Лекция 6

Необходимые и достаточные условия условного экстремума. Случай ограничений типа неравенств и смешанных ограничений

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \qquad (1a)$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{l} g_j(x) = 0, \;\; j = 1, \ldots, m; \;\; m < n \\ g_j(x) \le 0, \;\; j = m+1, \ldots, p \end{array} \right\}$, m и p – числа; $f(x)$ – целевая функция, $g_j(x),\, j = 1, \ldots, p$, – функции, задающие ограничения (условия).

Будем считать функции $f(x)$; $g_j(x),\, j = 1, \ldots, p$, дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве R^n, а функции $g_j(x)$, задающие ограничения, – называть для краткости просто ограничениями. При $p = m$ задача (1a) со *смешанными ограничениями* преобразуется в задачу с *ограничениями типа равенств*, а при $m = 0$ в задачу с *ограничениями типа неравенств*.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j\left(x_1,\ldots,x_n\right) \le 0,\ j = 1,\ldots,m$, определяющие множество допустимых решений X .

Требуется исследовать функцию $f\left(x\right)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X :

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \qquad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \tag{1}$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, g_j(x) \le 0,\ j = 1,\ldots,m \right\}$.

Утверждение 1 (необходимые условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть x^* *– точка локального минимума (максимума) в задаче* (1). *Тогда найдется такое число* $\lambda_0^* \ge 0$ *и вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)^T$, *не равные одновременно нулю и такие, что выполняются условия*:

- *стационарности обобщенной функции Лагранжа по* x :

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \; ; \qquad (2\text{ а})$$

- *допустимости решения*:

$$g_j(x^*) \le 0, \quad j = 1, \ldots, m; \qquad (2\text{ б})$$

- *неотрицательности для условного минимума*:

$$\lambda_j^* \ge 0, \quad j = 1, \ldots, m \qquad (2\text{ в})$$

(*неположительности для условного максимума*: $\lambda_j^* \le 0, \; j = 1, \ldots, m$);

- *дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_j^* \, g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \qquad (2\text{ г})$$

Если при этом градиенты активных в точке x^* *ограничений линейно независимы (выполняется условие регулярности), то* $\lambda_0^* \ne 0$.

З а м е ч а н и я.

1. Если в решаемой задаче ограничения записаны в форме $g_j(x) \geq 0$, то их необходимо переписать в виде, используемом в (1): $-g_j(x) \leq 0$.

2. Далее будем использовать *множество индексов ограничений, активных в точке* x^*, которое обозначим через J_a.

3. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (2) при $\lambda_0^* \neq 0$, называется *регулярной*, а при $\lambda_0^* = 0$ – *нерегулярной*. Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений.

4. Из условия дополняющей нежесткости следует, что если ограничение в точке x^* пассивное, т.е. $g_j(x^*) < 0$, то $\lambda_j^* = 0$, а если – активное, т.е. $g_j(x^*) = 0$, то $\lambda_j^* \geq 0$ (для минимума) и $\lambda_j^* \leq 0$ (для максимума).

Утверждение 2 (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), *удовлетворяющая системе* (2) *при* $\lambda_0^* \neq 0$, *число активных ограничений в точке* x^* *совпадает с числом* n *переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если* $\lambda_j^* > 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то точка* x^* *– точка условного локального минимума. Если* $\lambda_j^* < 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то* x^* *– точка условного локального максимума в задаче* (1).

Утверждение 3 (необходимое условие минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* *– регулярная точка минимума* (*максимума*) *в задаче* (1) *и имеется решение* (x^*, λ^*) *системы* (2). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* (x^*, λ^*), *неотрицателен* (*неположителен*):

$$d^2L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad (d^2L(x^*, \lambda^*) \leq 0) \tag{3}$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* > 0 \quad (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \leq 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* = 0.$$

