, является непрерывно дифференцируемой на $[2,+\infty)$. Функция $f(x)=\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$. Следовательно, интеграл $\mathcal{I}_3$ сходится при $\beta-\alpha>0$ по признаку Дирихле.

Рассуждения, подобные приведенным в примере 2.3, показывают, что при $\beta-\alpha\leq0$ интеграл $\mathcal{I}_3$ расходится. Итак, данный интеграл сходится условно, если выполнены неравенства: $\alpha>-2$, $\beta<1$, $0<\beta-\alpha\leq1$.

<u>Пример 2.10</u>. Найти $v.p.\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$.

<u>Решение</u>. Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках x = 2 и x = 3, в окрестности этих точек функция неограничена. Фиксируем любое $A>3$. Тогда по определению главного значения несобственного интеграла в смысле Коши имеем

$$v.p.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-5x+6}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\ \delta\to0+}}\left(\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-5x+6}+\int_{2+\varepsilon}^{3-\delta}\frac{dx}{x^2-5x+6}+\int_{3+\delta}^{A}\frac{dx}{x^2-5x+6}\right)+\lim_{\eta\to+\infty}\int_A^\eta\frac{dx}{x^2-5x+6}=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\ \delta\to0+}}\left(\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_0^{2-\varepsilon}+\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_{2+\varepsilon}^{3-\delta}+\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_{3+\delta}^{A}\right)+$$

$$+\lim_{\eta\to+\infty}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_A^\eta=-\ln\frac{3}{2}+\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\ \delta\to0+}}\left(\ln\left|\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right|+\right.$$

$$\left.+\ln\left|\frac{\delta}{1-\delta}\right|-\ln\left|\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right|+\ln\left|\frac{A-3}{A-2}\right|-\ln\left|\frac{\delta}{1+\delta}\right|\right)+$$

$$+\lim_{\eta\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{\eta-3}{\eta-2}\right|-\ln\left|\frac{A-3}{A-2}\right|\right)=\ln\frac{2}{3}.$$

<u>Пример 2.11</u>. Найти $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{1+x^6}\,dx$.

<u>Решение</u>.

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+\sin x}{1+x^6}\,dx=\lim_{\eta\to+\infty}\left(\int_{-\eta}^{\eta}\frac{x^2dx}{1+x^6}+\int_{-\eta}^{\eta}\frac{\sin x\,dx}{1+x^6}\right)=$$

(так как функция $\dfrac{x^2}{1+x^6}$ четная, а функция $\dfrac{\sin x}{1+x^6}$ нечетная)

$$=\lim_{\eta\to+\infty}2\int_0^\eta\frac{x^2dx}{1+x^6}=\frac{2}{3}\lim_{\eta}\int_0^\eta\frac{d(x^3)}{1+x^6}=\frac{2}{3}\lim_{\eta\to+\infty}\operatorname{arctg}\eta^3=\frac{\pi}{3}.$$

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

3.I. <u>Равномерная сходимость</u>

Рассмотрим интеграл вида

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx,\qquad(3.I)$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, переменная y принадлежит некоторому множеству Y и интеграл (3.I) при некоторых значениях y (а, может быть, и при всех) является несобственным. Такие несобственные интегралы называются интегралами, зависящими от параметра, они часто встречаются в различных приложениях.

Определение 3.I. Если для каждого $y \in Y$ интеграл $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится, то он называется сходящимся на множестве Y.

При формулировке дальнейших понятий и свойств мы, как и в предыдущих разделах, будем пользоваться предположением, что интеграл имеет особенность в правом конце промежутка интегрирования. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема в обычном смысле на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$.

В этом случае сходимость интеграла (3.I) на множестве Y означает существование при каждом $y \in Y$ предела

$$\lim_{\eta \to b-} \int_a^\eta f(x,y)\,dx = \lim_{\eta \to b-} F(\eta, y) = \int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{3.2}$$

На языке "$\varepsilon - \delta$" это записывается так: для каждого $y \in Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon(y) < b$, что при $\eta_\varepsilon < \eta < b$ будет выполняться неравенство

$$\left| F(\eta, y) - \int_a^b f(x,y)\,dx \right| = \left| \int_\eta^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Для нас центральным будет понятие равномерной сходимости интеграла (3.I) на множестве Y. Чтобы ввести это понятие, напомним понятие равномерного предела функции.

Определение 3.2. Пусть функция $\varphi(x,y)$ определена при $x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ и $y \in Y$, где $\dot{U}_{\delta_0}(x_0) = (x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0)$, $\delta_0 > 0$, проколотая окрестность точки x_0. Тогда $\varphi(x,y)$ равномерно стремится к функции $\varphi_0(y)$ на множестве Y при $x \to x_0$ (обозначение: $\varphi(x,y) \rightrightarrows \varphi_0(y)$ на Y при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $0 < \delta_\varepsilon \leqslant \delta_0$, что при $x \in \dot{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ будет выполняться неравенство

$|\varphi(x,y) - \varphi_0(y)| < \varepsilon$ для любого $y \in Y$.

Если перенести это определение равномерного предела на предел (3.2) функции $F(\eta, y)$, то получим определение равномерной сходимости интеграла.

Определение 3.3. Интеграл $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что при $\eta_\varepsilon < \eta < b$ будет выполняться неравенство

$$|F(\eta, y) - \Phi(y)| = \left| \int_\eta^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

при любом $y \in Y$.

Определение 3.3 отличается от определения 3.I тем, что в нем η_ε выбирается одно для всех $y \in Y$, тогда как в определении 3.I $\eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon(y)$ выбирается для каждого $y \in Y$ с тем, чтобы выполнялось соответствующее неравенство для интеграла.

Аналогично на несобственные интегралы переносится критерий Коши равномерной сходимости функций.

Теорема 3.I (критерий Коши равномерной сходимости интеграла). Интеграл (3.I) равномерно сходится на множестве Y тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что при $\eta_\varepsilon < \eta', \eta'' < b$ будет выполняться неравенство

$$|F(\eta'', y) - F(\eta', y)| = \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

для всех $y \in Y$.

