ЛЕКЦИЯ 3

§1. О некоторых элементарных функциях комплексного переменного z

Рассмотрим некоторые элементарные функции комплексного переменного: e^z, $\cos z, \sin z$, $\operatorname{Ln} z$

Определение показательной функции e^z.

Показательную функцию $f(x)=e^x$ действительной переменной можно определить как частное решение дифференциального уравнения $df/dx=f$, удовлетворяющее начальному условию $f(0)=1$. Аналогично, функцию e^z определим как решение задачи Коши вида

$$df/dz=f,\ z=x+iy,\quad f(0)=1 \tag{1}$$

Его решение будет иметь вид $f(z)=e^z$. Но как понять, что это за функция? Для этого надо описать действительные и мнимые части этой функции. Считаем e^z аналитической функцией, следовательно, имеют место условия Коши-Римана при этом

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=u+iv,\ u(0)=1,\ v(0)=0$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u,\ \frac{\partial v}{\partial x}=v$$

Имеем

$$u=e^x\lambda(y),\ v=e^x\mu(y)$$

Далее,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=u,\ -\frac{\partial u}{\partial y}=v \quad\Rightarrow\quad \cancel{e^x}\mu'(y)=\cancel{e^x}\lambda(y),\ -\cancel{e^x}\lambda'(y)=\cancel{e^x}\mu(y)$$

Тогда

$$\mu''(y)=-\mu(y),\ \lambda''(y)=-\lambda(y),\ \lambda(0)=1,\ \mu(0)=0$$

Имеем $\lambda(y)=\cos y,\ \mu(y)=\sin y$. Итак

$$\boxed{e^z=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)} \tag{2}$$

Формула Эйлера:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

Тригонометрические функции

Запишем формулы Эйлера:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ e^{-iy}=\cos y-i\sin y$$

Отсюда следует, что

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\ \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

Правые части этих формул определены при любом комплексном числе y и являются аналитическими функциями y. Тогда, положим

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

заменяя в предыдущих формулах y на z. Для действительных z ($z=x$) комплексные функции $\sin z, \cos z$ переходят в действительные функции $\sin x, \cos x$. Функции $\sin z,\ \cos z$ сохраняют все свойства действительные функции $\sin x,\ \cos x$. Считаем также, по определению, что

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$

Логарифм -- функция, обратная по отношению к экспоненциальной функции

$$z = e^{w} = e^{u}\left(\cos v + i\sin v\right)\ (w = u + iv) \tag{3}$$

Она определена для любого $z \neq 0, \infty$ и представляется формулой

$$w = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

Действительно, из (3) следует, что $|z| = e^{u} \Rightarrow u = \ln|z|,\ \operatorname{Arg} z = v + 2k\pi,\ -\pi < v \leq \pi$

Часто пишут $v = \arg z$. Тогда, полагая $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, имеем

$$\boxed{w = \operatorname{Ln} z = \ln\rho + i(\varphi + 2k\pi)},\quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Эта формула определяет $\operatorname{Ln} z$ для всех $z \neq 0$. Она дает значение не только для положительных значений z, но и для отрицательных. Формула содержит произвольное число k, поэтому $\operatorname{Ln} z$ -- многозначная функция.

Однако различные значения $\operatorname{Ln} z$ связаны между собой. В самом деле, фиксируем в точке z_0 значение $n=0$. Пусть теперь переменная z непрерывно движется вдоль замкнутой кривой C, окружающей начало координат, и возвращается в точку z_0 (см. рис. 1)

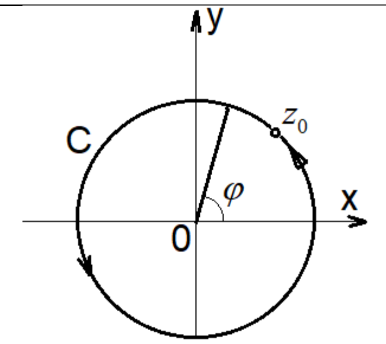

Рис.1

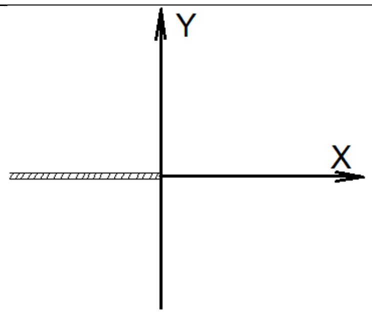

Рис. 2

При таком движении угол φ будет возрастать и, после того как точка пройдет весь замкнутый контур, увеличится на 2π. Таким образом, фиксировав начальное значение логарифма

