1.1

Докажите линейность и ограниченность функционала $f\colon l_2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{4} k x_{2k}$. Найдите его норм

1. $f: l_2 \to \mathbb{R}$

$f(x) = x_2 + 2x_4 + 3x_6 + 4x_8$

1.) Линейность:

$f(\alpha x) = \alpha x_2 + 2\alpha x_4 + 3\alpha x_6 + 4\alpha x_8 =$

$= \alpha (x_2 + 2x_4 + 3x_6 + 4x_8) = \alpha f(x)$

$f(x+y) = x_2 + y_2 + 2x_4 + 2y_4 + 3x_6 + y_6 + 4x_8 + 4y_8 =$

$= (x_2 + 2x_4 + 3x_8 + 4x_8) + (y_2 + 2y_4 + 3y_6 \pm 4y_8) =$

$= f(x) + f(y)$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$(x, y) \leq |x| \cdot |y|$

в норм. пр.-ве.

$(x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\|$

2.) Норма

По формуле Рисса:

$\|f\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{4} k^2\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} =$

$= \sqrt{30}$

Для $l_2 \cong l_2$

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$

$\|f\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\|f\| = \|a_k\|_q$

$l_3 \cong l_{\frac{2}{3}}$

Докажите линейность и ограниченность функционала $f\colon C[-4;4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_{[-4;4]} x(t)\,dt - 5x(0)$. Найдите его норму.

(1) Д-ем линейность

1) $f(\alpha x) = \alpha \int\limits_{[-4,4]} x(t)dt - 5\alpha x(0) =$

$= \alpha \left(\quad - // - \quad \right)$

2) $f(x+y) = \int\limits_{[-4,4]} x(t)dt + \int\limits_{[-4,4]} y(t)dt -$

$- 5x(0) - 5y(0) = f(x) + f(y)$

(2) Норма

$\|f\| - ?$

$|f(x)| = \left| \int\limits_{[-4,4]} x(t)dt - 5x(0) \right| \leq$

$\leq \left| \int\limits_{[-4,4]} x(t)dt + 5x(0) \right| \leq$

$\leq \left| \int\limits_{[-4,4]} x(t)dt \right| + |5x(0)| \leq$

$|x(t)| \max\limits_{t \in [a;b]} |x(t)|$

В $C[3]$

$\|x\| \max\limits_{\tau \in [-3;3]} |x(\tau)|$

$[-4,4]$

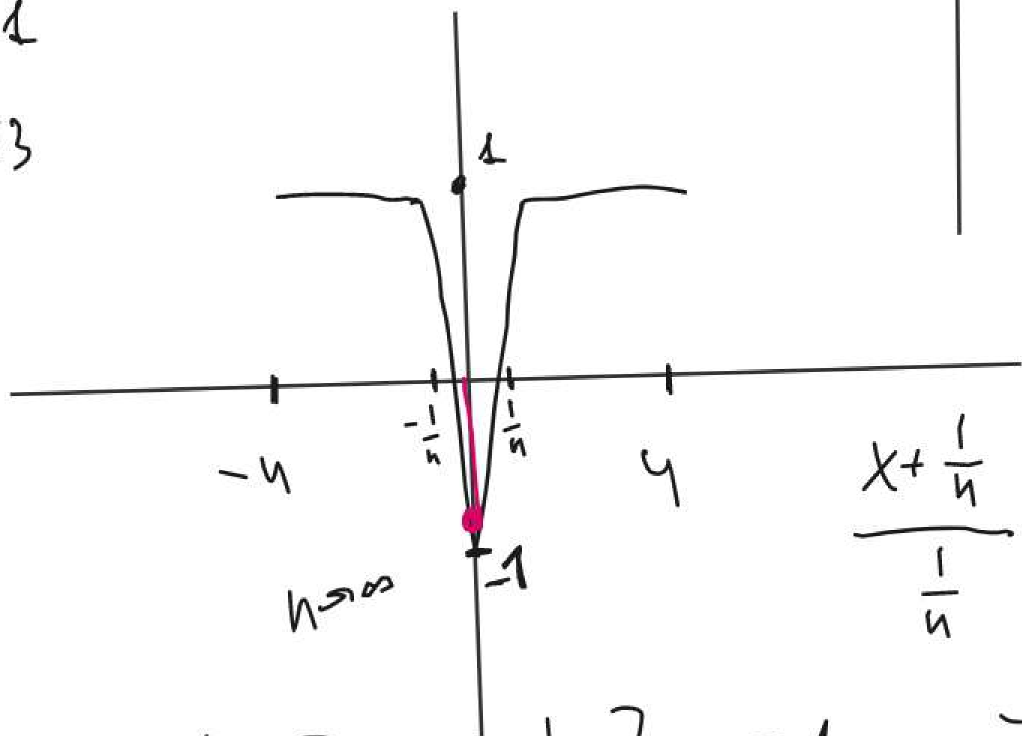
$$\le \int_{[-4,4]} |x(t)|\,dt + 5|x(0)| \le$$

$$\le \int_{[-4,4]} \max_{t\in[-4,4]} |x(t)|\,dt + 5\max_{t\in[-4,4]} |x(t)| \le$$

$$\le 8\|x\| + 5\|x\| = 13\cdot\|x\|$$

$\tilde{x}$: 1) $\|\tilde{x}\| = 1$

$|f(\tilde{x})| = 13$



$$\frac{x+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{y-1}{-1-1}$$

$$x_n = \begin{cases} 1, & t\in[-4; -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}; 4] \\ -2nt-1, & t\in[-\frac{1}{n}; 0] \\ 2nt-1, & t\in[0; \frac{1}{n}] \end{cases}$$

1.2

Докажите линейность и ограниченность функционала $f: l_\infty \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} k x_{2k}$. Найдите его норму.