Кроме того, нам понадобится достаточный признак равномерной сходимости интеграла.

Теорема 3.2 (признак Вейерштрасса). Если существует такая неотрицательная на $[a, b)$ функция $\varphi(x)$, интегрируемая в обычном смысле на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, что

I) $|f(x,y)| \leqslant \varphi(x)$ для $x \in [a, b)$ и $y \in Y$;

2) интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится,

то интеграл (3.I) сходится равномерно на Y.

Доказательство. Из условия (I) по признаку сравнения (см. теорему 2.2) интеграл (3.I) сходится абсолютно при каждом фиксированном $y \in Y$. Из определения сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что при $\eta_\varepsilon < \eta < b$ выполняется неравенство $\int\limits_{\eta}^{b} \varphi(x)\,dx < \varepsilon$. Тогда имеют место следующие неравенства при $\eta_\varepsilon < \eta < b$ и любом $y \in Y$:

$$\left|\int\limits_{\eta}^{b} f(x,y)\,dx\right| \le \int\limits_{\eta}^{b} |f(x,y)|\,dx \le \int\limits_{\eta}^{b} \varphi(x)\,dx < \varepsilon,$$

что по определению 3.3 означает равномерную сходимость интеграла (3.I) на Y.

Пример 3.I. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^y}\,dx$ сходится I) равномерно, если $y \le y_0 < 2$; 2) неравномерно, если $y < 2$.

В первом случае можно применить признак Вейерштрасса равномерной сходимости, так как существует, очевидно, мажоранта $\frac{1}{x^{y_0-1}}$ и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{y_0-1}}$ сходится в области $y_0 - 1 < 1$, т.е. $y_0 < 2$.

Для второго случая это рассуждение не годится. Рассмотрим $\int\limits_0^{\eta} \frac{\sin x}{x^y}\,dx$, зафиксируем $\eta > 0$ произвольно, но достаточно малым, чтобы при $x \le \eta$ выполнялось условие $\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{1}{2}$ (это возможно, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$). Тогда

$$\int\limits_0^{\eta} \frac{\sin x}{x^y}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^{\eta} \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2(2-y)}\,\eta^{2-y} \to \infty \quad при\ y \to 2$$

и, следовательно, в случае 2 интеграл не сходится равномерно.

Пример 3.2. Исследовать на равномерную сходимость $\mathcal{J} = \int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^y}$ в области $0 < y < 2$.

Решение. Заменяя $x = \frac{1}{t}$, преобразуем данный интеграл к виду $\mathcal{J} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{t^{2-y}}$ и применим к последнему интегралу критерий Коши (см. теорему 3.I), точнее, его отрицание, т.е. необходимое и достаточное условие неравномерной сходимости. Фиксируем $\varepsilon = 1$, возьмем любое $\eta_\varepsilon > 1$. Пусть $\eta', \eta'' > \eta_\varepsilon$ – два последовательных нуля синуса. Подберем $y^* \in (0,2)$ так, чтобы $\left(\frac{1}{\eta''}\right)^{2-y^*} = \frac{1}{2}$, т.е. возьмем $y^* = 2 - \frac{\ln 2}{\ln \eta''}$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} \frac{\sin t}{t^{2-y^*}}\,dt\right| > \left|\frac{1}{2}\int\limits_{\eta'}^{\eta''} \sin t\,dt\right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin t\,dt = 1,$$

т.е. для любого η_ε $\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} \frac{\sin t\,dt}{t^{2-y^*}}\right| > 1$, и, следовательно, интеграл сходится неравномерно.

3.2. Предел и непрерывность равномерно сходящегося интеграла

Начнем с вопроса о предельном переходе под знаком несобственного интеграла (3.I). Сначала рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма 3.I. Пусть функция двух действительных переменных $f(x,y)$ определена при $x \in X$ и $y \in Y$. Если $f(x,y)$ непрерывна на X при каждом фиксированном $y \in Y$ и равномерно сходится на X при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ также непрерывна на X.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in X$ и покажем непрерывность функции $\varphi(x)$ в этой точке.

В силу равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $y \in \dot{U}_\delta(y_0)$ выполняется неравенство

$|f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для любого $x \in X$.

Возьмем некоторое $\bar{y} \in \dot{U}_\delta(y_0)$. Тогда $f(x,\bar{y})$ непрерывна на X по условию, в частности, в точке x_0. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(x,\bar{y}) - f(x_0,\bar{y})| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in U_{\delta_0}(x_0)$. Тогда при $x \in U_\delta(x_0)$ будут выполняться неравенства

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \le |\varphi(x) - f(x,\bar{y})| + |f(x,\bar{y}) - f(x_0,\bar{y})| + |f(x_0,\bar{y}) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что означает непрерывность $\varphi(x)$ в точке x_0.

Теорема 3.3. Пусть функция $f(x,y)$ определена при $x \in [a,b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$, и $y \in Y$ и непрерывна по x на $[a,b)$ при каждом $y \in Y$. Тогда, если для любого $\eta \in [a,b)$ функция $f(x,y)$ равномерно сходится на $[a,\eta]$ при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y, то

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (3.3)$$

Доказательство. Если в лемме 3.I взять $X=[a,\eta]$, то из условия теоремы получим, что $\varphi(x)$ непрерывна на каждом отрезке $[a,\eta]$ $a<\eta<b$, т.е. и на $[a,b)$. По критерию Коши (см. теорему 3.I) для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta_\varepsilon<b$, что при $\eta_\varepsilon<\eta'<\eta''<b$ будет выполняться неравенство $\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ при любом $y\in Y$.

Так как $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$ при $y\to y_0$ на отрезке $[a,\eta'']$, то существует такое $\delta>0$, что при $y\in \dot{U}_\delta(y_0)$ выполняется неравенство: $|f(x,y)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2(\eta''-a)}$ при любых $x\in[a,\eta'']$. Возьмем некоторое $\bar y\in \dot{U}_\delta(y_0)$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''}\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''}[\varphi(x)-f(x,\bar y)]\,dx\right| + \left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x,\bar y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\eta'}^{\eta''}|\varphi(x)-f(x,\bar y)|\,dx + \left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x,\bar y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(\eta''-a)}(\eta''-\eta')+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon.$$

Таким образом выполняется условие критерия Коши (см. теорему (2.4) для интеграла $\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx$, и, следовательно, он сходится.

