# *Лекция 8.* ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

## А. МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

## А1. МЕТОД ШТРАФОВ

### Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,\ldots,p$, определяющие множество допустимых решений *X*.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве $X$, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1,\ldots,m; \quad m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1,\ldots,p \end{array} \right\}.$

### Стратегия поиска

Идея метода заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска безусловного минимума ***вспомогательной функции***:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + P\left(x, r^k\right) \to \min_{x \in R^n},$$

где $P\left(x, r^k\right)$ – ***штрафная функция***,

$r^k$ – ***параметр штрафа***, задаваемый на $k$-й итерации.
Это связано с возможностью применения эффективных и надежных методов поиска безусловного экстремума.

Штрафные функции конструируются, исходя из условий:

$$P\left(x, r^k\right) = \begin{cases} 0, & \text{при выполнении ограничений,} \\ > 0, & \text{при невыполнении ограничений,} \end{cases}$$

причем при невыполнении ограничений и $r^k \to \infty$, $k \to \infty$ справедливо $P(x, r^k) \to \infty$.

Чем больше $r^k$, тем больше штраф за невыполнение ограничений. Как правило, для формирования штрафной функции используются:

а) для ограничений типа равенств – квадратичный штраф (рис. 1, *а*),

б) для ограничений типа неравенств – квадрат срезки (рис. 1, *б*):

$$P\left(x, r^k\right) = \frac{r^k}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p} [g_j^+(x)]^2 \right\},$$

где $g_j^+(x)$ – ***срезка функции***:

$$g_j^+(x) = \max\{\ 0, g_j(x)\ \} = \begin{cases} g_j(x), & g_j(x) > 0, \\ 0, & g_j(x) \le 0. \end{cases}$$

Начальная точка поиска задается обычно вне множества допустимых решений $X$.

На каждой $k$-й итерации ищется точка $x^*\left(r^k\right)$ минимума вспомогательной функции $F\left(x, r^k\right)$ при заданном параметре штрафа $r^k$ с помощью одного из методов безусловной минимизации:

$$F\left(x^*(r^k), r^k\right) = \min_{x \in R^n} F\left(x, r^k\right).$$

Полученная точка $x^*\left(r^k\right)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при возрастающем значении параметра штрафа:

$$r^{k+1} = C\,r^k, \quad x^{k+1} = x^*(r^k), \quad k = k+1.$$

Условие окончания: если $P\left(x^*(r^k), r^k\right) \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*(r^k), \qquad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right).$$

При неограниченном возрастании $r^k$ последовательность точек $x^*\left(r^k\right)$ стремится к точке условного минимума $x^*$: $\lim\limits_{r^k \to \infty} x^*(r^k) = x^*$ .

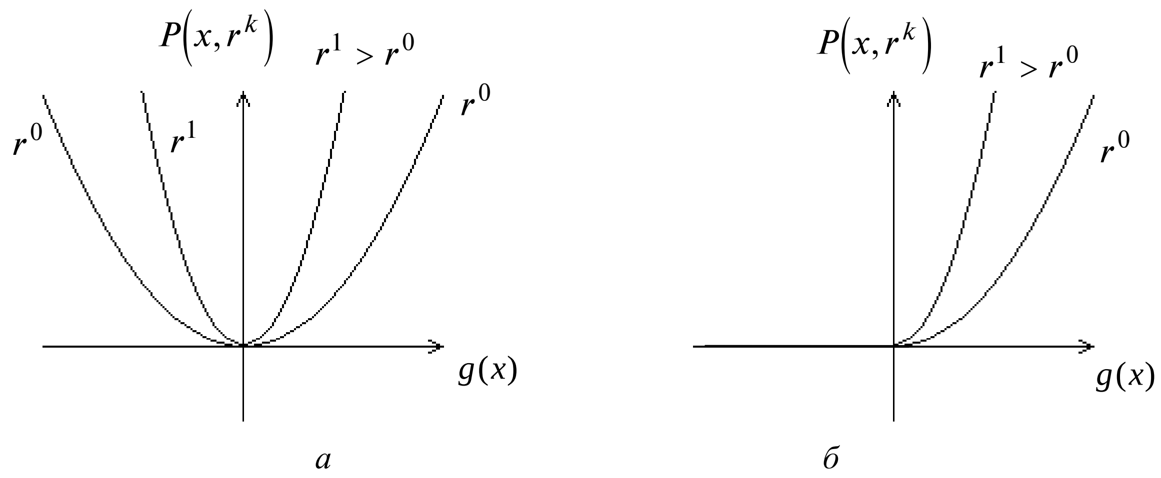


Рис. 1

## Алгоритм

*Шаг* 1. Задать начальную точку $x^0$, начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$, число $C > 1$ для увеличения параметра, малое число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

*Шаг* 2. Составить вспомогательную функцию

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{r^k}{2}\left\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(x)]^2\right\}.$$

*Шаг* 3. Найти точку $x^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F\left(x, r^k\right)$ по $x$ с помощью какого-либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

$$F\left(x^*(r^k), r^k\right) = \min_{x \in R^n} F\left(x, r^k\right).$$

При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять $x^k$. Вычислить $P\left(x^*(r^k), r^k\right)$.

*Шаг* 4. Проверить условие окончания:

а) если $P\left(x^*(r^k), r^k\right) \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*(r^k), \qquad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right);$$

б) если $P\left(x^*(r^k), r^k\right) > \varepsilon$, положить: $r^{k+1} = C r^k$, $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

## Сходимость

**Утверждение.** *Пусть $x^*$ – локально единственное решение задачи поиска условного минимума, а функции $f(x)$ и $g_j(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^*$. Тогда для достаточно больших $r^k$ найдется точка $x^*(r^k)$ локального минимума функции $F(x, r^k)$ в окрестности $x^*$ и $x^*(r^k) \to x^*$ при $r^k \to \infty$.*

**Замечания.**

**1.** Так как сходимость метода обеспечивается при $r^k \to \infty$, то возникает вопрос о том, нельзя ли получить решение исходной задачи в результате однократного поиска безусловного минимума вспомогательной функции с параметром $r^k$, равным большому числу, например $10^{20}$. Однако такая замена последовательного решения вспомогательных задач не представляется возможной, так как с ростом $r^k$ функция $F\left(x, r^k\right)$ приобретает ярко выраженную *«овражную» структуру*. Поэтому скорость сходимости любого метода безусловной минимизации к решению $x^*(r^k)$ резко падает, так что процесс его определения заканчивается, как правило, значительно раньше, чем будет достигнута заданная точность, и, следовательно, полученный результат не дает возможности судить об искомом решении $x^*$.

