ЛЕКЦИЯ 1. СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Определение. Последовательность, членами которой являются функции, определенные на некотором множестве X, называется *функциональной последовательностью*.

Определение. Пусть дана функциональная последовательность $f_1(x),\ f_2(x),\dots f_n(x),\dots$. Формально написанную сумму

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \cdots$$

называют *функциональным рядом*.

При любом значении x из области определения членов ряда, получается числовой ряд, сходимость которого можно исследовать. Напомним, что ряд может сходится как условно, так и абсолютно.

Определение. Множество X значений x, для которых ряд $\sum_{n=1} f_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости ряда*.

По определению области сходимости, для каждого $x \in X$ существует предел $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ - частичные суммы функционального ряда. Тем самым на множестве X определена функция $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ — *сумма функционального ряда*.

Пример. Найти область сходимости функционального ряда. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$.

Решение. Этот ряд является знакочередующимся и при всех x, очевидно, удовлетворяет условиям признака Лейбница. Поскольку $\frac{1}{n+x^2} \sim \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то, по признаку сравнения, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ сходится условно на $\mathbf{R}$.

Определение. Функциональная последовательность $f_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$ называется *равномерно сходящейся* на множестве X к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon = n(\varepsilon) : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon,\ \forall x \in X .$$

В этом случае пишут: $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. Сущность равномерной сходимости функциональной последовательности состоит в том, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер n_ε, зависящий только от заданного $\varepsilon > 0$ и не зависящий от выбора точки $x \in X$, что при $n > n_\varepsilon$ графики функций $f_n(x)$ расположены в «ε-полоске», окружающей график функции f (рис. 1).

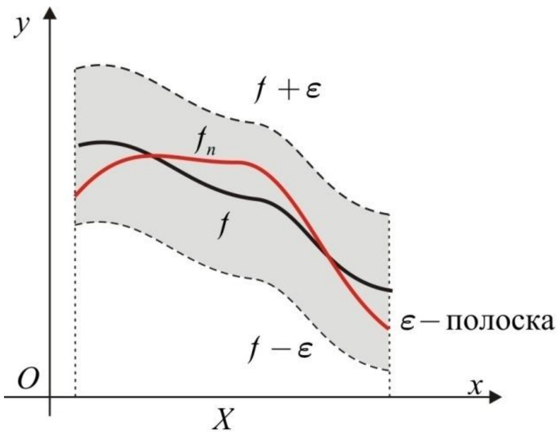

Рис. 1

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Для того чтобы функциональная последовательность $f_n(x)$, $x \in X$, $n = 1, 2, ...$ равномерно сходилась на множестве *X*, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon, \forall p \in \mathbf{Z},\ p \geq 0\ \Rightarrow \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon,\ \ \forall x \in X\ .$$

Доказательство. Пусть последовательность равномерно сходится на множестве X. Тогда, по определению равномерной сходимости, существует функция *f*(*x*) такая, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon\ \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ \forall x \in X\ .$$

Поэтому, если $n > n_\varepsilon$ и $p \in \mathbf{Z},\ p \geq 0$, то для всех $x \in X$ получим

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \leq \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_n(x) < \varepsilon\right|.$$

Пусть теперь выполняется условие, данное в условии теоремы. Тогда при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $f_n(x), n = 1, 2, ...$ удовлетворяет критерию Коши сходимости числовой последовательности. Следовательно, при любом $x \in X$ существует предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Покажем, что функциональная последовательность $f_n(x), n = 1, 2, ...$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве *X*. По условию теоремы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon, \forall p \in \mathbf{Z},\ p \geq 0\ \Rightarrow \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ \forall x \in X\ .$$

Заметив, что $f(x) = \lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x)$, перейдем к пределу в неравенстве $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $p \to \infty$. Тогда для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ получим $\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Следовательно, $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. ■

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если на этом множестве равномерно сходится функциональная последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Итак, данное определение означает, что на множестве X определена функция $S(x)$ такая, что $S_n \underset{X}{\rightrightarrows} S$. Заметим, что $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Следовательно, условие $S_n \underset{X}{\rightrightarrows} S$ можно переписать в эквивалентной форме $r_n \underset{X}{\rightrightarrows} 0$.

Теорема. Для того чтобы функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbf{Z},\ p \geq 0\ \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon,\ \ \forall x \in X .$$

Пример. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$ на (-1;1).

Решение. Заметим, что $\left| S(x) - S_n(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1} \right| = \dfrac{|x|^n}{1-x}$. Пусть $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Тогда $\left| S(x_n) - S_n(x_n) \right| = n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = +\infty$, то для любого числа N мы всегда найдем номер $n > N$ и точку $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} \in (-1;1)$, для которых $\left| S(x_n) - S_n(x_n) \right| > 1$. Следовательно, данный ряд не сходится равномерно на $(-1;1)$.

Пример. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$ на всей числовой прямой.

Решение. Остаток сходящегося знакочередующегося ряда не превышает по модулю первого отброшенного члена, поэтому $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k + x^2} \right| < \dfrac{1}{n+1+x^2} < \dfrac{1}{n+1}$. Очевидно, что модуль остатка ряда может стать сколь угодно малым при достаточно большом n. Итак, этот ряд сходится равномерно на всей числовой прямой.

Пример. Исследовать последовательность на равномерную сходимость в указанном промежутке $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2}$, $x \in [0;1]$.

Решение. Как легко видеть $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = 0,\ \forall x \in [0;1]$. Пусть $r_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Найдем $\max_{[0;1]} |r_n(x)|$. Имеем

$$r_n'(x) = f_n'(x) = \left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{2n\left(1+n^2x^2\right) - 2nx2n^2x}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = \frac{2n - 2n^3x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}.$$

При $x = \dfrac{1}{n}$ производная $r_n'(x)$ равна нулю и меняет свой знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, $\max\limits_{[0;1]}\left|r_n(x)\right| = r_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Отсюда ясно, что последовательность не сходится равномерно на отрезке $[0;1]$, поскольку для $\varepsilon = 1/2$ при любом натуральном n существует $x_n = \dfrac{1}{n} \in [0;1]$, для которой $\left|r_n\left(x_n\right)\right| = 1 \geq \varepsilon$.

ЛЕКЦИЯ 2. ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости). Если для каждого члена $f_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ существует число $c_n > 0$ такое, что

$$| f_n(x) | \le c_n, \ \forall x \in X,$$

причем числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно на X.

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \ \forall n > N \ \Rightarrow \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_n < \varepsilon .$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_n < \varepsilon, \ \forall x \in X .$$

Таким образом, по определению, ряд сходится равномерно на X. ■

Прежде чем рассматривать два других признака мы рассмотрим так называемое *преобразование Абеля*. Пусть дана сумма $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. Введем обозначение $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$. Тогда $b_k = B_k - B_{k-1}, \ k = 2,3,\ldots$. Следовательно, данную сумму можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \ldots + a_n (B_n - B_{n-1}) =$$
$$= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \ldots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n B_n.$$

Это и есть преобразование Абеля.

Лемма. Если $a_i \le a_{i+1}, i = 1,2,\ldots$ или $a_i \ge a_{i+1}, i = 1,2,\ldots$ и, кроме того, $|b_1 + \ldots + b_k| \le B, \ k = 1,2,\ldots$, то $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$.

Доказательство. По условию леммы, все разности $a_i - a_{i+1}, i = 1,2,\ldots$ одного знака, поэтому

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| = |B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \ldots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n B_n| \le$$
$$\le |B_1||a_1 - a_2| + |B_2||a_2 - a_3| + \ldots + |B_{n-1}||a_{n-1} - a_n| + |a_n||B_n| \le$$
$$\le B\left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_n| \right) = B\left(|a_1 - a_n| + |a_n|\right) \le B\left(|a_1| + 2|a_n|\right). \ ■$$

Теперь мы готовы доказать следующие признаки равномерной сходимости.