Далее, записывая определение сходимости и соответственно равномерной сходимости несобственного интеграла, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\eta_\varepsilon<b$, что при $\eta_\varepsilon<\eta<b$ будут выполняться неравенства:

$$\left|\int\limits_\eta^b\varphi(x)\,dx\right|<\varepsilon/3,$$

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon/3$$

при любом $y\in Y$.

Фиксируем $\bar\eta\in(\eta_\varepsilon,b)$. Из равномерной сходимости $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$ на отрезке $[a,\bar\eta]$ при $y\to y_0$ следует существование такого $\delta_\varepsilon>0$, что при $y\in\dot{U}_{\delta_\varepsilon}(y_0)$ будет $|f(x,y)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{3(\bar\eta-a)}$ для любого $x\in[a,\bar\eta]$. Поэтому при $y\in\dot{U}_{\delta_\varepsilon}(y_0)$ имеем

$$\left|\int\limits_a^b f(x,y)\,dx-\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_a^{\bar\eta} f(x,y)\,dx-\int\limits_a^{\bar\eta}\varphi(x)\,dx\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{\bar\eta}^b f(x,y)\,dx\right|+\left|\int\limits_{\bar\eta}^b\varphi(x)\,dx\right|<\int\limits_a^{\bar\eta}|f(x,y)-\varphi(x)|\,dx+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3(\bar\eta-a)}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Это означает по определению, что $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx.$ В качестве следствия доказанной теоремы получим теорему о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 3.4. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна (как функция двух переменных) при $x\in[a,b)$, $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, и $y\in[c,d]$, $-\infty<c<d<+\infty$.

Если интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[c,d]$, то он является непрерывной функцией на этом отрезке.

Доказательство. Возьмем произвольное $y_0\in[c,d]$ и покажем, что $\Phi(y)$ непрерывна в этой точке. При любом $\eta\in(a,b)$ функция $f(x,y)$ непрерывна на замкнутом прямоугольнике $[a,\eta]\times[c,d]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на нем по теореме Кантора. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при $|x''-x'|<\delta$ и $|y''-y'|<\delta$, где $x',x''\in[a,\eta]$, $y',y''\in[c,d]$, будет выполняться неравенство $|f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon$. Тогда для любого $x\in[a,\eta]$ и $y\in U_\delta(y_0)$ получим, что $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$, т.е. $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$ при $y\to y_0$ на любом отрезке $[a,\eta]$.

По теореме 3.3

$$\lim_{y\to y_0}\Phi(y)=\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx=\Phi(y_0).$$

3.3. Интегрирование несобственных интегралов, зависящих от параметра

Этот раздел посвящен двум теоремам об интегрировании несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 3.5. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна при $x\in[a,b)$, $-\infty<a<b\le+\infty$, и $y\in[c,d]$, $-\infty<c<d<+\infty$. Если интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, то

$$\int\limits_c^d \Phi(y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $\eta\in(a,b)$, функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,\eta]\times[c,d]$ и для двойного интеграла по этому прямоугольнику верна теорема о переходе к повторному интегрированию как для одного порядка переменных, так и для другого, т.е.

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\eta f(x,y)\,dx=\int\limits_a^\eta dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (3.5)$$

Функция $F(\eta,y)=\int\limits_a^\eta f(x,y)\,dx$ непрерывна по y по теореме 3.4, так как данный интеграл по сути собственный и стремится при $\eta\to b-$ к своему пределу $\Phi(y)$ равномерно на отрезке $[c,d]$ по условию. Поэтому можно воспользоваться теоремой 3.3 для интеграла $\int\limits_c^d F(\eta,y)\,dy$, который опять же будет собственным. По этой теореме в левой части равенства (3.5) можно перейти к пределу при $\eta\to b-$:

$$\lim_{\eta\to b-}\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\eta f(x,y)\,dx=\int\limits_c^d\Big(\lim_{\eta\to b}\int\limits_a^\eta f(x,y)\,dx\Big)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Следовательно, существует предел при $\eta\to b-$ и правой части равенства (3.5), который представляет собой по определению интеграл $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, что приводит к доказываемому равенству (3.4).

Теорема 3.6. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна при $x\in[a,b)$, $-\infty<a<b\le+\infty$, и $y\in[c,d)$, $-\infty<c<d\le+\infty$.

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на любом отрезке $[c,\xi]$, $c<\xi<d$, а интеграл $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ равномерно сходится на любом отрезке $[a,\eta]$, $a<\eta<b$, и существует один из двух повторных интегралов

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d |f(x,y)|\,dy,\qquad \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b |f(x,y)|\,dx,$$

то существуют и равны между собой оба повторных интеграла:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy,\qquad \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx,$$

т.е.

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \qquad (3.6)$$

Доказательство. Пусть существует интеграл $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d |f(x,y)|\,dy$.

При $\xi\in(c,d)$ из равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ на $[c,\xi]$ по теореме 3.5 имеем

$$\int\limits_c^\xi dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^\xi f(x,y)\,dy. \qquad (3.7)$$

Покажем, что в правой части этого равенства возможен предельный переход при $\xi\to d-$ под знаком интеграла. Для этого проверим выполнение условий теоремы 3.3 для функции $G(x,\xi)=\int\limits_c^\xi f(x,y)\,dy$, $x\in[a,b)$.

Действительно, $G(x,\xi)$ непрерывна по x по теореме 3.4 (здесь опять собственный интеграл) и сходится при $\xi\to d-$ по условию теоремы равномерно к $\Psi(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ на любом отрезке $[a,\eta]$, $a<\eta<b$.

