Лекции по математическому анализу

Курс лекций 1 семестр

2011

Москва

Лекция 1. Действительные числа и их свойства. Принцип Архимеда. Грани числовых множеств. Теорема существования точных граней.

Перед тем как начать изложение договоримся о некоторых обозначениях. В математических рассуждениях часто встречаются фразы «существует элемент», «любой элемент». Вместо слова «существует» будем писать символ $\exists$ (символ существования), вместо слова «любой» будем писать символ $\forall$ (символ всеобщности). Символ $\Rightarrow$ означает «следует», а символ $\Leftrightarrow$ означает равносильность высказываний. Двоеточие в высказываниях будет обозначать «такой что» или «имеет место».

Под **множеством** мы будем понимать совокупность объектов произвольной природы, обладающих определенным свойством. Множества будем обозначать прописными буквами A, B, X, Y,..., а их элементы – малыми буквами a,b,x,y,.... Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» будем записывать в виде $a \in A$, если же элемент a не принадлежит множеству A, то будем писать $a \notin A$. Если рассматриваются два множества A и B и известно, что все элементы множества B содержатся в множестве A, то B называется **подмножеством** множества A. Этот факт обозначается $B \subset A$. Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то множества A и B называются **равными**. В этом случае пишут A=B. Множество не содержащее ни одного элемента называется **пустым** и обозначается $\varnothing$. Запись $A = \{a, b, c, ..\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c и возможно каких-то других, заданных тем или иным способом. Если множество A состоит из всех элементов, обладающих определенным свойством, то будем писать $A = \{a : ....\}$, где в фигурных скобках после двоеточия записано указанное свойство элементов.

Рассмотрим основные операции над множествами.

Суммой (объединением) двух множеств A и B называется такое множество C, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Обозначение $C = A \cup B$.

Пересечением двух множеств A и B называется такое множество C, которое состоит из элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B. Обозначение $C = A \cap B$.

Разностью $C = A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B.

Упорядоченная пара (x, y) есть множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Две упорядоченные пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают тогда и только тогда когда $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$. **Декартовым произведением** множеств X и Y называется множество $X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$.

Пусть X и Y произвольные множества.

Говорят, что имеется **функция**, определенная на X со значениями в Y **(отображение** множества X в множество Y**)**, если в силу некоторого закона f каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

В этом случае множество X называется областью определения функции, символ x его общего элемента – аргументом функции или независимой переменной. Соответствующий конкретному значению $x_0 \in X$ аргумента x элемент $y_0 \in Y$ называют значением функции на элементе x_0 и обозначают через $f(x_0)$. Для функции примем следующее обозначение $f: X \to Y$.

Образ множества A при отображении f есть множество $f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ для некоторого } x \in X\}$. **Прообраз** множества $B \subset Y$ при отображении f есть множество $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Отображение $f: X \to Y$ называется **инъективным**, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$. Если отображение удовлетворяет условию $f(X) = Y$, то говорят, что f отображает множество X на множество Y, или что f есть **отображение «на»**. Отображение называется **взаимно однозначным**, если оно инъективно и является отображением «на». Пусть $f: X \to Y$ взаимно однозначное отображение, тогда возникает отображение $f^{-1}: Y \to X$, которое определяется следующим образом: $f^{-1}(y) = x$, где $f(x) = y$. Данное отображение определено корректно, т.к. такой элемент x всегда найдется (в силу того, что f отображение «на»), а в силу инъективности такой элемент единственен. Отображение f^{-1} называется **обратным** по отношению к исходному отображению f.

Если отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ таковы, что одно из них (в данном случае g) определено на множестве значений другого (f), то можно построить новое отображение $g \circ f: X \to Z$, значения которого на элементах множества X определяются формулой $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Такое отображение называется **композицией** отображения f и отображения g.

Можно дать более строгое определение функции.

Отношением R называют любое множество упорядоченных пар (x, y). Вместо того, чтобы писать $(x, y) \in R$ пишут xRy. Множество X всех первых элементов упорядоченных пар называют областью определения отношения, а множество Y всех вторых элементов пар называют областью значений отношения R. Если $R \subset X \times X$, то говорят, что отношение задано на X. Пусть X и Y два множества. Определенное на X отношение R называют функциональным (функцией), если из xRy_1 и xRy_2 следует, что $y_1 = y_2$. Т.о. отношение между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ функционально, если для любого элемента $x \in X$ существует и притом единственный элемент $y \in Y$ такой, что xRy. Такое функциональное отношение и есть отображение X в Y.

Множество $\mathbb{R}$ называется **множеством действительных чисел,** а его элементы действительными числами, если выполнены следующие условия:

1. Аксиомы сложения. Определено отображение (операция сложения) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое что

а) существует нейтральный элемент 0 (нуль) такой, что $0 + x = x + 0 = x$ для любого элемента $x \in \mathbb{R}$;

б) для любого $x \in \mathbb{R}$ существует $-x \in \mathbb{R}$, такой что $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

в) ассоциативность $x + (y + z) = (x + y) + z$, для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$;

г) коммутативность $x + y = y + x$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$;

2. Аксиомы умножения. Определено отображение (операция умножения) $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое что

а) существует нейтральный элемент (единица) $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;

б) для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (обратный) такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;

в) ассоциативность $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$;

в) коммутативность $x \cdot y = y \cdot x$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$;

3. Связь сложения и умножения. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$;

4. Аксиомы порядка. Между элементами $\mathbb{R}$ имеется отношение $\leq$ (отношение неравенства) так, что

а) $x \leq x, \ \forall x \in \mathbb{R}$; б) $x \leq y, \ y \leq x \Rightarrow x = y$;

в) $x \leq y, \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$; г) $\forall x, \forall y$ или $x \leq y$ или $y \leq x$.

5. Связь сложения и порядка. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

6. Связь умножения и порядка. Если $0 \leq x, \ 0 \leq y$, то $0 \leq x \cdot y$.

7. Аксиома полноты (непрерывности). Пусть X, Y непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \leq c \leq y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

Заметим, что выражение $a+(-b)$ записывают также $a-b$.

Пример.

$\mathbb{N}=\{1,1+1,1+(1+1),\ldots\}$ - множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ - множество целых чисел (объединение множества натуральных чисел, чисел противоположных натуральным числам и нуля).

$\mathbb{Q}=\{m\cdot n^{-1}: m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел.

Числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

Множество $X\subset\mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху (снизу)**, если существует такое число $c\in\mathbb{R}$, что $x\le c,\ \forall x\in X$ $(c\le x,\ \forall x\in X)$. Если множество ограничено и сверху и снизу, то оно называется **ограниченным**.

Наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество $X\subset\mathbb{R}$ сверху (снизу), называется **точной верхней гранью** (**точной нижней гранью**) множества X и обозначается $\sup X$ или $\sup\limits_{x\in X} x$ ($\inf X$ или $\inf\limits_{x\in X} x$).

Итак, данное определение можно сформулировать следующим образом:

$\alpha=\sup X \Leftrightarrow 1)\ x\le\alpha,\ \forall x\in X;\ 2)\ \forall\varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon\in X:\ x_\varepsilon>\alpha-\varepsilon$.

Аналогично для нижней грани.

Теорема (о существовании верхней грани). Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.

Доказательство. Пусть $X\ne\varnothing$ и $Y=\{y\in\mathbb{R}: x\le y,\ \forall x\in X\}$. По условию $Y\ne\varnothing$. В силу аксиомы полноты существует $c\in\mathbb{R}$ такое, что $x\le c\le y,\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y$. Очевидно, что $c=\sup X$. Если предположить, что существует еще одна нижняя грань c', то должно выполняться $c\le c'$ и $c'\le c$. Поэтому $c'=c$. **Теорема доказана**.

Аналогичная теорема имеет место для нижней грани. Для удобства полагают, если множество не ограничено сверху, то $\sup X=+\infty$, если множество не ограничено снизу, то $\inf X=-\infty$.

Теорема (принцип Архимеда). Каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что $n>a$.

Доказательство. Предположим обратное: $\exists a: \forall n\in\mathbb{N}: n\le a$. Это значит, что число a ограничивает сверху множество натуральных чисел. Поэтому множество натуральных чисел должно иметь верхнюю грань $\beta=\sup\mathbb{N}$. По определению верхней грани для числа

$\beta-1$ должно найтись натуральное число n такое, что $n>\beta-1$. Следовательно, $n+1>\beta$. Причем, по определению натуральных чисел, $n+1\in\mathbb{N}$. Но это является противоречием того, что β является верхней гранью множества натуральных чисел.

Теорема доказана .

Лекция 2. Леммы о вложенных отрезках, о конечном покрытии, о предельной точке. Мощность множества. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность континуума.

Всякую функцию $f:\mathbb{N}\to X$ будем называть **последовательностью** элементов множества X. Значение $f(n)$ называют n-ым членом последовательности и обычно обозначают через x_n. Саму последовательность будем обозначать $\{x_n\}$ или $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - последовательность каких-либо множеств. Если $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$, то говорят, что имеется последовательность **вложенных** множеств.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называются **конечными**. Множества, не являющиеся конечными, называются **бесконечными**.

Любой интервал $(a;b)=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x<b\}$, содержащий данную точку c называется **окрестностью** этой точки. Точка x_0 называется **предельной** точкой множества $M\subset\mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное множество точек множества M.

Лемма (Коши – Кантор, лемма о вложенных отрезках) Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков найдется точка $c\in\mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам. Более того, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует отрезок I_n, длина которого $|I_n|<\varepsilon$, то c единственная общая точка всех отрезков.

Доказательство. Пусть $I_n=[a_n;b_n]=\{x\in\mathbb{R}: a_n\le x\le b_n\}$. Обозначим $X=\{a_n\},\ Y=\{b_n\}$. Проверим, что $a_m\le b_n,\ \forall m,n\in\mathbb{N}$. Действительно, предположим, что существуют такие $m,n\in\mathbb{N}$, что $a_m>b_n$. Тогда $b_m\ge a_m>b_n\ge a_n$. И мы получаем, что отрезки I_m и I_n не пересекаются, что не может быть по условию. Таким образом, в силу аксиомы полноты, существует число $c\in\mathbb{R}$ такое, что $a_m\le c\le b_n,\ \forall m,n\in\mathbb{N}$. В частности $a_n\le c\le b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Итак, $c\in I_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Предположим теперь, что существуют $c_1,c_2\in\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ и $c_1<c_2$. Тогда имеем $a_n\le c_1<c_2\le b_n \Rightarrow 0<c_2-c_1\le b_n-a_n,\ \forall n$. Т.е. длина каждого отрезка не может быть меньше положительной величины c_2-c_1. Но это не может быть, если в системе отрезков есть отрезки сколь угодно малой длины. **Лемма доказана**.

Множества, элементы которых суть множества, называются семействами или классами множеств, а их элементы – членами или элементами семейства. Индексированное семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ - это есть функция, ставящая в соответствие каждому $\alpha \in S$ множество A_s. Объединение и пересечение семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ обозначаются соответственно $\bigcup\limits_{\alpha\in S} X_\alpha$, $\bigcap\limits_{\alpha\in S} X_\alpha$.

Говорят, что семейство $S=\{X_\alpha\}$ множеств X_α **покрывает** множество Y, если $Y \subset \bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha$. Подмножество множества $S=\{X_\alpha\}$ называется подсемейством.

Лемма (Борель-Лебег). В любом семействе интервалов, покрывающем отрезок, есть подсемейство, покрывающая этот отрезок.

Доказательство. Пусть S произвольное семейство интервалов, покрывающее данный отрезок $[a;b]$. Введем обозначение:

$M=\{x\in[a;b]:\ [a;x]$ *покрывается конечной подсистемой системы* $S\}$.

Очевидно, что $M \neq \varnothing$ поскольку точка $a \in M$. Пусть $\xi = \sup M$. Так как $M \subset [a;b]$, то $a \le \xi \le b$. Покажем, что $\xi = b$. В самом деле, точка $\xi \in (x';x'') \in S$. По определению верхней грани, существует точка $x \in M$, такая что $x > x'$. Следовательно, отрезок $[a;x]$ покрыт конечной подсистемой $S_x = \{\Delta_1,\dots,\Delta_p\}$ системы S. Тогда семейство интервалов $S_\xi = \{\Delta_1,\dots,\Delta_p,\Delta\}$ покрывает отрезок $[a;\xi']$, где ξ' любая точка из интервала (ξ, x''). Таким образом, $\xi' > \xi$ является точкой множества M, если только $\xi' \in [a;b]$. Но это лишь в том случае совместимо с определением точки ξ, если $\xi = b$. **Теорема доказана**.

