МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

В.Н. НЕФЕДОВ

АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ, БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Утверждено на заседании редсовета
5 мая 2014 г

Москва
Издательство МАИ
2014

УДК 512

Нефедов В.Н. Алгебра множеств, бинарные отношения в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2014. – 88 с.: ил.

Пособие включает в себя основные теоретические сведения по следующим темам: алгебра множеств; бинарные отношения, функции; отношение эквивалентности; отношение частичного порядка; равномощность множеств, счетные, континуальные множества. В каждой из тем приведены краткие теоретические сведения (сопровождаемые примерами и упражнениями), необходимые для решения задач, а также множество задач и их решений. Предназначено для студентов специальностей «Прикладная математика», а также для студентов других специальностей, изучающих курс «Дискретная математика».

Р е ц е н з е н т ы:
профессор, канд. техн. наук *Т.А. Спиридонова*,
доцент, канд. физ.-мат. наук *К.В. Прозоров*

ISBN 978-5-4316-0218-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов специальностей «Прикладная математика», а также для студентов других специальностей, изучающих курс «Дискретная математика». Пособие включает в себя основные теоретические сведения по следующим темам: алгебра множеств; бинарные отношения, функции; отношение эквивалентности; отношение частичного порядка; равномощность множеств, счетные, континуальные множества. Вводимые понятия часто поясняются примерами. Некоторые из утверждений предлагаются в качестве упражнений. Большинство задач и упражнений сопровождаются решениями (иногда указаниями). По указанным разделам дискретной математики существует немало задач, решение которых не является вполне очевидным, а требует привлечения необычных (особенно для студентов младших курсов) методов и идей. Большинство из этих задач давно стали классическими и в большей полноте представлены, например, в [1].

Долговременный методический опыт показывает, что студентам младших курсов полезным является задачник с подробным решением «трудных» задач, с наиболее доступным изложением этих решений, в частности, сопровождаемым пояснениями в виде рисунков, таблиц, позволяющих на образном уровне понять идеи вводимых понятий и решений.

Автор стремился передать свой многолетний опыт преподавания этих разделов дискретной математики. Пособие является методическим дополнением к [2,3]. В пособии использовались некоторые задачи из [1], а также решения или указания к ним. Автор выражает благодарность Е.В. Бодрихину за помощь в графическом изображении рисунков.

Тема 1. Алгебра множеств

Понятие *множества* будем считать первоначальным, неопределяемым, мыслимым интуитивно (аналогично понятиям точки, прямой, плоскости в школьной геометрии). Под множеством M интуитивно понимаем совокупность определенных, различимых между собой объектов, мыслимых как единое целое. Эти объекты называются *элементами* множества M.

Пример 1.1. Множество студентов, учащихся в МАИ, множество натуральных чисел, множество целых чисел и т.д.

Мы пишем $x \in M$, если x – элемент множества M, и $x \notin M$ – в противном случае.

Принцип объемности. Два множества считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Мы пишем $A = B$, если множества A и B равны, и $A \neq B$ – в противном случае. Из определения равенства множеств следует, что $A = B \Leftrightarrow$ (а) для любого $x \in A$ справедливо $x \in B$; (б) для любого $x \in B$ справедливо $x \in A$.

Если элементами множества A являются объекты $a_1, a_2, ..., a_n$ и только они, то обозначаем $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. В случае, если каждый элемент множества A является элементом множества B, множество A называется *подмножеством* множества B (или A *включено в* B; или B *включает в себя* A). Для любых множеств A, B, C выполняется: $\varnothing \subseteq A$; $A \subseteq A$; $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$; $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow$ $\Rightarrow A \subseteq C$. Количество элементов в конечном множестве A будем обозначать $|A|$.

Пример 1.2. $|\varnothing| = 0$, $|\{\varnothing\}| = 1$, $|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$ и т.д.

Пример 1.3. (а) $\{1,2,3,4\} = \{3,4,2,1\}$, (б) $|\{1,2,3,4\}| = 4$, $|\{\{1,2,3,4\}\}| = 1$, $|\{\{1,2\},\{3,4\}\}| = 2$.

Принцип абстракции. Многие конечные множества трудно (или даже невозможно) описать перечислением объектов, принадлежащих этим множествам (тем более это относится к бесконечным множествам). В таких случаях часто применяется так называемый принцип абстракции. Приведем несколько определений. Языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно*, называется *высказыванием.*

Пример 1.4. «Москва – столица РФ», «$2 \neq 3$», «$2+2=3$» – высказывания. Предложения: «который час?», «$x \geq 2$» не являются высказываниями.

Под «*формой от* x» интуитивно понимается языковое предложение с вхождением в него x такое, что, если каждое вхождение в него x заменить именем некоторого объекта из рассматриваемой совокупности объектов, то в результате получится высказывание.

Пример 1.5. Пусть рассматриваемая совокупность объектов является множеством действительных чисел. Тогда предложения «$x \geq 2$», «$x = 3$», «$1 \leq x \leq 4$» являются формами от x. Напротив, предложения «$x - 2$», «для любого x выполняется $x \geq 2$», «существует такое x, что $1 \leq x \leq 4$» не являются формами от x, так как после подстановки вместо x конкретного числа первое предложение не будет являться высказыванием, а подстановка вместо x конкретного числа в другие два предложения нарушает их смысл, т.е. такая подстановка неправомерна.

Обозначим форму от x через $P(x)$. Сформулируем теперь интуитивный принцип абстракции. Любая форма $P(x)$ определяет некоторое множество A, состоящее из тех и только тех предметов a, для которых $P(a)$ – истинное предложение. При этом обозначаем $A = \{x \mid P(x)\}$.

Пример 1.6. $\{x \mid$«x – натуральное нечетное число, меньшее 9»$\}$ = = {1,3,5,7}.

Следующий пример иллюстрирует несовершенство интуитивных представлений о множествах. Заметим, что для множества $\mathrm{M} = \{x \mid x = x\}$ выполняется $\mathrm{M} \in \mathrm{M}$, а для множества $\varnothing$ выполняется $\varnothing \notin \varnothing$, т.е для любого множества возможны обе ситуации.

Пример 1.7 (Парадокс Рассела). Пусть $N = \{x \mid x \notin x\}$. Возможны два случая: 1) $N \in N$, и тогда по определению N выполняется $N \notin N$;

2) $N \notin N$, и тогда по определению N выполняется $N \in N$, т.е. в любом случае приходим к противоречию.

Таким образом, теория множеств в интуитивном изложении является противоречивой. Между тем, если в ходе данного рассуждения не выходить за пределы некоторого конкретного множества U (например, являющегося предметной областью какого-нибудь классического раздела математики, исследование которого никогда не приводило к противоречиям, или даже доказана непротиворечивость системы аксиом, на которой базируется указанный раздел), т.е. предполагать, что $\{x \mid P(x)\} = \{x \mid x \in U, P(x)\}$, то при удачном выборе U мы можем избежать противоречий. При этом множество U называется *универсальным* для данного рассуждения. Всюду далее будем предполагать, что универсальное множество U выбрано, при этом $U \neq \varnothing$.

Для любого множества $A \subseteq U$ обозначим $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$.

Пример 1.8. Пусть $A = \{1,2,3\}$. Тогда $2^A = \{\varnothing, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.

Утверждение 1.1. Если $|A| = n$, то $|2^A| = 2^{|A|} = 2^n$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Произвольное подмножество $B \subseteq A$ есть результат заполнения n ячеек: первая ячейка соответствует элементу a_1, вторая – элементу a_2 и т.д., n-я ячейка – элементу a_n. Каждая ячейка может быть заполнена соответствующим элементом или нет (т.е. имеются две возможности для каждой ячейки) независимо от других ячеек. Тогда общее число возможностей для заполнения совокупности из n ячеек выражается формулой 2^n (перемножаем число вариантов для каждой из ячеек n раз).

Операции над множествами. Введем следующие двухместные операции: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ – объединение множеств A и B; $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$ – пересечение множеств A и B; $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ – относительное дополнение множества B до множества A; $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – симметрическая разность множеств A и B, а также одноместную операцию $\overline{A} = U \setminus A$ – абсолютное дополнение множества A. Для упрощения записи различных выражений в алгебре множеств последняя операция считается самой «сильной», т.е. выполняемой в первую очередь.

Основные тождества алгебры множеств. Для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

4. $A \cup A = A$ (идемпотентность объединения);

5. $A \cup \overline{A} = U$;

6. $A \cup \varnothing = A$;

7. $A \cup U = U$;

8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (первый закон де Моргана);

9. $A \cup (A \cap B) = A$ (первый закон поглощения);

10. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ (первый закон расщепления);

1′. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);

2′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);

3′. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);

4′. $A \cap A = A$ (идемпотентность пересечения);

5′. $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

6′. $A \cap \varnothing = \varnothing$;

7′. $A \cap U = A$;

8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (второй закон де Моргана);

9′. $A \cap (A \cup B) = A$ (второй закон поглощения);

10′. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ (второй закон расщепления);

11. $\overline{\overline{A}} = A$;

12. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

13. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.

Тождества 1, $1'$, 2, $2'$, 4–7, $4' - 7'$, 9, $9'$, 11 следует признать очевидными. Докажем тождество 3. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in B, x \in C \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

С другой стороны, для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow x \in B, x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \end{array} \right] \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

Докажем тождество $3'$. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \in B \cup C \Rightarrow x \in A,$$

$$\left[\begin{array}{c} x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \\ x \notin B \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \end{array} \right] \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

С другой стороны, для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B \\ x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A, x \in C \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A, x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

Докажем тождество 8. Для любого $x \in U$ имеем: $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A, x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A}, x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$

Докажем тождество $8'$. Применим тождество 8 к $\overline{A}, \overline{B}$ и воспользуемся очевидным тождеством 11: $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B,$ а следовательно, $\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A \cap B},$ откуда $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

Докажем тождество 10. Используя доказанное тождество 3, имеем: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \varnothing = A.$

Докажем тождество $10'$. Используя доказанное тождество $3'$, имеем: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap U = A.$

Докажем тождество 12. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A, x \notin B \Leftrightarrow x \in A, x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}.$$

Докажем тождество 13. Используя доказанные ранее тождества, имеем:

$$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=$$
$$=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})=\varnothing\cup(A\cap\overline{B})\cup$$
$$\cup(B\cap\overline{A})\cup\varnothing=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A+B.$$

Докажем теперь тождество (ассоциативность +):

$$A+(B+C)=(A+B)+C. \qquad (1.1)$$

Будем в последующих выкладках для сокращения записи вместо $A\cap B$ писать AB и считать операцию $\cap$ более «сильной» операцией, чем $\cup, \setminus, +$ (т.е. выполняемой в первую очередь). Имеем:

$$A+(B+C)=[A\setminus(B+C)]\cup[(B+C)\setminus A]=[A\setminus(B\overline{C}\cup C\overline{B})]\cup$$
$$\cup[(B\overline{C}\cup C\overline{B})\setminus A]=A\overline{(B\overline{C}\cup C\overline{B})}\cup(B\overline{C}\cup C\overline{B})\overline{A}=$$
$$=A(\overline{B}\cup C)(\overline{C}\cup B)\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C=A(\overline{B}\overline{C}\cup C\overline{C}\cup\overline{B}B\cup CB)\cup$$
$$\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C=A\overline{B}\overline{C}\cup ABC\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C. \qquad (1.2)$$

С другой стороны, обозначив $A'=C, C'=A$ и используя (1.2), имеем: $(A+B)+C=C+(A+B)=C+(B+A)=A'+(B+C')=$

$$=A'\overline{B}\overline{C}'\cup A'BC'\cup\overline{A}'B\overline{C}'\cup\overline{A}'\overline{B}C'=C\overline{B}\overline{A}\cup CBA\cup\overline{C}B\overline{A}\cup$$
$$\cup\overline{C}\,\overline{B}A=\overline{A}\overline{B}C\cup ABC\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}=A+(B+C).$$

Табличный метод доказательства тождеств. Заметим, что для произвольного $x\in U$ (в каждой строке, следующей за первой, указывается один из возможных случаев для x) выполняется:

$x\in A$	$x\in\overline{A}$
да	нет
нет	да

Табл. 1.1

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\cup B$	$x\in A\cap B$	$x\in A\setminus B$	$x\in B\setminus A$	$x\in A+B=$ $=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$
да	да	да	да	нет	нет	нет
да	нет	да	нет	да	нет	да
нет	да	да	нет	нет	да	да
нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет

Табл. 1.2

Используя эти таблицы, докажем табличным методом справедливость уже доказанного тождества (1.1). Действительно, для произвольного $x \in U$ имеем:

				*		**
$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B + C$	$x \in A + (B + C)$	$x \in A + B$	$x \in (A + B) + C$
да	да	да	нет	да	нет	да
да	да	нет	да	нет	нет	нет
да	нет	да	да	нет	да	нет
да	нет	нет	нет	да	да	да
нет	да	да	нет	нет	да	нет
нет	да	нет	да	да	да	да
нет	нет	да	да	да	нет	да
нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет

Сравнивая столбцы, выделенные символами * и **, получаем, что $x \in A + (B + C) \Leftrightarrow x \in (A + B) + C$.

Заметим теперь, что табл.1.1 идентична табл. 1.3 (т.е. слову «да» в табл.1.1 соответствует символ U в табл. 1.3, а слову «нет» в табл. 1.1 – символ $\varnothing$ в табл. 1.3):

A	$\bar{A}$
U	$\varnothing$
$\varnothing$	U

Табл. 1.3

Соответственно, табл. 1.2 идентична табл. 1.4 (в том же смысле, что и для таблиц 1.1,1.3).

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$A + B$
U	U	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U
$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$	U	U
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Табл.1.4

Из идентичности приведенных таблиц следует, что справедливость любого тождества можно проверить табличным методом, проверяя его лишь при значениях символов множеств, входящих в него, выбираемых из $\{U,\varnothing\}$. Описанный табличный метод обладает рядом достоинств: (а) описан в виде алгоритма с простыми легко выполняемыми шагами; (б) легко программируется на ЭВМ; (в) если проверяемое тождество неверно, то при использовании табличного метода получаем пример множеств, для которых оно не выполняется.

Пример 1.9. Проверим справедливость тождества $A\setminus(B\setminus C)= = A\setminus(C\setminus B)$. Составим соответствующую таблицу и сравним столбцы в этой таблице, выделенные символами * и **):

				*		**
A	B	C	$B\setminus C$	$A\setminus(B\setminus C)$	$C\setminus B$	$A\setminus(C\setminus B)$
U	U	U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U
U	U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	$\varnothing$	U
U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$
U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U
$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	U	$\varnothing$	$\varnothing$	U	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Из приведенной таблицы следует, что, например, при $A=U$, $B=U$, $C=\varnothing$ рассматриваемое равенство не выполняется.

Всюду далее под *формулой алгебры множеств* будем интуитивно понимать формулу $f(A_1,...,A_n)$ (где $n\geq 1$) с переменными $A_1,...,A_n$, обозначающими произвольные множества (являющиеся подмножествами заданного универсального множества U), в которой эти переменные связаны между собой с помощью скобок, двухместных операций: $\cup, \cap, \setminus, +$, а также одноместной операции абсолютного дополнения (строгое определение формулы аналогично определению формулы логики высказываний (см., например, [2, стр. 26, 27]).

Пример 1.10. Примерами формул алгебры множеств являются: $\overline{\overline{A_1}\setminus(A_2+\overline{A_3})}$, $\overline{(A_1+\overline{A_2})}\cap(A_3\setminus(A_4\cup\overline{A_1}))$.

Будем далее формулы алгебры множеств обозначать буквами f, g, h, возможно с индексами.

Для краткости утверждение, заключающееся в том, что для некоторых формул алгебры множеств $f(A_1,...,A_n)$, $g(A_1,...,A_n)$ выполняется равенство $f(A_1,...,A_n)=g(A_1,...,A_n)$ для любых $A_i \in 2^U$, $i=1,2,...,n$ (т.е. выполняется тождество алгебры множеств), будем записывать следующим образом: $f \equiv g$.

Для краткости утверждение, заключающееся в том, что для некоторой формулы алгебры множеств $f(A_1,...,A_n)$ выполняется равенство $f(A_1,...,A_n)=\varnothing$ ($f(A_1,...,A_n)=U$) для любых $A_i \in 2^U$, $i=1,2,...,n$, будем записывать следующим образом: $f \equiv \varnothing$ ($f \equiv U$). Используя табл. 1.3, 1.4, получаем, что справедливо:

Утверждение 1.2. Пусть $f(A_1,...,A_n)$ – формула алгебры множеств. Тогда для любых $A_i \in \{U,\varnothing\}$, $i=1,2,...,n,$ выполняется $f(A_1,...,A_n) \in \{U,\varnothing\}$.

Сформулируем также в виде утверждения приведенный ранее табличный метод доказательства тождеств.

Утверждение 1.3. Пусть $f(A_1,...,A_n)$, $g(A_1,...,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Тождество алгебры множеств $f(A_1,...,A_n) \equiv$ $\equiv g(A_1,...,A_n)$ справедливо тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \{U,\varnothing\}$, $i=1,2,...,n,$ выполняется равенство $f(A_1,...,A_n)=$ $=g(A_1,...,A_n)$.

Следствие 1.1. Если для некоторых формул алгебры множеств $f(A_1,...,A_n)$, $g(A_1,...,A_n)$ выполняется тождество $f \equiv g$ при некотором универсальном множестве $U \neq \varnothing,$ то это тождество будет справедливым и для любого другого универсального множества $U \neq \varnothing$.

Табличный метод доказательства (или опровержения) утверждений алгебры множеств. Будем использовать следующее:

Утверждение 1.4. Пусть $f(A_1,...,A_n)$, $g(A_1,...,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Утверждение $f=\varnothing \Leftrightarrow g=\varnothing$ выполняется тогда и только тогда, когда $f \equiv g$.

Действительно, если $f \equiv g$, то $f=\varnothing \Leftrightarrow g=\varnothing$. В обратную сторону, пусть $f=\varnothing \Leftrightarrow g=\varnothing$. Тогда, в силу утверждения 1.2 $\forall A_i \in \in \{U,\varnothing\}$, $i=1,2,\ldots,n$, $f=g$, откуда, в силу утверждения 1.3, $f \equiv g$.

Утверждение 1.5. Пусть A, B – произвольные множества. Тогда

$$A \cup B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing, B=\varnothing, \tag{1.3}$$

$$A \setminus B=\varnothing \Leftrightarrow A \cap \overline{B}=\varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B, \tag{1.4}$$

$$A \cap B=\varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}, \tag{1.5}$$

$$A+B=\varnothing \Leftrightarrow A=B. \tag{1.6}$$

Доказательство. Утверждение (1.3) очевидно. Докажем справедливость (1.4). Пусть $A \setminus B=\varnothing$. Предположим, что не выполняется включение $A \subseteq B$. Тогда $\exists a \in A: a \notin B,$ откуда $a \in A \setminus B,$ что противоречит условию $A \setminus B=\varnothing$. Пусть теперь $A \subseteq B$. Предположим, что $A \setminus B \neq \varnothing$. Тогда $\exists a \in A: a \notin B,$ а это противоречит условию $A \subseteq B$. Для доказательства (1.5) воспользуемся (1.4), а также тождеством 11: $A \cap B=\varnothing \Leftrightarrow A \cap \overline{\overline{B}}=\varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$. Утверждение (1.6) является следствием утверждений (1.3), (1.4). Действительно, в силу (1.3), (1.4), $A+B=\varnothing \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A)=\varnothing \Leftrightarrow A \setminus B=\varnothing,\ B \setminus A=\varnothing \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A=B.$

Покажем теперь, что справедливо:

Утверждение 1.6. Пусть $f_1(A_1,\ldots,A_n), f_2(A_1,\ldots,A_n), g_1(A_1,\ldots,A_n)$, $g_2(A_1,\ldots,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Утверждение $f_1=f_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g_1=g_2$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливо тождество алгебры множеств $f_1+f_2 \equiv g_1+g_2$.

Действительно, используя (1.6), а также утверждение 1.4, получаем: $[f_1=f_2 \Leftrightarrow g_1=g_2] \Leftrightarrow [f_1+f_2=\varnothing \Leftrightarrow g_1+g_2=\varnothing] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f_1+f_2 \equiv g_1+g_2.$$

Кроме того, справедливо

Утверждение 1.7. Пусть $f_1(A_1,...,A_n), f_2(A_1,...,A_n), g_1(A_1,...,A_n)$, $g_2(A_1,...,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Тогда

(а) $[f_1 \subseteq f_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow f_1 \setminus f_2 \equiv g_1 + g_2$;

(б) $[f_1 = f_2 \Leftrightarrow g_1 \subseteq g_2] \Leftrightarrow f_1 + f_2 \equiv g_1 \setminus g_2$;

(в) $[f_1 \subseteq f_2 \Leftrightarrow g_1 \subseteq g_2] \Leftrightarrow f_1 \setminus f_2 \equiv g_1 \setminus g_2$.

Докажем (а) (доказательства (б), (в) аналогичны). Используя утверждения 1.4, (1.4), (1.6), получаем: $[f_1 \subseteq f_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [f_1 \setminus f_2 = \varnothing \Leftrightarrow g_1 + g_2 = \varnothing] \Leftrightarrow f_1 \setminus f_2 \equiv g_1 + g_2$.

Аналогичную теорию можно развить и для доказательства ряда односторонних утверждений, например вида $f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 = g_2$. Для этого воспользуемся следующим следствием утверждения 1.3.

Утверждение 1.8. Пусть $f(A_1,...,A_n)$ – формула алгебры множеств. Тождество $f \equiv \varnothing$ $(f \equiv U)$ справедливо тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \{U, \varnothing\}$, $i = 1,2,...,n,$ выполняется равенство $f(A_1,...,A_n) = \varnothing$ $(f(A_1,...,A_n) = U)$.

Для доказательства достаточно в утверждении 1.3 положить $g(A_1,...,A_n) = A_1 \cap \overline{A_1} \equiv \varnothing$ ($g(A_1,...,A_n) = A_1 \cup \overline{A_1} \equiv U$).

Покажем теперь, что справедливо

Утверждение 1.9. Пусть $f(A_1,...,A_n)$, $g(A_1,...,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Утверждение $f = \varnothing \Rightarrow g = \varnothing$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливо тождество $g \setminus f \equiv \varnothing$.

Действительно, если справедливо утверждение $f = \varnothing \Rightarrow g = \varnothing$, то при $A_i \in \{U, \varnothing\}$, $i = 1,2,...,n,$ в силу утверждения 1.2, выполняется равенство $g(A_1,...,A_n) \setminus f(A_1,...,A_n) = \varnothing$, а следовательно, в силу утверждения 1.8 справедливо тождество $g \setminus f \equiv \varnothing$. Рассуждение в обратную сторону очевидно.

Используя (1.4), (1.6), а также утверждение 1.9, нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1.10. Пусть $f_1(A_1,...,A_n)$, $f_2(A_1,...,A_n)$, $g_1(A_1,...,A_n)$, $g_2(A_1,...,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Тогда

(а) $[f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow (g_1 + g_2) \setminus (f_1 + f_2) \equiv \varnothing$;

(б) $[f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 \subseteq g_2] \Leftrightarrow (g_1 \setminus g_2) \setminus (f_1 + f_2) \equiv \varnothing$;

(в) $[f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow (g_1 + g_2) \setminus (f_1 \setminus f_2) \equiv \varnothing$;

(г) $[f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow g_1 \subseteq g_2] \Leftrightarrow (g_1 \setminus g_2) \setminus (f_1 \setminus f_2) \equiv \varnothing$.

