ЛЕКЦИЯ 5

ТЕОРЕМА О СОСТАВНОМ КОНТУРЕ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

На предыдущей лекции была сформулирована теорема, дающая достаточные условия представления криволинейного интеграла $\int\limits_{L_1} f(z)dz$ в виде интеграла с переменным верхним пределом, когда кривая L_1 соединяет некоторую точку A с точкой B:

$$\int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz \qquad (1)$$

Здесь z_0 есть фиксированная точка A, а z -- переменная точка (точка B). Обозначая этот интеграл как $\Phi(z)$, имеем $\Phi'(z) = f(z)$, как следствие, $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = \Phi(z) - \Phi(z_0)$ (формула Ньютона-Лейбница). Здесь $\Phi(z)$ *однозначная, аналитическая функция* z. Однако, обращаться с этой формулой следует осторожно, так как она является следствием интегральной теоремы Коши: интеграл $\oint\limits_{L} f(z)dz$ равен нулю, если L -- замкнутый контур, целиком принадлежащий односвязной области D аналитичности $f(z)$. Если $f(z)$ имеет особенность в некоторой точке области D (функция стремится к бесконечности или не определена в этой точке), а контур L окружает эту точку, то применимость формулы (1) вызывает вопросы, так как $\oint\limits_{L} f(z)dz \neq 0$ (см. пример на предыдущей лекции). В этом случае особую точку функции $f(z)$ (она представлена крестиком) исключают из области, окружая ее замкнутой кривой ρ

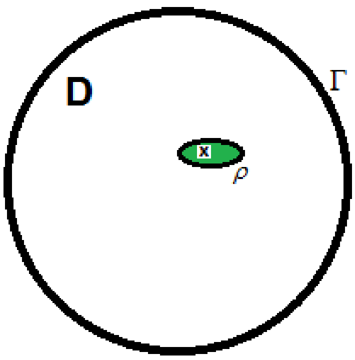

Рис.1. Исключение особой точки. Область D – двусвязная

В оставшейся двусвязной области D функция $f(z)$ будет аналитической. Однако трудности сохраняются и в этом случае, если L_1 является частью замкнутой кривой, окружающей особую точку. Чтобы разобраться в этом вопросе, докажем новую теорему.

§1. Теорема о составном контуре

Применим терему Коши к многосвязной области *D* (на рис. 2 область *D* трехсвязна, она представлена белым цветом, ее граница состоит из трех жирных замкнутых кривых $L_0 = L_{01} + L_{02}, L_1, L_2$)

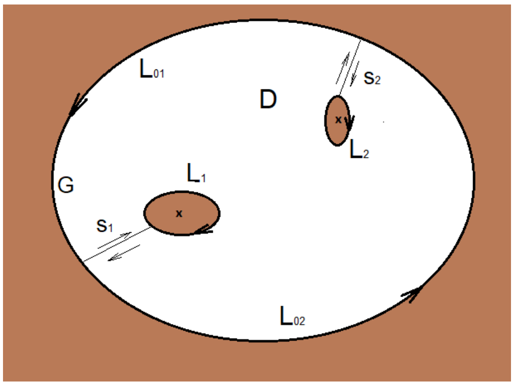

Рис.2

Многосвязность *D* вызвана удалением из заданной области подобластей, содержащих особые точки функции $f(z)$. Пусть L_0 -- внешняя граница области *D*, L_1, L_2 -- внутренние границы. Считаем, что в области D и на ее границе функция $f(z)$ аналитична. Теорема Коши к ней не применима, так как область *D* не односвязна. Поступаем так. Соединяем $L_1,\ L_2$ разрезами $S_1,\ S_2$ с внешней кривой $L_0 = L_{01} + L_{02}$, имеем составной контур $\left\{L_{01}, S_1, L_1, S_1^-, L_{02}, S_2,\ L_2, S_2^-\right\}$. Движемся по контуру так, чтобы внутренность этого контура оставалась с левой стороны – *положительное направление обхода.* Внутренность этого контура (область D с учетом разрезов) становится односвязной, все точки этой внутренности являются точками аналитичности функции $f(z)$. Теперь применяем интегральную теорему Коши:

$$\int_{L_{01}} f(z)dz + \cancel{\int_{S_1} f(z)dz} + \int_{L_1} f(z)dz + \cancel{\int_{S_1^-} f(z)dz} + \int_{L_{02}} f(z)dz +$$

$$+ \cancel{\int_{S_2} f(z)dz} + \int_{L_2} f(z)dz + \cancel{\int_{S_2^-} f(z)dz} = 0$$

