ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

«Утверждаю»
Декан ММФ
А.В. Старченко
«30» июня 2016 г.

МЕРА ЛЕБЕГА-2.
Теория и задачи

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

ОДОБРЕНО кафедрой математического анализа
Зав. кафедрой доцент Л.С. Копанева

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО
методической комиссией ММФ
Протокол № 6 от 17 июня 2016 г.

Председатель методической комиссии О.П. Федорова.

Для студентов 1-го и 2-го курсов ММФ ТГУ. Пособие является продолжением пособия «МЕРА ЛЕБЕГА-1. Теория и задачи», **нумерация параграфов теории и задач продолжает нумерацию предыдущего пособия**. В данном пособии подробное изложены свойства меры Лебега (§5) и приводится большое число примеров измеримых по Лебегу множеств (§6). Также приведено более ста задач к §5, 6 и указания к решению задач §5.

Ссылки на факты, изложенные в текущем параграфе – краткие: по теореме 1, согласно определению 1, … . Ссылка на факт в другом параграфе начинается с номера параграфа: по теореме 2.8 – по теореме 8 из §2. Параграфы 1, 2, 3, 4 изложены в пособии «МЕРА ЛЕБЕГА-1. Теория и задачи». Символ ◊ означает конец доказательства.

СОСТАВИТЕЛИ:
доцент Г.В. Сибиряков,
доцент Е.Г. Лазарева,
ст. пр. Ю.А. Мартынов

§5. Мера Лебега

Мы уже определили меру бруса P и меру открытого множества G (определения 1.1 и 2.2). По свойству 3(b) справедливо равенство $\lambda^* G = \lambda G$. По свойству 3(e) для бруса P также $\lambda^* P = \lambda P$. Таким образом, $\lambda A = \lambda^* A$ всякий раз, когда мера λA определена.

1. Определение. *Мерой Лебега* λA *измеримого множества* $A \subset \mathbb{R}^n$ называется его внешняя мера, т.е. по определению

$$\lambda A = \lambda^* A = \inf \{\lambda G; G \supset A\}.$$

Таким образом, каждому множеству $A \in \mathsf{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ сопоставлена его мера Лебега $\lambda A \in [0, +\infty]$. Значит, определено отображение

$$\lambda : \mathsf{L}\left(\mathbb{R}^n\right) \to [0, +\infty].$$

Это отображение тоже называется *мерой Лебега*.

Из свойств внешней меры сразу вытекают следующие утверждения:

(a) *Если множества* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *измеримы и* $A \subset B$, *то* $\lambda A \leqslant \lambda B$.

(b) *Если измеримые множества* $B_1, B_2, \ldots, B_m \subset \mathbb{R}^n$ *покрывают измеримое множество* A, *т.е* $A \subset B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$, *то*

$$\lambda A \leqslant \lambda B_1 + \lambda B_2 + \ldots + \lambda B_m.$$

(c) *Если последовательность измеримых множеств* $B_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, *покрывает измеримое множество* A, *т.е* $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, *то* $\lambda A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda B_k$.

(d) *Если множество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо и ограничено, то* $\lambda A < +\infty$.

Замечание. Ниже мы увидим, что неограниченное измеримое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ может иметь меру $\lambda A < +\infty$.

Установим основные свойства меры Лебега.

2. Теорема. (Об аддитивности меры Лебега). *Если множества* A *и* $B \subset \mathbb{R}^n$ *измеримы и не пересекаются, то справедливо равенство*

$$\lambda(A \sqcup B) = \lambda A + \lambda B. \tag{1}$$

Доказательство. По теореме 3.2

$$\lambda(A \sqcup B) = \lambda^*(A \sqcup B) \leqslant \lambda^* A + \lambda^* B = \lambda A + \lambda B. \tag{2}$$

Докажем обратное неравенство

$$\lambda A + \lambda B \leqslant \lambda(A \sqcup B). \tag{3}$$

Если $\lambda(A \sqcup B) = +\infty$ или одно из множеств A и B пусто, то неравенство верно. Пусть $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $\lambda(A \sqcup B) < +\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем открытое множество G так, что

$$A \sqcup B \subset G, \ \lambda G < \lambda(A \sqcup B) + \varepsilon \tag{4}$$

(см. рис. 1). Это возможно, так как

$$\lambda(A \sqcup B) = \lambda^*(A \sqcup B) = \inf\{\lambda G; G \supset A \sqcup B\} < +\infty.$$

По теореме 4.8 найдутся замкнутые множества $F, V \subset \mathbb{R}^n$ такие, что

$$F \subset A, \quad V \subset B, \quad \lambda^*(A \backslash F) < \varepsilon, \quad \lambda^*(B \backslash V) < \varepsilon.$$

Можно считать, что $F \neq \varnothing$ и $V \neq \varnothing$.

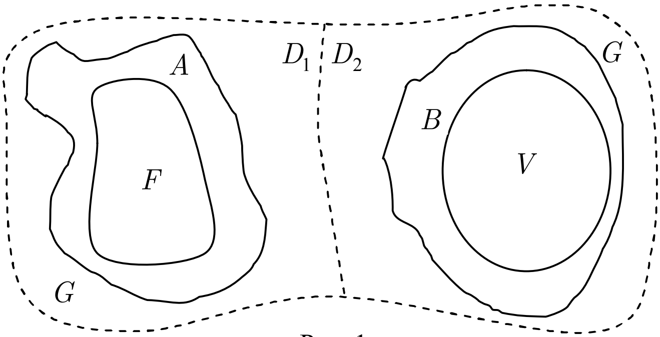

Рис. 1.

По теореме 3.2 о полуаддитивности внешней меры

$$\left.\begin{aligned}\lambda A = \lambda^* A = \lambda^*[F \cup (A \setminus F)] \leqslant \lambda^* F + \lambda^*(A \setminus F) < \lambda^* F + \varepsilon,\\ \lambda B = \lambda^* B = \lambda^*[V \cup (B \setminus V)] \leqslant \lambda^* V + \lambda^*(B \setminus V) < \lambda^* V + \varepsilon.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Из соотношений $A \cap B = \varnothing$, $F \subset A$, $V \subset B$ следует, что множества F и V не пересекаются. Рассмотрим множества

$$D_1 = \{x \in G; \rho(x, F) < \rho(x, V)\},$$

$$D_2 = \{x \in G; \rho(x, F) > \rho(x, V)\},$$

где

$$\rho(x, C) = \inf\{\rho(x, y);\ y \in C\}$$

– *расстояние от точки* x *до множества* C. Эти множества открыты, $F \subset D_1$, $V \subset D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ и $D_1 \cup D_2 \subset G$. Поэтому

$$\lambda F = \lambda^* F < \lambda D_1,\ \ \lambda V = \lambda^* V < \lambda D_2. \quad (6)$$

Кроме того, по свойствам 2(f) и 2(d)

$$\lambda D_1 + \lambda D_2 = \lambda(D_1 \sqcup D_2) \leqslant \lambda G. \quad (7)$$

Из соотношений (5), (6), (7) и (4) имеем

$$\lambda A + \lambda B < \lambda^* F + \lambda^* V + 2\varepsilon = \lambda F + \lambda V + 2\varepsilon <$$

$$< \lambda D_1 + \lambda D_2 + 2\varepsilon = \leqslant \lambda G + 2\varepsilon < \lambda(A \sqcup B) + 3\varepsilon.$$

Переходя в полученном неравенстве

$$\lambda A + \lambda B < \lambda(A \sqcup B) + 3\varepsilon$$

к пределу при $\varepsilon \to +0,$ получим неравенство (3).

Из неравенств (2) и (3) вытекает равенство (1). ◊

Следствие. *Для любого конечного семейства попарно не пересекающихся измеримых множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство*

$$\lambda(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_m) = \lambda A_1 + \lambda A_2 + \ldots + \lambda A_m.$$

3. Теорема. (О счетной аддитивности меры Лебега). *Если измеримые множества* $A_k \subset \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N},$ *попарно не пересекаются, то*

$$\lambda\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda A_k. \qquad (8)$$

Доказательство. По теореме 4.3 множество $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k.$ измеримо. По теореме 3.2 справедливо неравенство

$$\lambda A = \lambda^* A \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^* A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda A_k. \qquad (9)$$

С другой стороны, по теореме 2 и по свойству (а)

$$\bigsqcup_{k=1}^{m} \lambda A_k = \lambda\left(\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k\right) \leqslant \lambda A$$

для каждого $m \in \mathbb{N}.$ Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda A_k \leqslant \lambda A. \qquad (10)$$

Из неравенств (9) и (10) следует равенство (8). ◊

4. Теорема. (О полноте меры Лебега). *Если* $A \subset \mathbb{R}^n$ *и* $\lambda^* A = 0,$ *то* $A \in \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *и* $\lambda A = 0.$ *В частности, если* $A \subset B,$ *где* B *измеримо и* $\lambda B = 0,$ *то* A *измеримо и* $\lambda A = 0.$

Доказательство. Пусть $\lambda^* A = 0$ и $\varepsilon > 0.$ По определению внешней меры существует открытое множество G такое, что $A \subset G$ и $\lambda G < \lambda^* A + \varepsilon = \varepsilon.$ Тогда $\lambda^*(G \setminus A) < \lambda G < \varepsilon.$ Это означает, что множество A измеримо. Очевидно $\lambda A = \lambda^* A = 0.$

Пусть теперь множество B измеримо, $\lambda B = 0$ и $A \subset B.$ Тогда $\lambda^* A \leqslant \lambda^* B = 0$ и, значит, $\lambda^* A = 0.$ Отсюда по доказанному только что следует, что множество A измеримо и $\lambda A = 0.$

5. Теорема. (О регулярности меры Лебега). *Множество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо тогда и только тогда, когда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существуют замкнутое множество* F *и открытое множество* G *такие, что* $F \subset A \subset G$ *и* $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$ (см. рис. 2).

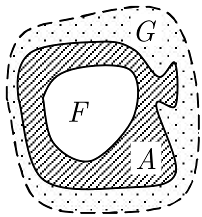

Рис. 2.

Доказательство. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\varepsilon > 0.$ По определению измеримого множества найдется открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$A \subset G \text{ и } \lambda(G \setminus A) = \lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon/2.$$

По теореме 4.8 существует замкнутое множество $F \subset A$ такое, что

$$F \subset A \text{ и } \lambda(A \setminus F) = \lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon/2.$$

По теореме 2 об аддитивности меры Лебега

$$\lambda(G \setminus F) = \lambda\left[(G \setminus A) \sqcup (A \setminus F)\right] = \lambda(G \setminus A) + \lambda(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Необходимость условия доказана.

Пусть теперь $A \subset \mathbb{R}^n$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F и открытое множество G такие, что $F \subset A \subset G$ и $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$. Докажем, что тогда множество A измеримо.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и затем множества F и G так, что $F \subset A \subset G$, $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$. Множество $G \setminus F$ открыто, $G \setminus A \subset G \setminus F$ и поэтому

$$\lambda^*(G \setminus A) \leqslant \lambda^*(G \setminus F) = \lambda(G \setminus F) < \varepsilon.$$

По определению 4.1 это означает, что множество A измеримо. ◊

6. Теорема. (О структуре измеримого множества). *Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ равносильны условия*:

(α) $A \in \mathrm{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$, *т.е. множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо.*

(β) *Существует возрастающая последовательность замкнутых множеств F_k, $k \in \mathbb{N}$, и множество N_1 с мерой $\lambda N_1 = 0$ такие, что*

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) \cup N_1.$$

(γ) *Существует убывающая последовательность открытых множеств $G_k, k \in \mathbb{N}$, и множество N_2 с мерой $\lambda N_2 = 0$ такие, что*

$$A = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \right) \setminus N_2.$$

Доказательство. (β)⇒(α) и (γ)⇒(α). Это вытекает из теорем 4.2, 4.3, 4.5, 4.7. (Открытые и замкнутые множества измеримы. Объединение и пересечение последовательности измеримых множеств измеримы. Разность измеримых множеств измерима).

(α)⇒(β) и (α)⇒(γ). Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. По теореме 5 о регулярности меры Лебега существуют замкнутые множества C_k и открытые множества D_k такие, что

$$C_k \subset A \subset D_k\,,\ \ \lambda\left(D_k \setminus C_k\right) < 1/k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Множества

$$F_k = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k,\ k \in \mathbb{N},$$

замкнуты и образуют *возрастающую последовательность*, т.е.

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k \subset \ldots.$$

Множества

$$G_k = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_k,\ k \in \mathbb{N},$$

открыты и образуют *убывающую последовательность*, т.е.

$$G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset \ldots.$$

Обозначим

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,\ \ W = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Из включений $C_k \subset A \subset D_k\,,\ k \in \mathbb{N},$ следует, что

$$F_k \subset A \subset G_k \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $V \subset A \subset W.$ Кроме того, для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$W \setminus V = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset G_m \setminus F_m.$$

Поэтому

$$\lambda^*(W \setminus V) \leqslant \lambda^*(G_m \setminus F_m) < 1/m$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и, значит, $\lambda^*(W \setminus V) = 0.$ По теореме 4 о полноте меры Лебега множество $W \setminus V$ и его подмножества $N_1 = A \setminus V,$ $N_2 = W \setminus A$ измеримы и имеют меру $0.$ Ясно также, что

$$A = V \cup N_1 = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cup N_1,\ \ A = W \setminus N_2 = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) \setminus N_2.\ \Diamond$$

7. Теорема. (Об инвариантности меры Лебега относительно изометрии). *Пусть* $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– изометрия. Если множество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо, то множество* $T(A) = \{Tx\,;\, x \in A\}$ *также измеримо и справедливо равенство* $\lambda[T(A)] = \lambda A$.

Доказательство. Пусть $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – изометрия, т.е.

$$\rho(Tx, Ty) = \rho(x, y) \text{ для любых } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что если одно из множеств $V \subset \mathbb{R}^n$ и $T(V)$ – замкнутый шар, то другое – тоже замкнутый шар, причем того же радиуса. Поэтому множество $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $T(G)$.

Допустим, что при этом всегда $\lambda G = \lambda[T(G)]$. Тогда для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ мы получим

$$\begin{aligned}\lambda^* A = \inf_{G \supset A} \lambda G = \inf_{T(G) \supset T(A)} \lambda[T(G)] = \\ = \inf_{G_1 \supset T(A)} \lambda G_1 = \lambda^*[T(A)].\end{aligned} \tag{11}$$

Если теперь $A \subset G$ и $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$, то $T(A) \subset T(G)$ и

$$\lambda^*[T(G) \setminus T(A)] = \lambda^* T(G \setminus A) = \lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon.$$

Отсюда ясно, что если A измеримо, то $T(A)$ также измеримо и, в силу (11), справедливо равенство $\lambda A = \lambda[T(A)]$.

Осталось показать, что $\lambda G = \lambda[T(G)]$ для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$. Это получается просто в частном случае, когда изометрия T совпадает со сдвигом пространства $\mathbb{R}^n$ на вектор $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, т.е. действует по правилу

$$Tx = x + a = (\xi_1 + \alpha_1, \ldots, \xi_n + \alpha_n),\ x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

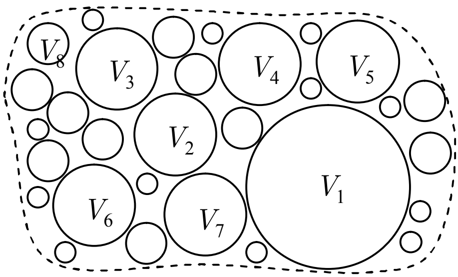

Рис. 3.

Действительно, прямым вычислением легко показать, что сдвиг бруса является брусом той же меры. Следовательно, сдвиг открытого множества является открытым множеством той же меры. Значит, для сдвигов теорема 7 справедлива. Отсюда вытекает, в частности, что замкнутые шары одного радиуса имеют одинаковую меру.

Произвольная изометрия T брусы не сохраняет (возможен поворот), но шары она переводит в шары той же меры. Поэтому для доказательства равенства $\lambda G = \lambda[T(G)]$ достаточно показать, что

$$\lambda G = \sup\left(\lambda V_1 + \lambda V_2 + \ldots + \lambda V_m\right),$$

где супремум берется по всем конечным семействам попарно не пересекающихся замкнутых шаров $V_k \subset G.$ А это следует из леммы:

8. Лемма. *Для любого непустого открытого множества* $G \subset \mathbb{R}^n$ *существует последовательность попарно не пересекающихся замкнутых шаров* $V_k \subset G,\ k \in \mathbb{N},$ *такая, что* $\lambda G = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda V_k$ (см. рис. 3).

Доказательство. Назовем брус $P \subset \mathbb{R}^n$ *кубическим*, если все его ребра имеют одну и ту же длину, т.е. если $P = \prod\limits_{i=1}^{n} \left[a_i, a_i + r\right)$ для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и $r > 0.$

В кубическом брусе $P \subset \mathbb{R}^n$ содержится (см. рис. 4) замкнутый шар V с мерой $\lambda V > \gamma \cdot \lambda P$, где $\gamma = \left(2\sqrt{n}\right)^{-n}$. Действительно, пусть $r > 0$ – длина ребра бруса P и V – замкнутый шар радиуса $r/4$ с центром в центре z бруса P. Впишем в шар V кубический брус Q. Длина его диагонали равна диаметру $r/2$ шара V. Значит, ребра бруса Q имеют длину $s = \dfrac{r}{2\sqrt{n}}$ и $\lambda Q = s^n = \gamma \cdot r^n$. Теперь ясно, что $\lambda V > \lambda Q = \gamma \cdot r^n = \gamma \cdot \lambda P$.

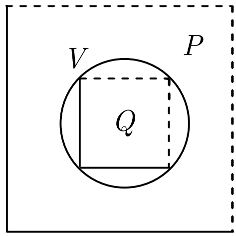

Рис. 4.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – непустое открытое множество и $G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k$ – его разбиение на попарно не пересекающиеся кубические брусы (лемма 2.1). Выберем замкнутые шары $W_k \subset P_k$ так, что $\lambda W_k > \gamma \cdot \lambda P_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Если $\lambda G = +\infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda W_k \geqslant \gamma \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda P_k = \gamma \cdot \lambda G = +\infty$$

и, следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda W_k = +\infty = \lambda G$, т.е. последовательность шаров W_k, $k \in \mathbb{N}$, – искомая.

