# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

**Задача 1**

Рассмотрим задачу определения сторон прямоугольника, вписанного в окружность радиуса $R$ и имеющего наибольшую площадь $S$.

Диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами окружности и имеют фиксированную длину. Площадь прямоугольника $S$ равна $2R^2 sin\varphi$. Очевидно, что эта площадь будет наибольшей при $sin\varphi = 1$. Это возможно, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$. В этом случае диагонали перпендикулярны, а сам прямоугольник превращается в квадрат. Сторона квадрата будет равна $R\sqrt{2}$.

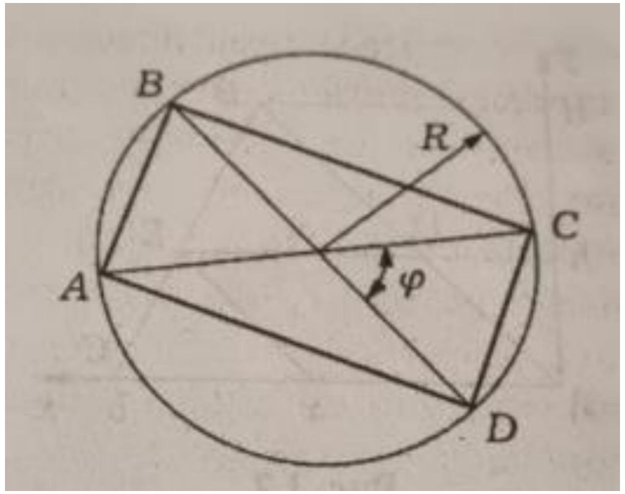
Рассмотрим иной способ решения задачи. Пусть стороны прямоугольника равны $a$ и $b$ соответственно. Тогда его площадь $S = ab$. Сами параметры при этом должны удовлетворять условиям $\sqrt{a^2+b^2} = 2R,\ a > 0, b > 0$. В результате приходим к следующей задачи оптимизации:

*Задача поиска условного экстремума*

*Целевая функция*

$$\begin{cases} S = ab \to max \\ a^2 + b^2 = 4R^2, \\ a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$$

*Множество допустимых решений*



## Задача 2

Пусть предприятие выпускает два вида продукции $P_1$ и $P_2$. Для производства продукции используют три типа сырья $S_1, S_2, S_3$. Расход сырья на каждый вид продукции, стоимость единицы продукции и запасы сырья приведены в таблице.

| Виды сырья | Расходы сырья на ед. продукции | | Запасы сырья |
|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | |
| $S_1$ | 3 | 4 | 70 |
| $S_2$ | 5 | 7 | 80 |
| $S_3$ | 8 | 6 | 90 |
| Стоимость ед. продукции | 20 | 30 | |

$x_1$ - объем выпуска первого вида продукции

$x_2$ - объем выпуска второго вида продукции

Задача линейного программирования

Целевая функция

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \rightarrow max \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 70, \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 80, \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 90, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Множество допустимых решений

## ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ.

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

*Постановка задачи поиска минимума функций* содержит:

