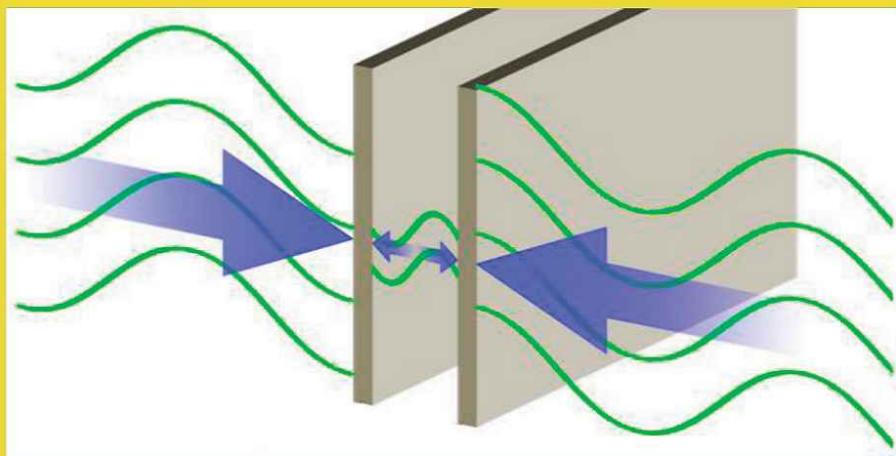


Е. С. Андрианов
А. П. Виноградов
А. А. Пухов

**ЛЕКЦИИ
ПО КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ**



Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Е. С. Андрианов
А. П. Виноградов
А. А. Пухов

**ЛЕКЦИИ
ПО КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ**

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2018

УДК 535(075)
ББК 22.34я73
A65

Р е ц е н з е н т ы :

Член-корреспондент РАН,
профессор НИЦ «Курчатовский институт» *Л. А. Максимов*

Доктор физико-математических наук, профессор механико-математического
факультета МГУ им. М. В. Ломоносова *А. А. Коньков*

Андрianов, Е. С., Виноградов, А. П., Пухов, А. А.

A65 Лекции по квантовой оптике: учеб. пособие /
Е. С. Андрianов, А. П. Виноградов, А. А. Пухов.
– М. : МФТИ, 2018. – 226 с.
ISBN 978-5-7417-0664-0

Пособие посвящено анализу свойств квантованного электромагнитного поля, взаимодействующего с веществом. Последовательно исследуются модели Джейнса-Каммингса, системы уравнений Максвелла-Блоха и Гейзенберга-Ланжевена, а также управляющие уравнения на матрицу плотности, представляющие собой базовые математические модели для описания процессов в квантовой оптике.

Систематически изложен математический аппарат, основанный на стохастических квантовых уравнениях, для исследования квантовых шумов, флуктуаций и корреляций.

Результаты теоретического анализа сопоставляются с динамикой реальных квантово-оптических систем различной природы. Основное содержание лекций дополнено некоторым количеством задач для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей МФТИ.

УДК 535(075)
ББК 22.34я73

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского
физико-технического института (государственного университета)*

ISBN 978-5-7417-0664-0

- © Андрianов Е. С., Виноградов А. П.,
Пухов А. А., 2018
- © Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	9
ЛЕКЦИЯ 1. Что такое квантовая оптика?	12
1. Что такое квантовая оптика?	12
2. Состояния в квантовой механике.....	14
3. Базис. Полнота. Теорема Парсеваля	15
4. Операторы наблюдаемых физических величин в квантовой механике	16
5. Процедура квантования	17
6. Картинь Гейзенберга и Шредингера	18
7. Координатное и импульсное представления. Волна де Бройля	18
8. Картина взаимодействия.....	20
9. Основные результаты лекции	20
10. Приложения.....	21
10.1. Фурье-образ δ -функции Дирака	21
10.2. Лемма Бейкера–Хаусдорфа	22
10.3. Теорема Бейкера–Хаусдорфа.....	23
Контрольные вопросы	23
Задачи	24
Литература.....	25
ЛЕКЦИЯ 2. Квантование электромагнитного поля	26
1. Квантование гармонического осциллятора	26
2. Когерентные (глауберовы) состояния.....	27
3. Свойства когерентных состояний	28
4. Квантование электромагнитного поля в резонаторе.....	29
5. Квантование электромагнитного поля тел произвольной формы.....	32
Контрольные вопросы	35
Задачи	35
Литература.....	36
ЛЕКЦИЯ 3. Квантование ДУС. Взаимодействие ДУС с классическим электромагнитным полем	37
Введение	37
1. Модель ДУС – полезная абстракция	37
2. Взаимодействие ДУС с классическим электромагнитным полем. Осцилляции Раби. Резонансное взаимодействие атома со светом....	39
3. Классическая теория восприимчивости (поляризуемости) ДУС.....	42
4. Квантовая теория восприимчивости (поляризуемости) ДУС.....	43
Контрольные вопросы	45

Задачи	46
Литература	47
ЛЕКЦИЯ 4. Оптические уравнения Блоха.....	48
1. Приближения вращающейся волны	48
2. Вектор Блоха, сфера Блоха, уравнения Блоха	49
3. Сдвиг Блоха–Зигерта.....	53
4. Рассеяние гармонического поля на ДУС.....	54
Контрольные вопросы.....	55
Задачи	56
Литература	56
ЛЕКЦИЯ 5. Квантовая теория. Взаимодействие ДУС и МР.	
Вакуумные осцилляции Раби	57
1. Полностью квантовое рассмотрение	57
2. Гамильтониан Джейнса–Каммингса.....	58
3. Эволюция системы ДУС+МР.....	59
4. «Одетые» состояния	65
Контрольные вопросы.....	68
Задачи	68
Литература	69
ЛЕКЦИЯ 6. Теория Вайскопфа–Вигнера спонтанного излучения	
ДУС в свободном пространстве	70
Введение	70
1. Динамика спонтанного распада возбуждённого состояния	70
2. Релаксация в свободном пространстве.....	73
3. Релаксация в резонаторе, фактор Пёрселла	77
Контрольные вопросы.....	78
Задачи	78
Литература	80
ЛЕКЦИЯ 7. Спонтанное излучение атома в резонаторе	81
Введение	81
1. Динамика спонтанного распада возбуждённого состояния, находящегося в резонаторе.....	81
2. Режим слабой связи, фактор Пёрселя	86
3. Режим сильной связи, дублетная структура спектра	86
Контрольные вопросы.....	87
Задачи	87
Литература	88

ЛЕКЦИЯ 8. Сила Казимира.....	89
Введение	89
1. Toy model. Одномерное безмассовое скалярное поле	89
2. Вакуумные флуктуации электромагнитного поля	93
3. Температурные поправки	95
Контрольные вопросы	97
Задачи	98
Литература.....	99
ЛЕКЦИЯ 9. Диссипация в квантовой механике	100
Введение	100
1. Матрица плотности, общие свойства.....	100
2. Описание диссипации с помощью матрицы плотности.	
Управляющее уравнение	102
Контрольные вопросы	107
Задачи	107
Литература.....	108
ЛЕКЦИЯ 10. Простейшие решения управляющего уравнения.....	109
Введение	109
1. Диссипация гармонического осциллятора	109
2. Диссипация двухуровневой системы	113
3. Диссипация двухуровневой системы во внешнем поле.....	114
Контрольные вопросы	115
Задачи	115
Литература.....	116
ЛЕКЦИЯ 11. Квантовая теорема регрессии. Двухвременные корреляционные функции	117
Введение	117
1. Вычисление двухвременных средних с помощью управляющего уравнения.....	118
2. Квантовая теорема регрессии	119
3. Спектр затухающего квантового гармонического осциллятора	120
4. Спектр затухающей двухуровневой системы	121
5. Спектр резонансной флуоресценции	122
6. Корреляционные функции второго порядка. Эффект Хенберри Брауна–Твисса.....	125
Контрольные вопросы	127
Задачи	128
Литература.....	128

ЛЕКЦИЯ 12. Уравнение Линдблада для одномодового многоатомного лазера. Полуклассическое приближение	129
Введение	129
1. Фазовая релаксация и накачка двухуровневых атомов.....	129
2. Управляющее уравнения одномодового многоатомного лазера	131
3. Уравнения движения. Гипотеза масштабной инвариантности и разложение по «размеру» системы	132
Контрольные вопросы.....	135
Задачи	136
Литература	136
ЛЕКЦИЯ 13. Уравнения Максвелла–Блоха. Режимы работы одномодового лазера	137
Введение	137
1. Генерация. Затягивание частоты	137
2. Пичковые (релаксационные) колебания.....	145
Контрольные вопросы.....	146
Задачи	146
Литература	147
ЛЕКЦИЯ 14. Влияние спонтанного излучения на лазерную генерацию. Уравнения Зябловского. Ширинা линии излучения	148
Введение	148
1. Учёт спонтанного излучения. Квантовые флуктуации вблизи порога генерации.....	148
2. Уравнения Зябловского.....	155
3. Ширина линии излучения	156
Контрольные вопросы.....	158
Задачи	159
Литература	159
ЛЕКЦИЯ 15. Атомы в резонаторе, оптическая бистабильность	160
Введение	160
1. Управляющее уравнение для описания оптической бистабильности .	160
2. Приближение среднего поля	162
3. Оптическая бистабильность цепочки лазеров: волны переключения и структуры	167
Контрольные вопросы.....	169
Задачи	169
Литература	171

ЛЕКЦИЯ 16. Сверхизлучение Дике	172
Введение	172
1. Модель Дике сверхизлучения ансамбля двухуровневых атомов	172
2. Качественный анализ сверхизлучения на основе «золотого» правила Ферми	176
3. Смешанность и запутанность в процессе сверхизлучения.....	177
Контрольные вопросы	179
Задачи	179
Литература.....	179
ЛЕКЦИЯ 17. Полуклассическая теория сверхизлучения	180
Введение	180
1. Сверхизлучение классических нелинейных диполей	180
2. Фазировка излучателей при сверхизлучении Дике	185
3. Сверхизлучение линейных квантовых осцилляторов	187
Заключение	193
Контрольные вопросы	193
Задачи	193
Литература.....	195
ЛЕКЦИЯ 18. Уравнения Ланжевена и Фоккера–Планка	196
1. Стохастическое описание системы, взаимодействующей с резервуаром	196
2. Уравнение Ланжевена	198
3. Функция распределения ансамбля частиц	200
4. Уравнение Фоккера–Планка	201
5. Стационарное уравнение Фоккера–Планка	204
Контрольные вопросы	206
Задачи	206
Литература.....	206
ЛЕКЦИЯ 19. Шумы в классических нелинейных системах	207
Введение	207
1. Спектр линейного осциллятора с шумом	207
2. Спектр осциллятора Ван дер Поля.....	211
3. Стохастический резонанс	213
4. Модель двух состояний	216
Контрольные вопросы	218
Задачи	218
Литература.....	218

ЛЕКЦИЯ 20. Уравнения Гейзенберга–Ланжевена для лазера.	
Ширина линии, формула Шавлова–Таунса.....	219
Введение	219
1. Шумы в квантовой механике	219
2. Спектр лазера выше порога генерации	222
Контрольные вопросы.....	223
Задачи.....	223
Литература	224
Заключение	225

Введение

Omnia disce, videbis postea nihil esse superfluum.