Лемма (Больцано-Вейерштрасса). Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

Доказательство. Пусть M бесконечное ограниченное множество. Так как оно ограничено, то оно ограничено снизу некоторым числом a и сверху некоторым числом b. Следовательно, $M \subset [a;b]$. Докажем, что на отрезке $[a;b]$ найдется предельная точка множества M. Предположим, что это не так. Тогда для любого $x\in[a;b]$ существует окрестность U_x содержащая не более конечного числа точек множества M. Семейство окрестностей $\{U_x\}_{x\in[a;b]}$ образует покрытие отрезка $[a;b]$. По лемме Бореля-Лебега существует конечное подсемейство $\{U_{x_1},\dots,U_{x_n}\}$ также покрывающая отрезок $[a;b]$. Следовательно, это подсемейство покрывает и множество M. Но так как каждая из окрестностей семейства содержит не более конечного числа точек из M и таких окрестностей конечное число, то и множество M должно быть конечным. Полученное противоречие доказывает теорему. **Теорема доказана**.

Пусть X произвольное множество и $R \subset X \times X$. Отношение R называется **отношением эквивалентности** на множестве X, если для всех x, x', x'' из множества X выполняются следующие условия:

1. рефлексивность: xRx;

2. симметричность: $xRx' \Rightarrow x'Rx$;

3. транзитивность: $xRx',\ x'Rx'' \Rightarrow xRx''$.

Отношение эквивалентности обозначается символом ~. Множество $\bar{x} = \{x' \in X:\ x' \sim x\}$ называется классом эквивалентности, содержащим x. Любой элемент $x' \in \bar{x}$ называется представителем класса $\bar{x}$.

Утверждение. Множество классов эквивалентности по отношению ~ является разбиением множества X, т.е. X является объединением непересекающихся подмножеств (которые и есть классы эквивалентности).

Доказательство. Так как $x \in \bar{x}$, то $X = \bigcup_{x \in X} \bar{x}$. Если $x \sim x'$, то $\bar{x} = \bar{x}'$. Действительно, если $x'' \in \bar{x} \Rightarrow x'' \sim x \Rightarrow x'' \sim x' \Rightarrow x'' \in \bar{x}' \Rightarrow \bar{x} \subset \bar{x}'$. С другой стороны, $x \sim x' \Rightarrow x' \sim x \Rightarrow \bar{x}' \subset \bar{x}$. Таким образом, $\bar{x} = \bar{x}'$. Следовательно, если $\bar{x}' \cap \bar{x}'' \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in \bar{x}' \cap \bar{x}'' \Rightarrow x \sim x', x \sim x'' \Rightarrow \bar{x}' = \bar{x} = \bar{x}''$. Таким образом, различные классы не пересекаются. **Утверждение доказано**.

Множество X называется **равномощным** (пишем $X \sim Y$) множеству Y, если существует взаимно однозначное отображение $f: X \to Y$. Так как обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$, очевидно, также взаимно однозначно и композиция двух взаимно однозначных отображений также взаимно однозначно, то введенное отношение $X \sim Y$ является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности, которому принадлежит данное множество называется **мощностью** этого множества. Если $X \sim \mathbb{N}$, то оно называется счетным.

Теорема. Множество рациональных чисел является счетным.

Доказательство. Всякое рациональное число можно записать в виде $r = \frac{p}{q},\ q > 0$ и дробь будем считать несократимой. Число 0 будем считать записанным одним способом $0 = \frac{0}{1}$. Назовем число $h = |p| + q$ высотой рационального числа $\frac{p}{q}$. Очевидно, что рациональных чисел, имеющих данную высоту только конечное число. Будем нумеровать натуральными числами рациональные числа по возрастанию высоты, т.е. сперва занумеруем рациональные числа высоты 1. Такое число только одно: 0. Затем занумеруем рациональные числа высоты 2. Таких чисел два: $1 = \frac{1}{1},\ -1 = \frac{-1}{1}$. Затем занумеруем числа высоты 3 и т.д. Ясно, что при этом мы установим между всеми рациональными числами и всеми натуральными числами взаимно однозначное соответствие, т.е. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. Следующая таблица иллюстрирует устанавливаемое взаимно однозначное соответствие. **Теорема доказана**

$h=1$: $0/1$

$h=2$: $1/1;\ -1/1$

$h=3$: $2/1;\ 1/2;\ -2/1;\ -1/2;$

$h=4$: $3/1;\ 1/3;\ -3/1;\ -1/3;$

…

$1;$

$2;3;$

$4;5;6;7;$

$8;9;10;11;$

….

Теорема. Множество точек отрезка [0;1] несчетно.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда все числа отрезка можно занумеровать: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Возьмем точку x_1 и на отрезке $I_0=[0;1]$ фиксируем отрезок ненулевой длины, не содержащий точку x_1. В отрезке I_1 фиксируем отрезок, не содержащий точку x_2. Пусть построены отрезки $I_0, I_1, \ldots, I_n$. Так как длина $|I_n|>0$, то фиксируем отрезок $I_{n+1}\subset I_n$, не содержащий точку x_{n+1}. В результате получим семейство вложенных отрезков. По лемме о вложенных отрезках, существует точка c, принадлежащая всем этим отрезкам. Но эта точка, по построению не может совпасть ни с одной из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и должна принадлежать отрезку I_0. Противоречие. **Теорема доказана**.

Множество равномощное множеству точек отрезка [0;1] называется множеством **мощности континуума**[1].

Лемма. Интервал (0;1) имеет мощность континуума.

Доказательство. Установим взаимно однозначное отображение [0;1]→(0;1). Выберем на отрезке [0;1] подмножество точек {1/2, 1/3,…, 1/n,…}. Поставим в соответствие: f(0)=1/2; f(1)=1/3; f(1/2)=1/4;…;f(1/n)=1/(n+2);…. Если $x\notin M$, то положим f(x)=x. В результате мы установим взаимно однозначное отображение f: [0;1]→(0;1). **Лемма доказана**.

Следствие. Множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.

Доказательство. $f(x)=tg(-\frac{\pi}{2}+x\pi)$ - это взаимно однозначное отображение интервала (0;1) на $\mathbb{R}$. **Следствие доказано**.

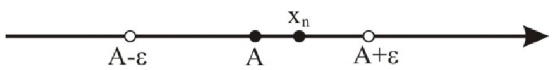
[1] Числовая прямая называется арифметическим континуумом («continuum» непрерывный), поэтому и мощность называется мощностью континуума.

Лекция 3. Предел последовательности. Общие свойства пределов. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.

Число A будем называть **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n > n_\varepsilon$ имеем $|x_n - A| < \varepsilon$. В этом случае будем писать $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и говорить, что последовательность **сходится** (**стремится**) к A. Можно также писать $x_n \to A$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**, а последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**.

Итак,

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - A| < \varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon$$



Так как $|x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, то из определения следует, что любая окрестность предела последовательности содержит все члены этой последовательности, за исключением конечного их числа.

Последовательность, принимающую только постоянное значение, будем называть постоянной. Очевидно, что, если $x_n = A,\ \forall n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Теорема. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим, что их два, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B,\ A \neq B$. Допустим, что $A < B$. Пусть $r = \dfrac{A+B}{2}$. Тогда

$$\text{для } \varepsilon_1 = r - A = \frac{B-A}{2} > 0\ \exists n_1 : |x_n - A| < \varepsilon_1,\ \forall n > n_1 \Rightarrow x_n < r,\ \forall n > n_1.;$$

$$\text{для } \varepsilon_1 = B - r = \frac{B-A}{2} > 0\ \exists n_2 : |x_n - B| < \varepsilon_2,\ \forall n > n_2 \Rightarrow x_n > r,\ \forall n > n_2.$$

Следовательно, если мы возьмем любое $n > \max(n_1, n_2)$, то должны одновременно выполняться неравенства $x_n < r,\ x_n > r$, что не возможно. **Теорема доказана**.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует число M>0 такое, что

$$|x_n| < M,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $A=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда для $\varepsilon=1$ существует n_0 такой, что при всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-A|<\varepsilon$. Отсюда $|x_n|\le|x_n-A|+|A|<|A|+1,\ n=n_0+1,\dots$. Выберем $M>\max\{|x_1|,\dots,|x_{n_0}|,|A|+1\}$. Тогда при всех n имеем $|x_n|\le M$. **Теорема доказана**.

Теорема. Если $x_n=c\in\mathbb{R},\ n=1,2,\dots$ (последовательность **стационарна**), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$.

Доказательство очевидное.

Теорема. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$. Тогда

1. Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=A+B$;

2. Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$;

3. Если $y_n\ne 0,\ \forall n,\ B\ne 0$, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

Доказательство. Докажем пункт 3, как наиболее сложный. Так как $B\ne 0$, то для $\varepsilon=\dfrac{|B|}{2}>0$ существует $n_1\in\mathbb{N}:\ |y_n-B|<\dfrac{|B|}{2},\ n>n_1$. Следовательно,

$$|y_n|=|(y_n-B)+B|\ge|B|-|y_n-B|\ge\frac{|B|}{2}>0,\ \forall n>n_1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$, то для числа $\dfrac{\varepsilon}{|A|+|B|}\cdot\dfrac{|B|^2}{2}$ существуют $n_2\in\mathbb{N}$ и $n_3\in\mathbb{N}$ такие, что при $\forall n>n_2\Rightarrow|x_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{|A|+|B|}\cdot\dfrac{|B|^2}{2}$ и при $\forall n>n_3\Rightarrow|y_n-B|<\dfrac{\varepsilon}{|A|+|B|}\cdot\dfrac{|B|^2}{2}$. Следовательно, при любом $n>n_\varepsilon=\max\{n_1,n_2,n_3\}$ будет выполнено неравенство:

$$\left|\frac{A}{B}-\frac{x_n}{y_n}\right|=\frac{|A(y_n-B)-B(x_n-A)|}{|B||y_n|}\le\frac{|A||y_n-B|+|B||x_n-A|}{|B||y_n|}<\frac{|A|+|B|}{\left(\dfrac{|B|^2}{2}\right)}\cdot\frac{\varepsilon}{|A|+|B|}\cdot\frac{|B|^2}{2}=\varepsilon.$$

Итак, **Теорема доказана**.

Теорема (переход к пределу в неравенствах). Пусть $\{x_n\},\{y_n\}$ две сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$. Если $A<B$, то найдется номер n_0 такой, что при любом $n>n_0$ выполнено неравенство $x_n<y_n$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$. Тогда

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow \left|x_n - A\right| < \frac{B-A}{2} \Rightarrow x_n < \frac{B+A}{2};$$
$$\exists n_2 : \forall n > n_2 \Rightarrow \left|x_n - B\right| < \frac{B-A}{2} \Rightarrow y_n > \frac{B+A}{2}.$$

Следовательно, если $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то при $n > n_0$ выполнено неравенство:

$$x_n < \frac{A+B}{2} < y_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ и $x_n \le y_n$ при $n > n_1$. Тогда $A \le B$.

Теорема (о промежуточной последовательности). Пусть последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ таковы, что $x_n \le y_n \le z_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Если последовательности $\{x_n\}, \{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ сходится к тому же пределу.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow \left|x_n - A\right| < \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < x_n < \varepsilon + A;$$
$$\exists n_2 : \forall n > n_2 \Rightarrow \left|z_n - B\right| < \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon;\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) \Rightarrow A - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < \varepsilon + A \Rightarrow \left|y_n - A\right| < \varepsilon$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \sqrt[n]{n}$. Имеем по биному Ньютона

$$n = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + (n^{\frac{1}{n}} - 1)\right)^n 1 + n \cdot (n^{\frac{1}{n}} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(n^{\frac{1}{n}} - 1)^2 + \ldots \ge \frac{n(n-1)}{2}(n^{\frac{1}{n}} - 1)^2;$$
$$0 \le \frac{n(n-1)}{2}(n^{\frac{1}{n}} - 1)^2 \le n;$$
$$0 \le n^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

Отсюда, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} = 0$, то, по теореме о промежуточной последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Теорема (критерий Коши существования предела). Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon \qquad (*)$$

(последовательность, удовлетворяющая условию (*), называется фундаментальной).

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда существует n_ε, что при всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $n, m > n_\varepsilon$. Тогда

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},\ |x_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Т.о. последовательность фундаментальна.

Обратно, пусть теперь последовательность фундаментальна. Тогда для $\varepsilon = 1$ существует n_1 такой, что при любых $n, m > n_1$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$. Отсюда для $m = n_1 + 1$ и любого $n \ge n_1 + 1$ выполняется неравенство $|x_n - x_{n_1+1}| < 1$. Следовательно, выполняется неравенство $|x_n| \le |x_n - x_{n_1+1}| + |x_{n_1+1}| < |x_{n_1+1}| + 1$. Если положить $M = \max\left(|x_{n_1+1}| + 1, |x_1|, \ldots, |x_{n_1}|\right)$, то при всех натуральных n будет выполнено неравенство $|x_n| \le M$. Следовательно, последовательность ограничена.

