ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8 факультет 1 курс 2 семестр

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Москва, 2020

Определение 1. Пусть $f: \mathrm{U}_\Delta(a) \to \mathbf{R}$, $\mathrm{U}_\Delta(a) \subset \mathbf{R}^n$. Функция f имеет в точке a локальный минимум (максимум), если

$$\exists \mathrm{U}_\delta(a) \subset \mathrm{U}_\Delta(a): \ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \geqslant f(a) \ \ (f(x) \leqslant f(a)).$$

Если неравенства строгие, то a – строгий локальный минимум (максимум).

Теорема 1 [Необходимое условие экстремума]. Пусть $f:\ \mathrm{U}_\Delta(a) \to \mathbf{R}$, $\mathrm{U}_\Delta(a) \subset \mathbf{R}^n$. Если a является точкой локального экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует частная производная f'_{x_i}, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть $a = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}^T$ и

$$\varphi(x_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Тогда

$$\varphi'(a_i) = f'_{x_i}(a)$$

и функция $\varphi(x_i)$ имеет в точке a_i локальный экстремум. Поэтому

$$\varphi'(a_i) = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 2 [Достаточное условие экстремума]. Пусть $f \in C^2$, $f:\ \mathrm{U}_\Delta(a) \to \mathbf{R}$, $\mathrm{U}_\Delta(a) \subset \mathbf{R}^n$ и $f'_{x_i}(a) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Если квадратичная форма

$$A(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a) h_i h_j = d^2 f(a)$$

положительно определена (отрицательно определена), то a – точка строгого локального минимума (соответственно строгого локального максимума); если же квадратичная форма $A(h_1, ..., h_n)$ является неопределенной, то в точке a нет экстремума.

Доказательство. Обозначим

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{h} = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}^T$$

По формуле Тейлора, с учетом $f'_{x_i}(a) = 0, \ i = 1, 2, ..., n,$

$$f(a + \mathrm{h}) - f(a) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a + \theta \mathrm{h}) h_i h_j =$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a) h_i h_j + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \left(f''_{x_i x_j}(a + \theta \mathrm{h}) - f''_{x_i x_j}(a) \right) h_i h_j =$$

$$= \frac{\delta^2}{2!} \left(\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a) \frac{h_i}{\delta} \frac{h_j}{\delta} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(f''_{x_i x_j}(a + \theta \mathrm{h}) - f''_{x_i x_j}(a) \right) \frac{h_i}{\delta} \frac{h_j}{\delta} \right)$$

Обозначим

$$\varepsilon(\mathrm{h}) = \varepsilon(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(f''_{x_i x_j}(a + \theta \mathrm{h}) - f''_{x_i x_j}(a) \right) \frac{h_i}{\delta} \frac{h_j}{\delta}$$

Так как $f \in C^2$ и $\frac{|h_i|}{\delta} \leqslant 1$, то

$$\lim_{\mathrm{h} \to 0} \varepsilon(\mathrm{h}) = 0.$$

Итак,

$$f(a+\mathrm{h}) - f(a) = \frac{\delta^2}{2!} \left(\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a) \frac{h_i}{\delta} \frac{h_j}{\delta} + \varepsilon(\mathrm{h}) \right) = \frac{\delta^2}{2!} \left(A\left(\frac{\mathrm{h}}{\delta} \right) + \varepsilon(\mathrm{h}) \right)$$

Заметим, что квадратичная форма
$F(y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(a) y_i y_j$ непрерывна на сфере

$$S = \{\mathrm{y} \in \mathbf{R}^n : \ \|\mathrm{y}\| = 1\},$$

которая является ограниченным, замкнутым множеством (компактом). Поэтому (по теореме Вейерштрасса) достигает на нем своего наименьшего m и наибольшего M значений. Кроме того,

$$\frac{\mathrm{h}}{\delta} \in S, \ \text{т.к. } \delta = \|\mathrm{h}\|.$$

★ Пусть форма $A(h_1, ..., h_n)$ положительно определена. Тогда

$$0 < m \leqslant M.$$

Так как

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0} \varepsilon(\mathrm{h}) = 0,$$

то

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall \mathrm{h}, \quad \|\mathrm{h}\| < \delta \ \Rightarrow \ |\varepsilon(\mathrm{h})| < m.$$

Следовательно, при $\|\mathrm{h}\| < \delta$

$$f(a+\mathrm{h}) - f(a) = \frac{\delta^2}{2!}\left(\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a)\frac{h_i}{\delta}\frac{h_j}{\delta}}_{\geqslant m} + \underbrace{\varepsilon(\mathrm{h})}_{\in(-m;m)}\right) > 0.$$