Теорема (Дирихле). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$, в котором функции $a_n(x), \ b_n(x)$ определены на множестве X и таковы, что

1) последовательность $a_n(x),\ n=1,2,...$ монотонна при каждом $x\in X$ и равномерно стремится к нулю на X;

2) последовательность частичных сумм $B_k(x)=\sum_{i=1}^{k} b_i(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ ограничена на множестве X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. По условию существует число B>0 такое, что

$$|B_k(x)|=\left|\sum_{i=1}^{k} b_i(x)\right|\le B,\quad \forall x\in X,\quad k=1,2,....$$

Кроме того,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon:\ \forall n>n_\varepsilon\ \Rightarrow\ |a_n(x)|<\frac{\varepsilon}{6B},\ \forall x\in X.$$

Следовательно, в силу леммы 27.1, получаем

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right|\le B\cdot\left(|a_n(x)|+2|a_{n+p}(x)|\right)<B\left(\frac{\varepsilon}{6B}+2\frac{\varepsilon}{6B}\right)<\varepsilon,\ \forall x\in X,$$

при всех $n>n_\varepsilon$ и любом целом, неотрицательном p. Таким образом, по критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на множестве X. ■

Теорема (Абель). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$, в котором функции $a_n(x),\ b_n(x)$ определены на множестве X и таковы, что

1) последовательность $a_n(x),\ n=1,2,...$ монотонна при каждом $x\in X$ и ограничена на множестве X;

2) ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. По условию существует число $M>0$ такое, что $|a_n(x)|\le M$ для всех $n=1,2,...$ и всех $x\in X$. По критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда, для любого числа $\varepsilon>0$ существует натуральное число $n_\varepsilon=n(\varepsilon)$ такое, что при всех $n>n_\varepsilon$ и любых целых неотрицательных числах p выполняется неравенство $\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3M}$, для всех $x\in X$. Отсюда, в силу леммы 27.1, имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)a_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_n(x)|+2|a_{n+p}(x)|\right)\le\varepsilon,\quad \forall x\in X.$$

Следовательно, по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на X. ■

Пример. Исследовать ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

Решение. Последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$ монотонна и равномерно стремится к нулю на указанном промежутке. Рассмотрим суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$. Заметим, что $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$. Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \ldots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}.$$

Следовательно, ряд равномерно сходится на указанном промежутке.

ЛЕКЦИЯ 3. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Для начала отметим два очевидных свойства равномерно сходящихся рядов.

Лемма. Если ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ равномерно сходятся на множестве *X*, то для любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda a_n(x) + \mu b_n(x)\right)$ равномерно сходится на множестве *X*.

Лемма. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве *X*, а функция $g(x)$ ограничена на этом множестве, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} g(x) a_n(x)$ равномерно сходится на *X*.

Теорема (непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$ и ряд равномерно сходится на *X*, то сумма ряда $S(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$.

Доказательство. Обозначим через $S_n(x)$ частичную сумму функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Поскольку все функции $f_n(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, то частичная сумма $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0. Так как ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве *X*, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon): \; \forall n > N \Rightarrow \left|S(x) - S_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \;\; \forall x \in X .$$

Возьмем произвольное натуральное число $n_0 > N$. Из непрерывности функции $S_{n_0}(x)$ в точке x_0 следует:

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \; \forall x \in X, \; \left|x - x_0\right| < \delta \;\Rightarrow \left|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому, для любого $x \in X, \; \left|x - x_0\right| < \delta$ мы получаем

$$\left|S(x) - S(x_0)\right| \le \left|S(x) - S_{n_0}(x)\right| + \left|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right| + \left|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Следовательно, функция $S(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Теорема (почленное интегрирование равномерно сходящегося функционального ряда). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и ряд равномерно сходится на этом отрезке, то при любом выборе точки $x_0 \in [a;b]$

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, и если $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, то $\int_{x_0}^{x} S(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt,\ x\in[a;b]$.

Доказательство. Пусть $S_n(x)$ - частичные суммы данного функционального ряда. В силу предыдущей теоремы, функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, поэтому она интегрируема на этом отрезке. По условию теоремы $S_n \underset{X}{\rightrightarrows} S$. Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\ \forall n>N \Rightarrow \left|S(x)-S_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ \forall x\in[a;b].$$

Отсюда получаем при любом $n>N$

$$\left|\int_{x_0}^{x} S(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x} S(t)dt-\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{n} f_n(t)\right)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x} S(t)dt-\int_{x_0}^{x} S_n(t)dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|S(t)-S_n(t)\right|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\left|x-x_0\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\ \forall x\in[a;b].$$

Таким образом, $\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \underset{X}{\rightrightarrows}\int_{x_0}^{x} S(t)dt$. ■

Теорема (почленное дифференцирование функционального ряда). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;b]$, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится в точке $x_0\in[a;b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, его сумма непрерывно дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и имеет место равенство $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$.

Доказательство. Пусть $\sigma(x)$ – это сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$. Ясно, что $\sigma\in C[a;b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f_n(x)-f_n(x_0)\right)$ равномерно сходится на отрезке $[a;b]$ и его сумма равна $\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dt$. Поскольку, по условию, числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ сходится, то на отрезке $[a;b]$ равномерно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(f_n(x)-f_n(x_0)\right)+f_n(x_0)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Обозначим сумму этого ряда $s(x)$. Тогда имеет место равенство

$$\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f_n(x)-f_n(x_0)\right)=s(x)-s(x_0).$$

По свойству интеграла с переменным верхним пределом, функция $s(x)$ имеет производную на отрезке $[a;b]$ и $s'(x)=\sigma(x)$. Поскольку $\sigma\in C[a;b]$, то $s\in C^1[a;b]$. ■

Доказанные теоремы легко перефразировать для функциональных последовательностей.

Теорема. Если $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ и функции f_n непрерывны в точке $x_0\in X$, то f непрерывна в x_0. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$.

Теорема. Если $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, $f_n\in C[a;b]$, $n=1,2,...$, то, какова бы ни была точка $x_0\in[a;b]$, $\int\limits_{x_0}^{x}f_n(t)dt \underset{[a;b]}{\rightrightarrows}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)dt$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x}f_n(t)dt=\int\limits_{x_0}^{x}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)dt,\ x\in[a;b]$.

Теорема. Пусть $f_n\in C^1[a;b]$, $n=1,2,...$ и последовательность f_n, $n=1,2,...$ сходится в точке $x_0\in[a;b]$, а последовательность производных f_n', $n=1,2,...$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$. Тогда последовательность f_n, $n=1,2,...$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, ее предел является непрерывно дифференцируемой на $[a;b]$ функцией и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{df_n(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2},\ x\in(-\infty;+\infty)$.

Решение. Найдем $\sup\limits_{x\in(-\infty;+\infty)}\left|\dfrac{nx}{1+n^5x^2}\right|$. Если $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, то

$$f_n'(x)=\frac{n\left(1+n^5x^2\right)-nx2n^5x}{\left(1+n^5x^2\right)^2}=\frac{n-n^6x^2}{\left(1+n^5x^2\right)^2}.$$

Производная равна нулю при $x=\pm\dfrac{1}{n^{5/2}}$ и, как легко видеть,

$$\sup_{x\in(-\infty;+\infty)}|f_n(x)|=\left|f_n\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)\right|=\frac{1}{2n^{3/2}}=c_n.$$

Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2}$ сходится равномерно на $(-\infty;+\infty)$. Но члены ряда $f_n(x)$ – непрерывные функции на $(-\infty;+\infty)$, поэтому функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

ЛЕКЦИЯ 4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение. Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$, где $c, a_n \in \mathbf{R}$, а x – действительная переменная, называется степенным.