Из утверждений 1.8, 1.10 следует, что для любых формул алгебры множеств f_1, f_2, g_1, g_2 проверка утверждений вида: $f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 = g_2$; $f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 \subseteq g_2$; $f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow g_1 = g_2$; $f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow g_1 \subseteq g_2$ может быть осуществлена описанным выше табличным способом.

Пример 1.11. Доказать или опровергнуть: $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B \setminus C \subseteq A$. В силу утверждения 1.10 проверка этого утверждения сводится к проверке выполнения тождества $f(A,B,C) = [(B \setminus C) \setminus A] \setminus [(A \cup B) + (A \cup C)] \equiv \varnothing$. Составим таблицу для f:

A	B	C	$B \setminus C$	$(B \setminus C) \setminus A$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) + (A \cup C)$	f
U	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$
U	U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$
U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$
U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	U	$\varnothing$	U	U	U	$\varnothing$	U	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Используя утверждение 1.8, получаем, что $f \equiv \varnothing$, а следовательно, в силу утверждения 1.10, рассматриваемое утверждение верно.

Решение системы уравнений в алгебре множеств относительно неизвестного множества X. Нам понадобится

Утверждение 1.11. Пусть A, B – множества, являющиеся подмножествами универсального множества $U \neq \varnothing$. Тогда (а) система уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = \varnothing, & (1.7) \\ B \cap \overline{X} = \varnothing & (1.8) \end{cases}$$

относительно неизвестного множества X имеет решение в том и только в том случае, когда $B \subseteq \overline{A}$; (б) решениями системы (1.7), (1.8) являются любые множества X такие, что $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

Доказательство. (а) Пусть система (1.7), (1.8) имеет решение X. Тогда, используя (1.4), (1.5), имеем: (1.7), (1.8) $\Rightarrow B \subseteq X,\ X \subseteq \overline{A} \Rightarrow$ $\Rightarrow B \subseteq \overline{A}.$ Обратно, пусть $B \subseteq \overline{A}$. Тогда, например для $X = B$ (или для $X = \overline{A}$), используя (1.4), (1.5), имеем $B \subseteq X \subseteq \overline{A} \Rightarrow X \subseteq \overline{A},$ $B \subseteq X \Rightarrow A \cap X = \varnothing, B \cap \overline{X} = \varnothing,$ т.е. X действительно является решением системы (1.7), (1.8). (б) Пусть $B \subseteq \overline{A}.$ Тогда, как доказано в (а), существует решение системы (1.7), (1.8). Причем, в силу (1.4), (1.5), имеем: (1.7), (1.8) $\Leftrightarrow X \subseteq \overline{A}, B \subseteq X \Leftrightarrow B \subseteq X \subseteq \overline{A},$ т.е. решениями системы (1.7), (1.8) являются все множества X такие, что $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

Приведем теперь алгоритм решения произвольной системы уравнений в алгебре множеств относительно одного неизвестного множества X. Для сокращения записи будем, как и ранее, писать AB вместо $A \cap B$ и считать $\cap$ самой «сильной» двухместной операцией (т.е. выполняемой в первую очередь).

Пусть $f_i(A_1,...,A_n,X)$, $g_i(A_1,...,A_n,X)$, $i = 1,2,...,m,$ – формулы алгебры множеств, где $A_1,...,A_n$ – некоторые множества, являющиеся подмножествами универсального множества U, X – неизвестное множество. Рассмотрим систему уравнений (относительно X)

$$f_i(A_1,...,A_n,X) = g_i(A_1,...,A_n,X),\ i = 1,2,...,m. \tag{1.9}$$

Алгоритм 1.1 решения системы уравнений (1.9)

1) Используя (1.3), (1.6), имеем: (1.9) $\Leftrightarrow$ $f_1 + g_1 = \varnothing,...,$ $f_m + g_m =$

$=\varnothing \Leftrightarrow (f_1+g_1)\cup\ldots\cup(f_m+g_m)=\varnothing$, т.е. можно считать, что система (1.9) имеет вид: $f(A_1,\ldots,A_n,X)=\varnothing$, где $f=(f_1+g_1)\cup\ldots\cup$ $\cup(f_m+g_m)$.

2) «Избавляемся» в $f(A_1,\ldots,A_n,X)$ от операций: $\backslash, +$, используя тождества: $A\setminus B=A\overline{B}$, $A+B=A\overline{B}\cup B\overline{A}$.

3) Используя законы де Моргана, приводим $f(A_1,\ldots,A_n,X)$ к виду, при котором знак абсолютного дополнения может находиться только над символами множеств: $A_1,\ldots,A_n,X$ (см. замечание 1.1). Пример:

$$f(A_1,\ldots,A_n,X)=\overline{A}_1(\overline{A}_2\cup\overline{X})X\cup A_3X\cup\overline{A}_4\overline{X}\cup(A_4X\cup A_5)A_5\,.$$

4) Используя дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$, приводим $f(A_1,\ldots,A_n,X)$ к виду «объединение пересечений» (аналогичному алгебраическому многочлену, где роль умножения играет $\cap$, а роль сложения – $\cup$). Пример (продолжение примера на шаге 3 алгоритма; см. также замечание 1.1):

$$f(A_1,\ldots,A_n,X)=\overline{A}_1\overline{A}_2X\cup A_3X\cup\overline{A}_4\overline{X}\cup A_4A_5X\cup A_5\,.$$

5) Группируем члены в $f(A_1,\ldots,A_n,X)$, образуя три группы: «без X», «с X», «с $\overline{X}$». Во второй группе выносим X за скобки, в третьей выносим за скобки $\overline{X}$:

$$f(A_1,\ldots,A_n,X)=h_1(A_1,\ldots,A_n)\cup h_2(A_1,\ldots,A_n)X\cup h_3(A_1,\ldots,A_n)\overline{X}.$$

Пример (продолжение примера на шаге 4 алгоритма):

$$f(A_1,\ldots,A_n,X)=A_5\cup(\overline{A}_1\overline{A}_2\cup A_3\cup A_4A_5)X\cup\overline{A}_4\overline{X}\,.$$

6) Используя (1.3), получаем: $f=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases} h_1=\varnothing,\\ h_2\cap X=\varnothing,\\ h_3\cap\overline{X}=\varnothing,\end{cases}$

откуда, в силу утверждения 1.11, необходимым и достаточным условием существования решения системы уравнений (1.9) является

$$h_1=\varnothing,\ h_3\subseteq\overline{h}_2, \tag{1.10}$$

и в случае выполнения (1.10) решениями системы уравнений (1.9) являются все множества X, удовлетворяющие условию: $h_3 \subseteq X \subseteq \overline{h}_2$.

Замечание 1.1. На шаге 3 алгоритма используется также тождество $\overline{\overline{A}} = A$, а на шаге 4 – тождества: $A \cap A = A, A \cup A = A, A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cup \varnothing = A$.

Замечание 1.2. Описанный алгоритм может быть применен и к системе уравнений относительно многих неизвестных $X_1,..., X_k$. При этом производится последовательное исключение неизвестных.

Замечание 1.3. Система (1.9) может также иметь иной вид (с включениями вместо равенств):

$$f_i(A_1,..., A_n, X) \subseteq g_i(A_1,..., A_n, X),\ i = 1,2,..., m. \tag{1.11}$$

В этом случае модифицируется шаг 1 алгоритма, а именно, используя (1.3), (1.4), имеем: (1.11) $\Leftrightarrow f_1 \setminus g_1 = \varnothing,..., f_m \setminus g_m = \varnothing \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f_1 \setminus g_1) \cup ... \cup (f_m \setminus g_m) = \varnothing$, т.е. система (1.11) сводится к единственному уравнению $f(A_1,..., A_n, X) = \varnothing$, где $f = (f_1 \setminus g_1) \cup ... \cup$ $\cup (f_m \setminus g_m)$.

Используя (1.3), (1.4), (1.6), нетрудно также модифицировать шаг 1 алгоритма и в случае, когда в рассматриваемую систему входит конечное число равенств и конечное число включений.

Пример 1.12. Пусть A, B – заданные множества, являющиеся подмножествами некоторого универсального множества U. Найти необходимое и достаточное условие для X (вида $g(A, B) \subseteq X \subseteq f(A, B)$, где $g(A, B), f(A, B)$ – формулы алгебры множеств), если $X \cup A =$ $= X \cup B$. Последовательно применяя шаги 1–6 алгоритма 1.1 и используя (1.4), получаем:

$$X \cup A = X \cup B \Leftrightarrow (X \cup A) + (X \cup B) = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(X \cup A) \setminus (X \cup B)] \cup [(X \cup B) \setminus (X \cup A)] = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (X \cup A)\overline{(X \cup B)} \cup (X \cup B)\overline{(X \cup A)} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (X \cup A)\overline{X}\,\overline{B} \cup (X \cup B)\overline{X}\,\overline{A} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X\ \overline{X}\ \overline{B} \cup A\overline{X}\ \overline{B} \cup X\ \overline{X}\ \overline{A} \cup B\,\overline{X}\ \overline{A} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\,\overline{X}\ \overline{B} \cup B\,\overline{X}\ \overline{A} = \varnothing \Leftrightarrow (A\overline{B} \cup B\overline{A})\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A+B)\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow (A+B) \subseteq X\ .$$

Пример 1.13. Пусть A, B, C – заданные множества, являющиеся подмножествами некоторого универсального множества U . Решить систему уравнений относительно неизвестного множества X :

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C. \end{cases} \tag{1.12}$$

Последовательно применяя шаги 1–6 алгоритма 1.1, получаем:

$$(1.12) \Leftrightarrow (AX + B) \cup [(A \cup X) + C] = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AX \setminus B) \cup (B \setminus AX) \cup [(A \cup X) \setminus C] \cup [C \setminus (A \cup X)] = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX\overline{B} \cup B(\overline{A} \cup \overline{X}) \cup\ (A \cup X)\overline{C} \cup C\overline{A}\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX\overline{B} \cup B\overline{A} \cup B\overline{X} \cup A\overline{C} \cup X\overline{C} \cup C\overline{A}\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{A}B \cup A\overline{C}) \cup (A\overline{B} \cup \overline{C})X \cup (B \cup \overline{A}C)\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A}B \cup A\overline{C} = \varnothing, \\ (A\overline{B} \cup \overline{C}) \cap X = \varnothing, \\ (B \cup \overline{A}C) \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$$

В силу утверждений 1.11, (1.3), (1.4) необходимым и достаточным условием существования решения этой системы, равносильной (1.12), является

$$\overline{A}B \cup A\overline{C} = \varnothing,\ \ B \cup \overline{A}C \subseteq \overline{A\overline{B} \cup \overline{C}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{A}B = \varnothing, A\overline{C} = \varnothing,\ \ B \cup \overline{A}C \subseteq (\overline{A} \cup B)C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B \subseteq A \subseteq C, B \cup \overline{A}C \subseteq BC \cup \overline{A}C\ \Leftrightarrow B \subseteq A \subseteq C,$$

так как в случае $B \subseteq C$ выполняется $BC = B, BC \cup \overline{A}C = B \cup \overline{A}C$.

В силу утверждения 1.11 единственным решением этой системы в случае $B \subseteq A \subseteq C$ является $X = B \cup \overline{A}C$.

ЗАДАЧИ

Задача 1.1. Используя основные тождества алгебры множеств, доказать тождества: (а) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$; (б) $(A\setminus B)\setminus C=$ $=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$; (в) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$.

Решение. (а) $A\setminus(B\setminus C)=A\setminus(B\cap\overline{C})=A\cap\overline{(B\cap\overline{C})}=$ $=A\cap(\overline{B}\cup C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$;

(б) $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\cap\overline{C})\cap\overline{(B\cap\overline{C})}=(A\cap\overline{C})\cap$ $\cap(\overline{B}\cup C)=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}\cap C)=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup\varnothing=$ $=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=(A\setminus B)\setminus C$; (в) $A\setminus(B\cup C)=A\cap\overline{(B\cup C)}=$ $=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=(A\setminus B)\setminus C$.

Задача 1.2. Используя основные тождества алгебры множеств, а также утверждения (1.4), (1.5), доказать утверждения: (а) $A\cap B\subseteq$ $C\Leftrightarrow\Leftrightarrow A\subseteq\overline{B}\cup C$; (б) $A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A\setminus B\subseteq C$.

Решение. (а) $A\cap B\subseteq C\Leftrightarrow(A\cap B)\setminus C=\varnothing\Leftrightarrow(A\cap B)\cap\overline{C}=$ $=\varnothing\Leftrightarrow\ A\cap(B\cap\overline{C})=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq\overline{B\cap\overline{C}}=\overline{B}\cup C$;

(б) $A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A\setminus(B\cup C)=\varnothing\Leftrightarrow A\cap\overline{(B\cup C)}=\varnothing\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=\varnothing\Leftrightarrow(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=\varnothing\Leftrightarrow(A\setminus B)\setminus C=\varnothing\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\setminus B\subseteq C$.

Задача 1.3. Доказать, что $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A+B=A\cup B.$

Решение. Используя тождество 13, имеем $A+B\subseteq A\cup B$, откуда $(A+B)\setminus(A\cup B)=\varnothing$, а следовательно, $A+B=A\cup B\Leftrightarrow(A+B)+$ $+(A\cup B)=\varnothing\Leftrightarrow(A\cup B)\setminus(A+B)=\varnothing\Leftrightarrow(A\cup B)\setminus[(A\setminus B)\cup$ $\cup(B\setminus A)]=(A\cup B)\overline{(A\overline{B}\cup B\overline{A})}=\varnothing\Leftrightarrow(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})=$ $=(A\cup B)(\overline{A}\overline{B}\cup AB)=A\overline{A}\overline{B}\cup AAB\cup B\overline{A}\overline{B}\cup BAB=AB=\varnothing$.

Задача 1.4. Доказать, что (а) $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow B\subseteq\overline{A}$; (б) $A\setminus B=\varnothing\Leftrightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$.

Решение. (а) Используя (1.4), имеем $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow B\cap\overline{\overline{A}}=$ $=\varnothing\Leftrightarrow B\setminus\overline{A}=\varnothing\Leftrightarrow B\subseteq\overline{A}$. (б) Используя (а), имеем $A\setminus B=\varnothing\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=\varnothing\Leftrightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$.

Задача 1.5. Выразить операции $\cup, \cap, \setminus$ через (а) $+, \cap$; (б) $+, \cup$; (в) $\setminus, +$.

Решение. (а) Для сокращения записи будем, как и ранее, писать AB вместо $A \cap B$ и считать $\cap$ самой «сильной» двухместной операцией, выполняемой в первую очередь. Используя тождество 13, имеем $(A+B)AB = \varnothing$, а следовательно (см. задачу 1.3), $(A+B)+AB =$

$$= (A+B) \cup AB = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup AB = A\overline{B} \cup B\overline{A} \cup AB =$$
$$= A(B \cup \overline{B}) \cup B\overline{A} = AU \cup B\overline{A} = A \cup B\overline{A} = (A \cup B)(A \cup \overline{A}) =$$
$$= (A \cup B)U = A \cup B; \ (A+B)A = [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]A =$$
$$= (A \setminus B)A \cup (B \setminus A)A = A\overline{B}A \cup B\overline{A}A = A\overline{B} = A \setminus B.$$

(б) Используя выкладки из задачи 1.3, получаем

$$(A+B)+(A \cup B) = AB; (A \cup B)+B = [(A \cup B) \setminus B] \cup [B \setminus (A \cup B)] =$$
$$= (A \cup B)\overline{B} \cup B\overline{(A \cup B)} = A\overline{B} \cup B\overline{B} \cup B\overline{A}\overline{B} = A\overline{B} = A \setminus B.$$

(в) $(A \setminus B)+B = A\overline{B}+B = [(A\overline{B}) \setminus B] \cup [B \setminus (A\overline{B})] = A\overline{B}\overline{B} \cup$

$$\cup B\overline{A\overline{B}} = A\overline{B} \cup B(\overline{A} \cup B) = A\overline{B} \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B;$$
$$A \setminus (A \setminus B) = A(\overline{A\overline{B}}) = A(\overline{A} \cup B) = A\overline{A} \cup AB = AB.$$

Задача 1.6. Доказать, что нельзя выразить (а) $\setminus$ через $\cup, \cap$; (б) $\cup$ через $\cap, \setminus$.

Решение. (а) Предположим, что $A \setminus B \equiv f(A,B)$, где f – формула алгебры множеств, в которой используются только операции $\cup, \cap$; A, B – произвольные множества (точнее, произвольные подмножества некоторого универсального множества U). Тогда при подстановке $A = U, B = U$ слева получаем $\varnothing$, а справа U , т.е. пришли к противоречию.

(б) Предположим, что $A \cup B \equiv f(A,B)$, где f – формула алгебры множеств, в которой используются только операции $\cap, \setminus$; A, B – произвольные множества (точнее, произвольные подмножества некоторого универсального множества U). Обозначим через $l(f)$ количество операций $\cap, \setminus$ в формуле f («длина» формулы f). Докажем индукцией по длине формулы f, что найдутся $A, B \in \{\varnothing, U\}$ такие, что $A \cup B = U$ и $f(A,B) = \varnothing$. Если $l(f) = 0$, то либо $f = A$, либо $f = B$. В первом случае $f(\varnothing, U) = \varnothing$, во втором $f(U, \varnothing) = \varnothing$ и $\varnothing \cup U = U \cup \varnothing = U$. Предположим, что для некоторого $n \geq 0$ указанное утверждение выполняется для любой формулы f с $l(f) \leq n$. Покажем его справедливость для любой формулы f с $l(f) = n+1$. Возможны случаи: $f(A,B) = f_1(A,B) \cap f_2(A,B)$, $f(A,B) = f_1(A,B) \setminus f_2(A,B)$, где $l(f_1) \leq n$, $l(f_2) \leq n$. В силу индуктивного предположения в любом из этих случаев для f_1 найдутся $A, B \in \{\varnothing, U\}$ такие, что $A \cup B = U$ и $f_1(A,B) = \varnothing$. Но тогда и $f(A,B) = \varnothing$, в то время, как $A \cup B = U$, т.е. для формулы f любой длины не может выполняться $A \cup B \equiv f(A,B)$.

Задача 1.7. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:
(а) $A + B = B \setminus C \Leftrightarrow A = B \cap C$; (б) $A + B = B \cap C \Leftrightarrow A = B \setminus C$;
(в) $A + B = B \cup C \Leftrightarrow A = C \setminus B$; (г) $A + \overline{B} = \overline{B} \cup C \Leftrightarrow A = B \cap C$.

Решение. (а) В силу утверждения 1.6 проверка этого утверждения сводится к проверке выполнения тождества $(A+B)+(B \setminus C) \equiv A + (B \cap C)$, для чего составим таблицу:

A	B	C	$A+B$	$B \setminus C$	$(A+B)+(B \setminus C)$	$B \cap C$	$A+(B \cap C)$
U	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	U	$\varnothing$
U	U	$\varnothing$	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	U
U	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U
U	$\varnothing$	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U	$\varnothing$	U
$\varnothing$	U	U	U	$\varnothing$	U	U	U
$\varnothing$	U	$\varnothing$	U	U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Сравнивая шестой и восьмой столбцы этой таблицы, заключаем о справедливости проверяемого тождества (см. утверждение 1.3), а также о справедливости проверяемого утверждения. Остальные утверждения проверяются аналогично.

Задача 1.8. Доказать или опровергнуть следующие утверждения: (а) $A\setminus(C\setminus B)=A\cap B\Leftrightarrow A\setminus C\subseteq A\cap B$; (б) $A+B=B+$ $+(A\cup C)\Leftrightarrow C\subseteq A$; (в) $A\cap(C\setminus B)=A\cap C\Leftrightarrow A\cap C\subseteq\overline{B}$; (г) $A+$ $+(B\cap C)=A+C\Leftrightarrow C\subseteq B$; (д) $A\setminus(C\setminus B)=A\setminus B\Leftrightarrow C\subseteq\overline{A}\cup B$; (е) $A\setminus(B\cup C)=A\setminus B\Leftrightarrow B\subseteq\overline{A}\cup C$.

Решение. (а) В силу утверждения 1.7 проверка этого утверждения сводится к проверке выполнения тождества $(A\setminus(C\setminus B))+(A\cap B)\equiv$ $\equiv(A\setminus C)\setminus(A\cap B)$, которое легко проверяется с помощью таблицы (см. утверждение 1.3). Остальные утверждения проверяются аналогично.

Задача 1.9. Найти необходимое и достаточное условие для X (вида $g(A,B)\subseteq X\subseteq f(A,B)$, где $g(A,B), f(A,B)$ – формулы алгебры множеств), если $A\cap X=B\cap X$.

Решение. Последовательно применяя шаги 1– 6 алгоритма 1.1, используя (1.5), получаем:

$$A\cap X=B\cap X\Leftrightarrow AX+BX=\varnothing\Leftrightarrow (AX\setminus BX)\cup$$
$$\cup(BX\setminus AX)=\varnothing\Leftrightarrow AX\,\overline{BX}\cup BX\,\overline{AX}=\varnothing\Leftrightarrow AX(\overline{B}\cup\overline{X})\cup$$
$$\cup BX(\overline{A}\cup\overline{X})=\varnothing\Leftrightarrow AX\overline{B}\cup AX\overline{X}\cup BX\overline{A}\cup BX\overline{X}=\varnothing\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\overline{B}X\cup B\overline{A}X=\varnothing\Leftrightarrow(A\overline{B}\cup B\overline{A})X=\varnothing\Leftrightarrow [(A\setminus B)\cup$$
$$\cup(B\setminus A)]X=\varnothing\Leftrightarrow(A+B)\cap X=\varnothing\Leftrightarrow X\subseteq\overline{A+B}.$$

Задача 1.10. Решить систему уравнений относительно неизвестного множества X:

$$\begin{cases} A\setminus X=B,\\ A\cup X=C.\end{cases}\tag{1.13}$$

Решение. Последовательно применяя шаги 1– 6 алгоритма 1.1, получаем:

$$(1.13) \Leftrightarrow [(A \setminus X) + B] \cup [(A \cup X) + C] = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A\overline{X} + B) \cup [(A \cup X) \setminus C] \cup [C \setminus (A \cup X)] = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A\overline{X} \setminus B) \cup (B \setminus A\overline{X}) \cup (A \cup X)\overline{C} \cup C\overline{(A \cup X)} = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\overline{X}\,\overline{B} \cup B\overline{A\overline{X}} \cup (A \cup X)\overline{C} \cup C\overline{A}\,\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\overline{X}\,\overline{B} \cup B(\overline{A} \cup X) \cup A\overline{C} \cup X\overline{C} \cup C\overline{A}\,\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\overline{B}\,\overline{X} \cup B\overline{A} \cup BX \cup A\overline{C} \cup X\overline{C} \cup C\overline{A}\,\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (B\overline{A} \cup A\overline{C}) \cup (B \cup \overline{C})X \cup (A\overline{B} \cup C\overline{A})\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} B\overline{A} \cup A\overline{C} = \varnothing, \\ (B \cup \overline{C}) \cap X = \varnothing, \\ (A\overline{B} \cup C\overline{A}) \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием существования решения этой системы является (см. утверждения 1.11, (1.3), (1.4)) $B\overline{A} \cup A\overline{C} = \varnothing$, $A\overline{B} \cup C\overline{A} \subseteq \overline{B \cup \overline{C}} \Leftrightarrow B \subseteq A \subseteq C$, $A\overline{B} \cup C\overline{A} \subseteq \overline{B}C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow B \subseteq A \subseteq C$, поскольку в случае $B \subseteq A \subseteq C$ выполняется: $A\overline{B} \subseteq \overline{B}C, C\overline{A} \subseteq \overline{B}C$ (так как $B \subseteq A \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$). В силу утверждения 1.11 решениями системы (1.13) будут все множества X, удовлетворяющие включениям $A\overline{B} \cup C\overline{A} \subseteq X \subseteq \overline{B}C$, но так как $B \subseteq A \subseteq C$, то $A\overline{B} \cup C\overline{A} = (A \cup C)(\overline{B} \cup C)(A \cup \overline{A})(\overline{B} \cup \overline{A}) = C(\overline{B} \cup C)(\overline{B} \cup \overline{A}) =$ $= C\overline{B} \cup C\overline{A} = \overline{B}C$, а следовательно, единственным решением этой системы в случае $B \subseteq A \subseteq C$ является $X = \overline{B}C = C \setminus B$.