Обозначим $\alpha_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, $\beta_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Тогда, поскольку $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \supset \{x_{n+1}, \ldots\}$, то $\alpha_n \le \alpha_{n+1} \le \beta_{n+1} \le \beta_n$ т.к. число, ограничивающее сверху большее множество, ограничивает сверху и меньшее, а число, ограничивающее снизу большее множество, ограничивает снизу и меньшее множество.

По лемме о вложенных отрезках существует число $A \in [\alpha_n; \beta_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда имеют место неравенства: $\alpha_n \le A \le \beta_n$, $\alpha_n \le x_k \le \beta_n$, $k = n, n+1, \ldots$. Поэтому

$$|A - x_k| \le \beta_n - \alpha_n,\quad k = n, n+1, \ldots.$$

Из фундаментальности последовательности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow\ x_{n_\varepsilon+1} - \frac{\varepsilon}{3} < x_n < \frac{\varepsilon}{3} + x_{n_\varepsilon+1}$. Но тогда $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_{n_\varepsilon+1} - \frac{\varepsilon}{3} \le \alpha_n \le \beta_n \le x_{n_\varepsilon+1} + \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, $\beta_n - \alpha_n \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon$. Но тогда и $|A - x_n| \le \beta_n - \alpha_n < \varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon$. Таким образом, $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. **Теорема доказана**.

Последовательность $\{x_n\}$ будем называть **бесконечно малой** последовательностью, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Если для любого числа $\mathrm{E} > 0$ существует натуральное число n_E такое, что при всех $n > n_\mathrm{E}$ выполняется неравенство $|x_n| > \mathrm{E}$, то последовательность x_n называется **бесконечно большой**. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность стремится к бесконечности. Аналогично,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n > \varepsilon;$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n < -\varepsilon.$$

(в первом случае говорят, что последовательность стремится к плюс бесконечности, а во втором к минус бесконечности). Последовательности, стремящиеся к бесконечности, мы не считаем сходящимися.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty,\ |a| > 1$.

Действительно, возьмем произвольное число $\mathrm{E} > 0$ и рассмотрим неравенство $|a^n| > E \Leftrightarrow |a|^n > E \Leftrightarrow n\ln|a| > \ln E \Leftrightarrow n > \frac{\ln E}{\ln|a|}$. Здесь использовано, то, что $|a| > 1$ поэтому $\ln|a| > 0$. По принципу Архимеда $\exists n_E \in \mathbb{N} : n_E > \frac{\ln E}{\ln|a|}$. Отсюда при любом $n > n_E \Rightarrow n > \frac{\ln E}{\ln|a|} \Leftrightarrow |a^n| > E$.

Теорема. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность, а $\{y_n\}$ ограниченная последовательность, то $\{x_n \cdot y_n\}$ является бесконечно малой.

Доказательство. Имеем

$$\exists M > 0 : |y_n| \le M,\ \ n = 1, 2, \dots$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Отсюда $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. **Теорема доказана**.

Теорема. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно малой.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow\ \left|\dfrac{1}{x_n}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Отсюда следует, что $|x_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **Теорема доказана**.

Аналогично доказывается

Теорема. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно большой.

Теорема.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right) = +\infty$.
2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right) = -\infty$.
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

Доказательство. Докажем, например 3. Возьмем любое число $\mathrm{E} > 0$. Тогда существует натуральное число n_1 такое, что при любом $n > n_1$ имеет место $|x_n| > \dfrac{2\cdot\mathrm{E}}{|A|}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \neq 0$, то существует натуральное число n_2:

$$\left|y_n - A\right| < \frac{A}{2},\ \forall n > n_2 \Rightarrow |y_n| \geq |A| - \left|y_n - A\right| > \frac{|A|}{2}.$$

Следовательно, при $\forall n > \max\left(n_1, n_2\right)$ имеет место $|x_n y_n| > \dfrac{2\cdot\mathrm{E}}{|A|}\dfrac{|A|}{2} = \mathrm{E}$. **Теорема доказана**.

Лекция 4. Монотонные последовательности. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательностей.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей** (**невозрастающей, убывающей, возрастающей**), если для всех номеров $n=1,2,\ldots$ выполняется неравенство $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n \ge x_{n+1},\ x_n > x_{n+1},\ x_n < x_{n+1})$. Последовательность называется **монотонной**, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей, либо убывающая, либо возрастающая.

Теорема (Вейерштрасс). Для того чтобы неубывающая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху.

Доказательство. По свойству сходящихся последовательностей, если последовательность имеет предел, то она ограничена, следовательно, ограничена и сверху. Обратно, пусть неубывающая последовательность ограничена сверху. Тогда множество $\{x_n\}$ имеет верхнюю грань $\alpha = \sup\{x_n\}$ Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. По определению верхней грани, существует натуральное число n_ε такое, что $x_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$. Отсюда, в силу неубывания последовательности, имеем $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \alpha + \varepsilon > \alpha \ge x_n \ge x_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$. Таким образом, $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$. Следовательно, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. **Теорема доказана**.

Рассмотрим следующую последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Докажем что эта последовательность имеет предел.

Лемма. Имеет место неравенство $(1+\alpha)^n \ge 1 + n\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > -1$.

Доказательство. При n=1 неравенство, очевидно, выполняется. Предположим, что это неравенство верно для всех натуральных чисел $\le n$. Тогда

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n (1+\alpha) \ge (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \ge 1 + (n+1)\alpha .$$

Лемма доказана.

Пусть $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Докажем, что последовательность убывает. Имеем

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n^{2n+1}}{\left(n^2-1\right)^n\left(n+1\right)}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1}\geq\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n-\frac{1}{n}}\right)\frac{n}{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1}=1$$

Таким образом, $y_{n-1}>y_n>0$, следовательно, последовательность убывает и ограничена снизу. Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

Обозначим $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Пусть $\{x_n\}$ произвольная последовательность и $n_1<n_2<\ldots$ возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $x_{n_1},x_{n_2},\ldots$ называется **подпоследовательностью** данной последовательности $\{x_n\}$.

Лемма (Больцано-Вейерштрасс). Каждая ограниченная последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ данная последовательность, а E множество значений данной последовательности.

1. E бесконечно. Тогда у этого множество есть предельная точка x. Рассмотрим последовательность $1/n$, $n=1,2,\ldots$. По определению предельной точки окрестность $\left(x-1;x+1\right)$ содержит бесконечно много точек множества E. Выберем одну из них, пусть это будет x_{n_1}. Аналогично окрестность $\left(x-\frac{1}{2};x+\frac{1}{2}\right)$ содержит бесконечное множество точек множества E, поэтому всегда можно найти точку x_{n_2}, $n_2>n_1$, принадлежащую этой окрестности. Предположим, что найдены члены последовательности $x_{n_1},\ldots,x_{n_k}$, удовлетворяющие условию $\left|x-x_{n_j}\right|<\frac{1}{j},\ j=1,2,\ldots,k,\ n_j<n_{j+1},\ j=1,2,\ldots,k-1$. Тогда окрестность $\left(x-\frac{1}{k+1};x+\frac{1}{k+1}\right)$ содержит бесконечное множество точек множества E, поэтому всегда можно выбрать $x_{n_{k+1}}$, $n_{k+1}>n_k$. Итак, продолжая построение, мы найдем подпоследовательность исходной

последовательности такую, что $0 \le \left| x - x_{n_k} \right| < \frac{1}{k}, \; k = 1, 2, \ldots$. По теореме о промежуточной последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

2. E конечное множество. Тогда (для бесконечного множества индексов выполняется $x_n = x$) существует ходя бы один элемент $x \in E$ такой, что $x_{n_k} = x, \; k = 1, 2, \ldots, \; n_k < n_{k+1}$. В этом случае $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. **Лемма доказана**.

Заметим, что, если последовательность не является ограниченной, то из нее можно извлечь подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. Действительно, для любого натурального k можно выбрать n_k такой, что $\left| x_{n_k} \right| > k$. В этом случае $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$. Таким образом, имеет место

Лемма. Из каждой последовательности действительных чисел можно извлечь сходящуюся подпоследовательность или подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.

Условимся верхней гранью неограниченного сверху множества называть $+\infty$, а нижней гранью неограниченного снизу множества называть $-\infty$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} \{x_k\}$ будем называть **нижним** пределом последовательности $\{x_n\}$ и обозначать $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} \{x_k\}$ будем называть **верхним** пределом последовательности $\{x_n\}$ и обозначать $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Пример. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$. Найдем верхний и нижний пределы.

Решение. Имеем $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} + 1, \; n = 2k; \\ -\frac{1}{n}, \; n = 2k+1 \end{cases}$. Поэтому

Имеем для четного n

$$\{x_k\}_{k\ge n} = \{\frac{1}{n} + 1, -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2} + 1, \ldots\}.$$

Для нечетного n

$$\{x_k\}_{k\ge n} = \{-\frac{1}{n}; \frac{1}{n+1} + 1; \ldots\}.$$

$$\inf_{k\ge n} x_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{n},\ n = 2k+1; \\ -\dfrac{1}{n+1},\ n = 2k \end{cases} \qquad \sup_{k\ge n} x_k = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n},\ n = 2k; \\ 1+\dfrac{1}{n+1},\ n = 2k+1. \end{cases}$$

Таким образом, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, а $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$.

Пример. $x_n = (-1)^n n$. Найдем верхний и нижний пределы.

Имеем для четного n

$$\{x_k\}_{k\ge n} = \{n, -(n+1), n+2, \dots\}.$$

Для нечетного n

$$\{x_k\}_{k\ge n} = \{-n, n+1, -(n+2), \dots\}.$$

Поэтому $\inf\limits_{k\ge n} x_k = -\infty$ $\sup\limits_{k\ge n} x_k = +\infty$. Следовательно, последовательность имеет бесконечные верхний и нижний пределы.

Пределы подпоследовательностей данной последовательности будем называть ее **частичными** пределами.

Теорема. Нижний и верхний пределы ограниченной последовательности являются соответственно ее наименьшим и наибольшим из ее частичных пределов.

Доказательство. Пусть $\alpha_n = \inf\limits_{k\ge n}\{x_k\}$. Тогда $\alpha_n \le \alpha_{n+1},\ n = 1, 2, \dots$ и $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \Rightarrow \alpha_n \le \alpha$. Отметим следующие свойства числа α.

(1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n > \alpha - \varepsilon$.

Действительно, так как $\alpha_n \le \alpha,\ n = 1, 2, \dots$ и $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, то существует n_ε, что при $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha_n \le \alpha$. Отсюда, по определению нижней грани, $\forall k \ge n \Rightarrow x_k \ge \alpha_n > \alpha - \varepsilon$. Таким образом, действительно $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n > \alpha - \varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall m\ \exists n > m :\ x_n < \alpha + \varepsilon$

Действительно, так как $\alpha_m \le \alpha_{m+1} \le \alpha$, то, по определению нижней грани, существует $n \ge m+1$ такой, что $x_n < \alpha + \varepsilon$.

Теперь построим подпоследовательность, сходящуюся к α. Положим $n_1 = 1$ и допусти, что номера $n_1 = 1 < n_2 < \dots < n_k$ уже выбраны так, что $\left|x_{n_m} - \alpha\right| < \dfrac{1}{m},\ m = 1, 2, \dots, k$. По свойству (1) для числа $\varepsilon = \dfrac{1}{k+1}$ выберем номер $n_{1/(k+1)}$ такой что $\forall n > n_{1/(k+1)} \Rightarrow x_n > \alpha - \dfrac{1}{k+1}$. По свойству (2) для числа $\varepsilon = \dfrac{1}{k+1}$ и $\max(n_k, n_{1/(k+1)})$ выберем $n_{k+1} > \max(n_k, n_{1/(k+1)})$ так, чтобы $x_{n_{k+1}} < \alpha + \dfrac{1}{k+1}$. Таким образом, $\left| x_{n_{k+1}} - \alpha \right| < \dfrac{1}{k+1}$. Следовательно, мы получаем подпоследовательность, удовлетворяющую условию $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. Т.е. α является частичным пределом последовательности. Более того, это будет наименьший из частичных пределов. Так как в силу свойства (1) ни один из частичных пределов не может быть меньше чем $\alpha - \varepsilon$ для произвольного числа ε. Но это означает, что ни один из частичных пределов не может быть меньше α. **Теорема доказана**.