1.) Лин. (см. 1.1)

$l_\infty \cong l_1$ $\quad \|x\|_{l_1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$

2.) Норма

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k+1} k| =$$

$p = 2 \Rightarrow q = 2$

$$= \sum_{k=1}^{5} |k| = 1+2+3+4+5 = 15$$

1.4

Докажите линейность и ограниченность функционала $f\colon l_1 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{100} e^{-k} x_{2k}$. Найдите его норму.

1) $f(\alpha x) = \alpha e^{-1} x_2 + \alpha e^{-2} x_4 + \alpha e^{-3} x_6 + \dots$
$= \alpha f(x)$

$f(x+y) = e^{-1} y_2 + e^{-1} x_2 + e^{-2} y_4 + e^{-2} x_4$
$\dots = f(x) + f(y)$

2) Норма

$\|f\| = e^{-1}$

$l_1 \cong l_\infty$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{q} = 1$

$\frac{1}{q} \to 0$

в l_∞ $\|x\| = \max_k |x_k|$

(берем максимальный элемент)

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$

$\|f\|_p = \|a\|_q$

$a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$

Докажите линейность и ограниченность функционала $f\colon C[-3;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_{[-1;1]} x(2t)\,dt - \int\limits_{[0;3]} x(t)\,dt$. Найдите его норму.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|$$

$$|f(x)| = \Big| \overset{*}{\int\limits_{[-1;1]}} x(2t)\,dt - \int\limits_{[0;3]} x(t)\,dt \Big| = \Big| \overset{*}{} \begin{matrix} 2t = s \\ dt = \frac{ds}{2} \end{matrix} \Big| =$$

$$= \Big| \frac{1}{2} \int\limits_{[-2;2]} x(t)\,dt - \int\limits_{[0;3]} x(t)\,dt \Big| =$$

$$= \Big| \frac{1}{2} \int\limits_{[-2;0]} x(t)\,dt + \frac{1}{2} \int\limits_{[0;2]} x(t)\,dt - \int\limits_{[0;2]} x(t)\,dt - \int\limits_{[2;3]} x(t)\,dt \Big| =$$