Все штудируйте, после увидите – нет ничего лишнего.

Каноник Хью, аббатство Сен-Виктор, XII в.

Квантовая оптика представляет собой бурно развивающийся раздел «переднего края» физики. Существует много хороших и полных учебников по квантовой оптике. Есть как краткие, так и фундаментальные курсы лекций по этой науке. Зачем же нужен еще один? Смысл данного курса лекций прежде всего в компактном и самосогласованном изложении основ квантовой оптики.

Это пособие соответствует двухсеместровому курсу лекций по квантовой оптике, читаемых на четвертом курсе на кафедре электродинамики сложных систем и нанофотоники факультета проблем физики и энергетики МФТИ. Поэтому возникает потребность в небольшом и понятном для новичка руководстве по квантовой оптике, которое позволило бы ему сориентироваться в структуре и содержании этого важного раздела физики, а также в огромном разнообразии литературы, посвященной предмету. Тем более что для этого четырекурсник располагает совсем небольшими вычислительными навыками и весьма ограниченным временем. Именно знакомство с корпусом знаменитых «харизматичных» тем квантовой оптики помогает ему в овладении предметом. Набор этих тем формирует его общефизический кругозор.

Для нормального усвоения материала нужен регулярный цикл занятий: лекции и семинары раз в неделю, общение с преподавателем и набор задач повышенного типа сложности. Для достижения желаемого результата в усвоении предмета необходимо делать и сдавать много заданий и письменных работ, проводить коллоквиумы. Для осуществления этой программы и нужен предлагаемый курс лекций. Авторы приложили значительные усилия к тому, чтобы лекции были написаны простым и понятным, а не «мистическим языком», создающим тягостное ощущение присутствия некоего супермена». При этом особое внимание было уделено тому, что, где необходимо, это был бы язык общей физики, которая «учит задачам», а с другой стороны, язык теоретической физики, которая «учит методам». Таким образом, суммируя идеи «понятности» и первого ознакомления с предметом, мы приходим к «адресации» этих лекций. Эти лекции предназначены в основном для студентов-экспериментаторов, впервые изучающих предмет, и для профессионалов, желающих «осве-

жить в памяти» основные положения квантовой оптики. Словом, эти лекции написаны для «неспециалистов», то есть физиков-экспериментаторов и тех теоретиков, которые не боятся, что их застанут врасплох за чтением чего-то легкого.

Авторы этого очень короткого курса лекций старались познакомить читателя с калейдоскопом фундаментальных идей квантовой оптики, имея в виду студента физтеха с минимальными познаниями в математической технике. Фактически его оснастка может ограничиваться линейной алгеброй и началами анализа. Вместо обычного для учебников принципа наибольшей общности авторы старались придерживаться обратного. Каждая идея должна быть сначала ясно понята в простейшей ситуации, и только потом развитый метод можно обобщать и переносить на более сложные случаи. Поэтому именно примеры и идеи, а не общие теоремы и доказательства, составляют основу этих лекций. Семинарские и экзаменационные задачи в течение курса составляют его существенную часть.

Особое внимание в пособии уделено взаимосвязи предмета с другими областями теоретической физики: квантовой механикой и электродинамикой. Поэтому авторы рассчитывают, что не только студенту, но и профессиональному другой специальности, далекому от квантовой оптики, будет интересно познакомиться с основными и поэтому простыми идеями квантовой оптики.

В конце каждой лекции приведены задачи, иллюстрирующие изложенный материал и предназначенные для домашних заданий и семестровых письменных работ. Некоторые из них представляют собой исследовательские задачи. Авторы приложили значительные усилия к тому, чтобы подбор задач был релевантным и репрезентативным. Таким образом, суммируя идеи «понятности» и первого ознакомления с предметом, мы приходим к адресации этого курса. Он предназначен для новичка, впервые обозревающего квантовую оптику «с высоты птичьего полета». В условиях информационного «наводнения» инструменты вчерашнего дня перестали работать. Поэтому приходится искать новые способы изложения. Данный курс следует рассматривать как базовый, в значительной степени ознакомительный. Он является именно введением в квантовую оптику.

Курс разбит на 20 лекций, сгруппированных в соответствии с содержанием предмета, делением на семестры и личными исследовательскими вкусами авторов. В каждой лекции после соответствующего материала приводятся контрольные вопросы для самопроверки.

Последовательное чтение лекций совершенно необязательно. Лекции о конкретных квантово-оптических явлениях «удобопонятны» в суще-

ственном, независимо от первых глав, посвященных принципам. И, в свою очередь, свойства систем квантовой оптики можно понять независимо от вводных разделов.

Авторам выпала удача много лет тесно общаться с коллегами по МФТИ на темы квантовой оптики и не только... Это общение оказало сильное влияние на взгляды авторов на предмет и фактически сформировало их представления об этой области. Коллектив авторов признательен своим коллегам и студентам МФТИ, сделавшим множество ценных замечаний по поводу электронного варианта лекций. Особенно хотелось бы отметить А. Л. Барабанова, Ю. М. Белоусова, С. Н. Бурмистрова, И. В. Быкова, В. Г. Веселаго, И. В. Доронина, А. В. Дорофеенко, Р. О. Зайцева, А. А. Зябловского, В. В. Киселева, В. Н. Киселя, И. П. Коваль, А. А. Конькова, В. П. Крайнова, А. Н. Лагарькова, А. А. Лисянского, Ю. Е. Лозовика, В. И. Манько, И. А. Рыжикова, М. В. Седову, В. Р. Соловьеву, М. В. Суслова, А. И. Тернова, О. И. Толстихина, С. Н. Филиппова, В. Ю. Шишкова, которым авторы благодарны за полезные обсуждения и замечания по всему корпусу лекций. Кроме того, авторы признательны А. Г. Леонову и Ю. М. Белоусову за поддержку проекта.

ЛЕКЦИЯ 1. Что такое квантовая оптика?

There's much more difference between a human being who knows quantum mechanics and one that doesn't than between one that doesn't and the other great apes.

M. Gell-Mann

1. Что такое квантовая оптика?

Квантовая оптика (КО) – это раздел квантовой электродинамики, изучающий низкоэнергетические ($\hbar\omega \ll mc^2$) взаимодействия фотонов со связанными в атомах электронами, конкретно – в оптическом диапазоне. Можно сказать по-другому: КО – это синтез квантовой теории поля и физической оптики, в котором важную роль играют квантовые свойства света.

Историческая канва развития этой области физики была такой. Сначала возникла электроника ламп, электровакуумных приборов и т. д. Здесь и электроны, и поле описывались классической физикой. Затем возникли (на арене появились) мазеры и лазеры, в которых (переходы) атомные электроны (в атомах) описывались квантовой механикой, а световое поле по-прежнему классически. Это была уже *квантовая электроника*, старое название – *квантовая радиофизика*. И наконец, в последние четыре десятилетия, возникла потребность описывать такие процессы, в которых важна *квантовая (фотонная) структура света*. Это теория линии лазера, *фотонная статистика электромагнитного поля* (ЭМ), *сжатые состояния «неклассического» света*, *оптика фотонов, когерентные и запутанные состояния электромагнитного поля* и т. д. При этом и электроны, и поле описываются *квантовой физикой*. Это и есть *квантовая оптика* (КО). При этом учитываются не только средние значения величин, но и *квантовые флуктуации и корреляции* как для электронов, так и для поля.

Из изложенного ясно, что «персонажами» КО, в самом простейшем случае, являются *двууровневый атом* (ДУС) и *одномодовое электромагнитное поле* (МР), а главной линией сюжета является их взаимодействие между собой. Двууровневых атомов, конечно, не бывает, но это полезная, удачная, и довольно точная идеализация. Ее удовлетворительность основана на том, что мода резонатора по частоте близка только к одной частоте перехода атома между конкретной парой его уровней. Поскольку взаимодействие носит резонансный характер, то из характерных черт персонажей можно оставить только эти две.

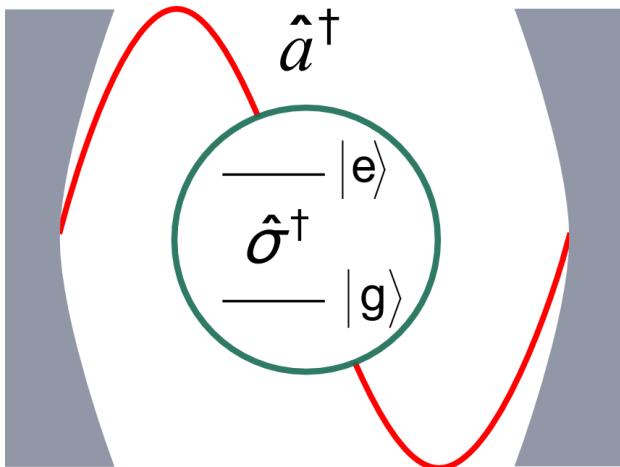


Рис. 1. Простейшая схема одномодового лазера,
состоящего из одной ДУС и одной МР

Чтобы при взаимодействии ДУС с МР проявились квантовые свойства света, число фотонов в МР должно быть мало, может быть, даже меньше единицы. Для этого нужно, чтобы резонатор был мал, а двухуровневый атом был один. Желательно миниатюрировать ситуацию. В последнее время появилась возможность реализовать эту ситуацию в эксперименте. Появились оптические резонаторы (optical cavities), размер которых сравним с оптической длиной волны. Это могут быть искусственно сформированные дефекты *фотонных кристаллов, металлические НЧ* и т. д. Добротность таких резонаторов может составлять десятки тысяч. Роль возбуждаемого атома при этом может играть нанокристаллическая *квантовая точка* (КТ). Ее размер может составлять десятки нанометров. Таким образом, КТ – это искусственный атом, в первом приближении двухуровневый. «Цвет» КТ зависит от её размера: чем больше КТ, тем краснее ее спектр.

Естественно, языком описания как ДУС, так и МР (а заодно и всего остального на свете) является квантовая механика. Как известно, *квантовая механика* – это функциональный анализ в гильбертовом пространстве. Поэтому она допускает несколько эквивалентных формулировок, из которых наиболее наглядная и удобная – дираковская. Сформулируем ее максимально возможным простым и компактным образом.

2. Состояния в квантовой механике

Физические состояния системы – это *кет-векторы* гильбертова пространства $|a\rangle$. Остановимся на свойствах этих векторов линейного пространства. Они удовлетворяют условиям ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности при умножении на число (скаляр), существования единственного нулевого и обратного векторов, численной единицы. Для простоты выпишем их, хотя они и так хорошо известны.

Ассоциативность: $|a_1\rangle + (|a_2\rangle + |a_3\rangle) = (|a_1\rangle + |a_2\rangle) + |a_3\rangle$.

Коммутативность: $|a_1\rangle + |a_2\rangle = |a_2\rangle + |a_1\rangle$.

Существование нулевого вектора: $|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$.

Существование обратного вектора: $|a\rangle + |-a\rangle = |0\rangle$.