Отсюда следует, что

$$\int_{L_{01}} f(z)dz + \int_{L_{02}} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz \equiv \int_{L=L_0+L_1+L_2} f(z)dz = 0$$

Условимся рассматривать границу многосвязной области D, составленную из отдельных кривых $L_0,\ L_1,\ L_2$, как один составной контур L. Справедливо утверждение.

Теорема о составном *контуре.* *Пусть* $f(z)$ *аналитична в многосвязной области D и на ее границе, которая состоит из замкнутых жордановых кривых. Тогда интеграл от* $f(z)$ *вдоль составного замкнутого контура L, целиком состоящим из замкнутых граничных кривых, равен нулю*:

$$\int_L f(z)dz = 0 \qquad (2)$$

Обход составного контура L происходит в положительном направлении.

Замечание. Равенство (2) можно представить в виде

$$\int_{L_0} f(z)dz = \int_{L_1^-} f(z)dz + \int_{L_2^-} f(z)dz\,, \qquad (3)$$

где L_1^-, L_2^- -- кривые L_1, L_2, проходимые в обратном направлении. Особенность равенства (3) в сравнении с (2) состоит в том, что все граничные кривые проходятся против хода стрелки часов.

§2. Интеграл как функция точки в многосвязной области

Теорема о составном контуре позволяет изучать интегралы от аналитических функций в многосвязной области.

Рассмотрим замкнутую кривую L, целиком принадлежащую *D*, но содержащую внутри себя особую точку функции $f(z)$, имеем $\int_L f(z)dz \neq 0$ (особые точки принадлежат зеленым областям). Это значит, что для любых двух точек z_0 и z из области *D* найдутся, по крайней мере, два пути, соединяющие точки z_0 и z, вдоль которых интеграл от $f(z)$ имеет различные значения

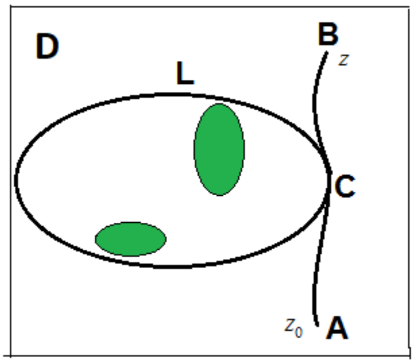

Рис. 3

Действительно, пусть $L_1 = AC + CB$, $L_2 = AC + L + CB$ -- два разных пути, соединяющих точки A и B. Имеем разные значения интеграла от $f(z)$ вдоль кривых L_1 и L_2 (рис. 3):

$$\int_{L_2} f(z)dz - \int_{L_1} f(z)dz = \left(\int_{AC} f(z)dz + \int_{L} f(z)dz + \int_{CB} f(z)dz \right) - \left(\int_{AC} f(z)dz + \int_{CB} f(z)dz \right) = \int_L f(z)dz \neq 0$$

Отсюда явствует, что интеграл от $f(z)$ вдоль произвольной кривой, соединяющей точки $A=z_0$ и $B=z$, можно рассматривать как определенный интеграл с переменным верхним пределом, но эта *функция* z *является многозначной*, так как она зависит от вида кривой, соединяющей $A=z_0$ с $B=z$.

Итак, формула (1) имеет место во всех случаях, когда $f(z)$ аналитична. Но, надо иметь ввиду, что появление особых точек в области *D* (например, при расширении области *D*) существенно меняет поведение интеграла, превращая его в многозначную функцию аргумента z. Обратный процесс, когда вы сужаете область *D* до размеров, не содержащих особых точек, ведет к превращению многозначного интеграла в однозначную функцию z.