Задача 1.11. Решить систему уравнений относительно неизвестного множества X:

$$\begin{cases} A \cup X = B \cap X, \\ A \cap X = C \cup X. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Решение. Последовательно применяя шаги 1–6 алгоритма 1.1, получаем:

$$(1.14) \Leftrightarrow [(A \cup X) + BX] \cup [AX + (C \cup X)] = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(A \cup X) \setminus BX] \cup [BX \setminus (A \cup X)] \cup [AX \setminus (C \cup X)] \cup$$
$$\cup [(C \cup X) \setminus AX] = \varnothing \Leftrightarrow [(A \cup X)\overline{BX}] \cup$$
$$\cup BX\,\overline{(A \cup X)} \cup AX\,\overline{(C \cup X)} \cup (C \cup X)\overline{AX} = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \cup X)(\overline{B} \cup \overline{X}) \cup BX\overline{A}\overline{X} \cup AX\overline{C}\overline{X} \cup (C \cup X)(\overline{A} \cup \overline{X}) = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\overline{B} \cup A\overline{X} \cup X\overline{B} \cup X\overline{X} \cup C\overline{A} \cup C\overline{X} \cup \overline{A}X \cup X\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\overline{B} \cup \overline{A}C = \varnothing, \\ (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap X = \varnothing, \\ (A \cup C) \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием существования решения этой системы является (см. утверждение 1.11) $A\overline{B} \cup \overline{A}C = \varnothing$, $A \cup C \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$, что, в силу (1.3), (1.4), равносильно условию $C \subseteq A \subseteq B$ (очевидно, что $C \subseteq A \subseteq B \Rightarrow A \cup C = A = A \cap B$). Используя утверждение 1.11, получаем, что единственным решением системы (1.14) в случае $C \subseteq A \subseteq B$ является $X = A$.

Тема 2. Упорядоченные пары. Прямое произведение множеств. Бинарные отношения. Функции

Прямое произведение множеств. *Упорядоченная пара* $\langle a,b \rangle$ интуитивно определяется как совокупность двух предметов a и b, расположенных в строго определенном порядке. Основное свойство упорядоченных пар состоит в том, что $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle \Leftrightarrow a = c, b = d$.

Упражнение 2.1. Пусть $\langle a,b \rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$. Доказать, что
$$\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Указание. Отдельно рассмотреть случаи: $a = b$, $a \neq b$.

Аналогично определяется упорядоченная n-ка $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$.

Замечание 2.1. Можно определить: $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle$, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = \langle \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, a_4 \rangle$, и т.д.

Основное свойство упорядоченных n-ок заключается в следующем:

$$\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle = \langle b_1, b_2, ..., b_n \rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1, ..., a_n = b_n.$$

Прямым (декартовым) произведением множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< a_1, ..., a_n > | \, a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n\}$. В случае $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ будем кратко писать $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$.

Упражнение 2.2. Доказать, что если $A_1, A_2, ..., A_n$ – конечные множества, то $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

Указание. Воспользоваться рассуждениями, аналогичными доказательству утверждения 1.1.

Пример 2.1. Пусть $A = \{2;3\}, B = \{0;1;2\}$. Тогда $A \times B = \{\langle 2,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,0 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$, $B \times A = \{\langle 0,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle\}$. Заметим, что в приведенном примере $A \times B \neq B \times A$, т.е. операция прямого произведения в общем случае не является коммутативной.

Пример 2.2. Пусть $A = [0;2], B = [0;1]$. Тогда $A \times B = \{\langle a, b \rangle | \, a \in [0;2], b \in [0;1]\}$ – прямоугольник (см. рис. 2.1).

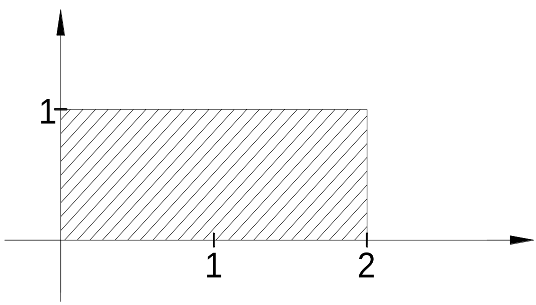


Рис. 2.1

Пример 2.3. Пусть A – множество юношей, B – множество девушек. Тогда $A \times B$ – множество супружеских пар, которые можно составить из A и B.

Приведем некоторые тождества, связанные с прямым произведением множеств. Для любых множеств $A, B, C,$ являющихся подмножествами некоторого универсального множества U, справедливы равенства:

1. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$; 1′. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

2. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$; 2′. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

3. $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$; 3′. $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$;

4. $(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$. 4′. $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$.

Докажем тождество 1. Для любых $x, y\in U$ имеем:

$$\langle x,y\rangle\in(A\cup B)\times C\Rightarrow x\in A\cup B, y\in C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\in C,\left[\begin{array}{c} x\in A\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\\ x\notin A\Rightarrow x\in B\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cup(B\times C).$$

С другой стороны, для любых $x, y\in U$ имеем:

$$\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cup(B\times C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\langle x,y\rangle\in A\times C\Rightarrow x\in A, y\in C\\ \langle x,y\rangle\notin A\times C\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C\Rightarrow x\in B, y\in C\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in A\cup B, y\in C\Rightarrow\langle x,y\rangle\in(A\cup B)\times C.$$

Докажем тождество 2. Для любых $x, y\in U$ имеем: $\langle x,y\rangle\in$

$$\in(A\cap B)\times C\Leftrightarrow x\in A\cap B, y\in C\Leftrightarrow x\in A, x\in B, y\in C\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C,\ \langle x,y\rangle\in B\times C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cap(B\times C).$$

Докажем тождество 3. Для любых $x, y\in U$ имеем: $\langle x,y\rangle\in$

$$\in(A\setminus B)\times C\Leftrightarrow x\in A\setminus B, y\in C\Leftrightarrow x\in A, x\notin B, y\in C\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C,\ \langle x,y\rangle\notin B\times C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\setminus(B\times C).$$

Докажем тождество 4. В силу доказанных тождеств 1,3 имеем:

$$(A+B)\times C=[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]\times C=[(A\setminus B)\times C]\cup[(B\setminus A)\times C]=$$
$$=[(A\times C)\setminus(B\times C)]\cup[(B\times C)\setminus(A\times C)]=(A\times C)+(B\times C).$$

Тождества $1' - 4'$ доказываются аналогично тождествам 1–4.

Бинарные отношения. Введем понятие *бинарного отношения*. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество ρ прямого произведения $A \times B$. Если $A = B$, то бинарное отношение ρ называется бинарным отношением на множестве A. Вместо $\langle x, y \rangle \in \rho$ часто пишут $x\rho y$.

Пример 2.4. Пусть $Л$ – множество всех людей. Рассмотрим бинарное отношение $о \subseteq Л^2$ такое, что $< x, y > \in о \Leftrightarrow x$ является отцом y. Таким образом, $о$ – бинарное отношение отцовства. Аналогичным образом можно определить бинарное отношение материнства $м$, а также большое многообразие бинарных отношений на множестве всех людей $Л$: дружбы, любви, ненависти, вражды и т.д. (в том числе большое многообразие родственных отношений: брат, сестра, двоюродный брат, сводный брат, племянник, внук и т.д.). Например, бинарное отношение *внук* на множестве людей $Л$ определяется следующим образом: x *внук* $y \Leftrightarrow \exists z : [(y \; о \; z$ или $y \; м \; z), (z \; о \; x$ или $z \; м \; x)]$.

Пример 2.5. Пусть R – множество действительных чисел. Тогда $\rho = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathrm{R},\ \exists z \in \mathrm{R} : x + z^2 = y\}$ – бинарное отношение на множестве R, которое обычно обозначается $\leq$ ($\leq$ – множество точек из заштрихованной области; см. рис. 2.2). Обычно вместо $\langle x, y \rangle \in \leq$ пишем $x \leq y$.

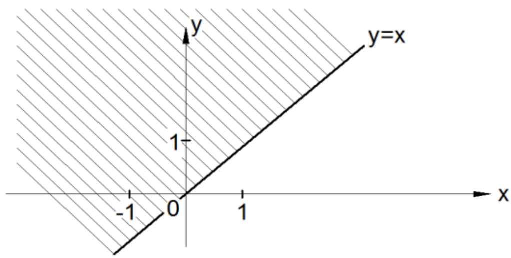


Рис. 2.2

Пример 2.6. $\rho = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathrm{R},\ y \geq x^2\}$ – бинарное отношение на множестве действительных чисел R (ρ – множество точек из заштрихованной области; см. рис. 2.3)

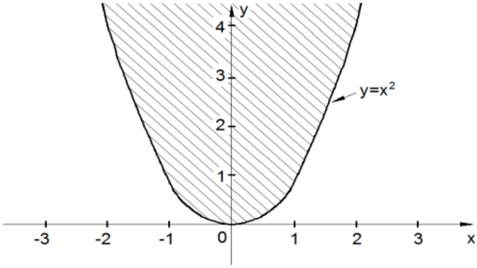


Рис. 2.3

Пример 2.7. Пусть $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$. Тогда $\rho = \{<1,4>, <2,3>\}$ – бинарное отношение между элементами множеств A и B, так как $\rho \subseteq A \times B = \{<1,3>, <1,4>, <2,3>, <2,4>\}$.

Областью определения бинарного отношения ρ называется множество $D_\rho = \left\{x \middle| \exists y : \langle x, y\rangle \in \rho\right\}$ (т.е. D_ρ – это множество всех первых элементов пар из ρ). *Множеством значений* бинарного отношения ρ называется множество $R_\rho = \left\{y \middle| \exists x : \langle x, y\rangle \in \rho\right\}$ (т.е. R_ρ – это множество всех вторых элементов пар из ρ).

В примере 2.4 D_o – это множество всех отцов, а R_o – это множество всех людей. В примере 2.5 $D_\rho = \mathrm{R}$, $R_\rho = \mathrm{R}$. В примере 2.6 $D_\rho =$ R, $R_\rho = \{x \in \mathrm{R} \mid x \geq 0\}$. В примере 2.7 $D_\rho = \{1,2\}$, $R_\rho = \{3,4\}$.

Операции над бинарными отношениями. Для бинарных отношений определены обычным образом теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т.д. Абсолютным дополнением бинарного отношения ρ между элементами множеств A и B считается множество $\overline{\rho} = (A \times B) \setminus \rho$. Например, абсолютным дополнением бинарного отношения $\leq$ на R является бинарное отношение $>$ на R.

Обратным отношением для бинарного отношения $\rho \subseteq A \times B$ называется отношение $\rho^{-1} = \{< y, x > | < x, y > \in \rho\} \subseteq B \times A$, т.е. получаемое из ρ переворачиванием пар.

Произведением бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B, \rho_2 \subseteq B \times C$ называется бинарное отношение $\rho_1 \circ \rho_2 \subseteq A \times C$, задаваемое равенством: $\rho_1 \circ \rho_2 = \{\langle x, z \rangle \in A \times C \mid \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, z \rangle \in \rho_2\}$.

Если ρ – бинарное отношение на множестве, то будем кратко писать $\rho^2 = \rho \circ \rho$, $\rho^3 = \rho \circ \rho \circ \rho$ и т.д.

Приведем некоторые свойства этих операций.

Утверждение 2.1. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$ выполняется $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} \subseteq C \times A.$

Доказательство. Пусть $\langle z, x \rangle \in C \times A$. Тогда $\langle z, x \rangle \in$ $\in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle x, z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_2 \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1,\ \langle y, z \rangle \in \rho_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists y \in B : \langle z, y \rangle \in \rho_2^{-1}, \langle y, x \rangle \in \rho_1^{-1} \Leftrightarrow \langle z, x \rangle \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

Утверждение 2.2. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$, $\rho_3 \subseteq C \times D$ выполняется $\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) =$ $= (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 \subseteq A \times D$.

Доказательство. Для любой пары $\langle x, u \rangle \in A \times D$ имеем:

$$\langle x, u \rangle \in \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, u \rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in B, \exists z \in C : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, z \rangle \in \rho_2, \langle z, u \rangle \in \rho_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists z \in C : \langle x, z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_2, \langle z, u \rangle \in \rho_3 \Leftrightarrow \langle x, u \rangle \in (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3.$$

Утверждение 2.3. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq A \times B$, $\rho_3 \subseteq B \times C$ выполняется:

(а) $(\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$;

(б) $(\rho_1 \cap \rho_2) \circ \rho_3 \subseteq (\rho_1 \circ \rho_3) \cap (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$;

(в) $(\rho_1 \setminus \rho_2) \circ \rho_3 \supseteq (\rho_1 \circ \rho_3) \setminus (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A \times C.$

Доказательство. Докажем (а). Пусть $< x, z > \in A \times C$. Тогда

$$\langle x, z \rangle \in (\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1 \cup \rho_2, \langle y, z \rangle \in \rho_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle y, z \rangle \in \rho_3, \left[\begin{array}{c} \langle x, y \rangle \in \rho_1 \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_3 \\ \langle x, y \rangle \notin \rho_1 \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho_2 \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3).$$

С другой стороны, $\langle x, z \rangle \in (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \langle x, z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y_1 \in B : \langle x, y_1 \rangle \in \rho_1, \langle y_1, z \rangle \in \rho_3 \\ \langle x, z \rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y_2 \in B : \langle x, y_2 \rangle \in \rho_2, \langle y_2, z \rangle \in \rho_3 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1 \cup \rho_2, \langle y, z \rangle \in \rho_3 \Rightarrow \langle x, z \rangle \in (\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3.$$

Доказательство (б), (в) аналогично.

Утверждение 2.4. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$, $\rho_3 \subseteq B \times C$ выполняется:

(а) $\rho_1 \circ (\rho_2 \cup \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \cup (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A \times C;$

(б) $\rho_1 \circ (\rho_2 \cap \rho_3) \subseteq (\rho_1 \circ \rho_2) \cap (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A \times C;$

(в) $\rho_1 \circ (\rho_2 \setminus \rho_3) \supseteq (\rho_1 \circ \rho_2) \setminus (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A \times C.$

Доказательство утверждения 2.4 аналогично доказательству утверждения 2.3. Приведите примеры бинарных отношений ρ_1, ρ_2, ρ_3 на множестве $A = \{1, 2, 3\}$, для которых в утверждениях 2.3, 2.4 не выполняются равенства в случаях (б), (в).

Функции. Бинарное отношение f между элементами множеств X и Y называется *функцией*, если (а) $D_f = X$; (б) $R_f \subseteq Y$; (в) $\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y \ \langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. Выполнение условий (а)–(в) кратко будем обозначать $f : X \to Y$ или говорить, что f – функция из X в Y. Если f – функция, то пишем $y = f(x)$ вместо

$\langle x, y\rangle \in f$. Множество всех функций из X в Y обозначается через Y^X, т.е. $Y^X = \{ f \mid f : X \to Y\}$.

Упражнение 2.3. Доказать, что если множества X, Y конечны, то $| Y^X | = | Y |^{|X|}$.

Указание. Воспользоваться рассуждениями, аналогичными доказательству утверждения 1.1.

Функция $f : X \to Y$ называется: (а) *сюръективной*, если $R_f = Y$; (б) *инъективной*, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; (в) *биективной,* если f одновременно сюръективна и инъективна.

Равенство функций $f = g$ по определению означает: (а) $D_f = D_g$; (б) $\forall x \in D_f = D_g \quad f(x) = g(x)$.

Сопоставление аргументу $x \in X$ значения $f(x) \in Y$ принято обозначать при помощи ограниченной стрелки: $x \mapsto f(x)$.

Образ, прообраз множества относительно функционального отображения. *Образом* множества $A \subseteq X$ относительно $f : X \to Y$ называется множество $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A\}$; *прообразом* множества $B \subseteq Y$ называется множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Утверждение 2.5. Для любой функции $f : X \to Y$ и любых множеств $A_1, A_2 \subseteq X$ справедливо: (а) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; (б) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$; (в) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Доказательство. (а)

$$y \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x) \Rightarrow \ y = f(x),$$

$$\left[\begin{array}{c} x \in A_1 \Rightarrow y \in f(A_1) \\ x \notin A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow y \in f(A_2) \end{array}\right] \Rightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$y \in f(A_1) \cup f(A_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x_1 \in A_1 : y = f(x_1) \\ y \notin f(A_1) \Rightarrow y \in f(A_2) \Rightarrow \exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1 \cup A_2)$;

(б) $y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2 : y = f(x) \Rightarrow x \in A_1$, $x \in A_2, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1), y \in f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$;

(в) $y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1), y \notin f(A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 :$ $y = f(x), x \notin A_2 \Rightarrow \exists x \in A_1 \setminus A_2 : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

Утверждение 2.6. Если функция $f : X \to Y$ инъективна, то справедливы равенства: (г) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$; (д) $f(A_1 \setminus A_2) =$ $= f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Доказательство. (г) В силу утверждения 2.5(б), осталось доказать, что $f(A_1 \cap A_2) \supseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Действительно,
$y \in f(A_1) \cap f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1), y \in f(A_2) \Rightarrow \exists x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 :$
$y = f(x_1), y = f(x_2) \Rightarrow$ (в силу инъективности функции f) $\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = x \Rightarrow x \in A_1 \cap A_2, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1 \cap A_2)$.

(д) В силу утверждения 2.5(в) осталось доказать, что
$f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$. Действительно, $y \in f(A_1 \setminus A_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x \in A_1 \setminus A_2 : y = f(x) \Rightarrow x \in A_1, x \notin A_2, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1)$,
$y \notin f(A_2)$ (предположим, что $y \in f(A_2)$, тогда $\exists x' \in A_2 :$
$y = f(x') \Rightarrow f(x') = y = f(x) \Rightarrow x' = x \Rightarrow x \in A_2$, что противоречит условию $x \in A_1 \setminus A_2$) $\Rightarrow y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Утверждение 2.7. Для любой функции $f : X \to Y$ и любых множеств $B_1, B_2 \subseteq Y$ справедливо: (е) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; (ж) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$; (з) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) =$ $= f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

Доказательство. (е) $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Rightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} f(x) \in B_1 \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \\ f(x) \notin B_1 \Rightarrow f(x) \in B_2 \Rightarrow x \in f^{-1}(B_2) \end{array} \right] \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$$

$$x\in f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c} x\in f^{-1}(B_1)\Rightarrow f(x)\in B_1 \\ x\notin f^{-1}(B_1)\Rightarrow x\in f^{-1}(B_2)\Rightarrow f(x)\in B_2 \end{array}\right]\Rightarrow f(x)\in B_1\cup B_2\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in f^{-1}(B_1\cup B_2);$ (ж) $x\in f^{-1}(B_1\cap B_2)\Leftrightarrow f(x)\in B_1\cap B_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\in B_1, f(x)\in B_2\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1), x\in f^{-1}(B_2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$; (з) доказывается аналогично (ж).

Композиция функций. *Композицией* двух функций $g: X\to Y$ и $f: Y\to Z$ называется функция $fg: X\to Z$, определяемая равенством $(fg)(x)=f(g(x)), \forall x\in X$ (т.е. $fg=g\circ f$). *Единичной* (или *тождественной*) функцией $e_X: X\to X$ называется функция, переводящая каждый элемент x в себя, т.е. $\forall x\in X\ \ e_X(x)=x$.

Отметим некоторые свойства композиции функций.

(а) $\forall f: X\to Y\ \ fe_X=f$, $e_Y f=f$; (б) если $h: X\to Y$, $g: Y\to Z$, $f: Z\to V$, то $f(gh)=(fg)h$; (в) если $g: X\to Y$, $f: Y\to Z$ – биекции, то $fg: X\to Z$ – биекция.

Доказательство (а) очевидно. Докажем (б). Заметим, что $f(gh), (fg)h: X\to V$. Осталось (см. определение равенства функций) сравнить значения этих функций на произвольном элементе $x\in X$: $[f(gh)](x)=f[(gh)(x)]=f[g(h(x))]=(fg)[h(x)]=[(fg)h](x).$ Докажем (в). **Сюрьективность**: $\{(fg)(x)\mid x\in X\}=\{f(g(x))\mid x\in X\}=$ $=f(g(X))=f(Y)=Z$. **Инъективность:** $x_1\neq x_2\Rightarrow g(x_1)\neq g(x_2)\Rightarrow$ $\Rightarrow f(g(x_1))\neq f(g(x_2))\Rightarrow (fg)(x_1)\neq (fg)(x_2)$.

Обращение функций. Если f – инъективная функция вида $f: X\to Y,$ то бинарное отношение $f^{-1}\subseteq R_f\times X$ является биективной функцией вида $f^{-1}: R_f\to X$ и называется *обратной* к f. При этом $y=f(x)\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in f\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in f^{-1}\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Упражнение 2.4. Докажем, что f^{-1} – функция. Действительно,

$$\forall y \in R_f, \forall x_1, x_2 \in X \quad \langle y, x_1 \rangle, \langle y, x_2 \rangle \in f^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle x_1, y \rangle, \langle x_2, y \rangle \in f \Rightarrow f(x_1) = y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Упражнение 2.5. Докажем, что функция f^{-1} сюръективна. Очевидно, что для любого бинарного отношения ρ выполняются равенства: $D_\rho = R_{\rho^{-1}}, R_\rho = D_{\rho^{-1}}$, а следовательно, $R_{f^{-1}} = D_f = X$.

Упражнение 2.6. Докажем, что функция f^{-1} инъективна. Пусть $y_1, y_2 \in R_f$, $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x \in X$. Тогда $\langle y_1, x \rangle, \langle y_2, x \rangle \in$ $\in f^{-1} \Rightarrow \langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f$, откуда, используя то, что f – функция, получаем $y_1 = y_2$.