Следствие. Последовательность имеет предел или стремится к минус или плюс бесконечности тогда и только тогда, когда нижний и верхний пределы последовательности совпадают.

Это очевидное следствие неравенства $\alpha_n = \inf\limits_{k\ge n} x_k \le x_n \le \sup\limits_{k\ge n} x_k = \beta_n$ и теоремы о промежуточной последовательности.

Лекция 5. Предел функции

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и a предельная точка множества X, функция $f : X \to \mathbb{R}$. Введем следующие обозначения:

$U(a)$ - окрестность точки a, т.е. произвольный интервал, содержащий точку a;

$U_\delta(a) = (a-\delta; a+\delta)$ - δ - окрестность точки a;

$\overset{\circ}{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$; $\overset{\circ}{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$ - проколотые окрестности точки a;

Определение (Коши). Число A называется пределом функции f при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in E,\ 0 < |x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае говорят также, что функция стремится к A при x, стремящемся к a и пишут $f(x) \to A$ при $x \to a,\ x \in E$ или $A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$. Если функция f определена на всей окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$, то пишут кратко $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Это же определение можно переписать в терминах окрестностей:

$$A = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) \Leftrightarrow \forall U(A)\ \exists \overset{\circ}{U}(a)\ :\ f(\overset{\circ}{U}(a) \cap E) \subset U(A).$$

Теорема (эквивалентность определений по Коши и по Гейне). Число A является пределом функции f при x, стремящемся к a, тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in E \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}\ : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Для $U_\varepsilon(A)$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E) \subset U_\varepsilon(A)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для найденного δ существует $n_{\delta(\varepsilon)}:\ \forall n > n_{\delta(\varepsilon)} \Rightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E$. Тогда $f(x_n) \in U_\varepsilon(A) \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$.

Обратно, пусть для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in E \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A. Предположим, что $A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E \Rightarrow |f(x) - A| \ge \varepsilon.$$

Положим $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ и для каждого n найдем точку $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{n}}(a) \cap E:\ |f(x_n) - A| \ge \varepsilon$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \ne A$. Противоречие. **Теорема доказана**.

Теорема. Если существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$, то он единственный.

Доказательство. Пусть $A_1 = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$ и $A_2 = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$ и $A_1 \neq A_2$. Выберем непересекающиеся окрестности $U(A_1), U(A_2)$ точек A_1, A_2. По определению предела, существуют окрестности

$$\overset{\circ}{U}(a), \overset{\circ}{W}(a)\ :\ f(\overset{\circ}{U}(a)\cap E)\subset U(A_1),\quad f(\overset{\circ}{W}(a)\cap E)\subset U(A_2).$$

Тогда, должно выполняться

$$f(\overset{\circ}{U}(a)\cap\overset{\circ}{W}(a)\cap E)\subset U(A_1),\quad f(\overset{\circ}{U}(a)\cap\overset{\circ}{W}(a)\cap E)\subset U(A_2),$$

что не возможно. **Теорема доказана**.

Теорема. Если существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$, то существует окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ такая, что функция f ограничена на $\overset{\circ}{U}(a)\cap E$, т.е. существует число M>0, что $\forall x\in\overset{\circ}{U}(a)\cap E \Rightarrow |f(x)|\le M$.

Доказательство. Для $\varepsilon = 1\ \exists\overset{\circ}{U}(a): \forall x\in\overset{\circ}{U}(a)\cap E\Rightarrow |f(x)-A|<1$. Отсюда при этих же x, получаем $|f(x)|\le |A|+|f(x)-A|<|A|+1=M$. **Теорема доказана**.

В силу теоремы об эквивалентности определений по Коши и по Гейне и свойств пределов последовательностей, получаем.

Теорема. Пусть функции f и g определены на множестве E и a предельная точка этого множества. Если существуют пределы $A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$, $B = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} g(x)$, то

(1) существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\big(f(x)+g(x)\big) = A+B$;

(2) существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = A\cdot B$;

(3) Если $B\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ на множестве E, то существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Теорема. Пусть функции f и g определены на множестве E и a предельная точка этого множества. Если существуют пределы $A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$, $B = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} g(x)$ и $A<B$, то существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a такая, что

$$f(x)<g(x),\ \forall x\in\overset{\circ}{U}(a)\cap E.$$

Доказательство. Пусть $A<r<B$. Тогда для $\varepsilon_1 = r-A$ существует $\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)$ такая что

$$\forall x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)\cap E\Rightarrow |f(x)-A|<r-A\Rightarrow f(x)<r.$$

Аналогично, для $\varepsilon_2 = B-r$ существует $\overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a)$

$$\forall x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a)\cap E\Rightarrow |g(x)-B|<B-r\Rightarrow g(x)>r.$$

Пусть $\overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a)$. Тогда

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap E \Rightarrow g(x) > r > f(x).$$ **Теорема доказана**.

Теорема. Пусть функции f, g и h определены на множестве Е и a предельная точка этого множества. Если на множестве Е выполнено неравенство $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и существуют пределы $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} h(x) = A$, то существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\forall U_\varepsilon(A)$$

$$A = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}(a) \ : \ f(\overset{\circ}{U}(a) \cap E) \subset U_\varepsilon(A);$$

$$A = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} h(x) \Rightarrow \exists \overset{\circ}{W}(a) \ : \ h(\overset{\circ}{W}(a) \cap E) \subset U_\varepsilon(A);$$

$$\overset{\circ}{V}(a) = \overset{\circ}{U}(a) \cap \overset{\circ}{W}(a)$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V}(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A),\ h(x) \in U_\varepsilon(A) \Rightarrow$$
$$A - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < A + \varepsilon \Rightarrow g(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Теорема доказана.

Теорема (о пределе композиции функций). Пусть функция g определена на множестве F и b предельная точка этого множества. Пусть функция $f : E \to F$ определена на множестве E и a предельная точка этого множества. Если существует предел $\lim\limits_{\substack{y\to b\\ y\in F}} g(y) = B$ и существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = b$, причем есть окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap E \Rightarrow f(x) \ne b$, то определена композиция $g \circ f$ функций f и g. Более того, существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} g \circ f(x) = \lim\limits_{\substack{y\to b\\ y\in F}} g(y) = B$

Доказательство. Так как $f : E \to F$, а g определена на множестве F, то композиция определена.

$$\forall U(B)$$

$$\lim_{\substack{y\to b\\ y\in F}} g(y) = B \Rightarrow \exists \overset{\circ}{V}(b) : \ g\left(\overset{\circ}{V}(b) \cap F\right) \subset U(B);$$

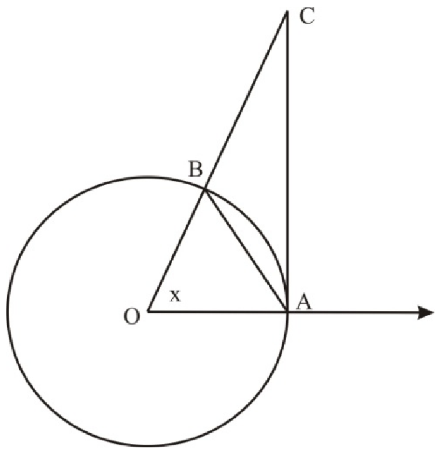
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(a) = b \Rightarrow \exists \overset{\circ}{W}(a) : \ f\left(\overset{\circ}{W}(a) \cap E\right) \subset V(a) \cap F.$$

Тогда

$$f\left(\overset{\circ}{U}(a) \cap \overset{\circ}{W}(a) \cap E\right) \subset \overset{\circ}{V}(a) \cap F \Rightarrow g \circ f\left(\overset{\circ}{U}(a) \cap \overset{\circ}{W}(a) \cap E\right) \subset U(B).$$

Теорема доказана.

Лемма. Имеет место равенство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



Доказательство. Пусть $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$S_{\Delta OAB} < S_{\widehat{OAB}} < S_{\Delta OAC} \Rightarrow \frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x < x < tgx \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

В силу четности, входящих в данное неравенство функций данное неравенство сохраняет силу и при $0 > x > -\dfrac{\pi}{2}$.

Заметим, что, в частности, имеет место $|\sin x| \le |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Имеем,

$$0 \le |\cos x - 1| = 2\left|\sin^2\frac{x}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left|\sin\frac{x}{2}\right| \le \frac{x^2}{2};$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

Следовательно, из неравенства $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

Определение. Бесконечно большие функции при $x \to a$ по множеству E

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > E;$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -E;$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E.$$

Определение. Если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = 0$, то функцию называют бесконечно малой при x стремящемся к a по множеству E.

Лемма. Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ бесконечно большая при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f}$ бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = \infty \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма. Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x \to a$ и $f(x) \ne 0$ на множестве E, то $\dfrac{1}{f}$ бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство аналогично.

Лемма. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

Доказательство. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x \to a$, $g : E \to \mathbb{R}$ ограниченная функция, т.е. $\exists M > 0 : |g(x)| \le M, \forall x \in E$. Рассмотрим любую последовательность

$x_n \in E,\ x_n \neq a,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = 0$, а $\left\{g\left(x_n\right)\right\}$ ограниченная последовательность. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right) g\left(x_n\right) = 0$. **Лемма доказана**.

Лекция 6. Односторонние пределы. Критерий Коши существования предела функции. Существование предела монотонной функции. Сравнение асимптотического поведения функций. «О-о» символика.

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и точка a является предельной для множества $E \cap \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. Тогда предел $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in E\cap\{x\in\mathbb{R}:\, x>a\}}} f(x)$ называется **правым пределом** функции в точке a и обозначается $\lim\limits_{\substack{x\to a+0 \\ x\in E}} f(x)$. Как обычно, если $E = \overset{\circ}{U}(a)$, то правый предел обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Итак, например, по Коши: $A = \lim\limits_{\substack{x\to a+0 \\ x\in E}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in E,\ a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично, если точка a является предельной для множества $E \cap \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$. Тогда предел $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in E\cap\{x\in\mathbb{R}:\, x<a\}}} f(x)$ называется **левым пределом** функции в точке a и обозначается $\lim\limits_{\substack{x\to a-0 \\ x\in E}} f(x)$. Как обычно, если $E = \overset{\circ}{U}(a)$, то правый предел обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Итак, например, по Коши: $A = \lim\limits_{\substack{x\to a-0 \\ x\in E}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in E,\ a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Пределы справа и слева называются односторонними пределами. Имеет место следующий очевидный факт:

Теорема. Если точка a является предельной для множеств $E \cap \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ и $E \cap \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$. Тогда предел $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in E}} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних и они равны.

Определение (по Коши)

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in E}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 :\ \forall x \in E,\ |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in E}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 :\ \forall x \in E,\ x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\in E}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 :\ \forall x \in E,\ x < -\Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Упражнение. Дать определения этих понятий по Гейне.

Лемма. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Доказательство. Имеем, по доказанному выше $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Следовательно, для любой подпоследовательности натуральных чисел $\{n_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=\infty$ выполняется $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e$. Действительно,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon;$$

$$\lim_{k\to\infty}n_k=+\infty\Rightarrow\exists K:\forall k>K\Rightarrow n_k>N\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-e\right|<\varepsilon.$$

Рассмотрим произвольную последовательность $x_n>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Без ограничения общности можно считать, что $x_n<1$. Тогда для $\forall k\ \exists n_k\in\mathbb{N}:\ n_k+1>\frac{1}{x_k}\ge n_k\Rightarrow\frac{1}{n_k+1}<x_k\le\frac{1}{n_k}\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}n_k=\infty$. Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+x_k\right)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=e;\quad \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=e$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+x_k\right)^{\frac{1}{x_k}}=0$. Итак, доказано, что $\lim\limits_{x\to+0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$.

Пусть теперь $x_n<0,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Положим $y_n=-x_n$. Можно считать, что $y_n<1$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+x_k\right)^{\frac{1}{x_k}}=\lim_{k\to\infty}\left(1-y_k\right)^{-\frac{1}{y_k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}}=$$

$$\underset{\downarrow}{=}\lim_{k\to\infty}\left(1+z_k\right)^{\frac{1}{z_k}+1}=e;$$

$$z_k=\frac{y_k}{1-y_k}>0\Rightarrow y_k=\frac{z_k}{1+z_k}$$

Итак, доказано, что $\lim\limits_{x\to-0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$. **Лемма доказана**.

Пусть $f:E\to\mathbb{R}$. Функцию будем называть

1. Возрастающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

2. Неубывающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2);$$

3. Убывающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

4. Невозрастающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2).$$

Такие функции будем называть монотонными. Предположим, что $\alpha = \inf E,\ \beta = \sup E$ являются предельными точками множества E.