Дистрибутивность относительно векторов:

$$c(|a_1\rangle + |a_2\rangle) = c|a_1\rangle + c|a_2\rangle.$$

Дистрибутивность относительно числовых множителей:

$$(c_1 + c_2)|a\rangle = c_1|a\rangle + c_2|a\rangle.$$

Ассоциативность относительно числовых множителей:

$$c_1(c_2|a\rangle) = (c_1c_2)|a\rangle.$$

Существование единичного числового множителя: $1|a\rangle = |a\rangle$.

Сопряженным к пространству кет-векторов является пространство *бра-векторов*. Векторы $|a\rangle$ и $\langle a|$ представляют одно и то же физическое состояние. Для фиксации единственного представления используется нормировка. Для этого вводится скалярное произведение.

На этом пространстве действует линейный функционал, который каждому вектору $|a\rangle$ ставит в соответствие число. Это что-то вроде «машинки-мясорубки», в которую опускают $|b\rangle$ и получают число. Таких машинок много (столько, сколько $|a\rangle$), и физически их удобно изображать векторами *сопряженного пространства – бра-векторами*. При этом каждому кет $|a\rangle$ становится в соответствие этот функционал при помощи операции сопряжения $|a\rangle^+ = \langle a|$ и называется *бра-вектором*.

Для этого дуального бра-пространства выполняются все те же свойства. Число, получающееся в результате, называют скалярным произведением и обозначают $\langle a|b\rangle$. Скалярное произведение удовлетворяет сле-

дующим свойствам: $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$, $\langle a|a\rangle \geq 0$, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, положительная определенность. Норма $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$. Скалярное произведение удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\sqrt{\langle a+b|a+b\rangle} \leq \sqrt{\langle a|a\rangle} + \sqrt{\langle b|b\rangle} \quad (1)$$

и неравенству Коши–Шварца:

$$|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle \langle b|b\rangle. \quad (2)$$

Физический смысл скалярного произведения заключается в том, что $|\langle a|b\rangle|^2$ – вероятность измерить прибором величину a у системы в состоянии $|b\rangle$.

3. Базис. Полнота. Теорема Парсеваля

В гильбертовом пространстве может быть всегда введен счетный ортонормированный базис $|b\rangle$, по которому можно разложить любой кет-вектор $|a\rangle$:

$$|a\rangle = \sum_i \langle e_i | a \rangle |e_i\rangle. \quad (3)$$

Таким образом (поскольку это условие справедливо $\forall |a\rangle$), полнота базиса выражается условием

$$\hat{1} = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i|. \quad (4)$$

Теорема Парсеваля:

$$\langle a|a\rangle = \sum_i |\langle e_i | a \rangle|^2. \quad (5)$$

Свойства скалярного произведения

Дистрибутивность по первому и второму сомножителям:

$$(\langle a_1 | + \langle a_2 |) |a_3\rangle = \langle a_1 | a_3 \rangle + \langle a_2 | a_3 \rangle; \langle a_1 | (|a_2\rangle + |a_3\rangle) = \langle a_1 | a_2 \rangle + \langle a_1 | a_3 \rangle.$$

Умножение на численный множитель: $(c \langle a_1 |) |a_2\rangle = c^* \langle a_1 | a_2 \rangle$;

$$\langle a_1 | (c |a_2\rangle) = c \langle a_1 | a_2 \rangle; (c |a\rangle)^+ = c^* |a\rangle.$$

Сопряжение: $\langle a_1 | a_2 \rangle = \langle a_2 | a_1 \rangle^*$.

Положительная определенность: $\langle a | a \rangle \geq 0$.

Неравенство треугольника: $\sqrt{(\langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle)(\langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle)} \leq \sqrt{\langle a_1 | a_1 \rangle} + \sqrt{\langle a_2 | a_2 \rangle}$.

Неравенство Коши–Шварца: $|\langle a_1 | a_2 \rangle| \leq \sqrt{\langle a_1 | a_1 \rangle} \sqrt{\langle a_2 | a_2 \rangle}$.

4. Операторы наблюдаемых физических величин в квантовой механике

Физические величины (наблюдаемые) системы определяются линейными операторами гильбертова пространства:

$$|b\rangle = \hat{A}|a\rangle. \quad (6)$$

Для линейных операторов выполняются все те же соотношения, кроме коммутативности. Поэтому над символами операторов принято ставить крышку, чтобы отличить эти q -числа от обычновенных c -чисел. Эрмитово-сопряженным оператором \hat{A}^+ называют такой оператор, что для $\forall a, b$ выполнено соотношение:

$$\langle b | \hat{A} | a \rangle = \langle a | \hat{A}^+ | b \rangle^*, \quad (7)$$

а эрмитовым (самосопряженным), соответственно, $\hat{A} = \hat{A}^+$. Нетрудно убедиться, что собственные значения эрмитова оператора всегда одинаковы, а собственные векторы – ортогональны. Поэтому на роль наблюдаемых мы приглашаем только эрмитовы операторы.

Полагается, что в процессе измерения физической величины \hat{A} прибором, он покажет одно из собственных значений оператора $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$. Система, соответственно, имеющая величину a , находится в состоянии $|a\rangle$.

Обратимся теперь к функциям от операторов $F(\hat{A})$. Под функцией от оператора понимается то же, что и в теории матриц:

$$F(\hat{A}) = \hat{1} \cdot F(0) + F'(0) \cdot \hat{A} + \frac{1}{2} F''(0) \cdot \hat{A}^2 + \dots, \quad (8)$$

то есть ряд Тейлора аналитической функции $F(x)$ в нуле.

5. Процедура квантования

Теперь разработанной математической структуре нужно придать физическое содержание, а именно постулат канонического квантования, ставящий в соответствие известной классической физике ее квантовое обобщение.

Прежде всего напомним, как меняется произвольная функция $f(x, p, t)$ в классической механике. Для этого вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{df(x, p, t)}{dt} &= \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial p} \dot{p} = \\ &= \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial x} \frac{\partial H(x, p, t)}{\partial p} - \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial p} \frac{\partial H(x, p, t)}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} + \{f(x, p, t), H(x, p, t)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где в последнем равенстве введена скобка Пуассона:

$$\{A, B\}_{PB} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right).$$

Процедура канонического квантования устроена следующим образом. Если есть система с динамическими переменными x, p и гамильтонианом $H(x, p)$, то при квантовании физические величины x, p заменяются на операторы $x \rightarrow \hat{x}$, $p \rightarrow \hat{p}$ таким образом, что скобка Пуассона переходит в коммутатор: $\{A, B\}_{PB} \rightarrow (i\hbar)^{-1} [\hat{A}, \hat{B}]$.

Например, $\{x, p\}_p = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = 1$, таким образом, в квантовой механике:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (10)$$

Тогда, заменяя в (9) скобку Пуассона на коммутатор, мы получаем уравнения Гейзенберга:

$$i\hbar \frac{d\hat{x}}{dt} = [\hat{x}, \hat{H}], \quad (11)$$

$$i\hbar \frac{d\hat{p}}{dt} = [\hat{p}, \hat{H}]. \quad (12)$$

6. Картины Гейзенберга и Шредингера

Сформулированные выше уравнения Гейзенберга определяют зависимость наших операторов от времени $\hat{A}(t)$. А зачем нам это знать. Дело в том, что измеряемые величины – это средние вида $\langle a|\hat{A}|b\rangle$. А поэтому возможны два способа представления величин, две картины. Способы связаны с тем, к чему отнести зависимость физической величины от времени – к оператору или к векторам состояний:

$$\langle a|\hat{A}(t)|b\rangle = \langle a(t)|\hat{A}|b(t)\rangle. \quad (13)$$

Когда векторы постоянны – картина Гейзенберга, а наоборот – Шредингера. Переход от одной к другой осуществляется при помощи оператора эволюции: $\langle a|\hat{A}(t)|b\rangle = \langle a|\hat{U}^{-1}\hat{U}\hat{A}(t)\hat{U}^{-1}\hat{U}|b\rangle$, где $\hat{U}\hat{A}(t)\hat{U}^{-1} = \hat{A}$; т. е. $|b(t)\rangle = U(t)|b\rangle$. Этот оператор унитарен: $\hat{U}^+\hat{U} = \hat{1}$, т. к. должна сохраняться норма вектора состояния: $\langle b(t)|b(t)\rangle = \langle b|\hat{U}^+\hat{U}|b\rangle = 1$, и этот оператор удовлетворяет уравнению $i\hbar\dot{\hat{U}} = [\hat{H}, \hat{U}]$. (Мы будем помещать операторы в картине Гейзенберга явным указанием зависимости от времени $\hat{A}(t)$, а в картине Шредингера – нет; то же с векторами.) Тому же уравнению удовлетворяют вектора состояний (волновые функции) – уравнению Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a(t)\rangle = \hat{H}|a(t)\rangle. \quad (14)$$

7. Координатное и импульсное представления.

Волна де Броиля

При решении задач обычно необходимо выбрать некоторый базис в гильбертовом пространстве, по которому мы будем раскладывать волновую функцию. Обычно в качестве базиса выбирают собственные векторы какого-либо эрмитового оператора. Если выбрать собственные состояния оператора координаты: $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$, то говорят, что выбрано *координатное представление*, если импульса, $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$, то говорят об *импульсном представлении*.

Одним из главных следствий канонического квантования и коммутационного соотношения (10) является волновая функция в координатном представлении для частицы, имеющей определённый импульс, т. е. матричный элемент $\langle x | p \rangle$.

Для его вычисления поступим следующим образом. Сначала заметим, что

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle = i\hbar \langle x | x' \rangle = i\hbar \delta(x - x'). \quad (15)$$

С другой стороны,

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle = \langle x | \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} | x' \rangle = (x - x') \langle x | \hat{p} | x' \rangle. \quad (16)$$

Отсюда находим, что

$$\langle x | \hat{p} | x' \rangle = i\hbar \frac{\delta(x - x')}{x - x'}. \quad (17)$$

Последнее выражение есть обобщённая функция, которая может быть преобразована следующим образом

$$\begin{aligned} \int \psi(x') \frac{\delta(x - x')}{x - x'} dx' &= \int (\psi(x) + \psi'(x)(x - x') + \dots) \frac{\delta(x - x')}{x - x'} dx' = \\ &= - \int \psi'(x) \delta(x - x') dx' = -\psi'(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, матричный элемент (17) есть «производная» дельта функции:

$$\langle x | \hat{p} | x' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'). \quad (19)$$

Отметим, что полученное выражение может быть обобщено:

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{p} | \psi \rangle &= \langle x | \hat{p} \int dx' | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = \int dx' \langle x | \hat{p} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = \\ &= -i\hbar \int dx' \frac{\partial \delta(x - x')}{\partial x} \langle x' | \psi \rangle = -i\hbar \psi'(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь в последнем равенстве вместо $|\psi\rangle$ подставим $|p\rangle$:

$$\langle x | \hat{p} | p \rangle = -i\hbar \psi'_p(x). \quad (21)$$

С другой стороны,

$$\langle x | \hat{p} | p \rangle = p \langle x | p \rangle = p \psi'_p(x). \quad (22)$$

Из (21) и (22) получаем дифференциальное уравнение

$$\psi'_p(x) = ip\psi_p(x)/\hbar, \quad (23)$$

решая которое, получаем

$$\psi_p(x) = N \exp(ipx/\hbar). \quad (24)$$

Нормировочная константа N может быть получена из условия ортогональности:

$$\int dp \psi_p(x) \psi_p^*(x) = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle = \langle x | x' \rangle = \delta(x - x') \quad (25)$$

и интегрального представления дельта-функции:

$$\int dp \psi_p(x) \psi_p^*(x) = |N|^2 \int dp \exp(ip(x-x')/\hbar) = |N|^2 2\pi\hbar \delta(x-x'). \quad (26)$$

Выражая из (25) и (26) нормировочную константу, получаем координатное представление волны де Броиля:

$$\psi_p(x) = \frac{\exp(ipx/\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (27)$$

Отметим, что можно было бы вместо канонического коммутационного соотношения постулировать явный вид волны де Броиля и уже затем получить коммутационное соотношение (10).