**2.** Обычно выбирается $r^0 = 0{,}01; 0{,}1; 1$, а $C \in [4, 10]$. Иногда начинают с $r^0 = 0$, т.е. с задачи поиска безусловного минимума.

**3.** Точки $x^*(r^k)$ в алгоритме – это точки локального минимума функции $F\left(x, r^k\right)$. Однако функция $F\left(x, r^k\right)$ *может быть неограниченной снизу* и процедуры методов безусловной минимизации могут расходиться. Эти обстоятельства необходимо учитывать при программной реализации.

**4.** При решении задач процедура расчетов завершается при некотором конечном значении параметра штрафа $r^k$. При этом приближенное решение, как правило, не лежит в множестве допустимых решений, т.е. ограничения задачи не выполняются. Это является одним из ***недостатков*** метода. С ростом параметра штрафа $r^k$ генерируемые алгоритмом точки приближаются к решению исходной задачи извне множества допустимых решений. Поэтому обсуждаемый метод иногда называют *методом внешних штрафов*.

**5.** На практике для получения решения исходной задачи с требуемой точностью достаточно бывает решить конечное (относительно небольшое) число вспомогательных задач. При этом нет необходимости решать их точно, а информацию, полученную в результате решения очередной вспомогательной задачи, обычно удается эффектно использовать для решения следующей.

**6.** В методах штрафных функций имеется тесная связь между значениями параметров штрафа и множителями Лагранжа для регулярной точки минимума:

$$\lambda_j(r^k) = r^k g_j\left[\, x^*(r^k)\,\right], \qquad j = 1, \ldots, m;$$

$$\lambda_j(r^k) = r^k g_j^+\left[\, x^*(r^k)\,\right], \qquad j \in J_a;$$

$$\lim_{r^k \to \infty} \lambda_j(r^k) = \lambda_j^*, \qquad j = 1, \ldots, m; \qquad j \in J_a \,.$$

**7.** Если решается задача поиска условного максимума:

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, m; \quad m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1, \ldots, p \end{array} \right\}$,

то можно использовать два способа:

1) свести задачу к проблеме поиска условного минимума путем замены знака перед целевой функцией на противоположный;
2) на шаге 2 алгоритма применения метода штрафов составить вспомогательную функцию вида

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) - \frac{r^k}{2}\left\{ \sum_{j=1}^{m} [\,g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p} [\,g_j^+(x)]^2 \right\},$$

т.е. перед штрафной функцией ставится знак минус.

На шаге 3 найти точку $x^*(r^k)$ безусловного максимума функции $F\left(x, r^k\right)$ по $x$ с помощью какого-либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

$$F\left(x^*(r^k), r^k\right) = \max_{x \in R^n} F\left(x, r^k\right).$$

**Пример 1.** Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x^2 - 4x \to \min,$$
$$g_1(x) = x - 1 \le 0.$$

□ 1. В поставленной задаче $m = 0$ (ограничения-равенства отсутствуют), $p = 1$. Решим задачу аналитически при произвольном параметре штрафа $r^k$, а затем получим решение последовательности задач поиска безусловного минимума.

2. Составим вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = x^2 - 4x + \frac{r^k}{2}\left[\max\left\{0, (x-1)\right\}\right]^2 .$$

3. Найдем безусловный минимум функции $F\left(x, r^k\right)$ по $x$ с помощью необходимых и достаточных условий:

$$\frac{\partial F\left(x, r^k\right)}{\partial x} = \begin{cases} 2x - 4 = 0, & x - 1 \le 0, \\ 2x - 4 + r^k\left(x-1\right) = 0, & x - 1 > 0 . \end{cases}$$

Отсюда $x^* = 2$, но при этом не удовлетворяется условие $x^* - 1 \le 0$, а также

$$x^*(r^k) = \frac{4 + r^k}{2 + r^k} .$$

В табл. 1 приведены результаты расчетов при $r^k = 1, 2, 10, 100, 1000, \infty$, а на рис. 2 дана графическая иллюстрация процесса поиска решения.

Таблица 1

| $k$ | $r^k$ | $x^*(r^k)$ | $F\left(x^*(r^k), r^k\right)$ | $\lambda(r^k) = r^k g^+\left(x^*(r^k)\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{5}{3}$ | –3,66 | $\frac{2}{3}$ |
| 1 | 2 | $\frac{3}{2} = 1{,}5$ | –3,5 | 1 |
| 2 | 10 | $\frac{7}{6} = 1{,}1666$ | –3,166 | $\frac{10}{6}$ |
| 3 | 100 | $\frac{52}{51} = 1{,}0196$ | –3,019 | $\frac{100}{51}$ |
| 4 | 1000 | $\frac{502}{501} = 1{,}00199$ | –3,002 | $\frac{1000}{501}$ |
| 5 | $\infty$ | 1 | –3 | 2 |

Так как $\dfrac{\partial^2 F\left(x^*(r^k), r^k\right)}{\partial x^2} = 2 + r^k > 0$ при $r^k \ge 0$, то достаточные условия минимума вспомогательной функции $F\left(x, r^k\right)$ удовлетворяются. При $r^k \to \infty$ имеем