Характеристическая функция множества. Пусть U – непустое множество. Для любого подмножества A множества U введем в рассмотрение *характеристическую функцию множества* A вида $\chi_A^U : U \to \{0;1\}$, определяемую равенством $\chi_A^U(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A. \end{cases}$

Упражнение 2.7. Докажем, что (а) $\chi_U^U(x) \equiv 1$; (б) $\chi_\varnothing^U(x) \equiv 0$; (в) $\chi_{\overline{A}}^U(x) = 1 - \chi_A^U(x)$; (г) $\chi_{A \cap B}^U(x) = \chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$; (д) $\chi_{A \cup B}^U(x) =$ $= \chi_A^U(x) + \chi_B^U(x) - \chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$; (е) $\chi_{A \setminus B}^U(x) = \chi_A^U(x) - \chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$.

Решение. Утверждения (а), (б) очевидны. Случай (в) обосновывается табл. 2.1, в которой перечислены все возможные случаи относительно произвольного элемента $x \in U$, и в каждом из них левая часть доказываемого равенства равна правой его части (см. совпадение двух последних столбцов):

$x \in A$	$x \in \overline{A}$	$\chi_A^U(x)$	$1 - \chi_A^U(x)$	$\chi_{\overline{A}}^U(x)$
да	нет	1	0	0
нет	да	0	1	1

Табл. 2.1

Утверждение (г) обосновывается табл. 2.2, в которой перечислены все возможные случаи относительно произвольного элемента $x \in U$, и в каждом из них левая часть доказываемого равенства равна правой его части (см. совпадение двух последних столбцов):

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$\chi_A^U(x)$	$\chi_B^U(x)$	$\chi_{A\cap B}^U(x)$	$\chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$
да	да	да	1	1	1	1
да	нет	нет	1	0	0	0
нет	да	нет	0	1	0	0
нет	нет	нет	0	0	0	0

Табл. 2.2

Утверждение (д) обосновывается табл. 2.3, в которой перечислены все возможные случаи относительно произвольного элемента $x \in U$, и в каждом из них левая часть доказываемого равенства равна правой его части (см. совпадение двух последних столбцов):

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$	$\chi_A^U(x)$	$\chi_B^U(x)$	$\chi_{A\cup B}^U(x)$	$\chi_A^U(x)+\chi_B^U(x)-\chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$
да	да	да	1	1	1	1
да	нет	да	1	0	1	1
нет	да	да	0	1	1	1
нет	нет	нет	0	0	0	0

Табл. 2.3

Для доказательства утверждения (е), в силу $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, а также, используя (в), (г), имеем: $\chi_{A\setminus B}^U(x) = \chi_{A\cap\overline{B}}^U(x) = \chi_A^U(x)\chi_{\overline{B}}^U(x) =$
$= \chi_A^U(x)(1-\chi_B^U(x)) = \chi_A^U(x) - \chi_A^U(x)\chi_B^U(x).$

ЗАДАЧИ

Задача 2.1. Доказать, что для произвольных множеств A, B, C, D выполняется $(A \cap B)\times(C \cap D) = (A \times C)\cap(B \times D)$.

Доказательство. Действительно, $\langle x, y\rangle \in (A\cap B)\times(C\cap D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A\cap B, y \in C\cap D \Leftrightarrow x \in A, x \in B, y \in C, y \in D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A\times C, \langle x, y\rangle \in B\times D \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A\times C)\cap(B\times D)$.

Задача 2.2. Пусть $A, B \neq \varnothing$ и $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times D$. Доказать, что в этом случае $A=B=C=D$.

Решение. Предположим, что $A\neq B$ и, например, $\exists a\in A: a\notin B$. Пусть $b\in B$. Тогда $\langle a,b\rangle\in A\times B, \langle b,a\rangle\in B\times A\Rightarrow$

$\Rightarrow\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\in C\times D\Rightarrow a,b\in C; a,b\in D\Rightarrow\langle a,a\rangle\in C\times D$, но

$\langle a,a\rangle\notin A\times B, \langle a,a\rangle\notin B\times A\Rightarrow\langle a,a\rangle\notin(A\times B)\cup(B\times A)=C\times D,$ т.е. пришли к противоречию с $\langle a,a\rangle\in C\times D$. Таким образом, $A=B$, откуда $C\times D=A\times A,$ а следовательно, $C=A=B=D$.

Задача 2.3[*]. Доказать, что (а) $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq$ $\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$; (б) при каких A, B, C, D это включение можно заменить равенством

$$(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D). \tag{2.1}$$

Решение. (а) $\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(C\times D)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\langle x,y\rangle\in A\times B\Rightarrow x\in A, y\in B\\ \langle x,y\rangle\notin A\times B\Rightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D\Rightarrow x\in C, y\in D\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in A\cup C, y\in B\cup D\Rightarrow\langle x,y\rangle\in(A\cup C)\times(B\cup D).$$

(б) Найдем теперь необходимое и достаточное условие для выполнения (2.1). Если $A=C$, то $(A\times B)\cup(C\times D)=A\times(B\cup D)$ (см. тождество $1'$), т.е. (2.1) выполняется при любых B, D. Аналогично, если $B=D$, то $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times B$ (см. тождество 1), т.е. (2.1) выполняется при любых A, C. Пусть теперь

$$A\neq C,\ B\neq D. \tag{2.2}$$

Докажем, что в случае (2.1), (2.2) выполняется:

$$\text{либо } A\subset C, \text{ либо } C\subset A. \tag{2.3}$$

Предположим противное: $\exists a, c: a\in A, a\notin C; c\in C, c\notin A$, и, например (поскольку $B\neq D$; см.(2.2)), $\exists b\in B: b\notin D$. Тогда

$$\langle c,b\rangle\begin{cases}\notin A\times B\\ \notin C\times D\end{cases}\Rightarrow\langle c,b\rangle\notin(A\times B)\cup(C\times D),$$

но $\langle c,b\rangle \in (A\cup C)\times(B\cup D)$, что противоречит (2.1). Если же $\exists d\in D: d\notin B$, то

$$\langle a,d\rangle \begin{cases} \notin A\times B \\ \notin C\times D \end{cases} \Rightarrow \langle a,d\rangle \notin (A\times B)\cup(C\times D),$$

но $\langle a,d\rangle \in (A\cup C)\times(B\cup D)$, что противоречит (2.1).

Совершенно аналогично доказывается, что в случае (2.1), (2.2) выполняется:

либо $B\subset D$, либо $D\subset B.$ (2.4)

Покажем теперь, что в рассматриваемом случае (2.1), (2.2) выполняется $A\subset C \Rightarrow B\subset D$. Пусть $A\subset C$, т.е. $\exists c\in C: c\notin A$. Предположим, что не выполняется $B\subset D$, т.е., с учетом (2.2), $\exists b\in B: b\notin D.$ Тогда $\langle c,b\rangle \notin (A\times B)\cup(C\times D)$, но $\langle c,b\rangle \in (A\cup C)\times(B\cup D)$, что противоречит (2.1). Совершенно аналогично доказывается, что в случае (2.1), (2.2) выполняется $C\subset A \Rightarrow D\subset B$.Таким образом, в случае (2.2) необходимым условием для (2.1) является

либо $A\subset C$, $B\subset D$, либо $C\subset A, D\subset B.$ (2.5)

Покажем теперь, что в случае (2.2) условие (2.5) является также и достаточным для (2.1). Пусть, например, $A\subset C$, $B\subset D$. Тогда $A\times B\subseteq C\times D \Rightarrow (A\times B)\cup(C\times D)=C\times D, A\cup C=C$, $B\cup D=D \Rightarrow (A\cup C)\times(B\cup D)=C\times D$, т.е. (2.1) выполняется. Случай $C\subset A, D\subset B$ рассматривается аналогично.

Таким образом, для справедливости (2.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: (а) $A=C$; (б) $B=D$; (в) $A\neq C,$ $B\neq D,$ $A\subset C$, $B\subset D$; (г) $A\neq C$, $B\neq D, C\subset A, D\subset B.$

Задача 2.4. Доказать, что для любых бинарных отношений ρ_1,ρ_2 (т.е. для произвольных множеств упорядоченных пар) выполняется: (а) $(\rho_1\cap\rho_2)^{-1}=\rho_1^{-1}\cap\rho_2^{-1}$, (б) $(\rho_1\cup\rho_2)^{-1}=\rho_1^{-1}\cup\rho_2^{-1}$.

Решение. Докажем (а) $\langle x,y\rangle \in (\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in \rho_1 \cap \rho_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in \rho_1, \langle y,x\rangle \in \rho_2 \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \rho_1^{-1}, \langle x,y\rangle \in \rho_2^{-1} \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in$ $\in \rho_1^{-1} \cap \rho_2^{-1}$. Покажем теперь справедливость (б):

$$\langle x,y\rangle \in (\rho_1 \cup \rho_2)^{-1} \Rightarrow \langle y,x\rangle \in \rho_1 \cup \rho_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \langle y,x\rangle \in \rho_1 \Rightarrow \langle x,y\rangle \in \rho_1^{-1} \\ \langle y,x\rangle \notin \rho_1 \Rightarrow \langle y,x\rangle \in \rho_2 \Rightarrow \langle x,y\rangle \in \rho_2^{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \langle x,y\rangle \in \rho_1^{-1} \cup \rho_2^{-1}.$$

С другой стороны,

$$\langle x,y\rangle \in \rho_1^{-1} \cup \rho_2^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \langle x,y\rangle \in \rho_1^{-1} \Rightarrow \langle y,x\rangle \in \rho_1 \\ \langle x,y\rangle \notin \rho_1^{-1} \Rightarrow \langle x,y\rangle \in \rho_2^{-1} \Rightarrow \langle y,x\rangle \in \rho_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in \rho_1 \cup \rho_2 \Rightarrow \langle x,y\rangle \in (\rho_1 \cup \rho_2)^{-1}.$$

Задача 2.5. Доказать, что для любой функции $f: X \to Y$, если для любых множеств $A_1, A_2 \subseteq X$ выполняется равенство $f(A_1 \cap A_2) =$ $= f(A_1) \cap f(A_2)$, то функция f является инъективной.

Решение. Предположим, что функция f не является инъективной. Тогда $\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$. Положим $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_2\}$. Тогда $f(A_1) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f(A_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \varnothing$. С другой стороны, $f(A_1 \cap A_2) =$ $= f(\varnothing) = \varnothing$, т.е. пришли к противоречию с условиями задачи.

Задача 2.6. Доказать, что, если $f: X \to Y$, $A \subseteq X, B \subseteq Y$, то (а) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$; (б) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$; (в) $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$; (г) $f(A) \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$; (д) $f(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}(B)$.

Решение. (а) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$; (б) $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) : y = f(x) \Rightarrow y = f(x) \in B$; (в) $y \in f(A) \cap B \Rightarrow y \in f(A), y \in B \Rightarrow y \in B, \exists x \in A : y = f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow y = f(x), x \in A, f(x) \in B \Rightarrow y = f(x), x \in A, x \in f^{-1}(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = f(x), x \in A \cap f^{-1}(B) \Rightarrow y \in f(A \cap f^{-1}(B))$; с другой стороны (см. утверждение 2.5(б), а также включение (б) из настоящей задачи), $f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap f(f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap B$. (г) Пусть $f(A) \cap B = \varnothing$. Предположим, что $A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$. Тогда $\exists x \in A \cap f^{-1}(B)$, откуда $f(x) \in f(A), f(x) \in B$, а следовательно, $f(x) \in f(A) \cap B$, что противоречит условию $f(A) \cap B = \varnothing$. Пусть теперь $A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$. Предположим, что $f(A) \cap B \neq \varnothing$. Тогда $\exists y \in f(A) \cap B$, откуда $y \in f(A), y \in B$, а следовательно, $\exists x \in A$: $y = f(x), y \in B$. Но тогда $x \in A, f(x) \in B$, а следовательно, $x \in A$, $x \in f^{-1}(B)$, откуда $x \in A \cap f^{-1}(B)$, что противоречит условию $A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$. (д) Пусть $f(A) \subseteq B$. Предположим, что не выполняется включение $A \subseteq f^{-1}(B)$. Тогда $\exists x \in A : x \notin f^{-1}(B)$, откуда $x \in A, f(x) \in f(A)$, $f(x) \notin B$, что противоречит включению $f(A) \subseteq B$. Пусть $A \subseteq f^{-1}(B)$. Предположим, что не выполняется включение $f(A) \subseteq B$. Тогда $\exists y \in f(A) : y \notin B$, откуда $\exists x \in A : y = f(x), y \notin B$, а следовательно, $x \in A : x \notin f^{-1}(B)$, что противоречит включению $A \subseteq f^{-1}(B)$.

Задача 2.7. Пусть f_1, f_2 – функции из A в B. Доказать, что (а) $f_1 \cap f_2$ ((б) $f_1 \cup f_2$) является функцией из A в B тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$.

Решение. (а) Пусть $f_1 \cap f_2$ – функция из A в B, x – произвольный элемент из A. Тогда $D_{f_1 \cap f_2} = A$, а следовательно, $\exists y \in B$: $< x, y > \in f_1 \cap f_2 \Rightarrow < x, y > \in f_1, < x, y > \in f_2 \Rightarrow f_1(x) = y = f_2(x)$. (б) Пусть $f_1 \cup f_2$ – функция из A в B, x – произвольный элемент из A. Тогда для $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$ выполняется: $< x, y_1 > \in f_1$, $< x, y_2 > \in f_2 \Rightarrow < x, y_1 >, < x, y_2 > \in f_1 \cup f_2$. Поскольку $f_1 \cup f_2$ – функция, то $y_1 = y_2$, а следовательно, $f_1(x) = y_1 = y_2 = f_2(x)$.

Задача 2.8. Доказать, что $\chi_{A+B}^{U}(x)=\chi_{A}^{U}(x)+\chi_{B}^{U}(x)-$
$-2\chi_{A}^{U}(x)\chi_{B}^{U}(x)$.

Решение. Используя утверждения из упражнения 2.7, а также очевидное тождество $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=A\cap\overline{B}\cap B\cap\overline{A}=\varnothing$, имеем:

$$\chi_{A+B}^{U}(x)=\chi_{A\setminus B}^{U}(x)+\chi_{B\setminus A}^{U}(x)-\chi_{A\setminus B}^{U}(x)\chi_{B\setminus A}^{U}(x)=\chi_{A\setminus B}^{U}(x)+\chi_{B\setminus A}^{U}(x)-$$
$$-\chi_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)}^{U}(x)=\chi_{A\setminus B}^{U}(x)+\chi_{B\setminus A}^{U}(x)=\chi_{A}^{U}(x)-\chi_{A}^{U}(x)\chi_{B}^{U}(x)+$$
$$+\chi_{B}^{U}(x)-\chi_{B}^{U}(x)\chi_{A}^{U}(x)=\chi_{A}^{U}(x)+\chi_{B}^{U}(x)-2\chi_{A}^{U}(x)\chi_{B}^{U}(x).$$

Тема 3. Рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность бинарных отношений. Отношение эквивалентности

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *рефлексивным,* если $\forall x\in A\ \langle x,x\rangle\in\rho$ (или $\forall x\in A\ \ x\rho\, x$).

Пример 3.1. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является рефлексивным, так как $x=x$ для любого действительного числа x. Напротив, отношение $\neq$ на R не является рефлексивным. Бинарное отношение «параллельности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) является рефлексивным, так как по определению каждая прямая параллельна самой себе. Напротив, бинарное отношение «перпендикулярности» на тех же множествах не является рефлексивным.

Упражнение 3.1. Исследовать на рефлексивность (а) бинарное отношение подобия на множестве треугольников на плоскости; (б) бинарное отношение «меньше или равно» на множестве действительных чисел R; (в) бинарное отношение $<$ на R.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *симметричным,* если $\forall x,y\in A\ \ \langle x,y\rangle\in\rho\Rightarrow\langle y,x\rangle\in\rho$ (или, в другой форме записи, $\forall x,y\in A\ \ x\rho y\Rightarrow y\rho x$), или, что то же самое, $\rho=\rho^{-1}$.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *антисимметричным,* если $\forall x,y\in A\ \ \langle x,y\rangle\in\rho,\langle y,x\rangle\in\rho\Rightarrow x=y$ (или, в другой форме записи, $\forall x, y \in A \quad x\rho y, y\rho x \Rightarrow x = y$). Нетрудно показать, что приведенное определение эквивалентно определению: $\forall x, y \in A \ \langle x, y\rangle \in \rho, x \neq y \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin \rho$.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 3.1. Пусть $\rho_1, \rho_2 -$ бинарные отношения на A, $\rho_1 \subseteq \rho_2$ и ρ_2 антисимметрично. Тогда ρ_1 антисимметрично.

Пример 3.2. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является симметричным, так как $\forall x, y \in \mathrm{R}$ $x = y \Rightarrow y = x$. Это же отношение является антисимметричным, так $\forall x, y \in \mathrm{R} \quad x = y, y = x \Rightarrow x = y$. Бинарное отношение $\neq$ на R также является симметричным, но не является антисимметричным, поскольку, например, $1 \neq 2, 2 \neq 1$, но из этого не следует, что $1 = 2$. Бинарные отношения «параллельности», а также «перпендикулярности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) симметричны. Напротив, указанные бинарные отношения не являются антисимметричными. Бинарное отношение «меньше или равно» на множестве действительных чисел R является антисимметричным, так как $\forall x, y \in \mathrm{R} \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$. Это отношение не является симметричным, поскольку, например, $1 \leq 2$, но не выполняется $2 \leq 1$.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *транзитивным,* если $\forall x, y, z \in A \quad \langle x, y\rangle \in \rho, \langle y, z\rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \rho$ (или, в другой форме записи, $\forall x, y, z \in A \quad x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z$).

Пример 3.3. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является транзитивным, так как $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ $x = y, y = z \Rightarrow x = z$. Бинарное отношение $\neq$ на множестве действительных чисел R не является транзитивным, поскольку, например, $1 \neq 2, 2 \neq 1$, но из этого не следует, что $1 \neq 1$. Бинарное отношение «меньше или равно» на R является транзитивным, так как $\forall x, y, z \in \mathrm{R} \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$. Бинарное отношение «параллельности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) является транзитивным.

Пример 3.4. Бинарное отношение $\subseteq$ на множестве всех подмножеств данного универсального множества U является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным (см. тему №1, стр. 4).

Упражнение 3.2. Показать, что бинарное отношение «перпендикулярности» на множестве всех прямых на плоскости (или в пространстве) не является рефлексивным, антисимметричным, транзитивным.

Утверждение 3.2. Пусть ρ – бинарное отношение на A. Тогда для транзитивности ρ необходимо и достаточно, чтобы $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Доказательство. Пусть ρ транзитивно на A. Покажем, что $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Для любой пары $\langle x, z \rangle \in \rho \circ \rho$ по определению операции произведения бинарных отношений выполняется: $\exists y \in A : \langle x, y \rangle \in \rho$, $\langle y, z \rangle \in \rho$, откуда в силу транзитивности ρ на A имеем: $\langle x, z \rangle \in \rho$. Пусть теперь $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Покажем транзитивность ρ на A. Действительно, $\forall x, y, z \in A$ $\langle x, y \rangle \in \rho, \langle y, z \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho \circ \rho \subseteq \rho$, т.е. транзитивность ρ на A доказана.

Утверждение 3.3. Пусть ρ – бинарное отношение, являющееся рефлексивным на A. Тогда $\rho \subseteq \rho \circ \rho$.

Доказательство. Пусть $\langle x, y \rangle \in \rho$. Покажем, что $\langle x, y \rangle \in$ $\in \rho \circ \rho$. Действительно, из рефлексивности ρ на A следует, что $\langle x, x \rangle \in \rho$. Но тогда по определению операции произведения бинарных отношений получаем, что $\langle x, x \rangle \in \rho, \langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho \circ \rho$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3.4. Пусть ρ – бинарное отношение, являющееся рефлексивным и транзитивным на A. Тогда $\rho \circ \rho = \rho$.

Утверждение 3.4 является следствием утверждений 3.2,3.3.

Отношение эквивалентности. Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение ρ на множестве A называется *эквивалентностью* на A.

Пример 3.5. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «параллельности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «подобия» на множестве всех треугольников на плоскости является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «равновеликости» (т.е. равенства площади) на множестве всех фигур на плоскости является эквивалентностью на этом множестве.

Утверждение 3.5. Пусть $f : A \to B$ – функция. Тогда бинарное отношение ρ_f на множестве A, определяемое условием: $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 \rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, является эквивалентностью на A.

Доказательство: (а) рефлексивность: $\forall x \in A$ $f(x) = f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \rho_f x$; (б) симметричность: $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 \rho_f x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 \rho_f x_1$; (в) транзитивность: $\forall x_1, x_2, x_3 \in A$ $x_1 \rho_f x_2, x_2 \rho_f x_3 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),\ f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1 \rho_f x_3$.

Пример 3.6. Пусть A – множество студентов МАИ и $f : A \to B$ – отображение, ставящее в соответствие каждому студенту номер группы, в которой он учится (т.е. B – множество номеров студенческих групп МАИ). Тогда $\forall x, y \in A$ $x \rho_f y \Leftrightarrow x$ и y учатся в одной студенческой группе. Из утверждения 3.5 следует, что ρ_f – эквивалентность на A.

Пусть ρ – эквивалентность на множестве A. *Классом эквивалентности (смежным классом)* элемента x по эквивалентности ρ называется множество $[x]_\rho = x / \rho = \{y \in A \mid x \rho y\} = \{y \in A \mid y \rho x\}$.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества A по эквивалентности ρ называется *фактор-множеством* A по ρ и обозначается A/ρ. Таким образом, $A/\rho = \{[x]_\rho \mid x \in A\}$.

Пример 3.7. Возвращаясь к примеру 3.6, заключаем, что $\forall x \in A$ $[x]_{\rho_f}$ – студенческая группа, в которой учится студент x, A/ρ_f – множество студенческих групп МАИ.

Пример 3.8. График функции $y = f(x), x \in X = [0, 5],$ представляет собой ломаную (см. рис. 3.1), звенья которой параллельны координатной оси либо биссектрисам координатных углов; координаты каждой вершины ломаной являются целыми числами. Эта функция порождает отношение эквивалентности ρ_f на множестве X (см. утверждение 3.5): $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Перечислить все классы эквивалентности.

Решение. Рассмотрим случаи: (а) Пусть $x \in [0,1)$. Тогда не существует точки $x_1 \in X$, такой, что $x \neq x_1$, $f(x_1) = f(x)$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x\}$. (б) Пусть $x \in \{1, 4\}$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{1, 4\}$. (в) Пусть $x \in (1, 2)$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{x, x_1, x_2\}$ (см. рис. 3.1). При этом из геометрических соображений получаем: $x - 1 = 4 - x_1 = x_2 - 4$, откуда $x_1 = 5 - x, x_2 = x + 3$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, x + 3\}$. (г) Пусть $x \in [2, 3] \cup \{5\}$. Заметим, что $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in [2, 3] \cup \{5\}$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = [2, 3] \cup \{5\}$. (д) Пусть $x \in (3, 4)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, 8 - x\}$. (е) Пусть $x \in (4, 5)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, x - 3, 8 - x\}$.