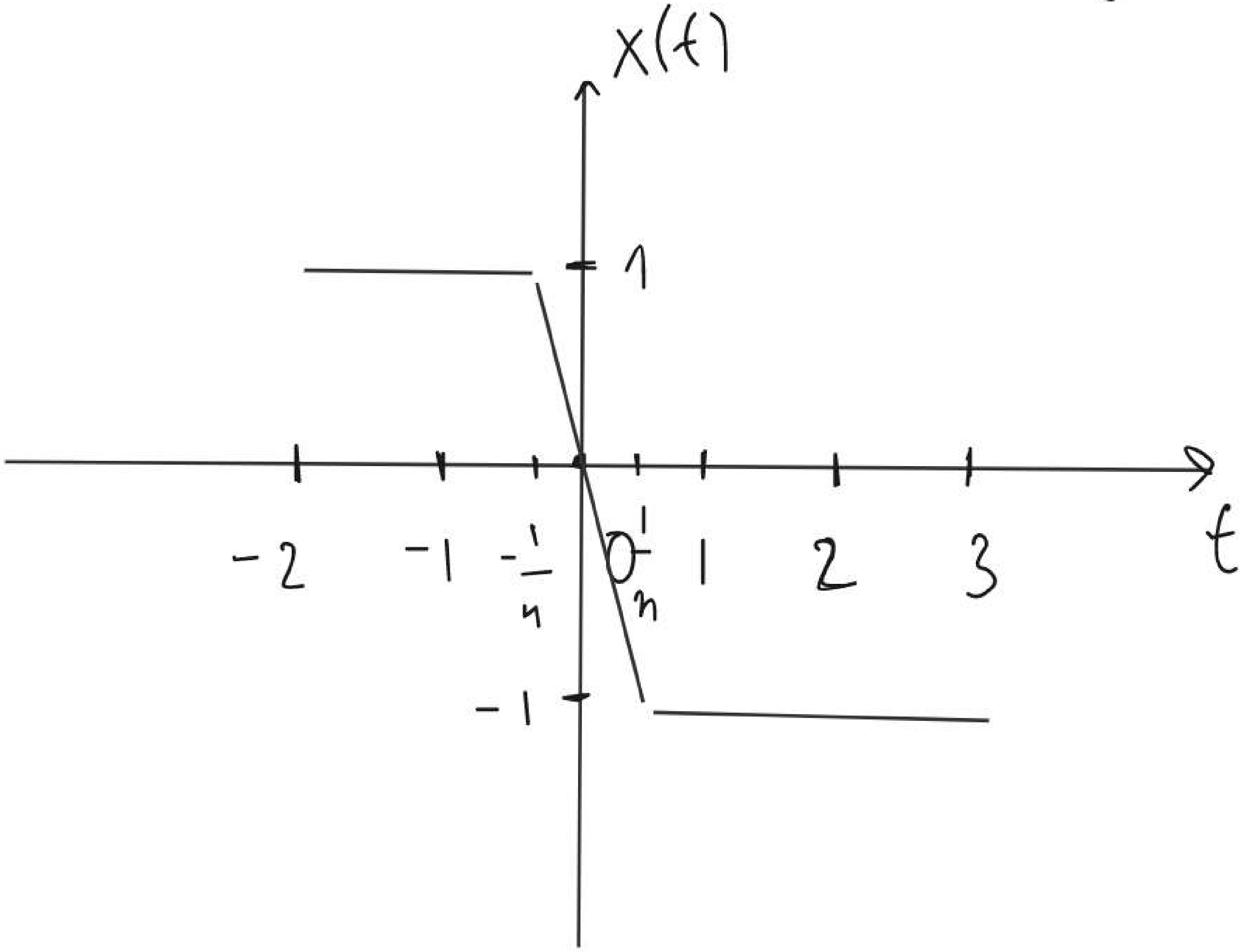
$$= \Big| \frac{1}{2} \int\limits_{[-2;0)} x(t)\,dt - \frac{1}{2} \int\limits_{[0;2]} x(t)\,dt - \int\limits_{[2;3]} x(t)\,dt \Big| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int\limits_{[-2;0]} |x(t)|\,dt + \frac{1}{2} \int\limits_{[0;2]} |x(t)|\,dt + \int\limits_{[2;3]} |x(t)|\,dt \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\|x\| \cdot \int_{[-2;0]} dt + \frac{1}{2}\|x\| \int_{[0;2]} dt + \|x\| \int_{[2;3]} dt =$$

$$= 3\|x\|$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{[-2;0]} x(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{[0;2]} x(t)\,dt - \int_{[2;3]} x(t)\,dt$$



$$x_n = \begin{cases} 1, & t \in [-2; -\frac{1}{n}] \\ -nt, & t \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}] \\ -1, & t \in [\frac{1}{n}; 3] \end{cases}$$

Докажите линейность и ограниченность функционала $f\colon L_1[-3;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_{[-1;1]} x(t)\,dt - \int\limits_{[0;3]} x\left(\frac{t}{2}\right)\,dt$. Найдите его норму.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|$$

$$|f(x)| = \left| \int\limits_{[-1;1]} x(t)\,dt - \int\limits_{[0;3]}^{*} x\left(\frac{t}{2}\right) dt \right| = \left| \begin{matrix} * \ \frac{t}{2} = s \\ dt = 2ds \end{matrix} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{[-1;1]} x(t)\,dt - 2 \int\limits_{[0;\frac{3}{2}]} x(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{[-1;0]} x(t)\,dt + \int\limits_{[0;1]} x(t)\,dt - 2 \int\limits_{[0;1]} x(t)\,dt - 2 \int\limits_{[1;\frac{3}{2}]} x(t)\,dt \right|$$

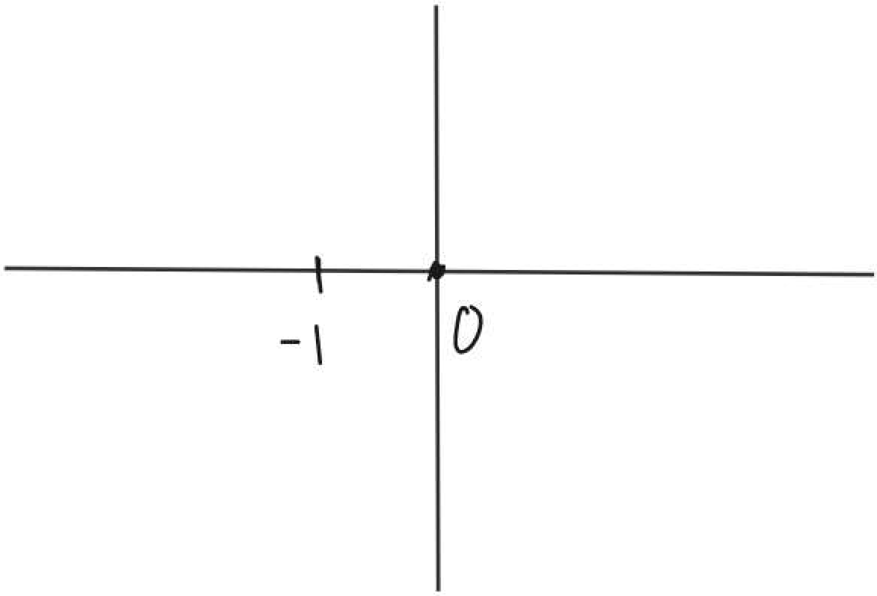
$$= \left| \int\limits_{[-1;0]} x(t)\,dt - \int\limits_{[0;1]} x(t)\,dt - 2 \int\limits_{[1;\frac{3}{2}]} x(t)\,dt \right| \le$$

