НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

8 факультет 1 курс 2 семестр

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Москва, 2020

Определение 1. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f : [a; b) \to \mathbf{R}$, $f \in \mathrm{R}[a; \eta]$, $\forall \eta \in [a; b)$. Если $b < +\infty$, то $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$.

Несобственным интегралом по промежутку $[a; b)$ от функции $f(x)$ называется следующий предел

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)dx.$$

Если предел конечный, то интеграл называется сходящимся. В противном случае – расходящимся.

Важный пример

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{1}^{\eta} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

Случай 1. $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{1}^{\eta} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\eta \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_{1}^{\eta} = \lim_{\eta \to +\infty} \left(\frac{\eta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right)$$

При $-\alpha + 1 < 0$ интеграл сходится, т.к. $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \frac{\eta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = 0$.

При $-\alpha + 1 > 0$ интеграл расходится, т.к. $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \frac{\eta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \infty$.

Важный пример

Случай 2. $\alpha = 1$. Тогда

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_1^{\eta}\frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+\infty}\ln x\Big|_1^{\eta} = \lim_{\eta\to+\infty}\ln\eta = +\infty$$

Очень важный результат: интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Определение 2. Пусть $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ и $f : (a; b] \to \mathbf{R}$, $f \in \mathrm{R}[\eta; b]$, $\forall \eta \in (a; b]$. Если $-\infty < a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Несобственным интегралом по промежутку $(a; b]$ от функции $f(x)$ называется следующий предел

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to a} \int\limits_\eta^b f(x)dx.$$

Если предел конечный, то интеграл называется сходящимся. В противном случае – расходящимся.

Важный пример

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta\to+0} \int\limits_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

Случай 1. $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\lim_{\eta\to+0} \int\limits_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta\to+0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_\eta^1 = \lim_{\eta\to+0} \left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{\eta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right)$$

При $-\alpha+1>0$ интеграл сходится, т.к. $\lim\limits_{\eta\to+0} \frac{\eta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = 0$.

При $-\alpha+1<0$ интеграл расходится, т.к. $\lim\limits_{\eta\to+0} \frac{\eta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \infty$.

Важный пример

Случай 2. $\alpha = 1$. Тогда

$$\lim_{\eta\to+0}\int\limits_{\eta}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+0}\ln x\Big|_{1}^{\eta} = \lim_{\eta\to+0}\ln\eta = -\infty$$

Очень важный результат: интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Основные определения. Общий случай

Определение 3. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и $f : (a; b) \to \mathbf{R}$, $f \in \mathrm{R}[\eta; \xi]$, $\forall \eta, \xi \in (a; b)$. Если $-\infty < a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, если $b < +\infty$, то $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Несобственный интеграл по промежутку $(a; b)$ от функции $f(x)$ определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

при $c \in (a; b)$. Интеграл называется сходящимся, если сходятся оба интеграла.

Необходимое условие сходимости

В дальнейшем $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f:\ [a;b) \to \mathbf{R}$, $f \in \mathrm{R}[a;\eta]$, $\forall \eta \in [a;b)$. Если $b < +\infty$, то $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$.

Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится и $c \in [a;b)$. Из равенства

$$\int\limits_a^{\eta} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{\eta} f(x)dx$$

при $\eta \to b$ получаем сходимость $\int\limits_c^b f(x)dx$ и равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. Отсюда при $c \to b$ получаем необходимое условие сходимости $\lim\limits_{c \to b} \int\limits_c^b f(x)dx = 0$.

Теорема 1 (формула Ньютона-Лейбница). Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на $[a;b)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{\eta\to b} F(\eta) - F(a).$$

Теорема 2 (линейность). Если интегралы $\int\limits_a^b f_1(x)dx$ и $\int\limits_a^b f_2(x)dx$ сходятся и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, то сходится интеграл $\int\limits_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx$ и имеет место равенство

$$\int\limits_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int\limits_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

Теорема 3. Если интегралы $\int\limits_a^b f_1(x)dx$ и $\int\limits_a^b f_2(x)dx$ сходятся и $f_1(x) \leqslant f_2(x),\ \forall x \in [a; b)$, то

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

Теорема 4 (замена переменной). Если f непрерывна на $[a; b)$, φ – непрерывна вместе с производной на $[\alpha; \beta)$, возрастает на этом полуинтервале и

$$-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty, \quad a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < b = \lim_{t\to\beta} \varphi(t),$$

то $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_a^b f(x)dx$. Причем оба интеграла одновременно либо сходятся, либо нет.

Теорема 5 (интегрирование по частям). Если функции $u(x)$, $v(x)$ непрерывны вместе с производными на $[a; b)$, то

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Пример

Пример. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ или установить расходимость.

Решение. По формуле интегрирования по частям $(u(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}})$

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+0} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)} = 0.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 0 - 4\sqrt{x}\Big|_0^1 = -4.$$

Теорема 6. Пусть $f(x) \geqslant 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow \exists M > 0 : \int\limits_a^\eta f(x)dx \leqslant M, \ \forall \eta \in [a;b).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)dx$. Она не убывает, т.к. при $\eta_1 < \eta_2$ будет

$$F(\eta_2) = \int\limits_a^{\eta_2} f(x)dx = \int\limits_a^{\eta_1} f(x)dx + \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \geqslant \int\limits_a^{\eta_1} f(x)dx = F(\eta_1).$$

Поэтому предел $\lim\limits_{\eta\to b} F(\eta)$ существует тогда и только тогда, когда $F(\eta) \leqslant M, \ \forall \eta \in [a;b)$. Теорема доказана.