Замена переменной $y = x - c$ приводит ряд к виду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$. Далее будем рассматривать именно такие ряды. Итак, пусть дан ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Теорема. (Абеля). Если ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится при всех x, $|x| < |x_0|$, причем абсолютно**.**

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ сходится, то, по необходимому признаку сходимости числового ряда, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Следовательно, последовательность $a_n x_0^n$, $n = 1, 2, \ldots$ ограничена. Поэтому существует число $M > 0$ такое, что $\left|a_n x_0^n\right| \le M$, $\forall n = 0, 1, \ldots$. Пусть $|x| < |x_0|$. Тогда

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Так как ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ сходящийся, то ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно. ■

Следствие. Если ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ расходится в точке $x_0 \neq 0$, то он расходится при всех x, $|x| > |x_0|$.

Теорема. (Абель). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(-R; R)$ и при $x = R$ (при $x = -R$), то ряд сходится равномерно на отрезке $[0; R]$ (на отрезке $[-R; 0]$).

Доказательство. По условию числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n R^n$ сходится. Пусть $x \in [0; R]$ Последовательность $\left(\frac{x}{R}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ монотонна и ограничена. Поэтому, по признаку Абеля равномерной сходимости функционального ряда, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n \left(a_n R^n\right)$ равномерно сходится на отрезке $[0; R]$. ■

Определение. Пусть задан ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Если R - неотрицательное число или $+\infty$ обладает тем свойством, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится, а при всех x, для которых $|x| > R$, ряд расходится, то R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Интервал $(-R,\ R)$ называется *интервалом сходимости степенного ряда*.

Теорема. У всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ существует радиус сходимости R. При любом $x, |x| < R$ ряд сходится абсолютно, а на любом отрезке $|x| \le r$, где r фиксировано и $r < R$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. Пусть $A = \left\{ x:\ x \in [0; +\infty),\ \text{ряд}\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\ \text{сходится} \right\}$. Заметим, что множество $A \ne \varnothing$, так как $0 \in A$. Пусть $R = \sup A$. Рассмотрим случай $0 < R < +\infty$. В этом случае, если $|y| < R$, то, по определению верхней грани, существует $x \in A$ такой, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ сходится и $|y| < x < R$. По теореме Абеля ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ сходится абсолютно. Если же $|y| > R$, то выберем число x, $|y| > x > R$. Ясно, что $x \notin A$, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ расходится. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ расходится. Таким образом, R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Пусть теперь $r < R$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Поскольку при $|x| \le r$ имеет место неравенство $|a_n x|^n \le |a_n| r^n$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^n$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на отрезке $[-r; r]$. ■

Пример. Найти область сходимости и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+2} x^n$.

Решение. Исследуем сходимость по признаку Даламбера для знакопеременных рядов:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)(n^3+2)x^{n+1}}{((n+1)^3+2)(n+2)x^n} \right| = |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{2}{n^3}\right)n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = |x|$$

. Ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Посмотрим граничные точки $x = 1$ и $x = -1$. При $x = 1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+2}$. Так как его общий член $\frac{n}{n^3+2} \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \to +\infty$, и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^3+2}$ тоже сходится по предельному признаку сравнения. При $x=-1$ получаем ряд знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+2}$, который сходится абсолютно. Следовательно, радиус сходимости $R=1$; область сходимости $|x|\le 1$.

Теорема. Если $R>0$ радиус сходимости степенного ряда $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, то

1) функция $f(x)$ имеет в интервале $\left(x_0-R;x_0+R\right)$ производные всех порядков и они находятся из ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ почленным дифференцированием;

2) для любого $x\in(x_0-R;x_0+R)$

$$\int_{x_0}^{x}f(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

т.е. внутри интервала сходимости ряд можно почленно интегрировать;

3) степенные ряды, получающиеся из ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ в результате почленного дифференцирования или интегрирования, имеют тот же радиус сходимости, что и сам ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$.

Пример. Найти сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Решение. Применим теорему о возможности почленного дифференцирования степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}=\left.\left(\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\left(x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\left(x\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^n\right)'\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\left(x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=$$

$$=\left.\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\left(x\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=2.$$

ЛЕКЦИЯ 5. РЯД ТЕЙЛОРА

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0=0$, то ряд Тейлора принято называть рядом *Маклорена*.

Теорема. Если функция $f(x)$ на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ представима рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, то $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Функция $f(x)$ имеет на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ производные всех порядков и

$$f^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot a_n+n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot a_{n+1}(x-x_0)+\ldots.$$

Следовательно, $f^{(n)}(x_0)=a_n n!$. ■

Теорема. (Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд). Пусть функция f бесконечно дифференцируема и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0-R;x_0+R)$, т.е. существует число M, что для всех $x\in(x_0-R;x_0+R)$ и всех $n=0,1,\ldots$ выполняется неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$$

Тогда на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ функция f раскладывается в ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ x\in(x_0-h;x_0+h).$$

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ x\in(x_0-h;x_0+h),$$

где $\xi=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1$. Следовательно,

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|\le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\ x\in(x_0-h;x_0+h).$$

Поскольку, по признаку Даламбера, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится при всех x, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0,\ \forall x\in(x_0-R;x_0+R)$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ сходится при любом $x\in(x_0-h;x_0+h)$ и его сумма равна $f(x)$. ■

Найдем разложения в ряд некоторых основных элементарных функций.

1. Разложение в ряд функции $f(x)=e^x$. Находим $f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=1$ и т.д. Ясно, что $f^{(n)}(0)=1$. Поэтому

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

Возьмем произвольное $h>0$ и пусть $x\in[-h,\ h]$. Легко видеть, что все производные функции e^x на отрезке $[-h,\ h]$ ограничены: $e^x\le e^h$. Поэтому по теореме о достаточном условии сходимости ряда Тейлора ряд сходится и именно к e^x. Итак,

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

2. $f(x)=\cos x$. Находим $f(0)=1,\ f'(0)=-\sin 0=0,\ f''(0)=-\cos 0=-1,$ и т.д. Легко видеть, что все производные нечетного порядка $2m+1,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ при $x=0$ равны 0, а производные четного порядка $2m,\ m=1,\ 2,\ \ldots$ даются формулой $f^{(2m)}(0)=(-1)^m$. Поскольку производные функции $\cos x$ ограничены в совокупности единицей на всей числовой прямой, то

$$\cos x=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

3. $f(x)=\sin x$. Аналогично предыдущему пункту, находим

$$\sin x=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$. Для построения ряда Тейлора этой функции не будем действовать по определению, как выше, а используем известный ряд и свойства степенных рядов. Итак, рассмотрим степенной ряд $1-x+x^2-x^3+\cdots$. Поскольку члены этого ряда представляют собой геометрическую прогрессию, то сумма ряда равна $\dfrac{1}{1+x}$. Как известно, областью сходимости данного ряда является интервал $-1<x<1$. Используя теорему о почленном интегрировании степенного ряда, найдем

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^n}{n}+\ldots,\ -1<x<1.$$

Поскольку ряд сходится условно при $x=1$, то, на основании теоремы Абеля, можно заключить, что $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots+\left(-1\right)^n\dfrac{x^n}{n}+\ldots,\ -1<x\le 1.$

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$. Приведем без доказательства

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ |x|<1.$$

Пример. Разложить функцию $arctg\,x$ в ряд Маклорена, указать область сходимости.