$$= \left| \int\limits_{[-1;0]} x(t)\,dt - \int\limits_{[0;1]} x(t)\,dt - 2\int\limits_{[1;\frac{3}{2}]} x(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{[-1;0]} |x(t)|\,dt + \int\limits_{[0;1]} |x(t)|\,dt + 2\int\limits_{[1;\frac{3}{2}]} |x(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{[-3;3]} |x(t)|\,dt + \int\limits_{[-3;3]} |x(t)|\,dt + 2\int\limits_{[-3;3]} |x(t)|\,dt =$$

$$= 4\,\|x\|$$



Frame 2

Докажите линейность и ограниченность функционала $f: C[-3;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_{[-3;3]} |t| x\left(\frac{t}{2}\right) dt$. Найдите его норму.

$$|F(x)| = \left| \int\limits_{[-3;3]} |t| x\left(\tfrac{t}{2}\right) dt \right| \leq \int\limits_{[-3;3]} \left| |t| \cdot x\left(\tfrac{t}{2}\right) \right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{[-3;3]} |t| \cdot \left|x\left(\tfrac{t}{2}\right)\right| dt \leq \left| \|x\| = \max_{\tau \in [-3;3]} \left|x\left(\tfrac{t}{2}\right)\right| \right| \leq$$

$$\leq \|x\| \int\limits_{[-3;3]} |t| dt = \|x\| \cdot 2 \int\limits_{[0;3]} t\, dt =$$

$$= \|x\| \cdot \cancel{2} \frac{t^2}{\cancel{2}} \Big|_0^3 = 9 \|x\| \leq 9$$

$F(x)$

$\|F\| \geq \frac{|F(x)|}{\|x\|}$

$\|F\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |F(x)|$

$\boxed{\exists \|x\| \leq 1}$

$\|F\| \geq \frac{|F(x)|}{\|x\|}$

$\|F\| \geq 9$

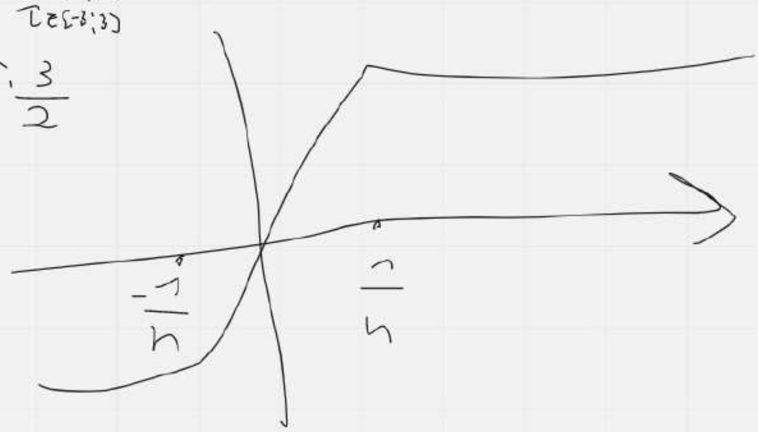
Пусть $y(t) = \operatorname{sign}(t) \notin$

$\|x\| = \max\limits_{\tau \in [-3;3]} |x(\tau)|$

$$\int\limits_{[-3;3]} |t| \operatorname{sign}(t) dt = \int\limits_{[-3;0]} t\,dt + \int\limits_{[0;3]} t\,dt = 9$$

$-1 \int_0 1$

$6 \cdot \frac{3}{2}$



Рассмотрим послед-сть непр. ф-ий (для доопред. sign)

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nt, & t \in (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = \operatorname{sign}(t)$

Докажите линейность и ограниченность функционала $f\colon C[-4;4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_{[0;2]} x(t-1)\,dt - 3x(0)$. Найдите его норму.

Ответ: 5

1) Докажем линейность

2) $|f(x)| = \left| \int\limits_{[0;2]} x(t-1)dt - 3x(0) \right| \leqslant$

$\leqslant \left| \int\limits_{[0;2]} x(t-1)dt \right| + |3x(0)| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_{[0;2]} |x(t-1)|dt + |3x(0)| \leqslant \Big| \|x\| \leqslant 1 \Big| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_{[0;2]} \max\limits_{\tau \in [-4;4]} |x(\tau-1)|dt + \left|3 \max\limits_{\tau \in [-4;4]} |x(\tau)|\right| \leqslant$