$$x^* = \lim_{r^k \to \infty} \frac{4 + r^k}{2 + r^k} = 1, \qquad f(x^*) = -3.$$

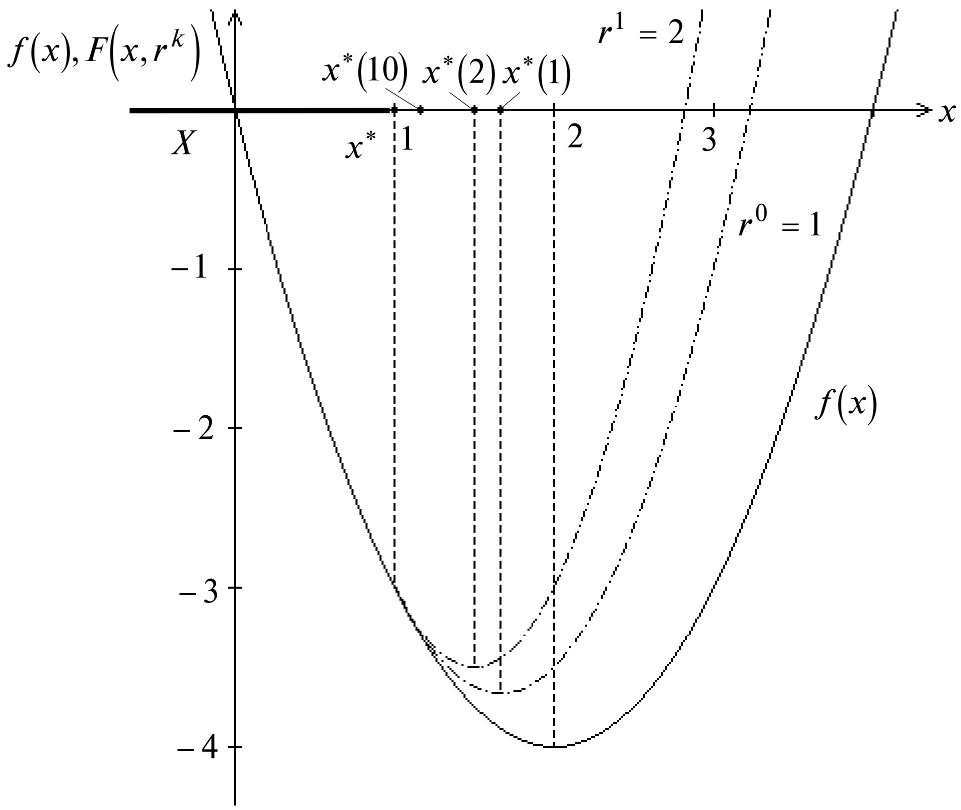


Рис. 2

Найдем решение этой задачи с применением необходимых и достаточных условий экстремума. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0\left(x^2 - 4x\right) + \lambda_1(x-1).$$

Необходимые условия минимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x} = \lambda_0(2x-4) + \lambda_1 = 0$;

б) $x - 1 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$;

г) $\lambda_1(x-1) = 0$.

Решим систему для двух случаев.

Первый случай: $\lambda_0 = 0$, тогда из условия “а” получаем $\lambda_1 = 0$, что не удовлетворяет необходимым условиям первого порядка.

Второй случай: $\lambda_0 \ne 0$. Поделив уравнения системы на $\lambda_0$ и заменив $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на $\lambda_1$, получим $2x - 4 + \lambda_1 = 0$. Из условия “г” имеем $\lambda_1 = 0$ или $x = 1$. При $\lambda_1 = 0$ из условия “а” следует, что $x = 2$, но при этом не удовлетворяется условие “б”. При $x^* = 1$ имеем $\lambda_1^* = 2$.

Достаточные условия минимума первого порядка удовлетворяются, так как $\lambda_1^* = 2 > 0$ и число активных ограничений $l = 1 = n$. С учетом связи параметра штрафа и множителей Лагранжа получим

$$\lambda_1^* = \lim_{r^k \to \infty} \lambda_1(r^k) = \lim_{r^k \to \infty} r^k \max\left\{0, \left[x^*(r^k) - 1\right]\right\} = \lim_{r^k \to \infty} r^k \max\left[0, \frac{2}{2 + r^k}\right] =$$

$$= \lim_{r^k \to \infty} \frac{2r^k}{2 + r^k} = 2. \ \blacksquare$$

**Пример 2.** Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

☐ 1. В поставленной задаче $m = 1$, ограничения-неравенства отсутствуют. Решим ее аналитически.

2. Составим вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{r^k}{2}(x_1 + x_2 - 2)^2.$$

3. Найдем безусловный минимум $F\left(x, r^k\right)$ по $x$ с помощью необходимых и достаточных условий:

$$\frac{\partial F\left(x, r^k\right)}{\partial x_1} = 2x_1 + r^k\left(x_1 + x_2 - 2\right) = 0,$$
$$\frac{\partial F\left(x, r^k\right)}{\partial x_2} = 2x_2 + r^k\left(x_1 + x_2 - 2\right) = 0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $x_1 = x_2$ и $x_1^*(r^k) = x_2^*(r^k) = \dfrac{r^k}{1 + r^k}$.

В табл. 2 приведены результаты расчетов при $r^k = 1, 2, 10, 100, 1000, \infty$, а на рис. 3 дана графическая иллюстрация процесса поиска решения.

Таблица 2

| $k$ | $r^k$ | $x_1^*(r^k) = x_2^*(r^k)$ | $F\left(x^*(r^k), r^k\right)$ | $\lambda_1(r^k) = r^k g_1\left(x^*(r^k)\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $-1$ |
| 1 | 2 | $\frac{2}{3}$ | 1,333 | $-\frac{4}{3}$ |
| 2 | 10 | $\frac{10}{11}$ | 1,81 | $-\frac{20}{11}$ |
| 3 | 100 | $\frac{100}{101}$ | 1,98 | $-\frac{200}{101}$ |
| 4 | 1000 | $\frac{1000}{1001}$ | 1,998 | $-\frac{2000}{1001}$ |
| 5 | $\infty$ | 1 | 2 | $-2$ |