8. Картина взаимодействия

Есть еще одно представление, его придумал Дирак. Это картина взаимодействия: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Идея крайне проста: когда зависимость от времени перекинута только на операторы \hat{H}_0 , а в \hat{V} зависимость от времени оставлена на векторах: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{V} |\psi(t)\rangle$.

9. Основные результаты лекции

Квантовая механика – это функциональный анализ в гильбертовом пространстве. В квантовой оптике она является рабочим инструментом описания взаимодействия квантованного электромагнитного поля с веществом.

10. Приложения

10.1. Фурье-образ δ -функции Дирака

Одним из наиболее употребляемых интегральных представлений δ -функции является ее фурье-преобразование:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = 2\pi \cdot \delta(k). \quad (28)$$

Простое доказательство этого соотношения основано на нехитром наблюдении:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi. \quad (29)$$

Доказать это можно так. Заметим, что

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} \exp(-xy) dy. \quad (30)$$

Отсюда искомый интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx &= \int_0^{\infty} \sin(x) dx \int_0^{\infty} \exp(-xy) dy = \\ &= \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \exp(-xy) \sin(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Доказать (29) можно иначе, используя ТФКП. Для этого вычислим интеграл $\oint \frac{e^{iz}}{z} dz$ по контуру, указанному на рис. 2.

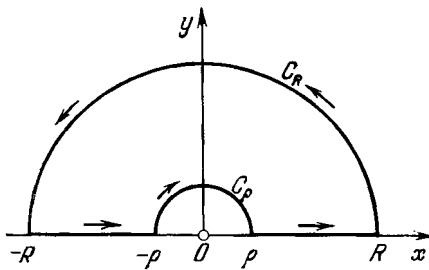


Рис. 2. Контур интегрирования

Он равен 0, поскольку внутри контура нет особых точек. Тогда $0 = i\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{e^{i\rho e^{i\varphi}} i\rho d\varphi e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} dx$, где «первый» интеграл понимается в смысле своего главного значения.

Теперь все просто, поскольку для любого k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kx)}{x} dx = 1, \quad (32)$$

подынтегральная функция стремится к $\delta(x)$ при $k \rightarrow \infty$. Вычислим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k e^{ikx} dx = 2\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kx)}{x}, \quad (33)$$

что мы и хотели доказать:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = 2\pi \cdot \delta(k). \quad (34)$$

10.2. Лемма Бейкера–Хаусдорфа

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A[A, B]] + \dots \quad (35)$$

Рассмотрим $C(\tau) = e^A B e^{-A}$, где τ – действительный параметр. Дифференцируем

$$\frac{dC}{d\tau} = [A, C(\tau)] \quad (36)$$

или, поскольку $C(0) = B$, получаем, что

$$C(\tau) = B + \int_0^{\tau} [A, C(\tau')] d\tau'. \quad (37)$$

Решаем это уравнение последовательными итерациями

$$c(\tau) = B + [A, B] \int_0^{\tau} d\tau' + [A[A, B]] \int_0^{\tau} \int_0^{\tau'} d\tau' d\tau'' + \dots \quad (38)$$

и учтываем, что «хронологический» интеграл составляет $\frac{1}{n!}$ часть объема n -мерного куба:

$$\int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \dots \int_0^{\tau^{(n-1)}} d\tau^{(n)} = \frac{\tau^n}{n!} \quad (39)$$

(что легко получить по индукции). Окончательно получаем

$$e^{A\tau} B e^{-A\tau} = B + \tau [A, B] + \frac{\tau^2}{2!} [A[A, B]] + \dots \quad (40)$$

Полагая здесь $\tau = 1$, получаем лемму Бейкера–Хаусдорфа.

10.3. Теорема Бейкера–Хаусдорфа

Если $[A, B]$ коммутирует как с A , так и с B , то есть $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, то

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A,B]}. \quad (41)$$

Это верно, в частности, когда $[A, B]$ есть c -число.

Рассмотрим $C(\tau) = e^{A\tau} e^{B\tau}$, где τ – действительный параметр:

$$\frac{dC}{d\tau} = (A + e^{A\tau} B e^{-A\tau}) C = (A + B + [A, B]\tau) C. \quad (42)$$

Здесь мы воспользовались леммой, и тем, что $[A[A, B]] = 0$. Поскольку, кроме того и $[B[A, B]] = 0$, мы можем проинтегрировать наше соотношение, как будто все входящие в него коэффициенты есть просто c -числа. С учетом $C(0) = 1$, получаем

$$e^{A\tau} e^{B\tau} = e^{(A+B)\tau} e^{\frac{1}{2}[A,B]\tau^2}, \quad (43)$$

что при $\tau = 1$ дает исходное утверждение.

Контрольные вопросы

1. В каком диапазоне электромагнитных волн работает квантовая оптика?
2. Как описывается состояние физической системы в квантовой механике?
3. Записать соотношение ассоциативности.
4. Записать соотношение коммутативности.
5. Записать свойства скалярного произведения.
6. Сформулировать процедуру квантования.
7. Записать уравнение Шредингера.

8. Записать уравнения Гейзенберга.
9. В чем отличие подходов Гейзенберга и Шредингера?
10. Записать уравнение Шредингера в представлении взаимодействия.

Задачи

При изучении наук примеры важнее общих правил.
Сэр Исаак Ньютона

Вычислить

1. $\left(\frac{d}{dx}\right)^+, \left(x\frac{d}{dx}\right)^+.$
2. $(\hat{A}\hat{B})^+, (\hat{A}^+)^+, (|a\rangle\langle b|)^+.$

Вычислить интегралы

3. $\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

4. Доказать, что

$$e^{\lambda A} B^n e^{-\lambda A} = (e^{\lambda A} B e^{-\lambda A})^n, \quad e^{\lambda A} f(B) e^{-\lambda A} = f(e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}).$$

5. Доказать, что $AB^n A^{-1} = (ABA^{-1})^n$ и, следовательно,

$$Af(B)A^{-1} = f(ABA^{-1}) \text{ и } Ae^B A^{-1} = \exp(ABA^{-1}).$$

6. Доказать, что любой оператор \hat{C} можно представить в виде $\hat{C} = \hat{A} + i\hat{B}$, где \hat{A}, \hat{B} эрмитовы.

7. Доказать, что если \hat{A} эрмитов, то $\exp(i\hat{A})$ унитарна.

8. Доказать, что если \hat{A}, \hat{B} эрмитовы, то $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, где \hat{C} эрмитов.

9. Доказать, что произведение двух эрмитовых операторов $\hat{A}\hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$ всегда можно представить как сумму эрмитового: \hat{C} и антиэрмитового: \hat{D} ($\hat{D}^+ = -\hat{D}$) операторов. Найти \hat{C} и \hat{D} .

10. Используя коммутатор $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, показать, что $[\hat{x}, \hat{p}^n] = i\hbar \cdot n\hat{p}^{n-1}$,

$$[\hat{x}, F(\hat{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial \hat{p}}, \quad [\hat{p}, \hat{x}^n] = -i\hbar \cdot n\hat{x}^{n-1}, \quad [\hat{p}, Q(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial Q}{\partial \hat{x}},$$

$$[\hat{x}, \hat{p}^2 F(\hat{x})] = 2i\hbar \hat{p} F(\hat{x}), \quad [\hat{x}, \hat{p} F(\hat{x}) \hat{p}] = i\hbar (\hat{p} F(\hat{x}) + F(\hat{x}) \hat{p}),$$

$$[\hat{x}, F(\hat{x})\hat{p}^2] = 2i\hbar F(\hat{x})\hat{p}, [\hat{p}, \hat{p}^2 F(\hat{x})] = -i\hbar \hat{p}^2 F'(\hat{x}),$$

$$[\hat{p}, \hat{p}F(\hat{x})\hat{p}] = -i\hbar \cdot \hat{p}F'(\hat{x})\hat{p}, [\hat{p}, F(\hat{x})\hat{p}^2] = -i\hbar \cdot F'(\hat{x})\hat{p}^2.$$

11. Вычислить скобки Пуассона: $\{x, H\}_p, \{p, H\}_p$, где $H = H(x, p)$.

12. Используя коммутатор: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ и базис: $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$,

$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$, доказать, что $\langle x|p\rangle = (2\pi)^{-1}e^{ipx}$, $\langle x|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x')$.

13. Разложить $(\hat{A} - \varepsilon \hat{B})^{-1}$ в ряд по малому параметру $\varepsilon \ll 1$.

14. Показать, что фурье-образ δ -функции Дирака равен $2\pi\delta(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx$.

15. Доказать лемму и теорему Бейкера–Хаусдорфа.

16. Доказать, что $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.

17. Используя 16, доказать, что $[\hat{A}, \hat{B}^n] = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{B}^k [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{n-k-1}$ (повторным применением 16).

18. Доказать тождество Якоби: $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$.

19. Доказать, что $e^{\lambda \hat{A}} e^{-\lambda \hat{A}} = \hat{I}$.

20. Решить уравнение $x \cdot y(x) = \delta(x)$.

21. Доказать, что $Sp|u\rangle\langle v| = \langle v|u\rangle$.

22. Доказать, что $\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda A} = A e^{\lambda A}$, $\frac{d}{d\lambda} (AB) = \frac{dA}{d\lambda} B + A \frac{dB}{d\lambda}$,

$$\frac{d}{d\lambda} A^{-1} = -A^{-1} \frac{dA}{d\lambda} A^{-1}.$$

Литература

1. *Louisell W.H.* Quantum Statistical Properties of Radiation. – New York: John Wiley & Sons, 1973. – 528 p.
2. *Mandel L., Wolf E.* Optical coherence and quantum optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 1166 p.
3. *Schleich W.P.* Quantum optics in phase space. – Weinheim: Wiley-VCH, 2001. – 695 p.
4. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 2. Квантование электромагнитного поля

Всё стоящее уже давно придумано, надо только не бояться попробовать придумать это ещё раз.