Следовательно,

$$f(a+\mathrm{h}) > f(a) \ \Rightarrow \ a \text{ – строгий лок. мин.}$$

★★ Форма $A(h_1, ..., h_n)$ отрицательно определена. Аналогично $(m \leqslant M < 0)$.
★★★ Пусть $A(h_1, ..., h_n)$ является неопределенной квадратичной формой. Тогда

$$m < 0 < M.$$

Пусть

$$\mathrm{e}_m,\ \mathrm{e}_M \in S: \quad A(\mathrm{e}_m) = m, \quad A(\mathrm{e}_M) = M$$

и $h = t \cdot e_m,\ \ t > 0$. Тогда $\delta = \|\mathrm{h}\| = t$ и

$$f(a_1 + h_1, ..., a_n + h_n) - f(a) = \frac{\delta^2}{2!}\left(A\left(\frac{\mathrm{h}}{\delta}\right) + \varepsilon(\mathrm{h})\right)\Bigg|_{h = t \cdot e_m} =$$

$$= \frac{1}{2!}t^2(m + \varepsilon(h))$$

Так как $m < 0$ и $\lim\limits_{\mathrm{h} \to 0} \varepsilon(\mathrm{h}) = 0$, то

$$\exists \delta_1 > 0 : \quad \forall t \in (0; \delta_1) \Rightarrow f(a + t \cdot e_m) - f(a) < 0.$$

Аналогично для $h = t \cdot e_M, \ t > 0$

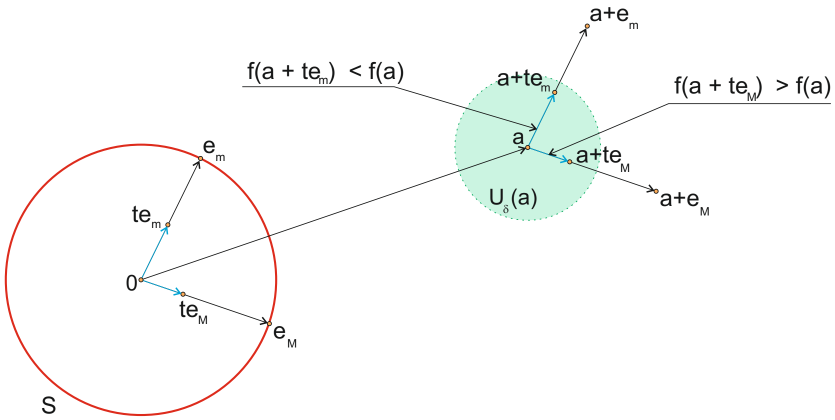
$$\exists \delta_2 > 0 : \quad \forall t \in (0; \delta_2) \Rightarrow f(a + t \cdot e_M) - f(a) > 0.$$

Следовательно, при любом $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\exists \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{U}_\delta(a) : \quad f(\mathrm{x}) > f(a), \ f(\mathrm{y}) < f(a)$$

Значит, a – не экстремум. ■

Экстремум функции нескольких переменных



Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - 10z^2 + 4xz + 3yz - 2x - y + 13z + 5.$$

Решение. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} f'_x = -2x + 4z - 2 = 0, \\ f'_y = -2y + 3z - 1 = 0, \\ f'_z = -20z + 4x + 3y + 13 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Итак, $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$. Вычислим частные производные 2-го порядка в точке M(1,1,1)

$$f''_{x,x} = -2,\ f''_{x,y} = 0,\ f''_{x,z} = 4,\ f''_{y,x} = 0,$$

$$f''_{y,y} = -2,\ f''_{y,z} = 3,\ f''_{z,z} = -20.$$

Отсюда

$$d^2 f(a) = -2dx^2 - 2dy^2 - 20dz^2 + 8dxdz + 6dydz$$

Пример

Матрица формы:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -20 \end{pmatrix}$$

Проверяем критерий Сильвестра:

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -20 \end{vmatrix} = -30 < 0.$$

Вывод: Форма отрицательно определенная, a есть точка максимума функции f и $f_{\max} = f(1,1,1) = 10$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $u(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8 = 0, \quad u > 2.$$

Решение. Необходимое условие экстремума

$$\begin{cases} 2x + 2uu'_x - 4 - 4u'_x = 0; \\ 2y + 2uu'_y - 6 - 4u'_y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \frac{2x-4}{4-2u} = 0; \\ u'_y = \frac{6-2y}{2u-4} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = 2$, $y = 3$. Из уравнения

$$x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8 = 0$$

находим $u = 5$.