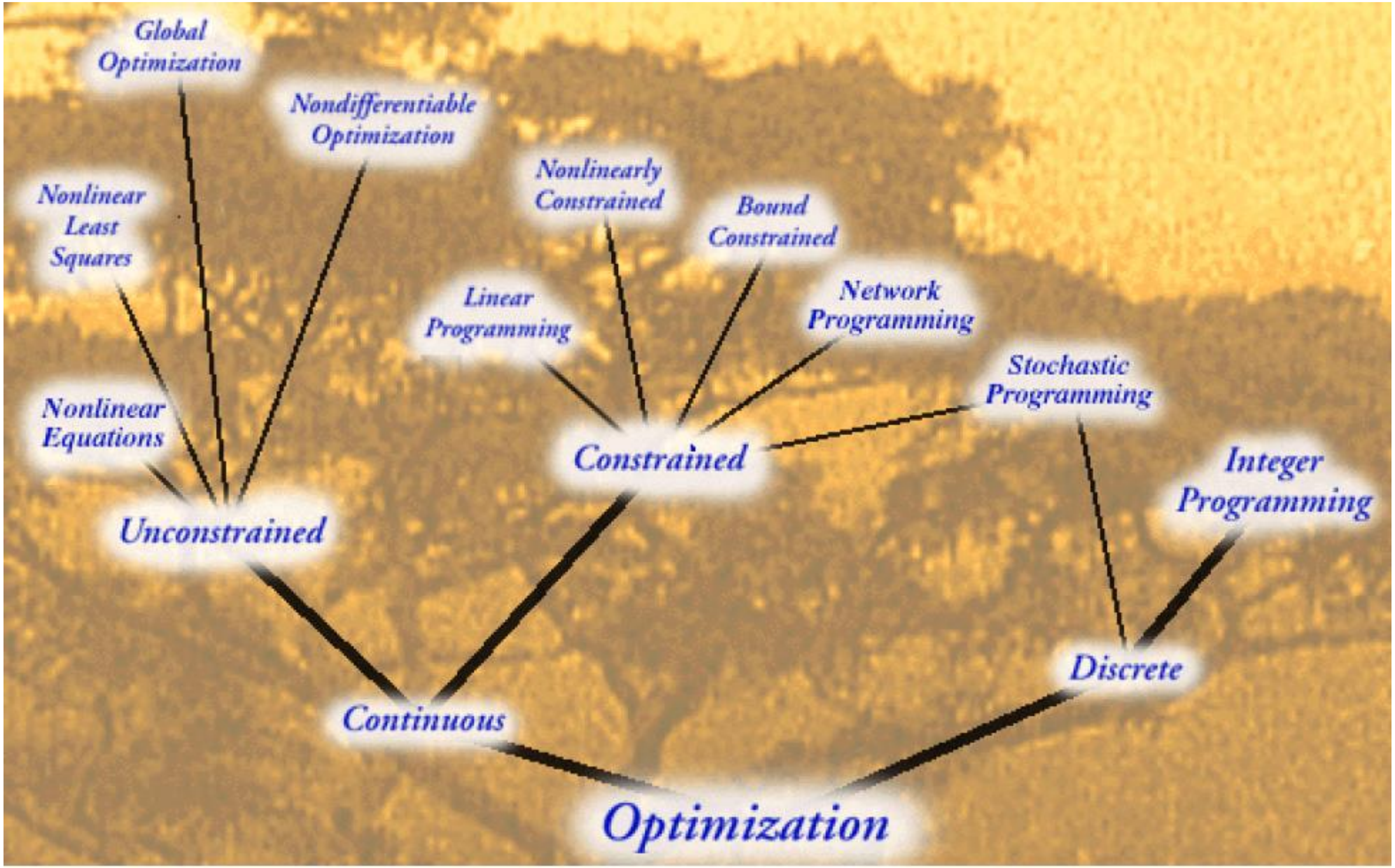
- *целевую функцию* $f(x)$, где $x=(x_1,...,x_n)^T$, определенную на *n*-мерном евклидовом пространстве $R^n$. Ее значения характеризуют степень достижения цели, во имя которой поставлена или решается задача;
- *множество допустимых решений* $X \subseteq R^n$, среди элементов которого осуществляется поиск.

Требуется найти такой вектор $x^*$ из множества допустимых решений, которому соответствует минимальное значение целевой функции на этом множестве:

$$f(x^*)=\min_{x\in X} f(x).$$


ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ
по размерности
по числу критериев оптимальности
по виду целевой функции
по наличию ограничений
по характеру ограничений
однопараметрические (одномерные)
многопараметрические (многомерные)
однокритериальные
многокритериальные
линейного программирования
нелинейного программирования
выпуклого программирования
целочисленного программирования
дискретного программирования
безусловной оптимизации
условной оптимизации
детерминированные
стохастические
комбинированные