Иоганн Вольфганг Гёте

1. Квантование гармонического осциллятора

Прежде чем приступить к квантованию электромагнитного поля, напомним решение задачи о квантовании одномерного гармонического осциллятора. Его гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{q}^2}{2}. \quad (1)$$

После введения размерных констант координаты: $q_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$, импульса: $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$ и энергии: $H_0 = \hbar\omega$, обезразмеренный гамильтониан примет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\hat{q}^2}{2}. \quad (2)$$

Процедура квантования аналогична той, что мы использовали в лекции 1, а именно нужно заменить скобку Пуассона на коммутатор операторов $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Далее необходимо найти собственные состояния гамильтониана $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ (*фоковские состояния*). Для этого вводятся операторы \hat{a}^+ и \hat{a} , которые выражаются через обезразмеренные координату и импульс как $\hat{a} = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2}$, $\hat{a}^+ = (\hat{q} - i\hat{p})/\sqrt{2}$. Их действие на фоковские состояния следующее $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Из этого следует, что n целые неотрицательные значения $0, 1, 2, \dots$, а собственная энергия гамильтониана имеет вид $E_n = n + 1/2$.

Отметим, что фоковские состояния не всегда удобны для анализа, поскольку не описывают переход к классическому осциллятору. Действительно, средние значения координаты и импульса в этих состояниях равны нулю: $\langle n|\hat{q}|n\rangle = \langle n|\hat{p}|n\rangle = 0$, а неопределённость координаты и импульса: $\Delta q \Delta p = (2n+1)/4$, т. е. увеличивается с увеличением энергии

фоковского состояния. Для адекватного перехода к классическому осциллятору необходимо ввести *когерентные (глауберовы) состояния*.

2. Когерентные (глауберовы) состояния

Помимо фоковских $|N\rangle$ у осциллятора имеются еще *глауберовы* $|z\rangle$ состояния, волшебные свойства которых мы изучим позднее. А сейчас рассмотрим их формальные характеристики. Это собственные вектора оператора уничтожения:

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \quad (3)$$

а соответствующие им собственные значения можно найти следующим образом. Будем искать в виде разложения по фоковскому базису: $|z\rangle = \sum_N \langle N|z\rangle |N\rangle$, пользуясь его полнотой. Тогда $\langle N|\hat{a}|z\rangle = z\langle N|z\rangle$,

откуда, используя $\langle N|\hat{a}|z\rangle = \sqrt{N+1}\langle N+1|z\rangle$, получаем рекуррентное соотношение

$$\langle N+1|z\rangle = \frac{z}{\sqrt{N+1}}\langle N|z\rangle, \quad (4)$$

т. е.

$$\langle N|z\rangle = \frac{z^N}{\sqrt{N!}}\langle 0|z\rangle \quad (5)$$

и значит

$$|z\rangle = \langle 0|z\rangle \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle. \quad (6)$$

Множитель $\langle 0|z\rangle$ фактически является нормировочным. Из $\langle z|z\rangle = 1$ находим

$$\langle z|z\rangle = |\langle 0|z\rangle|^2 \sum_N \sum_M \frac{z^{N+M}}{\sqrt{N!M!}} \langle M|N\rangle = \sum_N \frac{z^{2N}}{N!} = \dots = e^{z^2}, \quad (7)$$

где $\langle M|N\rangle = \delta_{MN}$.

Таким образом, нормированное когерентное состояние – это вектор:

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_N \frac{z^N}{N!} |N\rangle. \quad (8)$$

Этот вектор является собственным при любом комплексном z . Спектр \hat{a} занимает всю комплексную плоскость. Это неудивительно, так как \hat{a} неэрмитов. С этим же обстоятельством связана неортогональность $|z\rangle$:

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = e^{-\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2}} \sum_{M,N} \frac{z_1^M z_2^N}{\sqrt{M!N!}} \langle M | N \rangle = e^{-\frac{|z_1 - z_2|^2}{2}}. \quad (9)$$

Видно, что только при $|z_1 - z_2| \gg 1$ они ортогональны. В отличии от собственных векторов эрмитовых операторов, собственные вектора a принадлежат непрерывному спектру, но имеют конечную норму. Их базис переопределен.

3. Свойства когерентных состояний

1. Когерентное состояние не расплывается в фазовом пространстве.

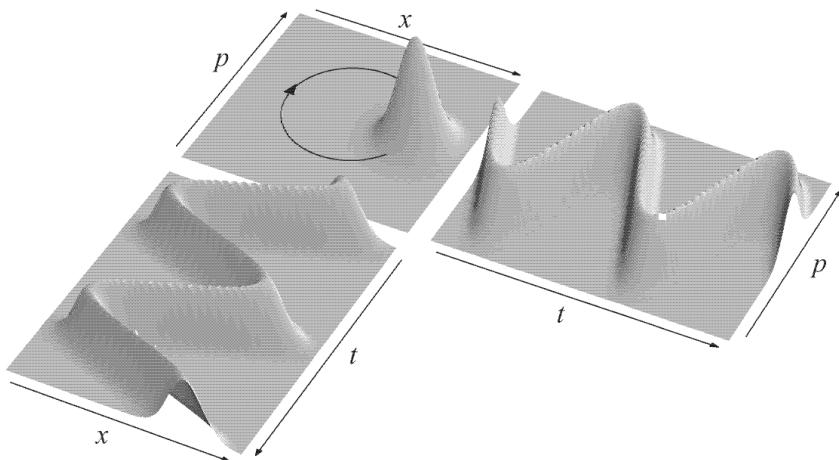


Рис. 3. Динамика когерентного состояния в фазовом пространстве

2. Если поле находится в когерентном состоянии, то минимизируется соотношение неопределённостей.
3. Выполняется соотношение $\left(\overline{\Delta N^2}\right)_{\text{когер}} = \overline{N}$, тогда как для теплового шума $\left(\overline{\Delta N^2}\right)_{\text{менз}} = \overline{N} + \overline{N}^2$.

4. В базисе когерентных состояний возможен переход от операторов к c -числам.

4. Квантование электромагнитного поля в резонаторе

Мы рассмотрим самый простой случай электромагнитного поля – единственную моду закрытого прямоугольного резонатора (МР) длиной L и объемом V . Это нужно для того, чтобы выявить суть квантования электромагнитного поля не отвлекаясь на геометрические подробности, упростив устройство мод свободного пространства и т. д.

Поле в пустом резонаторе (без вещества и токов) описывается уравнениями Максвелла в свободном пространстве:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (13)$$

Итак, наш резонатор имеет длину L вдоль оси z и плоские стенки в плоскостях $(x, y, 0)$ и (x, y, L) . Рассмотрим сначала МР с электрическим полем, линейно поляризованным вдоль оси x , и зависящим только от z . Поскольку уравнения Максвелла линейны, вторую поляризацию можно потом рассмотреть независимо. Из (12), (13) видно, что продольных компонент у \mathbf{E} и \mathbf{B} нет, МР поперечна: $E_z = B_z = 0$. Кроме того, поле \mathbf{B} поляризовано строго вдоль y , т. е. $\mathbf{E} = (E_x(z, t), 0, 0)$ и $\mathbf{B} = (0, B_y(z, t), 0)$.

Тогда (12), (13) приобретают вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (14)$$

$$c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем для E_x волновое уравнение $c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$. Решать его будем методом разделения переменных.

Представим электрическое поле в виде $E_x(z, t) = E_0(t)f(z)$. Такая подстановка в волновое уравнение даёт

$$E_0(t)f''(z) - \ddot{E}_0(t)f(z)/c^2 = 0, \quad (16)$$

откуда получаем

$$\ddot{E}_0(t)/E_0(t) = c^2 f''(z)/f(z) = \text{const} \equiv -\omega^2, \quad (17)$$

потому что обе части уравнения зависят от разных аргументов и могут быть равны только в том случае, если равны константе. Здесь мы предположили, что эта константа отрицательна. Тогда

$$f(z) = C_1 \sin(\omega z) + C_2 \cos(\omega z). \quad (18)$$

Граничное условие для поля – равенство нулю тангенциальной компоненты электрического поля на стенах резонатора, т. е. $E_x(0, t) = E_x(L, t) = 0$. Это даёт $C_2 = 0$ и $\omega \equiv \omega_m = \pi nc/L$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Здесь ω_m – частота МР, принимающая дискретные значения. Отметим, что если бы мы взяли константу положительной, то получившееся решение было бы суммой двух действительных экспонент и имело бы только один нуль. Это является отражением общей теоремы о том, что все собственные значения оператора Лапласа являются отрицательными. Таким образом электрическое поле представляется в виде дискретных мод резонатора:

$$E_x^n(z, t) = E_0^n(t) \sin(\omega_n z/c). \quad (19)$$

Из уравнения (19) видно, что координатная часть магнитного поля есть $\cos(\omega_n z/c)$, поэтому его можно записать в виде

$$B_x^n(z, t) = B_0^n(t) \cos(\omega_n z/c). \quad (20)$$

Все константы интегрирования мы оставили в размерных множителях $E_0^n(t)$ и $B_0^n(t)$.

Теперь вычислим энергию ЭМ поля в резонаторе:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int dV \left[\frac{E_x^2}{2} + \frac{B_y^2}{2} \right] = \sum_n \frac{V}{8\pi} \left(\frac{(E_0^n(t))^2}{2} + \frac{(B_0^n(t))^2}{2} \right). \quad (21)$$

Вводя размерное значение энергии каждой моды в виде $H_o^{(n)} = \hbar\omega_n$, получаем обезразмеренную энергию в виде

$$H = \sum_n \frac{V}{8\pi\hbar\omega_n} \left(\frac{(E_0^n(t))^2}{2} + \frac{(B_0^n(t))^2}{2} \right) = \sum_n \left(\frac{q_n^2(t)}{2} + \frac{p_n^2(t)}{2} \right), \quad (22)$$

где мы ввели безразмерные электрическое и магнитное поля:

$$q_n(t) = E_0^n(t) \sqrt{\frac{V}{8\pi\hbar\omega_n}}, \quad (23)$$

$$p_n(t) = B_0^n(t) \sqrt{\frac{V}{8\pi\hbar\omega_n}}, \quad (24)$$

которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\dot{q}_n(t) = \omega_n p_n(t), \quad (25)$$

$$\dot{p}_n(t) = -\omega_n q_n(t). \quad (26)$$

Видно, что для электрического и магнитного полей мы получили гамильтониан гармонического осциллятора (2), из которого формально следуют уравнения Гамильтона. Эти два факта позволяют воспользоваться процедурой квантования, развитой для гармонического осциллятора. Отметим, что на данном этапе мы должны постулировать коммутационное соотношение для обезразмеренных электрического и магнитного полей. Само коммутационное соотношение ниоткуда не следует и обоснованием ему служит только эксперимент.

Итак, мы выяснили, что гамильтониан МР – это гамильтониан гармонического осциллятора с частотой ω , а $p = \dot{q}$ играет роль канонического импульса «частицы» осциллятора единичной массы. Таким образом, моды ЭМ поля – это осцилляторы, причем электрическое и магнитное поля играют роль канонических координаты и импульса. После канонического квантования они превращаются в операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. Квантами возбуждения МР являются фотоны МР, операторы рождения: $\hat{a}^+ = (\hat{q} - i\hat{p})$ и уничтожения: $\hat{a} = (\hat{q} + i\hat{p})$ которых удовлетворяют коммутационному соотношению: $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$. Тогда гамильтониан МР есть $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$, а состояниями поля МР являются векторы $|N\rangle$, соответствующие N фотонам в МР: $\hat{a}^+ \hat{a} |N\rangle = N |N\rangle$. Рассмотрим это подробнее.