Теорема 7 (признак сравнения). Пусть $f(x),\ g(x) \geqslant 0$ и $f = O(g),\ x \to b$. Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Так как $f = O(g),\ x \to b$, то существует число $C > 0$ и интервал $(\eta_0; b)$ такие, что $f(x) \leqslant Cg(x)$, $\forall x \in (\eta_0; b)$. Отсюда для любого $\eta \in (\eta_0; b)$

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} f(x)dx \leqslant C \int\limits_{\eta_0}^{\eta} g(x)dx.$$

Дальше цепочка логических рассуждений. Из теоремы 1

$$\int\limits_a^b g(x)dx \ \text{сх.} \ \Rightarrow \int\limits_{\eta_0}^b g(x)dx \ \text{сх.} \ \Rightarrow \int\limits_{\eta_0}^{\eta} g(x)dx \leqslant M,\ \forall \eta > \eta_0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} f(x)dx \leqslant CM \Rightarrow \int\limits_{\eta_0}^{b} f(x)dx \ \text{ сходится } \ \Rightarrow \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \text{ сходится.}$$

Теорема доказана.

Следствие 1 (предельная форма признака сравнения). Пусть $f(x)$, $g(x) \geqslant 0$ и существует (возможно бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$. Тогда

1. При $0 \leqslant k < +\infty$ из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

2. При $0 < k \leqslant +\infty$ из расходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство. 1. Пусть $0 \leqslant k < +\infty$. По определению предела для $\varepsilon = 1$ существует $\eta_0 < b$ такое, что при всех $x \in (\eta_0; b)$ будет $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < 1$. Отсюда $f(x) < (k+1)g(x)$, т.е. $f = O(g)$, $x \to b$. Дальше теорема 7.

Исследовать интеграл на сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin \ln \frac{1+x^2}{x^2}}{x^p} dx$.

Решение. Так как

$$\frac{\sin \ln \frac{1+x^2}{x^2}}{x^p} = \frac{\sin \ln \left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} \sim \frac{\ln \left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p+2}}, \quad x \to +\infty.$$

Отсюда при $p+2>1$ интеграл сходится, а при $p+2 \leqslant 1$ интеграл расходится.
Ответ: сходится при $p>-1$.

Теорема 8 (Критерий Коши). Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_\varepsilon \in [a; b) : \ \forall \eta', \eta'' \in (\eta_\varepsilon; b) \Rightarrow \left| \int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)dx$. По критерию Коши существования предела функции

$$\lim_{\eta \to b} F(\eta) \text{ существует} \Leftrightarrow \forall \eta', \eta'' \in (\eta_\varepsilon; b) \Rightarrow \left| F(\eta') - F(\eta'') \right| < \varepsilon.$$

Замечаем, что $|F(\eta') - F(\eta'')| = \left| \int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right|$. Теорема доказана.

Определение 4. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$. Если интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится, а интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то он называется условно сходящимся.

Теорема 9. Если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Следует из критерия Коши и неравенства

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|dx\right|$$

Теорема 10 (Признак Дирихле). Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a;b)$, функция $g(x)$ непрерывна вместе с производной, монотонна на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Пусть $F'(x) = f(x)$. По условию $\exists M > 0 : \ |F(x)| \leqslant M, \ \forall x \in [a;b)$. По формуле интегрирования по частям

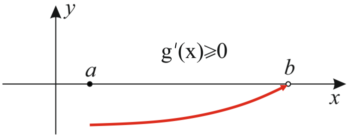
$$\int\limits_a^\eta f(x)g(x)dx = F(\eta)g(\eta) - F(a)g(a) - \int\limits_a^\eta F(x)g'(x)dx$$

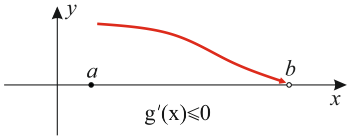
Заметим, что $\lim\limits_{\eta\to b} F(\eta)g(\eta) = 0$, как предел произведения бесконечно малой на ограниченную.

Рассмотрим случай $g'(x) \geqslant 0$. Тогда $g(x)$ не убывает и $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$. Значит, $g(x) \leqslant 0$ на $[a; b)$. Поэтому

$$\int\limits_a^\eta |F(x)g'(x)|dx \leqslant M \int\limits_a^\eta |g'(x)|dx = M(g(\eta) - g(a)) \leqslant -Mg(a)$$

По теореме 6 интеграл $\int\limits_a^b |F(x)g'(x)|dx$ сходится. Значит, $\exists \lim\limits_{\eta\to b} \int\limits_a^\eta F(x)g'(x)dx$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{\eta\to b} \int\limits_a^\eta f(x)g(x)dx$. Теорема доказана.





Теорема 11 (Признак Абеля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, функция $g(x)$ непрерывна вместе с производной, монотонна на $[a;b)$ и ограничена. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример

При $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$.

Решение. По признаку Дирихле интеграл сходится.

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha}$ сходится по признаку Дирихле при $\alpha > 0$.

Отсюда при $0 < \alpha \leqslant 1$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ сходится условно, т.к.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \text{ расх.} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \text{расх.}$$

Пример

Если $\alpha > 1$, то из неравенства

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$$

и признака сравнения следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ сходится абсолютно.

Ответ: при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится условно; при $\alpha > 1$ сходится абсолютно.