Наконец, интеграл $\int\limits_a^b G(x,\xi)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^\xi f(x,y)\,dy$ сходится равномерно относительно ξ на $[c,d]$ по признаку Вейерштрасса (см. теорему 3.2), так как

$$|G(x,\xi)|\le\int\limits_c^\xi |f(x,y)|\,dy\le\int\limits_c^d |f(x,y)|\,dy$$

при $\xi \in [c,d)$ и интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,y)|\,dy$ по предположению сходится.

Следовательно, условия теоремы 3.3 выполнены и верны следующие равенства:

$$\lim_{\xi\to d-} \int\limits_a^b G(x,\xi)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{\xi\to d-} G(x,\xi)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Но поскольку предел при $\xi\to d-$ правой части равенства (3.7) существует, то существует равный ему предел и левой части этого равенства, который по определению представляет собой интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Это и приводит к доказательству равенства (3.6).

3.4. Дифференцирование несобственных интегралов, зависящих от параметра

Рассмотрим дифференцируемость несобственного интеграла (3.4).

Теорема 3.7. Пусть функция $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определены и непрерывны при $x\in[a,b)$, $-\infty<a<b\leq+\infty$, и $y\in[c,d]$, $-\infty<c<d<+\infty$. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ – сходится, а интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, то функция $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывно дифференцируема на $[c,d]$ и

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx. \tag{3.8}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $y\in[c,d]$ и применим теорему 3.5 к функции $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ и отрезку $[c,y]$, будем иметь:

$$\int\limits_c^y dy \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx - \int\limits_a^b f(x,c)\,dx.$$

По теореме 3.4 интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$, являющийся подынтегральной функцией в левой части написанного равенства, будет непрерывной функцией на $[c,d]$. Поэтому по теореме об интеграле с переменным верхним пределом интеграл слева имеет производную по y на $[c,d]$, и она определена и равна как раз интегралу $\int_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$.

Но тогда и правая часть написанного равенства имеет ту же производную. Так как $\int\limits_a^b f(x,c)\,dx$ является константой, то интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ также имеет производную, равную производной всей правой части, т.е. интегралу $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$.

3.5. Решение типовых примеров

Пример 3.3. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ $(a,b>0)$.

Решение. Рассмотрим вспомогательный интеграл, зависящий от параметра $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \mathcal{I}(y)$ $(y>0)$, и вычислим его:

$$\mathcal{I}(y) = \lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_0^\eta e^{-xy}\,dx = \lim_{\eta\to+\infty} -\frac{1}{y}e^{-xy}\Big|_0^\eta = \frac{1}{y}\lim_{\eta\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}e^{-\eta y}\right) = \frac{1}{y},$$

т.е.

$$\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y}.$$

Этот интеграл сходится равномерно по параметру в области $y\geq y_0>0$ по признаку Вейерштрасса, так как в этом случае существует мажоранта $e^{-xy}\leq e^{-xy_0}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx$ сходится; следовательно, можно проинтегрировать $\mathcal{I}(y)$ по y от a до b и изменить порядок интегрирования (см. теорему 3.6). В результате находим:

$$\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_a^b e^{-xy}\,dy = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int\limits_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}.$$

Итак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}.$$

Пример 3.4. Вычислить $J(b)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$, если $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(b,x)=e^{-ax^2}\cos bx$, и ее производная по параметру $f'_b(b,x)=-x e^{-ax}\sin bx$ непрерывны в области $\begin{cases}0\le x<+\infty,\\ -\infty<b<+\infty.\end{cases}$ Интегралы $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$ и $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx$ сходятся равномерно по параметру b по признаку Вейерштрасса. Действительно, для $\forall b$

$$|e^{-ax^2}\cos bx|\le e^{-ax^2} \quad \text{и} \quad |xe^{-ax^2}\sin bx|<xe^{-ax^2},$$

а интегралы $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ и $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}dx$ очевидно сходятся.

Следовательно, данный интеграл можно дифференцировать по параметру и $J'(b)=-\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx$. Вычислим этот интеграл:

$$J'(b)=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\sin bx\,d(x^2)=\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}-\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx=$$

$$=-\frac{b}{2a}J(b).$$

Для определения $J(b)$ получим дифференциальное уравнение: $J'(b)=-\frac{b}{2a}J(b)$. Интегрируя, получаем $J(b)=Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$.

Для определения постоянной интегрирования найдем значение интеграла при $b=0$ по полученной формуле и непосредственно:

$$J(0)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ (\text{ где } \sqrt{a}\,x=t).$$

Следовательно, $C=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Поэтому, окончательно имеем $J(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

Пример 3.5. Вычислить $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Решение. Рассмотрим вспомогательный интеграл, зависящий от параметра $J(y)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin xy}{x}dx$, где $y\ne 0$ – параметр, а $\alpha>0$ – константа.

Очевидно, что при $x>1$ справедливо неравенство $\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin xy}{x}\right|<e^{-\alpha x}$, и поэтому интеграл $J(y)$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса при любом y, а следовательно, функция $J(y)$ непрерывна. По тем же причинам равномерно сходится интеграл $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos xy\,dx$, и, следовательно, по теореме 3.7 о дифференцировании интеграла по параметру $J'(y)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos xy\,dx$.

Вычислим этот интеграл, проинтегрировав его по частям:

$$J'(y)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin xy}{y}dx=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin xy}{y^2}dx+e^{-\alpha x}\frac{\sin xy}{y}\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=-\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{d\cos xy}{y^2}=-\alpha e^{-\alpha x}\frac{\cos xy}{y^2}\Big|_0^{+\infty}-\alpha\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}\cos xy}{y^2}dx.$$

Подставляя пределы интегрирования и используя обозначение $J'(y)$, получаем $J'(y)=\frac{\alpha}{y^2}-\frac{\alpha^2}{y^2}J'(y)$. Отсюда $J'(y)\ \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$ и, значит, $J(y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}+C$. Из этой формулы в силу непрерывности $J(y)$ имеем: $\lim_{y\to 0}J(y)=C$. С другой стороны, непосредственной подстановкой $y=0$ в интеграл $J(y)$ получаем $J(0)=0$ и, следовательно, $C=0$.