Пусть $\lambda G < +\infty$. По условию $G \neq \varnothing$. Поэтому $\lambda G > 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda P_k = \lambda G > \frac{\lambda G}{2}.$$

Значит, найдется $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что уже

$$\lambda P_1 + \lambda P_2 + \ldots + \lambda P_{N_1} > \frac{\lambda G}{2}.$$

Обозначим $V_j = W_j$ при $j = 1, 2, \ldots, N_1$. Имеем

$$\lambda V_1 + \lambda V_2 + \ldots + \lambda V_{N_1} \geqslant \gamma \cdot \left(\lambda P_1 + \lambda P_2 + \ldots + \lambda P_{N_1}\right) > \frac{\gamma}{2} \cdot \lambda G.$$

Множество

$$G_1 = G \setminus \left(V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{N_1} \right)$$

открыто, так как G открыто и шары $V_j,\ 1 \leqslant j \leqslant N_1,$ замкнуты. Ясно также, что $G_1 \neq \varnothing,$ так как $P_k \subset G_1$ при $k > N_1,$ и $G_1 \subset G.$ Поэтому

$$0 < \lambda G_1 \leqslant \lambda G < +\infty.$$

Повторяя предыдущее рассуждение (с заменой множества G на G_1), построим попарно не пересекающиеся замкнутые шары

$$V_j \subset G_1,\ \ j = N_1 + 1, N_1 + 2, \ldots, N_2,$$

такие, что

$$\lambda V_{N_1+1} + \lambda V_{N_1+2} + \ldots + \lambda V_{N_2} > \frac{\gamma}{2} \cdot \lambda G_1.$$

Множество

$$G_2 = G \setminus \left(V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_{N_2} \right) = G_1 \setminus \left(V_{N_1+1} \sqcup \ldots \sqcup V_{N_2} \right)$$

непусто, открыто и $0 < \lambda G_2 < +\infty.$ Значит, существуют попарно не пересекающиеся замкнутые шары $V_j \subset G_2,\ \ j = N_2 + 1, \ldots, N_3,$ сумма мер которых больше числа $\frac{\gamma}{2} \cdot \lambda G_2.$

Продолжая это рассуждение далее, мы получим попарно не пересекающиеся замкнутые шары $V_j \subset G,\ \ j \in \mathbb{N},$ натуральные числа

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_m < \ldots$$

и непустые открытые множества

$$G_m = G \setminus \left(V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{N_m} \right) =$$
$$= G_{m-1} \setminus \left(V_{N_{m-1}+1} \sqcup V_{N_{m-1}+2} \sqcup \ldots \sqcup V_{N_m} \right),\ m \in \mathbb{N},$$

$\left(N_0 = 0,\ G_0 = G\right)$ такие, что для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$s_m \overset{\text{def}}{=} \lambda V_{N_{m-1}+1} + \lambda V_{N_{m-1}+2} + \ldots + \lambda V_{N_m} > \frac{\gamma}{2} \cdot \lambda G_{m-1}.$$

По теореме 5.2 об аддитивности меры Лебега для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\lambda G = \lambda G_m + \lambda V_1 + \lambda V_2 + \ldots + \lambda V_{N_m}, \tag{12}$$

$$\lambda G_{m-1} = \lambda G_m + s_m > \lambda G_m + \frac{\gamma}{2} \cdot \lambda G_{m-1}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что $\lambda G_m < \left(1 - \gamma/2\right) \cdot \lambda G_{m-1}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда и из неравенства $0 < \gamma < 1$ имеем

$$\lambda G_m < \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \lambda G_{m-1} < \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 \cdot \lambda G_{m-2} < \ldots < \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^m \cdot \lambda G_0.$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $0 < 1 - \gamma/2 < 1$ и $\lambda G_0 = \lambda G < +\infty$, то $\lim\limits_{m \to \infty} \lambda G_m = 0$. Поэтому из (12) следует равенство $\lambda G = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda V_k$. ◊

Задачи к §5. Мера Лебега

99. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек. Доказать, что множество A измеримо и $\lambda A = 0$.

100. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и B – множество всех его изолированных точек. Доказать, что множества B и $A \backslash B$ измеримы и $\lambda B = 0$, $\lambda(A \backslash B) = \lambda A$.

101. Построить измеримое множество $A \subset \mathbb{R}$ такое, что $\lambda_1 A = 1$, однако $\lambda_1(A \cap [-k, k]) < 1$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

102. Доказать измеримость и найти меру для множеств

$$A_0 = \{x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \,;\, \pi x \leqslant 1, \sin(1/x) > 0\},$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \,;\, 0 < \pi x \leqslant 1, \sin(1/x) > 0\},$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R};\, 0 < \pi x \leqslant 1, \sin(1/x) \geqslant 0\},$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} \,;\, \pi x < 0, \sin(1/x) > 0\},$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} \,;\, -1 \leqslant \pi x < 0, \sin(1/x) > 0\}.$$

103. Доказать, что на прямой $\mathbb{R}$ множества

(1) $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(k^2, k^2 + 1\right]$, (2) $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(2^k, 2^k + \dfrac{1}{k}\right]$,

(3) $C = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{2k}, \sqrt{2k+1}\right]$, (4) $D = \bigcup\limits_{k=2}^{\infty} \left(k^k, k^k + \dfrac{1}{k \ln k}\right]$

измеримы и мера каждого из них равна $+\infty$.

104. Доказать, что множества $A \subset \mathbb{R}$ задачи 17 на прямой $\mathbb{R}$ измеримы и имеют меру 0.

105. Пусть множество $F \subset [a,b]$ замкнуто и $F \neq [a,b]$. Доказать, что тогда $\lambda_1 F < b-a$.

106. Пусть $\mathbb{Q} \cap [0,2] = \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots\}$ и

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(r_k - 2^{-k}, r_k + 2^{-k} \right)$$

Доказать, что множество G открыто и $1 < \lambda_1 G < 2 < \lambda_1 \overline{G}$.

107. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо и $\lambda_1 A > 0$. Доказать, что тогда существуют $u, v \in A$ такие, что $u \neq v$ и $u - v \in \mathbb{Q}$.

108. Вывести из теорем 5.7 и 5.2, примера 6.3 и задачи 54, что для любого треугольника $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ его мера $\lambda_2 \Delta$ равна его площади.

109. Доказать, что для любого параллелограмма $D \subset \mathbb{R}^2$ его мера $\lambda_2 D$ равна его площади.

110. Доказать, что график $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ непрерывной функции, заданной на сегменте или интервале, – измеримое множество и $\lambda_2 \Gamma = 0$.

111. Доказать, что $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо и найти его меру, если:

(1) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, |x| + |y| \leqslant 1\right\}$;

(2) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x \leqslant y \leqslant -x,\, |x| + |y| < 2\right\}$;

(3) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, |x| \leqslant 1,\, x-1 \leqslant y < x+1\right\}$;

(4) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, xy \geqslant 0,\, 1 \leqslant x+y \leqslant 2\right\}$;

(5) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, 2|x| - 1 \leqslant y < |x| + 1\right\}$.

(6) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, |x| \leqslant 1,\, |\operatorname{sign} x| \leqslant y < 2\right\}$;

(7) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, 0 \leqslant x \leqslant \pi,\, |y| \leqslant \sin x\right\}$;

(8) $A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ |\,y\,|\leqslant \mathrm{e}^{x}\right\}$;

(9) $A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ 0\leqslant y\leqslant \operatorname{ch} x\leqslant \sqrt{5}\,\right\}$.

112. Найти меру каждого из множеств задачи 94.

113. Доказать, что график $\Gamma\subset \mathbb{R}^2$ монотонной функции, заданной на сегменте или интервале, – измеримое множество и $\lambda_2\Gamma = 0$.

114. Доказать, что множества

$$A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ x^2y^2\leqslant 1\right\},$$

$$B = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ 1\leqslant xy<2\right\},$$

$$C = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ 0<x<\pi/2,\ 0\leqslant y\leqslant \operatorname{ctg} x\right\}$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$ измеримы и $\lambda_2 A = \lambda_2 B = \lambda_2 C = +\infty$.

115. Найти меру открытого круга $U(O,r)$ радиуса $r>0$ с центром $O=(0,0)$. Доказать формулу $\lambda_2 V(O,r) = \pi r^2$ для меры замкнутого круга $V(O,r)$.

116. Доказать, что $A\subset \mathbb{R}^2$ измеримо и найти его меру, если:

(1) $A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ x^2\leqslant y<1\right\}$;

(2) $A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ x<0,\ 3x^2\leqslant y<3\right\}$;

(3) $A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ 0<x<\pi,\ 0\leqslant y\leqslant \sin x\right\}$;

(4) $A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ 0\leqslant x<\pi,\ \cos x\leqslant y\leqslant \sin x\right\}$;

(5) $A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ x\in (0,2)\setminus\mathbb{Q},\ y\in (0,2),\ \sin y<1/2\right\}$;

(6) $A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ -y\leqslant x\leqslant y,\ x^2+y^2<4\right\}$;

(7) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 0\leqslant x<y,\ 1<x^2+y^2\leqslant 9\right\}$;

(8) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 0<x\leqslant \pi,\ \sin x<y<\cos x\right\}$;

(9) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x\leqslant 0,\ y<0,\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$;

(10) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ |\,x\,|\leqslant \pi/3,\ |\,y\,|<\operatorname{tg} x\right\}$;

(11) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 0<x\leqslant 1,\ y<0,\ \ln x\leqslant y\leqslant 1\right\}$;

(12) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ |\,y\,|\leqslant \dfrac{1}{1+x^2}\right\}$.

117. Найти открытое множество G на плоскости $\mathbb{R}^2$ такое, что

$$\lambda_2 G<\lambda_2\overline{G}=1.$$

118. Доказать, что $A\subset\mathbb{R}^2$ измеримо и найти его меру, если:

(1) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x\geqslant 0,\ [x]\leqslant y<[x+1]\right\}$;

(2) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x\geqslant 0,\ [x^2]\leqslant y<[x^2+1]\right\}$;

(3) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 0\leqslant x<a,\ [x^2]\leqslant y<[x^2+1]\right\},\ a>0$;

(4) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x\geqslant 0,\ [x]\leqslant y<[x]+2^{-[x]}\right\}$;

(5) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x\geqslant 1,\ [x]\leqslant y<[x]+\dfrac{1}{[x]\cdot[x+1]}\right\}$;

(6) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ |\,x\,|<\pi/2,\ [\operatorname{tg} x-1]\leqslant y<[\operatorname{tg} x+1]\right\}$;

(7) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2\leqslant y<[x+3]\right\}$.

119. Пусть множества A и B на плоскости $\mathbb{R}^2$ симметричны друг другу относительно какой-нибудь прямой $L \subset \mathbb{R}^2$. Доказать, что если A измеримо, то B измеримо и $\lambda_2 A = \lambda_2 B$.

120. Пусть множества $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, измеримы и последовательность (A_k) *возрастает*, т.е. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. Доказать равенство

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda A_k.$$

121. Пусть множества $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, измеримы, последовательность (A_k) *убывает*, т.е. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, и $\lambda A_1 < +\infty$. Доказать равенство

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda A_k.$$

122. Найти убывающую последовательность измеримых множеств $B_k \subset \mathbb{R}$ такую, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k = \varnothing$ и $\lambda_1 B_k = +\infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

123. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо. Найти убывающую последовательность измеримых множеств $B_k \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, такую, что $\lambda_1 B_k = +\infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k = A$.

124. (1). Найти меру $\lambda_2 G$ множества G задачи 59 при $\alpha > 1$.

(2). Найти меру $\lambda_2 D$ множества D задачи 60 при $\alpha < 1$.

125. Пусть последовательность множеств $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, возрастает. Доказать равенство

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda^* A_k.$$

126. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо и $\lambda_1[A \cap (-\infty, 0)] < +\infty$. Доказать, что функция $\varphi(t) = \lambda_1[A \cap (-\infty, t)]$ определена всюду на $\mathbb{R}$, равномерно непрерывна и возрастает от 0 до $\lambda_1 A$.

127. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо, $z \in \mathbb{R}$ и

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = \begin{cases} -\lambda_1(A \cap [t, z]), & \text{если } t < z, \\ 0, & \text{если } t = z, \\ \lambda_1(A \cap [z, t]), & \text{если } t > z. \end{cases}$$

Доказать, что функция φ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и возрастает от $-\lambda_1[A \cap (-\infty, z)]$ до $\lambda_1[A \cap (z, +\infty)]$.

128. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо и $\lambda_2 A < +\infty$. Доказать, что функции

$$\varphi(x) = \lambda_2\{(u,v) \in A\,;\ u < x\},\quad \psi(y) = \lambda_2\{(u,v) \in A\,;\ v < y\}$$

равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$ и возрастают от 0 до $\lambda_2 A$.

129. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо и $\lambda_2 A < +\infty$. Доказать, что функция

$$h(x,y) = \lambda_2\{(u,v) \in A\,;\ u < x,\ v < y\} \tag{1}$$

определена всюду на $\mathbb{R}^2$, равномерно непрерывна и возрастает по каждому аргументу, причем

$$\lim_{x \to -\infty} h(x,y) = 0,\quad \lim_{x \to +\infty} h(x,y) = \psi(y) \text{ для всех } y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to -\infty} h(x,y) = 0,\quad \lim_{y \to +\infty} h(x,y) = \varphi(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где функции φ и ψ определены в задаче 128.

130. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ – одно из множеств

(1) $A = [0, +\infty) \times (0, 1)$; (2) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y < x\right\}$;

(3) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ 0 < y < \ln x\right\}$.

Доказать, что функция

$$\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R},\ \ \varphi(x) = \lambda_2\{(u,v)\in A\,;\ u < x\}$$

непрерывна, возрастает от 0 до $+\infty$, равномерно непрерывна в случае (1) и не является таковой в случаях (2) и (3).

131. Пусть $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция Дирихле (см. задачу 18(3)). Доказать, что множества

$$\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\,;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y = D(x)\right\},$$

$$\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\,;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant D(x)\right\},$$

$$\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\,;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ D(x) < y < 1\right\}$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$ измеримы, и найти их меру.

132. Пусть функция $\varphi : [a,b] \to (0,+\infty)$ интегрируема по Риману,

$$\Omega = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\,;\ a < x < b,\ 0 < y < \varphi(x)\right\},$$

$$\Phi = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\,;\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)\right\}$$

и $\Omega \subset A \subset \Phi$. Доказать, что множество A измеримо и его мера $\lambda_2 A$ равна интегралу Римана $I = \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

133. Пусть множество $K \subset \mathbb{R}^2$ – компактно и $S \subset \mathbb{R}^3$ – график непрерывной функции $\psi : K \to \mathbb{R}$. Доказать, что множество S измеримо и $\lambda_3 S = 0$.

134. Пусть множество H на плоскости $\mathbb{R}^2$ открыто или замкнуто и $S \subset \mathbb{R}^3$ – график непрерывной функции $\psi : H \to \mathbb{R}$. Доказать, что множество S измеримо и $\lambda_3 S = 0$.

135. Пусть множества $A, B \subset \mathbb{R}^3$ симметричны друг другу относительно оси Ox, т.е. $(x,y,z)\in A$ равносильно $(x,-y,-z)\in B$. Доказать, что если A измеримо, то B измеримо и $\lambda_3 A = \lambda_3 B$.

136. Пусть $r>0$, замкнутое множество $F\subset\mathbb{R}^n$ содержится в замкнутом шаре $V(z,r)$ и $F\neq V(z,r)$. Доказать, что $\lambda F<\lambda V(z,r)$.

137. Пусть множество $A\subset\mathbb{R}^n$ измеримо, $B\subset\mathbb{R}^n$ и $\lambda B=0$. Доказать равенства

$$\lambda A=\lambda(A\cup B)=\lambda(A\backslash B).$$

138. Доказать, что множество $A\subset\mathbb{R}^n$ измеримо и имеет меру 0 тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon>0$ существует последовательность брусов (P_k) такая, что

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\lambda P_k<\varepsilon.$$

139. Доказать, что множество $A\subset\mathbb{R}^n$ измеримо и имеет меру 0 тогда и только тогда, когда существует последовательность брусов (P_k) такая, что выполнены три условия:

(*) $A\subset P_1\cup P_2\cup\ldots.$ (**) $\lambda P_1+\lambda P_2+\ldots<+\infty.$

(***) Каждая точка $x\in A$ принадлежит бесконечному количеству этих брусов.

140. Пусть множество $A\subset\mathbb{R}^n$ измеримо. Доказать, что существует возрастающая последовательность компактов $C_k\subset A$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\lambda C_k=\lambda A.$$

141. Доказать, что для измеримых множеств $A,B\subset\mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\lambda A+\lambda B=\lambda(A\cup B)+\lambda(A\cap B).$$

142. Доказать, что для измеримых множеств $A,B,C\subset\mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\lambda A+\lambda B+\lambda C+\lambda(A\cap B\cap C) =$$
$$= \lambda(A\cup B\cup C)+\lambda(A\cap B)+\lambda(A\cap C)+\lambda(B\cap C).$$

143. Пусть множества $A, B\subset\mathbb{R}^n$ измеримы и $\lambda(A\vartriangle B)=0$, где $A\vartriangle B$ – *симметрическая разность* множеств A и B. Доказать, что

$$\lambda A = \lambda B = \lambda(A\cap B) = \lambda(A\cup B).$$

144. Пусть множество $B\subset\mathbb{R}^n$ измеримо. Построить убывающую последовательность измеримых множеств $A_k\subset\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$, таких, что $\lambda A_k=+\infty$ для всех $k\in\mathbb{N}$ и $B = A_1\cap A_2\cap\ldots$.

145. Пусть множество $A\subset\mathbb{R}^n$ измеримо. Доказать, что множество $-A=\{-x\,;\,x\in A\}$ измеримо и $\lambda(-A)=\lambda A$.

146. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и множество $A\subset\mathbb{R}^n$ измеримо. Доказать, что множество $\alpha A=\{\alpha x\,;\,x\in A\}$ измеримо и справедливо равенство $\lambda(\alpha A)=|\alpha|^n\lambda A$.

147. Пусть $P\subset\mathbb{R}^n$ – брус и $\operatorname{int}P\subset A\subset\overline{P}$. Доказать, что множество A измеримо и $\lambda A=\lambda P$.

148. Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$ и брусы P_k, $k\in\mathbb{N}$, таковы, что

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\operatorname{int}P_k \subset A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{P_k}.$$

Доказать, что тогда множество A измеримо и $\lambda A = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda P_k$.

149. Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и отображение $T\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ действует по формуле

$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\ldots,\alpha_nx_n).$$

Доказать, что для любого измеримого $A \subset \mathbb{R}^n$ множество $T(A)$ измеримо и справедливо равенство

$$\lambda[T(A)] = |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n| \cdot \lambda A.$$

150. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Доказать, что для открытых шаров $U(z,r)$ и $U(z,1)$ справедливо равенство $\lambda U(z,r) = r^n \lambda U(z,1)$.

151. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Доказать, что для замкнутых шаров $V(z,r)$ и $V(z,1)$ справедливо равенство $\lambda V(z,r) = r^n \lambda V(z,1)$.

152. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Доказать, что $\lambda U(z,r) = \lambda V(z,r)$ и, следовательно, $\lambda S(z,r) = 0$, где

$$S(z,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \rho(x,z) = r\right\}.$$

153. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $U(z,r) \subset A \subset V(z,r)$. Доказать, что множество A измеримо и справедливо равенство

$$\lambda U(z,r) = \lambda A = \lambda V(z,r).$$

154. Пусть $u \in \mathbb{R}^n$ и $A = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} S_r$, где

$$S_r = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \rho(x,u) = r\right\}$$

для $r \in \mathbb{Q}$. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\lambda A = 0$.

155. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\lambda A > 0$. Доказать, что есть точки $u, v \in A$ такие, что $\rho(u,v) \notin \mathbb{Q}$.

156. Доказать, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n[V(0,1) \setminus V(0,1-\varepsilon)]}{\lambda_n V(0,1)} = 1.$$

157. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Доказать, что функция

$$\varphi(t) = \lambda[A \cap V(0,t)]$$

определена всюду на $(0,+\infty)$, непрерывна и возрастает от 0 до λA.

158. Доказать, что при $n>1$ функция φ в задаче 157 не обязана быть равномерно непрерывной.

159. Доказать, что функция φ задачи 157 строго возрастает и равномерно непрерывна, если $n>1$ и $A = (0,+\infty) \times (0,1)^{n-1}$.

160. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $0 < \alpha < \lambda A$. Доказать, что существует компакт $K \subset A$ такой, что $\lambda K = \alpha$.

161. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, $0 < \alpha_k < +\infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\lambda A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$. Доказать, что существуют измеримые попарно не пересекающиеся множества $A_k \subset A$ такие, что $\lambda A_k = \alpha_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup \ldots$.

162. Пусть (A_k) – убывающая последовательность измеримых множеств $A_k \subset \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует убывающая последовательность (F_k) замкнутых множеств $F_k \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $F_k \subset A_k$ и $\lambda(A_k \setminus F_k) < \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

163. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\lambda A > 0$. Доказать, что найдутся непересекающиеся компакты $K_0 \subset A$ и $K_1 \subset A$ такие, что $\lambda K_0 > 0$ и $\lambda K_1 > 0$. Вывести отсюда, что $\operatorname{Card} A = \aleph$.

164. Доказать, что для любых множеств A и $B \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \leqslant \lambda^* A + \lambda^* B.$$

165. Пусть K – замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $A \subset K$ и

$$\lambda K = \lambda^* A + \lambda^*(K \setminus A).$$

Доказать, что множество A измеримо.

166. *Внутренняя мера* множества $A \subset \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\lambda_* A = \sup\{\lambda K\,;\, K \subset A\},$$

где $\sup$ берется по всем компактам $K \subset A$.

(а) Доказать равенство

$$\lambda_* A = \sup\{\lambda F\,;\, F \subset A\},$$

где $\sup$ берется по всем замкнутым подмножествам $F \subset A$.

(б) Пусть $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что тогда $\lambda_* A \leqslant \lambda_* B$.

(в) Доказать, что $\lambda_* A \leqslant \lambda^* A$ для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

(г) Доказать, что для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\lambda_* A = \lambda^* A$.

(д) Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и $\lambda_* A = \lambda^* A$. Доказать, что тогда множество A измеримо.

(е) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ и $\lambda_* A = \lambda^* A < +\infty$. Доказать, что множество A измеримо (хотя и не обязано быть ограниченным).

(ж) Доказать, что для любой последовательности попарно не пересекающихся множеств $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство

$$\lambda_*(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots) \geqslant \lambda_* A_1 + \lambda_* A_2 + \ldots\,.$$

167. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $B \subset A$. Доказать равенство

$$\lambda A = \lambda^* B + \lambda_*(A \setminus B).$$

168. (Теорема Каратеодори). Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо тогда и только тогда, когда для любого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\lambda^* B = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(B \setminus A).$$

169. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ – непересекающиеся измеримые множества. Доказать, что для любого $C \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\lambda^*\left[(A \sqcup B) \cap C\right] = \lambda^*(A \cap C) + \lambda^*(B \cap C).$$

170. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, $\lambda_n A = 0$ и $B \subset \mathbb{R}^m$. Доказать, что множество $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо и справедливо равенство $\lambda_{n+m}(A \times B) = 0.$. Пусть множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ измеримы, причем $\lambda_n A < +\infty$ и $\lambda_m B < +\infty$. Доказать, что множество $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо и справедливо равенство $\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n A \cdot \lambda_m B.$

171. Пусть множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ измеримы, причем $\lambda_n A > 0$ и $\lambda_m B = +\infty$. Доказать, что множество $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо и $\lambda_{n+m}(A \times B) = +\infty$.

§6. Примеры измеримых множеств

1. Пример. *Одноточечное множество* $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо и имеет меру* 0.

В самом деле, множество $\{x\}$ компактно и, следовательно, измеримо по теореме 4.4. Если $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, то множество $\{x\}$ есть пересечение последовательности брусов

$$P_k = \prod_{i=1}^{n} [\xi_i, \xi_i + 1/k), \; k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда ясно, что $0 \leqslant \lambda\{x\} \leqslant \lambda P_k = (1/k)^n$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\lambda\{x\} = 0$.

2. Пример. *Конечное или счетное множество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо и имеет меру* 0.

Это вытекает из примера 1 и из теорем 4.3, 5.2 и 5.3.

3. Пример. *Отрезок* H *на плоскости* $\mathbb{R}^2$ *измерим и* $\lambda_2 H = 0$.

Действительно, пусть $a < b$. Отрезок H_{ab} на плоскости, соединяющий точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$ оси абсцисс, есть пересечение брусов

$$Q_k = [a, b + 1/k) \times [0, 1/k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

По части (a) теоремы 4.7 множество $H_{ab} \subset \mathbb{R}^2$ измеримо. По свойству 5(a) $\lambda_2 H_{ab} \leqslant \lambda_2 Q_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из равенства

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_2 Q_k = \lim_{k\to\infty} \left(b + \frac{1}{k} - a\right) \cdot \frac{1}{k} = 0$$

следует, что $\lambda_2 H_{ab} = 0$.

Для произвольного отрезка $H \subset \mathbb{R}^2$ легко найти отрезок H_{ab} оси абсцисс и изометрию $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такие, что $H = T(H_{ab})$. По теореме 5.7 множество $H \subset \mathbb{R}^2$ измеримо и $\lambda_2 H = \lambda_2 H_{ab} = 0$.

4. Пример. *Прямая L на плоскости $\mathbb{R}^2$ измерима и $\lambda_2 L = 0$.*

Действительно, прямая L – замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$ и по теореме 4.5 измерима. Пусть $z \in L$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ прямая L пересекается с кругом $V(z, m)$ по отрезку H_m и $L = H_1 \cup H_2 \cup \ldots$. Применяя пример 3 и свойство 5(c), заключаем, что $\lambda_2 L = 0$.

5. Пример. *Грань $\Gamma = \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i) \times \{a_n\}$ бруса $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ в $\mathbb{R}^n$ измерима и $\lambda \Gamma = 0$.*

Действительно, по свойству 2(g) и по теореме 5.2

$$\lambda(\operatorname{int} P) = \lambda P = \lambda(\operatorname{int} P) + \lambda(P \setminus \operatorname{int} P).$$

Кроме того, $\lambda(\operatorname{int} P) < +\infty$ по свойству 5(d). Следовательно, $\lambda(P \setminus \operatorname{int} P) = 0$. Применяя теорему 5.4, заключаем, что множество $\Gamma \subset P \setminus \operatorname{int} P$ измеримо и $\lambda \Gamma = 0$.

6. Пример. *Если $\bar{P}$ – замыкание бруса $P \subset \mathbb{R}^n$, то $\lambda \bar{P} = \lambda P$.*

Действительно, множество $\bar{P}$ замкнуто и потому измеримо. Пусть $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$. Рассмотрим еще брусы $P_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Для каждого $\varepsilon > 0$ имеем

$$P \subset \bar{P} = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subset P_\varepsilon .$$

Поэтому

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \lambda P \leqslant \lambda \bar{P} \leqslant \lambda P_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} (b_i + \varepsilon - a_i).$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$\lambda P \leqslant \lambda \bar{P} \leqslant \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \lambda P, \text{ т.е. } \lambda \bar{P} = \lambda P.$$

7. Пример. *Векторное подпространство* $L \subset \mathbb{R}^n$ *размерности* $\dim L < n$ *измеримо и* $\lambda L = 0$.

Действительно, если

$$H = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n ;\ \xi_n = 0\},$$

то

$$H = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Gamma_m, \text{ где } \Gamma_m = \prod_{i=1}^{n-1} [-m, m) \times \{0\}.$$

По примеру 5 $\lambda \Gamma_m = 0$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Применяя теорему 4.3 и свойство 5(c), получим $\lambda H = 0$.

Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное векторное подпространство размерности $n-1$. Используя ортогональный базис подпространства L, нетрудно построить изометрию $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такую, что $T(L) = H$. По теореме 5.7 подпространство L измеримо и $\lambda L = \lambda H = 0$.

Если $\dim L < n-1$, то подпространство L содержится в некотором подпространстве размерности $n-1$ и поэтому имеет меру $\lambda L = 0$.

8. Пример. *Мера λQ замкнутого прямоугольного (невырожденного) параллелепипеда $Q \subset \mathbb{R}^n$ равна его n- мерному объему, т.е. произведению длин его ребер, исходящих из одной вершины.*

Действительно, если ребра параллелепипеда Q параллельны осям координат, то $Q = \bar{P}$ для некоторого бруса $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ и согласно примеру 6

$$\lambda Q = \lambda \bar{P} = \lambda P = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Пусть Q – произвольный замкнутый прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$. Преобразование сдвига сохраняет меру. Поэтому можно считать, что точка $O = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ является одной из вершин параллелепипеда Q. Пусть ребрами бруса Q, исходящими из вершины O, служат векторы $u_1, \ldots, u_n$. Рассмотрим отображение

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathrm{e}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T \mathrm{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

для всех $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ – единичные векторы координатных осей. Отображение T линейно и для каждого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Tx\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 = \|x\|^2,$$

так как векторы $u_1, \ldots, u_n$ попарно ортогональны. Следовательно, отображение T является изометрией. Если R – брус с ребрами

$$y_k = \|u_k\| \cdot \mathrm{e}_k,\ k = 1, \ldots, n,$$

то

$$\bar{R} = \prod_{k=1}^{n} \left[0, \|u_k\|\right].$$

Кроме того, $Ty_k = u_k$ для всех k и, значит, $T(\bar{R}) = Q$. Ребра параллелепипеда $\bar{R}$ лежат на координатных осях. Поэтому $\lambda(\bar{R})$ совпадает с объемом параллелепипеда $\bar{R}$. По теореме 5.7

$$\lambda Q = \lambda T(\bar{R}) = \lambda \bar{R} = \| u_1 \| \cdot \| u_2 \| \cdot \ldots \cdot \| u_n \|.$$

9. Пример. *Мера подграфика показательной функции.*

Пусть $0 < a < 1$ и F – замкнутое множество на плоскости, ограниченное сверху графиком функции $x \mapsto a^x$, $x \geqslant 0$, а слева и снизу осями координат (см. рис. 1). По теореме 4.5 множество F измеримо. Найдем меру $\lambda_2 F$. Фиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим множества

$$A_\delta = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} D_k, \quad B_\delta = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k,$$

где

$$D_k = (k\delta - \delta, k\delta) \times \left(0, a^{k\delta}\right), \quad P_k = [k\delta - \delta, k\delta) \times \left[0, a^{k\delta - \delta}\right)$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$. По теореме 5.3 и по свойству 2(g)

$$\lambda_2 A_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_2 D_k = \sum_{k=1}^{\infty} \delta a^{k\delta} = \frac{\delta a^\delta}{1 - a^\delta},$$

$$\lambda_2 B_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_2 P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \delta a^{k\delta - \delta} = \frac{\delta}{1 - a^\delta}.$$

Легко проверить (см. рис. 1), что $A_\delta \subset F \subset B_\delta$. Поэтому

$$\frac{\delta a^\delta}{1 - a^\delta} \leqslant \lambda_2 F \leqslant \frac{\delta}{1 - a^\delta}.$$

Переходя к пределу при $\delta \to +0$, получим, что $\lambda_2 F = -\dfrac{1}{\ln a}$.

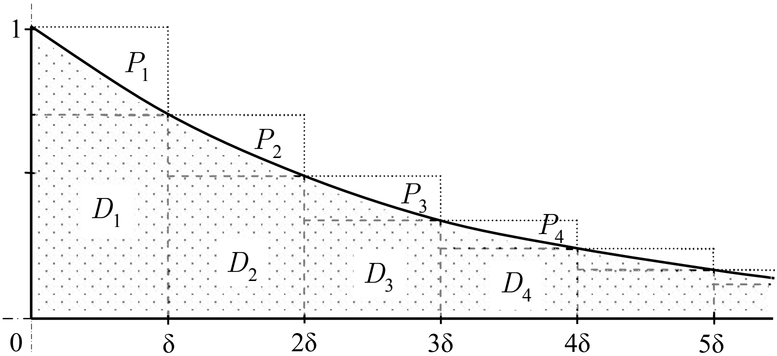

Рис. 1. Подграфик показательной функции

Пример. *Совершенное множество Кантора*.

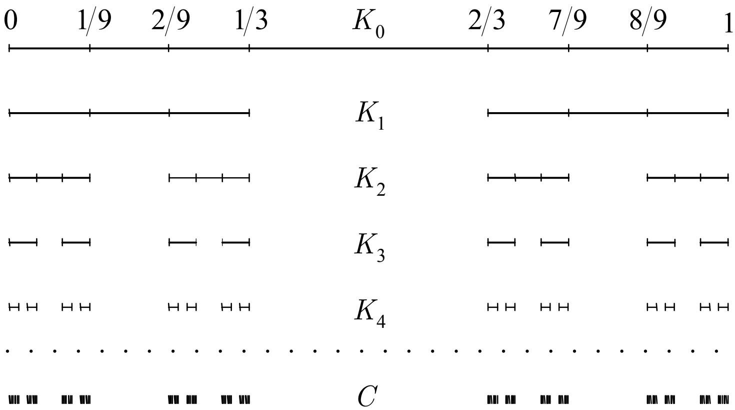

Рис. 2. Множество Кантора $C = K_1 \cap K_2 \cap \ldots$

Построение множества Кантора. Разделим сегмент $K_0 = [0,1]$ на три равные части (см. рис. 2) и удалим средний интервал $(1/3, 2/3)$. Оставшиеся сегменты $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ назовем сегментами 1-го ранга. Их объединение K_1 компактно и $\lambda_1 K_1 = 2/3$.

Каждый из двух сегментов 1-го ранга разделим на три равные части и удалим средние интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$. Оставшиеся сегменты $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$ назовем сегментами 2-го ранга. Их объединение K_2 компактно, содержится в компакте K_1 и имеет меру $\lambda_1 K_2 = (2/3)^2$.

Каждый из 4-х сегментов 2-го ранга разделим на три равные части и удалим средние интервалы. Получим 8 сегментов 3-го ранга. Их объединение K_3 компактно, содержится в компакте K_2 и имеет меру $\lambda_1 K_3 = (2/3)^3$.

Продолжая описанный процесс далее, мы получим убывающую последовательность компактов K_m, $m \in \mathbb{N}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ компакт K_m есть объединение 2^m сегментов m-го ранга. Эти сегменты получены из сегментов предыдущего ранга делением каждого из них на три равные части и удалением средних интервалов. Ясно, что сегменты m-го ранга попарно не пересекаются и мера каждого из них равна $1/3^m$. Поэтому $\lambda_1 K_m = (2/3)^m$.

Пересечение $C = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} K_m$ называется *множеством Кантора.*

Установим основные свойства множества Кантора.

Множество Кантора C непусто, так как концы сегментов любого ранга принадлежит C.

Множество Кантора C компактно как пересечение последовательности компактов.

Множество Кантора C *имеет меру* $\lambda_1 C = 0$. Действительно, поскольку $C \subset K_m$, то

$$\lambda_1 C \leqslant \lambda_1 K_m = (2/3)^m \text{ для каждого } m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда ясно, что $\lambda_1 C = \lim\limits_{m \to 0} (2/3)^m = 0$.

Множество Кантора совершенно, т.е. *замкнуто и не имеет изолированных точек*. Замкнутость множества C вытекает из его компактности. Допустим, что $x \in C$ – изолированная точка множества C. Тогда $C \cap (x - \delta, x + \delta) = \{x\}$ для некоторого $\delta > 0$. Подберем $N \in \mathbb{N}$ так, что $1/3^N < \delta$. Из $x \in C$ следует, что $x \in K_N$ и, значит, $x \in I$, где I – некоторый сегмент N-го ранга. Из соотношений $x \in I$, $\lambda_1 I = 1/3^N < \delta$ следует, что $I \subset (x - \delta, x + \delta)$. Концы сегмента I принадлежат множеству C и хотя бы один из них отличен от x. Значит, $C \cap (x - \delta, x + \delta) \neq \{x\}$ вопреки выбору $\delta > 0$.

Множество Кантора имеет мощность континуума. В самом деле, $\operatorname{Card} C \leqslant \aleph$, так как $C \subset [0,1]$. Для доказательства неравенства $\aleph \leqslant \operatorname{Card} C$ достаточно построить инъекцию $\varphi : [0,1) \to C$. Пусть $t \in [0,1)$. Запишем число t в 2-ичной системе счисления:

$$t = 0, \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots \tau_m \dots, \tag{*}$$

где все $\tau_m \in \{0,1\}$. Допустим для определенности, что в разложении (*) нет 1 в периоде: легко проверить, что в 2-ичной системе счисления

$$0, \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k 01111 \dots = 0, \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k 10000 \dots .$$

По разложению (*) определим последовательность сегментов I_m, $m \in \mathbb{N}$, следующим образом. Если $\tau_1 = 0$, то $I_1 := [0, 1/3]$, иначе $I_1 := [2/3, 1]$. Ясно, что I_1 – сегмент 1-го ранга. Допустим, что

$m \in \mathbb{N}$ и сегмент I_m ранга m уже определен. По построению множества Кантора в сегменте I_m содержится два непересекающихся сегмента $(m+1)$-го ранга. Обозначим через I_{m+1} левый из этих двух сегментов, если $\tau_{m+1} = 0$, и правый, если $\tau_{m+1} = 1$. Согласно принципу индукции последовательность (I_m) построена. Отметим, что $\lambda_1 I_m = 1/3^m \to 0$ при $m \to \infty$. По теореме Кантора о вложенных сегментах множество $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ состоит из единственной точки ξ. Поскольку $I_m \subset K_m$ для каждого m, то

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m = C.$$

Значит, $\xi \in C$. Положим $\varphi(t) = \xi$. Отображение $\varphi : [0,1) \to C$ получено. Инъективность его очевидна: если изменить число $t \in [0,1)$, то изменится разбиение (*) и если τ_m – первая из изменившихся цифр, то изменится сегмент I_{m+1} и пересечение $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ будет уже другим. Равенство $\mathrm{Card}\, C = \aleph$ доказано.

10. Пример. *Неизмеримое множество.* Докажем, что среди множеств $S \subset [0,1]$ есть неизмеримые множества, т.е. $2^{[0,1]} \not\subset \mathsf{L}(\mathbb{R})$.

Числа $x, y \in [0,1]$ объявим *эквивалентными* и будем писать $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Ясно, что $x \sim x$ для каждого $x \in [0,1]$, из $x \sim y$ следует $y \sim x$ и из $x \sim y$, $y \sim z$ следует $x \sim z$.

Для каждого $x \in [0,1]$ обозначим

$$A(x) = \{x' \in [0,1];\, x' \sim x\}.$$

Множества $A(x)$ и $A(y)$, где $x, y \in [0,1]$, либо не пересекаются, либо совпадают. В самом деле, пусть $z \in A(x) \cap A(y)$. Тогда $z \sim x$ и $z \sim y$. Поэтому $x \sim y$. Если $t \in A(x)$, то $t \sim x$. Отсюда и из $x \sim y$ следует, что $t \sim y$, т.е. $t \in A(y)$. Значит, $A(x) \subset A(y)$. Включение $A(y) \subset A(x)$ доказывается аналогично. Таким образом, если $A(x) \cap A(y) \neq \varnothing$, то $A(x) = A(y)$.

Из каждого множества $A(x)$ выберем по одному числу t_x. Если $A(x) = A(y)$, то $t_x = t_y$. Если $A(x) \neq A(y)$, то $A(x) \cap A(y) = \varnothing$ и, значит, $t_x \neq t_y$. Из выбранных чисел t_x составим множество H. Ясно, что все числа $t \in H$ попарно не эквивалентны.

Докажем, что множество H на прямой $\mathbb{R}$ неизмеримо. Допустим, что H измеримо. По теореме 5.7 тогда измеримы все его сдвиги $H_r = r + H$, где $r \in \mathbb{Q}$, причем $\lambda_1 H_r = \lambda_1 H$ для каждого $r \in \mathbb{Q}$.