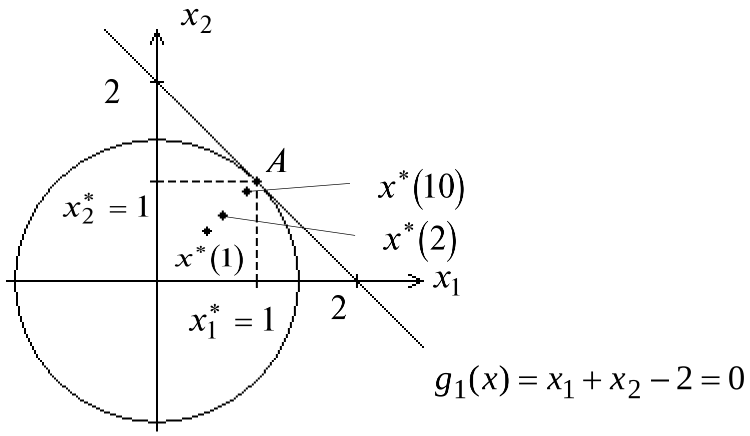


Рис. 3

Так как матрица Гессе $H\left(x^*(r^k), r^k\right) = \begin{pmatrix} 2+r^k & r^k \\ r^k & 2+r^k \end{pmatrix} > 0$ при $r^k > 0$, то достаточные условия безусловного минимума $F\left(x, r^k\right)$ удовлетворяются. При $r^k \to \infty$ имеем $\lim\limits_{r^k \to \infty} \dfrac{r^k}{1+r^k} = 1 = x_1^* = x_2^*$; $f(x^*) = 2$. Множитель Лагранжа находится одновременно:

$$\lambda_1^* = \lim_{r^k \to \infty} \lambda_1(r^k) = \lim_{r^k \to \infty} \left\{ r^k \left[ x_1^*(r^k) + x_2^*(r^k) - 2 \right] \right\} = \lim_{r^k \to \infty} \left[ -\frac{2r^k}{1+r^k} \right] = -2 .$$

Результат совпадает с полученным ранее. ■

## А2. МЕТОД БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

### Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ и функции ограничений-неравенств $g_j(x) \le 0$, $j = 1, \ldots, m$, определяющие множество допустимых решений $X$.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве $X$, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \mid g_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, m \right\}$.

## Стратегия поиска

Идея метода заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска безусловного минимума ***вспомогательной функции***

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + P\left(x, r^k\right),$$

где $P\left(x, r^k\right)$ – штрафная функция, $r^k \geq 0$ – параметр штрафа.

Как правило, используются:

а) ***обратная штрафная функция*** $P\left(x, r^k\right) = -r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)}$ (рис. 1, *а*);

б) ***логарифмическая штрафная функция*** $P\left(x, r^k\right) = -r^k \sum_{j=1}^{m} \ln\left[-g_j(x)\right]$ (рис. 1,*б*).

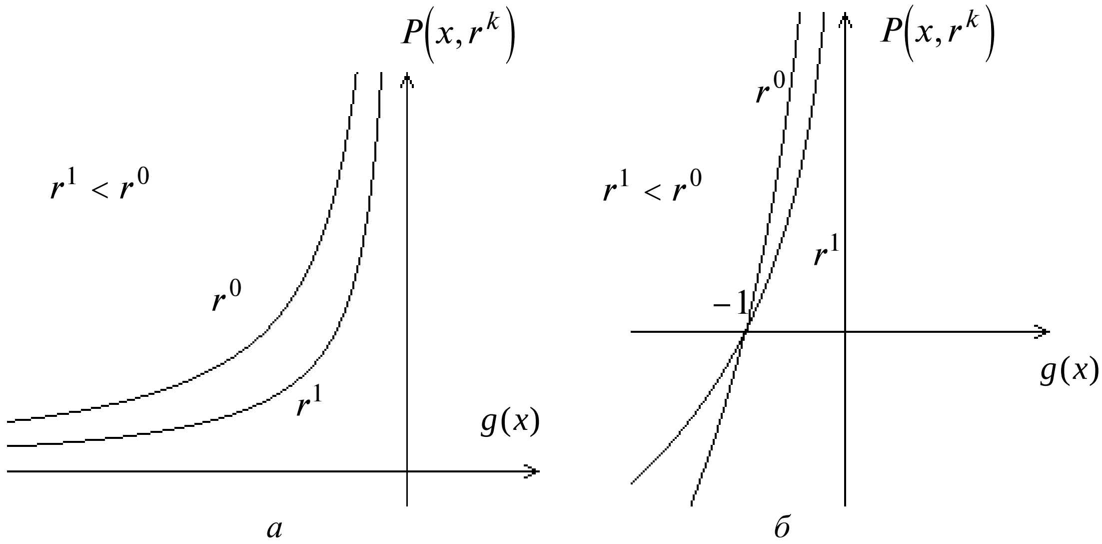


Рис. 1

Обе штрафные функции определены и непрерывны внутри множества $X$, т.е. на множестве $\left\{ x \mid g_j(x) < 0,\ j = 1, \dots, m \right\}$, и стремятся к бесконечности при приближении к границе множества изнутри. Поэтому они называются ***барьерными функциями***. При $r^k > 0$ штрафная функция, задаваемая обратной функцией, положительна. Логарифмическая штрафная функция положительна при $-1 < g(x) < 0$ и отрицательна при $g(x) < -1$, т.е. внутренним точкам области отдается предпочтение перед граничными точками.

Начальная точка задается только ***внутри*** множества $X$.

На каждой $k$-й итерации ищется точка $x^*(r^k)$ минимума вспомогательной функции $F\left(x, r^k\right)$ при заданном параметре $r^k$ с помощью одного из методов безусловной минимизации:

$$F\left(x^*(r^k), r^k\right) = \min_{x \in R^n} F\left(x, r^k\right).$$

Полученная точка $x^*(r^k)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при уменьшающемся значении параметра штрафа: $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$ .

При $r^k \to +0$ последовательность точек $x^*(r^k)$ стремится к точке условного минимума $x^*$:

$$\lim_{r^k \to +0} x^*(r^k) = x^*.$$

Барьерные функции как бы препятствуют выходу из множества *X*, а если решение задачи лежит на границе, то процедура метода приводит к движению изнутри области к границе.

Заметим, что согласно описанной процедуре точки $x^*(r^k)$ лежат внутри множества допустимых решений для каждого $r^k$. Этим объясняется то, что метод барьерных функций иногда называется ***методом внутренних штрафов***.