Итак, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\frac{\sin xy}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}$, слева и справа в этом равенстве непрерывные функции α, интеграл слева равномерно сходится. Переходя в этом равенстве к пределу при $\alpha \to +0$, находим

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to+0} \operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y.$$

В частности, при $y = 1$ имеем

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 3.6. Вычислить $J = \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\,dx\ (a, b > 0)$.

Решение. Будем считать, что параметром является a, интеграл непрерывен по a для $a \geq 0$, так как

$$\frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2} \leq \frac{\ln(1+a_1^2x^2)}{b^2+x^2} \quad (\text{для } 0 \leq a \leq a_1)$$

и $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1+a_1^2x^2)}{b^2+x^2}\,dx$ очевидно сходится.

Найдем производную $J(a)$ по параметру a:

$$\frac{dJ}{da} = \int\limits_0^{\infty} \frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}\,dx.$$

Этот интеграл сходится равномерно для $0 < a_0 \leq a \leq a_1$, так как

$$\frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)} < \frac{2a_1x^2}{(b^2+x^2)(1+a_0^2x^2)}.$$

Здесь a_0, a_1 – произвольные числа, удовлетворяющие условию $0 < a_0 < a_1$. Вычислим $\frac{dJ}{da}$. Легко проверить, что

$$\frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)} = \frac{2a}{(a^2b^2-1)}\left(\frac{b^2}{b^2+x^2} - \frac{1}{1+a^2x^2}\right),$$

поэтому

$$\frac{dJ}{da} = \frac{2a}{(a^2b^2-1)}\left(b \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg} ax\Big|_0^{\infty}\right) = \frac{\pi}{ab+1}.$$

Следовательно, $J = \int \frac{\pi}{ab+1}\,da + C = \frac{\pi}{b}\ln(ab+1) + C$. Поскольку $\lim\limits_{a\to+0} J = 0$, то $C = 0$. Окончательно получим $J = \frac{\pi}{b}\ln(ab+1)$.

4. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА

4.1. Гамма-функция и ее свойства

Определение 4.1. Интегралом Эйлера второго рода или гамма-функцией называется интеграл

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx,$$

зависящий от параметра $s > 0$.

Этот интеграл – несобственный с двумя особенностями: при верхнем пределе; если $s < 1$, то он несобственный и при нижнем пределе, так как в этом случае при $x \to 0$ подынтегральная функция неограниченно возрастает. Убедимся, что гамма-функция действительно существует при любых $s > 0$. Для этого запишем

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{1} e^{-x} x^{s-1}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx$$

в виде суммы двух интегралов. Первый интеграл этой суммы – несобственный от неограниченной функции, если $s < 1$; второй интеграл – несобственный с бесконечным верхним пределом. Так как при $x \in [0,1]$ функция $e^{-x} \leq 1$, то $e^{-x}x^{s-1} < x^{s-1}$. Известно, что $\int\limits_0^1 x^{s-1}\,dx$ сходится лишь при $s-1 > -1$, т.е. при $s > 0$. Значит, по признаку сравнения при $s > 0$ сходится и интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$.

Заметим, что если натуральное число $n > s-1$, то $e^{-x}x^{s-1} < e^{-x}x^{n}$ $(x \in (1, +\infty))$.

Интеграл $\int\limits_1^{\infty} e^{-x}x^{n}\,dx$ сходится, в чем легко убедиться, взяв его n раз по частям с учетом того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$

для любого целого $k \geqslant 0$ (по правилу Лопиталя). Значит, интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx$ сходится при всех значениях s. Окончательно убеждаемся, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx$ сходится при всех $s>0$ и расходится при всех $s \leqslant 0$.

Обосновав существование гамма-функции при любых $s>0$, докажем, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx$ сходится равномерно по параметру s на любом конечном отрезке $0<s_0 \leqslant s \leqslant S_0 < +\infty$. Как и в случае исследования этого интеграла на простую сходимость, разобъем промежуток интегрирования $[0;+\infty)$ на два: [0; I] и [I; $+\infty$). Исследуем на равномерную сходимость интегралы $\int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx$ и $\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$. Интеграл $\int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx$ сходится равномерно при $0<s_0 \leqslant s < +\infty$ в силу мажорантного признака, так как $e^{-x} x^{s-1} \leqslant x^{s_0-1}$ при $0<x<1$ и $s \geqslant s_0$, а интеграл $\int_0^1 x^{s_0-1}\,dx$ при $s_0>0$ сходится. Интеграл

$$\int_0^{\varepsilon} x^{s-1} e^{-x}\,dx \geqslant \int_0^{\varepsilon} x^{s-1} e^{-1}\,dx = e^{-1}\int_0^{\varepsilon} x^{s-1}\,dx = \frac{\varepsilon^s}{se} \longrightarrow +\infty$$

при $s \to +0$ и $\varepsilon>0$. Следовательно, на интервале $0<s<+\infty$ интеграл $\int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx$ сходится неравномерно. Интеграл $\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$ сходится равномерно при $-\infty < s \leqslant S_0 < +\infty$, где S_0 – произвольное фиксированное число, в силу мажорантного признака, так как $x^{s-1} e^{-x} \leqslant x^{S_0-1} e^{-x}$ при $1 \leqslant x < +\infty$, а интеграл $\int_1^{+\infty} x^{S_0-1} e^{-x}\,dx$ сходится. На интервале $-\infty < s < +\infty$ этот интеграл равномерно сходиться не будет. Действительно, для любого натурального N при $s \to +\infty$, начиная с некоторого значения s, будет выполняться неравенство $s-p>N$ и, следовательно, неравенство

$$\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx > \int_1^{+\infty} x^N e^{-x}\,dx = -e^{-x} x^N \Big|_1^{+\infty} + N\int_1^{+\infty} x^{N-1} e^{-x}\,dx =$$

$$= (e^N + Ne^{N-1} + N(N-1)e^{N-2} + \ldots + N!)e^{-1} \to +\infty \text{ при } N \to +\infty.$$

Таким образом, $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx = +\infty$ при любом фиксированном $1>0$. Окончательно получаем: интеграл $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,dx$ сходится равномерно на интервале $0<s_0 \leqslant s < +\infty$, где s_0 – любое положительное число, а интеграл $\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$ сходится равномерно на интервале $-\infty < s \leqslant S_0 < +\infty$, где S_0 – произвольное конечное число. Поэтому оба интеграла одновременно сходятся равномерно на любом отрезке вида $0<s_0 \leqslant s \leqslant S_0$, и интеграл $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$ сходится равномерно относительно s на каждом таком отрезке.