Пример

Находим вторые частные производные:

$$u''_{x,x}(2,3)=\left.\frac{2(4-2u)+2(2x-4)u'_x}{(4-2u)^2}\right|_{x=2,y=3}=-\frac{1}{3}.$$

$$u''_{y,y}(2,3)=\left.\frac{-2(2u-4)-2(6-2y)u'_y}{(2u-4)^2}\right|_{x=2,y=3}=-\frac{1}{3}.$$

$$u''_{x,y}(2,3)=\left.\frac{-(2x-4)(-2u'_y)}{(4-2u)^2}\right|_{x=2,y=3}=0.$$

Отсюда

$$d^2u(2,3)=-\frac{1}{3}(dx^2+dy^2)<0\Rightarrow(2,3)\ \text{локальный максимум.}$$

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество и $f: \ G \to \mathbf{R}$, $g_i: \ G \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, s$.

. . . .

$$X = \{\mathrm{x} \in G: \ g_i(\mathrm{x}) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, s\}$$

. . . .

Определение 2. Точка $\mathrm{a} \in X$ называется точкой локального условного экстремума функции $f(\mathrm{x})$ относительно ограничений (уравнений связи) $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве X.

Вводим в рассмотрение функцию Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda) = \lambda_0 f(\mathrm{x}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i g_i(\mathrm{x}), \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \dots & \lambda_s \end{pmatrix}^T.$$

Теорема 3. Пусть a – точка локального условного экстремума функции f относительно ограничений $g_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Если функции f, g_i, $i = 1, 2, \dots, s$ принадлежат C^1, то существуют числа λ_i^*, $i = 0, 1, \dots, s$, называемые множителями Лагранжа, такие, что $\sum\limits_{i=0}^{s} (\lambda_i^*)^2 \neq 0$ и

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathrm{a}, \lambda^*) = \lambda_0^* \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{a}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(\mathrm{a}) = 0.$$

Замечание. Если в точке a градиенты $\nabla g_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_i}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T$ линейно независимы, то $\lambda_0^* \neq 0$. Поэтому, если $\lambda_i' = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*}$, то

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathrm{a}, \lambda') = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{a}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i' \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(\mathrm{a}) = 0.$$

Теорема 4. Пусть f, g_i, $i = 1, \ldots, s$ класса C^2 и

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_s}{\partial x_n} \end{pmatrix} = s, \quad \forall \mathrm{x} \in G.$$

Пусть $\mathrm{a} \in X$ и $L'_{x_i}(\mathrm{a}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, где

$$L(\mathrm{x}, \lambda) = f(\mathrm{x}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i g_i(\mathrm{x}).$$

Если $d^2L(\mathrm{a})$ является положительно (отрицательно) определенной квадраточной формой переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, при условии, что они удовлетворяют равенствам

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathrm{a}) \cdot dx_i = 0, \quad j = 1, \ldots, s,$$

то a – точка условного строгого минимума (максимума) функции f относительно ограничений $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Если $d^2L(\mathrm{a})$ знаконеопределенная, то a не является экстремумом.

Пример 3. Найти экстремум функции $z = e^{-3xy}$ при условии $x + \frac{y}{2} = 1$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = e^{-3xy} + \lambda(x + \frac{y}{2} - 1).$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -3ye^{-3xy} + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -3xe^{-3xy} + \frac{\lambda}{2} = 0, \\ x + \frac{y}{2} = 1. \end{cases}$$

Из системы находим $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $\lambda = 3e^{-\frac{3}{2}}$.

Найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 9y^2 e^{-3xy}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 9x^2 e^{-3xy};$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -3e^{-3xy} + 9xye^{-3xy},$$

Так как

$$dx + \frac{dy}{2} = 0, \quad \Rightarrow \quad dy = -2dx,$$

то

$$d^2 L\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 9y^2 e^{-3xy}\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} dx^2 + 2\left(-3e^{-3xy} + 9xye^{-3xy}\right)\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} dxdy +$$

$$+9x^2 e^{-3xy}\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} dy^2 = 9e^{-3/2}dx^2 - 6e^{-3/2}dx^2 + 9e^{-3/2}dx^2 =$$

$$= 12e^{-3/2}dx^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{условный минимум.}$$