Если $r, r' \in \mathbb{Q}$ и $r \neq r'$, то $H_r \cap H_{r'} = \varnothing$. В самом деле, пусть $z \in H_r \cap H_{r'}$. Тогда $z \in H_r$ и $z \in H_{r'}$, т.е. $z = r + t = r' + t'$ для некоторых $t, t' \in H$. Из $r \neq r'$, следует, что $t \neq t'$. А тогда $t \not\sim t'$, так как все элементы множества H попарно не эквивалентны. Однако, $t - t' = r' - r \in \mathbb{Q}$ и, значит, $t \sim t'$. Противоречие. Таким образом, множества H_r, $r \in \mathbb{Q}$, попарно не пересекаются.

Пусть S – объединение всех H_r, где $r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Множество $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ счетно. По теореме 5.3

$$\lambda_1 S = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda_1 H_r = \lambda_1 H + \lambda_1 H + \ldots . \qquad (*)$$

Отсюда $\lambda_1 S = 0$, если $\lambda_1 H = 0$, и $\lambda_1 S = +\infty$, если $\lambda_1 H > 0$.

Однако $H \subset [0,1]$, так как $H \subset \bigcup_{x \in [0,1]} A(x)$ и все $A(x) \subset [0,1]$.

Поэтому $H_r = r + H \subset [-1, 2]$ при $r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ и, значит, $S \subset [-1, 2]$. Следовательно, $\lambda_1 S \leqslant 3 < +\infty$.

С другой стороны, $[0,1] \subset S$. Действительно, пусть $x \in [0,1]$. Тогда $x \in A(x)$ и $x \sim t_x \in H$. Для $r = x - t_x$ получим $r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ и

$$x = r + t_x \in r + H = H_r \subset S.$$

Включение $[0,1] \subset S$ доказано. Из него следует, что $\lambda_1 S \geqslant 1$.

Неравенства $1 \leqslant \lambda_1 S \leqslant 3$ противоречат равенству (*). Следовательно, множество H неизмеримо.

Замечание. Можно доказать (см. задачу 212), что *каждое измеримое множество положительной меры содержит в себе неизмеримые подмножества.*

Задачи к §6. Примеры измеримых множеств

173. Доказать, что множество Кантора $C \subset [0,1]$ на прямой $\mathbb{R}$ *нигде не плотно*, т.е. его замыкание не имеет внутренних точек

174. Пусть $\varepsilon > 0$. Найти конечное семейство одномерных брусов $P_1, P_2, \ldots, P_N$, покрывающих множество Кантора C и таких, что

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_1 P_2 + \ldots + \lambda_1 P_N < \varepsilon.$$

175. Доказать, что число $x \in [0,1]$ принадлежит множеству Кантора $C \subset [0,1]$ тогда и только тогда, когда это число можно записать в троичной системе счисления без цифры 1.

176. Найти меру множества S всех чисел $t \in [0,1]$, в любом 10-м разложении которых нет цифры 5.

177. Найти меру множества S всех чисел $t \in [0,1]$, допускающих 10-е разложение без цифры 5.

178. Найти меру множества S всех чисел $t \in [0,1]$, в любом 10-м разложении которых есть цифра 5.

179. Найти меру множества S всех чисел $t \in [0,1]$, допускающих 10-е разложение с цифрой 5.

180. Доказать, что множество S всех чисел $t \in [0,1]$, допускающих разложение в двоичную дробь с нулями на всех четных местах, нигде не плотно на $\mathbb{R}$, имеет меру 0 и мощность континуума.

181. Найти меру множества S всех чисел $t \in [0,1]$, в 10-м разложении которых всегда есть две цифры 5, расположенные рядом.

182. Пусть $0 < \alpha < 1$. Построить нигде не плотный компакт $K \subset [0,1]$ без изолированных точек такой, что $\lambda_1 K = \alpha$.

183. Пусть $0 < \alpha < 1$. Построить нигде не плотное множество $A \subset [0,1]$ меры 0, для которого $\lambda_1 \overline{A} = \alpha$.

184. Построить несчетное всюду плотное множество $A \subset \mathbb{R}$ с мерой $\lambda_1 A = 0$.

185. Пусть измеримое множество $A \subset [0,1]$ нигде не плотно. Доказать, что тогда $\lambda_1 A < 1$.

186. Пусть $0 < \beta \leqslant +\infty$. Построить нигде не плотное множество $B \subset \mathbb{R}$ такое, что $\lambda_1 B = 0$ и $\lambda_1 \overline{B} = \beta$.

187. Пусть $p \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ и A_p – множество всех чисел $t \in [0,1)$ таких, что для любого 10-го разложения

$$t = 0, t_1 t_2 \ldots t_m \ldots$$

множество $\{k \in \mathbb{N}\,;\, t_k = p\}$ конечно (т.е. существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $t_k \neq p$ при $k \geqslant N$). Доказать, что A_p измеримо и $\lambda_1 A_p = 0$.

188. Построить множество $A \subset \mathbb{R}$ меры 0 такое, что $A \cap (a,b)$ имеет мощность континуума для любого интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

189. Построить непересекающиеся множества $A, B \subset \mathbb{R}$ меры 0 такие, что множества $A \cap (a,b)$ и $B \cap (a,b)$ имеют мощность континуума для любого интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

190. Построить континуум попарно не пересекающихся множеств $C_\alpha \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in J$, меры 0 таких, что для любого интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$ все множества $C_\alpha \cap (a,b)$ имеют мощность континуума.

191. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Найти измеримые множества $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \subset [0,1]$ такие, что

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_2 + \ldots + \lambda_1 A_k = k-1, \text{ но } A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \varnothing.$$

192. Пусть $0 < \alpha < 1$ и множество $A \subset [0,1]$ счетно. Построить нигде не плотный компакт $K \subset [0,1] \setminus A$ без изолированных точек такой, что $\lambda_1 K = \alpha$.

193. Пусть C – множество Кантора. Доказать, что множества

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\, \rho(x,C) < \varepsilon\},\ B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\, \rho(x,C) \leqslant \varepsilon\},$$

$$D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\, \rho(x,C) = \varepsilon\},\ E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\, \varepsilon < \rho(x,C) \leqslant 3\varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, измеримы и найти меру каждого из них.

194. Пусть $a > 1$. Найти меру множества

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y < a^x\right\}.$$

195. Разрежем квадрат $K = [0,1] \times [0,1]$ на 9 конгруэнтных квадратов и удалим центральный (открытый) квадрат. Каждый из оставшихся 8-ми квадратов разрежем на 9 конгруэнтных квадратов и удалим центральные (открытые) квадраты. Каждый из оставшихся 64-х квадратов разделим на 9 конгруэнтных квадратов и удалим центральные квадраты. И т. д. После последовательности таких шагов от квадрата K останется множество S, именуемое «*ковер Серпинского*». Доказать, что множество S на плоскости $\mathbb{R}^2$ компактно, линейно связно, нигде не плотно, не имеет изолированных точек, $\lambda_2 S = 0$ и $\operatorname{Card} S = \aleph$.

196. Рассмотрим замкнутый треугольник

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \max\{\alpha x, \beta x\} \leqslant y \leqslant \gamma\right\},$$

где $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и $\gamma > 0$. Разделим его средними линиями на 4 конгруэнтных треугольника (подобных треугольнику T) и удалим центральный (открытый) треугольник. Каждый из оставшихся 3-х треугольников разделим на 4 конгруэнтных треугольника и удалим центральные (открытые) треугольники. Каждый из оставшихся 9-ти треугольников разделим на 4 конгруэнтных треугольника и удалим центральные треугольники. И т. д. После последовательности таких шагов от треугольника T останется множество S, которое можно назвать «*треугольным ковром Серпинского*». Доказать, что множество S на плоскости $\mathbb{R}^2$ компактно, линейно связно, нигде не плотно, не имеет изолированных точек, $\lambda_2 S = 0$ и $\operatorname{Card} S = \aleph$.

197. Построить непрерывную сюръекцию множества Кантора C на сегмент $[0,1]$. Вывести отсюда, что непрерывный образ измеримого множества не обязан быть измеримым множеством.

198. Пусть C – множество Кантора. Доказать, что множество $C \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ (*канторова гребенка*) компактно, нигде не плотно, не имеет изолированных точек, не связно и $\lambda_2(C \times [0,1]) = 0$.

199. Пусть $\varepsilon > 0$. Построить конечное семейство двумерных брусов P_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, покрывающих канторову гребенку $C \times [0,1]$ и таких, что $\lambda_2 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_2 P_N < \varepsilon$.

200. Пусть C – множество Кантора. Доказать, что множество

$$C^2 = C \times C \subset \mathbb{R}^2$$

(*кладбище Серпинского*) компактно, нигде не плотно, не имеет изолированных точек, не связно, $\lambda_2 C^2 = 0$ и $\mathrm{Card}\, C^2 = \aleph$.

201. Для каждого $r \in C$, где C – множество Кантора, обозначим через Γ_r окружность радиуса $r+1$ с центром в начале координат $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Доказать, что объединение $W \subset \mathbb{R}^2$ всех Γ_r, $r \in C$, компактно, не связно, нигде не плотно, не имеет изолированных точек и $\lambda_2 W = 0$.

202. Пусть $0 < \alpha < 1$. Построить линейно связный нигде не плотный компакт $S \subset [0,1]^2$ с мерой $\lambda_2 S = \alpha$.

203. Пусть $0 < \alpha < 1$. Построить линейно связный нигде не плотный компакт $S \subset [0,1]^3$ с мерой $\lambda_3 S = \alpha$.

204. Пусть функции $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны и $\varphi \neq \psi$. Доказать, что множество

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) \neq \psi(x) \right\}$$

измеримо и $\lambda G > 0$.

205. Пусть L – векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$ и $\dim L < n$. Доказать, что каждое множество $A \subset L$ измеримо в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda A = 0$.

206. Доказать, что в задаче 149 условие «все $\alpha_k \neq 0$» можно опустить.

207. Допустим, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, $\lambda A > 0$ и $0 < \alpha < \lambda A$. Доказать, что существует нигде не плотный компакт K без изолированных точек такой, что $K \subset A$ и $\lambda K = \alpha$.

208. Пусть $H \subset \mathbb{R}^n$ – гиперплоскость и множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$ симметричны друг другу относительно H. Доказать, что если множество A измеримо, то множество B также измеримо и $\lambda B = \lambda A$.

209. Доказать, что $\operatorname{Card} \mathsf{L}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph}$.

210. Пусть B – сектор круга

$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leqslant \sigma^2\right\}$$

с центральным углом α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Доказать, что $\lambda_2 B = \alpha\sigma^2 / 2$.

211. Доказать, что существует неизмеримое множество $A \subset \mathbb{R}$ такое, что $\lambda_* A = \lambda^* A$. Доказать также, что для такого множества справедливо равенство $\lambda_* A = \lambda^* A = +\infty$.

212. Пусть множество $B \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\lambda B > 0$. Доказать, что во множестве B есть неизмеримое подмножество.

213. Доказать, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ существует измеримое множество A, для которого его проекции

$$\pi_1 A = \{x \in \mathbb{R} ; \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\},$$

$$\pi_2 A = \{y \in \mathbb{R} ; \exists x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$$

на оси координат неизмеримы.

214. Доказать, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ существует неизмеримое множество A, для которого его проекции

$$\pi_1 A = \{x \in \mathbb{R} ; \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\},$$

$$\pi_2 A = \{y \in \mathbb{R} ; \exists x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$$

на оси координат измеримы.

215. Доказать, что множество $H \subset [0,1]$ измеримо на прямой $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $H \times [0,1]$ измеримо на плоскости $\mathbb{R}^2$.

216. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и его подмножество B неизмеримо. Доказать, что множество $A \setminus B$ неизмеримо.

217. Найти неизмеримое множество $H \subset \mathbb{R}$, для которого объединение W всех окружностей Γ_r радиусов $|r|$, $r \in H$, с центром в начале координат окажется измеримым множеством.

218. Доказать, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ есть неизмеримое линейно связное множество.

219. Верно ли, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ измеримо каждое относительно компактное множество (т.е. имеющее компактное замыкание)?

220. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ неизмеримо, $B \subset \mathbb{R}^n$ и $\lambda^* B = 0$. Доказать, что множества $A \cup B$ и $A \backslash B$ неизмеримы.

221. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. *Плотность* $\alpha_A(x)$ *множества* A *в точке* $x \in \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\alpha_A(x) = \lim_{\delta \to +0} \frac{\lambda[A \cap V(x,\delta)]}{\lambda V(x,\delta)}. \qquad (*)$$

Областью задания функции α_A считается множество всех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых предел (*) существует. Тогда $0 \leqslant \alpha_A(x) \leqslant 1$.

(а) Найти функцию плотности для множеств на прямой $\mathbb{R}$:

(1) $A = (-1,0) \cup (0,1) \cup \mathbb{N}$; (2) множество Кантора C;

(3) $A = (0,1) \backslash \mathbb{Q}$; (4) $A = (0,1) \cup \mathbb{Q}$;

(5) $A = \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leqslant \sin x < 1\}$.

(б) Пусть функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке $u \in \mathbb{R}$ имеет производную и

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leqslant \varphi(x)\}.$$

Доказать равенство $\alpha_A(u, \varphi(u)) = 1/2$.

(в) Найти функцию плотности для множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\text{(1) } P=[0,1]\times\mathbb{Q}; \quad \text{(2) } P=[0,1)\times(0,1];$$

$$\text{(3) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leqslant y<|x|\};$$

$$\text{(4) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0<y\leqslant x^2\};$$

$$\text{(5) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geqslant 0,\ 0<y\leqslant\sqrt{x}\};$$

$$\text{(6) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leqslant y<\sin x\};$$

$$\text{(7) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leqslant x^2+y^2<2\};$$

$$\text{(8) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leqslant y<\sqrt{3}\,|\sin x|\};$$

$$\text{(9) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0<xy\leqslant 1\};$$

$$\text{(10) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0<|xy|\leqslant 1\};$$

$$\text{(11) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z},\ y\geqslant\operatorname{ctg} x\};$$

$$\text{(12) } P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x|\leqslant\pi,\ y\geqslant\operatorname{sign}\sin x\}.$$

(г) Пусть $0<\sigma<1$. Построить измеримое множество $A\subset\mathbb{R}^2$, для которого $\alpha_A(O)=\sigma$, где $O=(0,0)$.

(д) Доказать, что плотность множества

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0,\ y\leqslant\cos(1/x)\}$$

в точке $w=(0,1)$ равна 0.

(е) Найти измеримое множество $A\subset\mathbb{R}$, для которого

$$\operatorname{dom}\alpha_A=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(ж) Найти измеримое множество $A\subset\mathbb{R}^2$, для которого

$$\operatorname{dom}\alpha_A = (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}.$$

(з) Найти функции плотности для брусов

$$[0,1)\subset\mathbb{R},\ [0,1)^2\subset\mathbb{R}^2,\ [0,1)^3\subset\mathbb{R}^3,\ [0,1)^4\subset\mathbb{R}^4.$$

(и) Найти функции плотности для множеств

$$[0,3)^2\setminus[1,2)^2\subset\mathbb{R}^2,\ [0,3)^3\setminus[1,2)^3\subset\mathbb{R}^3,\ [0,3)^4\setminus[1,2)^4\subset\mathbb{R}^4.$$

(к) Найти функцию плотности для множества

$$D=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ x_1>0,x_2>0\right\}.$$

(л) Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$ и в точке $x\in\mathbb{R}^n$ функция плотности α_A не определена или $0<\alpha_A(x)<1.$ Доказать, что тогда $x\in\bar{A}\setminus\operatorname{int}A.$

(м) Найти функции плотности для сферы $S(0,r)\subset\mathbb{R}^n$ и для шаров $V(0,r),\ U(0,r)\subset\mathbb{R}^n.$

(н) Пусть $0<\delta<r.$ Найти функцию плотности для множества $V(0,r)\setminus V(0,\delta)\subset\mathbb{R}^n.$

(о) Пусть $0<\beta<1$ и B – объединение множеств

$$B_m = V\left(0,\beta^{2m-1}\right)\setminus V\left(0,\beta^{2m}\right),\ \ m\in\mathbb{N}.$$

Доказать, что функция плотности множества B не определена в точке $0=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n.$

(п) Найти функцию плотности измеримого множества $A\subset\mathbb{R}^n,$ если известна функция плотности множества $\mathbb{R}^n\setminus A.$

(р) Доказать, что для любых измеримых множеств $A,B\subset\mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\alpha_A+\alpha_B=\alpha_{A\cup B}+\alpha_{A\cap B}.$

Указания к решению задач §5. Мера Лебега

99. УКАЗАНИЕ. Доказать, что A не более чем счетно.

101. ОТВЕТ. Таково, например, множество $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left[k, k+2^{-k}\right]$.

102. ОТВЕТЫ. $\lambda_1 A_0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_3 = \dfrac{1}{\pi}$,

$$\lambda_1 A_1 = \lambda_1 A_2 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k+1)},\ \ \lambda_1 A_3 = \lambda_1 A_4 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}.$$

РЕШЕНИЕ. Очевидно $A_0 = A_1 \sqcup A_3$. Ясно также, что

$$A_1 = \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ \pi \leqslant \frac{1}{x},\ \sin\frac{1}{x} > 0\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ \pi \leqslant \frac{1}{x},\ \frac{1}{x} \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi}\right) \sqcup \left(\frac{1}{5\pi}, \frac{1}{4\pi}\right) \sqcup \left(\frac{1}{7\pi}, \frac{1}{6\pi}\right) \sqcup \left(\frac{1}{9\pi}, \frac{1}{8\pi}\right) \sqcup \ldots.$$

Отсюда следует, что множество A_1 измеримо (ибо открыто) и

$$\lambda_1 A_1 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k+1)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{8\cdot 9} + \ldots\right).$$

Аналогично

$$A_3 = \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x < 0,\ \sin\frac{1}{x} > 0\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ \frac{1}{x} \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(-2k\pi,\ -2k\pi+\pi)\right\} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}\right) \sqcup \left(-\frac{1}{3\pi}, -\frac{1}{4\pi}\right) \sqcup \left(-\frac{1}{5\pi}, -\frac{1}{6\pi}\right) \sqcup \left(-\frac{1}{7\pi}, -\frac{1}{8\pi}\right) \sqcup \ldots.$$

Следовательно, множество A_3 измеримо и

$$\lambda_1 A_3 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8}+\ldots\right).$$

Из равенства $A_0 = A_1 \sqcup A_3$ теперь имеем

$$\lambda_1 A_0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_3 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

Далее, $A_1 \subset A_2$ и множество $A_2 \setminus A_1$ счетно. Поэтому множество A_2 также измеримо и $\lambda_1 A_1 = \lambda_1 A_2$.

