РАЗБОР КР по ДМ (2 семестр)

1. **Используя метод Магу, найти (а) все максимальные внутренне устойчивые множества; (б) все минимальные внешне устойчивые множества вершин орграфа D, заданного матрицей смежности $A(D)$; (в) ядра (или доказать, что их нет).**

$$A(D) = \left[a_{ij} \right]_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Составляем формулу математической логики для нахождения максимальных внутренне устойчивых множеств:

$$F_1 = \underset{a_{ij}=1}{\&}(\overline{Y}_i \vee \overline{Y}_j) = (\overline{Y}_1 \vee \overline{Y}_2)\,\&\,(\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_4)\,\&\,(\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_2)\,\&\,(\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_4)\,\&\,(\overline{Y}_1 \vee \overline{Y}_4) \equiv$$

(упрощаем F_1, используя равносильности: $A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B)\,\&\,(A \vee C)$, опускаем символ $\&$)

$$\equiv (\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_1\overline{Y}_3\overline{Y}_4)(\overline{Y}_4 \vee \overline{Y}_1\overline{Y}_3) \equiv$$

(приводим к ДНФ, а затем к сокращенной ДНФ, используя законы поглощения: $A \equiv A \vee (A \,\&\, B)$, $A \equiv A \,\&\, A$, $A \equiv A \vee A$, пока это возможно):

$$\equiv \overline{Y}_2\overline{Y}_4 \vee \overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_1\overline{Y}_3\overline{Y}_4.$$

Тогда каждому дизъюнктивному члену полученной сокращенной ДНФ соответствует максимальное внутренне устойчивое множество (номера вершин этого множества не присутствуют среди номеров переменных этого члена): $\{v_1, v_3\}, \{v_4\}, \{v_2\}$.

б) Составляем формулу математической логики для нахождения минимальных внешне устойчивых множеств:

$$F_2 = \overset{n}{\underset{i=1}{\&}}(Y_i \vee \underset{a_{ij}=1}{\vee} Y_j) = (Y_1 \vee Y_2)\,\&\,(Y_2 \vee Y_4)\,\&\,(Y_3 \vee Y_2 \vee Y_4)\,\&\,(Y_4 \vee Y_1) \equiv$$

(упрощаем F_2, используя равносильности: $A \equiv A \,\&\, (A \vee B)$, $A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B)\,\&\,(A \vee C)$, опускаем символ $\&$)

$$\equiv (Y_1 \vee Y_2)(Y_2 \vee Y_4)(Y_4 \vee Y_1) \equiv (Y_2 \vee Y_1Y_4)(Y_4 \vee Y_1) \equiv$$

(приводим к ДНФ, а затем к сокращенной ДНФ, используя законы поглощения: $A \equiv A \vee (A \,\&\, B)$, $A \equiv A \,\&\, A$, $A \equiv A \vee A$, пока это возможно):

$$\equiv Y_2Y_4 \vee Y_1Y_2 \vee Y_1Y_4.$$

Тогда каждому дизъюнктивному члену полученной сокращенной ДНФ соответствует минимальное внешне устойчивое множество (номера вершин этого множества присутствуют среди номеров переменных этого члена): $\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}$.

в) Для нахождения ядер воспользуемся утверждением о том, что ядро (если оно существует) является одновременно максимальным внутренне устойчивым множеством, а также минимальным внешне устойчивым множеством. Среди найденных множеств таких не оказалось. Следовательно, ядер нет.

2. Решить уравнение $\pi^{77} \cdot x \cdot \sigma = \tau$, где $\pi, \sigma, \tau \in S_7$.

$\pi = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 3\ 7\ 5\ 2\ 4\ 1\ 6 \end{pmatrix}$, $\sigma = (2\ 7\ 3\ 5)$, $\tau = (1\ 6\ 2\ 5\ 4)$,

x – неизвестная перестановка, которую нужно представить как произведение независимых циклов.

Решение. $\pi = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 3\ 7\ 5\ 2\ 4\ 1\ 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 7\ 6)$, $x = \pi^{-77} \cdot \tau \cdot \sigma^{-1}$. Заметим, что $\pi^{-77} = (\pi^7)^{-11} = e$, $x = e \cdot \tau \cdot \sigma^{-1} = (1\ 6\ 2\ 5\ 4)(2\ 5\ 3\ 7) = (1\ 6\ 2\ 4)(3\ 7\ 5)$.