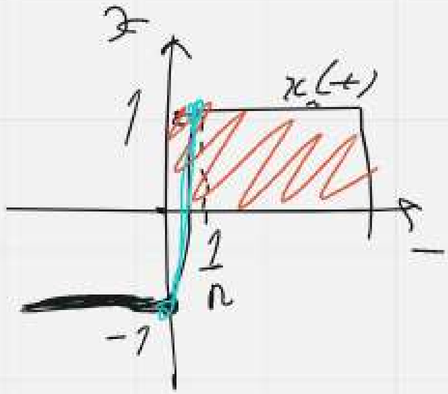
$\leqslant \|x\| \int\limits_{[0;2]} dt + 3\|x\| \leqslant 5\|x\| \leqslant 5$

3) Пусть

$$\frac{t-t_0}{t_1-t_0} = \frac{x(t)-x(t_0)}{x(t_1)-x(t_0)}$$

$x(0) = -1$

$$\tilde{x}_n(t) = \begin{cases} -1 & [-4;0] \\ 2nt-1, & t \in [0;\frac{1}{n}] \\ 1 & [\frac{1}{n};4] \end{cases}$$



4) $\underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{n}} 2nt-1\,dt}_{0} + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2} dt + 3 =$

$= 2 - \frac{1}{n} + 3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 5$ ✓✓

$\|f\| \leqslant \frac{|f(\tilde{x})|}{\|\tilde{x}\|}$ $\leqslant 1$

Найдите норму оператора $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2, x_3, x_3, x_3, x_4, \ldots)$. и постройте сопряжённый к нему оператор.

$$\|Ax\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + |x_i|^2 + |x_i|^2\right)^{1/2} = \left(3\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{3}\,\|x\|$$

1) Линейность 2) Находим $\|Ax\|$ при $\|x\| \leq 1$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

$$\|A\| = \sqrt{3}$$

$$\left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$y = (1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

$$\|y\| = \sqrt{3} \qquad y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \ldots\right)$$

$$\|y\| = 1$$

$$\|Ay\| = (3 \cdot 1^2)^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\|A\| \geq \frac{\|Ay\|}{\|y\|}; \quad \|A\| \geq \sqrt{3} \qquad \|Ax\| \leq \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$= \|A\| = \sqrt{3}.$$

Frame 4

Докажите ограниченность оператора $A\colon L_2[-1;1] \to L_2[-1;1]$, $Ax(t) = \int\limits_{[-|t|,|t|]} \tau x(\tau)\,d\tau$ и постройте сопряжённый к нему оператор.

найдём норму

$x(t)$

1) Линейность

2) $\|Ax\|^2 = \int\limits_{[-1;1]} \left(\int\limits_{[-|t|,|t|]} \tau x(\tau) d\tau \right)^2 dt \le \int\limits_{[-1;1]} \left(\left(\int\limits_{[-|t|;|t|]} \tau^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int\limits_{[-|t|,|t|]} x^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \right)^2 dt$

$\le \int\limits_{[-1;1]} \left(\frac{|t|^3}{3} \right) \cdot \left(\int\limits_{[-1;1]} x^2(\tau) d\tau \right)$

$\|Ax\| \le \|x\| \left(\int\limits_{[-1;1]} \frac{|t|^3}{3} dt \right)^{1/2} =$

$= \|x\| \frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

2-ые номера

Q. 1

Вопрос 3
Пока нет ответа

Найдите норму оператора $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1 + x_2 - x_3, x_4 + x_5 - x_6, x_7 + x_8 - x_9, \dots)$, и постройте сопряженный к нему оператор.

$$A: l_2 \to l_2$$

$$x_{10} + x_{11} - x_{12}$$

$$Ax = (x_1 + \underline{x_2} - x_3, x_4 + \underline{x_5} - x_6, x_7 + \underline{x_8} - x_9, \dots)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{3k-2} + x_{3k-1} - x_{3k}|^2 =$$

$$x, y \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$
$$a^2, b^2$$
$$a^2 + b^2 \geq 2|a||b|$$

$$= |x_1 + x_2 - x_3|^2 + |x_4 + x_5 - x_6|^2 + \dots \leq$$

$$\leq |x_1 + x_2 + x_3|^2 + |x_4 + x_5 + x_6|^2 + \dots =$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + 2|x_1|\cdot|x_2| + 2|x_1|\cdot|x_3| + 2|x_2|\cdot|x_3| + \dots + \leq$$

$$\leq 3|x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + 3|x_4|^2 + \dots \leq$$

$$|x_1|^2 + |x_2^2| + |x_1|^2 + |x_3|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$$

$$\leq 3 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 3\|x\|^2$$

$$\|Ax\|^2 = 3\|x\|^2$$

$$\|Ax\| = \sqrt{3}\,\|x\|$$

$$\|\tilde{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

$$\|Ax\| = \sqrt{3}\,\|x\|$$

$$\tilde{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0, \dots\right)$$

$$\|\tilde{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{3} |x_k|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$A\tilde{x} = \left(\sqrt{3}, 0, 0, 0, \dots\right)$$

$$\|A\tilde{\ }\|^2 = \sum_{k=1} |x_k|^2 = 3$$

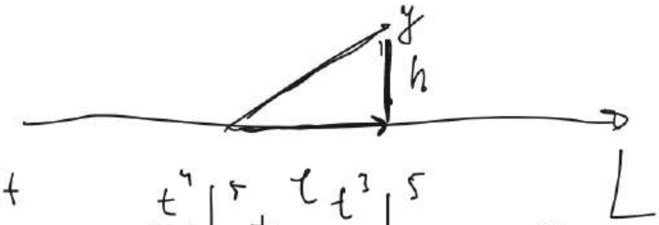
$$\|Ax = \sqrt{3}$$

В пространстве $L_2[0;5]$ постройте перпендикуляр из точки $y(t)=t+1$ на линейное пространство $L=\{\alpha z \mid \alpha \in \mathbb{R},\ z(t)=t^2\}$.