При очень большом числе фотонов в МР, $N \gg 1$, поле становится классическим. Тогда операторы рождения и уничтожения становятся c -числами $\hat{a}^+ \approx \hat{a} \approx \sqrt{N}$, а электрическое поле – также классическим c -числом. Из (22) видно правило соответствия величины классического поля N -фотонному состоянию:

$$E_{\text{class}} = 2\sqrt{N}\epsilon_0; \quad B_{\text{class}} = 2i\sqrt{N}\mathcal{B}_0. \quad (27)$$

Электрическому и магнитному полям МР тогда соответствуют операторы:

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0(\hat{a}^+ + \hat{a}) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right), \quad (28)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = i\mathcal{B}_0(\hat{a}^+ - \hat{a}) \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right), \quad (29)$$

где $\mathcal{E}_0 = \mathcal{B}_0 = \left(\frac{4\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}$ – электрическое и магнитное поля «на один фотон».

5. Квантование электромагнитного поля тел произвольной формы

Обобщим полученную схему на резонаторы произвольной формы. Для этого введём понятие функции Грина. Пусть дано линейное уравнение

$$\hat{\mathcal{L}}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (30)$$

Функцией Грина данного уравнения называют решение уравнения

$$\hat{\mathcal{L}}\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \tilde{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (31)$$

Если решение уравнения (31) известно, то решение уравнения (30) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{B}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (32)$$

Электрическое и магнитное поля выражаются через скалярный и векторный потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \varphi(\mathbf{r}, t), \quad (33)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) . \quad (34)$$

Представим все величины в виде интеграла фурье по частотам:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) . \quad (35)$$

Тогда уравнения перепишутся в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) - \nabla \varphi(\mathbf{r}, \omega) , \quad (36)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) . \quad (37)$$

Подставляя эти соотношения во второе уравнение Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) , \quad (38)$$

получаем

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon (i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) - \nabla \varphi(\mathbf{r}, \omega)) . \quad (39)$$

Используя соотношение $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla - \Delta$ и обобщённую лоренцевскую калибровку:

$$\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \varphi(\mathbf{r}, \omega) = 0 , \quad (40)$$

получаем

$$(\Delta + k^2) \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) , \quad (41)$$

и аналогично для скалярного потенциала

$$(\Delta + k^2) \varphi(\mathbf{r}, \omega) = -\rho(\mathbf{r}, \omega) / \varepsilon_0 \varepsilon . \quad (42)$$

Решением этого уравнения будет

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}' , \quad (43)$$

где скалярная функция Грина $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (44)$$

При этом электрическое и магнитное поля будут иметь вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mu \mu_0 \int \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = E_0 \mathbf{f}_E(\mathbf{r}) , \quad (45)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int [\nabla \times \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = H_0 \mathbf{f}_H(\mathbf{r}) , \quad (46)$$

где диадная функция Грина определяется как

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[\tilde{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \otimes \nabla \right] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (47)$$

Отметим, что уравнения (41) – (42) являются обобщением волновых уравнений (14) – (15) на случай произвольной среды. В (41) – (42) явно выделены размерные константы: E_0 и H_0 , а пространственная зависимость полей находится в функциях: $\mathbf{f}_E(\mathbf{r})$ и $\mathbf{f}_H(\mathbf{r})$, которые предполагаются ортонормированными:

$$\int \mathbf{f}_{E,n}(\mathbf{r}) \mathbf{f}_{E,m}^*(\mathbf{r}) dV = V \delta_{n,m}, \quad \int \mathbf{f}_{H,n}(\mathbf{r}) \mathbf{f}_{H,m}^*(\mathbf{r}) dV = V \delta_{n,m}.$$

Отметим, что размерные константы E_0 и H_0 не определены, как и должно быть, поскольку собственные моды определены с точностью до константы.

Выражения (41) – (42) определяют пространственное распределение поля. Зная их, можно определить «объём моды»:

$$V_{CM} = \frac{\int |\mathbf{f}|^2 dV}{\max |\mathbf{f}|^2}. \quad (48)$$

Видно, что чем более неравномерно распределено поле, чем сильнее оно локализовано в некоторой области пространства, тем объём моды меньше.

Для определения поля на «один фотон» необходимо воспользоваться выражением для энергии диспергирующей слабодиссипативной среды:

$$W = \frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \varepsilon \omega}{\partial \omega} |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 / \mu_0 \right) dV. \quad (49)$$

Поле «на один фотон» тогда определится как амплитуда, энергия которой равна $\hbar \omega_{CM}$:

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{CM}}{\varepsilon_0 \int \frac{\partial \varepsilon \omega}{\partial \omega} |\mathbf{f}_E|^2 dV}}, \quad \mathcal{H}_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{CM} \mu_0}{\int |\mathbf{f}_H|^2 dV}}. \quad (50)$$

Константы \mathcal{E}_0 и \mathcal{H}_0 выбраны таким образом, чтобы энергии квантов электрического и магнитного полей были одинаковыми и равными $\hbar \omega_{CM} / 2$, как потенциальная и кинетическая энергии в гармоническом осцилляторе. Они аналогичны введенным в предыдущем параграфе полям «на один фотон».

Отметим, что для того, чтобы уравнения для определения квантов полей в среде были замкнутыми, необходимо определить связь между $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\varepsilon(\mathbf{r})$.

Контрольные вопросы

1. Записать энергию электромагнитного поля в резонаторе.
2. Сравнить полученное выражение с гамильтонианом гармонического осциллятора.
3. Привести выражения для значений электромагнитного поля «на один фотон».
4. Как обобщается схема квантования поля на случай тел произвольной формы?
5. Запишите выражение для объёма моды.
6. Получите разложение когерентного состояния в базисе фоковских состояний осциллятора.
7. Запишите то свойство когерентного состояния, которое выделяет его среди всех остальных состояний осциллятора.

Задачи

1. Используя коммутатор $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ покажите, что $\hat{a}^+ \hat{a} |N\rangle = N |N\rangle$, где $N = 0, 1, 2, \dots$ – целое число, т. е. спектр его ограничен снизу. Покажите, что $\hat{a} |N\rangle = \sqrt{N} |N-1\rangle$, и $\hat{a}^+ |N\rangle = \sqrt{N+1} |N+1\rangle$.

2. Для гармонического осциллятора $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$, $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$,

найдите операторы рождения $\hat{a}^+(t)$ и уничтожения $\hat{a}(t)$ в гейзенберговском представлении.

3. Вычислите: $[\hat{a}, f(\hat{a}^+)]$ и $[\hat{a}^+, f(\hat{a})]$.

Докажите, что

$$4. [\hat{a}^\dagger \hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^m] = m(\hat{a}^\dagger)^m, [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^m] = -m\hat{a}^m.$$

$$5. e^{\lambda \hat{a}} (\hat{a}^\dagger)^m = (\hat{a}^\dagger + \lambda)^m e^{\lambda \hat{a}}, e^{\lambda \hat{a}} \hat{a}^m = (\hat{a} - \lambda)^m e^{\lambda \hat{a}}.$$

$$6. [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger l}] = l \hat{a}^{\dagger(l-1)}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^l] = -l \hat{a}^{l-1}.$$

$$7. \text{A)} e^{\lambda \hat{a}} |0\rangle = |0\rangle, \text{Б)} e^{\lambda \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

8. $e^{\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} |n\rangle\langle n|$.
9. $[\hat{a}, f(\hat{a}^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial \hat{a}^\dagger}$, $[\hat{a}^\dagger, f(\hat{a})] = -\frac{\partial f}{\partial \hat{a}}$.
10. Для когерентного состояния $|z\rangle$ показать, что $\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$. Найти $\hat{a}^+|z\rangle$. Показать, что собственные вектора оператора рождения не нормируются.
11. Вычислить квантовые флуктуации когерентных состояний и тепловых состояний с заданным \bar{N} .
12. Показать, что для когерентных состояний $\langle x \rangle \sim \cos(\omega t)$, $\langle p \rangle \sim \sin(\omega t)$ и волновой пакет не расплывается.
13. Вычислить среднюю амплитуду электрического поля излучения настольной лампы и лабораторного лазера.

Литература

1. *Fox M.* Quantum Optics: An Introduction. – Oxford: Oxford University Press, 2006. – 378 p.
2. *Loudon R.* The quantum theory of light. – Oxford: Oxford University Press, 2000. – 438 p.
3. *Mandel L., Wolf E.* Optical coherence and quantum optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 1166 p.
4. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 3. Квантование ДУС. Взаимодействие ДУС с классическим электромагнитным полем

Природа с красоты своей
Покрова снять не позволяет,
И ты машинами не вынудишь у ней,
Чего твой дух не угадает.
В.С. Соловьев, 1872

Введение

Базис двухуровневой системы состоит всего из двух векторов: $|g\rangle$ и $|e\rangle$ с условием ортогональности: $\langle e|e\rangle=1=\langle g|g\rangle$ и с условием полноты: $|e\rangle\langle e|+|g\rangle\langle g|=1$, что сильно упрощает анализ. Тогда гамильтониан ДУС: $\hat{H}=E_e|e\rangle\langle e|+E_g|g\rangle\langle g|$ можно представить в виде

$$\hat{H}=\hbar\omega\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}+E_g, \quad (1)$$

где для удобства введены частота перехода ДУС: $\hbar\omega=E_e-E_g$ и операторы перехода (матрицы Паули): $\hat{\sigma}=|g\rangle\langle e|$, $\hat{\sigma}^+=|e\rangle\langle g|$. В дальнейшем константу в (1) будем опускать, считая, что энергия отсчитывается от E_g .

Кроме того, нам понадобится оператор дипольного момента (поляризации) ДУС: $\hat{\mathbf{d}}=e\hat{\mathbf{r}}$.

1. Модель ДУС – полезная абстракция

Свет излучается и поглощается атомами, так что взаимодействие квантованного ЭМ поля и атома представляет собой одну из фундаментальных проблем квантовой оптики. Однако реальные атомы являются сложными системами, и даже простейшая из них – атом водорода, имеет сложную структуру энергетических уровней. Поэтому, как правило, при решении конкретных задач часто необходимо или желательно аппроксимировать поведение реального атома поведением намного более простой

квантовой системы. Зачастую при взаимодействии с электромагнитным полем только два атомных энергетических уровня играют существенную роль. Поэтому стало обычным в теоретических рассмотрениях использовать упрощенную модель атома как квантовой системы, имеющей только два уровня собственного энергетического состояния (ДУС). Эта удобная абстракция является наиболее элементарной квантовой системой, адекватно описывающей взаимодействие, использование которой существенно упрощает рассмотрение [1].