# Классификация оптимизационных задач



## Виды оптимизационных задач

| Целевая функция | Ограничения | Вид ЗО |
|---|---|---|
| Линейная | Линейные | Задача линейного программирования |
| Линейная/Нелинейная | Нелинейные/Линейные | Задача нелинейного программирования |
| Квадратичная | Линейные | Задача квадратичного программирования |
| Выпуклая | Выпуклые | Задача выпуклого программирования |
| Произвольная | Произвольные | Задача математического программирования |

Задачи целочисленного программирования

Оптимизационные задачи теории управления

## Литература


1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление.- М.: Наука, 1979.
2. *Васильев Ф.П.* Линейное программирование. – М.: Факториал Пресс, 2008.
3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Т. I и II. – М.: МЦНМО, 2011.
4. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983
5. *Летова Т.А., Пантелеев А.В.* Экстремум функций в примерах и задачах. – М.:Изд-во МАИ, 1998
6. *Пантелеев А.В.* Применение эволюционных методов глобальной оптимизации в задачах оптимального управления детерминированными системами. – М.: Изд-во МАИ, 2013.
7. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010.
8. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение. – М: ДМК Пресс, 2018.
9. *Бахвалов Н.*С. Численные методы. – М.: Наука, 1973.
10. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. – М.: Физматлит, 2006
11. *Демидович Б.*П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966.
12. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002.
13. *Пантелеев А.В., Кудрявцева И.А.* Численные методы. Практикум.- М.: ИНФРА-М, 2017.

**З а м е ч а н и я.**

**1.** Задача поиска максимума функции $f(x)$ сводится к задаче поиска минимума путем замены знака перед функцией на противоположный (рис. 1):

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X} \left[ -f(x) \right].$$

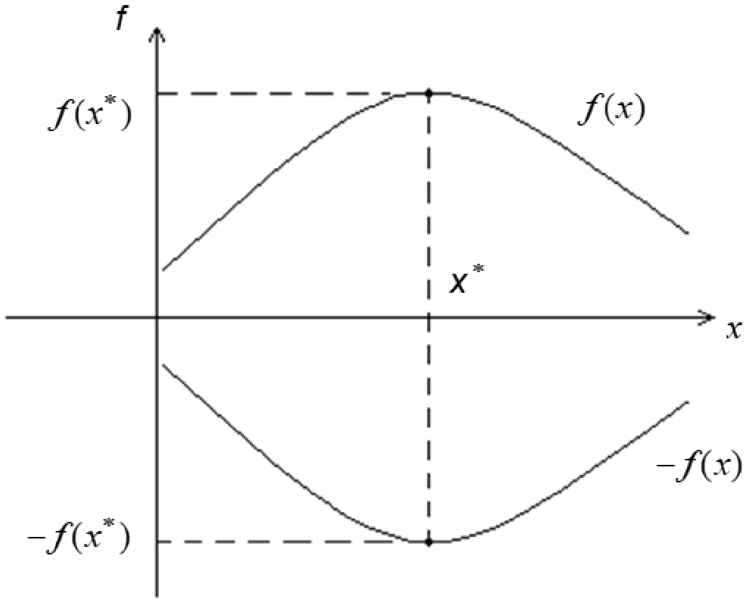



Рис. 1

**2.** Задача поиска минимума и максимума целевой функции $f(x)$ называется задачей поиска *экстремума*: $f(x^*) = \operatorname*{extr}_{x \in X} f(x)$.

$f(x) \to \min_{x \in X}$

**3.** Если множество допустимых решений $X$ задается ограничениями (условиями), накладываемыми на вектор $x$ , то решается задача поиска *условного экстремума*. Если $X = R^n$, т.е. ограничения (условия) на вектор $x$ отсутствуют, решается задача поиска *безусловного экстремума*.