Наконец, $A_3 = A_4$. Действительно, ясно, что $A_4 \subset A_3$. Допустим, что $A_3 \neq A_4$ и $x \in A_3 \setminus A_4$. Тогда $\pi x < -1$. Значит, $x < 0$, $1/x < 0$, $-\pi x > 1$, $-\pi < 1/x$ и, таким образом, $-\pi < 1/x < 0$. Однако в этом случае $\sin(1/x) < 0$ вопреки тому, что $x \in A_3$. Равенство $A_3 = A_4$ доказано. ◊

103. РЕШЕНИЕ. Применяя теорему 5.3, имеем:

$$\lambda_1 A = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1\left(k^2, k^2+1\right] = 1+1+\ldots = +\infty;$$

$$\lambda_1 B = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1\left(2^k, 2^k+\frac{1}{k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty;$$

$$\lambda_1 C = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1\left(\sqrt{2k}, \sqrt{2k+1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{2k+1}} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{4k}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty;$$

$$\lambda_1 D = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1\left(k^k, k^k+\frac{1}{k\ln k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln k} =$$

$$= \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \frac{1}{5\ln 5} + \frac{1}{6\ln 6} + \frac{1}{7\ln 7} + \frac{1}{8\ln 8} + \ldots \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\ln 2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\ln 4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{\ln 8} + \ldots \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 8} + \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 16} + \ldots = \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

104. РЕШЕНИЕ. Это следует из задачи 72 и теоремы 5.4. ◊

106. РЕШЕНИЕ. Множество $\overline{G}$ содержит сегмент $[0,2]$ и некоторые интервалы $\left(0-2^{-k_1}, 0+2^{-k_1}\right)$ и $\left(1-2^{-k_2}, 1+2^{-k_2}\right)$. Поэтому $\lambda_1\overline{G} > 2$. Сумма мер интервалов, составляющих множество G, равна 2, и некоторые из них пересекаются. Значит, $\lambda_1 G < 2$. Среди этих интервалов присутствует $\left(r_1 - 2^{-1}, r_1 + 2^{-1}\right)$. Значит, $\lambda_1 G > 1$. ◊

107. РЕШЕНИЕ. Можем считать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено. Допустим, что $u - v \notin \mathbb{Q}$ для всех $u, v \in A$, $u \neq v$. Множество $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ счетно. Пусть

$$\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots\}.$$

По теореме 5.7 множества $A_k = r_k + A$ измеримы и $\lambda_1 A_k = \lambda_1 A$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Если $i \neq j$, то $A_i \cap A_j = \varnothing$. В самом деле, пусть $w \in A_i \cap A_j$. Точки $x = w - r_i$, $y = w - r_j \in A$ различны, так как $r_i \neq r_j$. Но $x - y = -r_i + r_j \in \mathbb{Q}$ вопреки предположению, что $u - v \notin \mathbb{Q}$ для всех $u, v \in A$. Значит, действительно, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Множество $B = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup \ldots$ ограничено, так как A ограничено и все $|r_k| \leqslant 1$. Следовательно,

$$+\infty > \lambda_1 B = \lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_2 + \ldots = \lambda_1 A + \lambda_1 A + \ldots .$$

Однако, это невозможно при $\lambda_1 A > 0$. $\Diamond$

108. УКАЗАНИЕ. Доказать, что утверждение верно для прямоугольных треугольников. Произвольный треугольник представить в виде разности двух прямоугольных треугольников.

109. УКАЗАНИЕ. Применить задачу 108 и теорему 5.2.

110. РЕШЕНИЕ. Это следует из теоремы 5.4 и из задач 18, 74 и 76.

111. ОТВЕТЫ. (1, 2, 6) $\lambda_2 A = 2$; (3, 5, 7,9) $\lambda_2 A = 4$; (4) $\lambda_2 A = 3/2$; (8) $2e-2$. УКАЗАНИЕ. Применить задачи 108 – 110 или 62.

112. ОТВЕТЫ. (1) $\lambda_2 A = (b-a)(c-d)$; (2,3 4, 5) $\lambda_2 A = +\infty$; (6) $\lambda_2 A = 3\pi$; (7) $\lambda_2 A = 8/3$; (8) $\lambda_2 A = 1/6$; (9) $\lambda_2 A = 4/15$.

УКАЗАНИЕ. В вариантах (6-9) применить задачи 62 и 110.

113. РЕШЕНИЕ. Пусть $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ возрастает, $\varepsilon > 0$ и

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = b,$$

причём $x_k - x_{k-1} < \varepsilon$ для всех k. Множество

$$H_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{p} [x_{k-1}, x_k] \times [\varphi(x_{k-1}), \varphi(x_k)]$$

содержит в себе график Γ функции φ (так как φ возрастает) и

$$\lambda_2^* \Gamma \leqslant \lambda_2 H_\varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1}) \cdot [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p} [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] = \varepsilon \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)].$$

Отсюда ясно, что $\lambda_2^* \Gamma = 0$. Поэтому Γ измеримо и $\lambda_2 \Gamma = 0$. Для возрастающей функции $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ утверждение доказано.

График Γ возрастающей функции $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ есть объединение графиков сужений функции φ на $[a_m,b_m]$, где

$$a_m\to a,\, b_m\to b,\;\; a<a_m<b_m<b.$$

Поэтому снова $\lambda_2\Gamma=0$.

Для убывающих функций доказательство аналогичное. ◊

114. РЕШЕНИЕ. Функция $f(x,y)=x^2y^2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ непрерывна и $A=f^{-1}(-\infty,1]$. Значит, множество A замкнуто и поэтому измеримо. Согласно задаче 57 множество

$$G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, x>1,\, 0<y<1/x\right\}$$

имеет меру $\lambda_2 G=+\infty$. Очевидно $G\subset A$ и, значит, $\lambda_2 A=+\infty$.

Для каждого $m\in\mathbb{N},\ m\geqslant 2,$ положим

$$P_m=[m,m+1)\times[1/m,2/m).$$

Брусы $P_m,\ m\geqslant 2,$ попарно не пересекаются и содержатся во множестве B. Поэтому

$$\lambda_2 B\geqslant\sum_{m=2}^{\infty}\lambda_2 P_m=\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{m}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m-1}{m(m+1)}=+\infty.$$

Функция $\Psi(x)=\ln\sin x$ – первообразная для функции $\operatorname{ctg}x$ на интервале $(0,\pi)$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ множество

$$G_\varepsilon=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, \varepsilon<x<\pi/2,\, 0<y<\operatorname{ctg}x\right\}$$

согласно задаче 62 имеет меру

$$\lambda_2 G_\varepsilon=\Psi(\pi/2)-\Psi(\varepsilon)=\ln 1-\ln\sin\varepsilon=-\ln\sin\varepsilon.$$

Отсюда

$$\lambda_2 C\geqslant\lambda_2 G\geqslant\lim_{\varepsilon\to+0}G_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\ln\sin\varepsilon)=+\infty.\ ◊$$

115. РЕШЕНИЕ. Для открытого верхнего полукруга

$$U_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 < r^2,\ y > 0\}$$

по задаче 64 справедливо равенство $\lambda_2 U_+ = \pi r^2/2$.

Нижний полукруг

$$U_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 < r^2,\ y < 0\}$$

имеет туже меру по задаче 42 (или по теореме 5.7). Диаметральный отрезок $H = (-r, r) \times \{0\}$, разделяющий полукруги U_+ и U_-, имеет (пример 6.3) меру $\lambda_2 H = 0$. Значит, $\lambda_2 U = 2 \cdot \lambda_2 U_+ = \pi r^2$.

По задаче 110 полуокружности Γ_+ и Γ_-, ограничивающие круг $V = V(O, r)$ сверху и снизу, имеют меру $\lambda_2 \Gamma_+ = \lambda_2 \Gamma_- = 0$. Поэтому

$$\lambda_2 V = \lambda_2 \left(U \sqcup (\Gamma_+ \cup \Gamma_-) \right) = \lambda_2 U + 0 = \pi r^2. \ \Diamond$$

116. ОТВЕТЫ. (1) $\lambda_2 A = 4/3$; (2, 3, 11) $\lambda_2 A = 2$; (4) $\lambda_2 A = \sqrt{2} + 1$; (5) $\lambda_2 A = \pi/3$; (6-7) $\lambda_2 A = \pi$; (8) $\lambda_2 A = \sqrt{2} - 1$; (9) $\lambda_2 A = \pi/4$; (10) $\lambda_2 A = \ln 4$; (12) $\lambda_2 A = 2\pi$.

УКАЗАНИЕ. Применить задачи 62 и 110.

117. ОТВЕТ. Таково, например, объединение открытых кругов $U(z_k, \varepsilon_k)$, $k \in \mathbb{N}$, где центры z_k образуют множество, плотное в открытом квадрате $D = (0,1) \times (0,1)$, а радиусы ε_k удовлетворяют условиям $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 < \dfrac{1}{4}$ и $0 < \varepsilon_k < \rho(z_k, \mathbb{R}^2 \setminus D)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

118. ОТВЕТЫ. (1-2) $\lambda_2 A = +\infty$; (3) $\lambda_2 A = a$; (4) $\lambda_2 A = 2$; (5) $\lambda_2 A = 1$; (6) $\lambda_2 A = 2\pi$; (7) $\lambda_2 A = \frac{1}{3}(10\sqrt{5} - 4)$.

РЕШЕНИЕ. (1) В этом случае

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geqslant 0,\ [x]\leqslant y<[x+1]\right\}=$$

$$=\bigsqcup_{m=0}^{\infty}\big([m,m+1)\times[m,m+1)\big)$$

и, следовательно,

$$\lambda_2 A=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_2\big([m,m+1)\times[m,m+1)\big)=1+1+\ldots=+\infty.$$

(2) В этом случае

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geqslant 0,\ [x^2]\leqslant y<[x^2+1]\right\}=$$

$$=\bigsqcup_{m=0}^{\infty}\left(\left[\sqrt{m},\sqrt{m+1}\right)\times[m,m+1)\right)$$

и, следовательно,

$$\lambda_2 A=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)=\lim_{m\to\infty}\sqrt{m+1}=+\infty.$$

(3) В этом случае

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leqslant x<a,\ [x^2]\leqslant y<[x^2+1]\right\},\ a>0.$$

Пусть $0<a\leqslant 1$. Тогда условие $(x,y)\in A$ означает, что $x\in[0,a)$ и $0<y\leqslant 1$. Следовательно, $A=[0,a)\times[0,1)$ и $\lambda_2 A=a$.

Пусть $a>1$. Тогда $\sqrt{p}<a\leqslant\sqrt{p+1}$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$ и

$$A=A_1\sqcup A_2\sqcup\ldots\sqcup A_p\sqcup A_{p+1},$$

где

$$A_m=\left\{(x,y)\in A;\ \sqrt{m-1}\leqslant x<\sqrt{m}\right\}\ \text{при}\ m=1,2,\ldots,p,$$

$$A_{p+1}=\left\{(x,y)\in A;\ \sqrt{p}\leqslant x<a\right\}.$$

Если $1 \leqslant m \leqslant p$ и $\sqrt{m-1} \leqslant x < \sqrt{m}$, то условие $[x^2] \leqslant y < [x^2+1]$ приобретает вид $m-1 \leqslant y < m$, и, следовательно,

$$A_m = \left[\sqrt{m-1}, \sqrt{m}\right) \times [m-1, m).$$

Если же $\sqrt{p} \leqslant x < a$, то условие $[x^2] \leqslant y < [x^2+1]$ упрощается до условия $p \leqslant y < p+1$, и, следовательно,

$$A_p = [\sqrt{p}, a) \times [p, p+1).$$

Теперь ясно, что

$$\lambda_2 A = \sum_{m=1}^{p} \lambda_2 A_m + \lambda_2 A_{p+1} = \sum_{m=1}^{p} \left(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}\right) + \left(a - \sqrt{p}\right) = a.$$

(4) В этом случае

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ [x] \leqslant y < [x] + 2^{-[x]}\right\} =$$

$$= \bigsqcup_{m=0}^{\infty} \left([m, m+1) \times \left[m, m+2^{-m}\right)\right)$$

и, следовательно,

$$\lambda_2 A = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} = 2.$$

(5) В этом случае

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 1,\ [x] \leqslant y < [x] + \frac{1}{[x] \cdot [x+1]}\right\}$$

$$= \bigsqcup_{m=1}^{\infty} \left([m, m+1) \times \left[m, \frac{1}{m(m+1)}\right)\right)$$

и, следовательно,

$$\lambda_2 A = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 1.$$

(6) В этом случае

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\,|\,x\,|<\pi/2,\,[\operatorname{tg}x-1]\leqslant y<[\operatorname{tg}x+1]\right\}.$$

Для каждого $m\in\mathbb{Z}$ пусть $\alpha_m\in(-\pi/2,\pi/2)$ таково, что $\operatorname{tg}\alpha_m=m$. Поскольку $\operatorname{tg}:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ – возрастающая биекция, то $\alpha_m<\alpha_n$ при $m<n$ и

$$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}}[\alpha_m,\alpha_{m+1}).$$

Отсюда следует, что $A=B\sqcup C$, где

$$B=\bigsqcup_{m=0}^{\infty}\left([\alpha_m,\alpha_{m+1})\times[m-1,m+1)\right),$$

$$C=\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\left([\alpha_{-k},\alpha_{-k+1})\times[-k-1,-k+1)\right).$$

Поэтому

$$\lambda_2A=\lambda_2B+\lambda_2C=2\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_{m+1}-\alpha_m)+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{-k+1}-\alpha_{-k})\right)=$$

$$=2\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\alpha_{m+1}-\alpha_0\right)+2\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\alpha_0-\alpha_{-k}\right)=$$

$$=2\cdot\lim_{m\to\infty}\alpha_{m+1}+2\cdot\lim_{k\to\infty}\left(-\alpha_{-k}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot(-(-\frac{\pi}{2}))=2\pi.$$

(7) В этом случае

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\,x^2\leqslant y<[x+3]\right\}.$$

При $x<-1$, при $\sqrt{5}\leqslant x<3$ и при $2+k\leqslant x<3+k,\ k\in\mathbb{N}$, условие на y противоречиво:

$$1<x^2\leqslant y<[x+3]\leqslant 1,\ \ 5\leqslant x^2\leqslant y<[x+3]\leqslant 5$$

и соотв.

$$4+4k+k^2 \leqslant x^2 \leqslant y < [x+3] \leqslant 5+k.$$

Поэтому множество A лежит в полосе $-1 \leqslant x < \sqrt{5}$ и

$$A = (P_1 \sqcup P_2 \sqcup P_3 \sqcup P_4) \setminus (G \sqcup H),$$

где

$$P_1 = [-1,0) \times (0,2),\ P_2 = [0,1) \times (0,3),\ P_3 = [1,2) \times (0,4),$$

$$P_4 = \left[2, \sqrt{5}\right) \times (0,5),\ H = \{-1\} \times (0,1),$$

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 < x < \sqrt{5},\ 0 < y < x^2\right\}.$$

Функция $F(x) = x^3/3$ является первообразной для функции $x \mapsto x^2$ и по задаче 62

$$\lambda_2 G = F\left(\sqrt{5}\right) - F(-1) = \left(5\sqrt{5}+1\right)/3.$$

Ясно также, что

$$\lambda_2 P_1 = 2,\ \lambda_2 P_2 = 3,\ \lambda_2 P_3 = 4,\ \lambda_2 P_4 = 5\left(\sqrt{5}-2\right)$$

и $\lambda_2 H = 0$. Поэтому

$$\lambda_2 A = 2 + 3 + 4 + 5\left(\sqrt{5}-2\right) - \frac{5\sqrt{5}+1}{3} = \frac{1}{3}\left(10\sqrt{5} - 4\right).\ \Diamond$$

120. РЕШЕНИЕ. Обозначим $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus A_2,\ \ldots,\ B_m = A_m \setminus A_{m-1},\ \ldots.$$

Множества $B_m,\ m \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются,

$$A_m = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_m$$

для каждого $m \in \mathbb{N}$ и

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Поэтому

$$\lambda A = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda B_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \lambda B_k = \lim_{m\to\infty} \lambda A_m. \ \lozenge$$

121. РЕШЕНИЕ. Последовательность чисел (λA_k) также убывает. Поэтому существует $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda A_k$, причем

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} \lambda A_k \leqslant \lambda A_1 < +\infty.$$

Последовательность множеств $(A_1 \backslash A_k)$ возрастает и по задаче 120

$$\lambda\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \backslash A_k)\right] = \lim_{k\to\infty} \lambda\,(A_1 \backslash A_k).$$

Отсюда и из равенства

$$A_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \backslash A_k)$$

следует равенство

$$\lambda\left(A_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A_1 \backslash A_k). \tag{*}$$

Если $B \subset A_1$ измеримо, то

$$\lambda B \leqslant \lambda A_1 < +\infty, \ \lambda A_1 = \lambda B + \lambda(A_1 \backslash B)$$

и, следовательно, $\lambda(A_1 \backslash B) = \lambda A_1 - \lambda B.$ В частности,

$$\lambda(A_1 \backslash A_k) = \lambda A_1 - \lambda A_k, \tag{**}$$

$$\lambda\left(A_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lambda A_1 - \lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right). \tag{***}$$

Из (***) и из (*) имеем

$$\lambda\left(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lambda A_1 - \lim_{k\to\infty} \lambda A_k.$$

Отсюда и из (***) вытекает требуемое равенство

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda A_k. \ \Diamond$$

122. ОТВЕТ. Таковы, например, полуоси $B_k = (k,+\infty)$, $k \in \mathbb{N}$.

123. ОТВЕТ. Таковы уже множества $B_k = A \cup (k,+\infty)$, $k \in \mathbb{N}$.

124(1). РЕШЕНИЕ. Пусть $\alpha > 1$. Найдем меру $\lambda_2 G$ множества

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 1,\ 0 < y < 1/x^{\alpha}\right\}.$$

Функция $F(x) = \dfrac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$ является первообразной функции $\varphi(x) = 1/x^{\alpha}$ на $(0,+\infty)$. Значит, по задаче 62 множества

$$G_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x < t,\ 0 < y < 1/x^{\alpha}\right\},\ t > 1,$$

имеют меру

$$\lambda_2 G_t = F(t) - F(1) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - t^{1-\alpha}\right).$$

По свойству 2(d) $\lambda_2 G \geqslant \lambda_2 G_t$ для всех $t > 1$. Поэтому

$$\lambda_2 G \geqslant \sup_{t>1} \lambda_2 G_m = \lim_{t\to\infty} \lambda_2 G_t = \frac{1}{\alpha-1} - \lim_{t\to\infty} t^{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$

так как функция $t \to \lambda_2 G_t$ возрастает на $(1,+\infty)$ и $\alpha > 1$.

Для доказательства обратного неравенства $\lambda_2 G \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}$ фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим открытые множества

$$U_m = \left(m - \frac{\varepsilon}{2^m}, m + \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \times (0,1),$$

$$\Omega_m = \{(x,y) \in G;\, m < x < m+1\},\ m \in \mathbb{N}.$$

Эти множества покрывают множество G и по свойству 2(e)

$$\lambda_2 G \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lambda_2 U_m + \lambda_2 \Omega_m\right). \tag{1}$$

По свойству 2(g) и по задаче 62

$$\lambda_2 U_m = \frac{\varepsilon}{2^{m-1}}, \quad \lambda_2 \Omega_m = F(m+1) - F(m) \tag{2}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Из (1) и (2) имеем

$$\lambda_2 G \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^{m-1}} + F(m+1) - F(m)\right) =$$

$$= 2\varepsilon + \lim_{m\to\infty} \left(F(m+1) - F(1)\right) = 2\varepsilon - F(1) + \lim_{m\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}(m+1)^{1-\alpha} =$$

$$= 2\varepsilon - F(1) = 2\varepsilon + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Отсюда ясно, что $\lambda_2 G \geqslant \dfrac{1}{\alpha-1}$ и, значит, $\lambda_2 G = \dfrac{1}{\alpha-1}$. ◊

124(2). РЕШЕНИЕ аналогично предыдущему. ОТВЕТ. $\lambda_2 D = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

125. РЕШЕНИЕ. По свойству 3(c)

$$\lambda^* A_1 \leqslant \lambda^* A_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda^* A_k \leqslant \ldots.$$

Поэтому существует

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \lambda^* A_k \leqslant +\infty.$$

Из включений $A_k \subset A$ следует, что $\lambda^* A_k \leqslant \lambda^* A$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\alpha \leqslant \lambda^* A$.

