ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЭКСТРЕМУМЫ

8 факультет 1 курс 2 семестр

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Москва, 2020

Теорема 6. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка $m \geqslant 1$ в некоторой δ-окрестности точки $\mathrm{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}^T$ и $\Delta\mathrm{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \ldots & \Delta x_n \end{pmatrix}^T$, $\|\Delta\mathrm{x}\| < \delta$. Тогда

$$f(\mathrm{a}+\Delta\mathrm{x}) = f(\mathrm{a}) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(\mathrm{a}) + r_m(\Delta x),$$

где

$$r_m(\Delta x) = \frac{1}{m!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m f(\mathrm{a}+\theta\Delta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F : [0; 1] \to \mathbf{R}$

$$F(t) = f(\mathrm{a} + t\Delta\mathrm{x})$$

По формуле Тейлора (в $t = 0$) с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{F^{(m)}(t\cdot\theta)}{m!}t^m$$

Отсюда

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{F^{(m)}(t\cdot\theta)}{m!}$$

$$F(1) = f(\mathrm{a} + \Delta\mathrm{x})$$

$$F(0) = f(\mathrm{a})$$

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{a}+t\Delta\mathrm{x})\Delta\mathrm{x}_i\Big|_{t=0} = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(\mathrm{a})$$

и т.д. ■

Определение 7. Пусть $f : U \to \mathbf{R}^n$, $U \subset \mathbf{R}^m$,

$$f(x_1,\dots,x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_m) & \dots & f_n(x_1,\dots,x_m) \end{pmatrix}^T$$

Тогда $f \in C^1$, если все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны всюду на U.

Определение 8. Пусть $f : U \to V$, U, $V \subset \mathbf{R}^n$ – открытые множества. Функция f называется диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно и $f, f^{-1} \in C^1$.

Теорема 7. Пусть $f : U \to \mathbf{R}^n$, $U \subset \mathbf{R}^n$. Если $f \in C^1$ и для некоторой точки $\mathrm{p} \in U$ дифференциал $df(\mathrm{p}) : \ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ является изоморфизмом, то существует содержащее точку p открытое подмножество $U_1 \subset U$, что $f(U_1) \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество и $f : U_1 \to f(U_1)$ является диффеоморфизмом.

Замечание. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) & \dots & f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}^T.$$

Тогда $df(\mathrm{p})$ – изоморфизм $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathrm{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathrm{p}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathrm{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathrm{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathrm{p}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathrm{p}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathrm{p}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathrm{p}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathrm{p}) \end{pmatrix} \neq 0$$

Пример. Пусть $f(u,v) = \begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ uv \end{pmatrix}$ и $f^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}^T$.
Найти u'_x и v'_x.
Решение. По определению обратной функции
$f \circ f^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Отсюда

$$\begin{cases} x = (u(x,y))^2 + (v(x,y))^2; \\ y = u(x,y)v(x,y). \end{cases}$$

Дифференцируем равенства по x. Получим

$$\begin{cases} 1 = 2uu'_x + 2vv'_x; \\ 0 = u'_x v + uv'_x. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x \\ v'_x \end{pmatrix}.$$

По теореме об обратной функции, если $2u^2 - 2v^2 \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $(u \;\; v)^T$ существует обратная функция f^{-1}. Из системы находим

$$u'_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{u}{2u^2 - 2v^2}; \quad v'_x = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix}} = -\frac{v}{2u^2 - 2v^2}.$$

Теорема 8. Пусть $U \subset \mathbf{R}^{m+n}$ - открытое множество и $f : U \to \mathbf{R}^n$ - отображение класса C^1, записанное в координатах как

$$f \quad : \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathrm{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix}^T \in \mathbf{R}^m$, $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T \in \mathbf{R}^n$ и $\mathrm{p} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T \in \mathbf{R}^{m+n}$. Если $f(p) = \mathrm{o} \in \mathbf{R}^n$ и

$$\begin{vmatrix} (f_1)'_{y_1}(\mathrm{p}) & \dots & (f_1)'_{y_n}(\mathrm{p}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_n)'_{y_1}(\mathrm{p}) & \dots & (f_n)'_{y_n}(\mathrm{p}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то $\exists W \subset \mathrm{R}^m$ – открытое множество, $\mathrm{a} \in W$ и $\exists V \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество, $\mathrm{b} \in V$ такие, что

$$\forall \mathrm{x} \in W \ \exists! \mathrm{y} = g(\mathrm{x}) \in V \ : \ f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{o} \in \mathbf{R}^n.$$