Так как подынтегральная функция $f(x,p) = x^{p-1} e^{-x}$ непрерывна в полуполосе $0<x<+\infty$, $0<p<+\infty$, а сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ 1\to+\infty}} \int_{\varepsilon}^{1} x^{s-1} e^{-x}\,dx$$

является равномерной по s на каждом конечном отрезке $0<s_0 \leqslant s \leqslant S_0 < +\infty$, то $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$ является непрерывной функцией на бесконечном интервале $(0, +\infty)$.

Дифференцируя $\Gamma(s)$ по s под знаком интеграла, получим $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \ln x\, e^{-x}\,dx$. Это равенство возможно, так как $\int_0^{+\infty} x^{s-1} \ln x\, e^{-x}\,dx$ сходится равномерно на любом конечном отрезке $0<s_0 \leqslant s \leqslant S_0 < +\infty$, и производная $f'_s(x,s) = x^{s-1} \ln x\, e^{-x}$ непрерывна на указанной выше полуполосе.

Равномерная сходимость устанавливается после применения мажорантного признака к интегралам $\int_0^1 x^{s-1} \ln x\, e^{-x}\,dx$ и $\int_1^{+\infty} x^{s-1} \ln x\, e^{-x}\,dx$. Мажорирующими функциями являются соответственно $x^{s_0-1}|\ln x|$ и

$x^{s_0-1}|\ln x|\, e^{-x}$. Аналогично устанавливается существование производной любого порядка и справедливость равенства

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\,dx, \quad k=1,2,3,\dots$$

Интегрируя по частям, находим

$$s\,\Gamma(s) = s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx,$$

откуда $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x^s e^{-x}=0$.

Итак, мы получили основное функциональное уравнение или основную формулу приведения для гамма-функции. Из этой формулы по индукции получаем $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)=s(s-1)\Gamma(s-1)\dots = s(s-1)\dots(s-k)\,\Gamma(s-k)$, где $s-k>0$ и потому $\max k=[s]$ (при s дробном $[s]$ – целая часть s) и $\max k = s-1$ при натуральном s. Последняя формула сводит вычисление гамма-функции с помощью интеграла $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$, $s>0$, к интервалу $0<s<1$. Действительно, например, $\Gamma(4,4) = 3{,}4\cdot2{,}4\cdot1{,}4\cdot0{,}4\cdot\Gamma(0{,}4)$. При натуральном $s=n$, полагая $k=n-1$, эта формула дает $\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots2\cdot1\cdot\Gamma(1)$. Но $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}dx=1$, поэтому $\Gamma(n+1)=n!$ и $n! = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$.

Получили интегральное представление $n!$. Поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$ имеет смысл не только при натуральных n, но и при любых нецелых $n>0$, по определению можно положить

$$s! = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^s dx = \Gamma(s+1), \quad s\geq 0$$

и распространить таким образом понятие факториала на любые неотрицательные числа. Заметим, что интегральное определение $s!$ при натуральном $s=n$ совпадет с известным определением

$$n! = \Gamma(n+1) = n(n-1)\dots2\cdot1.$$

Запишем $s! = s(s-1)(s-2)\dots(s-k)\Gamma(s-k)$, $s>0$, где $k=[s]$, при s дробном и $k=n-1$ при натуральном $s=n$. Тогда, например, можно написать: $\frac{7}{2}! = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{7/2}dx = \Gamma(\frac{9}{2}) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})$, а из формулы $s! = \Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^s dx$, $s\geq 0$, следует $0! = \int_0^{+\infty}e^{-x}dx = 1$.

Теперь запишем основную формулу приведения для гамма-функции в виде $\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}$, $s>0$. Пусть $s\in(-1;0)$. Тогда $(s+1)\in(0;1)$. Следовательно, формула приведения позволяет продолжить (доопределить) гамма-функцию на интервал $(-1;0)$. Пусть $s\in(-2;-1)$, тогда $(s+1)\in(-1;0)$, т.е. $s+1$ изменяется на интервале, где гамма-функция уже доопределена и поэтому ее можно продолжить на интервал $(-2;-1)$. Продолжая гамма-функцию таким образом дальше, можно вычислить (после доопределения) ее значения для любых отрицательных значений аргумента s, за исключением целых отрицательных значений s и $s=0$. Фактически вычисление значений гамма-функции при нецелых отрицательных s можно производить с помощью формул

$$\Gamma(s-k) = \frac{\Gamma(s+1)}{s(s-1)(s-2)\dots(s-k)} = \frac{\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)\dots(s-k)},$$

($s\in(0,1)$, k – любое натуральное число), являющихся следствием формулы приведения. При $k=1$ имеем $\Gamma(s-1)=\frac{\Gamma(s)}{s-1}$, $s\in(0,1)$. Эта формула определяет значения гамма-функции на интервале $(-1;\ 0)$. При $k=2$ имеем $\Gamma(s-2)=\frac{\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)}$, $s\in(0;\ 1)$, и можно определить значения гамма-функции на интервале $(-2;\ -1)$. Вообще при любом натуральном k формула $\Gamma(s-k)=\frac{\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)\dots(s-k)}$, $s\in(0;1)$ определяет значения гамма-функции на интервале $(-k,-k+1)$. Из формулы приведения следует, что $\lim\limits_{s\to+0}\Gamma(s)=+\infty$, поэтому в точках $s=-k$, $k=0,1,2,\dots$, гамма-функция, определенная при отрицательных s выведенными формулами, по модулю неограниченно возрастает. В приложениях гамма-функция, как правило, считается доопределенной на отрицательные значения аргумента s указанным выше способом, и потому основная формула приведения имеет место и при отрицательных s ; при $s=-k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ гамма-функция обращается в бесконечность. В теоретических исследованиях и на практике часто используется второе интегральное представление гамма-функции. Его можно получить, если положить $x=y^2 (x \geqslant 0)$.