Докажем неравенство $\lambda^* A \leqslant \alpha$. Если $\lambda^* A_k = +\infty$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $\alpha = +\infty$ и доказывать нечего.

Пусть $\lambda^* A_k < +\infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и затем открытые множества G_k, $k \in \mathbb{N}$, так, что

$$A_k \subset G_k \text{ и } \lambda G_k < \lambda^* A_k + \varepsilon.$$

Множества

$$B_k = G_k \cap G_{k+1} \cap G_{k+2} \cap \ldots$$

измеримы, образуют возрастающую последовательность и

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda B_k. \tag{*}$$

по задаче 120. Очевидно $B_k \subset G_k$ и, следовательно,

$$\lambda B_k \leqslant \lambda G_k < \lambda^* A_k + \varepsilon \text{ для всех } k \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Если $x \in A$, то $x \in A_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $x \in A_j \subset G_j$ при $j \geqslant k$ и поэтому $x \in B_k$. Таким образом, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Отсюда и из (*) и (**) имеем

$$\lambda^* A \leqslant \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda B_k \leqslant \lim_{k\to\infty} (\lambda^* A_k + \varepsilon) = \alpha + \varepsilon.$$

При $\varepsilon \to +0$ получим $\lambda^* A \leqslant \alpha$. Равенство $\lambda^* A = \alpha$ доказано. ◊

126. УКАЗАНИЕ. Для доказательства равенств

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0 \text{ и } \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lambda_1 A$$

можно применить задачи 120 и 121.

127. УКАЗАНИЕ. Для доказательства равенств

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = -\lambda_1[A\cap(-\infty,z)] \text{ и } \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = \lambda_1[A\cap(z,+\infty)]$$

можно применить задачу 120.

128. РЕШЕНИЕ. Для любого $x\in\mathbb{R}$ множество

$$\{(u,v)\in A\,;\,u<x\} = A\cap((-\infty,x)\times\mathbb{R})$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$ измеримо (как пересечение измеримых множеств). Поэтому функция φ определена всюду на $\mathbb{R}$. Если $x_1<x_2$, то

$$\{(u,v)\in A\,;\,u<x_1\}\subset\{(u,v)\in A\,;\,u<x_2\}.$$

Поэтому $\varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_2)$, т.е. функция $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ возрастает.

Фиксируем $x_0\in\mathbb{R}$. Если последовательность $(x_k)\subset\mathbb{R}$ строго возрастает и $x_k\to x_0$ при $k\to\infty$, то последовательность множеств

$$\{(u,v)\in A\,;\,u<x_k\},\ k\in\mathbb{N}, \tag{*}$$

также возрастает и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{(u,v)\in A\,;\,u<x_k\} = \{(u,v)\in A\,;\,u<x_0\}.$$

Отсюда по задаче 120

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k) = \lim_{k\to\infty}\lambda_2\{(u,v)\in A\,;\,u<x_k\} =$$

$$= \lambda_2\{(u,v)\in A\,;\,u<x_0\} = \varphi(x_0).$$

Тем самым доказано, что $\varphi(x_0-0)=\varphi(x_0)$. Аналогично из задачи 121 (и из примера 6.4) следует, что $\varphi(x_0+0)=\varphi(x_0)$. Эти равенства означают, что функция φ в точке x_0 непрерывна.

Если последовательность $(x_k)\subset\mathbb{R}$ возрастает и $x_k\to+\infty$ при $k\to\infty$, то объединение множеств (*) совпадает с множеством A. По задаче 120 тогда $\varphi(x_k)\to\lambda_2 A$ при $k\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x_k) = \lambda_2 A.$$

Если последовательность $(x_k)\subset\mathbb{R}$ убывает и $x_k\to-\infty$ при $k\to\infty$, то пересечение множеств (*) пусто. По задаче 121 тогда $\varphi(x_k)\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x_k) = \lambda_2\varnothing = 0.$$

Итак, функция $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна и имеет конечные пределы при $x_k\to\pm\infty$. Отсюда (и из теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на сегменте) следует, что функция $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равномерно непрерывна на всей прямой $\mathbb{R}$.

Требуемые свойства функции ψ устанавливаются аналогично. ◊

129. РЕШЕНИЕ. Для любой точки $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ множество

$$\{(u,v)\in A\,;\, u<x,\ v<y\} = A\cap((-\infty,x)\times(-\infty,y))$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$ измеримо как пересечение измеримых множеств. Поэтому функция h определена всюду на $\mathbb{R}^2$. Если последовательность $(x_k)\subset\mathbb{R}$ убывает и $x_k\to-\infty$ при $k\to\infty$, то множества

$$B_k(y) = \{(u,v)\in A\,;\, u<x_k,\ v<y\},\ k\in\mathbb{N},$$

образуют убывающую последовательность с пустым пересечением и

$$\lim_{x\to-\infty}h(x,y) = \lim_{k\to\infty}h(x_k,y) = \lim_{k\to\infty}\lambda_2 B_k(y) = \lambda_2\varnothing = 0.$$

по задаче 121. Если последовательность $(x_k)\subset\mathbb{R}$ возрастает и $x_k\to+\infty$ при $k\to\infty$, то множества $B_k(y)$ образуют возрастающую последовательность с объединением

$$B(y) = \{(u,v)\in A\,;\, v<y\}$$

и по задаче 120

$$\lim_{x\to+\infty} h(x,y) = \lim_{k\to\infty} h(x_k,y) = \lim_{k\to\infty} \lambda_2 B_k(y) = \lambda_2 B(y) = \psi(y).$$

Равенства (2) доказаны. Равенства (3) доказываются аналогично.

Докажем, что функция $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Пусть $\varepsilon > 0$. Функции φ и ψ задачи 128 равномерно непрерывны. Значит, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|\varphi(x)-\varphi(s)| < \varepsilon \text{ при } |x-s|<\delta,$$

$$|\psi(y)-\psi(t)| < \varepsilon \text{ при } |y-t|<\delta.$$

Пусть $(x,y),(s,t)\in\mathbb{R}^2$, причем $|x-s|<\delta$ и $|y-t|<\delta$. Можем считать, что $y\leqslant t$. Обозначим

$$D=(-\infty,x)\times(-\infty,y),\ E=(-\infty,s)\times(-\infty,t).$$

По определению функции h

$$h(x,y)=\lambda_2(A\cap D),\ h(s,t)=\lambda_2(A\cap E). \tag{*}$$

Случай 1. Пусть не только $y\leqslant t$, но и $x\leqslant s$. Тогда $D\subset E$ и

$$E\setminus D\subset\Big(([x,s)\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times[y,t))\Big). \tag{**}$$

Докажем (**). Пусть $(u,v)\in E\setminus D$. Тогда $(u,v)\in E$ и, значит, $u<s$ и $v<t$. Кроме того, $(u,v)\notin D$, т.е. $u\geqslant x$ <u>или</u> $v\geqslant y$. В первом случае $u\in[x,s)$ и, значит, $(u,v)\in[x,s)\times\mathbb{R}$, а во втором – $v\in[y,t)$ и поэтому $(u,v)\in\mathbb{R}\times[y,t)$. Включение (**) доказано.

Из (*) и (**) имеем

$$|h(s,t)-h(x,y)| = |\lambda_2(A\cap E)-\lambda_2(A\cap D)| = \tag{***}$$

$$=\lambda_2(A\cap(E\setminus D))\leqslant\lambda_2\{A\cap([x,s)\times\mathbb{R})\}+\lambda_2\{A\cap(\mathbb{R}\times[y,t))\}.$$

Поскольку $[x,s)=(-\infty,s)\setminus(-\infty,x)$ и, значит,

$$A\cap([x,s)\times\mathbb{R}) = A\cap((-\infty,s)\times\mathbb{R})\setminus A\cap((-\infty,x)\times\mathbb{R}),$$

то

$$\lambda_2\{A\cap([x,s)\times\mathbb{R})\} =$$

$$= \lambda_2\{A\cap((-\infty,s)\times\mathbb{R}) \setminus A\cap((-\infty,x)\times\mathbb{R})\} =$$

$$= \lambda_2\{A\cap((-\infty,s)\times\mathbb{R})\} - \lambda_2\{A\cap((-\infty,x)\times\mathbb{R})\} =$$

$$= \varphi(s) - \varphi(x) < \varepsilon.$$

Аналогично

$$\lambda_2\{A\cap(\mathbb{R}\times[y,t))\} = \psi(t) - \psi(y) < \varepsilon.$$

Теперь из (***) имеем

$$|h(s,t) - h(x,y)| < 2\varepsilon.$$

Случай 2. Пусть $y \leqslant t$ и $x \geqslant s$. Тогда $D\cap E = H$, где

$$H = (-\infty,s)\times(-\infty,y),$$

и аналогично 1-му случаю

$$|h(s,t) - h(x,y)| = |\lambda_2(A\cap E) - \lambda_2(A\cap D)| =$$

$$= |\lambda_2(A\cap H) + \lambda_2(A\cap(E\setminus H)) - \lambda_2(A\cap H) - \lambda_2(A\cap(D\setminus H))| =$$

$$= |\lambda_2(A\cap(E\setminus H)) - \lambda_2(A\cap(D\setminus H))| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_2(A\cap(E\setminus H)) + \lambda_2(A\cap(D\setminus H)) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_2(A\cap(\mathbb{R}\times[y,t))) + \lambda_2(A\cap([s,x)\times\mathbb{R})) =$$

$$= \psi(t) - \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(s) < 2\varepsilon.$$

Равномерная непрерывность функции $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ доказана. ◊

130. РЕШЕНИЕ. Аналогично решению задачи 128 нетрудно доказать, что во всех трех случаях функция φ непрерывна и возрастает от 0 до $\lambda_2 A = +\infty$. В случае (1) для всех $x\in[0,+\infty)$ имеем

$$\varphi(x) = \lambda_2\{(u,v)\in A\,;\ u<x\} = \lambda_2[0,x)\times(0,1) = x$$

и равномерная непрерывность φ очевидна.

В случае (2) для всех $x\in[0,+\infty)$ согласно задаче 108 имеем

$$\varphi(x) = \lambda_2\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,;\ u<x,\,0<v<u\right\} = \frac{1}{2}x^2$$

и ясно, что функция φ не является равномерно непрерывной.

В случае (3) $\varphi(x)=\lambda_2\varnothing=0$ при $x\in(0,1]$ и

$$\varphi(x) = \lambda_2\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,;\ 1<u<x,\,0<v<\ln u\right\}$$

при $x>1$. Функция $t\mapsto\ln t$ на интервале $(1,x)$, где $x>1$, имеет первообразную $F(t)=t(\ln t-1)$. Поэтому согласно задаче 62

$$\varphi(x) = F(x)-F(1)=F(x)=x\ln x-x+1.$$

Если $x>1$ и $\delta>0$, то

$$\varphi(x+\delta)-\varphi(x) = (x+\delta)\ln(x+\delta)-\delta-x\ln x =$$

$$= x\ln\frac{x+\delta}{x}+\delta\ln(x+\delta)-\delta > \delta\ln(x+\delta)-\delta.$$

Отсюда ясно, что $\varphi(x+\delta)-\varphi(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$ и, следовательно, функция φ не является равномерно непрерывной. ◊

132. РЕШЕНИЕ. Пусть функция $\varphi:[a,b]\to(0,+\infty)$ интегрируема по Риману и $\Omega\subset A\subset\Phi$, где

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a<x<b,\ 0<y<\varphi(x)\right\},$$

$$\Phi = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant\varphi(x)\right\}.$$

Нужно доказать, что A измеримо и $\lambda_2 A = \int_a^b\varphi(x)\,dx$.

Рассмотрим разбиения

$$\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b\} \tag{1}$$

сегмента $[a,b]$ и соответствующие *суммы Дарбу*

$$s_\tau = \sum_{k=1}^{p} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad S_\tau = \sum_{k=1}^{p} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

где m_k, M_k – инфимум и соотв. супремум функции φ на сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ для $k = 1, 2, \ldots, p$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку интеграл $I = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ существует, то найдется разбиение (1) такое, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Из определения интеграла Римана следует, что тогда $s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau$.

Рассмотрим прямоугольники

$$V_k = (x_{k-1}, x_k) \times (0, m_k), \quad W_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, M_k],$$

$k = 1, 2, \ldots, p$. Обозначим

$$V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_p, \quad W = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_p.$$

Очевидно $V \subset \Omega \subset A \subset \Phi \subset W$. Ясно также, что

$$\lambda_2 V = \sum_{k=1}^{p} \lambda_2 V_k = \sum_{k=1}^{p} m_k (x_k - x_{k-1}) = s_\tau,$$

$$\lambda_2 W \leqslant \sum_{k=1}^{p} \lambda_2 W_k = \sum_{k=1}^{p} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = S_\tau$$

и, следовательно,

$$\lambda_2 (W \setminus V) = \lambda_2 W - \lambda_2 V \leqslant S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

По теореме 5.5 найдутся замкнутое множество $F \subset V$ и открытое множество $G \supset W$ такие, что $\lambda_2(V \setminus F) < \varepsilon$ и $\lambda_2(G \setminus W) < \varepsilon$. Тогда $F \subset A \subset G$ и

$$\lambda_2(G\backslash F) = \lambda_2(G\backslash W)+\lambda_2(W\backslash V)+\lambda_2(V\backslash F) < 3\varepsilon.$$

Применяя еще раз теорему 5.5, заключаем, что множество A измеримо. Поскольку

$$s_\tau = \lambda_2 V \leqslant \lambda_2 A \leqslant \lambda_2 W \leqslant S_\tau \text{ и } s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau,$$

то $|\lambda_2 A - I| \leqslant S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lambda_2 A = I$. ◊

133. РЕШЕНИЕ. Множество S замкнуто и потому измеримо. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора функция $\psi : K \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Значит, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon \text{ при } |x - y| < \delta.$$

Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^2$ измеримо. Поэтому найдется открытое множество $G \subset \mathbb{R}^2$ такое, что $K \subset \mathbb{R}^2$ и $\lambda_2(G\backslash K) < \varepsilon$. Пусть $G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ – разбиение множества G на квадратные брусы

$$P_k = [a_k, a_k+\gamma_k)\times[b_k, b_k+\gamma_k).$$

Можно считать, что длины диагоналей квадратов P_k меньше δ.

Если $P_k \cap K = \varnothing$, то положим $Q_k = P_k \times [0, 2\varepsilon)$. Иначе пусть

$$Q_k = P_k \times [m_k, M_k + \varepsilon),$$

где m_k и M_k – минимум и соотв. максимум функции ψ на компакте $\bar{P}_k \cap K$. Ясно, что $M_k - m_k < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lambda_3 Q_k \leqslant 2\varepsilon \cdot \lambda_2 P_k \text{ для любого } k \in \mathbb{N}.$$

Если $x \in K$, то $x \in P_k$ для некоторого P_k и в этом случае $m_k \leqslant \psi(x) \leqslant M_k$, так что $(x, \psi(x)) \in Q_k$. Значит, объединение A всех брусов Q_k, $k \in \mathbb{N}$, содержит в себе график S. Поэтому

$$\lambda_3^* S \leqslant \lambda_3^* A = \lambda_3 A \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_3 Q_k \leqslant 2\varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_2 P_k = 2\varepsilon \cdot \lambda_2 G =$$

$$= 2\varepsilon \cdot \big(\lambda_2 K + \lambda_2 (G \setminus K)\big) < 2\varepsilon \cdot \big(\lambda_2 K + \varepsilon\big). \qquad (*)$$

Здесь $\lambda_2 K < +\infty$, так как K компактно. Поэтому из неравенства $\lambda_3^* S < 2\varepsilon \cdot (\lambda_2 K + \varepsilon)$ следует, что $\lambda_3^* S = 0$. По теореме 5.4 множество S измеримо и $\lambda_3 S = 0$. ◊

134. УКАЗАНИЕ. Применить задачу 141.

135. УКАЗАНИЕ. Применить теорему 5.7.

136. РЕШЕНИЕ. Из условия $F \subset V(z,r)$ вытекает неравенство $\lambda F \leqslant \lambda V(z,r)$. По условию еще существует $x \in V(z,r) \setminus F$. Для этого x имеем $\rho(x,z) \leqslant r$ и $x \notin F$. Но F замкнуто. Значит, найдется $\delta > 0$ такое, что $U(x,\delta) \cap F = \varnothing$. Множество

$$G = U(z,r) \cap U(x,\delta)$$

непусто, открыто, содержится в шаре $V(z,r)$ и не пересекается с множеством F. Следовательно,

$$\lambda F < \lambda F + \lambda G = \lambda(F \sqcup G) \leqslant \lambda V(z,r). \ ◊$$

138. УКАЗАНИЕ. Это следует из задачи 69 и из теоремы 5.4.

139. РЕШЕНИЕ. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как

$$\lambda P_1 + \lambda P_2 + \ldots + \lambda P_k + \ldots < +\infty,$$

то найдётся $i \in \mathbb{N}$ такое, что $\lambda P_i + \lambda P_{i+1} + \ldots < \varepsilon$. Из условия (***) следует, что $A \subset P_i \cup P_{i+1} \cup \ldots$. По задаче 138 множество A измеримо и $\lambda A = 0$.