Решение. Найдем производную $(arctg\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$. Функцию $\dfrac{1}{1+x^2}$ рассмотрим как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $-x^2$, получим $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$. Интервал сходимости данного ряда $-1<x<1$. Используем теорему о почленном интегрировании степенного ряда, получим

$$arctg\,x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\ -1<x<1\,.$$

По теореме Лейбница полученный ряд сходится условно при $x=\pm 1$, тогда, на основании второй теоремы Абеля, заключаем, что $arctg\,x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\ -1\le x\le 1$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

Отрезок $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ целиком принадлежит интервалу сходимости полученного ряда, поэтому на нем ряд сходится равномерно, а, следовательно, его можно почленно интегрировать на этом отрезке. Выполняя интегрирование, получаем

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x^n}{n^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n-1}{n^2 4^n}.$$

Сумма найденного ряда дает точное значение интеграла. Поскольку ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то

$$\left|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}dx-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^k-1}{k^2 4^k}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^k-1}{k^2 4^k}\right|\le\frac{2^{n+1}-1}{(n+1)^2 4^{n+1}}.$$

Для вычисления значения интеграла с указанной точностью достаточно взять пять членов ряда, так как при этом $\frac{2^6-1}{6^2\cdot 4^6}<0.001$. Производя вычисления, получаем

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}dx\approx 0.213\,.$$

Пример. Выписать первые пять членов (до x^5) разложения по степеням x функции $f(x)=\frac{\sin 2x}{1-x^2}$.

Решение. Поскольку

$$\sin 2x = 2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^5x^5}{5!}-\frac{2^7x^7}{7!}+...,\ x\in\mathbf{R}\,;$$

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+...,\ |x|<1,$$

то

$$\frac{\sin 2x}{1-x^2}=\sin 2x\cdot\frac{1}{1-x^2}=\left(2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^5x^5}{5!}-\frac{2^7x^7}{7!}...\right)\cdot\left(1+x^2+x^4+x^6+...\right)=$$

$$=2x+x^3\left(2-\frac{2^3}{3!}\right)+x^5\left(2-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}\right)+...=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{14}{15}x^5+...$$

Разложение имеет место для $-1<x<1$.

Пример. Разложить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в окрестности точки $x=1$, то есть по степеням $(x-1)$.

Решение. Положим $y=x-1$, тогда $x=1+y$ и, следовательно,

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{1+y}=1+\frac{1}{3}y+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}y^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}y^3+...$$

$$...+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)...\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}y^n+...=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-4)}{3^n n!}(x-1)^n.$$

Здесь использовано разложение $(1+y)^\alpha$ при $\alpha=\frac{1}{3}$. Так как разложение имеет место при $-1<y<1$, то найденное разложение справедливо при $-1<x-1<1$, то есть при $0<x<2$.

ЛЕКЦИЯ 6. РЯДЫ ФУРЬЕ

Определение. Множество функций $\cos\frac{nx\pi}{l}, \sin\frac{nx\pi}{l}, n=1,2,...$ называется *тригонометрической системой*. Ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{nx\pi}{l}+b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$ называется *тригонометрическим рядом*.

Лемма. Тригонометрическая система обладает следующими свойствами:

1. Интеграл по отрезку от произведения двух различных функций, входящих в нее, равен нулю (ортогональность системы), т.е.

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{nx\pi}{l}\cdot\cos\frac{mx\pi}{l}dx=0,\ \int_{-l}^{l}\sin\frac{nx\pi}{l}\cdot\sin\frac{mx\pi}{l}dx=0\ \ n\neq m;$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{nx\pi}{l}\cdot\cos\frac{mx\pi}{l}dx=0,\ n,m=0,1,2...;$$

2. $\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{nx\pi}{l}dx=\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{nx\pi}{l}dx=l,\ n,m=1,2...$

Доказательство. Поскольку все равенства доказываются аналогично, проверим некоторые из них.

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{nx\pi}{l}\cdot\cos\frac{mx\pi}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n+m)x\pi}{l}+\cos\frac{(n-m)x\pi}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{n+m}\sin\frac{(n+m)x\pi}{l}\Bigg|_{-l}^{l}+\frac{l}{n-m}\sin\frac{(n-m)x\pi}{l}\Bigg|_{-l}^{l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{n+m}\left(\sin(n+m)\pi-\sin(n+m)\pi\right)+\frac{l}{n-m}\left(\sin(n-m)\pi-\sin(n-m)\pi\right)\right)=0.$$

$$\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{nx\pi}{l}dx=\int_{-l}^{l}\frac{1+\cos\frac{2nx\pi}{l}}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2nx\pi}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}=l.\ \blacksquare$$

Теорема. Пусть функция $f(x)$ является суммой тригонометрического ряда, то есть $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{nx\pi}{l}+b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$ и ряд, стоящий в правой части равенства сходится равномерно на отрезке $[-l;l]$. Тогда $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx, n=1,2,...,$ $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx, n=1,2,....$

Доказательство. Поскольку функциональный ряд сходится равномерно на отрезке $[-l;l]$, отсюда

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{nx\pi}{l}dx+b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{nx\pi}{l}dx=a_0l.$$

Отсюда $a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx$. При любом натуральном m, ряд

$$\frac{a_0}{2}\cos\frac{mx\pi}{l}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{nx\pi}{l}\cos\frac{mx\pi}{l}+b_n\sin\frac{nx\pi}{l}\cos\frac{mx\pi}{l}$$

равномерно сходится на отрезке $[-l;l]$ и его сумма равна $f(x)\cos\frac{mx\pi}{l}$. Отсюда

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{mx\pi}{l}dx=$$

$$=\frac{a_0}{2}\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{mx\pi}{l}dx+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{mx\pi}{l}\cos\frac{nx\pi}{l}dx+b_n\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{mx\pi}{l}\sin\frac{nx\pi}{l}dx=a_m l.$$

Отсюда $a_m=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{mx\pi}{l}dx$. Аналогично доказывается равенство $b_m=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{mx\pi}{l}dx$. ■

Лемма. Если функция f имеет период T и при некотором $a\in\mathbf{R}$ интегрируема на отрезке $[a;a+T]$, то при любом $b\in\mathbf{R}$ она интегрируема на отрезке $[b;b+T]$ и $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx=\int\limits_{b}^{b+T} f(x)dx$. Таким образом, интеграл $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx$ не зависит от выбора числа $a\in\mathbf{R}$.

Определение. Пусть $f(x)$ – $2l$ –периодическая, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода функция. Тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{nx\pi}{l}+b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$, коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx;\ a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx,\ \ b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx,\ n=1,2,....$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье*, а числа a_n и b_n – коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Пишут $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{nx\pi}{l}+b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$. Знак ~ означает в данном случае соответствие: функции сопоставляется ее ряд Фурье.

Если функция $f(x)$ задана и абсолютно интегрируема на полуинтервале $[a;b)$, то, периодически продолжая ее на всю числовую прямую, получим функцию $\bar{f}(x)$, которая является $2l$ - периодической функцией, $l=\frac{b-a}{2}$. Функции $\bar{f}(x)$ можно сопоставить ряд Фурье, который назовем рядом Фурье функции $f(x)$. Коэффициенты этого ряда, согласно лемме 29.2, находим по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{a}^{b} f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{a}^{b} f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx,\ n=1;2;...$$

Теорема (Минимальное свойство коэффициентов Фурье). Пусть существует $\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx$. Тогда, если $S_n(x)$ – *n*-я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, то $\int\limits_{-l}^{l}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx = \min\limits_{T_n(x)}\int\limits_{-l}^{l}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2 dx$, где минимум берется по всем тригонометрическим многочленам $T_n(x)$ степени не выше *n*. Если a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то выполняется неравенство $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx$, которое называется неравенством Бесселя.