3. Для группы *G* самосовмещений ромба (не являющегося квадратом):

***а*) Указать единичный и образующие элементы.**

***б*) Составить таблицу Кэли.**

***в*) Указать изоморфную *G* подгруппу $H \subseteq S_4$.**

***г*) Определить подгруппы индекса 2 группы *G*.**

Решение. Перечислим элементы группы преобразований ромба $G = \{e, \pi, s_1, s_2\}$. Порядок выполнения операций $\alpha \circ \beta$ **:** сначала к фигуре применяется преобразование β, а затем к полученной фигуре применяется преобразование α. Пример:

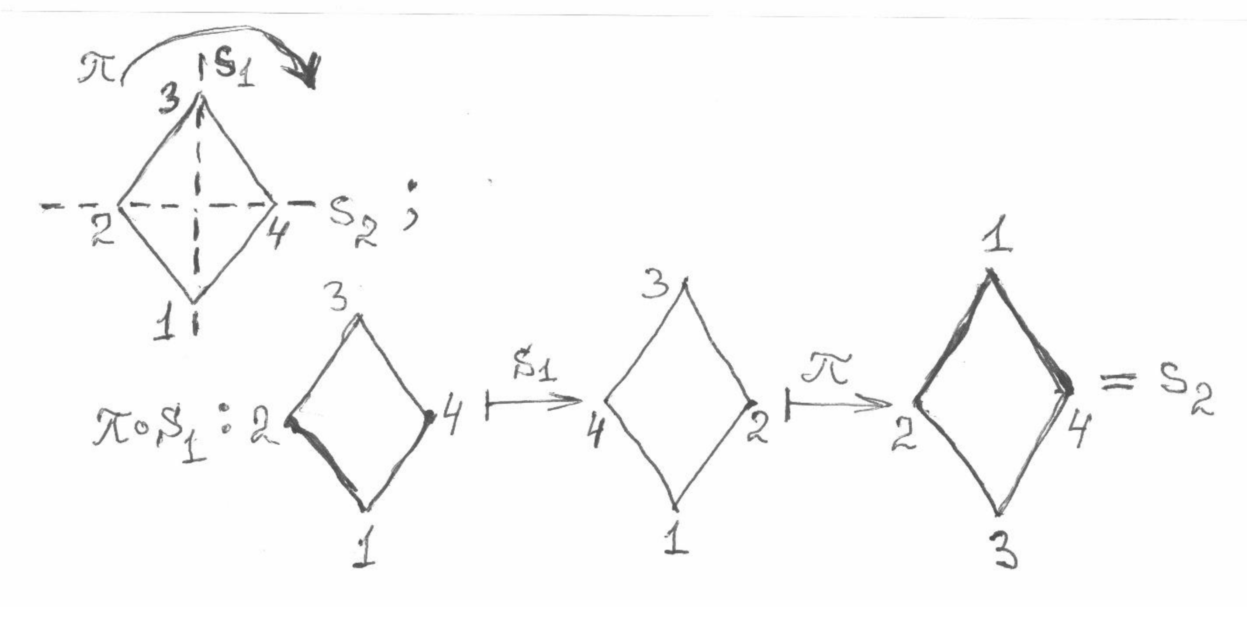


Рис. 1

а) Единичным элементом является преобразование e , при котором оставляем фигуру на месте. Образующие элементы определим, исходя из таблицы Кэли.

б) Действуя в соответствии с рис. 1, заполним таблицу Кэли:

$\circ$	=	e	π	s_1	s_2
==	=	==	==	==	==
e	=	e	π	s_1	s_2
π	=	π	e	s_2	s_1
s_1	=	s_1	s_2	e	π
s_2	=	s_2	s_1	π	e

Теперь из построенной таблицы заключаем, что

$$G = <\pi, s_1> = <\pi, s_2> = <s_1, s_2>,$$

т.е. имеем три пары образующих элементов.