С другой стороны, если $\lambda A = 0,$ то существуют открытые множества $G_j \subset \mathbb{R}^n,$ $j \in \mathbb{N},$ такие, что $A \subset G_j$ и $\lambda G_j < \frac{1}{2^j}.$ Разлагая каждое множество G_j на брусы, получим счётное множество брусов, которое удовлетворяет условиям (*) – (***). ◊

140. РЕШЕНИЕ. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Множества

$$A_k = A \cap V(0,k),\ k \in \mathbb{N},$$

измеримы, ограничены, образуют возрастающую последовательность и $\lambda A = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda A_k$ по задаче 120. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ по теореме 5.5 о регулярности меры Лебега существует замкнутое множество $F_k \subset A_k$ такое, что $\lambda(A_k \setminus F_k) < 1/k.$ Полагая

$$C_k = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k,\ k \in \mathbb{N},$$

получим возрастающую последовательность (C_k) ограниченных замкнутых и, следовательно, компактных множеств таких, что $C_k \subset A_k \subset A.$ Из $\lambda(A_k \setminus F_k) < 1/k$ следует $\lambda(A_k \setminus C_k) < 1/k.$

Докажем, что $\lambda C_k \to \lambda A$ при $k \to \infty.$ Возьмем произвольное $\alpha < \lambda A.$ Поскольку $\lambda A_k \to \lambda A$ при $k \to \infty,$ то $\lambda A_N - \alpha > 0$ для некоторого $N \in \mathbb{N}.$ Пусть $m \in \mathbb{N}$ таково, что $1/m < \lambda A_N - \alpha.$ Если теперь $k \geqslant \max\{m, N\},$ то

$$\lambda C_k = \lambda A_k - \lambda(A_k \setminus C_k) > \lambda A_k - 1/k \geqslant$$

$$\geqslant \lambda A_k - 1/m > \lambda A_k - \lambda A_N + \alpha \geqslant \alpha.$$

Равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda C_k = \lambda A$ доказано. ◊

144. ОТВЕТ. Таковы, например, множества

$$A_k = B \cup \left(\mathbb{R}^n \setminus U(0,k)\right),\ \ k \in \mathbb{N}.$$

146. РЕШЕНИЕ. Пусть $\alpha \neq 0$. По задаче 82 $\lambda^*(\alpha B) = |\alpha|^n \lambda^* B$ для любого $B \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Значит, найдется открытое множество G такое, что $A \subset G$ и $\lambda^*(G \backslash A) < |\alpha|^{-n} \varepsilon$. Тогда $\alpha A \subset \alpha G$ и

$$\lambda^*(\alpha G \setminus \alpha A) = \lambda^*[\alpha(G \backslash A)] = |\alpha|^n \lambda^*(G \backslash A) < \varepsilon.$$

Отсюда и из открытости αG следует, что множество αA измеримо. По задаче 82

$$\lambda(\alpha A) = \lambda^*(\alpha A) = |\alpha|^n \lambda^* A = |\alpha|^n \lambda A. \ \Diamond$$

147. РЕШЕНИЕ. Согласно свойству 2(g) и примеру 6.6 имеем $\lambda(\overline{P} \backslash \operatorname{int} P) = 0$. По теореме 5.4 отсюда и из включения

$$A \backslash \operatorname{int} P \subset \overline{P} \backslash \operatorname{int} P$$

следует, множество $A \backslash \operatorname{int} P$ измеримо и имеет меру 0. Значит, множество $A = \operatorname{int} P \sqcup (A \backslash \operatorname{int} P)$ также измеримо и

$$\lambda A = \lambda(\operatorname{int} P) + \lambda(A \backslash \operatorname{int} P) = \lambda(\operatorname{int} P) = \lambda P. \ \Diamond$$

148. РЕШЕНИЕ. Докажем сначала аналогичное утверждение для конечного семейства брусов. Пусть

$$\operatorname{int} P_1 \sqcup \operatorname{int} P_2 \sqcup \ldots \sqcup \operatorname{int} P_k \subset A \subset \overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_k}. \qquad (*)$$

Множества в (*) ограничены. Поэтому для разности

$$S = \left(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_k}\right) \setminus (\operatorname{int} P_1 \sqcup \operatorname{int} P_2 \sqcup \ldots \sqcup \operatorname{int} P_k) \qquad (**)$$

имеем

$$\lambda S = \lambda\left(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_k}\right) - \lambda(\operatorname{int} P_1 \sqcup \operatorname{int} P_2 \sqcup \ldots \sqcup \operatorname{int} P_k) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \overline{P_1} + \lambda \overline{P_2} + \ldots + \lambda \overline{P_k} - \lambda\left(\operatorname{int} P_1 \sqcup \operatorname{int} P_2 \sqcup \ldots \sqcup \operatorname{int} P_k\right) =$$

$$= \lambda\overline{P_1} + \lambda\overline{P_2} + \ldots + \lambda\overline{P_k} - \lambda(\operatorname{int} P_1) - \lambda(\operatorname{int} P_2) - \ldots - \lambda(\operatorname{int} P_k) = 0,$$

так как $\lambda P_i = \lambda(\operatorname{int} P_i) = \lambda\overline{P_i}$ (см. свойство 2(g) и пример 6.6).

Из (*) следует, что множество A есть объединение открытого множества $G = \operatorname{int} P_1 \sqcup \ldots \sqcup \operatorname{int} P_k$ и множества $A \backslash G$, лежащего во множестве (**) меры 0. Отсюда ясно, что A измеримо и

$$\lambda A = \lambda G = \lambda P_1 + \lambda P_2 + \ldots + \lambda P_k.$$

Для конечного семейства брусов утверждение доказано.

Пусть теперь последовательность брусов P_k, $k \in \mathbb{N}$, и множество $A \subset \mathbb{R}^n$ связаны условием

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{int} P_k \subset A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{P_k}.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $A_k = A \cap F_k$,

$$G_k = \operatorname{int} P_1 \sqcup \operatorname{int} P_2 \sqcup \ldots \sqcup \operatorname{int} P_k, \;\; F_k = \overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_k}.$$

Имеем $G_k \subset A_k \subset F_k$. По первой части доказательства множества A_k измеримы и $\lambda A_k = \lambda P_1 + \lambda P_2 + \ldots + \lambda P_k$. Легко понять, что последовательность (A_k) возрастает и

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots .$$

Следовательно, множество A измеримо и по задаче 120

$$\lambda A = \lim_{k\to\infty} \lambda A_k = \lim_{k\to\infty} (\lambda P_1 + \ldots + \lambda P_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda P_k. \;\Diamond$$

149. УКАЗАНИЕ. Сначала доказать аналогичные утверждения для брусов, для открытых множеств и для внешней меры.

150-151. УКАЗАНИЕ. Это следует из теоремы 5.7 и задачи 146.

152. РЕШЕНИЕ. Из включений

$$U(z,r) \subset V(z,r) \subset U(z,r+\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$, следует, что

$$\lambda U(z,r) \leqslant \lambda V(z,r) \leqslant \lambda U(z,r+\varepsilon).$$

Кроме того,

$$\lambda U(z,r+\varepsilon) = (r+\varepsilon)^n \lambda U(z,1) = \left(\frac{r+\varepsilon}{r}\right)^n \lambda U(z,r).$$

по задаче 150. Таким образом

$$\lambda U(z,r) \leqslant \lambda V(z,r) \leqslant \left(\frac{r+\varepsilon}{r}\right)^n \lambda U(z,r).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $\lambda U(z,r) = \lambda V(z,r)$. Отсюда и из конечности меры $\lambda V(z,r)$ следует, что

$$\lambda S(z,r) = \lambda[V(z,r) \setminus U(z,r)] = \lambda V(z,r) - \lambda U(z,r) = 0. \ \Diamond$$

153-154. УКАЗАНИЕ. Это следует из задачи 152.

155. УКАЗАНИЕ. В противном случае $A-u$, где $u \in A$, лежит во множестве задачи 154 и имеет меру 0.

156. РЕШЕНИЕ. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Используя задачу 151, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda[V(0,1) \setminus V(0,1-\varepsilon)]}{\lambda V(0,1)} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda V(0,1-\varepsilon)}{\lambda V(0,1)} =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^n = 1. \ \Diamond$$

157. УКАЗАНИЕ. Это следует из задач 120, 121, 152 и 153.

158. УКАЗАНИЕ. При $n > 1$ функция φ не является равномерно непрерывной, например, в случае $A = \mathbb{R}^n$. Это следует из задачи 150.

159. РЕШЕНИЕ. Пусть $A=(0,+\infty)\times(0,1)^{n-1}$ и $0<s<t$. Открытое множество $D=A\cap[U(0,t)\setminus V(0,s)]$ непусто и содержится во множестве $A\cap[V(0,t)\setminus V(0,s)]$. Поэтому

$$\varphi(t)-\varphi(s)=\lambda[A\cap V(0,t)]-\lambda[A\cap V(0,s)]= \tag{1}$$

$$=\lambda[A\cap V(0,t)\setminus A\cap V(0,s)]=\lambda\{A\cap[V(0,t)\setminus V(0,s)]\}\geqslant\lambda D>0,$$

так что для $A=(0,+\infty)\times(0,1)^{n-1}$ функция φ строго возрастает.

Полагая $\varphi(0)=\varphi(+0)$, т.е. $\varphi(0)=0$, можем считать, что функция φ определена на $[0,+\infty)$. Докажем, что она равномерно непрерывна. Пусть $0<\varepsilon<1$. Фиксируем $m>1+\sqrt{n}$ так, что $\dfrac{n-1}{m}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

На сегменте $[0,m]$ функция φ равномерно непрерывна. Значит, существует $\delta>0$ такое, что

$$0<\varphi(t)-\varphi(s)<\varepsilon \text{ при } 0\leqslant s<t\leqslant m,\ t-s<\delta. \tag{2}$$

Можем считать, что $0<\delta<\varepsilon/4$. Оценим разность (1) в случае

$$0\leqslant s<t,\ t>m,\ t-s<\delta. \tag{3}$$

Если $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A\cap V(0,t)$, то $x_1>0$ и $0<x_i<1$ для всех $i=2,3,\ldots,n$, так как $x\in A$, и $x_1\leqslant\rho(x,0)\leqslant t$, так как $x\in V(0,t)$. Поэтому

$$A\cap V(0,t)\subset(0,t]\times(0,1)^{n-1}. \tag{4}$$

Если $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A\setminus V(0,s)$, то $x_1>0$, $0<x_i<1$ для всех $i=2,3,\ldots,n$ и

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\rho^2(x,0)>s^2,$$

откуда $x_1^2>s^2-n+1$. Поэтому

$$A \setminus V(0,s) \subset (\sigma_n, +\infty) \times (0,1)^{n-1}, \tag{5}$$

где $\sigma_n = \sqrt{s^2 - n + 1}$. Отметим, что $\sigma_n < s < t$. Из (4) и (5) имеем

$$A \cap V(0,t) \setminus A \cap V(0,s) = A \cap [V(0,t) \setminus V(0,s)] \subset$$

$$\subset \{(0,t] \cap (\sigma_n, +\infty)\} \times (0,1)^{n-1} = (\sigma_n, t] \times (0,1)^{n-1}.$$

Поэтому в случае (3) имеем

$$\varphi(t) - \varphi(s) = \lambda\{A \cap V(0,t) \setminus A \cap V(0,s)\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\{(\sigma_n, t] \times (0,1)^{n-1}\} = t - \sigma_n = t - \sqrt{s^2 - n + 1} =$$

$$= \frac{t^2 - s^2 + n - 1}{t + \sqrt{s^2 - n + 1}} < \frac{t^2 - s^2 + n - 1}{t} =$$

$$= (t-s)\frac{t+s}{t} + \frac{n-1}{t} < (t-s)\frac{t+t}{t} + \frac{n-1}{m} < 2\delta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{6}$$

Итак, для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$0 < \varphi(t) - \varphi(s) < \varepsilon \text{ при } 0 < s < t, \;\; t - s < \delta,$$

причем согласно (2) и (6) это верно как в случае $t \leqslant m$, так и в случае $t > m$. Значит, функция φ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$. ◊

160. РЕШЕНИЕ. Пусть $0 < \varepsilon < \lambda A - \alpha$. По теореме 5.5 найдется замкнутое множество $F \subset A$ такое, что $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$. Имеем $\lambda F > \alpha$, так как иначе возникает противоречие:

$$\lambda A = \lambda F + \lambda(A \setminus F) \leqslant \alpha + \lambda(A \setminus F) < \alpha + \varepsilon < \lambda A.$$

По задаче 157 функция $\varphi(t) = \lambda[F \cap V(0,t)]$ на полуоси $(0, +\infty)$ непрерывна и возрастает от 0 до λF. По теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции найдется $\xi \in (0, +\infty)$ такое, что $\varphi(\xi)=\alpha$. Множество $K = F\cap V(0,\xi)$ компактно, содержится в A и имеет меру $\lambda K=\varphi(\xi)=\alpha$. ◊

161. РЕШЕНИЕ. Обозначим $\beta_k = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда $0<\beta_1<\beta_2<\beta_3<\ldots$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k = \lambda A$. По задаче 157 функция

$$\varphi(t) = \lambda[A\cap V(0,t)]$$

на полуоси $(0,+\infty)$ непрерывна и возрастает от 0 до λA. По теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции найдутся $t_k\in(0,+\infty)$ такие, что

$$\varphi(t_k) = \beta_k \text{ для каждого } k\in\mathbb{N}.$$

Очевидно $0<t_1<t_2<\ldots$. Последовательность множеств

$$B_k = A\cap V(0,t_k),\ k\in\mathbb{N},$$

возрастает и $\lambda B_k = \beta_k<+\infty$. Множества

$$A_1=B_1,\ A_2=B_2\setminus B_1,\ A_3=B_3\setminus B_2,\ \ldots,\ A_k=B_k\setminus B_{k-1},\ \ldots$$

измеримы, попарно не пересекаются и $\lambda A_k=\alpha_k$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Объединение

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

содержится во множестве A и согласно задаче 120 имеет меру

$$\lambda B = \lim_{k\to\infty}\lambda B_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda\alpha_k = \lambda A.$$

Но включение $A\subset B$ пока не обеспечено.

Если $\lambda A<+\infty$, то $\lambda(A\setminus B)=\lambda A-\lambda B_k=0$ и множество $A\setminus B$ можно добавить к любому из множеств A_k. Равенства $\lambda A_k=\alpha_k$ от этого не нарушатся, и мы получим $A\subset B$ и, значит, $A=B$.

Пусть $\lambda A = +\infty$. Тогда $\beta_k \to +\infty$ и $t_k \to +\infty$. Если $x \in A$, то $\| x \| < t_k$ и, следовательно, $x \in B_k \subset B$ для всех достаточно больших k. Поэтому в данном случае сразу $A = B$. ◊

162. РЕШЕНИЕ. По теореме 4.8 существуют замкнутые множества $V_k \subset A_k$ такие, что $\lambda(A_k \setminus V_k) < \varepsilon/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Множества

$$F_k = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k,\ k \in \mathbb{N},$$

замкнуты, образуют убывающую последовательность и $F_k \subset A_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Докажем, что справедливы неравенства

$$\lambda(A_k \setminus F_k) < \varepsilon - \varepsilon/2^k,\ k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Для $k = 1$ это очевидно:

$$\lambda(A_1 \setminus F_1) = \lambda(A_1 \setminus V_1) < \varepsilon/2.$$

Пусть теперь $k \in \mathbb{N}$ и $\lambda(A_k \setminus F_k) < \varepsilon - \varepsilon/2^k$. Выведем отсюда, что

$$\lambda(A_{k+1} \setminus F_{k+1}) < \varepsilon - \varepsilon/2^{k+1}. \tag{2}$$

Сначала докажем, что

$$A_{k+1} \setminus F_{k+1} \subset (A_{k+1} \setminus V_{k+1}) \cup (A_k \setminus F_k). \tag{3}$$

Из определения множеств F_k следует, что

$$F_{k+1} = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k \cap V_{k+1} = F_k \cap V_{k+1}. \tag{4}$$

Пусть $x \in A_{k+1} \setminus F_{k+1}$. Тогда $x \in A_{k+1}$ и $x \notin F_{k+1}$, т.е. по (4), $x \notin F_k$ или $x \notin V_{k+1}$. В случае $x \notin F_k$ имеем $x \in A_{k+1} \setminus F_k \subset A_k \setminus F_k$, так как по условию $A_{k+1} \subset A_k$. В случае $x \notin V_{k+1}$ получим $x \in A_{k+1} \setminus V_{k+1}$. Включение (3) доказано. Из (3) следует, что

$$\lambda(A_{k+1} \setminus F_{k+1}) \leqslant \lambda(A_{k+1} \setminus V_{k+1}) + \lambda(A_k \setminus F_k). \tag{5}$$

По выбору множества $V_{k+1} \subset A_{k+1}$ имеем $\lambda\left(A_{k+1} \setminus V_{k+1}\right) < \varepsilon / 2^{k+1}$. По предположению индукции $\lambda\left(A_k \setminus F_k\right) < \varepsilon - \varepsilon / 2^k$. Отсюда и из (5) вытекает неравенство (2). Тем самым неравенства (1) доказаны. ◊

163. РЕШЕНИЕ. По задаче 160 найдется компакт $K_0 \subset A$ такой, что $0 < \lambda K_0 < \lambda A$. Множество $A \setminus K_0$ измеримо и $\lambda\left(A \setminus K_0\right) > 0$. Применяя еще раз задачу 160, получим компакт $K_1 \subset A \setminus K_0$ такой, что $0 < \lambda K_1 < \lambda\left(A \setminus K_0\right)$. Назовем K_0 и K_1 компактами 1-го ранга. Они не пересекаются, содержатся в A и мера каждого из них > 0. Можем считать, что диаметр каждого из них $< 1/2$.

Используя задачу 160 снова, получим попарно не пересекающиеся компакты 2-го ранга $K_{00}, K_{01}, K_{10}, K_{11}$ диаметра $< 1/4$ такие, что $K_{00} \sqcup K_{01} \subset K_0$, $K_{10} \sqcup K_{11} \subset K_1$ и мера каждого из компактов 2-го ранга > 0. В каждом из компактов $K_{\alpha_1 \alpha_2}$ 2-го ранга найдутся непересекающиеся компакты $K_{\alpha_1 \alpha_2 0}$, $K_{\alpha_1 \alpha_2 1}$ 3-го ранга, имеющие диаметр $< 1/8$ и меру > 0.

Продолжая это рассуждение далее, для каждого $m \in \mathbb{N}$ получим 2^m попарно не пересекающихся компактов $K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ ранга m, каждый из которых имеет диаметр $< 1/2^m$ и меру > 0. При этом

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m 0} \sqcup K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m 1} \subset K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}. \tag{*}$$

Построим теперь инъекцию $h : [0,1) \to A$. Пусть $x \in [0,1)$ и

$$x = 0{,}\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m \alpha_{m+1} \ldots \tag{**}$$

– разложение числа x в двоичную дробь без цифры 1 в периоде. Рассмотрим убывающую последовательность компактов

$$K_{\alpha_1},\ K_{\alpha_1 \alpha_2},\ K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3},\ \ldots,\ K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m},\ \ldots. \tag{***}$$

Пересечение этих компактов состоит из одной точки, которую и обозначим $h(x)$. Получим отображение $h:[0,1)\to A$.

Если изменить число $x\in[0,1)$, то в разложении (**) изменится хотя бы одна цифра. Значит, хотя бы один из компактов (***) заменится другим, с которым он не пересекается. А тогда пересечение компактов (***) изменится и поэтому изменится $h(x)$. Это означает, что $h:[0,1)\to A$ инъекция и, следовательно, $\operatorname{Card} A=\aleph$. ◊

164. РЕШЕНИЕ. Если $\lambda^* A=+\infty$ или $\lambda^* B=+\infty$, то доказывать нечего. Пусть $\lambda^* A<+\infty$, $\lambda^* B<+\infty$ и $\varepsilon>0$. По определению внешней меры найдутся открытые множества G и D такие, что

$$A\subset G,\ \lambda G<\lambda^* A+\varepsilon \text{ и } B\subset D,\ \lambda D<\lambda^* B+\varepsilon.$$

Тогда $A\cup B\subset G\cup D$ и $A\cap B\subset G\cap D$. Поэтому

$$\lambda^*(A\cup B)\leqslant\lambda(G\cup D),\ \lambda^*(A\cap B)\leqslant\lambda(G\cap D).$$

Кроме того, по теореме 5.2

$$\lambda(G\cup D)+\lambda(G\cap D)=$$
$$=\lambda(G\backslash D)+\lambda(D\backslash G)+2\cdot\lambda(G\cap D)=\lambda G+\lambda D.$$

Следовательно,

$$\lambda^*(A\cup B)+\lambda^*(A\cap B)\leqslant\lambda(G\cup D)+\lambda(G\cap D)=$$
$$=\lambda G+\lambda D<\lambda^* A+\lambda^* B+2\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получим нужное неравенство. ◊

165. РЕШЕНИЕ. Пусть $\varepsilon>0$. По определению внешней меры существуют открытые множества $G, D\subset\mathbb{R}^n$ такие, что

$$A\subset G,\ \lambda G<\lambda^* A+\varepsilon,\ K\setminus A\subset D,\ \lambda D<\lambda^*(K\setminus A)+\varepsilon. \qquad (1)$$

Множество $F = K \setminus D$ замкнуто. Докажем, что $F \subset A$. Пусть $x \in F$. Тогда $x \in K$ и $x \notin D$. Поскольку $K \setminus A \subset D$, то $x \notin K \setminus A$. Значит, $x \in A$. Включение $F \subset A$ доказано.