Доказательство. Пусть $T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{nx\pi}{l}+B_n\sin\frac{nx\pi}{l}$. Тогда

$$\int\limits_{-l}^{l}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2 dx=\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx+\int\limits_{-l}^{l} T_n^{\ 2}(x)dx-2\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cdot T_n(x)dx. \qquad (1)$$

Вычислим второе слагаемое в правой части равенства (1). Из ортогональности тригонометрической системы находим

$$\int\limits_{-l}^{l} T_n^{\ 2}(x)dx=\int\limits_{-l}^{l}\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{nx\pi}{l}+B_n\sin\frac{nx\pi}{l}\right)^2 dx=\frac{A_0^{\ 2}}{4}\cdot 2l+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^{\ 2}\cdot l+B_k^{\ 2}\cdot l\right)=$$
$$=l\cdot\left(\frac{A_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^{\ 2}+B_k^{\ 2}\right)\right).$$

Рассмотрим теперь последнее слагаемое в равенстве (1):

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cdot T_n(x)dx=\frac{A_0}{2}\cdot\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx+\sum_{k=1}^{n} A_k\cdot\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}dx+B_k\cdot\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx=$$
$$=l\cdot\frac{A_0a_0}{2}+l\cdot\sum_{k=1}^{n} A_ka_k+B_kb_k.$$

Следовательно, получаем

$$\int\limits_{-l}^{l}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2 dx=\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx+l\cdot\left(\frac{A_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^{\ 2}+B_k^{\ 2}\right)\right)-2l\cdot\left(\frac{A_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_ka_k+B_kb_k\right)=$$
$$=\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx+l\cdot\left(\frac{\left(A_0-a_0\right)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\left(A_k-a_k\right)^2+\left(B_k-b_k\right)^2\right)\right)-l\cdot\left(\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}\right)\right).$$

Минимальное значение $\int\limits_{-l}^{l}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2 dx$ достигается в случае, если $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, то есть при $T_n(x)=S_n(x)$. В этом случае

$$\int\limits_{-l}^{l}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx=\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx-l\cdot\left(\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}\right)\right)\ge 0.$$

Итак, мы приходим к неравенству $\frac{1}{l}\cdot\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\,dx \geq \frac{a_0^{\,2}}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k^{\,2}+b_k^{\,2}\right)$. Отсюда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k^{\,2}+b_k^{\,2}\right)$ сходится и имеет место неравенство Бесселя. В качестве следствия, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. ■

ЛЕКЦИЯ 7. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ РЯДА ФУРЬЕ

Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{nx\pi}{l} + b_n \sin\frac{nx\pi}{l}$. По формулам Эйлера находим

$$\cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right),\ \sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right).$$

Тогда частичную сумму ряда Фурье можем записать в следующем виде:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right) + b_k\cdot\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}\frac{1}{2}(a_k - ib_k) + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\frac{1}{2}(a_k + ib_k)\right).$$

Полагая $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, получим $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\cdot\frac{k\pi x}{l}}$.

Понимая под сходимостью ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\cdot\frac{n\pi x}{l}}$ существование предела $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\cdot\frac{k\pi x}{l}}$, получаем

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\cdot\frac{n\pi x}{l}}.$$

С учетом того, что $\cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$, будем иметь

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx - i\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx.$$

Аналогично, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx$. Таким образом, при любых целых значениях *n*

$$c_n = \frac{1}{2l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{2l}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\cdot\frac{n\pi x}{l}}\cdot\int_{-l}^{l} f(t)\cdot e^{-i\cdot\frac{n\pi t}{l}}dt.$$

Пример. Записать разложение функции $f(x) = x$ в интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд Фурье в комплексной форме.

Решение. Искомое разложение должно иметь вид $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\cdot nx}$, где $c_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx$, $n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$. Вычисляем коэффициенты c_n:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(x\cdot\frac{e^{-inx}}{(-in)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{(-in)}dx\right) =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-inx}}{(-in)^2}(-inx-1)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-inx}}{n^2}(inx+1)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-in\pi}}{n^2}(in\pi+1)-\frac{e^{in\pi}}{n^2}(-in\pi+1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2}(in\pi+1)-\frac{\cos n\pi}{n^2}(-in\pi+1)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos n\pi}{n^2}\cdot in\pi=\frac{(-1)^n i}{n},\ n\neq 0\,;$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}xdx=0\,.$$

Итак, получаем разложение $x\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n i}{n}\cdot e^{inx},\quad x\in(-\pi;\pi)$.

ЛЕКЦИЯ 8. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ

Теорема (Риман). Если функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на промежутке с концами $a<b$, то $\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_a^b g(t)\sin ptdt=\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_a^b g(t)\cos ptdt=0$.

Доказательство. Заметим, что для любого отрезка $[\alpha;\beta]$ выполняется

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta \sin ptdt\right|=\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\le\frac{2}{p}.$$

Допустим, что функция $g(t)$ интегрируема в собственном смысле на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим произвольное разбиение $a=t_0<t_1<...<t_n=b$ отрезка $[a;b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b g(t)\sin ptdt=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} g(t)\sin ptdt.$$

Пусть $m_i=\inf\limits_{[t_i,t_{i+1}]} g(t)$. Имеем

$$\int\limits_a^b g(t)\sin ptdt=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(g(t)-m_i\right)\sin ptdt+\sum_{k=0}^{n-1}m_i\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\sin ptdt.$$

Заметим, что для всех $t,\overline{t}\in[t_i,t_{i+1}]$ имеет место неравенство

$$\left|g(t)-g(\overline{t})\right|\le\omega_i=\omega\left(g,\,[t_i,t_{i+1}]\right)=\sup_{t',t''\in[t_i,t_{i+1}]}\left|g(t')-g(t'')\right|.$$

Отсюда для всех $t\in[t_i,t_{i+1}]$ выполняется $\left|g(t)-m_i\right|\le\omega_i$. Поэтому

$$\left|\int\limits_a^b g(t)\sin ptdt\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i+\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

Выбором разбиения, ввиду интегрируемости функции $g(t)$, можно добиться $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i<\dfrac{\varepsilon}{2}$ для произвольного $\varepsilon>0$. Такой выбор определит m_i и можно взять $p>\dfrac{4}{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|m_i|$. Тогда $\left|\int\limits_a^b g(t)\sin ptdt\right|<\varepsilon$.

Рассмотрим теперь случай несобственного интеграла. Пусть особенность в точке b. Другие случаи рассматриваются аналогично после представления интеграла в виде суммы интегралов с одной особенностью. Ввиду сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$, при достаточно малом q и любых значениях p

$$\left|\int\limits_{b-q}^b g(t)\sin pt\,dt\right|<\int\limits_{b-q}^b\left|g(t)\right|dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

По доказанному выше, $\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_a^{b-q} g(t)\sin pt\,dt=0$, так как $g(t)$ интегрируема в собственном смысле на отрезке $[a;b-q]$. Поэтому, существует число p_ε такое, что при $p>p_\varepsilon$ будет выполнено неравенство $\left|\int\limits_a^{b-q} g(t)\sin pt\,dt\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, при $p>p_\varepsilon$ выполняется

$$\left|\int\limits_a^{b} g(t)\sin ptdt\right|<\varepsilon\,.\ \blacksquare$$

Пусть $f(x)$ – $2l$–периодическая, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода функция. Преобразуем частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_n\cos\frac{k\pi x}{l}+b_n\sin\frac{k\pi x}{l}=$$

$$=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\frac{k\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}+\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k(t-x)\pi}{l}\right)dt=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot D_n(t-x)\,dt\,.$$

Функция $D_n(t)$ называется *ядром Дирихле*, а интеграл, стоящий в правой части полученного равенства называется *интегралом Дирихле*. Преобразуем ядро Дирихле следующим образом