Функция $g \in C^1$.
Доказательство. Рассмотрим $\tilde{f} : U \to \mathbf{R}^{m+n}$, $\tilde{f} \in C^1$

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_m \\ f_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \end{pmatrix}.$$

Теорема о неявной функции

Соответствующая матрица Якоби в точке p имеет вид
$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{O} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$, где E – единичная матрица размера $m \times m$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} (f_1)'_{x_1}(\mathrm{p}) & \dots & (f_1)'_{x_m}(\mathrm{p}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_n)'_{x_1}(\mathrm{p}) & \dots & (f_n)'_{x_m}(\mathrm{p}) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} (f_1)'_{y_1}(\mathrm{p}) & \dots & (f_1)'_{y_n}(\mathrm{p}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_n)'_{y_1}(\mathrm{p}) & \dots & (f_n)'_{y_n}(\mathrm{p}) \end{pmatrix}.$$

Заметим $\det \mathrm{R} = \det \mathrm{B} \neq 0$. По теореме об обратной функции существует окрестность точки p

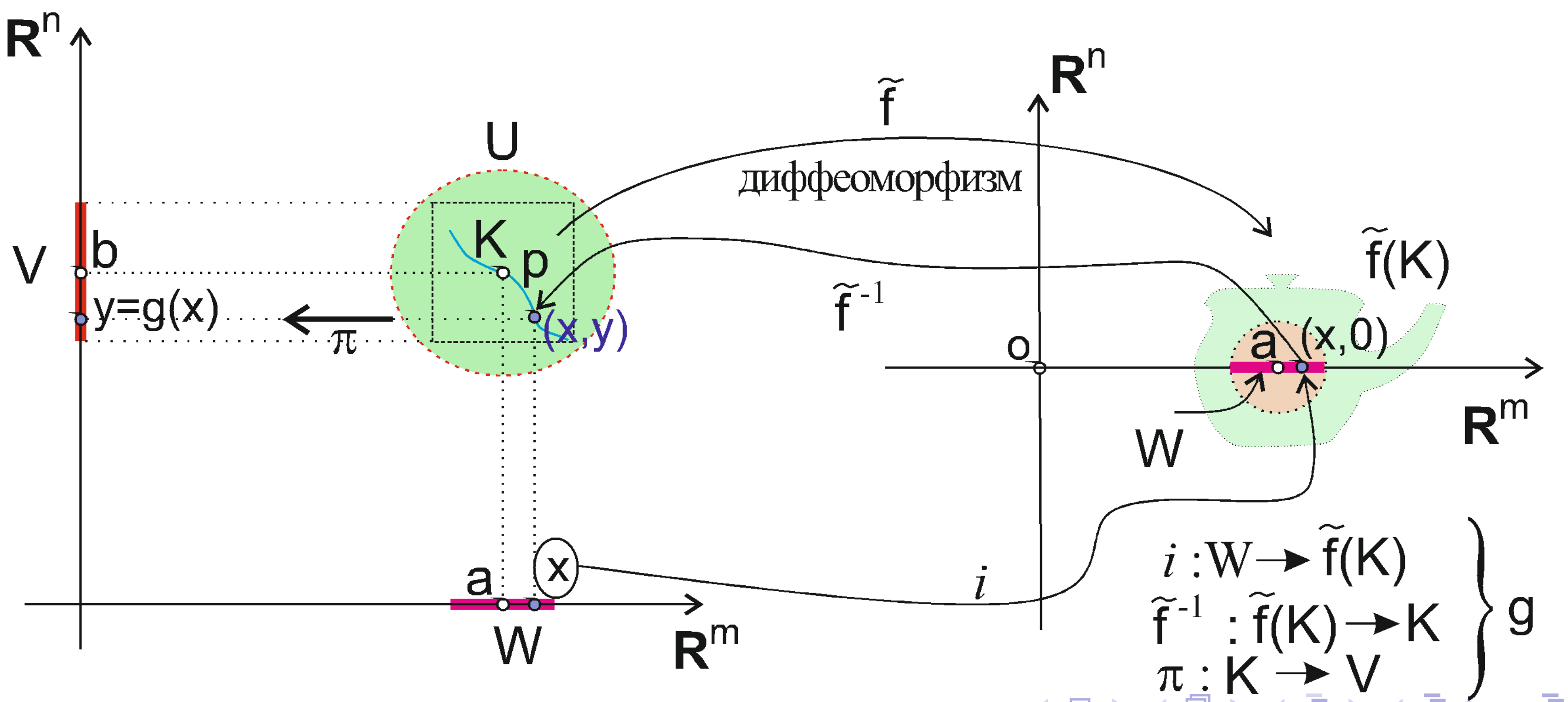
$$K = \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m & y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T : \ |x_i - a_i| < \delta,$$