Теорема (о существовании предела монотонной функции). Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ неубывающая на множестве E. Если функция ограничена сверху $f(x) \le M,\ \forall x \in E$, то существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x\in E}} f(x)$; в противном случае $\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x\in E}} f(x) = +\infty$.

Замечание. Аналогичный результат имеет место для невозрастающей функции.

Доказательство теоремы. Пусть функция ограничена сверху. Тогда у множества $\{f(x)\ :\ x \in E\}$ существует верхняя грань A. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x' \in E:\ f(x') > A - \varepsilon$. Ввиду монотонности функции f, для $x > x'$ имеем $f(x) > A - \varepsilon$. Но с другой стороны $f(x) \le A < A + \varepsilon$. Итак, $\forall x > x' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, при $\beta < +\infty$ положим $U_\delta(\beta) = (\beta - \delta; \beta + \delta),\ \delta = \beta - x'$, а, если $\beta = +\infty$, то положим $\Delta = x'$.

Пусть теперь функция не ограничена сверху. Тогда

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists x' \in E : f(x') > \mathrm{E} \Rightarrow \forall x > x' \Rightarrow f(x) > \mathrm{E}.$$

Поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x\in E}} f(x) = +\infty$. **Теорема доказана**.

Теорема (критерий Коши существования предела функции)

Пусть a предельна точка множества E. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ имеет конечный предел при $x \to a$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E,\ 0 < |x - a| < \delta,\ \ 0 < |x' - a| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x\in E}} f(x) = A$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x,x'\in E,\ 0<|x-a|<\delta,\ 0<|x'-a|<\delta$$
$$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon/2;\quad |f(x')-A|<\varepsilon/2\ \Rightarrow$$
$$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$$

Пусть выполняется условие в теореме. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\},\ x_n\in E/\{a\},\ x_n\to a,\ n\to\infty$. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем по нему число $\delta>0$ в соответствии с условием теоремы.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ x_n\in E/\{a\}\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n>N\Rightarrow 0<|x_n-a|<\delta.$$

Поэтому для $\forall n,m>N\Rightarrow|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна, значит, имеет предел. Остается доказать, что для разных последовательностей такой предел будет одним и тем же.

Предположим, что

$$\{x_n\},\ x_n\in E/\{a\},\ x_n\to a,\ n\to\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=A;$$

$$\{x'_n\},\ x'_n\in E/\{a\},\ x'_n\to a,\ n\to\infty,\ \lim_{n\to\infty}f(x'_n)=A'.$$

Составим новую последовательность $x_1,x'_1,x_2,x'_2,\ldots,x_n,x'_n,\ldots$. Она сходится к a и, по доказанному, последовательность $f(x_1),f(x'_1),f(x_2),f(x'_2),\ldots,f(x_n),f(x'_n),\ldots$ должна сходится, скажем, к числу A''. Но тогда и любая ее подпоследовательность должна сходится к этому же пределу. Таким образом, $A=A'=A''$. **Теорема доказана**.

Замечание. Аналогично формулируется и доказывается теорема для случаев односторонних пределов и случаев $x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$. Условие в теореме для случая

правого предела имеет вид: $\forall x,x'\in E,\ a<x<a+\delta,\ a<x'<\delta+a$;

для левого предела имеет вид: $\forall x,x'\in E,\ a-\delta<x<a,\ a-\delta<x'<\delta$;

для случая $x\to\infty$ имеет вид: $|x|>\delta,\ |x'|>\delta$.

Пусть a предельная точка множества E.

Определение[2]. Если для функций $f:E\to\mathbb{R},\ g:E\to\mathbb{R}$ существует такая постоянная $C>0$ и окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, что для всех $x\in E\cap\overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство:

[2] Обозначение «„O“ большое» введено немецким математиком Паулем Бахманом во втором томе его книги (Аналитическая теория чисел), вышедшем в 1894 году. Обозначение «„o“ малое» впервые использовано другим немецким математиком, Эдмундом Ландау в 1909 году; с работами последнего связана и

$$\left|f(x)\right| \le C\left|g(x)\right|,$$

то функцию f называют ограниченной по сравнению с функцией g в окрестности точки a и в этом случае пишут $f = O(g),\ x \to a$. Читается f есть O - большое от g при $x \to a$.

Следует отметить, что если $a = +\infty$, то под окрестностью понимают интервал $(\Delta; +\infty)$, если $a = -\infty$, то под окрестностью понимают интервал $(-\infty; \Delta)$, если $a = \infty$, то под окрестностью понимают множество $(-\infty; -\Delta) \cup (\Delta; +\infty)$.

Пример. $\dfrac{x+1}{x^2+1} = O\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x \to +\infty$.

Действительно, $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1+1/x}{1+1/x^2}$. Пусть $x \in (1; +\infty) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1+1/x}{1+1/x^2}\right| \le \left|1+1/x\right| \le 2$. Следовательно, $\left|\dfrac{x+1}{x^2+1}\right| \le 2\left|\dfrac{1}{x}\right|,\ \forall x \in (1; +\infty)$.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ есть бесконечно малая по сравнению с функцией $g : E \to \mathbb{R}$ при $x \to a$, если существует такая функция $\varepsilon : E \to \mathbb{R}$ и <u>окрестность</u> $\overset{\circ}{U}(a)$ такая, что

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap E \Rightarrow f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{\substack{x \to a \\ x \in E}} \varepsilon(x) = 0.$$

В этом случае пишут $f = o(g),\ x \to a$ и говорят f есть o - малое от g при $x \to a$.

Определение. Функции $f : E \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R}$ называют эквивалентными при $x \to a$, если существует такая функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$, что в <u>некоторой проколотой окрестности точки</u> a выполняется равенство $f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} \varphi(x) = 1$. В этом случае пишут $f \sim g,\ x \to a$.

По свойству пределов функций, $\varphi(x) \ne 0$ в некоторой $\overset{\circ}{U}(a) \cap E$ и $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} \dfrac{1}{\varphi(x)} = 1$. Поэтому, если $f \sim g,\ x \to a$, то $g \sim f,\ x \to a$. Кроме того, очевидно, если $f \sim g,\ x \to a$, $g \sim h,\ x \to a$, то $f \sim h,\ x \to a$.

Лемма. Если $f \sim f_1,\ x \to a$, то $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f_1(x) \cdot g(x)$, если один из этих пределов существует.

популяризация обоих обозначений, в связи с чем их также называют **символами Ландау**. Обозначение пошло от немецкого слова «Ordnung» (порядок).

Доказательство. Так как $f(x)=\varphi(x)\cdot f_1(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f_1(x)=1$, то

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)\cdot g(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f_1(x)\cdot g(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f_1(x)\cdot g(x)\cdot\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varphi(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f_1(x)\cdot g(x).$$

Лемма. Имеет место цепочка эквивалентностей:

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim arctgx\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim tgx,\ x\to 0.$$

Лемма. Если $f\sim g,\ x\to a$, то $f=g+o(g),\ x\to a$. В этом случае функция g называется главной частью функции f.

Доказательство. Пусть $f\sim g,\ x\to a$. Тогда $f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varphi(x)=1$. Отсюда $f(x)=g(x)+\left(1-\varphi(x)\right)g(x),\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varphi(x)=0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varphi(x)=1$. Поэтому $f=g+o(g),\ x\to a$. Обратно очевидно. **Лемма доказана**.

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$ предельная точка этого множества. Функция называется **непрерывной** в точке a, если для любой окрестности $V(f(a))$ существует окрестность $U(a)$ такая, что $f(U(a) \cap E) \subset V(f(a))$.

Можно дать определение на языке $\varepsilon - \delta$: $f: E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x \in E, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Если a предельная точка множества E, то непрерывность функции в точке a означает, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = f(a)$. Если функция не является непрерывной в точке a, в том числе, если в точке a функция не определена (т.е. $a \notin E$), то точка a называется **точкой разрыва** функции f. Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной на множестве** Е, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Обозначим C(E) множество функций непрерывных на множестве E. Функция f называется непрерывной в точке $a \in E$ **справа (слева),** если

$$f(a) = f(a+0) = \lim_{\substack{x \to a+0 \\ x \in E}} f(x)$$

$$\left(f(a) = f(a-0) = \lim_{\substack{x \to a-0 \\ x \in E}} f(x) \right)$$

Если оба предела $f(a+0) = \lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ x \in E}} f(x), \quad f(a-0) = \lim\limits_{\substack{x \to a-0 \\ x \in E}} f(x)$ существуют, но хотя бы один из них не совпадает с $f(a)$, то точка a называется **точкой разрыва первого рода**. При этом, если $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$, то точка a называется **точкой устранимого разрыва**. Если точка a - точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, то она называется **точкой разрыва второго рода**.

Теорема. Если функции $f: E \to \mathbb{R}, \ g: E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a, то функции $f+g, \ f \cdot g$ непрерывны в точке a, если $g(a) \neq 0$, то функция $\dfrac{f}{g}$ определена на некотором множестве $U(a) \cap E$ и непрерывна в точке a.

Доказательство. Доказательство имеет смысл дать только для последней части, поскольку все остальное очевидное следствие свойств пределов. Так как $g(a) \neq 0$, то для $\varepsilon = \dfrac{|g(a)|}{2}$ существует

$U(a)$ такая, что $g(U(a)\cap E)\subset\left(g(a)-\left|\frac{g(a)}{2}\right|,\, g(a)+\left|\frac{g(a)}{2}\right|\right)$ и, следовательно, на $U(a)\cap E$ функция $g(x)\neq 0$. **Теорема доказана**.

Теорема (о непрерывности композиции). Если функция $g:F\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке $b\in F$, функция $f:E\to F$ такова, что $f(a)=b$ и f непрерывна в точке a, то композиция $g\circ f$ определена на E и непрерывна в точке a.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\forall V(g(b))\Rightarrow\\
&\exists U(b):\, g(U(b)\cap F)\subset V(g(b))\\
&\exists W(a):\, f(W(a)\cap E)\subset U(b)\cap F\Rightarrow\\
&g\circ f(W(a)\cap E)\subset V(g(b))=V(g\circ f(a))
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема (Больцано Коши о промежуточном значении).

$$f\in C[a;b],\ f(a)f(b)<0\Rightarrow\exists c\in(a;b):\ f(c)=0.$$

Доказательство.

$$I_1=[a_1;b_1];\ \ a_1=a;\ b_1=b;\ f(a_1)f(b_1)<0;$$

$$I_2=[a_2;b_2];\ \ a_2=\begin{cases}a_1, f(a_1)f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0;\\ \frac{a_1+b_1}{2}, f(b_1)f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0;\end{cases}\qquad b_2=\begin{cases}b_1, f(b_1)f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0;\\ \frac{a_1+b_1}{2}, f(a_1)f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0;\end{cases}$$

....

$$I_n=[a_n;b_n];\ \ a_n=\begin{cases}a_{n-1}, f(a_{n-1})f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)<0;\\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, f(b_{n-1})f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)<0;\end{cases}\qquad b_2=\begin{cases}b_{n-1}, f(b_{n-1})f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)<0;\\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, f(a_{n-1})f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)<0;\end{cases}$$

......

В результате построений, мы либо на коком-то шаге получим $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, тогда $\frac{a_1+b_1}{2}$ искомая точка, либо получим систему вложенных отрезков

$$I_n=[a_n;b_n],\ f(a_n)f(b_n)<0,\ b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b-a}{2^n}.$$

Во втором случае существует точка $c\in\bigcap_n I_n$. При этом

$$a_n \le c \le b_n \Rightarrow 0 \le c - a_n \le b_n - a_n \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$0 \le b_n - c \le b_n - a_n \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Таким образом, в силу непрерывности функции, имеем $\left(f(c)\right)^2 = \lim_{n\to\infty} f(a_n) f(b_n) \le 0 \Rightarrow f(c) = 0$.

Теорема доказана.

Следствие. Если функция непрерывна на интервале T и в каких-то точках $a, b \in T$ принимает значения $A = f(a)$, $B = f(b)$, то для любого числа C, лежащего между A, B существует точка c, лежащая между a, b, в которой $f(c) = C$.

Доказательство. Для функции $\varphi(x) = f(x) - C$ существует $c : \varphi(c) = 0$. **Следствие доказано**.

Теорема (Первая теорема Вейерштрасса). Если $f \in C[a;b]$, то функция ограничена на отрезке.

Доказательство. Докажем, что функция ограничена сверху. Предположим противное, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a;b] : f(x_n) > n.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. По теореме Больцано - Вейерштрасса, из полученной ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $\xi = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a;b]$. В силу непрерывности функции $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$. Это противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. Аналогично доказывается ограниченность снизу.

Теорема доказана.

Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса). Пусть $f \in C[a;b]$. Тогда, функция достигает на отрезке своих верхней и нижней граней, т.е.

$$\exists x_1,\ x_2 \in [a;b] :\ f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in [a;b]\} = \sup_{[a;b]} f(x);$$
$$f(x_2) = \inf\{f(x) : x \in [a;b]\} = \inf_{[a;b]} f(x)$$

Доказательство. Докажем для верхней грани. По первой теореме Вейерщтрасса, функция ограничена на отрезке, поэтому имеет верхнюю и нижнюю грани. Пусть $M = \sup_{[a;b]} f(x)$ и предположим, что это значение функцией не достигается. Тогда $\forall x \in [a;b] \Rightarrow f(x) < M \Rightarrow M - f(x) > 0$. Следовательно, функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а, значит, ограничена на этом отрезке, т.е. $\exists A > 0 : \dfrac{1}{M - f(x)} \le A \Rightarrow f(x) \le M - \dfrac{1}{A},\ \forall x \in [a;b]$. Это противоречит тому, что M – это верхняя грань функции на отрезке. **Теорема доказана**.

Теорема. Каждая строго монотонная функция $f : X \to Y,\ X \subset \mathbb{R},\ Y = f(X) \subset \mathbb{R}$ обладает обратной функцией $f^{-1} : Y \to X$, которая имеет на Y тот же характер монотонности, какой имеет на X функция f.

Доказательство. Пусть для определенности функция f строго возрастает.

1. Функция f отображает множество X на множество $Y = f(X)$.

2. $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, f инъективно.

Таким образом, существует обратная функция $f^{-1}: Y \to X$, определенная равенством

$$f^{-1}(y) = x, \text{ если } f(x) = y.$$

Имеем

$$y_1 < y_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Следовательно, функция $f^{-1}: Y \to X$ строго возрастает на Y. **Теорема доказана**.

Теорема. Пусть $f \in C[a;b]$ и строго возрастает (убывает) на $[a;b]$. Тогда обратная функция определена на отрезке с концами $f(a)$, $f(b)$ и непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Пусть f строго возрастает.

$\forall x,\ a \le x \le b \Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b) \Rightarrow f(x) \in [f(a); f(b)]$. С другой стороны, для $\forall y \in [f(a); f(b)]$ по теореме Больцано-Коши $\exists x \in [a;b]: f(x) = y$. Таким образом, $f([a;b]) = [f(a); f(b)]$. Следовательно, обратная функция определена на $[f(a); f(b)]$ и строго возрастает на нем.

Докажем, что $f^{-1} \in C[f(a); f(b)]$.

А) $y_0 \in (f(a); f(b))$ и $x_0 \in (a;b)$: $f(x_0) = y_0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \varepsilon_1 : (x_0 - \varepsilon_1; x_0 + \varepsilon_1) \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \cap (a;b);$$
$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon_1);\ y_2 = f(x_0 + \varepsilon_1)$$
$$\forall y \in (y_1; y_2) \Rightarrow y = f(x),\ x_0 - \varepsilon_1 < x < x_0 + \varepsilon_1 \Rightarrow$$
$$f^{-1}(y_1; y_2) \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

Б) $y_0 = f(a) \Rightarrow x_0 = a$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \varepsilon_1 : (x_0 - \varepsilon_1; x_0 + \varepsilon_1) \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \cap [a;b];$$
$$y_1 = f(x_0 + \varepsilon_1)$$
$$\forall y \in [y_0; y_2) \Rightarrow y = f(x),\ x_0 - \varepsilon_1 < x < x_0 + \varepsilon_1 \Rightarrow$$
$$f^{-1}[y_0; y_2) \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

В) $y_0 = f(b) \Rightarrow x_0 = b$ аналогично Б). **Теорема доказана**.

Рассмотрим теперь основные элементарные функции.

1. $y = f(x) = a^x$ непрерывна на всей числовой прямой.

Лемма. $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

Доказательство. Проведем для случая $a > 1$.

А) $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Действительно, рассмотрим последовательность $x_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$. Имеем

$$a = (x_n + 1)^n \ge 1 + nx_n > nx_n \Rightarrow 0 < x_n < \frac{a}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

Б) $\lim\limits_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Очевидно.

В) Из А) и Б) следует, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ 1-\varepsilon<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon;\ 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon.$$

Следовательно, из монотонности показательной функции, получаем

$$\forall x,\ |x|<\frac{1}{n_0}\Rightarrow-\frac{1}{n_0}<x<\frac{1}{n_0}\Rightarrow 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^x<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Из леммы получаем

$\lim\limits_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=\lim\limits_{x\to x_0}a^{x_0}(a^{x-x_0}-1)=0$. Следовательно, показательная функция непрерывна.

2. $y=\log_a x$ непрерывна в любой точке $x>0$.

Доказательство проведем для случая $a>1$.

$\forall[c;d]\subset\mathbb{R}\Rightarrow y=f(x)=a^x\in C[c;d]$ и монотонная на этом отрезке. Поэтому существует обратная $x=f^{-1}(y)=\log_a y\in C[a^c;a^d]$. Так как $f:(-\infty;+\infty)\xrightarrow{на}(0;+\infty)$, то логарифмическая функция непрерывна в каждой точке.

3. $y=\arcsin x$ непрерывна на $[-1;1]$. Действительно, функция $y=\sin x$ монотонна, непрерывна на $[-\pi/2;\pi/2]$ и отображает его на отрезок $[-1;1]$, поэтому обратная $x=\arcsin y$ существует, монотонна и непрерывна на $[-1;1]$.

4. Аналогично предыдущим случаям проверяется непрерывность функция $arctgx\in C(-\infty;+\infty)$, $arcctgx\in C(-\infty;+\infty)$, $\arccos x\in C[-1;1]$.

5. $y=x^\alpha$ непрерывна в любой точке $x>0$. Действительно, т.к $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$, то функция непрерывна как сложная функция.

Определение. Пусть функция $f:E\to\mathbb{R}$ и каждая точка множества E является его предельной точкой. Функцию будем называть равномерно непрерывной на множестве E, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x',x''\in E,\ |x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Заметим, что если функция равномерно непрерывна на множестве E, то она непрерывна в любой точке этого множества, т.к., если зафиксировать точку x'' в определении равномерной непрерывности, то получится определение непрерывности в точке x''. Обратное неверно. Если функция непрерывна в каждой точке множества E, то она не обязательно является равномерно непрерывной. Рассмотрим пример. $y=\sin\frac{1}{x}$, $x\in(0;1)$. Для $\varepsilon=1/2$ возьмем любое число $\delta>0$

Пусть $x'_n=\dfrac{1}{2\pi n}$, $x''_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Имеем $|x'_n-x''_n|=\left|\dfrac{1}{2\pi n}-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right|=\dfrac{\pi/2}{2\pi n\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}$. Очевидно, выбором n можно добиться выполнения неравенства $|x'_n-x''_n|<\delta$, но $|f(x'_n)-f(x''_n)|=1>1/2$. Таким образом, данная функция, будучи непрерывной на интервале (0;1), не является равномерно непрерывной.

Теорема (Кантор). Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Предположим, что функция не является равномерно непрерывной на отрезке $[a;b]$, но принадлежит $C[a;b]$. Тогда

$$\exists\varepsilon>0:\forall\delta>0\ \exists x',x''\in[a;b],\quad |x'-x''|<\delta,\ |f(x')-f(x'')|>\varepsilon.$$

Положим $\delta_n=\dfrac{1}{n}$ и найдем указанные точки $x_n',x_n''\in[a;b]$, для которых $|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n},\ |f(x_n')-f(x_n'')|>\varepsilon$. По теореме Больцано – Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{x_n'\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}'\}$, $\xi=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'\in[a;b]$. Далее $|x_{n_k}''-\xi|\le|x_{n_k}'-\xi|+|x_{n_k}'-x_{n_k}''|\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}''=\xi$.

Тогда, в силу непрерывности функции, имеем

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}'')=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}')=f(\xi)\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\left(f(x_{n_k}'')-f(x_{n_k}')\right)=0.$$

Это является противоречием неравенству $|f(x_n')-f(x_n'')|>\varepsilon,\ \forall n$. **Теорема доказана**.

Определение. Модуль непрерывности функции f на множестве E называется следующая верхняя грань:

$$\omega(f,\delta)=\sup\left\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|\le\delta,\ x',x''\in E\right\}.$$

Отметим следующие очевидные свойства модуля непрерывности:

1. $\omega(f,\delta)\ge0$;
2. $\omega(f,\delta)\le\omega(f,\delta'),\ \forall\delta,\delta',\ \delta<\delta'$. Действительно, неравенство следует из включения:

$$\left\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|\le\delta,\ x',x''\in E\right\}\subset\left\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|\le\delta',\ x',x''\in E\right\}.$$

Пример.

$$\omega\left(\sin\frac{1}{x},\delta\right)=\sup_{\substack{|x'-x''|\le\delta,\\ x',x''\in(0;1)}}\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|\le2.$$

С другой стороны

$$\left|\sin\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)}-\sin\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}\right)}\right|=2,\ n=1,2,\ldots$$

Поэтому $\omega\left(\sin\dfrac{1}{x},\delta\right)=2$.

Теорема. Функция равномерно непрерывна на множестве E тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(f,\delta)=0$.

Доказательство. Пусть функция равномерно непрерывна на множестве E. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x', x'' \in E,\ |x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\omega(f, \delta_\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Поэтому $\forall \delta < \delta_\varepsilon \Rightarrow \omega(f, \delta) < \varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(f, \delta) = 0$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(f, \delta) = 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \delta < \delta_\varepsilon \Rightarrow \omega(f, \delta) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall x', x'' \in E,\ |x' - x''| < \delta \le \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция равномерно непрерывна на множестве E. **Теорема доказана**.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и $x\in(a;b)$. Пусть Δx произвольное число такое, что $x+\Delta x\in(a;b)$. Число $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ называется приращением функции $y=f(x)$ в точке x.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$ или y'.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется правой **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x+0)$.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется левой **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x-0)$.

По свойству пределов, производная в точке существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют правая и левая производные и они равны.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, A не зависит от Δx.

По опрделению о-малое, получаем $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0$. В самой точке $\Delta x=0$ функция $\alpha(\Delta x)$ может быть и не определена. Ей можно приписать любое значение. Для дальнейшего удобно считать, что $\alpha(0)=0$. При такой договоренности эта функция будет непрерывной в точке 0.

Теорема. Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Имеем

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)=A\cdot(x-x_0)+\alpha((x-x_0))\cdot(x-x_0).$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x-x_0)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. **Теорема доказана**.

Теорема. Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную.

Доказательство. Пусть функция дифференцируема, тогда $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\alpha(\Delta x)\right)=A.$$

Следовательно, производная в точке x существует и равна A. Обратно, пусть существует производная в точке x. Тогда $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$. Следовательно, если обозначить

$\alpha(\Delta x)=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$ и $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. **Теорема доказана**.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда, по доказанной теореме, имеем $\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0$. Следовательно, линейная функция $f'(x)\Delta x$ переменной Δx является главной частью приражения функции $y=f(x)$ в точке x. Эта линейная функция называется **дифференциалом** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $dy=f'(x)\Delta x$. Обозначим Δx как dx и назовем **дифференциалом независимой переменной**.

Теорема. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное (при условии $g(x)\neq 0$) также дифференцируемы в точке x, причем имеют место формулы

1. $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$;
2. $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Доказательство. Докажем для частного. Имеем

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f+f(x)}{\Delta g+g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f\,g(x)-\Delta g\,f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right)=$$
$$=\frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x}g(x)-\dfrac{\Delta g}{\Delta x}f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

Отсюда получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана**.

Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, то

$$d(f\pm g)=df\pm dg;$$
$$d(f\cdot g)=g\cdot df+f\cdot dg;$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}.$$

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$. Тогда композиция $f\circ\varphi$ определена в некотрой окрестности точки t_0, дифференцируема в точке t_0 и имеет место формула

$$(f\circ\varphi)(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0).$$

Доказательство. Функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$, следовательно, она определена в некотрой окрестности $W(x_0)$ точки x_0. Функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, следовательно, она непрерывна в этой точке. Поэтому $\exists U(t_0):\varphi(U(t_0))\subset W(x_0)$.