Для простоты дальнейшего анализа будем полагать далее, что состояния ДУС $|e\rangle$ и $|g\rangle$ обладают противоположной четностью. Сразу оговоримся, если это не так (например, эти состояния не обладают определенной четностью), то результаты косвенно останутся верными, просто выкладки будут сложнее. Рассмотрим оператор четности, действие которого определяется как

$$\forall |\psi\rangle : \langle r|\hat{P}|\psi\rangle = \langle -r|\psi\rangle. \quad (2)$$

Очевидно, что $\hat{P}^2 = \hat{I}$ и собственные значения оператора $P = \pm 1$, т. е. существуют четные $\hat{P}|\psi_+\rangle = +|\psi_+\rangle$ и нечетные $\hat{P}|\psi_-\rangle = -|\psi_-\rangle$ функции. Кроме того ясно, что верны также следующие соотношения: $\hat{P}^2 = \hat{P}\hat{P}^{-1} = \hat{P}\hat{P}^+ = \hat{I}$, а соотношение $\hat{P}\mathbf{r} + \mathbf{r}\hat{P} = 0$ проверяется непосредственно:

$$\hat{P}\mathbf{r}|\psi\rangle - \mathbf{r}\hat{P}|\psi\rangle = -\mathbf{r}\langle -r|\psi\rangle + \mathbf{r}\langle -r|\psi\rangle = 0. \quad (3)$$

Теперь все готово, чтобы вычислить диагональные матричные элементы дипольного момента электрона ДУС. При любой ± 1 четности $|e\rangle$:

$$\langle e|\mathbf{r}|e\rangle = \langle e|\hat{P}^+ \hat{P}\mathbf{r}\hat{P}^+ \hat{P}|e\rangle = (\pm 1)^2 \langle e|\hat{P}\mathbf{r}\hat{P}^+|e\rangle = \langle e|\mathbf{r}|e\rangle. \quad (4)$$

Таким образом, диагональные элементы дипольного момента в состояниях с определенной четностью всегда равны нулю [2]. (А вот если четность не определена, то могут быть и ненулевые элементы!)

Итак, матричные элементы дипольного момента имеют отличные от нуля элементы только для переходов между состояниями с различной четностью. Поэтому все диагональные элементы всегда равны нулю. Другими словами, равны нулю средние значения дипольного момента любой системы частиц в стационарных состояниях. Подчеркнем, что речь идет о замкнутой системе частиц или о системе частиц в центрально-симметричном поле (например, это атом, но не молекула). В этом случае гамильтониан коммутирует с \hat{P} , и его стационарные состояния обладают

определенной четностью. Иная ситуация имеет место, если есть дополнительное (случайное) вырождение уровня энергии системы, помимо вырождения по направлению полного момента. Например, это атом водорода. Тогда можно составить такие волновые функции стационарных состояний, которые не обладают определенной четностью. В таких состояниях диагональные дипольного момента не равны нулю, т. е. система имеет дипольный момент.

Вычислим теперь оператор дипольного момента ДУС: $\hat{\mathbf{d}} = e\hat{\mathbf{r}}$; для этого умножим $e\hat{\mathbf{r}}$ слева и справа на разложение единицы $|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = 1$. Тогда, с учетом равенства нулю диагональных элементов $\mathbf{d}_{ee} = \mathbf{d}_{gg} = 0$, получаем

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_{eg}\hat{\sigma}^+ + \mathbf{d}_{ge}\hat{\sigma}^- , \quad (5)$$

где $d_{eg} = \langle e | e\hat{\mathbf{r}} | g \rangle$ – дипольный момент перехода электрона с зарядом e из верхнего в нижнее состояние ДУС. Без ограничения общности можно считать d_{eg} действительной величиной, так что

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_{eg}(\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-) . \quad (6)$$

2. Взаимодействие ДУС с классическим электромагнитным полем. Осцилляции Раби. Резонансное взаимодействие атома со светом

Теперь все готово для того, чтобы записать оператор взаимодействия ДУС с классическим электромагнитным полем. Для оптического диапазона характерна ситуация, когда длина волны излучения значительно превосходит размер ДУС (атома или квантовой точки). Это позволяет записать оператор их взаимодействия в дипольном приближении:

$$\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E}(t) , \quad (7)$$

где $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_{MP}t)$ – электрическое поле оптической волны, которая в данной полуклассической постановке играет роль МР. Подставляя сюда выражение для оператора дипольного момента и вводя для удобства частоту Раби: $\Omega_R = \mathbf{d}_{eg} \frac{\mathbf{E}_0}{\hbar}$, получаем $\hat{V} = \hbar\omega \cos(\omega_{MP}t)(\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-)$. Теперь все готово, чтобы исследовать динамику взаимодействия ДУС с волной.

Будем решать задачу в картине Шредингера. Уравнение Шредингера для волновой функции ДУС $|\psi\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}) |\psi\rangle, \quad (8)$$

где $\hat{H}_0 = (E_e - E_g) \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma} + E_g = (E_e - E_g) \hat{\sigma}_z$ – свободный гамильтониан ДУС. В нашем базисе волновая функция ДУС имеет вид

$$|\psi\rangle = C_e(t)|e\rangle + C_g(t)|g\rangle. \quad (9)$$

Если бы взаимодействие отсутствовало, $V = 0$, то уравнения амплитуд

$$\begin{aligned} \dot{C}_e &= -iE_e \hbar^{-1} C_e, \\ \dot{C}_g &= -iE_g \hbar^{-1} C_g \end{aligned} \quad (10)$$

имели бы решение:

$$\begin{aligned} C_e(t) &= c_e e^{-i\hbar^{-1} E_e t}, \\ C_g(t) &= c_g e^{-i\hbar^{-1} E_g t} \end{aligned} \quad (11)$$

с постоянными c_e , c_g – комплексными числами.

Такой простой вид амплитуд обусловлен тем, что гамильтониан ДУС «в темноте» не зависит явно от времени. Теперь включаем наше гармоническое взаимодействие. Стандартный метод решения таков: будем искать решение $|\psi\rangle$ в том же виде, но с медленно меняющимися амплитудами $c_e(t)$, $c_g(t)$. В теории дифференциальных уравнений он называется *методом вариации постоянных (метод переменных коэффициентов)*, а в квантовой механике – *представлением взаимодействия*. Для медленно меняющихся амплитуд получаем

$$\begin{aligned} \dot{c}_e &= \frac{i\Omega_R}{2} \left[e^{-i(\omega_{MP} - \omega_{ДУС})t} + e^{+i(\omega_{MP} + \omega_{ДУС})t} \right] c_g, \\ \dot{c}_g &= \frac{i\Omega_R}{2} \left[e^{+i(\omega_{MP} - \omega_{ДУС})t} + e^{-i(\omega_{MP} + \omega_{ДУС})t} \right] c_e. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти уравнения не могут быть решены точно, однако, в этом и нет необходимости. Поскольку взаимодействие ДУС с оптической волной носит резонансный характер, $|\omega_{MP} - \omega_{ДУС}| \ll \omega_{MP} + \omega_{ДУС}$, то возможно

пренебрежение быстро осциллирующими слагаемыми, изменяющимися с удвоенной частотой. Такое приближение называется «*приближением вращающейся волны*». Этот термин происходит из теории магнитного резонанса, где быстро осциллирующие слагаемые отсутствуют, если возмущение имеет вид циркулярно поляризованной волны.

Теперь уравнения упрощаются:

$$\begin{aligned}\dot{c}_e &= \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\Delta t} c_g, \\ \dot{c}_g &= \frac{i\Omega_R}{2} e^{+i\Delta t} c_e,\end{aligned}\tag{13}$$

но все еще остаются уравнениями с переменными коэффициентами. Здесь расстройка $\Delta = \omega_{MP} - \omega_{DUC}$. Помогает простая замена: $c_g e^{\frac{-i\Delta t}{2}} = B_g$, $c_e e^{\frac{+i\Delta t}{2}} = B_e$. Теперь получается система уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\dot{B}_e &= +\frac{i\Delta}{2} B_e + \frac{i\Omega_R}{2} B_g, \\ \dot{B}_g &= -\frac{i\Delta}{2} B_g + \frac{i\Omega_R}{2} B_e,\end{aligned}\tag{14}$$

которая может быть решена стандартными методами. Находим собственное значение

$$\begin{vmatrix} \frac{i\Delta}{2} - \lambda & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & -\frac{i\Delta}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0,\tag{15}$$

$\lambda = \pm \frac{i\Omega}{2}$, где $\Omega^2 = \Omega_R^2 + \Delta^2$ – частота Раби с учетом расстройки.

Собственные вектора таковы, что общее решение есть

$$\begin{pmatrix} B_e \\ B_g \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Omega - \Delta}{\Omega_R} \end{pmatrix} e^{\frac{i\Omega t}{2}} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\Delta + \Omega}{\Omega_R} \end{pmatrix} e^{-\frac{i\Omega t}{2}}.\tag{16}$$

Например, если $c_e(0) = 0$, $c_g(0) = 1$ в начальный момент ДУС была полностью возбуждена, то медленные амплитуды изменяются так

$$\begin{aligned} c_e(t) &= \frac{i\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{-\frac{i\Delta t}{2}}, \\ c_g(t) &= \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{\frac{i\Delta t}{2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что сумма вероятностей нахождения ДУС в возбужденном и основном состояниях $|c_g^2(t)| + |c_e^2(t)| = 1$. Теперь понятен физический смысл выражения осцилляций Раби и магнитный резонанс. Под действием световой волны, первоначально невозбужденная ДУС начинает переходить в возбужденное состояние с вероятностью, медленно осциллирующей с частотой Раби Ω . Максимальная амплитуда этих осцилляций вероятности равна $\frac{\Omega_R^2}{\Omega^2}$, т. е. достигает 1 в резонансе $\Delta = 0$. Вне резонанса она мала, поскольку частота Раби имеет микроволновой порядок величин: $\Omega_R \ll \omega_{MP}, \omega_{ДУС}$.

3. Классическая теория восприимчивости (поляризуемости) ДУС

Дадим несколько определений.

$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ – поляризация единицы объема \sim диэлектрической восприимчивости χ , а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1 + \chi$.

$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$ – поляризация (дипольный момент) одной ДУС, где α -поляризуемость ДУС.

Рассмотрим сначала классическую теорию поляризуемости. Согласно классическим представлениям, электроны в атоме – это заряд на пружинке. Оптическая волна с линейно поляризованным электрическим полем $E = E_0 e^{-i\omega t}$ возбуждает колебания электрона

$$m\ddot{x} + m\Gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = -eE_0 e^{-i\omega t}. \quad (18)$$

Сила трения $m\Gamma\dot{x}$ описывает потерю энергии колеблющимся электроном за счет излучения электромагнитных волн и релаксации в термостат. Излучение ускоренным зарядом является классическим аналогом квантового процесса спонтанного излучения. Для силы радиационного трения мы получаем

$$\Gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m c^3}. \quad (19)$$

После окончания переходных процессов решение уравнения (18) имеет вид

$$x = -\frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)^2}, \quad (20)$$

т. е. дипольный момент атома $d = -ex$ пропорционален приложенному полю. Поляризуемость $d = \alpha E$ есть

$$\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)} = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega), \quad (21)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \alpha'(\omega) &= \frac{e^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \approx \frac{e^2}{2m\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{\left[\left(\omega_0 - \omega\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right]}, \\ \alpha''(\omega) &= \frac{e^2}{m} \frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \approx \frac{e^2\pi}{2m\omega_0} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{\left(\omega_0 - \omega\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \end{aligned} \quad (22)$$

В приближении $\Gamma \ll \omega_0$ это узкие резонансы, которые удобно упростить. Видно, что потери ($\sim \alpha''$) имеет форму лоренцевской линии, а сдвиг фаз между d и E ($\sim \alpha'$) имеет форму «птички».