$$|y_j - b_j| < \delta, \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n \Big\}$$

$\tilde{f} : K \to \tilde{f}(K)$ – диффеоморфизм.

$$\tilde{f}(\mathrm{p}) = \begin{pmatrix} a & 0 \end{pmatrix}^T \in \tilde{f}(K) \text{ – открыто} \Rightarrow \exists \mathrm{U}_r(\mathrm{a}) \subset \tilde{f}(K)$$

Пусть $W = \{\mathrm{x} \in \mathbf{R}^m : \rho(\mathrm{x}, \mathrm{a}) < r\}$ – окр. a,
$V = \{\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T : |y_i - b_i| < \delta, \ i = 1, \dots, n\}$ – окр. b.



Цепочка логических рассуждений

$$\forall \mathrm{x} \in W \Rightarrow (\mathrm{x} \quad \mathrm{o})^T \in \tilde{f}(K) \Rightarrow \exists! \, (\mathrm{x} \quad \mathrm{y})^T \in K :$$

$$(\mathrm{x} \quad \mathrm{o})^T = \tilde{f}\,(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{y}) = (\tilde{\mathrm{x}} \quad f(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{y}))^T \Rightarrow \tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{x}, \;\; f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0.$$

При этом $\mathrm{y} \in V$. Заметим, что $g : W \to V$ – это отображение класса C^1 поскольку оно является композицией отображений класса C^1:

$$i \;:\; W \to \mathbf{R}^{m+n}, \;\; i : \mathrm{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{o} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{f}^{-1} : \tilde{f}(K) \to K$$

и проекции

$$\pi \;:\; K \to V, \;\; \pi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{y}.$$

3387. Найти z'_x, $z''_{x,y}$, если

$$x + y + z = e^{-x-y-z}$$

Решение. Дифференцируем уравнение по x и по y

$$1 + z'_x = -e^{-x-y-z} \cdot (1 + z'_x); \qquad 1 + z'_y = -e^{-x-y-z} \cdot (1 + z'_y)$$

Отсюда

$$z'_x = -1; \qquad z'_y = -1.$$

Отсюда

$$z''_{x,y} = (z'_x)'_y = (-1)'_y = 0. \quad \blacksquare$$

Примеры

Садовничий. Найти $z'_x(x,y)$, $u'_x(x,y)$, $z''_{x,x}(x,y)$, если

$$\begin{cases} x+y+z+u=a; \\ x^3+y^3+z^3+u^3=b \end{cases}$$

Решение. В данном случае

$$f(x,y,z,u)=\begin{pmatrix} x+y+z+u-a \\ x^3+y^3+z^3+u^3-b \end{pmatrix}$$

Если

$$\begin{vmatrix} (f_1)'_z & (f_1)'_u \\ (f_2)'_z & (f_2)'_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3z^2 & 3u^2 \end{vmatrix} = 3(u^2-z^2)\neq 0,$$

то $z(x,y)$, $u(x,y)$ существуют.