**Алгоритм**

*Шаг* 1. Задать начальную точку $x^0$ внутри области *X*, начальное значение параметра штрафа $r^k \geq 0$, число $C > 1$ для уменьшения параметра штрафа, малое число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

*Шаг* 2. Составить вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) - r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)} \quad \text{или} \quad F\left(x, r^k\right) = f(x) - r^k \sum_{j=1}^{m} \ln\left[-g_j(x)\right].$$

*Шаг* 3. Найти точку $x^*(r^k)$ минимума функции $F\left(x, r^k\right)$ с помощью какого-либо метода (нулевого, первого или второго порядка) поиска безусловного минимума с проверкой принадлежности текущей точки внутренности множества *X*. При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять $x^k$. Вычислить:

$$P\left(x^*(r^k), r^k\right) = -\, r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j\left(x^*(r^k)\right)} \quad \text{или} \quad P\left(x^*(r^k), r^k\right) = -r^k \sum_{j=1}^{m} \ln\left[-g_j\left(x^*(r^k)\right)\right].$$

*Шаг* 4. Проверить выполнение условия окончания:

а) если $\left|P\left(x^*(r^k), r^k\right)\right| \leq \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*(r^k), \qquad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right);$$

б) если $\left|P\left(x^*(r^k), r^k\right)\right| > \varepsilon$, положить $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$ ; $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

**З а м е ч а н и я.**

**1.** Обычно выбирается $r^0 = 1,10,100$, а параметр $C = 10;12;16$.

**2.** При $r^k \to +0$ обеспечивается сходимость, однако с уменьшением $r^k$ функция $F\left(x, r^k\right)$ становится все более «овражной». Поэтому полагать $r^k$ малым числом сразу нецелесообразно.

**3.** Так как в большинстве методов поиска безусловного экстремума используются дискретные шаги, то вблизи границы шаг может привести в точку вне допустимой области. Если в алгоритме отсутствует проверка на принадлежность точки множеству $\left\{x \mid g_j(x) < 0,\ j = 1,\dots,m\right\}$, то это может привести к ложному успеху, т.е. уменьшению вспомогательной функции в точке, где она теоретически не определена. Поэтому на шаге 3 алгоритма требуется явная проверка того, что точка не покинула допустимую область. Процедура поиска обычно завершается при некотором малом $r^k$, отличном от нуля. Однако приближенное решение принадлежит множеству допустимых решений. Это одно из преимуществ метода барьерных функций.

**4.** В ходе решения задачи методом штрафных функций находится вектор множителей Лагранжа:

$$\lambda_j(r^k) = \frac{r^k}{g_j^2\left(x^*(r^k)\right)},\quad j = 1,\dots,m, \text{ – для обратной штрафной функции;}$$

$$\lambda_j(r^k) = -\frac{r^k}{g_j\left(x^*(r^k)\right)},\quad j = 1,\dots,m, \text{ – для логарифмической штрафной функции;}$$

$$\lambda_j^* = \lim_{r^k \to +0} \lambda_j(r^k).$$

**Пример 1.** Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x \to \min,$$
$$g_1(x) = 2 - x \le 0.$$

☐ 1. Найдем решение аналитически с применением обратной штрафной функции.

2. Составим вспомогательную функцию: $F\left(x, r^k\right) = x \underbrace{- r^k \frac{1}{2 - x}}_{P(x, r^k)}$.

3. Найдем безусловный минимум $F\left(x, r^k\right)$ с помощью необходимых и достаточных условий: $\dfrac{\partial F\left(x, r^k\right)}{\partial x} = 1 - \dfrac{r^k}{(2 - x)^2} = 0$.

Так как внутри множества допустимых решений $2 - x < 0$, то $x = 2 \pm \sqrt{r^k}$, а $x^*(r^k) = 2 + \sqrt{r^k}$. Достаточные условия минимума выполняются:

$$\frac{\partial^2 F\left(x^*(r^k), r^k\right)}{\partial x^2} = -\frac{r^k}{\left[\,2 - x^*(r^k)\,\right]^3} > 0.$$

Таблица 1

| $k$ | $r^k$ | $x^*(r^k)$ | $F\left(x^*(r^k),r^k\right)$ | $P\left(x^*(r^k),r^k\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | 0,1 | 2,31 | 2,63 | 0,32 |
| 2 | 0,01 | 2,1 | 2,2 | 0,1 |
| 3 | 0,001 | 2,03 | 2,063 | 0,033 |
| 4 | 0 | 2 | 2 | - |

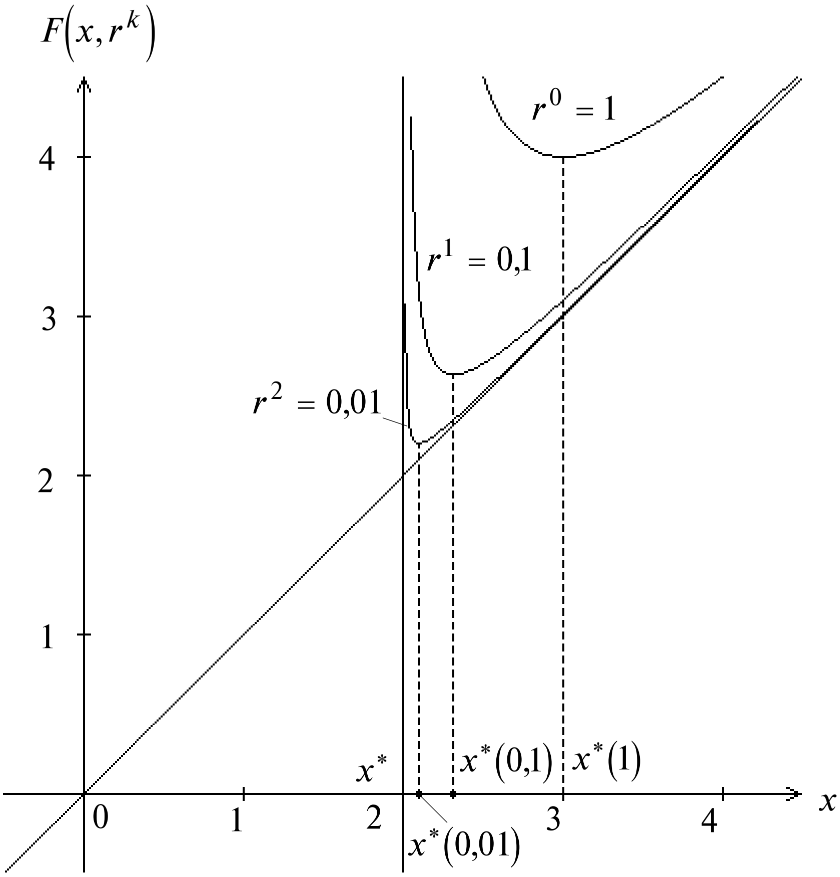


Рис. 2

Результаты численных расчетов приведены в табл. 1 и отображены на рис. 2. ■

# А3. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

## Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1, \ldots, p$, определяющие множество допустимых решений $X$.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве $X$, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, m; \quad m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1, \ldots, p \end{array} \right\}.$

## Стратегия поиска

Для ограничений типа равенств применяется метод штрафов (внешних штрафов), а для ограничений-неравенств – метод барьерных функций (внутренних штрафов).