в) Поставим в соответствие каждому преобразованию $\alpha \in G$ перестановку φ_α из S_4, где для любой угловой точки $i \in \{1,2,3,4\}$ $\varphi_\alpha(i)$ – номер угловой точки фигуры в исходном положении, в которую перешла точка i после преобразования. В соответствии с этим имеем:

$$\varphi_\pi = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 4\ 1\ 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4),\ \varphi_{s_1} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 4\ 3\ 2 \end{pmatrix} = (2\ 4),$$

$$\varphi_{s_2} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 4\ 3\ 2 \end{pmatrix} = (1\ 3),\ \varphi_e = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{pmatrix} = e \in S_4.$$

Таким образом, $\varphi_\alpha: G \to H = \{e, (1\ 3), (2\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\} \subset S_4$. Очевидно, что H – подгруппа группы S_4. Покажем на примере выполнение основной формулы изоморфизма: $\forall \alpha, \beta \in G$ $\varphi_{\alpha\circ\beta} = \varphi_\alpha \varphi_\beta$. Действительно,

$$\varphi_{\pi\circ s_1} = \varphi_{s_2} = (1\ 3),\ \varphi_\pi \varphi_{s_1} = (1\ 3)(2\ 4)(2\ 4) = (1\ 3) = \varphi_{\pi\circ s_1}.$$

г) Подгруппой индекса 2 для группы G с $|G| = 2n$ называется любая ее подгруппа H такая, что $|H| = n$. В нашем примере такими подгруппами будут:

$$<\pi> = \{e, \pi\},\ <s_1> = \{e, s_1\},\ <s_2> = \{e, s_2\}.$$

4. Выяснить, является ли данная алгебраическая структура полем, кольцом, содержит ли делители нуля?

(а) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ является коммутативным кольцом, содержит $1 \neq 0$ и не имеет делителей нуля, то есть является целостным кольцом ($ab = 0$ => или $a = 0$, или $b = 0$). Не является полем, так как $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, 1)$ не является группой, например, элемент $2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ не имеет обратного на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

(б) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – аналогично $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ является коммутативным кольцом, не имеет делителей нуля и не является полем. Но в отличие от $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ не содержит 1 => не является целостным кольцом. Аналогично рассматривается любое кольцо $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$, где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(в) ($\mathbb{Q}$, +, ·) – поле ($\mathbb{Q}$ - множество несократимых дробей вида $\frac{m}{n}$, где $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$). Тогда $\forall q = \frac{m}{n} \neq 0 \Rightarrow m \neq 0, n \neq 0 \Rightarrow q^{-1} = \frac{n}{m}$ (в случае необходимости отрицательный знак из знаменателя переносим в числитель), т.е. является полем, поскольку каждый отличный от 0 элемент имеет обратный, а остальные свойства аналогичны ($\mathbb{Z}$, +, ·).

(г) ($\mathbb{R}$, +, ·) – поле, поскольку каждый отличный от 0 элемент имеет обратный, а остальные свойства аналогичны ($\mathbb{Z}$, +, ·);

(д) ($\mathbb{C}$, +, ·) – поле: $\forall z = x + iy \neq 0$ (т. е. при $x^2 + y^2 \neq 0$) имеем: $z^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \in \mathbb{C}$;

(е) $\{a + b\sqrt{2} | \, a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Заметим, что $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; $x, y \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \Rightarrow (x - y) \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}, xy \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ (действительно, для $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2}, x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}, xy = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$)=> $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ является подкольцом кольца $\mathbb{R}$. Это кольцо содержит $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ и не имеет делителей нуля (поскольку $\mathbb{R}$ - целостное кольцо), то есть кольцо $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ является целостным. Не является полем, так как, например, у элемента $2 = 2 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ не существует обратного в $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ ($1/2 \notin \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$).

(ж) Числа вида $a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbb{Q}$. Обозначим это множество $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$. Как и в случае (д) является целостным подкольцом кольца $\mathbb{R}$. Если $a + \sqrt{2}b \neq 0$, то $a^2 - 2b^2 \neq 0 \Rightarrow \left(a + b\sqrt{2}\right)^{-1} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} + \sqrt{2}\frac{b}{2b^2-a^2} \in \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$.