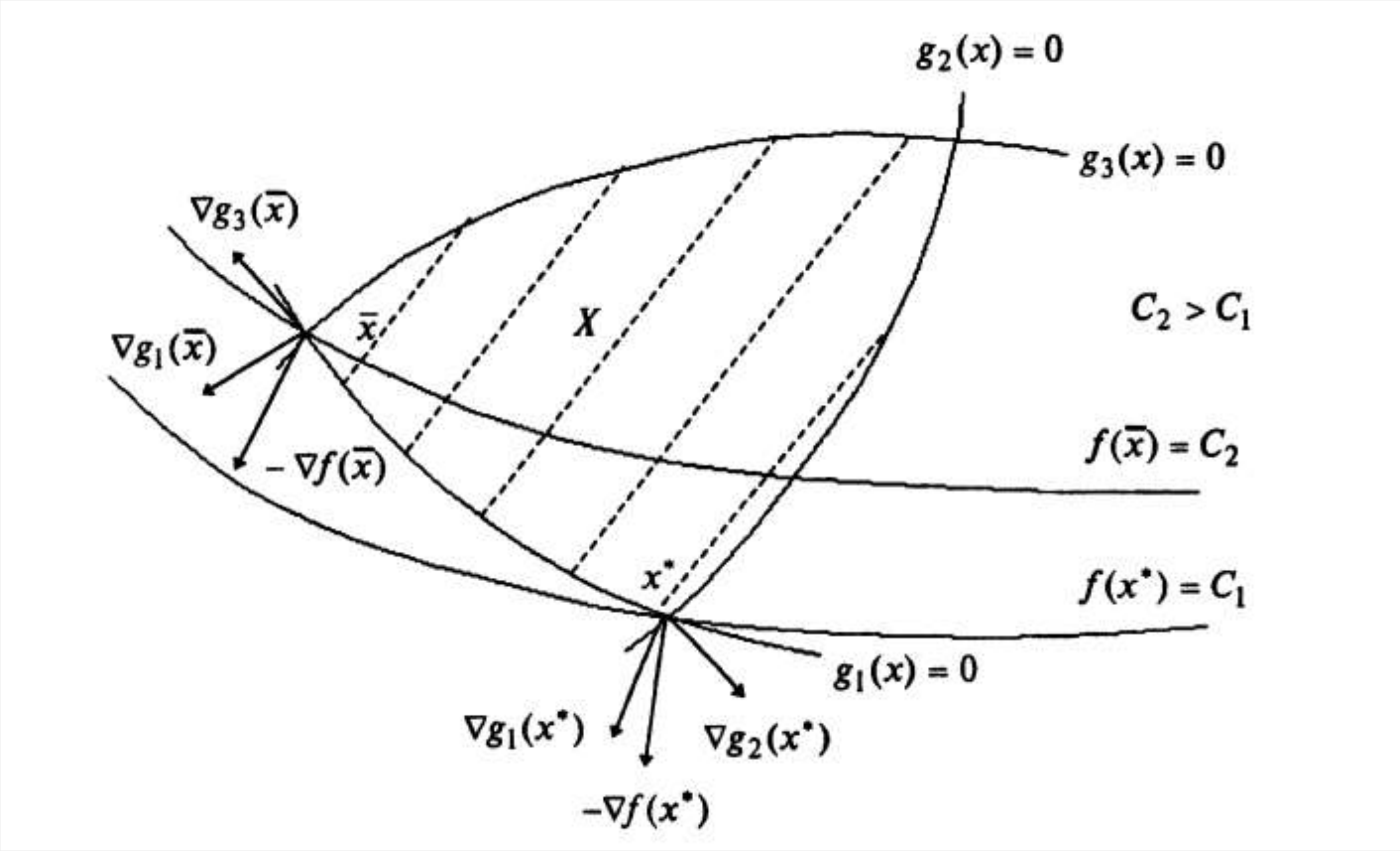
Утверждение 4 (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), *удовлетворяющая системе* (2) *при* $\lambda_0^* \neq 0$. *Если в этой точке* $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$ $(d^2L(x^*, \lambda^*) < 0)$ *для всех ненулевых* $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* > 0 \quad (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \leq 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума (максимума) в задаче* (1).


$g_2(x) = 0$
$g_3(x) = 0$
$\nabla g_3(\bar{x})$
$\bar{x}$
X
$C_2 > C_1$
$\nabla g_1(\bar{x})$
$-\nabla f(\bar{x})$
$f(\bar{x}) = C_2$
x^*
$f(x^*) = C_1$
$g_1(x) = 0$
$\nabla g_1(x^*)$
$\nabla g_2(x^*)$
$-\nabla f(x^*)$

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений типа равенств и неравенств: $g_j(x) = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,\ldots,p$, определяющие множество допустимых решений X .

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f\left(x\right); \quad f(x^*) = \max_{x\in X} f(x), \tag{4}$$

где $X = \left\{ x \left| \begin{array}{l} g_j(x) = 0,\ j = 1,\ldots,m; m < n \\ g_j(x) \le 0,\ j = m+1,\ldots,p \end{array} \right. \right\}$

Утверждение 5 (необходимые условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть x^* *– точка локального минимума* (*максимума*) *в задаче* (4). *Тогда найдется такое число* $\lambda_0^* \ge 0$ *и вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_p^*)^T$, *не равные одновременно нулю и такие, что выполняются условия*:

- *стационарности обобщенной функции Лагранжа по x*:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad \text{(5 а)}$$

- *допустимости решения*:

$$g_j(x^*) = 0, \; j = 1, \ldots, m; \qquad g_j(x^*) \le 0, \; j = m+1, \ldots, p; \quad \text{(5 б)}$$

- *неотрицательности для условного минимума*:

$$\lambda_j^* \ge 0, \qquad j = m+1, \ldots, p \qquad \text{(5 в)}$$

(*неположительности для условного максимума*: $\lambda_j^* \le 0, \, j = m+1, \ldots, p$);

- *дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_j^* \, g_j(x^*) = 0, \qquad j = m+1, \ldots, p. \qquad \text{(5 г)}$$

Если при этом градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x^* линейно независимы (выполняется *условие регулярности*), то $\lambda_0^* \ne 0$.

Утверждение 6 (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), *удовлетворяющая системе* (5) *при* $\lambda_0^* \neq 0$, *суммарное число активных ограничений-неравенств в точке* x^* *и ограничений-равенств совпадает с числом* n *переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если* $\lambda_j^* > 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то точка* x^* *– точка условного локального минимума в задаче* (4). *Если* $\lambda_j^* < 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то* x^* *– точка условного локального максимума.*

Утверждение 7 (необходимые условия минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* *– регулярная точка минимума* (*максимума*) *в задаче* (4) *и имеется решение* (x^*, λ^*) *системы* (5). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* (x^*, λ^*), *неотрицателен* (*неположителен*):

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \ge 0 \qquad (d^2 L(x^*, \lambda^*) \le 0)$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0, \; j = 1, \ldots, m \;\; и \;\; j \in J_a, \, \lambda_j^* > 0 \; (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \le 0, \;\; j \in J_a, \;\; \lambda_j^* = 0.$$

Утверждение 8 (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*)*, удовлетворяющая системе* (5) *при* $\lambda_0^* \neq 0$*. Если в этой точке* $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$ $(d^2L(x^*, \lambda^*) < 0)$ *для всех ненулевых* $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0, \; j = 1, \ldots, m \;\; и \;\; j \in J_a, \; \lambda_j^* > 0 \; (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \leq 0, \;\; j \in J_a, \;\; \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума (максимума) в задаче* (4).