Задача на условный минимум сводится к решению последовательности задач поиска минимума ***смешанной вспомогательной функции***:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \frac{1}{g_j(x)}$$

или

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \ln[-g_j(x)],$$

где $r^k \ge 0$ – параметр штрафа.

Начальная точка задается так, чтобы ограничения-неравенства строго выполнялись: $g_j(x) < 0$, $j = m+1, \ldots, p$.

На каждой $k$-й итерации ищется точка $x^*(r^k)$ минимума смешанной вспомогательной функции при заданном параметре $r^k$ с помощью одного из методов безусловной минимизации.

Полученная точка $x^*(r^k)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при уменьшающемся значении параметра штрафа.

При $r^k \to +0$ последовательность точек $x^*(r^k)$ стремится к точке условного минимума $x^*$.

**Алгоритм**

*Шаг* 1. Задать начальную точку $x^0$ так, чтобы $g_j(x) < 0$, $j = m+1,\dots,p$; начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$; число $C > 1$ для уменьшения параметра штрафа; малое число $\varepsilon$ для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

*Шаг* 2. Составить смешанную вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k}\sum_{j=1}^{m}[g_j(x)]^2 - r^k\sum_{j=m+1}^{p}\frac{1}{g_j(x)} = f(x) + P\left(x, r^k\right)$$

или

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k}\sum_{j=1}^{m}[g_j(x)]^2 - r^k\sum_{j=m+1}^{p}\ln[-g_j(x)] = f(x) + P\left(x, r^k\right).$$

*Шаг* 3. Найти точку $x^*(r^k)$ минимума функции $F\left(x, r^k\right)$ с помощью какого-либо метода поиска безусловного минимума с проверкой выполнения справедливости неравенств: $g_j(x) < 0$, $j = m+1,\dots,p$. При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять $x^k$.

*Шаг* 4. Вычислить $P\left(x^*(r^k), r^k\right)$ и проверить условие окончания:

а) если $\left|P\left(x^*(r^k), r^k\right)\right| \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$x^* = x^*(r^k), \quad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right);$

б) если $\left|P\left(x^*(r^k), r^k\right)\right| > \varepsilon$, то положить $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$, $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

**Замечания.**

**1.** Рекомендуемые значения $r^0 = 1$, $C = 4$.

**2.** Можно использовать разные параметры штрафа для внешних и внутренних штрафов.

**3.** В процессе применения метода находится вектор множителей Лагранжа:

$$\lambda_j(r^k) = \frac{g_j\left[x^*(r^k)\right]}{r^k}, \quad j = 1,\dots,m;$$

$$\lambda_j(r^k) = \frac{r^k}{\left[g_j\left(x^*(r^k)\right)\right]^2}, \quad j = m+1,\dots,p, \text{– для обратной штрафной функции;}$$

$$\lambda_j(r^k) = -\frac{r^k}{g_j\left(x^*(r^k)\right)}, \quad j = m+1,\dots,p, \text{– для логарифмической штрафной функции;}$$

$$\lim_{r^k \to +0} \lambda_j(r^k) = \lambda_j^*, \quad j = 1,\dots,p.$$

## А4. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ

### Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1, \ldots, p$, определяющие множество допустимых решений $X$.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве $X$, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, m;\ m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1, \ldots, p \end{array} \right\}.$

### Стратегия поиска

Стратегия аналогична используемой в методе внешних штрафов, только штрафная функция добавляется не к целевой функции, а к классической функции Лагранжа. В результате задача на условный минимум сводится к решению последовательности задач поиска безусловного минимума *модифицированной функции Лагранжа*:

$$L\left(x, \lambda^k, \mu^k, r^k\right) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k g_j(x) + \frac{r^k}{2} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2r^k} \sum_{j=m+1}^{p} \left\{ \left[ \max\left\{ 0, \mu_j^k + r^k g_j(x) \right\} \right]^2 - \left(\mu_j^k\right)^2 \right\},$$

где $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k\right)^T$, $\mu^k = \left(\mu_{m+1}^k, \ldots, \mu_p^k\right)^T$ – векторы множителей; $r^k$ – параметр штрафа; $k$ – номер итерации.

Задается начальная точка поиска $x^0$.

На каждой $k$-й итерации ищется точка минимума модифицированной функции Лагранжа при заданных $\lambda^k, \mu^k, r^k$ с помощью одного из методов безусловной минимизации.

Полученная точка $x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при возрастающем значении параметра штрафа $r^k$ и пересчитанных определенным образом векторах множителей $\lambda^k, \mu^k$:

$r^{k+1} = C\, r^k$ (пересчет параметра штрафа);

$\lambda^{k+1} = \lambda^k + r^k g\left(x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right)\right)$ (пересчет множителей для ограничений-равенств);

$\mu_j^{k+1} = \max\left\{0, \mu_j^k + r^k g_j\left(x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right)\right)\right\}$ (пересчет множителей для ограничений-неравенств);

Для достижения сходимости в отличие от метода внешних штрафов не требуется устремлять $r^k$ к бесконечности.

### Алгоритм

*Шаг* 1. Задать начальную точку $x^0$, начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$, число $C > 1$ для увеличения параметра, начальные значения векторов множителей $\lambda^0, \mu^0$; малое число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

*Шаг* 2. Составить модифицированную функцию Лагранжа:

$$L\left(x,\lambda^k,\mu^k,r^k\right) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k g_j(x) + \frac{r^k}{2} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 +$$

$$+\frac{1}{2r^k} \sum_{j=m+1}^{p} \left\{ \left[ \max\left\{ 0, \mu_j^k + r^k g_j(x) \right\} \right]^2 - \left(\mu_j^k\right)^2 \right\}.$$

*Шаг* 3. Найти точку $x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right)$ безусловного минимума функции по $x$ с помощью какого-либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

$$L\left(x^*,\lambda^k,\mu^k,r^k\right) = \min_{x \in R^n} L\left(x,\lambda^k,\mu^k,r^k\right).$$

При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять $x^k$.