3.1.

$L_2[0;5] \qquad y(t)=t+1 \qquad L=\{\alpha z \mid \alpha \in \mathbb{R},\ z(t)=t^2\}$

$l = \text{пр}_L\, y$



$l = \alpha z$

$$\alpha = \frac{(y,z)}{(z,z)} = \frac{\int\limits_{[0;5]}(t^3+t^2)\,dt}{\int\limits_{[0;5]} t^4\,dt} = \frac{\frac{t^4}{4}\Big|_0^5 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^5}{\frac{t^5}{5}\Big|_0^5} = \frac{\frac{625}{4}+\frac{125}{3}}{625} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{15} = \frac{19}{60}$$

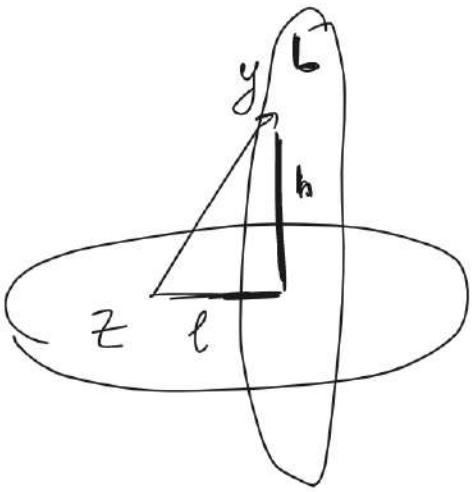
$$l = \frac{19}{60}t^2$$

$$h = y - l = t + 1 - \frac{19}{60}t^2$$

В пространстве $L_2[-2;4]$ найдите проекцию элемента $y(t) = t$ на линейное пространство $L = \{x \mid (x, z) = 0,\ z(t) = t^2\}$.

3.2. $y(t) = t$

$L = \{ x \mid (x, z) = 0\ ,\ z(t) = t^2 \}$ $\quad$ $пр_L\, y$



$l = \alpha z$

$$\alpha = \frac{(y, z)}{(z, z)} = \frac{\int\limits_{[-2;4]} t^3\, dt}{\int\limits_{[-2;4]} t^4\, dt} =$$

$$= \frac{\left.\frac{t^4}{4}\right|_{-2}^{4}}{\left.\frac{t^5}{5}\right|_{-2}^{4}} = \frac{5}{4} \cdot \left.\frac{1}{t}\right|_{-2}^{4} =$$

$$= \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$$

3.3.

В пространстве $L_2[-4;4]$ найдите расстояние от элемента $y(t) = 2t$ до линейного пространства $L = \{\alpha z \mid \alpha \in \mathbb{R},\ z(t) = |t|\}$.

$L = \{\alpha z \mid \alpha \in \mathbb{R},\ z(t) = |t|\}$

$l = \alpha z$

$$\alpha = \frac{(y, z)}{(z, z)} = \frac{\int\limits_{[-4;4]} 2t|t|dt}{\int\limits_{[-4;4]} t^2 dt} =$$

$= 0$

$l = 0$

$y = h$ $\quad \|h\| = \|y\| = \sqrt{\int\limits_{[-4;4]} 4t^2 dt} = 2\sqrt{\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-4}^{4}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{128}{3}} =$

$= 16 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

В пространстве $L_2[-1;1]$ найдите проекцию элемента $y(t)=|t|$ на линейное пространство $L=\{\alpha z \mid \alpha\in\mathbb{R},\ z(t)=t^2\}$.

$$L=\{\alpha z \mid \alpha\in\mathbb{R},\ z(t)=t^2\}$$

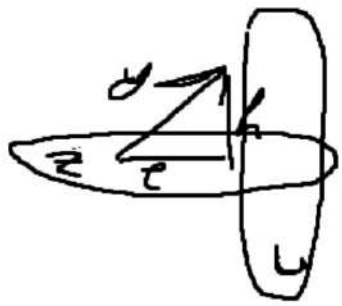
$$y(t)=|t| \qquad l=\alpha z$$

$$\alpha=\frac{(y,z)}{(z,z)}=\frac{\int\limits_{[-1;1]} t^2\cdot|t|\,dt}{\int\limits_{[-1;1]} t^4\,dt}=\frac{\cancel{2}\int\limits_{[0;1]} t^3\,dt}{\cancel{2}\int\limits_{[0;1]} t^4\,dt}=\frac{\frac{t^4}{4}\Big|_0^1}{\frac{t^5}{5}\Big|_0^1}=$$

$$=\frac{5}{4}$$

$$l=\frac{5}{4}t^2$$

В пространстве $L_2[0;4]$ найдите проекцию элемента $y(t) = t$ на линейное пространство $L = \{x \mid (x, z) = 0, z(t) = t^3\}$.