Покажем справедливость неравенства $a^2 - 2b^2 \neq 0$. Предположим обратное, т.е. пусть $a^2 - 2b^2 = 0$. Тогда, в силу $a + \sqrt{2}b \neq 0$ имеем: $a \neq 0, b \neq 0$ (например, если $a = 0$, то из условия $a^2 - 2b^2 = 0$ заключаем, что и $b = 0$, откуда $a + \sqrt{2}b = 0$, т.е. пришли к противоречию), а следовательно, $\frac{a}{b} = -\sqrt{2}$, откуда $\frac{|a|}{|b|} = \sqrt{2}$. Поскольку $\frac{|a|}{|b|} \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{2} = \frac{|a|}{|b|} = \frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbb{Z}; n, m > 0$ (поскольку $a \neq 0, b \neq 0$). Будем считать, что $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь, т.е. НОД$(n, m) = 1$. Из $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ получаем $m^2 = 2n^2$, откуда m делится на 2, а следовательно m^2 делится на 4. Таким образом, $2n^2$ делится на 4, а следовательно, n делится на 2, т.е. n, m имеют общий делитель, а это противоречит условию НОД$(n, m) = 1$.

(з) Комплексные числа вида $a + bi$ с целыми a и b. Рассуждаем как в случае (е). Является целостным подкольцом поля комплексных чисел, но полем не является, поскольку, например, у элемента $2 = 2 + 0 \cdot i$ не существует обратного.

(и) Комплексные числа вида $a + bi$ с рациональными a и b. Является не только целостным кольцом, но и полем, так как в случае $a + bi \neq 0$ (откуда $a^2 + b^2 \neq 0$) имеем

$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$,
где $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}$ - рациональные числа.

(к) Квадратных матриц порядка n с целыми (рациональными, действительными, комплексными числами) элементами относительно сложения и умножения матриц. Очевидно, является кольцом, но не целостным, так как имеются делители нуля. Например, $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

(л) Функции с действительными значениями, непрерывные на отрезке [-1, 1] относительно операции сложения и умножения $(f+g)(x) = f(x)+ g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Является кольцом, но не целостным (см. на рис. 2 делители нуля)