*Шаг* 4. Вычислить $P\left(x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right), \mu^k, r^k\right)$, где

$$P\left(x,\mu^k,r^k\right) = \frac{r^k}{2} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=m+1}^{p} \left\{ \left[ \max\left\{ 0, \mu_j^k + r^k g_j(x) \right\} \right]^2 - \left(\mu_j^k\right)^2 \right\},$$

и проверить выполнение условия окончания:

а) если $\left| P\left(x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right), \mu^k, r^k\right) \right| \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*\left(\lambda^k,\mu^k,r^k\right), \qquad f(x^*) = f\left(x^*\left(\lambda^k,\mu^k,r^k\right)\right);$$

б) если $\left| P\left(x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right), \mu^k, r^k\right) \right| > \varepsilon$, положить:

$r^{k+1} = C\, r^k$ (пересчет параметра штрафа);

$\lambda^{k+1} = \lambda^k + r^k g\left(x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right)\right)$ (пересчет множителей для ограничений-равенств);

$\mu_j^{k+1} = \max\left\{0, \mu_j^k + r^k g_j\left(x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right)\right)\right\}$ (пересчет множителей для ограничений-неравенств);

$x^{k+1} = x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right)$, $k = k + 1$, и перейти к шагу 2.

**З а м е ч а н и я.**

**1.** Обычно $r^0 = 0{,}1;1$, а $C \in [4,10]$. Целесообразно выбрать $\lambda^0, \mu^0$ близкими к $\lambda^*, \mu^*$, используя априорную информацию о решении. Иногда выбирают $\lambda^0 = \mu^0 = 0$. В этом случае первая вспомогательная задача минимизации совпадает с решаемой в методе внешних штрафов.

**2.** Методом множителей удается найти условный минимум за меньшее число итераций, чем методом штрафов. При этом для достижения сходимости не требуется устремлять $r^k$ к бесконечности. Доказано, что минимум модифицированной функции Лагранжа начиная с некоторого $r^k$ совпадает с минимумом в исходной задаче. Это приводит также к тому, что проблема увеличения «овражности» не является такой острой, как в методе штрафов.

**3.** Найденная в результате точка $x^*$ удовлетворяет условиям Куна–Таккера (при $\lambda_0 \neq 0$), а $\lambda^k \to \lambda^*, \mu^k \to \mu^* = \left(\lambda^*_{m+1}, \ldots, \lambda^*_p\right)^T$.

## А5. МЕТОД ТОЧНЫХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

### Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1, \ldots, p$, определяющие множество допустимых решений $X$.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве $X$, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, m;\ m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1, \ldots, p \end{array} \right\}$.

### Стратегия поиска

Идея заключается в таком построении вспомогательных функций, что для выбранных соответствующим образом параметров штрафа однократная безусловная оптимизация дает решение исходной задачи. При построении вспомогательных функций могут использоваться:

1) ***недифференцируемые точные штрафные функции***, безусловный минимум которых по $x$ ищется при фиксированном значении параметра штрафа:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + r^k \max\left\{ 0, \left| g_1(x) \right|, \ldots, \left| g_m(x) \right|, g_{m+1}(x), \ldots, g_p(x) \right\} \to \min_{x \in R^n}; \qquad (1)$$

2) ***дифференцируемые точные штрафные функции*** (для задач с ограничениями типа равенств):

$$F\left(x, \lambda, r^k, \alpha^k\right) = L(x, \lambda) + \frac{r^k}{2} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 + \frac{\alpha^k}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} \right]^2 \to \min_{(x, \lambda) \in R^{n+m}}, \qquad (2)$$

где $r^k, \alpha^k > 0$ – параметры штрафа, $L\left(x, \lambda\right) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$ – классическая функция Лагранжа;

$$F\left(x,r^k\right)=L\left[x,\lambda(x)\right]+\frac{r^k}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g_j(x)\right]^2\to\min_{x\in R^n}, \qquad (3)$$

где $\lambda(x)=-\left[\nabla g(x)^T\nabla g(x)\right]^{-1}\nabla g(x)^T\nabla f(x)$, $r^k>0$ – параметр штрафа.

Для минимизации недифференцируемых вспомогательных функций можно применять методы нулевого порядка, а для дифференцируемых – также методы, использующие производные.

Увеличивать параметр штрафа $r^k$ до бесконечности не требуется: существует конечное пороговое значение $\bar{r}$, такое, что $x^*$ будет точкой безусловного минимума $F\left(x,r^k\right)$ при любом $r^k>\bar{r}$. Параметр $\alpha^k$ задается достаточно малым положительным числом.

**Алгоритм**

*Шаг* 1. Задать начальную точку $x^0$; начальное значение параметров штрафа $r^0>0$, $\alpha^0>0$; число $C>1$ для изменения параметров штрафа; максимальное число решаемых задач безусловной минимизации $N$; малое число $\varepsilon>0$ для остановки алгоритма. Положить $k=0$.

*Шаг* 2. Составить вспомогательную функцию вида (1) или (2), или (3) в зависимости от типа решаемой задачи.

*Шаг* 3. Найти точку $x^*(r^k)$ или $\left(x^*\left(r^k,\alpha^k\right),\lambda^*\left(r^k,\alpha^k\right)\right)$ безусловного минимума вспомогательной функции по $x$ для (1), (3) и по $x,\lambda$ для (2). В качестве начальной точки взять $x^k$. Предусмотреть прекращение процесса минимизации, если вспомогательная функция не ограничена снизу.