Дифференцируем уравнения системы по x

$$\begin{cases} 1 + z'_x + u'_x = 0; \\ 3x^2 + 3z^2 z'_x + 3u^2 u'_x = 0. \end{cases} \Rightarrow z'_x = \frac{x^2 - u^2}{u^2 - z^2}, \quad u'_x = \frac{z^2 - x^2}{u^2 - z^2}$$

Еще раз дифференцируем уравнения системы по x:

$$\begin{cases} z''_{x,x} + u''_{x,x} = 0; \\ 6x + 6z(z'_x)^2 + 3z^2 z''_{x,x} + 6u(u'_x)^2 + 3u^2 u''_{x,x} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$z''_{x,x} = 2\frac{x(u^2 - z^2)^2 + z(x^2 - u^2)^2 + u(z^2 - x^2)^2}{(u^2 - z^2)^3}$$

Определение 1. Пусть $f: \ \mathrm{U}_{\Delta}(a) \to \mathbf{R}$, $\mathrm{U}_{\Delta}(a) \subset \mathbf{R}^n$. Функция f имеет в точке a локальный минимум (максимум), если

$$\exists \mathrm{U}_{\delta}(a) \subset \mathrm{U}_{\Delta}(a): \ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_{\delta}(a) \Rightarrow f(x) \geqslant f(a) \ \ (f(x) \leqslant f(a)).$$

Если неравенства строгие, то a – строгий локальный минимум (максимум).

Теорема 1 [Необходимое условие экстремума]. Пусть $f:\ \mathrm{U}_\Delta(a) \to \mathbf{R}$, $\mathrm{U}_\Delta(a) \subset \mathbf{R}^n$. Если a является точкой локального экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует частная производная f'_{x_i}, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть $a = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}^T$ и

$$\varphi(x_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Тогда

$$\varphi'(a_i) = f'_{x_i}(a)$$

и функция $\varphi(x_i)$ имеет в точке a_i локальный экстремум. Поэтому

$$\varphi'(a_i) = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 2 [Достаточное условие экстремума]. Пусть $f \in C^2$, $f: \ \mathrm{U}_\Delta(a) \to \mathbf{R}$, $\mathrm{U}_\Delta(a) \subset \mathbf{R}^n$ и $f'_{x_i}(a) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Если квадратичная форма

$$A(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a) h_i h_j = d^2 f(a)$$

положительно определена (отрицательно определена), то a – точка строгого локального минимума (соответственно строгого локального максимума); если же квадратичная форма $A(h_1, ..., h_n)$ является неопределенной, то в точке a нет экстремума.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - 10z^2 + 4xz + 3yz - 2x - y + 13z + 5.$$

Решение. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} f'_x = -2x + 4z - 2 = 0, \\ f'_y = -2y + 3z - 1 = 0, \\ f'_z = -20z + 4x + 3y + 13 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Итак, $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$. Вычислим частные производные 2-го порядка в точке M(1,1,1)

$$f''_{x,x} = -2,\ f''_{x,y} = 0,\ f''_{x,z} = 4,\ f''_{y,x} = 0,$$

$$f''_{y,y} = -2,\ f''_{y,z} = 3,\ f''_{z,z} = -20.$$

Отсюда

$$d^2 f(a) = -2dx^2 - 2dy^2 - 20dz^2 + 8dxdz + 6dydz$$

Пример

Матрица формы:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -20 \end{pmatrix}$$

Проверяем критерий Сильвестра:

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -20 \end{vmatrix} = -30 < 0.$$

Вывод: Форма отрицательно определенная, a есть точка максимума функции f и $f_{\max} = f(1,1,1) = 10$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $u(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8 = 0, \quad u > 2.$$

Решение. Необходимое условие экстремума

$$\begin{cases} 2x + 2uu'_x - 4 - 4u'_x = 0; \\ 2y + 2uu'_y - 6 - 4u'_y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \frac{2x-4}{4-2u} = 0; \\ u'_y = \frac{6-2y}{2u-4} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = 2$, $y = 3$. Из уравнения

$$x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8 = 0$$

находим $u = 5$.