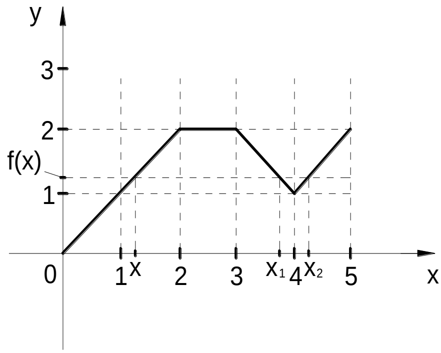


Рис. 3.1

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3.1. Пусть ρ – эквивалентность на A, $x_1, x_2 \in A$, и выполняется: $x_1 \in [x_2]_\rho$. Тогда $[x_1]_\rho = [x_2]_\rho$.

Доказательство. Покажем, что (а) $[x_1]_\rho \subseteq [x_2]_\rho$; (б) $[x_2]_\rho \subseteq \subseteq [x_1]_\rho$. (а) Пусть $x \in [x_1]_\rho$. Тогда $x\rho x_1$, откуда, используя то, что из $x_1 \in [x_2]_\rho$ следует $x_1 \rho x_2$, в силу транзитивности ρ получаем $x \rho x_2$, а следовательно, $x \in [x_2]_\rho$. В силу произвольности $x \in [x_1]_\rho$ заключаем о справедливости утверждения (а). Докажем утверждение (б). Пусть теперь $x \in [x_2]_\rho$. Тогда $x\rho x_2$, откуда, используя то, что из $x_1 \in [x_2]_\rho$ следует $x_2 \rho x_1$, в силу транзитивности ρ, получаем $x\rho x_1$, а следовательно, $x \in [x_1]_\rho$. В силу произвольности заключаем о справедливости утверждения (б). Из (а), (б) получаем, что $[x_1]_\rho = [x_2]_\rho$.

Лемма 3.2. Пусть ρ – эквивалентность на A. Тогда любые два класса эквивалентности либо не пересекаются (т.е. их пересечение является пустым множеством), либо равны между собой.

Доказательство. Пусть $[x_1]_\rho$, $[x_2]_\rho$ – некоторые два класса эквивалентности. Если $[x_1]_\rho \cap [x_2]_\rho \neq \varnothing$, то $\exists x \in [x_1]_\rho \cap [x_2]_\rho$, и в силу леммы 3.1 выполняются равенства: $[x_1]_\rho = [x]_\rho = [x_2]_\rho$, т.е. лемма 3.2 полностью доказана.

Разбиение множества. Связь с отношением эквивалентности. *Разбиением* множества A называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств множества A таких, что объединение этих подмножеств дает A. Таким образом, семейство множеств $\{A_i \mid i \in I\}$, где I – непустое индексное множество, будет являться разбиением множества A, если выполняются условия: (а) $A_i \subseteq A,\ i \in I$; (б) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$; (в) $\forall i, j \in I$, если $A_i \neq A_j$, то $A_i \cap A_j = \varnothing$ (или, что то же самое, если $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, то $A_i = A_j$).

Пример 3.9. Пусть M – множество студентов МАИ, G – множество студенческих групп МАИ. Тогда G – разбиение M.

Следующая теорема показывает связь между разбиением множества и отношением эквивалентности на этом множестве.

Теорема 3.1. (1) Всякое разбиение $\{A_i \mid i \in I\}$ множества A определяет на A отношение эквивалентности ρ: $\langle x, y \rangle \in \rho \Leftrightarrow \exists i \in I$: $x, y \in A_i$. (2) Всякое отношение эквивалентности ρ на множестве A определяет разбиение множества A на классы эквивалентности.

Доказательство. (1) Докажем рефлексивность ρ. Пусть $x \in A$. Тогда $\exists i \in I : x \in A_i \Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho.$ Докажем теперь симметричность $\rho.$ Пусть $x, y \in A,\ \langle x, y \rangle \in \rho$. Тогда $\exists i \in I : x, y \in A_i$, или, что то же самое, $y, x \in A_i$, а следовательно, $\langle y, x \rangle \in \rho$. Докажем транзитивность $\rho.$ Пусть $x, y, z \in A$, $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \rho$. Тогда $\exists i, j \in I : x, y \in A_i$, $y, z \in A_j \Rightarrow y \in A_i \cap A_j \Rightarrow A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow A_i = A_j \Rightarrow x, z \in A_i \Rightarrow \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$. (2) Покажем, что совокупность классов эквивалентности A по ρ является разбиением A. Требуется доказать, что (а) $\forall x \in A$

$[x]_\rho \subseteq A$; (б) $\bigcup\limits_{x\in A} [x]_\rho = A$; (в) $[x_1]_\rho \neq [x_2]_\rho \Rightarrow [x_1]_\rho \cap [x_2]_\rho = \varnothing$.

Заметим, что (а) следует из определения $[x]_\rho$; (б) следует из того, что $\forall x \in A \;\; x \in [x]_\rho$; (в) является следствием леммы 3.2.

ЗАДАЧИ

Задача 3.1. Пусть ρ_1, ρ_2 – симметричные бинарные отношения на множестве A. Доказать, что $\rho_1 \circ \rho_2$ симметрично тогда и только тогда, когда $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

Решение. В силу утверждения 2.1 (см. тему 2), имеем

$$(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} = \rho_2 \circ \rho_1. \tag{3.1}$$

Симметричность $\rho_1 \circ \rho_2$ означает $\rho_1 \circ \rho_2 = (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1}$ или, в силу (3.1), имеем $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

Задача 3.2. Доказать, что если ρ – произвольное бинарное отношение на A, то $\rho \circ \rho^{-1}$ – симметричное бинарное отношение на A.

Решение. $(\rho \circ \rho^{-1})^{-1} = (\rho^{-1})^{-1} \circ \rho^{-1} = \rho \circ \rho^{-1}$.

Задача 3.3. Доказать, что объединение $\rho_1 \cup \rho_2$ антисимметричных на A бинарных отношений антисимметрично тогда и только тогда, когда $\rho_1 \cap \rho_2^{-1} \subseteq e_A$.

Решение. (а) Пусть $\rho_1 \cup \rho_2$ антисимметричное на A бинарное отношение. Покажем, что $\rho_1 \cap \rho_2^{-1} \subseteq e_A$. Предположим, что $\exists < x, y > \in \rho_1 \cap \rho_2^{-1} : < x, y > \notin e_A$. Тогда $< x, y > \in \rho_1, < x, y > \in \rho_2^{-1}$, $x \neq y \Rightarrow < x, y > \in \rho_1 \cup \rho_2, < y, x > \in \rho_2 \subseteq \rho_1 \cup \rho_2, x \neq y,$ т.е. пришли к противоречию с антисимметричностью $\rho_1 \cup \rho_2$.

(б) Пусть $\rho_1 \cap \rho_2^{-1} \subseteq e_A$. Предположим, что бинарное отношение $\rho_1 \cup \rho_2$ не является антисимметричным на A. Тогда $\exists x, y \in A\colon x \neq y$, $< x, y >, < y, x > \in \rho_1 \cup \rho_2$. Пусть для определенности $< x, y > \in \rho_1$ (случай $< x, y > \in \rho_2$ рассматривается аналогично). Тогда, в силу антисимметричности ρ_1, $< y, x > \in \rho_2$, откуда $< x, y > \in \rho_2^{-1}$, следовательно, $< x, y > \in \rho_1 \cap \rho_2^{-1}$, однако $x \neq y$, а следовательно, $< x, y > \notin e_A$, т.е. пришли к противоречию с исходным предположением.

Задача 3.4. Построить бинарное отношение ρ на некотором множестве A: (а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное; (б) рефлексивное, транзитивное, не симметричное; (в) антисимметричное, транзитивное, не рефлексивное; (г) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное; (д) симметричное, транзитивное, не рефлексивное.

Решение. (а) $A = \{1, 2, 3\}$, $\rho = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>, <1,2>, <2,1>, <1,3>, <3,1>\}$; (б) $A = \{1, 2\}$, $\rho = \{<1,1>, <2,2>, <1,2>\}$; (в) $A = \{1, 2\}$, $\rho = \{<1,2>\}$; (г) $A = \{1, 2, 3\}$, $\rho = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>, <1,2>, <2,3>\}$; (д) $A = \{1, 2\}$, $\rho = \{<1,1>\}$.

Задача 3.5. Пусть ρ_1, ρ_2 – бинарные отношения на множестве A. Тогда (а) если ρ_1 рефлексивно, то $\rho_2 \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$; (б) если ρ_2 рефлексивно, то $\rho_1 \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$; (в) если ρ_1, ρ_2 рефлексивны, то $\rho_1 \cup \rho_2 \subseteq$ $\subseteq \rho_1 \circ \rho_2$; (г) если ρ_1, ρ_2 рефлексивны, то $\rho_1 \circ \rho_2$ рефлексивно.

Решение. (а) Пусть $\langle x, y \rangle \in \rho_2$. Тогда, используя рефлексивность ρ_1, имеем: $\langle x, x \rangle \in \rho_1$, $\langle x, y \rangle \in \rho_2$, откуда $\langle x, y \rangle \in \rho_1 \circ \rho_2$. Утверждение (б) доказывается аналогично. Утверждение (в) является следствием (а), (б). Утверждение (г) является следствием утверждения (в).

Задача 3.6. Доказать, что пересечение любого числа (а) рефлексивных бинарных отношений на множестве A является рефлексивным на A; (б) симметричных бинарных отношений на A является симметричным на A; (в) антисимметричных бинарных отношений на A является антисимметричным на A; (г) транзитивных бинарных отношений на A является транзитивным на A.

Решение. Утверждение (а) очевидно. Утверждение (в) является следствием утверждения 3.1. Покажем справедливость утверждения (г) (утверждение (б) доказывается аналогично). Пусть $\{\rho_i \mid i \in I\}$ – некоторое семейство транзитивных бинарных отношений на множестве A. Покажем транзитивность $\rho = \bigcap_{i\in I} \rho_i$. Действительно, $\forall x, y, z \in A$

$$< x, y >\in \rho\,,\ < y, z >\in \rho \Rightarrow < x, y >\in \rho_i\,,\ < y, z >\in \rho_i, i \in I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow < x, z >\in \rho_i, i \in I \Rightarrow\ < x, z >\in \bigcap_{i\in I} \rho_i = \rho\,.$$

Задача 3.7. Пусть ρ – произвольное бинарное отношение на множестве A. Доказать, что для бинарного отношения ρ^*, являющегося пересечением всех транзитивных бинарных отношений на A, включающих в себя ρ, выполняется: (а) $\rho \subseteq \rho^*$; (б) ρ^* транзитивно на A; (в) для любого бинарного отношения ρ' на A, если ρ' транзитивно и $\rho \subseteq \rho'$, то $\rho^* \subseteq \rho'$; (г) $\forall k \in \mathrm{N}\ \ \rho^k \subseteq \rho^*$; (д) если $|A| = n$, то $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n$.

Решение. Утверждение (а) следует из определения ρ^*. Утверждение (б) следует из утверждения (г) задачи 3.6. Утверждение (в) следует из определения ρ^*. Утверждение (г) легко доказывается индукцией по k, используя включение $\rho \subseteq \rho^*$, а также транзитивность ρ^*. Докажем справедливость утверждения (д). В силу (в), (г), для этого достаточно доказать транзитивность бинарного отношения $\tilde{\rho} = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n$. Пусть $< x, y >, < y, z >\in \tilde{\rho}$. Докажем, что $< x, z >\in \tilde{\rho}$. Из $< x, y >$, $< y, z >\in \tilde{\rho}$ следует, что $\exists m \geq 2, x_1, \ldots, x_m \in A$:

$$x = x_1;\ < x_1, x_2 >, < x_2, x_3 >, < x_3, x_4 >, \ldots, < x_{m-1}, x_m >\in \rho;\ x_m = z. \quad (3.2)$$

Предположим, что $\exists i, j : 1 \leq i < j \leq m$ такие, что $x_i = x_j$ и при этом не выполняется $i = 1, j = m$. Тогда для последовательности $x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_m$ (имеющей меньшее число членов, чем последовательность $x_1, \ldots, x_m$) аналогично (3.2) выполняется $x = x_1; < x_1, x_2 >$,

$< x_2, x_3 >, ..., < x_{i-1}, x_i >, < x_i, x_{j+1} >, < x_{j+1}, x_{j+2} >, ..., < x_{m-1}, x_m > \in \rho;$ $x_m = z$. Производя и далее аналогичное уменьшение длины каждой получаемой таким образом последовательности (пока это возможно), окончательно придем к последовательности $x_1, x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}, x_m$, в которой в случае $x_1 = x \neq z = x_m$ все члены попарно различны, а в случае $x_1 = x = z = x_m$ все члены, кроме последнего, попарно различны и выполняется $< x_1, x_{i_1} >, < x_{i_1}, x_{i_2} >, ..., < x_{i_{r-1}}, x_{i_r} >, < x_{i_r}, x_m > \in \rho$. Но тогда в этой последовательности не может быть более $n+1$ членов, а в последовательности $< x_1, x_{i_1} >, < x_{i_1}, x_{i_2} >, ..., < x_{i_{r-1}}, x_{i_r} >, < x_{i_r}, x_m >$ не может быть более n пар, откуда и следует, что $< x, z > = < x_1, x_m > \in \tilde{\rho}$.

Задача 3.8. Доказать, что пересечение любого числа эквивалентностей на множестве A является эквивалентностью на A.

Решение. Утверждение этой задачи следует из утверждений (а), (б), (г) задачи 3.6.

Задача 3.9. Доказать, что если ρ – транзитивное и симметричное бинарное отношение на множестве A и $D_\rho \cup R_\rho = A$, то ρ – эквивалентность на A.

Решение. Докажем рефлексивность ρ. Пусть $a \in A$. В силу того, что $D_\rho \cup R_\rho = A$, $\exists x \in A$: $< x, a > \in \rho$, или $< a, x > \in \rho$. Но тогда, в силу симметричности ρ, $< a, x > \in \rho$, $< x, a > \in \rho$, откуда, используя транзитивность ρ, получаем $< a, a > \in \rho$. Таким образом $\forall a \in A$ $< a, a > \in \rho$.

Задача 3.10. Пусть ρ_1, ρ_2 – эквивалентности на множестве A. Доказать, что $\rho_1 \circ \rho_2$ – эквивалентность на A тогда и только тогда, когда $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

Решение. (а) Пусть $\rho_1 \circ \rho_2$ – эквивалентность на A. Тогда бинарное отношение $\rho_1 \circ \rho_2$ является симметричным на A, откуда, используя симметричность ρ_1, ρ_2 на A, а также утверждение 2.1 (см. тему №2), имеем $\rho_1 \circ \rho_2 = (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} = \rho_2 \circ \rho_1$. (б) Пусть $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$. Покажем, что $\rho_1 \circ \rho_2$ – эквивалентность на A. *Рефлексивность*: см. задачу 3.5(г). *Симметричность*: $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} = \rho_2 \circ \rho_1 = \rho_1 \circ \rho_2$. *Транзитивность*. Используя утверждения 2.2, 3.4, имеем $(\rho_1 \circ \rho_2) \circ (\rho_1 \circ \rho_2) = \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_1) \circ \rho_2 = = \rho_1 \circ (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_2 = (\rho_1 \circ \rho_1) \circ (\rho_2 \circ \rho_2) = \rho_1 \circ \rho_2$, откуда, в силу утверждения 3.2, и следует транзитивность $\rho_1 \circ \rho_2$.

Задача 3.11. Пусть ρ_1, ρ_2 – эквивалентности на множестве A. Доказать, что $\rho_1 \cup \rho_2$ – эквивалентность на A тогда и только тогда, когда $\rho_1 \cup \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2$.

Решение. (а) Пусть $\rho_1 \cup \rho_2$ – эквивалентность на A. Тогда из транзитивности и рефлексивности $\rho_1 \cup \rho_2$ следует (см. утверждения 3.4, 2.4) $\rho_1 \cup \rho_2 = (\rho_1 \cup \rho_2) \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = (\rho_1 \circ \rho_1) \cup (\rho_1 \circ \rho_2) \cup \cup (\rho_2 \circ \rho_1) \cup (\rho_2 \circ \rho_2) \Rightarrow \rho_1 \circ \rho_2 \subseteq \rho_1 \cup \rho_2$. С другой стороны, из рефлексивности ρ_1, ρ_2 получаем (см. задачу 3.5(в)), что $\rho_1 \circ \rho_2 \supseteq \supseteq \rho_1 \cup \rho_2$, а следовательно, $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1 \cup \rho_2$. (б) Пусть $\rho_1 \cup \rho_2 = = \rho_1 \circ \rho_2$. Покажем, что $\rho_1 \cup \rho_2$ – эквивалентность на A. Очевидно, что бинарное отношение $\rho_1 \cup \rho_2$ рефлексивно и симметрично на A (см. задачу 2.4). Докажем его транзитивность. Заметим (см. утверждение 2.1 и задачу 2.4), что $\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} = (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = = (\rho_1 \cup \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cup \rho_2^{-1} = \rho_1 \cup \rho_2$, откуда $(\rho_1 \cup \rho_2) \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = = (\rho_1 \circ \rho_1) \cup (\rho_1 \circ \rho_2) \cup (\rho_2 \circ \rho_1) \cup (\rho_2 \circ \rho_2) = \rho_1 \cup (\rho_1 \circ \rho_2) \cup \cup (\rho_2 \circ \rho_1) \cup \rho_2 = \rho_1 \cup \rho_2$, т.е., в силу утверждения 3.2, транзитивность $\rho_1 \cup \rho_2$ доказана.

Тема 4. Отношение порядка. Частичный и линейный порядки

Частичный порядок. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение ρ на множестве A называется *частичным порядком* на A.

Пример 4.1. Бинарное отношение $\leq$ на множестве действительных чисел R является частичным порядком: (а) рефлексивность: $\forall x \in A \quad x \leq x$; (б) транзитивность: $\forall x, y, z \in A \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$; (в) антисимметричность: $\forall x, y \in A \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.

Пример 4.2. Бинарное отношение $\leq$ на множестве R^2 определяемое следующим образом: $\langle x_1, x_2 \rangle \leq \langle y_1, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_i \leq y_i$, $i = 1,2$ (называемое *отношением Парето*), является частичным порядком. Обоснование аналогично приведенному в примере 4.1. Аналогичным образом можно задать частичный порядок на R^3, R^4 и т.д.

Пример 4.3. Бинарное отношение $\subseteq$ на множестве 2^U всех подмножеств некоторого универсального множества $U \neq \varnothing$ (см. тему 1) является частичным порядком: (а) рефлексивность: $\forall A \in 2^U \quad A \subseteq A$; (б) транзитивность: $\forall A, B, C \in 2^U \quad A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$; (в) антисимметричность: $\forall A, B \in 2^U \quad A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Пример 4.4. Рассмотрим отношение «подчиненности» на множестве должностей некоторого предприятия (см. рис. 4.1; кружками и овальными рамками обозначены сотрудники предприятия , не имеющие других в своем подчинении). По определению считаем, что каждый работник предприятия подчиняется самому себе (аналогично параллельности прямой самой себе в курсе геометрии). Для нормального функционирования предприятия отношение подчиненности с необходимостью должно быть антисимметричным (так как в противном случае найдутся две должности x и y такие, что x подчиняется y и, наоборот, y подчиняется x, что приводит к абсурдной ситуации). А для централизованного управления предприятием в целом, а также внутри любого его подразделения необходима транзитивность отношения подчиненности, чтобы распоряжения, отдаваемые руководителем данного подразделения предприятия, относились ко всем работникам этого подразделения.

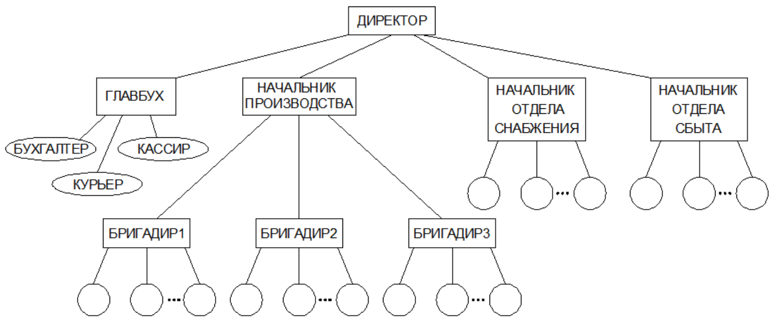


Рис. 4.1

Линейный порядок. Пусть ρ – частичный порядок на множестве A. Элементы $x, y \in A$ называются *сравнимыми по* ρ, если выполняется либо $x\rho y$, либо $y\rho x$. Частичный порядок ρ на множестве A называется *линейным*, если любые два элемента из A сравнимы по ρ.

Пример 4.5. Отношение частичного порядка $\leq$ на множестве действительных чисел R является линейным порядком на R. Действительно, $\forall x, y \in \mathrm{R}$ возможны случаи: (а) $\min(x, y) = x$, и тогда $x \leq y$; (б) $\min(x, y) = y$, и тогда $y \leq x$.

Пример 4.6. Отношение частичного порядка $\leq$ на множестве R^2 (см. пример 4.2) не является линейным, так как пары $\langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle \in \mathrm{R}^2$ не сравнимы.

Пример 4.7. Отношение частичного порядка $\subseteq$ на 2^U (см. пример 4.3) не является линейным при $|U| \geq 2$. Например, при $U = \{1;2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ множества A и B не сравнимы (ни одно из них не является подмножеством другого).

Пример 4.8. Бинарное отношение «подчиненности» на множестве должностей некоторого предприятия, соответствующее рис. 4.1, не является линейным порядком, так как, в частности, кассир не подчиняется бригадиру 1, а бригадир 1 не подчиняется кассиру.

Множество A с заданным на нем отношением частичного (линейного) порядка ρ называется *частично (линейно) упорядоченным.*

Будем далее для произвольного отношения частичного прядка вместо символа ρ (общего для всех бинарных отношений) использовать символ $\preccurlyeq$. Введем для произвольного отношения частичного порядка $\preccurlyeq$ на множестве A ассоциированное с ним отношение строгого порядка $\prec$ на множестве A, определяемое условием: $\forall x, y \in A \ \ x \prec y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y$, $x \neq y$. Из определения $\prec$ следует, что $\preccurlyeq \subseteq \prec$.

Упражнение 4.1. Доказать, что отношение строгого порядка $\prec$ на множестве A является антисимметричным и транзитивным.

Решение. Антисимметричность следует из утверждения 3.1 (см. тему 3). Покажем транзитивность. Пусть $x, y, z \in A$, $x \prec y$, $y \prec z$. Покажем, что $x \prec z$. Из $x \prec y$, $y \prec z$ следует, что $x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z$, откуда (используем транзитивность $\preccurlyeq$) $x \preccurlyeq z$. Тогда, если предположить невыполнение условия $x \prec z$, то получаем, что $x = z$. При этом из условий $x = z$, $x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z$, в силу антисимметричности $\preccurlyeq$, получаем, что $x = y$, а это противоречит условию $x \prec y$.