Тогда $\Gamma(s) = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} y^{2s-1}\,dy, \quad s>0.$

Замечание. Формула приведения сводит вычисление функции $\Gamma(s)$ при помощи несобственного интеграла к интервалу $0<s<1$. Однако этот интервал можно сузить до $(0;\frac{1}{2})$, если учесть, что гамма-функция удовлетворяет соотношению $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$, $0<s<1$ (см. формулу дополнения на с.50). Например,

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin 3\pi/4 \cdot \Gamma(1/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma(1/4)}.$$

Поэтому в ряде изданных таблиц значения гамма-функции приводятся лишь для $s \in (0;\frac{1}{2})$. При больших значениях s величина гамма-функции допускает простое асимптотическое представление:

$$\Gamma(s+1) \approx s^{s+1} e^{-s}\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\left[1+O(1)\right] \approx s^{s+1/2} e^{-s}\sqrt{2\pi}.$$

В частности, если $s=n$ - натуральное число, то $\Gamma(n+1) = n!$ и мы получаем формулу Стирлинга $n! \approx n^{n+1/2} e^{-n}\sqrt{2\pi}$. Формула, определяющая гамма-функцию $\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt = \int\limits_0^{\infty} e^{(z-1)\ln t} e^{-t}\,dt$, пригодна не только для вещественных значений $z>0$, но и для некоторых комплексных z . Если $z = x+iy$, $x>0$, то несобственный интеграл, определяющий $\Gamma(z)$, также сходится, поскольку подынтегральная функция

$$e^{(x+iy-1)\ln t} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} e^{-t} e^{iy\ln t} = t^{x-1} e^{-t} e^{iy\ln t}$$

отличается от функции $t^{x-1}e^{-t}$ лишь множителем $e^{iy\ln t}$, по модулю равным 1. Значит, можно определить $\Gamma(z)$ для всех $z = x+iy$ правой полуплоскости $\mathcal{J}$ плоскости z , для которых $Re\, z>0$. Интеграл сходится равномерно внутри области $\mathcal{J}$, так как имеется интегрируемая

мажоранта $t^{d-1}e^{-t}$, где величина $d = \inf\limits_{z\in \mathcal{J}} x$ положительна для любого компакта $Q \subset \mathcal{J}$. Функция $\Gamma(z)$ аналитична в области $\mathcal{J}$. Используя формулу $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$, получаем аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ в область $\mathcal{J}_n = \{z : Re\, z > -n\}$. При разных n получаются формально различные выражения, но в силу единственности аналитического продолжения различные выражения дают для любого z одно и то же значение функции $\Gamma(z)$. Так как n можно взять произвольно большим, то $\Gamma(z)$ оказывается определенной во всей плоскости z, за исключением изолированных особенностей в точках $z = 0, -1, \ldots, \ldots, -n+1, \ldots$ (полюсы первого порядка). Заметим, что

$$\text{Выч}\,\Gamma(z)\Big|_{z=-n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

4.2. Бета-функция и ее связь с гамма-функцией

Определение 4.2. Интеграл $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$, являющийся функцией двух параметров $p>0$ и $q>0$, называется интегралом Эйлера первого рода, или бета-функцией.

Это несобственный интеграл с двумя особенностями: при нижнем пределе, если $0<p<1$; при верхнем пределе, если $0<q<1$, так как в обоих случаях подынтегральная функция неограниченно возрастает при стремлении x к пределам интегрирования. Для всех положительных значений p и q : при $p, q \geqslant 1$ интеграл существует как собственный, при остальных значениях p и q - как несобственный. Действительно, запишем $B(p,q)$ в виде

$$B(p,q) = \int\limits_0^{\alpha} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int\limits_{\alpha}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

где $\alpha \in (0;1)$ - некоторое число.

Учитывая ограниченность функции $(1-x)^{q-1}$ при $x \in [0;\alpha]$: $(1-x)^{q-1} < M$, имеем $\int\limits_0^{\alpha} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx < M\int\limits_0^{\alpha} x^{p-1}\,dx$. Правый интеграл сходится при $p-1>-1$, т.е. при $p>0$, а поэтому при $p>0$ и любом q сходится интеграл $\int\limits_0^{\alpha} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$. Интеграл

$\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt$ приводится к аналогичному виду $\int_0^{1-\alpha} t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt$ ($t=1-x$) и, следовательно, тоже сходится при $q>0$ и любом p.

Полагая $x=\cos^2\varphi$, $\varphi\in[0;\pi/2]$, получим второе интегральное представление бета-функции:

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\varphi\cdot\sin^{2q-1}\varphi\, d\varphi.$$

Заметим, что

$$\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2p-1}dx,\quad \Gamma(q)=2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2q-1}dy$$

и потому

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2p-1}dx\cdot 2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2q-1}dy=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dx\,dy=4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dx\,dy,$$

где D - первая координатная четверть.

Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, приведем интеграл к виду

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\cdot 2\int_0^{2\pi}\cos^{2p-1}\varphi\cdot\sin^{2q-1}\varphi\, d\varphi,$$

откуда $\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\,B(p,q)$. Последнее равенство устанавливает связь между бета- и гамма-функциями:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Это соотношение позволяет легко вычислить значение интеграла Гаусса $\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$, часто используемого при решении задач математической физики. Положив в нем $p=q=1/2$, будем иметь

$$B(1/2,1/2)=\frac{\Gamma^2(1/2)}{\Gamma(1)},$$

откуда

$$\Gamma^2(1/2)=2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=B(1/2,1/2)\Gamma(1)=2\int_0^{\pi/2}d\varphi=\pi \text{ и } \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\pi,$$

т.е. находим величину интеграла Гаусса $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Отметим также свойство симметрии бета-функции: $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=$ $=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$, т.е. $B(p,q)=B(q,p)$, легко получаемое подстановкой $t=1-x$ с последующим переобозначением переменной интегрирования t на x.