$$\left(\operatorname{Ln} z\right)_0 = \ln\rho_0 + i\varphi_0,$$

изменяя z, мы вернемся в точку z_0 с другим значением функции:

$$\left(\operatorname{Ln} z\right)_0 = \ln\rho_0 + i(\varphi_0 + 2\pi)$$

Итак, мы можем перейти непрерывно от любого значения логарифма к другому, обходя начало координат нужное число раз. Точка $z=0$ называется *точкой ветвления функции.*

Если хотим ограничиться одним лишь значением логарифма, мы должны запретить точке z обходить начало координат вдоль замкнутой кривой. Для этого достаточно сделать разрез вдоль отрицательной части оси Ox (см. рис 2) и запретить переменной z пересекать этот разрез, изменяя аргумент φ в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$ (в более общем случае -- $(2k-1)\pi < \varphi \leq (2k+1)\pi$). В этой области имеем однозначную ветвь функции $\operatorname{Ln} z$.

§2 Степенные ряды комплексных чисел

Пусть $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n$ -- последовательность комплексных чисел. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots \tag{4}$$

называют рядом, числа z_j -- членами ряда, сумму $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$ -- частичной суммой.

Если последовательность $\{S_N\}$ сходится к S, т.е. выполняется предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S\,, \tag{5}$$

тогда ряд называют сходящимся. Если предела последовательности $\{S_N\}$ не существует, то ряд называют расходящимся.

Выделяя действительные и мнимые части, имеем $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n + i\sum_{n=1}^{N} y_n$. Тогда предельное равенство (5) эквивалентно двум вещественным предельным равенствам:

$$\operatorname{Re} S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n, \quad \operatorname{Im} S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} y_n$$

Итак, комплексный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды, составленные из вещественной и мнимой частей данного ряда.

Можно показать, что из этого утверждения следует, что общий критерий Коши сходимости вещественных рядов является также общим критерием сходимости комплексных рядов. А именно, *ряд* (4) *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $N(\varepsilon)$, *что неравенство* $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ *выполняется при* $n > N(\varepsilon)$ *и любом натуральном* p.

В частном случае $p = 1$ имеем $\left|S_{n+1} - S_n\right| = \left|z_{n+1}\right|$, поэтому сходимость ряда означает, что $\lim_{n\to\infty} \left|z_{n+1}\right| = 0$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} z_{n+1} = 0$. Итак, предельное равенство $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ есть необходимое условие сходимости ряда (4).

Ряд (4) называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей членов ряда, т.е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n\right|$. Из общего критерия Коши сходимости комплексных рядов следует, что абсолютно сходящийся ряд (4) сходится также в обычном смысле, т.е. в смысле существования предельного равенство (5).

Заметим, что члены $\left|z_n\right|$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n\right|$ -- вещественные положительные числа. Поэтому при исследовании этого ряда можно использовать теоремы сходимости положительных вещественных рядов. В частности, справедливо необходимое условие сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n\right|$: $\left|z_n\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Справедлив критерий Коши сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n\right|$.

Критерий Коши. *Если, при достаточно больших* n, *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{\left|z_n\right|} \le q, \;\; q < 1,$$

где q *-- постоянное число, меньшее единицы, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ *сходится; если же найдется номер* N *такой, что при всяком* $n>N$ *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{|z_n|}\geq 1$, *то ряд расходится*

Справедливы также критерии сходимости Даламбера, Раабе и др.