Пусть A – частично упорядоченное множество, $a, b \in A$. Назовем *сегментом* множество $[a,b] = \{x \in A \mid a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$. Например, в соответствии со схемой, приведенной на рис. 4.1 (см. пример 4.4) [курьер, директор]={курьер, главбух, директор}.

Замечание 4.1. Пусть A – частично упорядоченное множество с заданным на нем бинарным отношением частичного (линейного) порядка $\preccurlyeq$. Тогда любое его подмножество B также частично (линейно) упорядочено бинарным отношением частичного (линейного) порядка $\preccurlyeq \cap B^2$ (используя утверждение 3.1, а также задачу 3.6, докажите рефлексивность, антисимметричность, транзитивность бинарного отношения $\preccurlyeq \cap B^2$; а в случае линейного порядка $\preccurlyeq$ докажите сравнимость любых двух элементов из B по $\preccurlyeq \cap B^2$). Для простоты обозначений, для произвольных элементов $x, y \in B$ в случае $\langle x, y \rangle \in \preccurlyeq \cap B^2$ кратко пишем $x \preccurlyeq y$.

Пусть A – частично упорядоченное множество. Элемент $a \in A$ называется *максимальным (минимальным)* по $\preccurlyeq$ на множестве A, если $\forall x \in A$ из того, что $a \preccurlyeq x$ ($x \preccurlyeq a$) следует, что $a = x$. Элемент $a \in A$ называется *наибольшим (наименьшим)* по $\preccurlyeq$ на множестве A, если $\forall x \in A \quad x \preccurlyeq a$ ($a \preccurlyeq x$). Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 4.1. Пусть A – частично упорядоченное множество. Элемент $a \in A$ является *максимальным (минимальным)* по $\preccurlyeq$ на множестве A, тогда и только тогда, когда не существует элемента $x \in A$ такого, что $a \prec x$ ($x \prec a$).

Пример 4.9. В примере 4.4 минимальными элементами будут сотрудники предприятия, которые не имеют никого в своем подчинении (обозначены кружками или овальными рамками), а наименьшие элементы отсутствуют. В этом же примере единственным максимальным, а также наибольшим элементом является директор.

Пример 4.10. В примере 4.3 единственным минимальным, а также наименьшим элементом является множество $\varnothing$, а единственным максимальным, а также наибольшим элементом – множество U.

Пример 4.11. В примерах 4.1, 4.2 отсутствуют минимальные, максимальные, наименьшие, наибольшие элементы.

Утверждение 4.2. Пусть A – частично упорядоченное множество, a – наибольший (наименьший) элемент на множестве A. Тогда a – единственный максимальный (минимальный) элемент на A.

Доказательство. Будем проводить рассуждения для наибольшего элемента a (для наименьшего элемента a рассуждения аналогичны). Докажем, что элемент a является максимальным. Действительно, для любого элемента $x \in A$ такого, что $a \preccurlyeq x$, имеем: $a \preccurlyeq x, x \preccurlyeq a$ (используем то, что a – наибольший элемент на A), откуда в силу антисимметричности $\preccurlyeq$, выполняется $a = x$. Пусть теперь a_1 – еще один максимальный элемент на A. Тогда из того, что a – наибольший элемент на A, имеем: $a_1 \preccurlyeq a$, откуда, используя то, что a_1 – максимальный элемент на A, получаем, что $a_1 = a$.

Пусть A – частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Будем говорить, что y *покрывает* x, если (а) $x \prec y$; (б) не существует элемента $z \in A$ такого, что $x \prec z \prec y$.

Пример 4.12. Натуральные числа упорядочены естественным образом по возрастанию: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$. В этом примере 5 покрывает 4; 4 покрывает 3. Однако 5 не покрывает 3, поскольку $3 < 4 < 5$.

Пример 4.13. Рассмотрим отношение $\leq$ на множестве действительных чисел $[0,1]$. В этом примере не существует $x, y \in [0,1]$ таких, что y покрывает x. Предположим, например, что число 1 покрывает число $x \in [0,1]$. Тогда $x < 1$, откуда $x < (x+1)/2 < 1$, а это противоречит тому, что 1 покрывает x.

Частично упорядоченные конечные множества. **Диаграммы Хассе.** Основным утверждением этого раздела является

Утверждение 4.3. Пусть A – частично упорядоченное конечное множество. Тогда для любых элементов $x, y \in A$ для того, чтобы выполнялось условие $x \prec y$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись: $k \geq 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ такие, что $x = x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_k = y$, и при этом $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$ x_i покрывает x_{i-1}.

Идея доказательства. Возможны два случая: (а) y покрывает x и тогда доказываемое утверждение выполняется при $k = 2, x = x_1 \prec x_2 = = y$; (б) y не покрывает x. В случае (б) $\exists z \in A$: $x \prec z \prec y$. Далее, отдельно рассматриваем две пары элементов: x, z и z, y. Теперь уже возможны четыре случая: z покрывает (или не покрывает) x; y покрывает (или не покрывает) z. В любом из случаев покрытия часть требуемой последовательности оказывается найденной. Иначе найдутся очередные промежуточные элементы. Например, если z не покрывает x, и y не покрывает z, $\exists z_1, z_2 \in A$: $x \prec z_1 \prec z \prec z_2 \prec y$. В последнем случае отдельно рассматриваем уже четыре пары элементов: x, z_1; z_1, z; z, z_2; z_2, y. Поскольку, в силу транзитивности $\prec$ (см. упражнение 4.1), последовательность выделяемых таким образом элементов множества A состоит из попарно различных членов, то из-за конечности A, указанный процесс генерирования новых членов последовательности не является бесконечным и на некотором этапе получим конечную последовательность элементов множества A, удовлетворяющую нашим требованиям.

Утверждение 4.3 позволяет представить любое частично упорядоченное конечное множество A в виде наглядной схемы, называемой *диаграммой Хассе*. Элементы из A изображаются точками (маленькими кружочками), расположенными на схеме в соответствии со следующим правилом. Если элемент y покрывает элемент x, то точка, изображающая x, располагается ниже точки, изображающей y, и при этом эти точки соединяются прямолинейным отрезком. Таким образом, в силу утверждения 4.3, $x \prec y$ равносильно тому, что на диаграмме найдется ломаная линия, «восходящая» от x к y (т.е. при движении по этой ломаной от точки x к точке y будем всегда подниматься вверх).

Используя диаграмму Хассе, соответствующую некоторому конечному множеству A, с заданным на нем отношением частичного порядка $\preccurlyeq$, нетрудно перечислить все упорядоченные пары, принадлежащие бинарному отношению $\preccurlyeq$, а также определить минимальные и максимальные элементы. Действительно, в силу утверждений 4.1, 4.3, минимальным элементам соответствуют точки, не связанные прямолинейными отрезками с другими точками, находящимися ниже их (шуточно говоря: у них «ножек нет»). А максимальным элементам будут соответствовать точки, не связанные прямолинейными отрезками с другими точками, находящимися выше их (шуточно говоря: у них «рожек нет»).

Пример 4.14. Примером диаграммы Хассе является схема подчиненности на множестве должностей предприятия (см. рис. 4.1).

Упражнение 4.2. Диаграмма Хассе, соответствующая частичному порядку $\preccurlyeq$, заданному на множестве $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, представлена на рис. 4.2. Определить все упорядоченные пары, принадлежащие $\preccurlyeq$, минимальные и максимальные элементы, а также сегмент $[a, b]$.

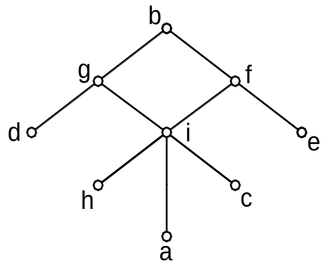


Рис. 4.2

Решение. По определению частичного порядка, бинарное отношение $\preccurlyeq$ является рефлексивным, а следовательно, ему принадлежат все пары вида $\langle x,x\rangle$, где $x\in A$. Другие пары, принадлежащие $\preccurlyeq$, определяем из диаграммы Хассе, используя соединения элементов прямолинейными отрезками и транзитивность $\preccurlyeq$. Например, для элемента a имеем: $a\prec i$; $a\prec i\prec f\Rightarrow a\prec f$; $a\prec i\prec g\Rightarrow a\prec g$; $a\prec i\prec f\prec b\Rightarrow$ $\Rightarrow a\prec b$, откуда следует, что этому частичному порядку принадлежат пары: $\langle a,i\rangle,\langle a,f\rangle,\langle a,g\rangle,\langle a,b\rangle$. Действуя аналогичным образом, получаем следующее множество упорядоченных пар, принадлежащих $\preccurlyeq$: $\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,...,\langle i,i\rangle,\langle a,i\rangle,\langle a,f\rangle,\langle a,g\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,i\rangle,\langle c,g\rangle,\langle c,f\rangle,$ $\langle c,b\rangle,\langle d,g\rangle,\langle d,b\rangle,\langle e,f\rangle,\langle e,b\rangle,\langle f,b\rangle,\langle g,b\rangle,\langle h,i\rangle,\langle h,f\rangle,\langle h,g\rangle,$ $\langle h,b\rangle,\langle i,g\rangle,\langle i,f\rangle,\langle i,b\rangle\}$. При этом b – максимален на A; a,c,d,e,h – минимальны; $[a,b]=\{x\in A\,|\,a\preccurlyeq x\preccurlyeq b\}=\{a,b,f,g,i\}$.

Утверждение 4.4. Пусть A – конечное частично упорядоченное множество, $a\in A$. Тогда найдутся элементы $a_0,b_0\in A$ такие, что a_0 – минимален на A, b_0 – максимален на A и при этом $a_0\preccurlyeq a\preccurlyeq b_0$.

Доказательство. Докажем существование a_0 (для b_0 рассуждение аналогично). Если a – минимален на A, то полагаем $a_0=a$ и при этом $a_0\preccurlyeq a$. В противном случае найдется $a_1\in A$: $a_1\prec a$. Если a_1 – минимален на A, то полагаем $a_0=a_1$ и при этом $a_0=a_1\prec a$. В противном случае найдется $a_2 \in A$: $a_2 \prec a_1$. Если a_2 – минимален на A, то полагаем $a_0 = a_2$ и при этом $a_2 \prec a_1 \prec a \Rightarrow a_0 = a_2 \prec a$ (см. упражнение 4.1). В противном случае переходим к рассмотрению элемента $a_3 \prec a_2$ и т.д. Далее возможны два случая. Либо на некотором k-ом этапе (где $k \geq 3$) мы получим конечную последовательность элементов $a_1,\ldots,a_k$ таких, что

$$a_k \prec a_{k-1} \prec \ldots \prec a_1 \prec a, \tag{4.1}$$

и при этом a_k минимален на A. Тогда, в силу транзитивности $\prec$ (см. упражнение 4.1), используя (4.1), получаем $a_k \prec a$, т.е. в этом случае можно положить $a_0 = a_k$. Либо для любого номера $k \geq 1$ элемент a_k указанной последовательности не является минимальным на A. Однако этот случай противоречит конечности множества A, поскольку, в силу транзитивности $\prec$ (см. упражнение 4.1), из (4.1) следует, что все члены этой последовательности попарно различны.

Утверждение 4.5. Пусть A – конечное частично упорядоченное множество, и множество минимальных (максимальных) элементов на A состоит из единственного элемента a_0. Тогда a_0 является наименьшим (наибольшим) элементом на A.

Доказательство. Будем рассматривать случай, когда a_0 – единственный минимальный элемент (случай, когда a_0 – единственный максимальный элемент, рассматривается аналогично). Пусть x – произвольный элемент из A. Покажем, что $a_0 \preccurlyeq x$, откуда и будет следовать, что a_0 является наименьшим на A. Из утверждения 4.4 следует, что для x найдется элемент a_1, являющийся минимальным на A, такой, что $a_1 \preccurlyeq$ $\preccurlyeq x$. Но по условиям доказываемого утверждения $a_0 = a_1 \preccurlyeq x$.

Пример 4.15. Возвращаясь к упражнению 4.2, используя утверждение 4.5, заключаем, что элемент b является наибольшим на A, а, в силу утверждения 4.2, наименьшего на A элемента нет.

Рассмотрим теперь случай, когда конечное множество является линейно упорядоченным.

Утверждение 4.6. Пусть A – конечное линейно упорядоченное множество, $|A| = n \geq 2$. Тогда элементы множества $A = \{a_1, ..., a_n\}$ можно занумеровать таким образом, что $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n$, при этом a_1 является наименьшим на A, a_n – наибольшим, и $\forall i \in \{2, ..., n\}$ a_i покрывает a_{i-1}.

Доказательство. В силу утверждения 4.4, в A найдутся минимальный и максимальный элементы: a_1, a_n. Поскольку a_1, a_n сравнимы со всеми другими элементами, то a_1 является наименьшим, а a_n – наибольшим на A (см. утверждение 4.1). Заметим, что $a_1 \neq a_n$ (если $a_1 = a_n$, то $\forall a \in A$ $a_1 \preccurlyeq a \preccurlyeq a_n = a_1 \Rightarrow A = \{a_1\}$, а это противоречит условию $n \geq 2$), $a_1 \preccurlyeq a_n$, а следовательно, $a_1 \prec a_n$, откуда, в силу утверждения 4.3, либо a_n покрывает a_1, либо $\exists k \geq 2$, $a_2, ..., a_k \in A$: $a_1 \prec$ $\prec a_2 \prec \ldots \prec a_k \prec a_n$, где a_n покрывает a_k и $\forall i \in \{2, ..., k\}$ элемент a_i покрывает элемент a_{i-1}. Поскольку все элементы $a_1, a_2, ..., a_k, a_n$ попарно различны (см. упражнение 4.1), то $k \leq n-1$. Покажем, что $k = n-1$. Предположим противное, т.е. пусть $k < n-1$. Тогда в A найдется элемент $b \notin \{a_1, ..., a_k, a_n\}$. Поскольку a_1, a_n являются наименьшим и наибольшим элементами на A, соответственно, то

$$a_1 \prec b \prec a_n. \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что $k \geq 2$, поскольку при $k = 1$ a_n покрывает a_1, а это противоречит (4.2). Поскольку в линейно упорядоченном множестве все элементы сравнимы, то либо $b \prec a_k$, либо $a_k \prec b$, а так как a_n покрывает a_k, то, в силу (4.2), $b \prec a_k$. Совершенно аналогично доказывается, что $b \prec a_{k-1}, b \prec a_{k-2}, \ldots, b \prec a_2$, откуда, используя (4.2), получаем $a_1 \prec b \prec a_2$, а это противоречит тому, что a_2 покрывает a_1.

Для решения некоторых практических задач (см. замечание 4.2) нередко возникает необходимость расширения данного частичного порядка $\preccurlyeq$ на некотором множестве A до линейного $\preccurlyeq_Л$, удовлетворяющего условию $\preccurlyeq \subseteq \preccurlyeq_Л$. В случае, когда A – конечное множество, существует простой практически реализуемый алгоритм такого расширения. Идея алгоритма простая. Выбираем любой максимальный элемент a_1 из A и делаем его наибольшим, т.е. включаем в $\preccurlyeq$ все пары вида $\langle x, a_1 \rangle$, $x \in A$. При этом очевидным образом сохраняются рефлексивность, антисимметричность, транзитивность получаемого таким образом бинарного отношения, т.е. оно снова является частичным порядком на A. Далее, удаляем из множества A элемент a_1, т.е. переходим к рассмотрению множества $A_1 = A \setminus \{a_1\}$, снова являющегося частично упорядоченным (см. замечание 4.1). Затем выделяем в A_1 любой максимальный элемент a_2 и делаем его наибольшим в A_1, т.е. включаем в $\preccurlyeq$ все пары вида $\langle x, a_2 \rangle$, $x \in A_1$. Далее, удаляем из множества A_1 элемент a_2 и переходим к рассмотрению множества $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\}$ и т.д. Действуем так до тех пор, пока в текущем множестве A_i имеются более одного элементов. В случае же, когда в текущем множестве A_i остался один элемент, требуемый линейный порядок $\preccurlyeq_Л$ построен (докажите сравнимость по $\preccurlyeq_Л$ двух любых элементов из A).

В случае, когда частичный порядок на конечном множестве A задан диаграммой Хассе, описанный алгоритм реализуется следующим образом. В силу утверждения 4.6, диаграмма Хассе строящегося линейного порядка $\preccurlyeq_Л$ представляет собой ломаную линию, «восходящую» от наименьшего элемента к наибольшему (т.е. при движении по этой ломаной от наименьшего элемента к наибольшему будем все время подниматься вверх). Выбираем любой максимальный элемент a_1 в A, помещаем его в верхней точке диаграммы Хассе для $\preccurlyeq_Л$ и удаляем его из диаграммы Хассе для $\preccurlyeq$ (например, стираем его вместе со всеми прямолинейными отрезками, соединяющими его с другими элементами). Далее выбираем любой максимальный элемент в оставшейся диаграмме Хассе для $\preccurlyeq$, помещаем его в следующую по высоте точку из диаграммы Хассе для $\preccurlyeq_{Л}$ и удаляем из текущей диаграммы Хассе для $\preccurlyeq$. Действуем так, пока в диаграмме Хассе для $\preccurlyeq$ еще остаются элементы.

Пример 4.16. Используя описанный алгоритм, построим линейный порядок $\preccurlyeq_{Л}$, являющийся расширением частичного порядка $\preccurlyeq$, заданного диаграммой Хассе на рис. 4.2, т.е. удовлетворяющий условию $\preccurlyeq \subseteq$ $\subseteq \preccurlyeq_{Л}$. Очевидно, что линейный порядок $\preccurlyeq_{Л}$ может быть построен несколькими способами. Один из возможных линейных порядков приведен на рис. 4.3.

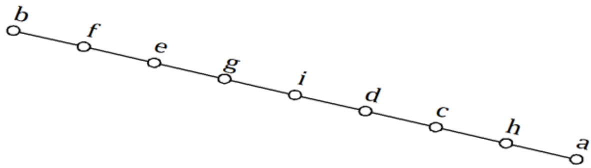


Рис. 4.3

Замечание 4.2. Существует немало практических задач, в которых требуется осуществить расширение некоторого частичного порядка, заданного на конечном множестве, до линейного. Примером является организация производства на конвейере. Пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$ – множество операций, необходимых для изготовления некоторого изделия И. Тогда для любых двух операций a_i, a_j, где $i \neq j$, возможны три случая: (а) операция a_i может быть произведена только после выполнения операции a_j; (б) операция a_j может быть произведена только после выполнения операции a_i; (в) возможно выполнение операции a_i после a_j и наоборот. Рассмотрим бинарное отношение $\preccurlyeq$ на A, включающее в себя все пары вида $\langle a_i, a_i \rangle,\ i = 1,2,...,n$, а также все пары

$\left\langle a_i, a_j \right\rangle$, где $i \neq j$, такие, что операция a_j может быть произведена только после выполнения операции a_i. Очевидно, что это бинарное отношение является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, т.е. является частичным порядком на A. Заметим, что при сборке изделия И на конвейере необходимо расширить указанный частичный порядок до линейного $\preccurlyeq_Л$, поскольку сборка на конвейере предполагает линейно упорядоченную последовательность выполнения операций. Отметим, что неоднозначность такого расширения дает возможность ставить задачу оптимальной организации конвейера, а именно выбора линейного порядка, при котором суммарная потеря рабочего времени (при заданных такте C и времени t_i выполнения каждой операции a_i, $i = 1,2,...,n$) достигает минимального значения, что обеспечивает максимальную производительность труда. *Тактом* работы конвейера назовем время, в течение которого конвейерная линия является неподвижной , чтобы обеспечить возможность выполнения на каждом рабочем месте необходимой последовательности работ. Например, в случае, если для выбранного линейного порядка $\preccurlyeq_Л$ выполняется $a_1 \prec_Л a_2 \prec_Л \ldots$ $\ldots \prec_Л a_n$, потеря рабочего времени на первом рабочем месте составляет $C - t_1 - ... - t_{i_1}$, где $i_1 = \max\{i \mid t_1 + ... + t_i \leq C\}$; потеря рабочего времени на втором рабочем месте составляет $C - t_{i_1+1} - ... - t_{i_2}$, где $i_2 = \max\{i \mid t_{i_1+1} + ... + t_i \leq C\}$, и т.д.

ЗАДАЧИ

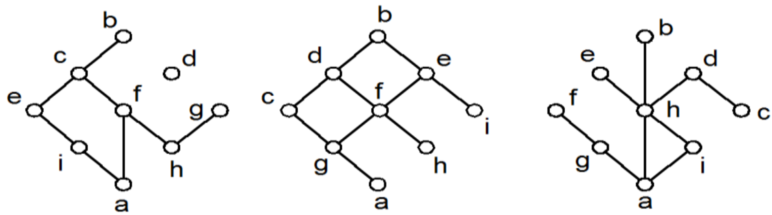
Задача 4.1. Доказать, что если ρ – частичный порядок на A, то и ρ^{-1} – частичный порядок на A.

Решение. Рефлексивность и антисимметричность ρ^{-1} очевидны. Докажем транзитивность ρ^{-1}. Действительно, $\forall x, y, z \in A$ $<x, y>$, $<y, z> \in \rho^{-1} \Rightarrow <y, x>, <z, y> \in \rho \Rightarrow <z, x> \in \rho \Rightarrow <x, z> \in \rho^{-1}$.

Задача 4.2. Доказать, что всякое частично упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента.

Решение. Пусть A – частично упорядоченное множество, a – наибольший элемент на A (для случая с наименьшим элементом рассуждение аналогично). Предположим, что b – также наибольший элемент. Тогда по определению наибольшего элемента $a \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq a$, откуда, в силу антисимметричности $\preccurlyeq$, выполняется $a = b$.

Задача 4.3. В частично упорядоченных множествах, заданных диаграммами Хассе, найти все упорядоченные пары, входящие в данный частичный порядок, максимальные, минимальные элементы, наибольший, наименьший элементы (если таковые имеются), определить сегмент $[a,b]$. Построить любой линейный порядок, являющийся расширением заданного частичного порядка.



(а) (б) (в)

Задача 4.4. Построить пример частично упорядоченного множества, имеющего один минимальный элемент, но не имеющего наименьшего элемента.

Решение. Пусть Z – множество целых чисел, линейно упорядоченное естественным образом (т.е. отношением $\leq$). Добавим к этому множеству комплексное число i. Оно не сравнимо с числами из Z, а поэтому минимально и максимально на $Z \cup \{i\}$. Таким образом, искомым множеством является $Z \cup \{i\}$, частично упорядоченное указанным выше способом.

Задача 4.5. Пусть ρ_1, ρ_2 – линейные порядки на множестве A. Доказать, что $\rho_1 \circ \rho_2$ – линейный порядок $\Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$.

Решение. Пусть $\rho_1 \circ \rho_2$ – линейный порядок. Покажем, что

$\rho_1 = \rho_2$ (рассуждение в обратную сторону очевидно; см. утверждение 3.4). Предположим, что $\rho_1 \neq \rho_2$ и, например, $\exists \langle x, y \rangle \in \rho_1 : \langle x, y \rangle \notin \rho_2$. В силу рефлексивности ρ_2, выполняется $x \neq y$. Поскольку ρ_2 – линейный порядок, то $\langle y, x \rangle \in \rho_2$. Из рефлексивности ρ_1, ρ_2 следует (см. задачу 3.5(в)), что $\rho_1 \cup \rho_2 \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$, а следовательно, $\langle x, y \rangle$, $\langle y, x \rangle \in \rho_1 \circ \rho_2, x \neq y$, что противоречит антисимметричности $\rho_1 \circ \rho_2$.