$$l = \alpha z$$

$$\alpha = \frac{(y,z)}{(z,z)} = \frac{\int_{[0;4]} t \cdot t^3 \, dt}{\int_{[0;4]} t^6 \, dt} = 0{,}014$$

$$l = 0{,}014 t^3$$

В пространстве $L_2[0;4]$ найдите расстояние от элемента $y(t) = 2 - t$ до линейного пространства $L = \{\alpha z \mid \alpha \in \mathbb{R},\ z(t) = t^2\}$.

$$\|h\| = \|y - l\| = \|y - \alpha z\| =$$

$$\alpha = \frac{(y,z)}{(z,z)} = \frac{\int_{[0;4]} 2t^2 - t^3\,dt}{\int_{[0;4]} t^4\,dt} = \frac{\frac{2t^3}{3}\Big|_0^4 - \frac{t^4}{4}\Big|_0^4}{\frac{t^5}{5}\Big|_0^4} = \frac{\frac{2\cdot 64}{3} - 64}{\frac{1024}{5}} = \frac{64\cdot 5\left(-\frac{1}{3}\right)}{1024} =$$

$$= -\frac{5}{48}$$

$$= \left\|2 - t + \frac{5}{48}t^2\right\| = \left(\int_{[0;4]} \left|2 - t + \frac{5}{48}t^2\right|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\frac{364 + 96\sqrt{6}}{225}\right)^{1/2}$$

В пространстве $L_2[0;\,1]$ постройте перпендикуляр из точки $y(t) = t$ на линейное пространство $L = \{\alpha z \mid \alpha \in \mathbb{R},\ z(t) = e^t\}$.

$$\bar{h} = \bar{y} - \bar{\ell};\ \ell = \alpha z,\ \alpha = \frac{(y;z)}{(z;z)} = \frac{\int_{[0;1]} t \cdot e^t\,dt}{\int_{[0;1]} (e^t)^2\,dt} = \frac{te^t - \int_{[0;1]} e^t\,dt}{\int_{[1;e]} u\,du} = \frac{(te^t - e^t)\big|_0^1}{\frac{u^2}{2}\big|_1^e} = \frac{1}{\frac{e^2-1}{2}} = \frac{2}{e^2-1}$$

$$u = e^t$$

$$du = e^t\,dt$$

$$dt = \frac{du}{e^t}$$

$$\ell = \alpha z = \frac{2}{e^2-1}\,e^t$$

$$\underline{h = t - \frac{2}{e^2-1}\,e^t}$$

В пространстве $L_2[-2;4]$ найдите проекцию элемента $y(t) = t$ на линейное пространство $L = \{x \mid (x, z) = 0,\ z(t) = t^2\}$.

$$\ell = \alpha z =$$

$$\alpha = \frac{(y, z)}{(z, z)} = \frac{\int_{[-2;4]} t^3\,dt}{\int_{[-2;4]} t^4\,dt} = \frac{\frac{t^4}{4}\Big|_{-2}^{4}}{\frac{t^5}{5}\Big|_{-2}^{4}} = \frac{64 - 4}{\frac{1056}{5}} = \frac{300}{1056}$$

$$\ell = \frac{300}{1056} z^2$$

5. Найдите в пространстве $C[0,1]$ сильный и слабый пределы (если они существуют) последовательности $x_n(t) = nte^{-nt^2}$.

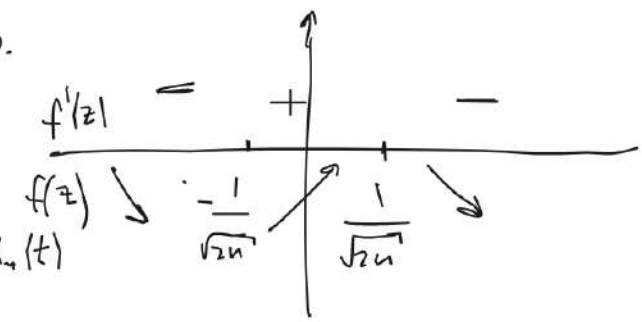
4.1.