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi kt}{l}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\left(\sin\frac{\pi t}{2l}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{\pi t}{2l}\cos\frac{\pi kt}{l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\left(\sin\frac{\pi t}{2l}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)\right)\right)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}},$$

где $t\neq 2lk,\ k\in\mathbb{Z}$. Заметим, что $\lim\limits_{t\to 2lk}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}=n+\dfrac{1}{2}$ и функцию $\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}$ в точках $t=2lk,\ k\in\mathbb{Z}$ можно доопределить значением $n+\dfrac{1}{2}$. Итак,

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(t-x)}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi(t-x)}{2l}}\,dt\,. \tag{2}$$

Очевидно, что $D_n(t)$ – $2l$–периодическая функция и

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot D_n(t-x)\,dt=\frac{1}{l}\int\limits_{-l-x}^{l+x} f(\tau+x)\cdot D_n(\tau)\,d\tau=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(\tau+x)D_n(\tau)\,d\tau\,,$$

так как значение интеграла по промежутку длины, равной периоду, не зависит от промежутка. Поскольку $D(\tau)$ – четная, так как является суммой косинусов, то

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(\tau+x)D_n(\tau)\,d\tau+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(\tau+x)D_n(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x-\tau)D_n(\tau)\,d\tau+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(\tau+x)D_n(\tau)\,d\tau=\frac{1}{l}\int_{0}^{l} D_n(\tau)\big(f(x-\tau)+f(x+\tau)\big)\,d\tau .$$

Лемма. Для любых $\delta\in(0;l)$ $x\in[-l;l]$ частичная сумма $S_n(x)$ $2l$–периодической, абсолютно интегрируемой на $[-l;l]$ функции $f(x)$ представима в виде

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\big(f(x-t)+f(x+t)\big)\,dt+o(1),\ n\to\infty .$$

Доказательство. Имеем

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{\delta} D_n(\tau)\big(f(x-\tau)+f(x+\tau)\big)\,d\tau+\frac{1}{l}\int_{\delta}^{l} D_n(\tau)\big(f(x-\tau)+f(x+\tau)\big)\,d\tau .$$

Функция $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi t}{2l}}$ непрерывна на отрезке $[-l;l]$, следовательно, ограничена на этом отрезке. Поэтому функция $\dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{2\sin\dfrac{\pi t}{2l}}$ абсолютно интегрируема на $[-l;l]$. Следовательно, по теореме Римана $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{\delta}^{l}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)dt=0$. ■

Из данной леммы следует *принцип локализации*. А именно, существование и значение $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ в любой точке $x_0\in\mathbf{R}$ зависит только от существования и значения предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{0}^{\delta} D_n(t)\big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)\,dt$, где δ – произвольное положительное число. Заметим, что в подынтегральное выражение входит $f(x)$ на $[x_0-\delta,x_0+\delta]$, то есть существование и значение предела частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ зависит только от ее свойств в окрестности точки x .

Положим в равенстве

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{l} D_n(\tau)\big(f(x-\tau)+f(x+\tau)\big)\,d\tau$$

$f(x)\equiv 1$, получим $S_n(x)\equiv 1$ и

$$1\equiv\frac{2}{l}\int_{0}^{l} D_n(t)\,dt=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\,dt . \qquad (3)$$

Пусть S_0 – некоторое число, тогда

$$S_n(x)-S_0=\frac{1}{l}\int_0^l \left(f(x-t)+f(x+t)-2S_0\right)\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt.$$

Обозначим $\varphi(t)=f(x-t)+f(x+t)-2S_0$. Если мы хотим установить, что $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S_0$, то нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(t)\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt=0$.

Теорема (признак Дини). Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x сходится к сумме S_0, если при некотором $h>0$ интеграл $\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$ существует.

Доказательство. Если интеграл $\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$ существует, то существует интеграл $\int_0^l \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$. Тогда по теореме Римана

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(t)\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{l}\int_0^l \frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{\pi t}{2l}}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\cdot\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)dt=0,$$

поскольку $\frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{\pi t}{2l}}{\sin\frac{\pi t}{2l}}$ – абсолютно интегрируемая функция на промежутке $(0;l)$. ■

Следствие. Если $f(x)$ – $2l$–периодическая функция, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода, и в точке x существуют односторонние пределы:

$$f(x+0)=\lim_{t\to x+0}f(t),\ f(x-0)=\lim_{t\to x-0}f(t),$$

$$f'_+(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h},\ f'_-(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h},$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в этой точке к значению $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доказательство. Положим $S_0=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Тогда

$$\varphi(t)=f(x-t)+f(x+t)-f(x+0)-f(x-0)$$

и

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t}=\lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right)=f'_+(x)-f'_-(x).$$

Следовательно, на некотором промежутке $(0;h)$ функция $\frac{\varphi(t)}{t}$ ограничена. Поэтому существует $\int\limits_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$, значит, ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению $S_0 = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. ■

Определение. Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$ и существует разбиение $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ отрезка $[a;b]$, что f непрерывна на каждом интервале $(x_{i-1};x_i)$, и существуют конечные пределы $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$, $i=1,2,...,n$. Если при каждом $i=1,2,...,n$ функция

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}+0), & x = x_{i-1}; \\ f(x), & x \in (x_{i-1};x_i); \\ f(x_i-0), & x = x_i \end{cases}$$

принадлежит $C^1[x_{i-1};x_i]$, то функция f называется кусочно-дифференцируемой на отрезке $[a;b]$.

Следствие. Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-l;l]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке $x \in (-l;l)$ к значению $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, а в точках $x=-l$, $x=l$ – к значению $\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

Пример. Разложить в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(-2;2)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, -2 < x < 0, \\ 2-x, 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Решение. Данная функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-2;2]$, поэтому ряд Фурье такой функции сходится в каждой точке отрезка $[-2;2]$. Сумма $S(x)$ ряда Фурье имеет вид

$$S(x) = \begin{cases} 2, \ -2 < x < 0; \\ 2-x, \ 0 \le x < 2; \\ 1, \ x = \pm 2. \end{cases}$$

Как видно, на интервале $(-2;2)$ имеет место равенство $S(x) = f(x)$. Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} 2dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}(2-x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} 2dx - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} xdx = 3,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n x\pi}{l}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n x\pi}{2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} 2\cos\frac{n x\pi}{2}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x\cos\frac{n x\pi}{2}dx =$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\cos\frac{nx\pi}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right|_0^2=\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{n^2\pi^2},\ n=1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{nx\pi}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}2\sin\frac{nx\pi}{2}dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\sin\frac{nx\pi}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)=\frac{(-1)^n\cdot 2}{n\pi},\ n=1,2,\ldots$$

Итак, получаем

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{nx\pi}{2}+\frac{(-1)^n\cdot 2}{n\pi}\cdot\sin\frac{nx\pi}{2}.$$

На рисунке 1 показаны график исходной функции и графики частичных сумм $S_3(x),\ S_{20}(x)$ ряда Фурье данной функции.

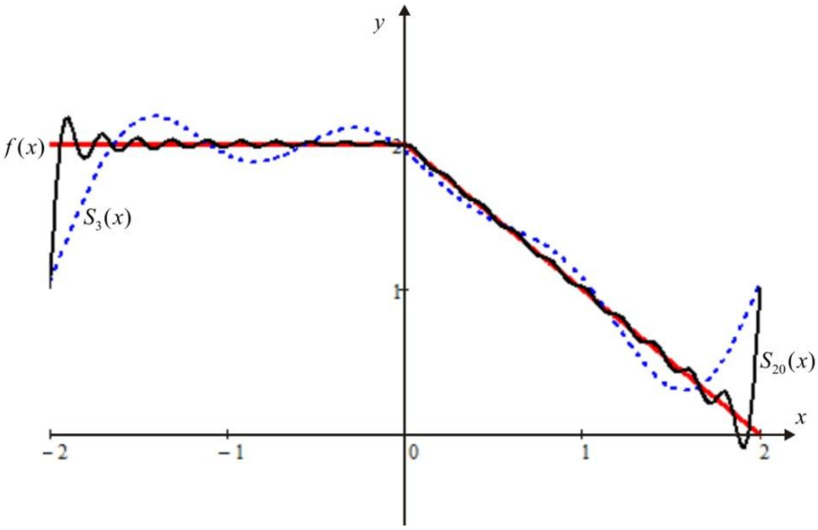

Рис. 1

ЛЕКЦИЯ 9. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ.