§3. Круг сходимости степенного ряда

Рассмотрим степенной ряд вида

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \tag{6}$$

где a_j, z, z_0 -- комплексный числа. Такой ряд сходится при одних значениях z и расходится при других. Ряд (6) сходится абсолютно, если сходится ряд

$$|a_0|+|a_1|\cdot|z-z_0|+|a_2|\cdot|z-z_0|^2+\cdots+|a_n|\cdot|z-z_0|^n+\cdots \tag{7}$$

Теорема Коши-Адамара.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\Lambda$, *то при* $\Lambda=0$ *ряд* (6) *сходится абсолютно во всей комплексной плоскости* $\mathbf{C}$, *при* $\Lambda=\infty$ *он сходится только в точке* $z=z_0$ *и расходится при* $z\neq z_0$. *Наконец, в случае* $0<\Lambda<\infty$, *он сходится абсолютно в круге* **К**:

$$|z-z_0|<\frac{1}{\Lambda};$$

ряд (6) *расходится во внешности этого круга.*

Приведем доказательство этой теоремы в случае $0<\Lambda<\infty$. При $z=z_0$ ряд (7) сходится. Пусть $z\neq z_0$ и $z\in K: |z-z_0|=\dfrac{\mu^2}{\Lambda}<\dfrac{1}{\Lambda}, 0<\mu<1$. Положим $\Lambda'=\dfrac{\Lambda}{\mu}>\Lambda$. В силу свойств предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\Lambda$ можно указать такое большое N_1, что при всех $n>N_1$ радикал $\sqrt[n]{|a_n|}$ принадлежит малой ε- окрестности Λ, где ε -- любое произвольное число. Поэтому $\sqrt[n]{|a_n|}<\Lambda'=\Lambda+\varepsilon$. Здесь $\varepsilon=\Lambda\dfrac{1-\mu}{\mu}$ может принимать как малые, так и большие значения при $0<\mu<1$. Тогда

$$\sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n}=\sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0|<\Lambda'|z-z_0|=\frac{\Lambda}{\mu}\cdot\frac{\mu^2}{\Lambda}=\mu<1$$

По признаку Коши сходимости положительных рядов с вещественными членами имеем сходимость ряда (7), т.е. абсолютную сходимость исходного ряда (6).

Пусть z не принадлежит кругу K. Тогда $|z-z_0|>\dfrac{1}{\Lambda}$. Модуль $|z-z_0|$ можно представить в виде $|z-z_0|=\dfrac{1}{\Lambda\mu'}$, где $0<\mu'<1$. Из свойств предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\Lambda$ следует, что существует последовательность индексов n_k такая, что $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\to\Lambda$ при $n_k\to\infty$. Поэтому

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}||z-z_0|^{n_k}}=\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}|z-z_0|\to\Lambda|z-z_0|=\Lambda\frac{1}{\Lambda\mu'}=\frac{1}{\mu'}>1$$

Тогда $\left|a_{n_k}\right|\left|z-z_0\right|^{n_k} \to \left(\dfrac{1}{\mu'}\right)^{n_k} \to +\infty$, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда (6), поэтому ряд (6) расходится. Доказательство закончено.

Круг $\boxed{K: \left|z-z_0\right| < \dfrac{1}{\Lambda}}$ называют кругом сходимости ряда (6), а $\boxed{R = \dfrac{1}{\Lambda}}$ -- радиусом сходимости. На окружности радиуса R ряд (6) может как сходится, так и расходится.

При $\Lambda = 0$ имеем $R = \infty$, поэтому ряд (6) сходится во всей плоскости. Если $\Lambda = \infty$, то $R = 0$, поэтому ряд сходится только в точке z_0. Заметим только, что строгое обоснование этих утверждений требует отдельных доказательств.

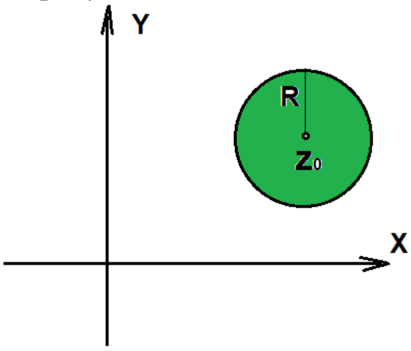

Рис.3 Круг сходимости степенного ряда.

В случае, когда предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}$ не существует, теорема сохраняется, но необходимо заменить условие существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|} = \Lambda$ на условие $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|a_n\right|} = \Lambda$, где знак черты сверху означает верхний предел (верхний предел всегда существует!)