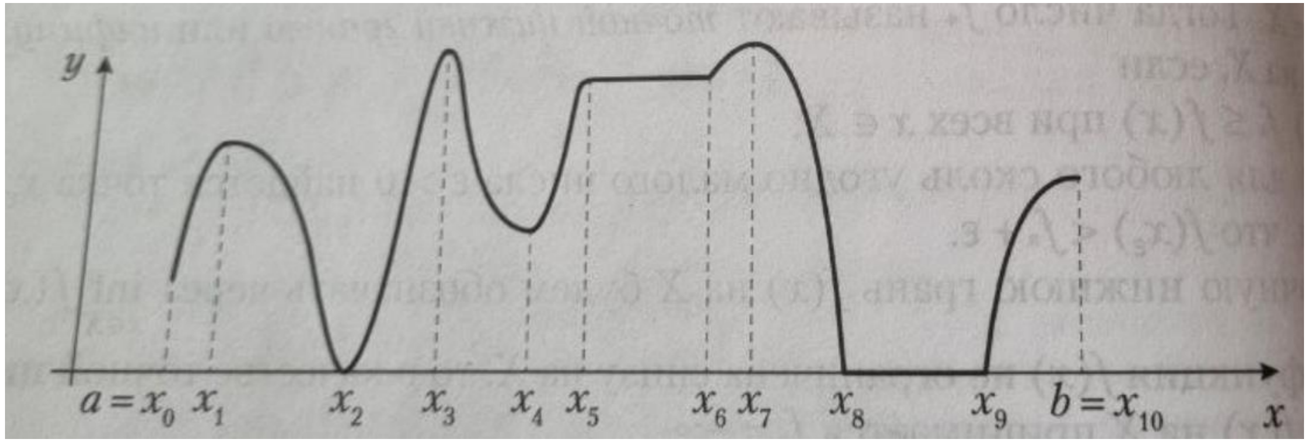
**4.** Решением задачи поиска экстремума является пара $(x^*, f(x^*))$, включающая точку $x^*$ и значение целевой функции в ней.

**5.** Множество точек минимума (максимума) целевой функции $f(x)$ на множестве $X$ обозначим $X^*$. Оно может содержать конечное число точек (в том числе одну), бесконечное число точек или быть пустым.

***Определение 1.*** Точка $x^* \in X$ называется точкой *глобального* (*абсолютного*) *минимума* функции $f(x)$ на множестве $X$, если функция достигает в этой точке своего наименьшего значения, т.е.

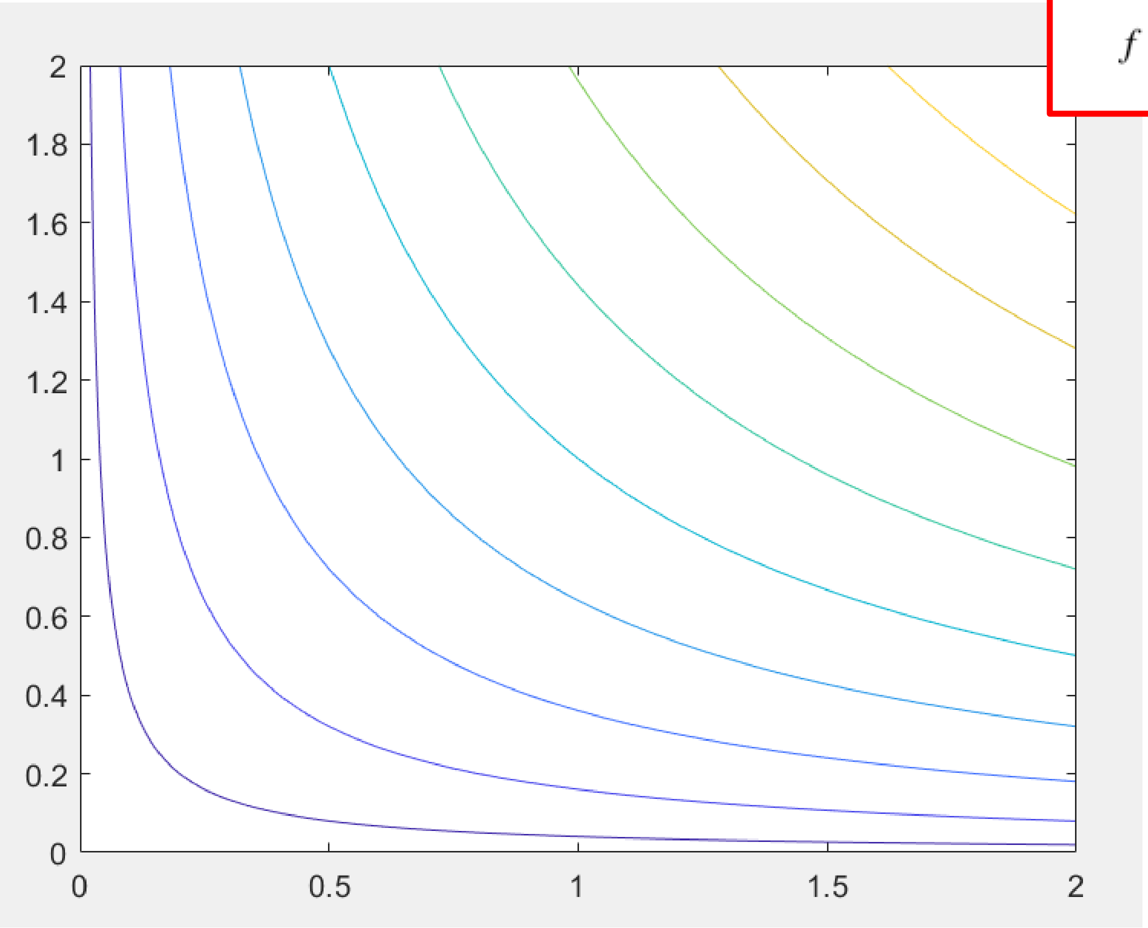
$$f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in X .$$