Начнем со следующей очевидной леммы.

Лемма. Если функция $f \in R[-l;l]$ является четной, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$. Если функция является нечетной, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

Пусть $f(x)$ – четная, $2l$–периодическая функция, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx, \quad n = 1, 2, ...;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

Поэтому $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{nx\pi}{l}$. То есть ряд Фурье четной функции содержит только косинусы.

Пусть $f(x)$ – нечетная, $2l$–периодическая функция, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx = 0, \quad n = 1, 2, ...;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

Поэтому $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{nx\pi}{l}$. То есть, ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы.

Пример 1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ функцию $f(x) = e^{2x}$.

Решение. Искомое разложение должно иметь вид $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos nx dx, n = 0; 1; 2; ...;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\sin nx dx,\ n = 1; 2; \ldots .$$

Записанные выше интегралы вычисляются, применяя метод интегрирования по частям дважды. Можно этого избежать, используя комплексную форму записи ряда Фурье.

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\cdot nx}, \text{ где } c_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx .$$

При этом

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Отсюда

$$a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = -i(c_{-n} + c_n).$$

Найдем c_n.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cdot e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{(2-in)x}dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\left.\frac{e^{(2-in)x}}{(2-in)}\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(2-in)}\left(e^{(2-in)\pi} - e^{-(2-in)\pi}\right) = \frac{2+in}{2\pi\left(4+n^2\right)}\left(e^{(2-in)\pi} - e^{-(2-in)\pi}\right).$$

Воспользуемся формулой Эйлера $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Получим

$$c_n = \frac{2+in}{2\pi\left(4+n^2\right)}\left(e^{(2-in)\pi} - e^{-(2-in)\pi}\right) = \frac{2+in}{2\pi\left(4+n^2\right)}\left(e^{2\pi}\cos\pi n - e^{-2\pi}\cos\pi n\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n(2+in)\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)}{2\pi\left(4+n^2\right)} = \frac{(-1)^n(2+in)sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}.$$

$$c_{-n} = \frac{(-1)^n(2-in)sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}.$$

Следовательно,

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{(-1)^n\cdot 4\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = -i(c_{-n} + c_n) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Получаем разложение

$$e^{2x} \sim \frac{sh2\pi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}\sin nt,\ x \in (-\pi; \pi).$$

Пример 2. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$

Разложить ее в ряд Фурье

1) с периодом 2π, доопределив $f(x)$ на интервале $(-\pi;0)$ произвольным образом;

2) в интервале $(0;\pi)$ с периодом π;

3) в интервале $(0;\pi)$ в ряд синусов;

4) в интервале $(0;\pi)$ в ряд косинусов.

Решение.

1) Доопределим данную функцию на $(-\pi;0)$, скажем, значениями равными нулю. Таким образом, нужно разложить в ряд функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, \ -\pi<x<0,\\ x, 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$$

Данная функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$, поэтому ряд Фурье такой функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi;\pi]$. Сумма $S(x)$ ряда Фурье имеет вид

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, \ \ x=\pm\pi,\\ 0, \ -\pi<x<0,\\ x, \ 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}x\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3\pi}{8};$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{n}dx+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2n}\left(0-\sin\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right), \ n=1,2,\ldots;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nx}{n}dx-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2n}\left(\cos n\pi-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2n}\cdot(-1)^n\right),\quad n=1,2,\ldots.$$

Итак, получим разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{3\pi}{16}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)\cdot\cos nx+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2n}\cdot(-1)^n\right)\cdot\sin nx.$$

На рисунке 2 представлены график функции $f(x)$ и график частичной суммы $S_{10}(x)$.

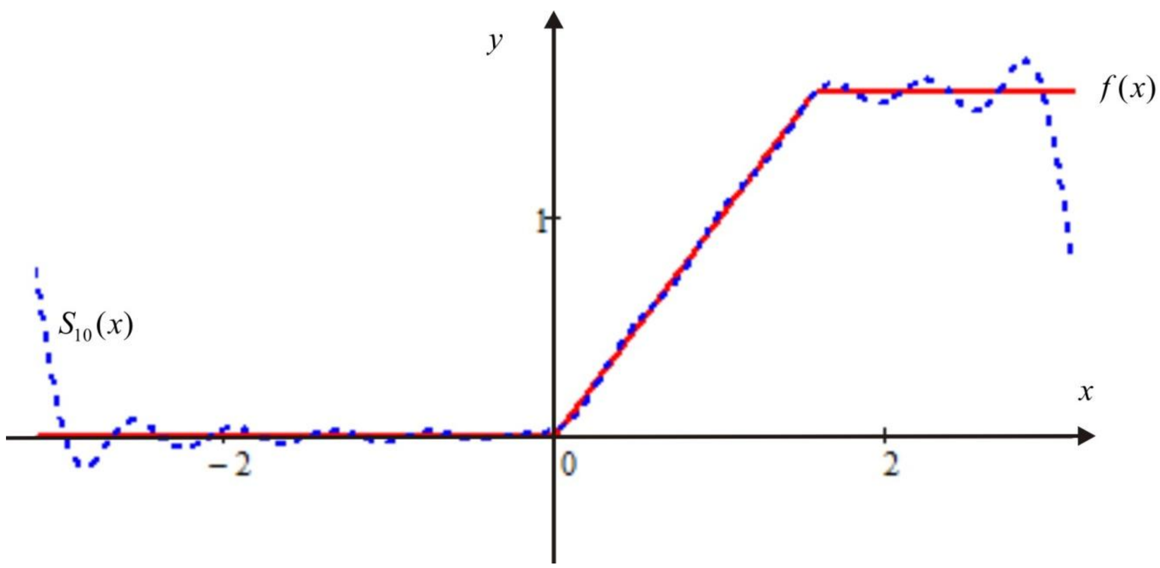

Рис. 2

2) Коэффициенты Фурье имеют вид:

$$a_0=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3\pi}{4},$$

$$a_n=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos 2nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{2n}dx+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4n}\cdot\sin\pi n+\frac{\cos 2nx}{4n^2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{4n}(\sin 2n\pi-\sin\pi n)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi n^2}(\cos\pi n-1)=\frac{1}{2\pi n^2}\left((-1)^n-1\right),\ n=1,2,\ldots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin 2nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{2n}dx-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4n}\cdot\cos\pi n-\frac{\pi}{4n}(\cos 2n\pi-\cos\pi n)\right)=-\frac{1}{2n},\quad n=1,2,\ldots.$$

В результате получаем следующее разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{3\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{2\pi n^2}\cos 2nx-\frac{1}{2n}\cdot\sin 2nx.$$

Сумма данного ряда совпадает с $f(x)$ на $(0;\pi)$, а в точках 0 и π сумма ряда Фурье равна $\frac{\pi}{4}$. График функции $f(x)$ и частичной суммы $S_{10}(x)$ представлены на рисунке 3.