Таким образом, в $U(t_0)$ определена композиция $f\circ\varphi$. Так как функция f дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Следовательно,

$$f\circ\varphi(t_0+\Delta t) - f\circ\varphi(t_0) = f\left(\varphi(t_0) + \underbrace{\left(\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)\right)}_{\Delta x}\right) - f(\varphi(t_0)) =$$

$$= f'(\varphi(t_0))\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Здесь Δx может обращаться в нуль, но по договоренности $\alpha(0)=0$, поэтому последнее равенство остается в силе и при $\Delta x = 0$. Так как $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0)$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0: \forall\Delta x,\ |\Delta x|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)|<\varepsilon;$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta x = 0 \Rightarrow \exists\delta>0: \forall\Delta t,\ |\Delta t|<\delta \Rightarrow |\Delta x|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)|<\varepsilon;$$

$$\overline{\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x) = 0.}$$

Таким образом, $\exists\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f\circ\varphi(t_0+\Delta t) - f\circ\varphi(t_0)}{\Delta t} = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$. **Теорема доказана**.

Пусть даны функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$ и определна сложная функция $f\circ\varphi$. Тогда для дифференциала этой сложной функции получим.

$$dy = d(f\circ\varphi) = (f\circ\varphi)'dt = f'(x)\varphi'(t)dt = f'(x)dx.$$

Таким образом, представление $dy = f'(x)dx$ не нарушается даже, если x не является независимой переменной, а является некотрой функцией. Указанное свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала.

Теорема (о дифференцировании обратной функции).

Пусть функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна в некотрой окрестности точки x_0. Пусть функция дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)\neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем в точке y_0 эта функция дифференцирума и для ее производной справедлива формула $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Обратная определна и непрерывна и возрастает (убывает) в некотрой окрестности точки y_0. В силу возрастания (убывания) функции ее приращение отлично от нуля. Следовательно, если $\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)$, то можно написать $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$. В силу непрерывности обратной функции, если $\Delta y\to 0$, то $\Delta x\to 0$. Так как $x_0 = f^{-1}(y_0)$, то $y_0+\Delta y = f(\Delta x + x_0)$ и $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{\left(\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)}.$$

Следовательно, при $\Delta y \to 0$ будет $\Delta x \to 0$ и, по определению производной, знаменатель последней дроби стремится к $f'(x_0) \neq 0$. Таким образом, **теорема доказана**[3].

Рассмотрим теперь производные основных элементарных функций.

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0;$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(e^{\Delta x \ln a} - 1\right) a^x \ln a}{\Delta x \ln a} = a^x \ln a;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad y = \ln x;$$

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = x^\alpha (\alpha \ln x)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \text{ x>0};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$, тогда на этом интервале определена функция $y = f'(x)$. Если эта функция имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, то такая производная называется второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $y = f''(x_0)$. Аналогично определяется производная любого порядка k:

$$y^{(k)} = f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0).$$

Теорема (Лейбниц).

---

[3] $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall \Delta x,\ |\Delta x| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{\left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$, то $\exists \delta > 0 : \forall \Delta y, |\Delta y| < \delta \Rightarrow |\Delta x| < \delta_1$. Отсюда $\forall \Delta y, |\Delta y| < \delta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall \Delta x, |\Delta x| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$.

$$(y_1\cdot y_2)^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k-j)}.$$

Доказательство.

$$(y_1\cdot y_2)'=\sum_{j=0}^{1}C_1^j\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(1-j)}=y_1'\cdot y_2+y_1\cdot y_2';$$

$$(y_1\cdot y_2)^{(k+1)}=\left(\sum_{j=0}^{k}C_k^j\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k-j)}\right)'=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\cdot\left(y_1^{(j+1)}\cdot y_2^{(k-j)}+y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k-j+1)}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\cdot y_1^{(j+1)}\cdot y_2^{(k-j)}+\sum_{j=0}^{k}C_k^j\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k-j+1)}=\sum_{j=0}^{k-1}C_k^j\cdot y_1^{(j+1)}\cdot y_2^{(k-j)}+\sum_{j=1}^{k}C_k^j\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k-j+1)}+$$

$$+y_1^{(k+1)}\cdot y_2+y_1\cdot y_2^{(k+1)}=\sum_{j=1}^{k}C_k^{j-1}\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k-j+1)}+\sum_{j=1}^{k}C_k^j\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k-j+1)}+y_1^{(k+1)}\cdot y_2+y_1\cdot y_2^{(k+1)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\left(C_k^{j-1}+C_k^j\right)\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k-j+1)}+y_1^{(k+1)}\cdot y_2+y_1\cdot y_2^{(k+1)}=\sum_{j=0}^{k+1}C_{k+1}^j\cdot y_1^{(j)}\cdot y_2^{(k+1-j)}$$

Поскольку

$$C_k^{j-1}+C_k^j=\frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!}+\frac{k!}{j!(k-j)!}=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\left(\frac{1}{k-j+1}+\frac{1}{j}\right)=\frac{(k+1)!}{j!(k-j+1)!}=C_{k+1}^j$$

Теорема доказана.

Определение. Дифференциал n+1-го порядка: $d^{n+1}f=d(d^n f)$.

Пусть $y=f(x)$. Тогда

$$d^2y=d(df(x))=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx+f'(x)d^2x$$

Если x является независимой переменной, то $d^2x=d(dx)=0$ поскольку dx - это число. Следовательно, $d^2y=d(f'(x))dx=f''(x)dx^2$. Аналогично показывается, что $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда получаем другое обозначение производной: $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$.

Если $x=\varphi(t)$ не является независимой переменной, то $d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x$. В то время как для независимой переменной $d^2y=f''(x)dx^2$. Таким образом, в отличие от первого дифференциала, второй дифференциал не обладает свойством инвариантностью формы.

Определение. Пусть заданы функции $y=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$, причем функция $x=\psi(t)$ имеет обратную $t=\psi^{-1}(x)$. Тогда определена композиция функций $y=\varphi(\psi^{-1}(x))$, про которую говорят, что она задана параметрически.

Если функции $x=\psi(t)$ монотонна на некотром интервале и имеет отличную от нуля производную, то обратная функция также имеет производную и $(\psi^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\psi'(t)}$. Таким образом,

$$y_x'=\varphi'(t)\cdot(\psi^{-1})'(x)=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Аналогично можно найти производную второго порядка.

Лемма. Пусть $f(x)$ имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0)>0$ (или $f'(x_0)<0$). Тогда найдется окрестность $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ такая, что $f(x)<f(x_0),\ \forall x\in(x_0-\delta;x_0)$ и $f(x)>f(x_0),\ \forall x\in(x_0;x_0+\delta)$ (или $f(x)>f(x_0),\ \forall x\in(x_0-\delta;x_0)$ и $f(x)<f(x_0),\ \forall x\in(x_0;x_0+\delta)$).

Доказательство. Имеем

$$f'(x_0)=\lim_{h\leftarrow 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Для $\varepsilon=\frac{|f'(x_0)|}{2}$ найдем $\delta>0$, что $\left|f'(x_0)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|<\frac{|f'(x_0)|}{2}$. Следовательно,

$$f'(x_0)-\frac{|f'(x_0)|}{2}<\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<\frac{|f'(x_0)|}{2}+f'(x_0),\ \forall h,\ |h|<\delta.$$

Пусть $f'(x_0)>0$. Тогда $0<f'(x_0)-\frac{|f'(x_0)|}{2}<\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Отсюда, если $h>0$, то $f(x_0+h)-f(x_0)>0\Rightarrow f(x_0+h)>f(x_0)$. Если $h<0$, то $f(x_0+h)-f(x_0)<0\Rightarrow f(x_0+h)<f(x_0)$.

Лемма доказана.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум (максимум), если существует окрестность этой точки $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ такая, что в этой окрестности значение $f(x_0)$ является наименьшим (наибольшим). Локальный максимум или минимум называется локальным экстремумом.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0)=0$.

Замечание. Геометрический смысл: касательная в этой точке параллельна оси Ох.

Доказательство. Если предположить, что производная не равна нулю, то это приводит к противоречию с леммой, доказанной выше. **Теорема доказана**.

Теорема (Ролль). Пусть $f\in C[a;b]$ и f имеет производную на $(a;b)$. Если $f(a)=f(b)$, то существует точка ξ, в которой производная равна нулю.

Доказательство. Так как $f\in C[a;b]$, то функция ограничена на отрезке. Пусть $m\le f(x)\le M$. Если $m=M$, то функция постоянна и в качестве точки ξ можно взять любую. Пусть $m<M$, тогда, в силу равенства $f(a)=f(b)$, получаем, что хотя бы одно из значений m или M достигается в некоторой точке $x_0\in(a;b)$. Следовательно, это будет точка локального экстремума, а, значит, в этой точке производная равна нулю. **Теорема доказана**.

Теорема (Лагранж). Пусть $f\in C[a;b]$ и имеет производную на $(a;b)$. Тогда существует точка $\xi\in(a;b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Она, очевидно, удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому существует точка $\xi\in(a;b)$ такая, что $0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. **Теорема доказана**.

Теорема (Коши). Пусть $f, g \in C[a;b]$ и имеют производные на $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Доказательство. По теореме Ролля $g(b) \neq g(a)$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

По теореме Ролля,

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi).$$

Теорема доказана.

Теорема (первое правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены и дифференцируемы на проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ и функция $g'(x)$ не обращается в нуль на этой окрестности. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Тогда сущесвует предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и выполняется равенство $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ произвольная последовательность, элементы которой принадлежат $\overset{\circ}{U}(a)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Доопределим функции $f(x)$, $g(x)$ в точке a положив их равными нулю. Тогда получим функции непрерывные на всей окрестности $U(a)$. На отрезке $[a; x_n]$ или $[x_n; a]$ функции удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Поэтому найдется точка ξ_n, лежащая между a и x_n такая, что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Следовательно, если $n \to \infty$, то $x_n \to a$, а, значит, $\xi_n \to a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = A$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема остается справедливой в следующих случаях:

1. $\overset{\circ}{U}(a) = (a; a+\delta)$ или $\overset{\circ}{U}(a) = (a-\delta; a)$. Для доказательства достаточно брать последовательность справа или слева от точки a.

2. В качестве окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ берется множество $(-\infty; -\delta) \cup (\delta; +\infty)$ и все пределы берутся при $x \to \infty$. Действительно, сделаем замену $t = \frac{1}{x}$ и положим $G(t) = g(\frac{1}{t})$, $F(t) = f(\frac{1}{t})$. Тогда функции $G(t)$, $F(t)$ будут удовлетворять услвиям доказанной теоремы для $\overset{\circ}{U}(a) = (a - \frac{1}{\delta}; a + \frac{1}{\delta}) \setminus \{a\}$.

Причем $G'(t) = g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})$; $F'(t) = f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})$ и существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует равный ему предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

3. В качестве окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ берется множество $(-\infty;-\delta)$ или $(\delta;+\infty)$. Действительно, замена $t=\dfrac{1}{x}$ приводит к случаю 1.

Теорема (второе правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены и дифференцируемы на проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ и функция $g'(x)$ не обращается в нуль на этой окрестности. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ и существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$. Тогда сущесвует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и выполняется равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Пусть сначала A конечный предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ x_n>a$ или $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ x_n<a$. По теореме Коши для отрезка $[x_n;x_m]$ имеем

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)}=\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\frac{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}=\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}.$$

Отсюда

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}\frac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}.$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное число.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\Rightarrow\exists\delta>0:\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\exists m:\ \forall n\ge m\Rightarrow|x_n-a|<\delta$$

Так как $\xi_{nm}\in[x_n;x_m]$, то $|\xi_{nm}-a|<\delta$. Следовательно, для $\alpha_{nm}=\dfrac{f'(\xi_{nm})}{g'(\xi_{nm})}-A$ выполняется $|\alpha_{nm}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Так как, по условию, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\infty$, то поскольку номер m фиксирован, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}=1$. Отсюда, если обозначить $\beta_{nm}=\dfrac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}-1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\beta_{nm}=0\Rightarrow\exists n_0>m:\ \forall n\ge n_0\Rightarrow|\beta_{nm}|<\frac{\varepsilon/2}{|A|+\varepsilon/2}.$$

Итак,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}\frac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}=(A+\alpha_{nm})(1+\beta_{nm})=A+\alpha_{nm}+(A+\alpha_{nm})\beta_{nm}.$$

Поэтому при всех $n\geq n_0$

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}-A\right|\leq|\alpha_{nm}|+(|A|+|\alpha_{nm}|)|\beta_{nm}|<\frac{\varepsilon}{2}+(|A|+\frac{\varepsilon}{2})\frac{\varepsilon/2}{|A|+\varepsilon/2}=\varepsilon.$$

Если A бесконечный, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=0$ и, по доказанному, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$. **Теорема доказана**.

Замечание. Теорема остается в силе, при замене окрестности, представленной в теореме, на окрестности, описанные в предыдущем замечании.

