ЛЕКЦИЯ 4
РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРАЛ КОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

§1. Аналитичность суммы степенного ряда

Теорема 1. *Степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

является аналитической функцией $f(z)$ *в круге сходимости* $|z-z_0|<R$*, причем его производная может быть получена путем почленного дифференцирования ряда*:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Доказательство опускаем. Отметим только, что, зная вид степенного ряда, найти явный вид функции $f(z)$, описываемой эти рядом, весьма сложно. Как правило, $f(z)$ невозможно представить с помощью элементарных функций. В основном, эти функции являются специальными функциями, теория которых обширна и сложна.

Теорема 2. *Аналитическая функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<R$$

бесконечно дифференцируема в круге сходимости. Производная любого порядка p *получается путем p – кратного почленного дифференцирования ряда для* $f(z)$*:*

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1) a_n (z-z_0)^{n-p} \tag{0}$$

Действительно,

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \qquad f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}, \;\cdots$$

На p-ом шаге приходим к формуле (0). Заметим, что суммирование в формуле (0) ведется с номера $n=p$, так как члены ряда с номерами $n<p$ равны нулю. **Теорема доказана.**

Распишем равенство (0) подробно:

$$f^{(p)}(z)=p(p-1)\cdots(p-p+1)a_p + A(z-z_0)+B(z-z_0)^2+\cdots$$

где $A, B, \ldots$ – коэффициенты ряда. Тогда при $z=z_0$ имеем

$$f^{(p)}(z_0)=p!a_p \;\Rightarrow\; a_p=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$$

Итак, степенной ряд можно записать в виде

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$$

Последний называется рядом Тейлора. Таким образом, доказано утверждение:

Каждый степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы

§2. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть задана некоторая ориентированная кривая (L) с положительным направлением движения от нижнего конца a кривой к верхнему концу b. Предположим, что $f(z)$ -- функция комплексного переменного $z=x+iy$.

Определение 1. *Интегралом от* $f(z)$ *вдоль кривой* (L) *называют*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\left(z_{k+1}-z_k\right)=\int_L f(z)dz \tag{1}$$

где $z_0 = a, z_1, \dots, z_n,\ z_{n+1} = b$ -- *точки разбиения кривой* (L) *на* $(n+1)$ *участков.*

Здесь a и b -- концы кривой (L), ξ_k -- произвольная точка, принадлежащая участку $[z_k, z_{k+1}]$ кривой (L). Запись $n \to \infty$ означает, что $\max|z_{k+1} - z_k| \to 0$.

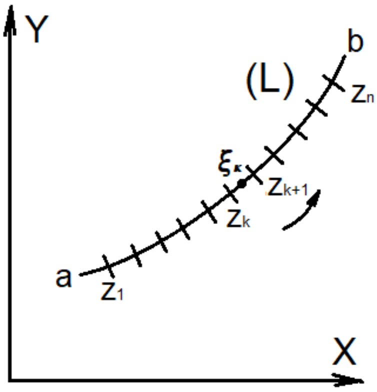

Рис. 1

Если (L) – гладкая кривая (либо кусочно-гладкая), $f(z)$ -- непрерывная (либо кусочно-непрерывная) и ограниченная функция, то интеграл (1) существует. Действительно, положим $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,

$$z_k = x_k + iy_k, x_{k+1} - x_k = \Delta x_k,\ y_{k+1} - y_k = \Delta y_k,$$

$$\xi_k = \eta_k + i\zeta_k,\ u(\eta_k, \zeta_k) = u_k,\ v(\eta_k, \zeta_k) = v_k$$

Получим

$$\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n}(u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum_{k=0}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n}(u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k)$$

Теперь отметим, что суммы в правой части этих равенств являются интегральными суммами для действительных криволинейных интегралов 2-го рода. При наших условиях эти интегралы существуют. Поэтому, устремляя n к бесконечности, получим, учитывая, что $\Delta x_k \to 0$, $\Delta y_k \to 0$ при $n \to \infty$, равенство

$$\boxed{\int_L f(z)dz = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (udy + vdx)} \qquad (2)$$

Итак, существование интегралов в правой части означает, что существует интеграл в левой части, т.е. интеграл (1) определен корректно.

Этот результат означает, в частности, что вычисление комплексного интеграла можно свести к вычислению вещественных интегралов. Сохраняются основные свойства вещественных криволинейных интегралов:

$$(\alpha)\ \int_L (af(z) + bg(z))dz = a\int_L f(z)dz + b\int_L g(z)dz;$$

$$(\beta)\ \int_{L_1+L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz; \quad (\gamma)\ \int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$$

Здесь L^- -- кривая L, проходимая в направлении от b к a (направление, обратное тому, что указано на рис. 1).