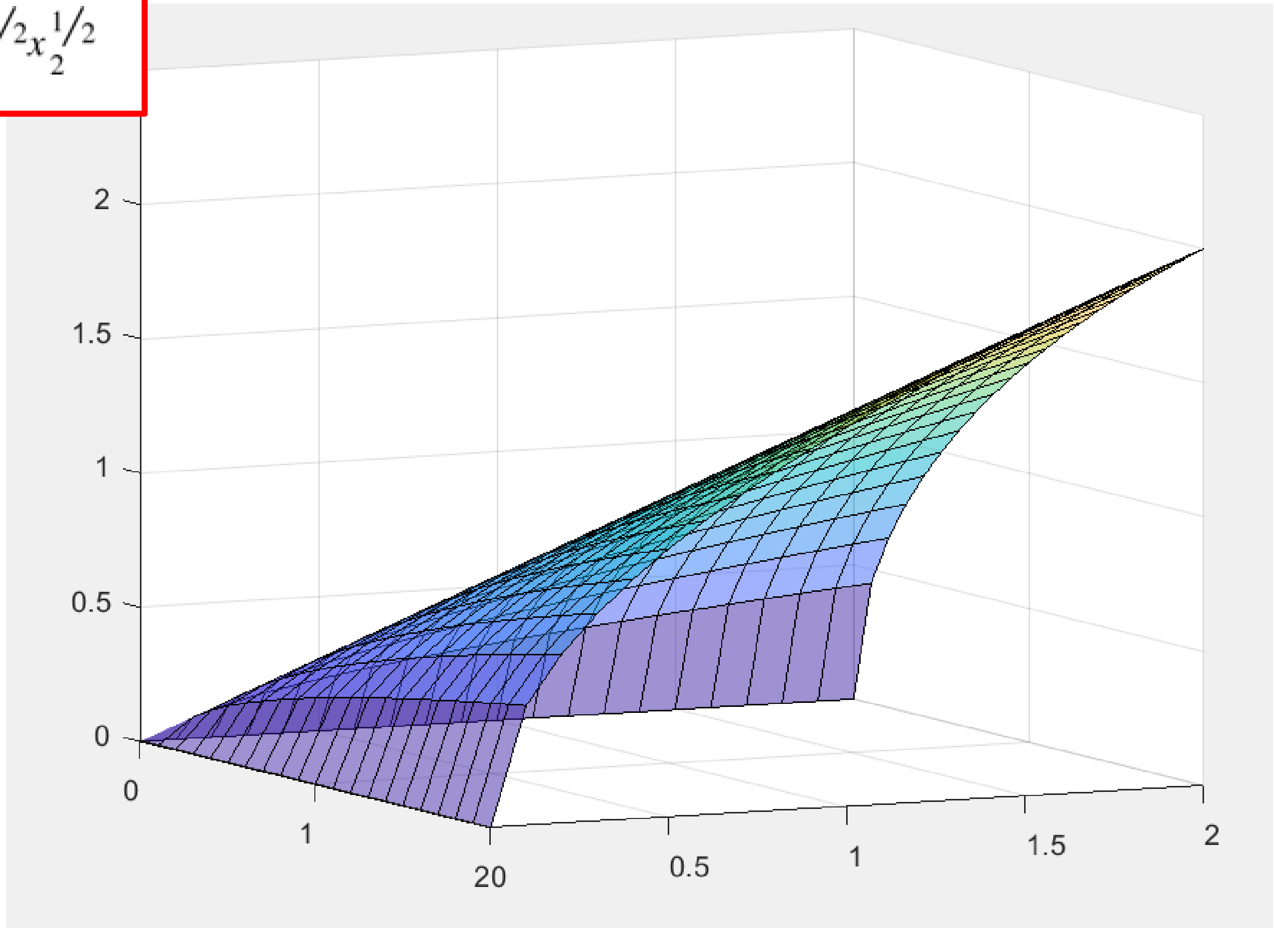
***Определение 2.*** Точка $x^* \in X$ называется точкой *локального* (*относительного*) *минимума* функции $f(x)$ на множестве допустимых решений $X$, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что если $x \in X$ и $\|x - x^*\| < \varepsilon$, то $f(x^*) \le f(x)$. Здесь $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ – евклидова норма вектора $x$.