Итак, $F \subset A \subset G$, где F замкнуто, а G открыто. Кроме того,

$$\lambda(G \setminus F) = \lambda G - \lambda F = \lambda G - \lambda(K \setminus D) =$$

$$= \lambda G - \lambda[K \setminus (D \cap K)] = \lambda G - [\lambda K - \lambda(D \cap K)].$$

Используя условие $\lambda K = \lambda^* A + \lambda^*(K \setminus A)$ и неравенства (1), а также неравенство $\lambda(D \cap K) \leqslant \lambda D$, получим

$$\lambda(G \setminus F) = \lambda G - \lambda^* A - \lambda^*(K \setminus A) + \lambda(D \cap K) < 2\varepsilon.$$

Отсюда по теореме 5.5 следует, что множество A измеримо. ◊

166(а). РЕШЕНИЕ. Обозначим

$$\alpha = \sup\{\lambda F\,;\, F \subset A\}.$$

Очевидно $\lambda_* A \leqslant \alpha$. С другой стороны, пусть множество $F \subset A$ замкнуто. Тогда множества

$$K_m = F \cap V(0, m),\ m \in \mathbb{N},$$

компактны, содержатся во множестве A и $\lambda F = \lim\limits_{m \to \infty} \lambda K_m$ по задаче 120. Отсюда

$$\lambda F \leqslant \sup\{\lambda K\,;\, K \subset F\} \leqslant \sup\{\lambda K\,;\, K \subset A\} = \lambda_* A.$$

Переходя к супремуму по всем замкнутым множествам $F \subset A$, получим обратное неравенство $\alpha \leqslant \lambda_* A$. Следовательно, $\alpha = \lambda_* A$. ◊

166(г). РЕШЕНИЕ. Пусть множество A измеримо. По задаче 166(б)

$$\lambda_* A \leqslant \lambda^* A. \tag{*}$$

С другой стороны, пусть $\varepsilon > 0$. По теореме 5.5 о регулярности меры существуют замкнутое множество F_ε и открытое множество G_ε такие, что $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ и $\lambda(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Значит,

$$\lambda^* A \leqslant \lambda G_\varepsilon = \lambda F_\varepsilon + \lambda(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \lambda F_\varepsilon + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \sup\{\lambda F\,;\, F \subset A\} = \varepsilon + \lambda_* A$$

(последнее равенство – по задаче 166(а)). Переходя в неравенстве $\lambda^* A \leqslant \varepsilon + \lambda_* A$ к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим неравенство

$$\lambda^* A \leqslant \lambda_* A. \tag{**}$$

Из (*) и (**) получаем $\lambda_* A = \lambda^* A$. ◊

166(д). РЕШЕНИЕ. Допустим, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и справедливо равенство $\lambda_* A = \lambda^* A$. Тогда $\lambda_* A = \lambda^* A < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению $\lambda^* A$ найдется открытое множество G_ε такое, что $A \subset G_\varepsilon$ и $\lambda G_\varepsilon < \lambda^* A + \varepsilon$. По задаче 166(а) существует замкнутое множество F_ε такое, что $F_\varepsilon \subset A$ и $\lambda_* A - \varepsilon \leqslant \lambda F_\varepsilon$. Отсюда (и из неравенства $\lambda G_\varepsilon < +\infty$) имеем

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \lambda G_\varepsilon - \lambda F_\varepsilon < (\lambda^* A + \varepsilon) - (\lambda_* A - \varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Применяя теорему 5.5, заключаем, что множество A измеримо. ◊

166(ж). РЕШЕНИЕ. Обозначим $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots A_k \sqcup \ldots$. Если $\lambda_* A = +\infty$, то доказывать нечего. Пусть $\lambda_* A < +\infty$. Согласно задаче 166(б) тогда $\lambda_* A_k < +\infty$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По определению $\lambda_* A_k$ найдутся компакты $Q_k \subset A_k$ такие, что

$$\lambda_* A_k - \frac{\varepsilon}{2^k} < \lambda Q_k\,,\ k \in \mathbb{N}.$$

Компакты Q_k также попарно не пересекаются. Множества

$$S_m = Q_1 \sqcup Q_2 \sqcup \ldots \sqcup Q_m,\ m \in \mathbb{N},$$

компактны и лежат во множестве A. Поэтому

$$\lambda_* A \geqslant \lambda_m S = \sum_{k=1}^{m} \lambda Q_k > \sum_{k=1}^{m} \left(\lambda_* A_k - \frac{\varepsilon}{2^k} \right) > \sum_{k=1}^{m} \lambda_* A_k - \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to +\infty$ и затем при $\varepsilon \to +0$, получим требуемое неравенство $\lambda_* A \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_* A_k$. ◊

167. РЕШЕНИЕ. Если $\lambda_*(A \backslash B) = +\infty$ или $\lambda^* B = +\infty$, то $\lambda A = +\infty$ и равенство $\lambda A = \lambda^* B + \lambda_*(A \backslash B)$ справедливо.

Пусть $\lambda_*(A \backslash B) < +\infty$, $\lambda^* B < +\infty$ и $\varepsilon > 0$. По определению внутренней меры $\lambda_*(A \backslash B)$ для некоторого компакта $K \subset A \backslash B$

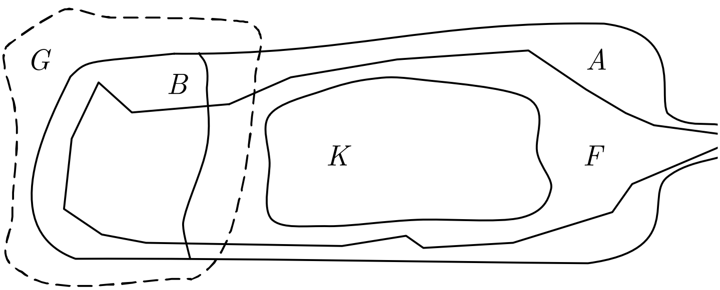

Рис. 1

$$\lambda_*(A \backslash B) - \varepsilon < \lambda K. \tag{1}$$

По определению внешней меры $\lambda^* B$ найдется открытое множество G такое, что $B \subset G$ и (см. рис.1)

$$\lambda G < \lambda^* B + \varepsilon. \tag{2}$$

Можно считать, что $G \cap K = \varnothing$ (иначе заменим G на $G \setminus K$). По теореме 4.8 существует замкнутое множество $F \subset A$ такое, что $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$. Заменяя F на $F \cup K$, можем считать, что $K \subset F$.

Множества

$$K_m = \{K \cup [F \cap V(0, m)]\} \setminus G,\ m \in \mathbb{N},$$

компактны и $K \subset K_m \subset A \setminus G \subset A \setminus B$. Отсюда и из (1) имеем

$$\lambda_*(A \setminus B) - \varepsilon < \lambda K \leqslant \lambda K_m \leqslant \lambda_*(A \setminus B). \tag{3}$$

Последовательность (K_m) возрастает,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = F \setminus G \text{ и } \lambda(F \setminus G) = \lim_{m \to \infty} \lambda K_m \tag{4}$$

по задаче 120. Очевидно

$$A = (A \cap G) \sqcup (F \setminus G) \sqcup [(A \setminus F) \setminus G].$$

Отсюда и из соотношений (2), (3) и (4) вытекает оценка

$$\lambda A = \lambda(A \cap G) + \lambda(F \setminus G) + \lambda[(A \setminus F) \setminus G] \leqslant$$

$$\leqslant \lambda G + \lambda(F \setminus G) + \lambda(A \setminus F) < \lambda G + \lambda(F \setminus G) + \varepsilon <$$

$$< \lambda^* B + \varepsilon + \lim_{m \to \infty} \lambda K_m + \varepsilon \leqslant \lambda^* B + 2\varepsilon + \lambda_*(A \setminus B).$$

С другой стороны, $B \subset A \cap G$ и $K \subset F \setminus G$. Отсюда и из (1) имеем

$$\lambda A \geqslant \lambda(A \cap G) + \lambda(F \setminus G) \geqslant \lambda^* B + \lambda K > \lambda^* B + \lambda_*(A \setminus B) - \varepsilon.$$

Таким образом

$$\lambda^* B + \lambda_*(A \setminus B) - \varepsilon < \lambda A < \lambda^* B + 2\varepsilon + \lambda_*(A \setminus B).$$

Переходя в здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим равенство

$$\lambda A = \lambda^* B + \lambda_*(A \setminus B). \ \Diamond$$

168. РЕШЕНИЕ. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $B \subset \mathbb{R}^n$. Докажем равенство

$$\lambda^* B = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(B \setminus A). \tag{1}$$

По теореме 3.2 справедливо неравенство

$$\lambda^* B \leqslant \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(B \setminus A). \tag{2}$$

В случае $\lambda^* B = +\infty$ отсюда сразу следует равенство (1).

Пусть $\lambda^* B < +\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры существует открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $B \subset G$ и $\lambda G < \lambda^* B + \varepsilon$. Тогда $B \cap A \subset G \cap A$ и $B \setminus A \subset G \setminus A$. Значит,

$$\lambda^*(B \cap A) \leqslant \lambda^*(G \cap A) = \lambda(G \cap A),$$

$$\lambda^*(B \setminus A) \leqslant \lambda^*(G \setminus A) = \lambda(G \setminus A).$$

Кроме того, $\lambda G = \lambda(G \cap A) + \lambda(G \setminus A)$ по теореме 5.2. Поэтому

$$\lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A) \leqslant \lambda(G \cap A) + \lambda(G \setminus A) = \lambda G < \lambda^* B + \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$\lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A) \leqslant \lambda^* B.$$

Отсюда и из (2) следует равенство (1).

Пусть теперь $A \subset \mathbb{R}^n$ и для каждого $B \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство (1). Докажем, что множество A измеримо.

Для каждого $p \in \mathbb{N}$ обозначим $A_p = A \cap I_p$, где $I_p = [-p, p]^n$. Из (1) при $B = I_p$ получим

$$\lambda I_p = \lambda^* I_p = \lambda^*\left(A \cap I_p\right) + \lambda^*\left(I_p \setminus A\right) = \lambda^* A_p + \lambda^*\left(I_p \setminus A_p\right).$$

Согласно задаче 165 отсюда следует, что множество A_p измеримо. По теореме 4.3 множество $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ измеримо. ◊

169. РЕШЕНИЕ. По теореме 3.2 о полуаддитивности внешней меры λ^* имеем неравенство

$$\lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] = \lambda^*[(A \cap C) \sqcup (B \cap C)] \leqslant \lambda^*(A \cap C) + \lambda^*(B \cap C).$$

Обратное неравенство

$$\lambda^*(A \cap C) + \lambda^*(B \cap C) \leqslant \lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] \qquad (1)$$

очевидно при $\lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] = +\infty$.

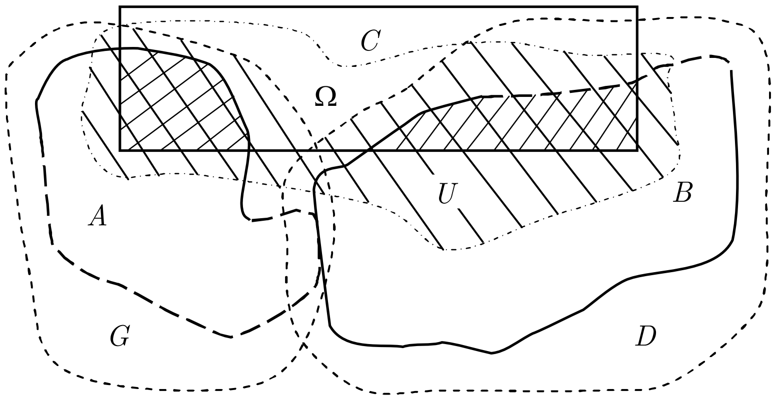

Рис. 2.

Допустим, что $\lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] < +\infty$. Тогда

$$\lambda^*(A \cap C) < +\infty \text{ и } \lambda^*(B \cap C) < +\infty.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу измеримости множеств A и B существуют открытые множества G и $D \subset \mathbb{R}^n$ такие, что

$$A \subset G,\ \lambda(G \backslash A) < \varepsilon,\ \ B \subset D,\ \lambda(D \backslash B) < \varepsilon. \tag{2}$$

По определению λ^* найдется открытое множество Ω такое, что

$$(A \sqcup B) \cap C \subset \Omega,\ \ \lambda\Omega < \lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] + \varepsilon.$$

Обозначим $U = (G \cup D) \cap \Omega$. Множество U открыто,

$$(A \sqcup B) \cap C \subset U \subset \Omega \text{ и } \lambda U \leqslant \lambda\Omega.$$

Кроме того,

$$A \cap C = A \cap [A \cap C] \subset A \cap [(A \sqcup B) \cap C] \subset G \cap U,$$
$$B \cap C = B \cap [B \cap C] \subset B \cap [(A \sqcup B) \cap C] \subset D \cap U$$

и поэтому

$$\lambda^*(A \cap C) + \lambda^*(B \cap C) \leqslant \lambda(G \cap U) + \lambda(D \cap U).$$

Применяя теорему 5.2 и включение $U \subset G \cup D$, получим

$$\lambda(G \cap U) + \lambda(D \cap U) =$$
$$= \lambda[(G \cap U) \cup (D \cap U)] + \lambda[(G \cap U) \cap (D \cap U)] =$$
$$= \lambda[(G \cup D) \cap U] + \lambda(G \cap D \cap U) \leqslant \lambda U + \lambda(G \cap D \cap U).$$

Таким образом,

$$\lambda^*(A \cap C) + \lambda^*(B \cap C) \leqslant \lambda U + \lambda(G \cap D \cap U) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\Omega + \lambda(G \cap D) < \lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] + \varepsilon + \lambda(G \cap D). \tag{3}$$

Докажем включение

$$G \cap D \subset (G \backslash A) \cup (D \backslash B). \tag{4}$$

Пусть $x \in G \cap D$. Тогда $x \in G$ и $x \in D$. Если $x \notin A$, то $x \in G \setminus A$. Если же $x \in A$, то $x \notin B$, ибо по условию $A \cap B = \varnothing$, и $x \in D \setminus B$. В обоих случаях $x \in (G \setminus A) \cup (D \setminus B)$. Включение (4) доказано.

Из (3), (4) и (2) имеем

$$\lambda^*(A \cap C) + \lambda^*(B \cap C) < \lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] + \varepsilon + \lambda(G \cap D) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] + \varepsilon + \lambda(G \setminus A) + \lambda(D \setminus B) <$$

$$< \lambda^*[(A \sqcup B) \cap C] + 3\varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим неравенство (1). ◊

170. РЕШЕНИЕ. Допустим сначала, что множество $B \subset \mathbb{R}^m$ ограничено и лежит в брусе $Q \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию $\lambda_n A = 0$. По задаче 138 найдутся брусы $P_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k < \varepsilon.$$

Брусы $P_k \times Q \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $k \in \mathbb{N}$, покрывают множество $A \times B$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n+m}(P_k \times Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k \cdot \lambda_m Q < \varepsilon \cdot \lambda_m Q.$$

Применяя задачу 138 еще раз, заключаем, что множество $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо и $\lambda_{n+m}(A \times B) = 0$.

Неограниченное множество $B \subset \mathbb{R}^m$ представимо в виде объединения последовательности ограниченных множеств (B_i). По доказанному выше множества $A \times B_i$ измеримы и $\lambda_{n+m}(A \times B_i) = 0$. По теореме 4.3 множество $A \times B = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \times B_i)$ измеримо. По свойству 5(с) справедливо равенство $\lambda_{n+m}(A \times B) = 0$. ◊

171. РЕШЕНИЕ. Если $A=\varnothing$ или $B=\varnothing$, то $A\times B=\varnothing$ и утверждение очевидно. Пусть $A\neq\varnothing$ и $B\neq\varnothing$. По теореме 5.6 существуют убывающие последовательности открытых множеств $G_k\subset\mathbb{R}^n$ и $D_k\subset\mathbb{R}^m$ такие, что

$$A=\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\right)\setminus N_1,\quad B=\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}D_k\right)\setminus N_2, \tag{1}$$

где $\lambda_n N_1=\lambda_m N_2=0$. Можно считать, что $N_1\subset A$ и $N_2\subset B$.

Можно также считать, что $\lambda_n G_1<+\infty$. Действительно, по условию $\lambda_n^* A=\lambda_n A<+\infty$. Значит, найдется открытое множество $U\subset\mathbb{R}^n$ такое, что $A\subset U$ и $\lambda U<\lambda_n^* A+1$. Заменяя каждое G_k множеством $U\cap G_k$, получим убывающую последовательность открытых множеств $G_k\subset\mathbb{R}^n$ таких, что по-прежнему верно первое из равенств (1), но уже все $\lambda_n G_k<+\infty$.

Аналогично можно считать, что все $\lambda_m D_k<+\infty$.

Обозначим $A_1=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$ и $B_1=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}D_k$. Очевидно

$$A_1\times B_1=\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k\times D_k). \tag{2}$$

Множества $G_k\times D_k\subset\mathbb{R}^{n+m}$ открыты (и не пусты). Применяя теоремы 4.2 и 4.7, заключаем, что множество (2) в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ измеримо. По задаче 45 для всех $k\in\mathbb{N}$

$$\lambda_{n+m}(G_k\times D_k)=\lambda_n G_k\cdot\lambda_m D_k<+\infty$$

Последовательность $(G_k\times D_k)$ убывает. По задаче 121

$$\lambda_{n+m}(A_1\times B_1)=\lim_{k\to\infty}\lambda_{n+m}(G_k\times D_k)=\lim_{k\to\infty}(\lambda_n G_k\cdot\lambda_m D_k)=$$

$$= \lim_{k\to\infty}(\lambda_n G_k)\cdot \lim_{k\to\infty}(\lambda_m D_k) = \lambda_n A_1 \cdot \lambda_m B_1.$$

Согласно (1)

$$A_1 \times B_1 = (A \cup N_1) \times (B \cup N_2) =$$
$$= (A \times B) \cup (N_1 \times B) \cup (A \times N_2) \cup (N_1 \times N_2).$$

Из задачи 170 и свойства 5(b) следует, что множество

$$(N_1 \times B) \cup (A \times N_2) \cup (N_1 \times N_2) \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

измеримо и имеет меру 0. Применяя задачу 137, заключаем, что

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_{n+m}(A_1 \times B_1) = \lambda_n A_1 \cdot \lambda_m B_1 = \lambda_n A \cdot \lambda_m B. \ \Diamond$$

172. УКАЗАНИЕ. Это следует из задач 171 и 120.

Литература

1. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.2. – М.: Наука, 1973.

3. *Камке Э.* Интеграл Лебега – Стилтьеса. – М.: Физматгиз, 1959.

4. *Клементьев З.И.* Курс лекций по теории функций действительного переменного. – Томск: 1970.

5. *Лебег А.* Интегрирование и отыскание примитивных функций. – М.-Л.: ГТТИ, 1934.

6. *Медведев Ф.А.* Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1974.

7. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Гостехиздат, 1957; М.: Наука, 1974; СПб. Лань, 1999.

8. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.

9. *Песин И.Н.* Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1966.

10. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980.

11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. V. – М. : Физматгиз, 1959.

12. *Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах. – М.: Физматлит, 2005.

Содержание

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1949 от «30» июня 2016 г. Тираж 100 экз.