§3. Сведение комплексного интеграла к вычислению обыкновенного интеграла

Предположим, что кривая L допускает параметризацию: $x = x(t),\ y = y(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$. Ее можно записать в комплексном виде, используя комплексную функцию $\lambda(t) = x(t) + iy(t)$. Из формулы (2) следует, что

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta u(x(t),y(t))x'(t)dt - v(x(t),y(t))y'(t)dt +$$

$$+i\int_\alpha^\beta u(x(t),y(t))y'(t)dt + v(x(t),y(t))x'(t)dt$$

Здесь предполагается, что значение $t=\alpha$ соответствует начальной точке a, а $t=\beta$ -- точке b. Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta \left[u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\right]\cdot\left[x'(t)+iy'(t)\right]dt = \int_\alpha^\beta f(\lambda(t))\lambda'(t)dt$$

Пользоваться этой формулой удобно, когда $f(z)$ не аналитична, но непрерывна. Если $f(z)$ аналитична, то пользоваться этой формулой неудобно, лучше вычислять интеграл от $f(z)$, используя методы КА, о которых речь будет ниже. Есть исключения.

Пример. Вычислим интеграл

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a}$$

Здесь кривая L – окружность радиуса ρ с центром в точке $z=a,\ a=a_x+ia_y$.

$$x(t)=a_x+\rho\cos t,\ y(t)=a_y+\rho\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$$

Положим $\lambda(t)=x(t)+iy(t)$. Тогда параметризация окружности принимает вид $\lambda(t)=a+\rho e^{it}$. Имеем

$$f(\lambda(t))=\frac{1}{\lambda(t)-a}=\frac{1}{\rho e^{it}},\ dz=d\lambda(t)=\lambda'(t)dt=\rho i e^{it}dt$$

Подставляем в интеграл:

$$\int_{|z-a|=\rho}\frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{\cancel{\rho} i\,\cancel{e^{it}}dt}{\cancel{\rho}\,\cancel{e^{it}}}=i2\pi$$

§3. Интегральная теорема Коши.

Теорема Коши. *Пусть однозначная функция* $f(z)$ *аналитична в односвязной области D. Тогда интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру L, целиком лежащим в области D, равен нулю*:

$$\boxed{\oint_L f(z)dz=0}$$

Доказательство. Имеем

$$\oint_L f(z)dz=\oint_L\left(u\,dx-v\,dy\right)+\oint_L\left(u\,dy+v\,dx\right),\ f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \qquad (4)$$

Запишем условия аналитичности $f(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Покажем, что в силу условий теоремы, вещественные криволинейные интегралы правой части равенства (4) обращаются в ноль.

Из курса вещественного анализа известно, что в односвязной области D вещественный криволинейный интеграл второго рода не зависит от вида кривой, соединяющей точки A и B, т.е.

$$\int_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{L_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,, \tag{5}$$

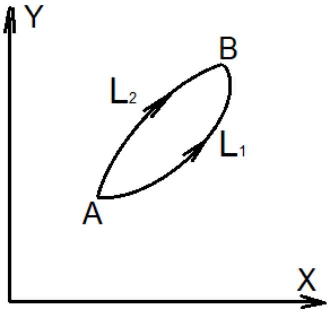

Рис. 2

тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6}$$

Теперь возвращаемся к условиям теоремы. Любую замкнутую кривую L, о которой идет речь в теореме и которая принадлежит области D, можно представить в виде $L = L_1 + L_2^-$, где L_2^- есть кривая L_2, но проходимая в обратном направлении (от точки B к точке A). Учитывая, что криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении направления движения вдоль кривой интегрирования, то равенство (5) запишем в виде

$$\oint_{L=L_1+L_2^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

Итак, *равенство* (7) *выполняется тогда и только тогда, когда справедливо равенство* (6).

Рассмотрим комплексный интеграл (4). Покажем, что вещественные криволинейные интегралы, входящие в правую часть равенства (4), равны нулю. Действительно, для $P = u,\, Q = -v$ равенство (6) принимает вид $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, что совпадает со вторым равенством условия Коши-Римана. Поэтому

$$\oint_L \left(u\,dx - v\,dy\right) = 0$$

Аналогично проверяем условие (6) для случая $P = v,\, Q = u$ и приходим к выводу, что

$$\oint_L \left(udy + vdx\right) = 0$$

Но это означает, что интеграл от $f(z)$ по замкнутому контуру L равен нулю. **Теорема доказана**.

Следствие. Из условия равенства нулю интеграла от $f(z)$ по замкнутому контуру $L = L_1 + L_2^-$ следует, что

$$\int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz$$

Поэтому интеграл от функции $f(z)$ не зависит от вида кривой, соединяющей точку A с точкой B, но зависит от начальной и конечной точек пути интегрирования. Тогда интеграл вдоль кривой L_1 можно представить в виде

$$\int_{L_1} f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz,$$

где z_0 -- начальная точка пути интегрирования (точка A), z -- конечная точка (точка B).

Оказывается, что такая форма записи интеграла от $f(z)$ вдоль кривой L_1 позволяет использовать традиционные методы вычисления вещественного определенного интеграла от функции одной переменной.

Действительно. Фиксируем точку z_0, полагая z переменной величиной. Справедлива теорема

Теорема. *Пусть однозначная функция* $f(z)$ *аналитична в односвязной области D. Тогда функция*

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

является аналитической в D и $\Phi'(z) = f(z)$.

Доказательство опускаем.

Функцию $\Phi(z)$ называют первообразной от $f(z)$. Правила ее вычисления идентичны правилам вещественного анализа. Заметим, что первообразная определяется с точностью до константы C, т.е. наряду с $\Phi(z)$ первообразной от функции $f(z)$ будет $\Phi(z)+C$. Имеем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$