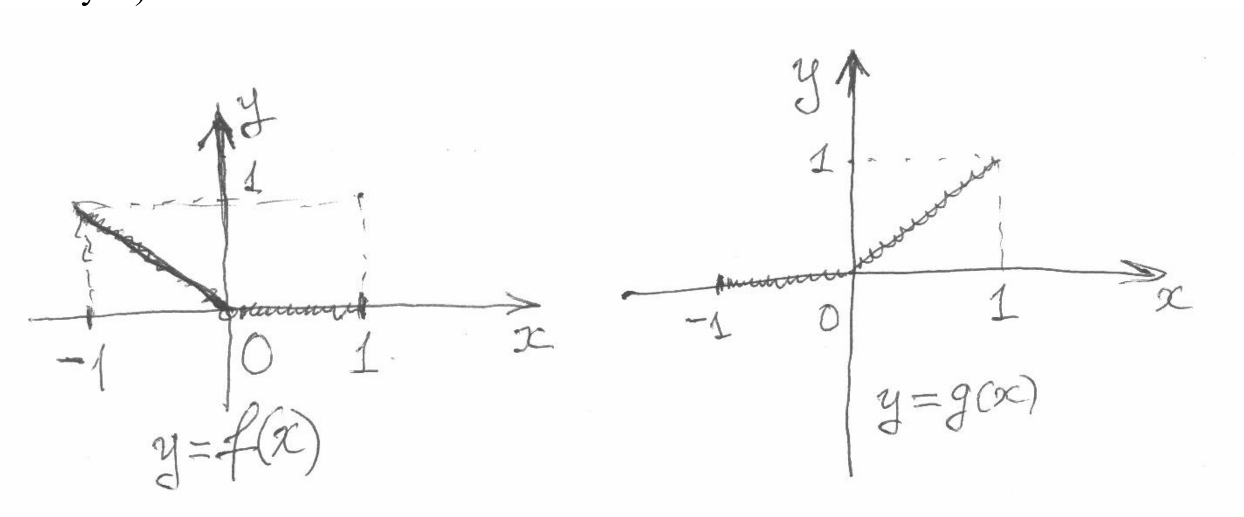


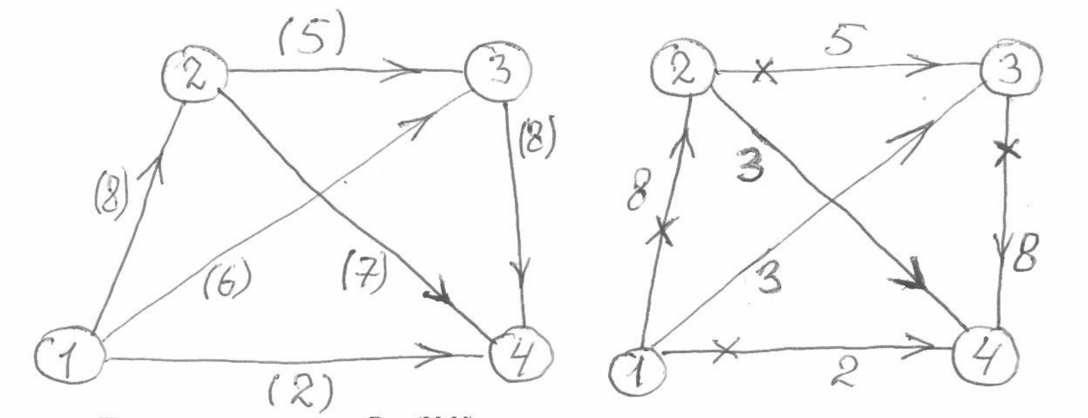
Рис. 2

(м) Многочлены от одного неизвестного x с целыми (рациональными, действительными) коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения многочленов являются целостным кольцом. Для любого многочлена $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, где $a_n \neq 0$, обозначим deg $p = n$, coef $p = a_n$.
Тогда $\forall p(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ выполняется:

coef pg = coef p coef g, deg pg = deg p + deg g, (1)

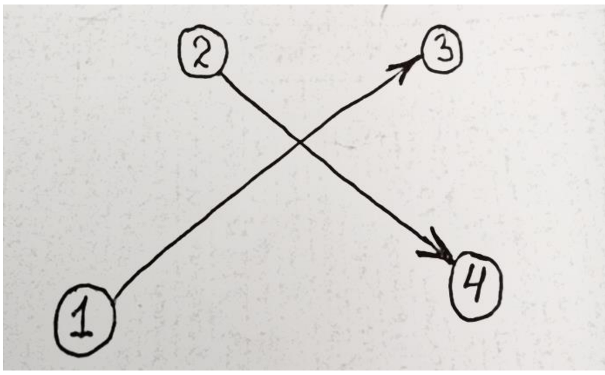
откуда следует, что рассматриваемое кольцо не имеет делителей нуля, а единицей является $p(x) = 1$, т.е. является целостным. Полем не является, так как $p(x) = x$ не имеет обратного многочлена (следует из (1)). Действительно, если найдется многочлен $q(x)$ такой, что $xq(x)=1$, то
$q(x) \neq 0$ и в силу (1) $0 = \deg 1 = \deg(xq(x)) = \deg x + \deg q(x) \geq 1$, т.е. пришли к противоречию.

5. Даны: транспортная сеть D=(V,X), поток φ в этой сети. Определить: (а) является ли φ полным потоком; (б) орграф приращений $I(D, \varphi)$; (в) является ли φ максимальным потоком; (г) увеличить поток φ до максимального.