Задача 4.6. Построить линейный порядок на множествах: (а) N^2, где $\mathrm{N} = \{1,2,\ldots\}$ – натуральный ряд; (б) $\mathrm{N} \cup \mathrm{N}^2 \cup \mathrm{N}^3 \cup \ldots$.

Решение. (а). Обходим точки из N^2, например, согласно рис. 4.4 (число около точки из N^2 является ее номером в процессе обхода)

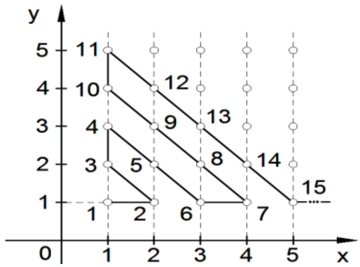


Рис. 4.4

б) Опишем так называемый «лексикографический порядок» (аналогичный порядку расположения слов в словаре; например слово «аббат» расположено в словаре раньше слова «абзац», слово «абзац» раньше слова «арба», слово «арба» раньше слова «Арбат» и т.д.) . Соответственно, в рассматриваемом случае $\forall m, n \in \mathrm{N} = \{1,2,\ldots\}$ выполняется: $\langle x_1,\ldots,x_m \rangle \prec \langle y_1,\ldots,y_n \rangle \Leftrightarrow$ либо $x_1 < y_1$; либо $x_1 = y_1, m = 1, n \geq 2$; либо $m, n \geq 2, x_1 = y_1, x_2 < y_2$; либо $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ m = 2, n > 2$; либо $m, n \geq 3,\ x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, x_3 < y_3$ и т.д. Для упражнения расположите в лексикографическом порядке последовательности натуральных чисел: $<1, 2, 3, 1>, <2, 2, 1>, <1, 1>, <1>, <1, 2, 1>$.

Задача 4.7. Показать, что, если A, A_1 – частично упорядоченные множества с частичными порядками $\preccurlyeq, \preccurlyeq_1$, соответственно, функция $f: A \to A_1$ (кратко пишем $f:(A, \preccurlyeq) \to (A_1, \preccurlyeq_1)$) осуществляет взаимно-однозначное соответствие между множествами A, A_1, функция f является *монотонной* (т.е. $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \preccurlyeq x_2 \Rightarrow f(x_1) \preccurlyeq_1 f(x_2)$), то функция $f^{-1}: A_1 \to A$ может не быть монотонной.

Решение. Пусть $A = A_1 = \{a, b, c\}$. Частично упорядочим множество A двумя способами, заданными диаграммами Хассе, изображенными на рис. 4.5. Левая диаграмма соответствует частичному порядку $\preccurlyeq$, а правая – линейному порядку $\preccurlyeq_1$. Пусть $\forall x \in A \quad f(x) = x$. Тогда функция $f:(A, \preccurlyeq) \to (A, \preccurlyeq_1)$ является монотонной, а функция $f^{-1} = f:(A, \preccurlyeq_1) \to (A, \preccurlyeq)$ не является монотонной, поскольку $b \preccurlyeq_1 c$, но b и c не сравнимы по $\preccurlyeq$ (т.е. $f^{-1}(b) = b \preccurlyeq c = f^{-1}(c)$ не выполняется).

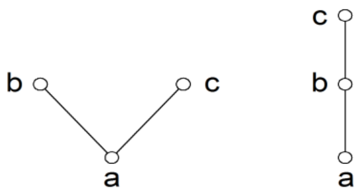


Рис. 4.5

Определение. Пусть A, A_1 – частично упорядоченные множества с частичными порядками $\preccurlyeq, \preccurlyeq_1$ соответственно. Тогда, если существует биективная функция $f: A \to A_1$ такая, что функции f, f^{-1} являются монотонными, то говорят, что f является *изоморфизмом* частично упорядоченных множеств $(A, \preccurlyeq)$, $(A_1, \preccurlyeq_1)$.

Задача 4.8. Доказать, что $(\mathrm{N}, \le)$, $(\mathrm{N}, \ge)$, где $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots\}$ – натуральный ряд, не изоморфны.

Решение. В случае изоморфизма образ минимального элемента очевидным образом снова будет минимальным, максимального – максимальным, наименьшего – наименьшим, наибольшего – наибольшим.

Но тогда частичные порядки (N, $\le$), (N, $\ge$) не изоморфны, поскольку в (N, $\le$) существует наименьший элемент, но отсутствует наибольший, а в (N, $\ge$) – наоборот.

Задача 4.9. Рассмотрим частичный порядок $\preccurlyeq$ на множестве натуральных чисел $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$: $\forall k,m\in\mathrm{N}\ \ 2k-1\prec 2m$, т.е. любое нечетное число меньше любого четного, а множества четных и нечетных чисел упорядочены «естественным» образом, т.е. бинарным отношением $\le$. Доказать, что (N, $\le$), (N, $\preccurlyeq$) не изоморфны.

Решение. Предположим противное. Пусть существует изоморфизм $f:(\mathrm{N},\le)\to(\mathrm{N},\preccurlyeq)$, и $a=f^{-1}(2)$. Тогда $\forall k\in\mathrm{N}\ \ f^{-1}(2k-1)<a$, что противоречит конечности множества $\{1,2,...,a\}$.

Задача 4.10. Доказать, что любое непустое частично упорядоченное множество A изоморфно некоторой системе подмножеств множества A, упорядоченной включением $\subseteq$.

Решение. Пусть $\preccurlyeq$ – отношение частичного порядка на A. Для любого элемента $a\in A$ обозначим $A_a=\{x\in A\,|\,x\preccurlyeq a\}$. Очевидно, что $\forall a\in A\ \ a\in A_a$. Рассмотрим отображение $f:A\to 2^A$ такое, что $\forall a\in A\ \ \ f(a)=A_a$. Докажем инъективность этого отображения (а следовательно, биективность отображения $f:A\to f(A)$). Пусть $a,b\in A,\ f(a)=f(b)$. Покажем, что $a=b$. Действительно, $A_a=f(a)=f(b)=A_b\Rightarrow a\in A_a=A_b, b\in A_b=A_a\Rightarrow a\preccurlyeq b\,, b\preccurlyeq a\Rightarrow$ $\Rightarrow a=b$. Докажем теперь изоморфизм $(A,\preccurlyeq)$, $(f(A),\subseteq)$. (а) Если $a,b\in A, a\preccurlyeq b$, то $\forall x\in A\ \ x\preccurlyeq a\Rightarrow x\preccurlyeq b$, а следовательно, $f(a)=$ $=\{x\in A\,|\,x\preccurlyeq a\}\subseteq\{x\in A\,|\,x\preccurlyeq b\}=f(b)$. (б) Обратно, если $a,b\in A$, $f(a)\subseteq f(b)$, то $a\in A_a=f(a)\subseteq f(b)=A_b\Rightarrow a\in A_b\ \Rightarrow a\preccurlyeq b$.

Тема 5. Равномощность множеств. Счетные, континуальные множества

Множество A называется *эквивалентным* множеству B (символически $A\sim B$), если между A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. существует биекция $\varphi: A \to B.$ Если множество A эквивалентно множеству B, то эти множества называются *равномощными.* Обозначим $N_n = \{1,2,...,n\},$ где $n \in$ N, N $= \{1,2,...\}$ – натуральный ряд. Каждое множество A, эквивалентное N_n для некоторого $n \in$ N, либо пустое, называется *конечным*, а n – *числом элементов* множества $A,$ при этом пишем $|A| = n.$ Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Каждое множество A, эквивалентное натуральному ряду N, называется *счетным*. Каждое множество A, эквивалентное множеству действительных чисел R, называется *континуальным*. Будем писать, что (а) $|A| = |B|,$ если $A \sim B$; (б) $|A| \le |B|,$ если $A \sim B_1 \subseteq B$; (в) $|A| < |B|,$ если $|A| \le |B|$ и A не эквивалентно B. Из свойств биективных функций (см. тему 2) следует, что для любых множеств A, B, C $A \sim A$ (рефлексивность ~); если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность ~); если $A \sim B$, $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность ~).

Для установления равномощности множеств часто используется:

Теорема *Кантора – Бернштейна*. Если $|A| \le |B|,$ $|B| \le |A|,$ то $A \sim B$ (см. задачу 5.35).

ЗАДАЧИ

Задача 5.1. Доказать, что если существует сюръективная функция $\varphi: A \to B,$ то $|B| \le |A|$.

Решение. В силу сюръективности φ каждому элементу $b \in B$ можно поставить в соответствие произвольный элемент $a_b \in \varphi^{-1}(\{b\}).$ Обозначим $A_1 = \{a_b \mid b \in B\}.$ Отображение $\psi: B \to A_1$ такое, что $\forall b \in B$ $\psi(b) = a_b$, будет, очевидно, биекцией (т.е. $B \sim A_1 \subseteq A$), откуда и следует доказываемое утверждение.

Задача 5.2. Доказать, что (а) всякое подмножество B конечного множества A конечно; (б) объединение конечного числа конечных множеств конечно; (в) прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно.

Решение. (а) Случаи $A=\varnothing$ или $B=\varnothing$ очевидны. Пусть $|A|=n,$ где $n\in\mathrm{N}$. Тогда из $B\subseteq A$ следует, что $|B|\le|A|=n.$

(б) Пусть $|A_1|=n_1\in\mathrm{N},\ldots,\ |A_k|=n_k\in\mathrm{N}$. Тогда $|A_1\cup\ldots\cup A_k|\le$ $\le n_1+\ldots+n_k$. (в) Пусть $|A_1|=n_1\in\mathrm{N},\ldots,\ |A_k|=n_k\in\mathrm{N}$. Тогда (см. упражнение 2.2) $|A_1\times\cdots\times A_k|=\prod_{i=1}^{k}n_i$.

Задача 5.3. Доказать, что из всякого бесконечного множества A можно выделить счетное подмножество.

Решение. Поскольку A бесконечно, то $A\ne\varnothing\Rightarrow\exists a_1\in A$. Если $A\setminus\{a_1\}=\varnothing,$ то $A=\{a_1\}\sim N_1$, что противоречит бесконечности $A,$ следовательно, $A\setminus\{a_1\}\ne\varnothing,$ откуда $\exists a_2\in A\setminus\{a_1\}$. Если $A\setminus\{a_1,a_2\}=$ $=\varnothing,$ то $A=\{a_1,a_2\}\sim N_2$, что противоречит бесконечности $A,$ следовательно, $A\setminus\{a_1,a_2\}\ne\varnothing,$ откуда $\exists a_3\in A\setminus\{a_1,a_2\}$ и т.д. Таким образом, в результате описанного процесса мы выделим бесконечную последовательность попарно различных элементов $a_n, n\in\mathrm{N}$, а следовательно, $A\supseteq\{a_n\mid n\in\mathrm{N}\}\sim\mathrm{N}$.

Задача 5.4. Доказать, что всякое подмножество B счетного множества A счетно или конечно.

Решение. Пусть $A=\{a_n\mid n\in\mathrm{N}\}, B\subseteq A.$ Покажем, что B счетно или конечно. Пусть B не является конечным. Докажем, что B счетно. Заметим, что $\forall b\in B\ \ b\in A\Rightarrow\exists i(b)\in\mathrm{N}{:}\ b=a_{i(b)}$, т.е. $B=\{a_{i(b)}\mid$ $b\in B\}$. Пусть $b_1=a_{i_1}$, где $i_1=\min\{i(b)\mid b\in B\}$, $b_2=a_{i_2}$, где $i_2=$ $=\min\{i(b)\mid b\in B\setminus\{b_1\}\}$, $b_3=a_{i_3}$, где $i_3=\min\{i(b)\mid b\in B\setminus\{b_1,b_2\}\}$, и $\forall k\in\mathrm{N}\ \ b_k=a_{i_k}$, где $i_k=\min\{i(b)\mid b\in B\setminus\{b_1,\ldots,b_{k-1}\}\}$. Заметим, что $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k<\ldots$ (где $k\ge 3$), а следовательно, $\forall k\in\mathrm{N}\ \ k\le i_k$. Покажем, что $B=\{b_k\mid k\in\mathrm{N}\}$. Действительно, $\forall b\in B\ \ b=a_{i(b)}$, а поэтому при некотором $k\le i(b)\ \ b=a_{i_k}=b_k$.

Задача 5.5. Доказать, что (а) если множество A является конечным, а множество B – счетным, то множество $A \cup B$ является счетным; (б) если множества A и B являются счетными, то множество $A \cup B$ также является счетным; (в) если множества A_i, $i \in \mathrm{N}$, являются конечными, непустыми и попарно не пересекающимися, то множество $\bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$ является счетным; (г) если множества A_i, $i \in \mathrm{N}$, являются счетными, то множество $\bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$ также является счетным; (д) если множества A_i, $i \in \mathrm{N}$, являются счетными или конечными и хотя бы одно из них является счетным, то множество $\bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$ – счетное; (е) если множества A_i, $i \in \mathrm{N}$, являются конечными, то множество $\bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$ является счетным или конечным.

Решение. (а) Производим нумерацию элементов множества $A \cup B$ следующим образом. Сначала нумеруем элементы множества A, затем переходим к нумерации элементов множества B. Если очередной элемент множества B принадлежит A, то пропускаем его, в противном случае присваиваем ему очередной номер. Тогда каждый элемент из $A \cup B$ получит свой номер и множество $A \cup B$ будет бесконечным (см. задачу 5.2(а)), а следовательно, счетным.

(б) Пусть $A = \{a_1, a_2, ...\}, B = \{b_1, b_2, ...\}$. Осуществляем обход (нумерацию) элементов множества $A \cup B$ согласно рис. 5.1. Если очередной элемент встречался ранее, то пропускаем его, в противном случае присваиваем ему очередной номер. Тогда каждый элемент из $A \cup B$ получит свой номер и множество $A \cup B$ будет бесконечным (см. задачу 5.2(а)), а следовательно, счетным.

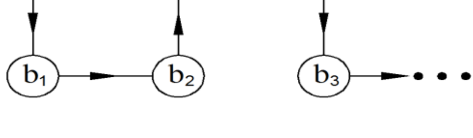


Рис. 5.1

(в) Множество $\bigcup_{i\in\mathrm{N}} A_i$ является бесконечным, поскольку содержит последовательность $\{a_n \mid n\in\mathrm{N}\}$, где a_n – произвольный элемент из A_n. Покажем его счетность. Последовательно нумеруем элементы первого множества, затем второго, затем третьего и т.д. В результате каждый элемент из $\bigcup_{i\in\mathrm{N}} A_i$ получит свой номер. (г) Пусть $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, ...\}, i\in$ N. Осуществляем обход бесконечного множества $\bigcup_{i\in\mathrm{N}} A_i$ (см. задачу 5.2(а)) согласно рис. 5.2. Если очередной элемент встречался ранее, то пропускаем его, в противном случае присваиваем ему очередной номер. Тогда каждый элемент из $\bigcup_{i\in\mathrm{N}} A_i$ получит свой номер.

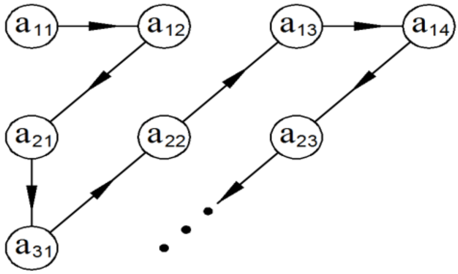


Рис. 5.2

(д) Действуем, как и в случае (г). При этом, если некоторое множество конечно, то добавляем бесконечное множество пустых элементов. Соответственно, при назначении очередного номера не учитываем проход по пустым элементам. (е) Нумеруем элементы множества $A = \bigcup_{i\in\mathrm{N}} A_i$ аналогично случаю (в), но пропуская встречающиеся ранее элементы. Тогда каждый элемент из A получит свой номер, а следовательно, множество A является либо конечным (например, в случае $A_i = A_1$ при $i \geq 2$), либо бесконечным, а следовательно, счетным.

Задача 5.6. Доказать, что если множество A бесконечно и B – конечное или счетное множество, то $A\cup B \sim A$.

Решение. Поскольку A бесконечно, то в A можно выделить последовательность $\{a_n \mid n\in\mathrm{N}\}$ (см. задачу 5.3). Обозначим $B_1 = B\setminus A$. Тогда $A\cup B = A\cup B_1$, $A\cap B_1 = \varnothing$. Возможны два случая (см. задачу

5.4): (а) $B_1 = \{b_1, ..., b_m\}$ – конечное множество; (б) $B_1 = \{ b_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ – счетное множество. В случае (а) определим отображение $\varphi : A \to A \cup$ $\cup B_1 = A \cup B$ следующим образом: $\forall x \in A \setminus \{ a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ $\varphi(x) = x,$ и для каждого $x = a_n$, $n \in \mathrm{N}$, отображение $x \mapsto \varphi(x)$ осуществляется в соответствии с таблицей (верхний элемент отображается в нижний):

a_1	$\cdots$	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	$\cdots$
b_1	$\cdots$	b_m	a_1	a_2	$\cdots$

Указанное отображение является биекцией вида $\varphi : A \to A \cup B$, откуда $A \cup B \sim A$. В случае (б) определим отображение $\varphi : A \to A \cup$ $\cup B_1 = A \cup B$ следующим образом: $\forall x \in A \setminus \{ a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ $\varphi(x) = x,$ и для каждого $x = a_n$, $n \in \mathrm{N}$, отображение $x \mapsto \varphi(x)$ осуществляется в соответствии с таблицей (верхний элемент отображается в нижний):

a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{2n-1}	a_{2n}	$\cdots$
a_1	b_1	a_2	b_2	$\cdots$	a_n	b_n	$\cdots$

Указанное отображение является биекцией вида $\varphi : A \to A \cup B$, откуда $A \cup B \sim A$.

Задача 5.7. Доказать, что если множество A бесконечно и несчетно, а B – конечное или счетное множество, то $A \setminus B \sim A$.

Решение. Заметим, что $A \setminus B$ – бесконечное множество. Действительно, предположив, что $A \setminus B$ – конечное множество, получаем, что $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ – конечное или счетное множество (см. задачи 5.2(б), 5.4, 5.5(а)), что противоречит исходным условиям. Обозначим $B_1 = A \cap B, A_1 = A \setminus B.$ Тогда $A_1 \cup B_1 = (A \setminus B\ ) \cup (A \cap B) = A.$ Множество $B_1 = A \cap B \subseteq B$ является конечным или счетным (см. задачи 5.2(а), 5.4), множество A_1 является бесконечным, а следовательно (см. задачу 5.6), $A = A_1 \cup B_1 \sim A_1 = A \setminus B$.

Задача 5.8. Доказать, что если множества $A_1,\ldots,A_n$ $(n \geq 1)$ – счетны, то множество $A_1 \times \cdots \times A_n$ счетно.

Решение. Заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда $n = 2$, поскольку $A_1 \times \cdots \times A_n \sim (\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \cdots \times A_n)$. Пусть $A_1 = \{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$. Покажем, что множество $A_1 \times A_2$ счетное. Заметим, что $A_1 \times A_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathrm{N}} (\{a_n\} \times A_2)$, откуда (см. задачу 5.5(г)) и следует счетность этого множества.

Задача 5.9. Доказать, что (а) множество целых чисел Z счетное; (б) множество рациональных чисел Q счетное; (в) множество рациональных чисел сегмента $[a,b]$ счетное при $a < b$.

Решение. (а) Z = $\{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$, где $a_1 = 0, a_{2n} = n, a_{2n+1} = -n, n \in$ $\in \mathrm{N}$; (б) Q= $\bigcup\limits_{n \in \mathrm{N}} \bigcup\limits_{m \in \mathrm{Z}} \{m/n\}$(см. также задачи 5.9(а), 5.5(г)); (в) Множество $\mathrm{Q}_{[a,b]} = [a,b] \cap \mathrm{Q}$ является подмножеством счетного множества Q и поэтому либо конечное, либо счетное (см. задачу 5.4). Покажем его бесконечность. Пусть a_1, b_1 – рациональные числа такие, что $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ (укажите алгоритм выделения чисел a_1, b_1, используя десятичное разложение числа $c = (a+b)/2$; см. решение задачи 5.14). Пусть $a_n = a_1 + (b_1 - a_1)/n,\ n \in \mathrm{N}$. Тогда $a_n \in [a_1, b_1] \subseteq [a,b],\ n \in \mathrm{N}$, т.е. $\{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ является бесконечной последовательностью из $\mathrm{Q}_{[a,b]}$.

Задача 5.10. Доказать, что множество всех конечных последовательностей, состоящих из элементов счетного множества A, счетно.

Решение. Множество всех конечных последовательностей элементов из A есть $\bigcup\limits_{n \in N} A^n$, которое является счетным (см. задачи 5.5(г), 5.8).

Задача 5.11. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества $A = \{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ счетно.

Решение. Обозначим $\lfloor A \rfloor_k = \{a_1,...,a_k\}, k \in \mathrm{N}$. Тогда множество всех конечных подмножеств множества A есть $\bigcup\limits_{k\in\mathrm{N}} 2^{\lfloor A \rfloor_k} =$

$= \bigcup\limits_{k\in\mathrm{N}} \left[2^{\lfloor A \rfloor_k} \setminus \left\{ \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} 2^{\lfloor A \rfloor_j} \right\} \right]$, которое является счетным (см. задачу 5.5(в)).

Задача 5.12. Доказать, что множество всех многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

Решение. Указанные многочлены являются выражениями вида $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, где $n \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, $a_i \in \mathrm{Z}$, $i \in \{0,1,...,n\}$, а следовательно, каждое такое выражение взаимно-однозначно задается упорядоченным набором $\langle a_0, a_1, ..., a_n \rangle$, т.е. множество этих многочленов эквивалентно счетному множеству $\bigcup\limits_{n\in\mathrm{N}} \mathrm{Z}^n$ (см. задачи 5.5(г), 5.8, 5.9(а)).

Задача 5.13. Доказать счетность множества всех алгебраических чисел, т.е. чисел, являющихся корнями многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами.

Решение. Заметим, что $x - n, n \in \mathrm{N}$, – многочлены с целыми коэффициентами, следовательно, множество алгебраических чисел включает в себя множество натуральных чисел, а поэтому является бесконечным. С другой стороны, в силу задач 5.5(е), 5.12, множество алгебраических чисел является либо конечным, либо счетным, поэтому, в силу своей бесконечности, является счетным.

Задача 5.14. Доказать, что любое множество попарно непересекающихся открытых интервалов на действительной прямой не более чем счетное.

Решение. Заметим, что для любого интервала (a,b), где $a < b$, можно выделить рациональное число $c_{(a,b)} \in (a,b)$, поэтому рассматриваемое множество интервалов эквивалентно подмножеству множества рациональных чисел, а следовательно, является счетным или конечным (см. задачи 5.4, 5.9(б)). Для выделения рационального числа $c_{(a,b)} \in (a,b)$ действуем следующим образом. Пусть $c = (a+b)/2$,

$c = c_0, c_1 c_2 \ldots$ – десятичное разложение числа c, где c_0 – целая часть этого числа. Тогда последовательность рациональных чисел $c(n) = c_0, c_1 c_2 \ldots c_n, n \in \mathrm{N}$, сходится к c при $n \to \infty$, а следовательно, для некоторого $n_0 \geq 1$ выполняется $c(n_0) \in (a, b)$.