§3. Интегральная формула Коши.

Речь пойдет об одном из удивительных свойств аналитической функции $f(z)$. Оказывается, что ее значение внутри области вполне определяется поведением функции на границе области. Другими словами, достаточно задать значения функции на кривой, ограничивающей область, как тут же, на основе формулы Коши, вы сможете подсчитать ее значения в любой внутренней точке области.

Теорема 1. *Пусть* $f(z)$ -- *функция, однозначная и аналитическая в области* G, *и* L -- *замкнутая жорданова кривая, принадлежащая* G *вместе со своей внутренностью* D. *Тогда для всякой точки* $z_0 \in D$ *справедлива интегральная формула Коши*:

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz} \qquad (4)$$

Заметим, что область G может быть многосвязной.

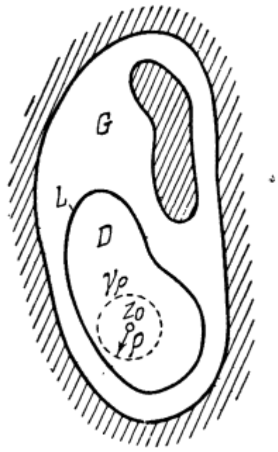

Рис. 3

Доказательство. Подынтегральная функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ имеет особую точку при $z=z_0$. Удалим ее из области D. Для этого окружим точку z_0 окружностью γ_ρ радиуса ρ так, чтобы эта окружность принадлежала D и выбросим внутренность окружности из D. Оставшаяся область будет двусвязной с двумя границами L и γ_ρ. Функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ аналитична в оставшейся области и на этих кривых. Тогда, по теореме о составном контуре (см. предыдущую лекцию) имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho^-}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \ (2)$$

Здесь L и γ_ρ^- проходятся против часовой стрелки.

Покажем, что

$$f(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho^-}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0$$

Преобразуем левую часть этого равенства, умножив его на $(-2\pi i)$:

$$I\equiv\int_{\gamma_\rho^-}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-2\pi i f(z_0)=\int_{\gamma_\rho^-}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\int_{\gamma_\rho^-}\frac{dz}{z-z_0}=\int_{\gamma_\rho^-}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

В силу непрерывности $f(z)$ в точке z_0 можем для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ указать $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что, если окружность γ_ρ^- принадлежит $\delta(\varepsilon)$ - окрестности точки z_0, т.е. $|z-z_0|=\rho<\delta(\varepsilon)$, то имеем $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. Тогда

$$\left|\int_{\gamma_\rho^-}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|\le\int_{\gamma_\rho^-}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}dz\le\frac{\varepsilon}{\rho}\int_{\gamma_\rho^-}dz=\frac{\varepsilon}{\cancel{\rho}}2\pi\cancel{\rho}$$

Устремим ρ к нулю. Тогда, в силу непрерывности $f(z)$ в точке z_0, получим $|f(z)-f(z_0)|\to 0$, т.е. $\varepsilon\to 0$, поэтому $|I|\to 0$, а следовательно $I\to 0$. Итак,

$$\lim_{\rho\to 0} I=0$$

Однако заметим, что в силу равенства (2) наша разность I не зависит от ρ, поэтому $I=0$. ***Теорема доказана***.

Пример. Вычислить с помощью интегральной формулы Коши следующий интеграл:

$$I=\int_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z^2+1}dz$$

Решение. Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{e^z}{z^2+1}=\frac{e^z}{(z+i)(z-i)}$$

Положим $z_0=i$. Тогда заданный интеграл можно представить в виде

$$I=\int_{|z-z_0|=1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz,\ \ f(z)=\frac{e^z}{z+i}$$

В силу интегральной формулы Коши имеем $I=2\pi i f(z_0)=2\pi i\dfrac{e^i}{2i}=\pi e^i$