***Определение 3.*** *Поверхностью уровня* функции $f(x)$ называется множество точек, в которых функция принимает постоянное значение, т.е. $f(x) = const$. Если $n = 2$, поверхность уровня изображается *линией уровня* на плоскости $R^2$.

$$f = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$



***Определение 4.*** *Градиентом* $\nabla f(x)$ непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $x$ называется вектор-столбец, элементами которого являются частные производные первого порядка, вычисленные в данной точке:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Градиент функции направлен по нормали к поверхности уровня (см. определение 3), т.е. перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в точке $x$ , в сторону наибольшего возрастания функции в данной точке.

***Определение 5.*** *Матрицей Гессе* $H(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой в точке $x$ функции $f(x)$ называется матрица частных производных второго порядка, вычисленных в данной точке:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix},$$

где $h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

***Определение 6.*** Квадратичная форма $\Delta x^T H(x) \Delta x$ (а также соответствующая матрица Гессе $H(x)$) называется:

- *положительно определенной* $\left(H(x) > 0\right)$, если для любого ненулевого $\Delta x$ выполняется неравенство $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$;
- *отрицательно определенной* $\left(H(x) < 0\right)$, если для любого ненулевого $\Delta x$ выполняется неравенство $\Delta x^T H(x) \Delta x < 0$;
- *положительно полуопределенной* $\left(H(x) \geq 0\right)$, если для любого $\Delta x$ выполняется неравенство $\Delta x^T H(x) \Delta x \geq 0$ и имеется отличный от нуля вектор $\Delta x$, для которого $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$;
- *отрицательно полуопределенной* $\left(H(x) \leq 0\right)$, если для любого $\Delta x$ выполняется неравенство $\Delta x^T H(x) \Delta x \leq 0$ и имеется отличный от нуля вектор $\Delta x$, для которого $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$;
- *неопределенной* $\left(H(x) \gtrless 0\right)$, если существуют такие векторы $\Delta x$, $\Delta \tilde{x}$, что выполняются неравенства $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$, $\Delta \tilde{x}^T H(x) \Delta \tilde{x} < 0$;
- *тождественно равной нулю* $\left(H(x) \equiv 0\right)$, если для любого $\Delta x$ выполняется равенство $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$.

## НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

### Постановка задачи

Дана дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на множестве $X = R^n$.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in R^n$ ее локальных минимумов и максимумов на $R^n$:

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x); \qquad f(x^*) = \max_{x \in R^n} f(x). \tag{2}$$

**Утверждение 1** (необходимые условия экстремума первого порядка).

*Пусть* $x^* \in R^n$ *есть точка локального минимума (максимума) функции* $f(x)$ *на множестве* $R^n$ *и* $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x^*$. *Тогда градиент функции* $f(x)$ *в точке* $x^*$ *равен нулю, т.е.*

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{3}$$

*или*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

***Определение 5.*** Точки $x^*$, удовлетворяющие условию (3) или (4), называются *стационарными.*

**Утверждение 2** (необходимые условия экстремума второго порядка).

*Пусть точка* $x^*$ *есть точка локального минимума (максимума) функции* $f(x)$ *на множестве* $R^n$ *и функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в этой точке. Тогда матрица Гессе* $H(x^*)$ *функции* $f(x)$, *вычисленная в точке* $x^*$, *является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), т.е.*

$$H(x^*) \geq 0, \tag{5}$$

$$( H(x^*) \leq 0 ). \tag{6}$$

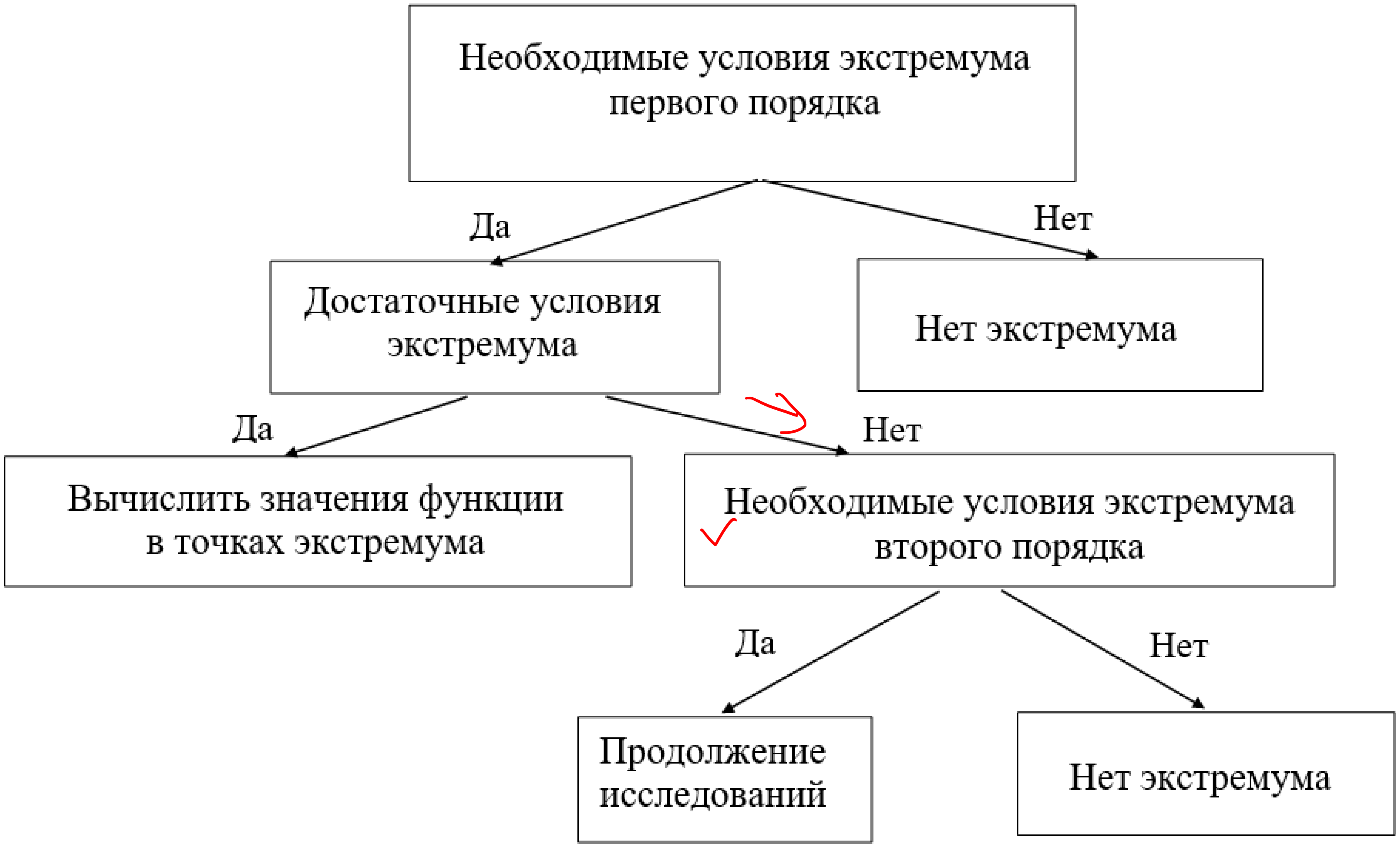
**Утверждение 3** (достаточные условия экстремума).