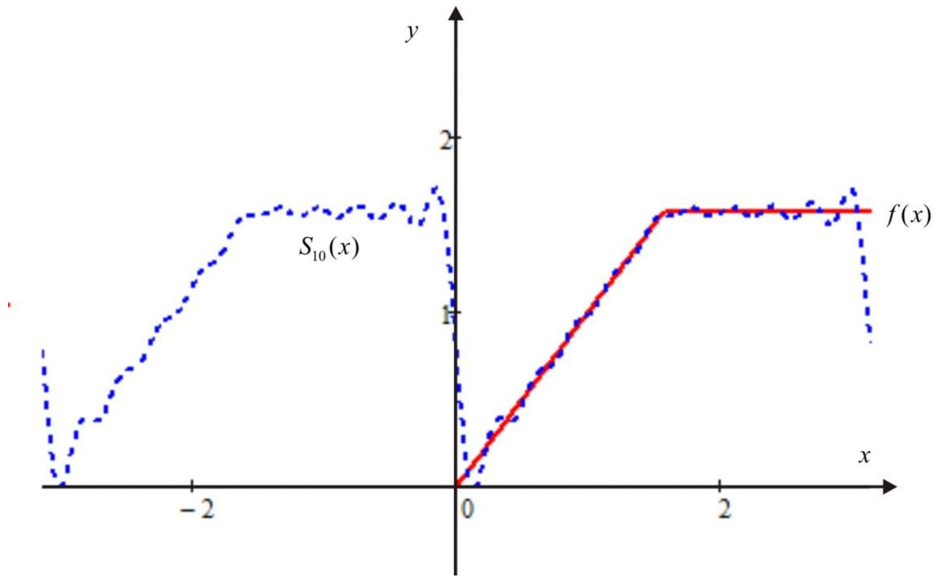

Рис. 3

3) Функция, разлагаемая в ряд по синусам, должна быть нечетной. Следовательно, нужно построить ее нечетное продолжение в интервале $(-\pi;0)$, тогда $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nx}{n}dx - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2n}\left(\cos n\pi - \cos\frac{\pi n}{2}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2n}\cdot(-1)^n\right), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Искомое разложение будет иметь вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2n}\cdot(-1)^n\right)\cdot\sin nx .$$

Нечетное продолжение функции $f(x)$ представляет собой кусочно-дифференцируемую функцию, поэтому сумма полученного ряда на интервале $(0;\pi)$ совпадает с $f(x)$, а в точках 0 и π сумма ряда Фурье равна нулю. На рисунке 4 представлены график функции $f(x)$, график ее нечетного продолжения $\overline{f}(x)$ и график частичной суммы $S_{20}(x)$.

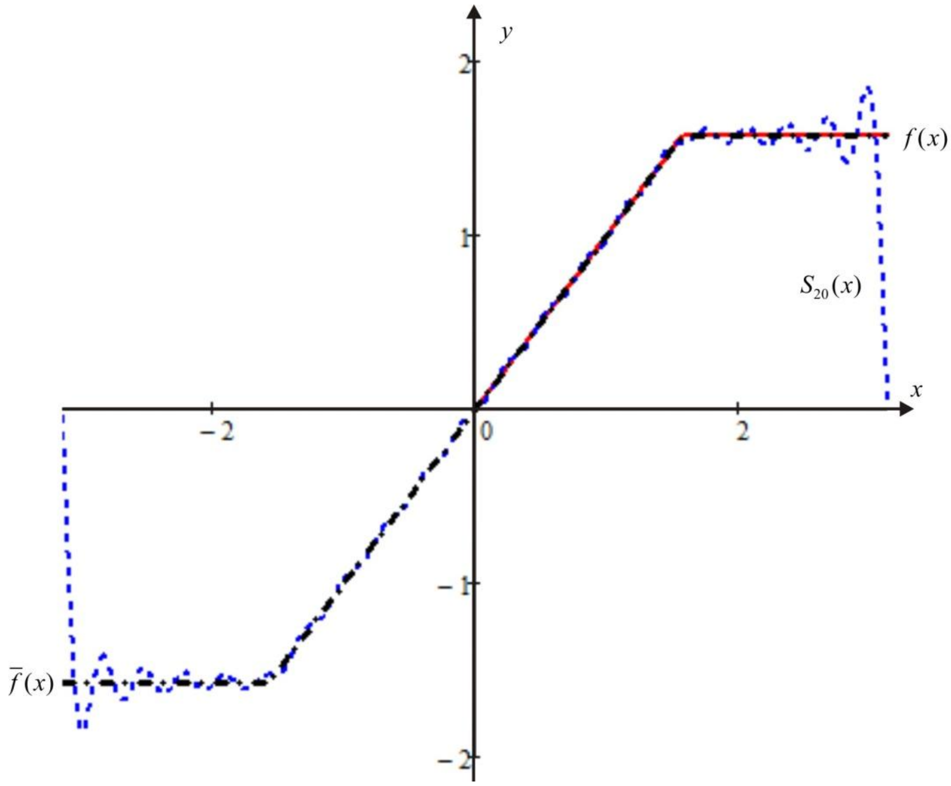

Рис. 4

4) Функция, разлагаемая в ряд по косинусам, должна быть четной. Следовательно, нужно построить ее четное продолжение в интервале $(-\pi;0)$, тогда $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, а

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3\pi}{4},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{n}\,dx+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2n}\left(0-\sin\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right),\ n=1,2,\ldots,$$

Искомое разложение будет иметь вид

$$f(x)\sim\frac{3\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)\cdot\cos nx\,.$$

Четное продолжение функции $f(x)$ представляет собой кусочно дифференцируемую функцию, поэтому сумма полученного ряда на интервале $(0;\pi)$ совпадает с $f(x)$, а в точках 0 и π сумма ряда Фурье равна соответственно 0 и π. На рисунке 5 представлены график функции $f(x)$, график ее четного продолжения $\overline{f}(x)$ и график частичной суммы $S_2(x)$.

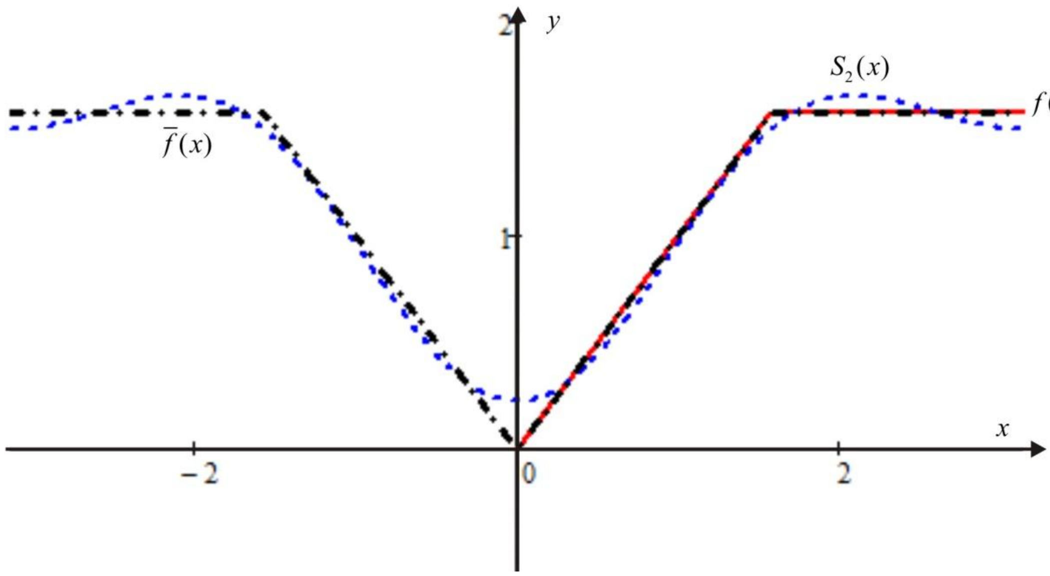

Рис. 5