*Шаг* 4. Вычислить абсолютное значение соответствующей штрафной функции:

$$P\left(x^*(r^k),r^k\right)=r^k\max\left\{0,\left|g_1\left(x^*(r^k)\right)\right|,\ldots,\left|g_m\left(x^*(r^k)\right)\right|,g_{m+1}\left(x^*(r^k)\right),\ldots,g_p\left(x^*(r^k)\right)\right\},$$

$$P\left(x^*(r^k,\alpha^k),r^k,\alpha^k\right)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*(r^k,\alpha^k)\,g_j\left(x^*(r^k,\alpha^k)\right)+\frac{r^k}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g_j\left(x^*(r^k,\alpha^k)\right)\right]^2+$$

$$+\frac{\alpha^k}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L\left(x^*,\lambda^*\right)}{\partial x_i}\right]^2,$$

$$P\left(x^*(r^k),r^k\right)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(x^*(r^k)\right)\,g_j\left(x^*(r^k)\right)+\frac{r^k}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g_j\left(x^*(r^k)\right)\right]^2$$

и проверить выполнение условия окончания:

а) если вычисленное значение меньше или равно $\varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^*=x^*(r^k)\quad\text{или}\quad x^*=x^*(r^k,\alpha^k);$$

б) если оно больше $\varepsilon$ и $k = N-1$, процесс закончить и выдать сообщение о неудаче;

в) если вычисленное значение больше $\varepsilon$ и $k < N-1$, то положить $r^{k+1} = Cr^k$, $\alpha^{k+1} = C\alpha^k$, $x^{k+1} = x^*(r^k)$ или $x^{k+1} = x^*(r^k, \alpha^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

**З а м е ч а н и я .**

Пороговые значения параметров штрафа $\bar{r}$ зависят от величин, связанных с $x^*$ и, следовательно, заранее неизвестных. Поэтому для выбора удачных значений параметров приходится применять их корректировку конечное число раз. Если значение $r^k$ занижено, вспомогательная функция может оказаться неограниченной снизу либо «область притяжения» точки $x^*$ будет очень малой. Если же взять $r^k$ слишком большим, вспомогательная задача может иметь плохое решение из-за «овражности».

**Пример 2.** Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x \to \min,$$
$$g_1(x) = 2 - x \le 0.$$

□ Используем недифференцируемую точную штрафную функцию (1):

$$F\left(x, r^k\right) = f\left(x\right) + r^k \max\left\{0, g_1\left(x\right)\right\} = x + r^k \max\left\{0, 2-x\right\} \to \min_x .$$

При $r^k > 1$ функция $F\left(x, r^k\right)$ имеет безусловный минимум в точке $x^* = 2$, являющейся решением поставленной задачи (рис. 3). При $r^k < 1$ функция $F\left(x, r^k\right)$ не имеет локального минимума и вообще не ограничена снизу. ■

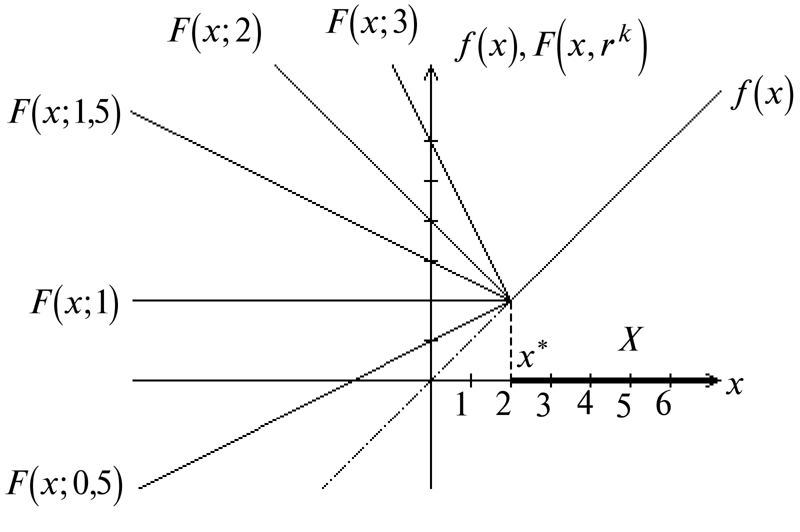


Рис. 3

**Пример 3.** Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x^2 - 4x \to \min,$$
$$g_1(x) = x - 1 \le 0.$$

□ Используем недифференцируемую точную штрафную функцию (1):

$$F\left(x, r^k\right) = f\left(x\right) + r^k \max\left\{0, g_1\left(x\right)\right\} = x^2 - 4x + r^k \max\left\{0, x - 1\right\}.$$

Точное решение этой задачи: $x^* = 1,\ f(x^*) = -3$. При этом $\lambda_1^* = 2$. Параметр штрафа выберем из условия $r^k > \bar{r} = \lambda_1^* = 2$. Тогда $x^*$ является точкой локального минимума $F\left(x, r^k\right)$. Например, при $r^k = 3$ получаем

$$F\left(x, r^k\right) = x^2 - 4x + 3\max\left\{0, x - 1\right\} = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \le 1, \\ x^2 - x - 3, & x \ge 1. \end{cases}$$

Очевидно, эта функция имеет безусловный минимум в точке $x^* = 1$ (рис. 4).

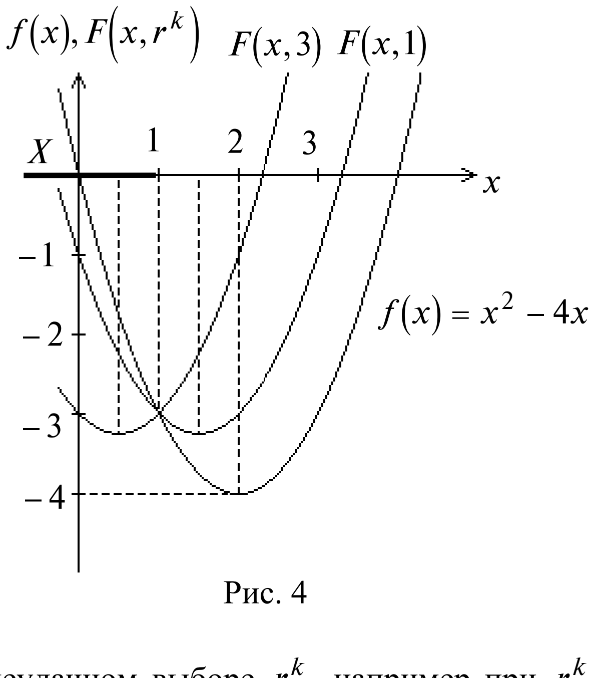


Рис. 4

Заметим, что при неудачном выборе $r^k$, например при $r^k = 1$, вспомогательная задача не обладает желаемым свойством, так как функция $F(x,1)$ имеет безусловный минимум в точке $x = \dfrac{3}{2}$, не совпадающий с $x^*$ (рис. 4). ■