Лекция 12. Формула Тейлора

Теорема. Если на отрезке $[a,x]$ или $[x,a]$ функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а на интервале (a,x) или (x,a) функция имеет производную порядка n+1, то при любой функции φ, непрерывной на этом отрезке и имеющей отличную от нуля производную на соответствующем интервале, найдется точка ξ, лежащая между x и a, такая, что

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)\cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n .$$

Замечание. Данная формула называется формулой Тейлора, многочлен в левой части называется многочленом Тейлора, последнее слагаемое называется остаточным членом формулы Тейлора. При $a=0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Доказательство. На отрезке $I=[a,x]$ или $I=[x,a]$ рассмотрим функцию

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n .$$

По условию теоремы $F \in C(I)$ и имеет производную на интервале, причем

$$\begin{aligned} F'(t) = &-f'(t) - (f''(t)(x-t) - f'(t)) - (\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t)) - \ldots - \\ &-(\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n-2)}(t)}{(n-3)!}(x-t)^{n-3}) - (\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2}) - \\ &-(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

По теореме Коши для функций F и φ найдем точку ξ между a и x такую, что

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} .$$

Замечая, что $F(x)=0$, получаем

$$\frac{-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)\cdot n!} .$$

Отсюда получается утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Положим $\varphi(t) = x-t$ получим остаточный член в форме Коши:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{x-a}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n .$$

Положим $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ получим остаточный член в форме Лагранжа:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n\cdot n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n;$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Теорема (локальная формула Тейлора). Пусть $U(a)$ окрестность точки a. Если функция $f:U(a)\to\mathbf{R}$ имеет в точке a все производные $f'(a),\ f''(a),\ldots,f^{(n)}(a)$ до порядка n включительно, то справедливо следующее представление:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n),\ x\to a$$

(локальная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

Доказательство. Обозначим

$$P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Имеем $P^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),\ k=0,1,\ldots,n$. Пусть $r(x)=f(x)-P(x)$. Тогда $r^{(k)}(a)=0,\ k=0,1,\ldots,n$. Достаточно доказать, что $r(x)=o((x-a)^n),\ x\to a$. Это утверждение следует из следующей леммы. **Теорема доказана**.

Лемма. Если функция $r:U(a)\to\mathbf{R}$ имеет в точке a производные $r^{(k)}(a)=0,\ k=0,1,\ldots,n$, то $r(x)=o((x-a)^n),\ x\to a$.

Доказательство. Докажем это индукцией по n. При n=1, по определению дифференцируемости функции в точке $r(x)-r(a)=r'(a)(x-a)+o(x-a),\ x\to a$. Следовательно, $r(x)=o(x-a),\ x\to a$. Предположим, что утверждение доказано для $n=k-1\geq 1$. Докажем его для $n=k$. По определению производной старшего порядка, существование производной $r^{(k)}(a)$ означает, что функция $r^{(k-1)}(x)$ определена в некоторой окрестности $W(a)$ точки a. Можно считать, что в этой окрестности определены все функции $r(x),r'(x),\ldots,r^{(k-1)}(x)$. При этом

$$(r')'(a)=0,\ (r')''(a)=0,\ldots,(r')^{(k-1)}(a)=0.$$

Следовательно, для функции $r'(x)$ справедливо предположение индукции, поэтому

$$r'(x)=o((x-a)^{k-1}),\ x\to a.$$

Отсюда, по теореме Лагранжа, получаем

$$r(x)=r(x)-r(a)=r'(\xi)(x-a)=\alpha(\xi)(\xi-a)^{k-1}(x-a),$$

где ξ лежит между x и a, $\lim\limits_{\xi\to a}\alpha(\xi)=0$. Так как $|\xi-a|\le|x-a|$ и при $x\to a$ будет $\xi\to a$, то из неравенства $|r(x)|\le|\alpha(\xi)||x-a|^k$ следует, что $r(x)=o(x-a)^k$, $x\to a$. **Лемма доказана**.

Рассмотрим теперь разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1. $f(x)=e^x$. Поскольку $f^{(k)}(0)=e^x\Big|_{x=0}=1$. Следовательно,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0.$$

2. $f(x)=\sin(x)$. Имеем $f^{(2k)}(0)=(-1)^k\sin(x)\Big|_{x=0}=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\cos(x)\Big|_{x=0}=(-1)^k$. Поэтому

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2k+2}),\ x\to 0.$$

3. Аналогично

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k+1}),\ x\to 0.$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$. Имеем $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $f''(x)=\dfrac{(-1)}{(x+1)^2}$; $f'''(x)=\dfrac{(-1)^2 2}{(x+1)^3}$; $f^{(4)}(x)=\dfrac{(-1)^3 2\cdot 3}{(x+1)^4}$;... . Таким образом, можно написать общее выражение

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k}.$$

Следовательно, $\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ и

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),\ x\to 0.$$

5. Аналогично

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),\quad x\to 0.$$

Примеры.

1. Написать разложение функции $f(x)=\ln(\cos x)$ до члена x^4.

Решение. Имеем, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+o(x^7),\ x\to 0,\ \ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3),\ x\to 0$.

Отсюда

$$\ln(\cos x)=\ln(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7))=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7)-$$
$$-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7))^2+\frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7))^3+o(x^6)=$$
$$=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}-2\frac{x^6}{2\cdot 4!})+\frac{1}{3}(-\frac{x^6}{8})+o(x^6)=$$
$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6),\ \ x\to 0.$$

2. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4))-x(1+x)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3!}-x-x^2+o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+o(x))=1/3$$

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции была неотрицательной (неположительной) всюду на этом интервале.

Доказательство. Пусть $f'(x)\geq 0$ на $(a;b)$. Возьмем $x_1<x_2$ точки интервала. Тогда по теореме Лагранжа для отрезка $[x_1;x_2]$, находим $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geq 0$. Отсюда $f(x_2)\geq f(x_1)$. Следовательно, функция не убывает.

Обратно, пусть функция не убывает, тогда для $\Delta x>0$ получаем $f(x+\Delta x)\geq f(x)$. Отсюда $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0\Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$. **Теорема доказана**.

Замечание. Отметим, что, если на интервале $(a;b)$ имеет место строгое неравенство $f'(x)>0$, то $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$. Отсюда функция возрастает на интервале. Аналогично для убывания.

Локальный минимум и локальный максимум будем называть локальным экстремумом функции.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, в которой она непрерывна. Если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки a и отрицательна (положительна) справа от точки a, то функция имеет в точке a локальный максимум (минимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки a, то экстремума в точке a нет.

Доказательство. Пусть $x\neq a$. Тогда для отрезка с концами в точках a и x выполнены условия теоремы Лагранжа, поэтому имеет место равенство:

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),$$

Где точка ξ лежит между точками $x,\ a$.

Таким образом, для первого случая (слева «+» справа «-»):

$$\begin{array}{l} x<a,\ f'(\xi)>0\Rightarrow f(x)-f(a)<0\Rightarrow f(x)<f(a); \\ x>a,\ f'(\xi)<0\Rightarrow f(x)-f(a)<0\Rightarrow f(x)<f(a). \end{array}$$

Значит, в точке a локальный максимум. **Теорема доказана**.

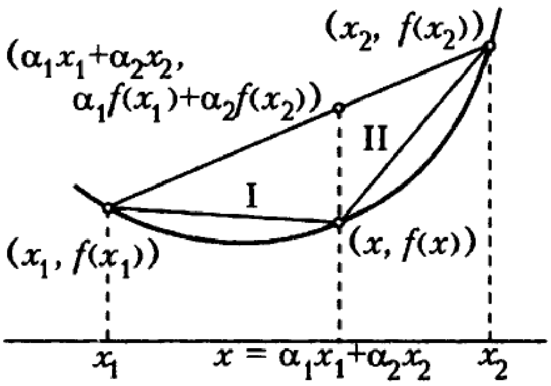
Теорема (без доказательства). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a конечную вторую производную и $f'(a)=0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке a локальный максимум, если $f''(a)<0$ и локальный минимум, если $f''(a)>0$.

Определение. Функция $f:(a;b)\to\mathbf{R}$ называется выпуклой вниз (вверх) на интервале $(a;b)$, если для любых двух точек $x_1,x_2\in(a;b)$ и любых чисел $q_1\geq 0$, $q_2\geq 0$ таких, что $q_1+q_2=1$ имеет место неравенство $f(q_1x_1+q_2x_2)\leq(\geq)q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$.

Выясним геометрический смысл донного определения. Пусть $x_1<x_2$. Тогда, очевидно, что $x=q_1x_1+q_2x_2\in[x_1;x_2]$. Поэтому указанное неравенство означает, что точки любой дуги графика функции лежат под хорой, стягивающей эту дугу.

В дальнейшем будем рассматривать выпуклые вниз функции, поскольку для выпуклых вверх все рассуждения аналогичны.

$$\begin{cases} x=q_1x_1+q_2x_2; \\ 1=q_1+q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}; \\ q_2=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{cases}$$



Неравенство в определении перепишется в виде:

$$f(x)\leq\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

Пусть $x_1<x_2$. Тогда $(x_2-x)f(x_1)+(x_1-x_2)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\geq 0$.

Так как $x_2-x_1=(x_2-x)+(x-x_1)$, то при $x_1<x<x_2$ находим

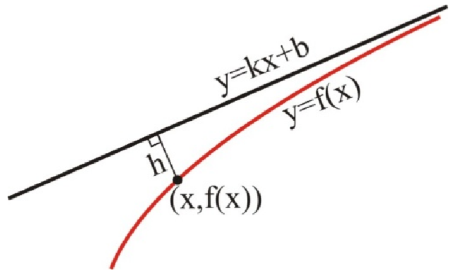
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \qquad (*)$$

Данное неравенство является иной формой записи выпуклости функции.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f:(a;b)\to\mathbf{R}$ была выпуклой вниз (вверх) на $(a;b)$ необходимо и достаточно, чтобы ее производная не убывала (не возрастала) на $(a;b)$. При этом строгому возрастанию (убыванию) производной соответствует строгая выпуклость вниз (вверх).

Доказательство. Пусть $x_1<x_2$. В неравенстве (*) перейдем к пределу при $x\to x_1$, получим $f'(x_1)\leq\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Теперь в неравенстве (*) перейдем к пределу при $x\to x_2$, получим $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2)$. Следовательно, $f'(x_1)\leq f'(x_2)$. Таким образом, производная не убывает.

Если теперь функция строго выпукла вниз, тогда $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. По теореме Лагранжа, имеем $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2)$, где $x_1<\xi_1<x<\xi_2<x_2$. Так как производная не убывает, то $f'(x_1)\le f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\le f'(x_2)$. Следовательно, производная возрастает. Обратно, пусть производная не убывает. Тогда для $a<x_1<x<x_2<b$ по теореме Лагранжа $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$; $f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. При этом $x_1<\xi_1<x<\xi_2<x_2$. Поэтому в силу не убывания (возрастания), получаем $f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$. Следовательно, $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. **Теорема доказана**.



Следствие. Для того чтобы функция $f:(a;b)\to\mathbf{R}$, имеющая на интервале $(a;b)$ вторую производную, была выпуклой вниз (вверх) необходимо и достаточно, чтобы на $(a;b)$ было $f''(x)\ge(\le)0$. Если $f''(x)>(<)0$, то этого достаточно, чтобы функция была строго выпукла вниз (вверх) на интервале $(a;b)$.

Отметим без доказательства следующий дополнительный результат.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f:(a;b)\to\mathbf{R}$ была выпуклой вниз (вверх) на $(a;b)$ необходимо и достаточно, чтобы график этой функции всеми своими точками лежал не ниже (не выше) любой проведенной к нему касательной.

Определение. Пусть $f:U(a)\to\mathbf{R}$ дифференцируема на $U(a)$. Если на множестве $\{x\in U(a):\ x<a\}$ функция выпукла вниз (вверх), а на множестве $\{x\in U(a): x>a\}$ функция выпукла вверх (вниз), то точка $(a,f(a))$ графика называется его точкой перегиба.

Таким образом, при переходе через точку перегиба меняется направление выпуклости графика. Если на $U(a)$ определена вторая производная $f''(x)$ и всюду на $\{x\in U(a):\ x<a\}$ она имеет один знак, а всюду на $\{x\in U(a): x>a\}$ - противоположный, то этого достаточно, чтобы точка $(a,f(a))$ была точкой перегиба графика функции.

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$ (при $x\to+\infty$), если $f(x)=kx+b+o(1),\ x\to-\infty\ (x\to+\infty)$. Если при $x\to a-0\ (a+0)$ имеем $|f(x)|\to\infty$, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика.

Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{o(1)}{x}\right)=k;\qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}(b+o(1))=b.$$

Заметим, что расстояние h от точки $(x,f(x))$ графика функции до прямой $y=kx+b$ равно

$$h=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}=o(1),\quad x\to-(+)\infty.$$