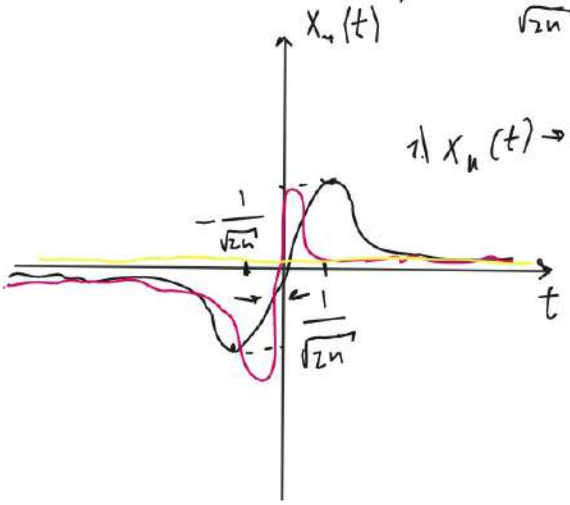
$$X_n(t) = nte^{-nt^2}$$

$$X_n'(t) = ne^{-nt^2} + nt\cdot(-2nt)\cdot e^{-nt^2} = ne^{-nt^2} - 2n^2t^2\cdot e^{-nt^2} = 0.$$

$$n - 2n^2t^2 = 0.$$

$$t = \frac{\pm 1}{\sqrt{2n}}$$





1) $X_n(t) \to 0$

$X_n \xrightarrow{s} X$

$\Downarrow$

2) $\|X_n - X\| \to 0$

$\|X_n\| \to 0$

$$X_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = n\cdot e^{-n\cdot\frac{1}{2n}} = n\cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

$n \to \infty \quad \|X_n\| \to \infty$

$X_n \not\xrightarrow{s} 0$

3) $X_n \xrightarrow{w} X$

1.) $\exists$ поточечный предел

2.) X_n – огр.

$X_n \not\xrightarrow{w} X$

2. Найдите в пространстве l_2 сильный и слабый пределы (если они существуют) последовательностей

а) $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots)$;

$x^{(n)} \in l_2$

2. $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots\right)$

$x^{(1)} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$

$x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$

$x^{(n)} \to 0$ (покоординатно)

1.) $x_n \xrightarrow{s} x$ (?)

$\|x^{(n)} - 0\| \to 0$ (?)

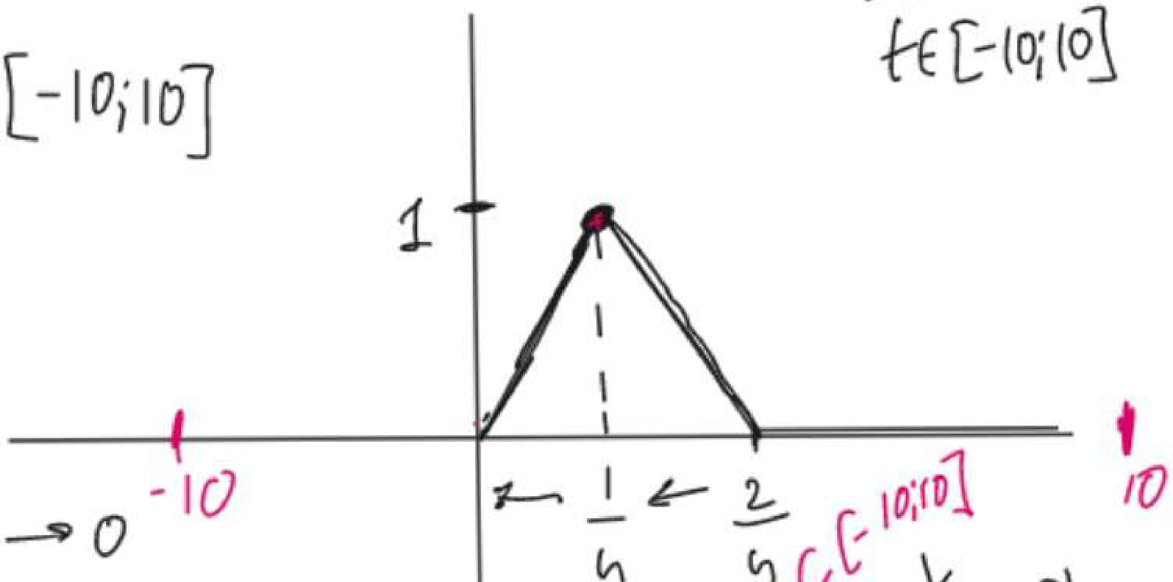
$$\|x^{(n)}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}} \to 0$$

4. Определите, существуют ли в пространстве $C[-10;10]$ поточечный, сильный и слабый пределы последовательности

$$x_n(t) = \begin{cases} nt, & \text{если } t \in [0; \frac{1}{n}]; \\ 1 - n\left(t - \frac{1}{n}\right), & \text{если } t \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}]; \\ 0, & \text{если } t \notin [0; \frac{2}{n}]. \end{cases}$$

• $\|x\|$ в $C[-10;10] = \max\limits_{t\in[-10;10]} |x(t)|$

4. $C[-10;10]$



$x_n(t) \to 0$

$\|x_n - 0\| = 1 \not\to 0$

$x_n \xrightarrow{\omega} 0$

в $C[-10;10]$ $x = 0$

• $\|x_n - x\| \xrightarrow{s} 0$

$\|x_n - 0\| = \|x_n\| = 1 \not\to 0$

• 1.) $\exists$ поточечный

• 2.) x_n – огр.

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{\omega} 0$