Замечание. Связь между бета- и гамма-функциями можно получить и по-другому. Например, подстановкой $x=\frac{\theta}{1+\theta}$ преобразовать $B(p,q)$ к виду $B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{\theta^{p-1}d\theta}{(1+\theta)^{p+q}}$; в выражении для гамма-функции сделать подстановку $x=\theta y$: $\frac{\Gamma(s)}{\theta^s}=\int_0^{\infty}y^{s-1}e^{-\theta y}dy$; заменить здесь s на $p+q$ и θ на $1+\theta$: $\frac{\Gamma(p+q)}{(1+\theta)^{p+q}}=\int_0^{\infty}y^{p+q-1}e^{-y}e^{-\theta y}dy$ и т.д. [4].

Полагая $q=1-p$, из формулы связи гамма- и бета-функций получаем

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=B(p,1-p)=\int_0^{\infty}\frac{\theta^{p-1}d\theta}{1+\theta}.$$

Этот интеграл можно вычислить до конца с помощью аналитической функции $w(z)=\frac{z^{p-1}}{1+z}$ в плоскости комплексного переменного z, которая разрезана по вещественной положительной полуоси. Рассмотрим замкнутый контур L , состоящий из отрезка $[0,R]$ $(R>1)$ оси x на верхнем крае разреза, окружности C_R радиуса R с центром в начале координат, и отрезка $[R;0]$ на нижнем крае разреза. Внутри контура L будет находиться одна особая точка функции $w(z)$ - полюс первого порядка при z = -I. В результате преобразований и вычислений получим $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin\pi p}$.

Замечание. С помощью этого равенства иногда удобно вычислять несобственные интегралы. Например,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-2/3}}{1+t}dt=\frac{\pi}{3\sin\pi/3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом, находим

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Эта формула называется формулой дополнения для гамма-функции. Используя основное функциональное уравнение, получаем

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \ldots,\ \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},$$

так как $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ и $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ (из формулы дополнения при $p=\frac{1}{2}$).

4.3. Неполные гамма-функции и родственные функции

Многие функции, встречающиеся в работах по прикладной математике, могут быть выражены через неполные гамма-функции:

$$\gamma(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}dt,\quad \operatorname{Re}\alpha>0,$$

$$\Gamma(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt=\Gamma(\alpha)-\gamma(\alpha,x).$$

В ряде случаев предпочтительнее рассматривать в качестве основной модифицированную функцию

$$\gamma^*(\alpha,x)=\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}dt,$$

поскольку она является целой функцией как от α, так и от x, и вещественна при вещественных значениях α и x.

Через неполные гамма-функции можно выразить интегральную показательную функцию и интегральный логарифм, интегральные синус и косинус, интеграл вероятности, а также интегралы Френеля и обобщения этих функций. Впервые неполные гамма-функции при вещественных значениях x изучал Лежандр. Их функциональные свойства получены впервые, по-видимому, Примом из разложения $\Gamma(\alpha)=\gamma(\alpha,x)+\Gamma(\alpha,x)$. Для этих функций применяются различные обозначения. Например, в астрофизике и ядерной физике чаще всего используют обозначение

$$E_n(x)=\int_1^\infty e^{-xu}u^{-n}du=x^{n-1}\Gamma(1-n,x).$$

Иногда применяется и обозначение $K_n(x)$. Современное изложение теории неполных гамма-функций дал Бемер.

Принято определять неполные гамма-функции с помощью неполных интегралов Эйлера второго рода. Однако для того чтобы избежать трудностей, связанных с расходимостью интеграла $\gamma(\alpha,x)$ при $\operatorname{Re}\alpha>0$, часто неполные гамма-функции определяют равенствами [2]:

$$\gamma(\alpha,x)=\alpha^{-1}x^\alpha e^{-x}\Phi(1,1+\alpha;x)=\alpha^{-1}x^\alpha\Phi(\alpha,1+\alpha,-x),$$

$$\Gamma(\alpha,x)=x^\alpha e^{-x}\Psi(1,1+\alpha,x)=e^{-x}\Psi(1-\alpha,1-\alpha,x),$$

которые связаны с частным случаем $a=1$ вырожденных гипергеометрических функций $\Phi(a,c;x)$ и $\Psi(a,c;x)$. В иных обозначениях определение $\Gamma(\alpha,x)$ было известно Лежандру. В то время как функция $\gamma^*(\alpha,x)$ является целой функцией относительно α и x, функция $\gamma(\alpha,x)$ не определена при $\alpha=0,-1,-2,\ldots$ Функция $\Gamma(\alpha,x)$ является целой функцией от α, однако, за исключением случая, когда α - целое число, она является многозначной функцией от x с точкой ветвления $x=0$.

Рекуррентные формулы

$$\gamma(\alpha+1,x)=\alpha\gamma(\alpha,x)-x^\alpha\cdot e^{-x},$$

$$\Gamma(\alpha+1,x)=\alpha\Gamma(\alpha,x)+x^\alpha e^{-x}$$

являются простыми следствиями определений и могут быть выведены из неполного интеграла Эйлера второго рода путем интегрирования по частям. Эти формулы могут быть использованы для иного определения рассматриваемых функций.

Имеют место сходящиеся разложения по возрастающим степеням

$$\gamma(\alpha,x)=e^{-x}\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha)_{n+1}}=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!\,(\alpha+n)},$$

$$\Gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha)-\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!\,(\alpha+n)},$$

которые справедливы при всех x и $\alpha\neq 0,-1,-2,\ldots$. Здесь положено $(\alpha)_0=1$, $(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$, $n=1,2,\ldots$ Справедливы также асимптотические разложения по убывающим степеням x:

$$\Gamma(\alpha,x)=x^{\alpha-1}e^{-x}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(1-\alpha)_m}{(-x)^m}+O(|x|^{-M})\right],$$

$$\gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha)-x^{\alpha-1}e^{-x}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(1-\alpha)_m}{(-x)^m}+O(|x|^{-M})\right],$$

$x\to\infty$, $M=1,2,\ldots$