Транспортная сеть D=(V,X) поток φ

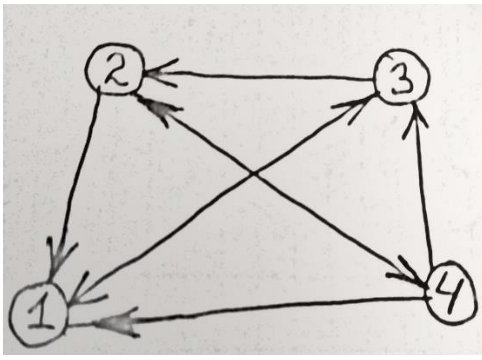
Решение. (а) Строим вспомогательный орграф $\acute{D}$, исключая из транспортной сети D насыщенные дуги (помеченные знаком ×):



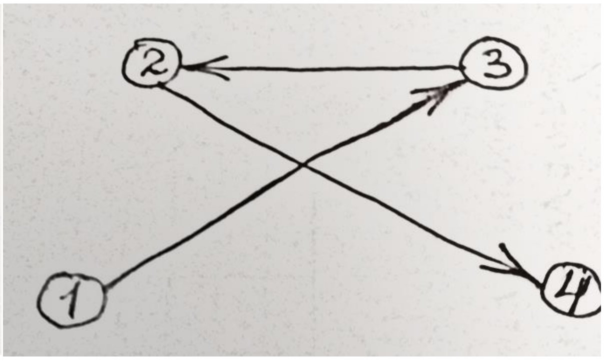
$\acute{D}$

Если в $\acute{D}$ сток не достижим из источника, то φ – полный поток. В нашем примере это условие выполняется, следовательно, поток φ – полный.

(б) Строим орграф приращений $I(D,\varphi)$ (или модифицированный $\tilde{I}(D,\varphi)$):



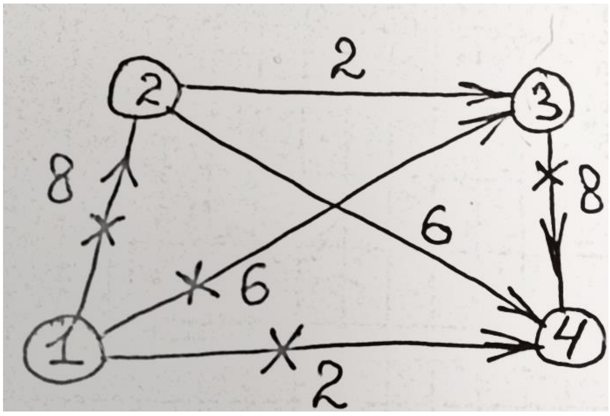
$I(D,\varphi)$



$\tilde{I}(D,\varphi)$

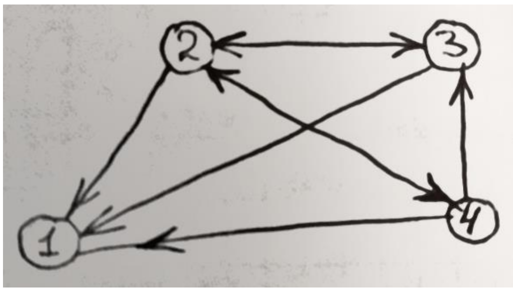
(в) По теореме Форда – Фалкерсона φ - максимальный поток, тогда и только тогда, когда в $I(D,\varphi)$ сток не достижим из источника. Находим в $I(D,\varphi)$ (или в $\tilde{I}(D,\varphi)$) простую цепь $\eta = v_1v_3v_2v_4$ из источника в сток.

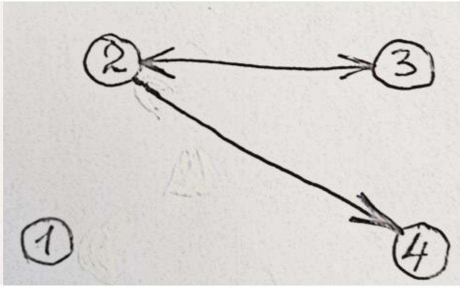
(г) Пропускаем по цепи $\eta = v_1v_3v_2v_4$ дополнительный поток максимально возможной величины 3 (до насыщения дуги v_1v_3). В результате получаем новый поток φ_1:



φ_1

Для проверки потока φ_1 на максимальность строим $I(D,\varphi_1)$ (или $\tilde{I}(D,\varphi_1)$):
В $I(D,\varphi_1)$ (или в $\tilde{I}(D,\varphi_1)$) сток не достижим из источника. Следовательно, φ_1 – максимальный поток.





$I(D,\varphi_1)$ $\tilde{I}(D,\varphi_1)$