Задача 5.15. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции на действительной оси является конечным или счетным.

Решение. Пусть x_p – точка разрыва монотонной функции $\varphi(x), x \in \mathrm{R}$. Рассмотрим $a = \lim\limits_{x \to x_p - 0} \varphi(x), b = \lim\limits_{x \to x_p + 0} \varphi(x)$. В силу монотонности $\varphi(x)$ эти пределы существуют и конечны, а в силу того, что x_p – точка разрыва и $\varphi(x)$ – монотонная функция, имеем $a < b$. Аналогично рассуждению из задачи 5.14 можно поместить между a и b рациональное число $q(x_p) \in (a, b)$ и для разных точек разрыва эти рациональные числа будут различными. Множество выделенных таким образом рациональных чисел $\{q(x_p)\}$ эквивалентно множеству точек разрыва $\{x_p\}$ и является подмножеством счетного множества Q, а следовательно, конечно или счетно (см. задачи 5.4, 5.9(б)).

Задача 5.16. Доказать, что $(0,1) \sim [0,1] \sim (0,1] \sim [0,1)$.

Решение. Докажем, что $(0,1) \sim [0,1]$. Рассмотрение остальных случаев аналогично. Обозначим $a_n = 1/(n+1), n \in \mathrm{N}$. Заметим, что $a_n \in (0,1), n \in \mathrm{N}$. Определим биективное отображение $\varphi : (0,1) \to [0,1]$ следующим образом: (а) $\forall x \in (0,1) \setminus \{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ $\varphi(x) = x$; (б) для $x = a_n, n \in \mathrm{N}$, отображение φ задается в соответствии с таблицей:

x	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_n	$\cdots$
$\varphi(x)$	0	1	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	$\cdots$

Задача 5.17. Доказать, что $(0,1) \sim \mathrm{R}$.

Решение. Положим $\psi(x) = \mathrm{ctg}\,\pi x, x \in (0,1)$. Тогда отображение $\psi : (0,1) \to \mathrm{R}$, очевидно, является биективным.

Задача 5.18. Доказать, что $[0,1]^2 \sim [0,1]$.

Решение. В силу теоремы Кантора – Бернштейна достаточно описать инъективное отображение множества $[0,1]^2$ в $[0,1]$ (описание инъективного отображения $[0,1]$ в $[0,1]^2$ очевидно). Пусть $< a,b > \in [0,1]^2$,

$$a = 0,a_1a_2... \ ,b = 0,b_1b_2... \qquad (5.1)$$

– десятичные разложения чисел $a,b \in [0,1]$. При этом для однозначности десятичного разложения исключаем из рассмотрения конечные десятичные разложения вида $0,c_1c_2...c_k$, а также бесконечные разложения вида $0,c_1c_2...c_k00...$. Единственно возможным для таких чисел оставляем разложение с бесконечной последовательностью числа 9 (можно поступать и наоборот). Например, вместо 0,25 (или $0,2500...$) используем разложение вида 0,24999… . Для числа 0 единственным десятичным разложением является 0,000… . Опишем инъективное отображение $\varphi :< a,b > \in [0,1]^2 \mapsto [0,1]$, где a,b удовлетворяют (5.1):

$$\varphi(a,b) = 0,a_1b_1a_2b_2...a_nb_n... \ . \qquad (5.2)$$

Инъективность этого отображения очевидна (если $\varphi(a,b) = \varphi(c,d)$, то из (5.2) следует, что $a = c, b = d$).

Задача 5.19. Доказать, что $[0,1] \sim [0,1]^n$, где $n \in \mathrm{N}$.

Решение. Аналогично решению задачи 5.18.

Задача 5.20. Доказать, что множество $[0,1]$ несчетно.

Решение. Предположим, что можно занумеровать числа из $[0,1]$, т.е. $[0,1] = \{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$. Рассмотрим десятичные разложения чисел a_n (как и в задаче 5.18 делаем их однозначными):

$$a_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}... \ ,$$

$$a_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}... \ ,$$

$$a_3 = 0,a_{31}a_{32}a_{33}... \ ,$$

....

Введем в рассмотрение десятичное число $b = 0,b_1b_2b_3...$. Пусть $\forall i \in \mathrm{N}\ \ b_i \in \{1,...,9\} \setminus \{a_{ii}\}$. Тогда $b \in [0;1]$, но $b \notin \{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$, т.е. пришли к противоречию с возможностью занумеровать числа из $[0,1]$.

Задача 5.21. Доказать, что множество всех иррациональных чисел континуально.

Решение. Это следует из утверждений задач 5.7, 5.9(б).

Задача 5.22. Доказать, что объединение конечного или счетного числа континуальных множеств A_i, $i \in I$, континуально.

Решение. Обозначим $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Рассмотрим случай, когда $I = \mathrm{N}$ (случай, когда I – конечное множество, рассматривается аналогично). Пусть $\varphi : \mathrm{R} \to (0,1)$ – биекция (см. задачу 5.17), φ_i – биекции вида $\varphi_{\mathrm{i}} : A_i \to (0,1)$, $i \in \mathrm{N}$ ($A_i \sim \mathrm{R} \sim (0,1)$); см. задачу 5.17). Введем, кроме того, $\forall a \in \mathrm{R}$ отображение $\eta_a : (0,1) \to (a, a+1)$, действующее согласно формуле $\forall x \in (0,1)\ \ \eta_a(x) = x + a$. Очевидно, что η_a – биекция. Пусть $A_1' = A_1$, $A_i' = A_i \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j \right)$, $i \in \{2,3,...\}$. Тогда $A = \bigcup\limits_{i \in \mathrm{N}} A_i'$, $A_i' \cap A_j' = \varnothing$ при $i \neq j$. Введем отображение $\psi : A \to \mathrm{R}$ следующим образом. Заметим, что $\forall x \in A\ \ \exists i(x) \in \mathrm{N}$: $x \in A_{i(x)}'$. Положим $\psi(x) = \eta_{i(x)}(\varphi_{i(x)}(x))$. Очевидно, что ψ – инъективное отображение. Построение инъективного отображения из R в A очевидно (например, $\varphi_1^{-1}\varphi : \mathrm{R} \to A_1 \subseteq A$). Далее, в силу теоремы Кантора – Бернштейна, получаем справедливость доказываемого утверждения.

Задача 5.23. Доказать, что множество N^{N} всех счетных последовательностей натуральных чисел континуально.

Решение. Опишем инъективное отображение последовательностей $< a_1, a_2, ... > \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$ в $(0,1)$: $< a_1, a_2, ... > \mapsto 0,\underbrace{0...01}_{a_1}\underbrace{0...01}_{a_2}...$. Обратно, любое действительное число из $(0,1)$ имеет десятичное представление

$a = 0,a_1a_2...$ (однозначное с учетом предположения, сделанного при решении задачи 5.18), и ему инъективно соответствует последовательность $<\underbrace{1,...,1}_{a_1},2,\underbrace{1,...,1}_{a_2},2,...>\in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$. Таким образом, в силу теоремы Кантора – Бернштейна, $\mathrm{N}^{\mathrm{N}} \sim (0,1) \sim \mathrm{R}$ (см. задачу 5.17).

Задача 5.24. Доказать, что множество $\{0;1\}^{\mathrm{N}}$ всех счетных последовательностей, составленных из 0 и 1, континуально.

Решение. Опишем инъективное отображение последовательности $< a_1, a_2,... >\in \{0;1\}^{\mathrm{N}}$ в $(0,1)$: $< a_1, a_2,... >\mapsto 0,\underbrace{0...0}_{a_1}1\underbrace{0...0}_{a_2}1...$. Обратно, любое действительное число из $(0,1)$ имеет десятичное представление $a = 0,a_1a_2...$ (однозначное с учетом замечания, сделанного при решении задачи 5.18), и ему инъективно соответствует последовательность $<\underbrace{0,...,0}_{a_1},1,\underbrace{0,...,0}_{a_2},1,...>\in \{0;1\}^{N}$. Таким образом, в силу теоремы Кантора – Бернштейна, $\{0;1\}^{\mathrm{N}} \sim (0,1) \sim \mathrm{R}$ (см. задачу 5.17).

Задача 5.25. Доказать, что множество 2^{N} всех подмножеств натурального ряда континуально.

Решение. Опишем инъективное отображение множеств $A \in 2^{\mathrm{N}}$ в $(0,1)$. Пусть $A = \{n_1, n_2,...\} \in 2^{\mathrm{N}}$, и при этом для определенности элементы множества A пронумерованы таким образом, что $n_1 < n_2 < ...$. Тогда отображение $A = \{n_1, n_2,...\} \mapsto 0,\underbrace{0...0}_{n_1}1\underbrace{0...0}_{n_2}1... \in (0,1)$ инъективно. Обратно, любое действительное число $a \in (0,1)$ имеет десятичное представление $a = 0,a_1a_2...$ (однозначное с учетом замечания, сделанного при решении задачи 5.18), и ему инъективно соответствует множество $A = \{n_1, n_2,...\} \in 2^{\mathrm{N}}$, где $n_1 = a_1 + 1, n_{i+1} = n_i + a_{i+1} + 1, i \in \mathrm{N}$. Например, число $0{,}01203\ldots$ отобразится в множество $\{1,3,6,7,11,...\} \in 2^{\mathrm{N}}$. При этом $n_1 < n_2 < ...$, $a_1 = n_1 - 1,\ a_{i+1} = n_{i+1} - n_i - 1,\ i \in \mathrm{N}$, т.е. члены десятичного разложения числа a однозначно определяются множеством A, что и доказывает инъективность отображения. Таким образом, в силу теоремы Кантора – Бернштейна, $2^{\mathrm{N}} \sim (0,1) \sim \mathrm{R}$ (см. задачу 5.17).

Задача 5.26. Доказать, что, если все множества $A_1,...,A_n$ континуальны, то множество $A_1 \times \cdots \times A_n$ континуально.

Решение. Пусть $\varphi_i : A_i \to [0,1]$ – биекция ($A_i \sim \mathrm{R} \sim (0,1) \sim [0,1]$; см. задачи 5.16, 5.17), $i = 1,2,...,n$. Тогда отображение $\varphi : A_1 \times \cdots \times A_n \to$ $\to [0,1]^n$, действующее согласно формуле $\varphi(< a_1,...,a_n >) =$ $=< \varphi_1(a_1),...,\varphi_n(a_n) >$ также, очевидно является биекцией. При этом $[0,1]^n \sim [0,1] \sim (0,1) \sim \mathrm{R}$ (см. задачи 5.16–19).

Задача 5.27. Доказать, что, если множества A_i, $i \in \mathrm{N}$, континуальны, то множество $A = \prod\limits_{i \in \mathrm{N}} A_i$ континуально.

Решение. Опишем инъективное отображение $\varphi : A \to (0,1)$. Пусть $\forall i \in \mathrm{N}$ $\varphi_i : A_i \to (0,1)$ – биекция ($A_i \sim \mathrm{R} \sim (0,1)$; см. задачу 5.17). Тогда последовательность $< a_1, a_2,... > \in A$, с учетом однозначности десятичного представления чисел из $(0,1)$ (см. решение задачи 5.18), инъективно отображается в последовательность действительных чисел: $\varphi_1(a_1) = 0,a_{11}a_{12}a_{13}...$, $\varphi_2(a_2) = 0,a_{21}a_{22}a_{23}...$, $\varphi_3(a_3) = 0,a_{31}a_{32}a_{33}...$ и т.д., которая в свою очередь инъективно отображается в десятичное число $\varphi(a) = 0,a_{11}a_{12}a_{21}a_{31}a_{22}a_{13}...$. Последовательность десятичных чисел в нем составлена в соответствии с рис. 5.2.

Инъективное отображение $\psi : (0,1) \to A$ очевидно. Например, $\forall x \in (0;1)$ $\psi(x) =< \varphi_1^{-1}(x), a_2, a_3,... >$, где a_i – произвольный фиксированный элемент из $A_i, i = 2,3,...$. Таким образом, в силу теоремы Кантора – Бернштейна, $A \sim (0,1) \sim \mathrm{R}$ (см. задачу 5.17).

Задача 5.28. Доказать, что множество R^{N} всех счетных последовательностей действительных чисел континуально.

Решение. Следует из предыдущей задачи. Полагаем $A_i = \mathrm{R}$, $i \in \mathrm{N}$.

Задача 5.29. Доказать, что, множество всех непрерывных функций, заданных на действительной прямой, континуально.

Решение. Используем теорему Кантора – Бернштейна. Любую непрерывную функцию f можно отобразить в последовательность ее значений на множестве рациональных чисел Q={ $q_i \mid i \in \mathrm{N}$}, т.е. $f \mapsto$ $\mapsto < f(q_1), f(q_2),... > \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ (см. задачу 5.9(б)). Очевидно, что значение непрерывной функции f на любом действительном числе $a =$ $= a_0, a_1 a_2 ...$, где a_0 – целая часть числа a и $a_1, a_2,...$ – элементы десятичного разложения числа a, однозначно определяется значениями этой функции на последовательности рациональных чисел $a(n) =$ $= a_0, a_1 a_2 ... a_n, n \in \mathrm{N}$, а следовательно, отображение $f \mapsto < f(q_1),$ $f(q_2),... >$ инъективно. Далее воспользуемся тем, что $\mathrm{R}^{\mathrm{N}} \sim \mathrm{R}$ (см. задачу 5.28), а также тем, что, любое действительное число является непрерывной функцией на действительной прямой.

Задача 5.30. Доказать, что, множество всех монотонных функций, заданных на действительной прямой, континуально.

Решение. Используем теорему Кантора – Бернштейна. Любая монотонная функция инъективно задается последовательностью точек разрыва (которая является конечной или счетной; см. задачу 5.15), последовательностью значений в точках разрыва и последовательностью значений этой функции на множестве рациональных чисел Q={ $q_i \mid i \in$ $\in \mathrm{N}$} (см. задачу 5.9(б)). Таким образом, множество монотонных функций с бесконечным числом точек разрыва задается тремя бесконечными последовательностями действительных чисел, т.е. элементом множества $[\mathrm{R}^{\mathrm{N}}]^3$, эквивалентного R (см. задачи 5.26,5.28). Случай с конечным числом точек разрыва рассматривается аналогично (можно, например, добавить счетное множество фиктивных точек разрыва). Обратно, любое действительное число является монотонной функцией на действительной прямой.

Задача 5.31. Пусть A – счетное множество на множестве действительных чисел R. Доказать, что всегда можно выбрать $a \in \mathrm{R}$ так, чтобы $\{x+a \mid x \in A\} \cap A = \varnothing$.

Решение. Докажем, что $B = \{x - y \mid x, y \in A\}$ – счетное множество. Действительно, пусть $A = \{ a_n \mid n \in \mathrm{N}\}, A_i = A - a_i = \{a_n - a_i \mid n \in \mathrm{N}\}$, $i \in \mathrm{N}$. Тогда A_i, $i \in \mathrm{N}$ – счетные множества, $B = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$, а следовательно (см. задачу 5.5(г)), является счетным множеством. Но тогда $\mathrm{R} \setminus B \neq \varnothing$. Пусть a – произвольная точка из $\mathrm{R} \setminus B$. Покажем, что $\{x+a \mid x \in A\} \cap A = \varnothing$. Предположим противное. Тогда $\exists a_1, a_2 \in A$: $a_1 + a = a_2$, откуда $a = a_1 - a_2 \in B,$ что противоречит условию $a \in \mathrm{R} \setminus B$.

Задача 5.32. Доказать, что $\mathrm{R}^{[0,1]}$ – множество действительных функций, заданных на $[0,1]$, не эквивалентно $[0,1]$ (т.е. $|[0,1]| = |\mathrm{R}| < |\mathrm{R}^{[0,1]}|$; см. задачи 5.16, 5.17).

Решение. Пусть существует биекция $\varphi : [0,1] \to \mathrm{R}^{[0,1]}$. Положим $f(x) = (\varphi(x))(x) + 1,$ где $x \in [0,1]$. Тогда $f \in \mathrm{R}^{[0,1]}$ и $f = \varphi(x_0)$ для некоторого $x_0 \in [0,1]$ (в силу сюръективности φ). Следовательно, $(\varphi(x_0))(x_0) = f(x_0) = (\varphi(x_0))(x_0) + 1$, т.е. пришли к противоречию. Заметим теперь, что любое действительное число из $[0,1]$ является действительной функцией, заданной на $[0,1]$, откуда $|[0,1]| \le |\mathrm{R}^{[0,1]}|$, а поскольку $\mathrm{R}^{[0,1]}$ не эквивалентно $[0,1]$, то $|[0,1]| < |\mathrm{R}^{[0,1]}|$.

Задача 5.33. Доказать, что множество всех подмножеств множества A не эквивалентно A, и при этом $|A| < |2^A|$.

Решение. Предположим, что существует биекция $\varphi : A \to 2^A$. Пусть $A_0 = \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\}$. Из сюръективности φ следует, что $\exists a_0 \in A : \varphi(a_0) = A_0$. Возможны два случая: 1) $a_0 \in A_0 = \varphi(a_0) \Rightarrow \Rightarrow a_0 \notin A_0$; 2) $a_0 \notin A_0 = \varphi(a_0) \Rightarrow a_0 \in A_0$. В обоих случаях приходим к противоречию. Заметим, что инъективное отображение $\psi : A \to 2^A$

строится очевидным образом: $\forall a \in A \;\; \psi(a) = \{a\}$. Таким образом, $|A| \leq |2^A|$ и 2^A не эквивалентно A, а следовательно, $|A| < |2^A|$.

Задача 5.34. Будем говорить, что последовательность натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots$ растет быстрее, чем последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Доказать, что (а) для каждой последовательности натуральных чисел существует последовательность натуральных чисел, растущая быстрее ее; (б) если множество последовательностей натуральных чисел A обладает свойством, что для произвольной последовательности натуральных чисел существует последовательность из A, растущая быстрее этой последовательности, то множество A не является счетным.

Решение. (а) Для любой последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ и последовательности натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = na_n$, выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. (б) Предположим, что существует биекция $\varphi : \mathrm{N} \to A$. Положим $b_n = [(\varphi(1))_n + \ldots + (\varphi(n))_n]n$, $n \in \mathrm{N}$. Тогда для любых $n, i \in \mathrm{N}$ выполняется $n \geq i \Rightarrow \frac{(\varphi(i))_n}{b_n} \leq \frac{(\varphi(i))_n}{[(\varphi(i))_n]n} = \frac{1}{n}$.

Но тогда для любого $i \in \mathrm{N}$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\varphi(i))_n}{b_n} = 0$, что противоречит условию, наложенному на множество A.

Задача 5.35. Доказать теорему *Кантора – Бернштейна*: если $|A| \leq |B|$, $|B| \leq |A|$, то $A \sim B$.

Решение. По условиям теоремы существуют биекции $f : A \to B_1 \subseteq B$, $g : B \to A_1 \subseteq A$. Не ограничивая общности, можно считать, что $A \cap B = \varnothing$ (если $A \cap B \neq \varnothing$, то возьмем в качестве A множество $A' = \{1\} \times A$, а вместо B – множество $B' = \{2\} \times B$; тогда $A \sim A'$, $B \sim B'$, но $A' \cap B' = \varnothing$). Пусть x – произвольный элемент из A.

.Положим $x_0 = x$ и определим последовательность элементов $\{x_n\}$ согласно следующим правилам: (1) Полагаем $k = 0$. Если $x_0 \notin A_1$, то последовательность состоит из единственного элемента x_0. В противном случае полагаем $k = 1, x_1 = g^{-1}(x_0) \in B.$ (2) Если $x_1 \notin B_1$, то искомой последовательностью является $\{x_0, x_1\}$. В противном случае полагаем $k = 2, x_2 = f^{-1}(x_1) \in A$. (3) Пусть уже определены элементы последовательности $\{x_0, x_1, ..., x_k\}$, где $k \geq 2$. Тогда возможны случаи: (3а) Пусть k четно. Тогда проверяем выполнение условия $x_k \notin A_1$. Если это условие выполняется, то x_k – последний член последовательности. В противном случае добавляем к последовательности новый член $x_{k+1} = g^{-1}(x_k) \in B$. (3б) Пусть k нечетно. Тогда проверяем выполнение условия $x_k \notin B_1$. Если это условие выполняется, то x_k – последний член последовательности. В противном случае добавляем к последовательности новый член $x_{k+1} = f^{-1}(x_k) \in A$ и т.д.

Возможны два случая: (а) Последовательность $\{x_n\}$ конечна, т.е. состоит из элементов $x_0, x_1, ..., x_k$. Число k называется порядком элемента x. (б) Последовательность $\{x_n\}$ бесконечна. Тогда x называется элементом бесконечного порядка.

Разобьем теперь A на множества: A_e – множество элементов четного порядка; A_o – множество элементов нечетного порядка; A_∞ – множество элементов бесконечного порядка. Аналогично разобьем множество B (т.е. рассмотрим те же варианты относительно произвольного элемента x из B, которые рассмотрены ранее относительно произвольного элемента x из A). Докажем теперь, что

$$f : A_e \to B_o;\ f : A_\infty \to B_\infty;\ g^{-1} : A_o \to B_e. \qquad (5.3)$$

Будем обозначать члены последовательности для определения множеств B_e, B_o, B_∞ через x'_n. Тогда для доказательства первого утверждения из (5.3) заметим, что если $x_0 \in A_e$, и $x_0, x_1, ..., x_k$ – члены описанной последовательности $\{x_n\}$, где число k (порядок элемента x_0) четно и $x_k \notin A_1$, то для $x'_0 = f(x_0) \in B_1$ членами последовательности $\{x'_n\}$ будут $x'_0, x'_1 = f^{-1}(x'_0) = x_0, x'_2 = x_1, ..., x'_{k+1} = x_k$, т.е. $x'_0 \in B_o$. Второе утверждение очевидно. Для доказательства третьего утверждения заметим, что $A_o \subseteq A_1$. Но тогда, если $x_0 \in A_o$ и $x_0, x_1, ..., x_k$ – члены описанной последовательности $\{x_n\}$, где число k (порядок элемента x_0) нечетно, и $x_k \notin B_1$, то для $x'_0 = g^{-1}(x_0) = x_1$ членами последовательности $\{x'_n\}$ будут $x'_0 = x_1$, $x'_1 = x_2, ...,$ $x'_{k-1} = x_k$, т.е. $x'_0 \in B_e$.

Совершенно аналогично доказывается, что

$$f^{-1} : B_o \to A_e;\ f^{-1} : B_\infty \to A_\infty;\ g : B_e \to A_o. \tag{5.4}$$

Из (5.3), (5.4) заключаем, что (5.3) задает биекцию $\psi : A \to B$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984.

2. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992.

3. Методические указания к выполнению расчетных работ по дискретной математике / Под ред.В.А. Осиповой – М.: Изд-во МАИ, 1994.

СОДЕРЖАНИЕ