Пример

Находим вторые частные производные:

$$u''_{x,x}(2,3) = \left.\frac{2(4-2u)+2(2x-4)u'_x}{(4-2u)^2}\right|_{x=2,y=3} = -\frac{1}{3}.$$

$$u''_{y,y}(2,3) = \left.\frac{-2(2u-4)-2(6-2y)u'_y}{(2u-4)^2}\right|_{x=2,y=3} = -\frac{1}{3}.$$

$$u''_{x,y}(2,3) = \left.\frac{-(2x-4)(-2u'_y)}{(4-2u)^2}\right|_{x=2,y=3} = 0.$$

Отсюда

$$d^2u(2,3) = -\frac{1}{3}(dx^2+dy^2) < 0 \Rightarrow (2,3) \text{ локальный максимум.}$$

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество и $f: \ G \to \mathbf{R}$, $g_i: \ G \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, s$.

. . . .

$$X = \{\mathrm{x} \in G : \ g_i(\mathrm{x}) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, s\}$$

. . . .

Определение 2. Точка $\mathrm{a} \in X$ называется точкой локального условного экстремума функции $f(\mathrm{x})$ относительно ограничений (уравнений связи) $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве X.

Вводим в рассмотрение функцию Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda) = \lambda_0 f(\mathrm{x}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i g_i(\mathrm{x}), \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \dots & \lambda_s \end{pmatrix}^T.$$

Теорема 3. Пусть a – точка локального условного экстремума функции f относительно ограничений $g_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Если функции f, g_i, $i = 1, 2, \dots, s$ принадлежат C^1, то существуют числа λ_i^*, $i = 0, 1, \dots, s$, называемые множителями Лагранжа, такие, что $\sum\limits_{i=0}^{s} (\lambda_i^*)^2 \neq 0$ и

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathrm{a}, \lambda^*) = \lambda_0^* \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{a}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(\mathrm{a}) = 0.$$

Замечание. Если в точке a градиенты $\nabla g_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_i}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T$ линейно независимы, то $\lambda_0^* \neq 0$. Поэтому, если $\lambda_i' = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*}$, то

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathrm{a}, \lambda') = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{a}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i' \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(\mathrm{a}) = 0.$$

Теорема 4. Пусть f, g_i, $i = 1, \dots, s$ класса C^2 и

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial x_n} \end{pmatrix} = s, \quad \forall \mathrm{x} \in G.$$

Пусть $\mathrm{a} \in X$ и $L'_{x_i}(\mathrm{a}) = 0$, $i = 1, \dots, n$, где

$$L(\mathrm{x}, \lambda) = f(\mathrm{x}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i g_i(\mathrm{x}).$$

Условный экстремум

Если $d^2L(\mathrm{a})$ является положительно (отрицательно) определенной квадраточной формой переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, при условии, что они удовлетворяют равенствам

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathrm{a}) \cdot dx_i = 0, \quad j = 1, \ldots, s,$$

то a – точка условного строгого минимума (максимума) функции f относительно ограничений $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Если $d^2L(\mathrm{a})$ знаконеопределенная, то a не является экстремумом.

Пример 3. Найти экстремум функции $z = e^{-3xy}$ при условии $x + \frac{y}{2} = 1$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = e^{-3xy} + \lambda(x + \frac{y}{2} - 1).$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -3ye^{-3xy} + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -3xe^{-3xy} + \frac{\lambda}{2} = 0, \\ x + \frac{y}{2} = 1. \end{cases}$$

Из системы находим $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $\lambda = 3e^{-\frac{3}{2}}$.

Найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 9y^2 e^{-3xy}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 9x^2 e^{-3xy};$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -3e^{-3xy} + 9xye^{-3xy},$$

Так как

$$dx + \frac{dy}{2} = 0, \quad \Rightarrow \quad dy = -2dx,$$

то

$$d^2 L\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 9y^2 e^{-3xy}\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} dx^2 + 2\left(-3e^{-3xy} + 9xye^{-3xy}\right)\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} dxdy +$$

$$+9x^2 e^{-3xy}\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} dy^2 = 9e^{-3/2}dx^2 - 6e^{-3/2}dx^2 + 9e^{-3/2}dx^2 =$$

$$= 12e^{-3/2}dx^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{условный минимум.}$$