*Пусть функция* $f(x)$ *в точке* $x^* \in R^n$ *дважды дифференцируема, ее градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной (отрицательно определенной), т.е.*

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ и } H(x^*) > 0, \tag{7}$$

$$(\ H(x^*) < 0\ ). \tag{8}$$

*Тогда точка* $x^*$ *есть точка локального минимума (максимума) функции* $f(x)$ *на множестве* $R^n$.


Необходимые условия экстремума первого порядка
Да
Нет
Достаточные условия экстремума
Нет экстремума
Да
Нет
Вычислить значения функции в точках экстремума
Необходимые условия экстремума второго порядка
Да
Нет
Продолжение исследований
Нет экстремума

- **Критерий проверки достаточных условий экстремума** (критерий Сильвестра).

*Для того чтобы матрица Гессе* $H(x^*)$ *была положительно определенной* ($H(x^*) > 0$) *и точка* $x^*$ *являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров были строго положительны:*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \quad \Delta_n > 0. \tag{9}$$

*Для того чтобы матрица Гессе* $H(x^*)$ *была отрицательно определенной* ($H(x^*) < 0$) *и точка* $x^*$ *являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с отрицательного:*

$$\Delta_1 < 0, \ \Delta_2 > 0, \ \Delta_3 < 0, \ldots, \ (-1)^n \Delta_n > 0. \tag{10}$$

- **Критерий проверки необходимых условий экстремума второго порядка.**

1. *Для того чтобы матрица Гессе* $H(x^*)$ *была положительно полуопределенной* ( $H(x^*) \geq 0$ ) *и точка* $x^*$ *может быть являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры определителя матрицы Гессе были неотрицательны.*

2. *Для того чтобы матрица Гессе* $H(x^*)$ *была отрицательно полуопределенной* ( $H(x^*) \leq 0$ ) *и точка* $x^*$ *может быть являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка были неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка – неположительны.*

Таблица 1

| № пп/п | $\nabla f(x^*)$ | $H(x^*)$ | Первый способ | Тип стационарной точки $x^*$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $>0$ | $\Delta_1>0, \Delta_2>0, \ldots, \Delta_n>0$ | Локальный минимум |
| 2 | 0 | $<0$ | $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \ldots, (-1)^n \Delta_n>0$ | Локальный максимум |
| 3 | 0 | $\geq 0$ | Все главные миноры определителя матрицы $H(x^*)$ неотрицательны | Может быть локальный минимум, требуется дополнительное исследование |
| 4 | 0 | $\leq 0$ | Все главные миноры четного порядка неотрицательны, а нечетного порядка неположительны | Может быть локальный максимум, требуется дополнительное исследование |
| 5 | 0 | $=0$ | Матрица Гессе состоит из нулевых элементов | Требуется дополнительное исследование |
| 6 | 0 | $\gtrless 0$ | Не выполняются условия п. 1–5 | Нет экстремума |