4. Квантовая теория восприимчивости (поляризуемости) ДУС

Квантово-механическое выражение для $\alpha(\omega)$ можно получить, используя выражение для $|\psi\rangle$ ДУС, полученное в предыдущем пункте. Там ДУС взаимодействовала с полем $E_0 \cos(\omega t)$, содержащим положительные и отрицательные частотные части:

$$E = \frac{E_0}{2} (e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}). \quad (23)$$

Собственно, и дипольный момент будет иметь вид такой же суммы:

$$d(t) = \frac{E_0}{2} \left[\alpha(\omega) e^{-i\omega t} + \alpha^*(\omega) e^{+i\omega t} \right]. \quad (24)$$

Заметим, что восприимчивости удовлетворяют кросс-соотношением $\alpha^*(\omega) = \alpha(-\omega)$ или $\alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega)$, $\alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega)$. Эти соотношения следуют сразу из простого замечания, что вещественное поле создает вещественный же дипольный момент. Действительно,

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \\ E(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{+i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Чтобы поле $E(t)$ было вещественным, коэффициенты Фурье $E(\omega)$ должны удовлетворять соотношению $E^*(\omega) = E(-\omega)$. Точно так же Фурье-компоненты дипольного момента есть

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \\ d(\omega) &= \alpha(\omega) E(\omega). \end{aligned} \quad (26)$$

Для того чтобы $d(t)$ было вещественным при вещественной $E(t)$, нужно, чтобы поляризуемость удовлетворяла выражению $\alpha^*(\omega) = \alpha(-\omega)$.

Важно отметить, что ещё есть более общие, чем $\alpha^*(\omega) = \alpha(-\omega)$, соотношения Крамерса–Кронига, которые связывают α' и α'' . Если известна одна из функций α' или α'' , то можно найти другую. Всегда острой максимум $\alpha''(\omega)$ должен сопровождаться птичкой – резким изменением знака $\alpha'(\omega)$ на этой же частоте.

Итак, дипольный момент ДУС, взаимодействующей с оптической волной, является квантово-механическим средним:

$$\mathbf{d}(t) = \langle \psi(t) | e\hat{\mathbf{r}} | \psi(t) \rangle, \quad (27)$$

где $|\psi(t)\rangle$ – волновая функция ДУС в представлении Шредингера, найденная выше:

$$|\psi(t)\rangle = C_e(t) e^{-i\hbar^{-1} E_e t} |e\rangle + C_g(t) e^{-i\hbar^{-1} E_g t} |g\rangle, \quad (28)$$

а амплитуды удовлетворяют уравнениям (28):

$$\begin{aligned}\dot{C}_e &= \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\Delta t} C_g, \\ \dot{C}_g &= \frac{i\Omega_R}{2} e^{+i\Delta t} C_e.\end{aligned}\quad (29)$$

Далее можно действовать двумя различными путями. Можно взять конкретное начальное условие и, получив конкретное выражение для $|\psi(t)\rangle$, вычислить $d(t)$ явно «в лоб». А можно наоборот, избавится от C_e и C_g , последовательно дифференцируя $d(t)$ по времени. Действуя вторым способом [2, с. 114] и пренебрегая быстро осциллирующими слагаемыми, получаем для $d(t)$ дифференциальное уравнение

$$\ddot{d}(t) + \omega_0^2 d(t) = \frac{2\omega_0}{\hbar} |\mathbf{d}_{eg}|^2 E_0 \cos(\omega t). \quad (30)$$

Сравнивая с разбиением d на частотные части, получаем для восприимчивости

$$\alpha(\omega) = \frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2}{\hbar} \frac{2\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (31)$$

Отметим, что выражение (31) верно только в малых полях и при больших расстройках. В противном случае поляризуемость становится нелинейной функцией поля. Это выражение полностью совпадает (в пределе $\Gamma \rightarrow \infty$) с классическим выражением. Это совпадение связано с тем, что квантово-механический средний дипольный момент ДУС удовлетворяет тому же уравнению гармонического осциллятора. Действительно, если для оценки положить, как в атоме водорода, $d_{eg} \sim ea_B$, $\hbar\omega_0 \sim \frac{e^2}{a_B}$, то для размера

классического диполя получится в точности боровский радиус: $a_B \sim \frac{\hbar^2}{me^2}$.

Контрольные вопросы

1. Показать, что собственные числа оператора четности ± 1 .
2. Вывести гамильтониан двухуровневого атома, используя операторы перехода $\hat{\sigma}^\dagger$ и $\hat{\sigma}$.
3. Перечислить свойства операторов $\hat{\sigma}^\dagger$ и $\hat{\sigma}$.
4. Сформулировать определение поляризуемости.

5. Привести классическое выражение для поляризуемости.
6. Как связаны действительная и мнимая части поляризуемости?
7. Записать выражение для частоты Раби двухуровневого атома в поле классической электромагнитной волны.
8. Как частота Раби зависит от расстройки?
9. Привести квантовое выражение для поляризуемости.
10. Записать приближения, при которых поляризуемость не зависит от поля.

Задачи

Докажите, что

1. $(\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma})^n = \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$.
2. $f(\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}) = f(0) + [f(1) - f(0)] \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$, $e^{-\lambda \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}} = 1 + (e^{-\lambda} - 1) \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$.
3. $e^{\lambda \hat{\sigma}_z / 2} \sigma_\pm e^{\lambda \hat{\sigma}_z / 2} = \hat{\sigma}_\pm e^{\pm \lambda}$.
4. Для ДУС с верхним $|e\rangle$ и нижним $|g\rangle$ состояниями удобно ввести повышающий: $|e\rangle = \hat{\sigma}^+ |g\rangle$ и поникающий: $|g\rangle = \hat{\sigma}^- |e\rangle$ операторы. Прямым вычислением покажите, что в этом базисе операторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}^\dagger$ являются матрицами Паули: $2\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y$ и $2\hat{\sigma}^\dagger = \hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y$.
5. Покажите, что матрица поляризации: $\hat{\sigma}_z |e\rangle = +|e\rangle$, $\hat{\sigma}_z |g\rangle = -|g\rangle$ совпадает с соответствующей матрицей Паули.
6. Покажите, что $\hat{\sigma}^\dagger = |e\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$, $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $[\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}] = \hat{\sigma}_z$, $[\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}_z] = \mp 2\hat{\sigma}_z$, а гамильтониан ДУС $\hat{H} = E_g |g\rangle\langle g| + E_e |e\rangle\langle e|$ есть $\hat{H} = \frac{E_e - E_g}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{E_e + E_g}{2} = \hbar\omega \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$.
7. Для ДУС с $\hat{H} = \hbar\omega \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$ найдите операторы $\hat{\sigma}(t)$, $\hat{\sigma}^\dagger(t)$ и $\hat{\sigma}_z(t)$ в гейзенберговском представлении.
8. Покажите, что любой оператор в любом полном базисе можно представить в виде $\hat{A} = \sum_{m,n} \langle m | \hat{A} | n \rangle |m\rangle\langle n|$; а в базисе собственных векторов как $\hat{A} = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle |n\rangle\langle n|$.
9. Покажите, что $\hat{P} = \hat{P}^{-1} = \hat{P}^+$ и $\hat{P}\mathbf{r} + \mathbf{r}\hat{P} = 0$, где \hat{P} – оператор четности: $\forall |\psi\rangle : \langle \mathbf{r} | \hat{P} | \psi \rangle = \langle -\mathbf{r} | \psi \rangle$.

10. При какой величине электрического поля гармонической световой волны частота Раби равна частоте $2p - 1s$ -перехода атома водорода? Сравните с величиной электрического поля Земли [130В/м, заряд Земли $\sim 0,5 \cdot 10^6 Кл$], световых волн на поверхности Земли [солнечная постоянная: $1400 Bm \cdot m^{-2}$].

11. Если переход $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ соответствует изменению проекции момента $\Delta m = 0$, то вектор \mathbf{d}_{eg} можно взять действительным. Для перехода $\Delta m = \pm 1$, который может быть вызван циркулярно поляризованным светом, вектор \mathbf{d}_{eg} всегда является комплексным. Например, переход $2p \rightarrow 1s$ в атоме водорода. Если ось z является осью квантования, то для перехода $|2,1,0\rangle \rightarrow |1,0,0\rangle$ получается

$$\mathbf{d}_{eg} = \frac{128\sqrt{2}}{243} ea_B \mathbf{e}_z,$$

а для перехода $|2,1,\pm 1\rangle \rightarrow |1,0,0\rangle$:

$$\mathbf{d}_{eg} = -\frac{128}{243} ea_B (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y).$$

Получите эти выражения для матричных элементов дипольного момента. Какие из них следует подставлять в «золотое» правило Ферми для вычисления скорости $2p - 1s$ -перехода?

Литература

1. *Allen L., Eberly J.H.* Optical resonance and two-level atoms. – New York: Dover, 1987. – 233 p.
2. *Loudon R.* The quantum theory of light. – Oxford: Oxford University Press, 2000. – 438 p.
3. *Mandel L., Wolf E.* Optical coherence and quantum optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 1166 p.
4. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 4. Оптические уравнения Блоха

Суть же метода, мной применённого тут,
Объяснить я подробней готов,
Если есть у вас пара свободных минут
И хотя бы крупица мозгов.
Л. Кэрролл. Охота на снарка

1. Приближения вращающейся волны

Приближение двухуровневой системы (ДУС) хорошо работает тогда, когда частота внешнего электромагнитного поля ω близка к частоте одного из переходов ω_{eg} . Тогда амплитуда переходов $g \rightarrow e$ не мала и не может быть найдена по теории возмущений. Это и есть приближение ДУС, когда волновая функция системы с хорошей точностью имеет вид

$$|t\rangle = C_g(t)|g\rangle + C_e(t)|e\rangle = c_g(t)e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}}|g\rangle + c_e(t)e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}}|e\rangle. \quad (1)$$

Большие буквы означают быстрые, а маленькие – медленные амплитуды состояния ДУС. Гамильтониан ДУС $\hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}}\hat{\mathcal{E}}$: $\hat{H}_0|g\rangle = E_g|g\rangle$; $\hat{H}_0|e\rangle = E_e|e\rangle$; $\langle e|g\rangle = 0$, $\langle g|e\rangle = \langle g|g\rangle = 1$; $\langle e|\hat{\mathbf{d}}|g\rangle = \mathbf{d}_{eg}$ – матричный элемент (дипольного) перехода, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ – внешнее оптическое поле. Модель с вектором состояния (1) и таким гамильтонианом и называется ДУС. Тогда уравнение Шредингера: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = (H_0 - \mathbf{d}\mathcal{E})|t\rangle$ дает для медленных амплитуд

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{c}_e &= \frac{\hbar c_g}{2} \left(\Omega^* e^{i\Delta t} + \Omega e^{i(\omega_{eg} + \omega)t} \right), \\ i\hbar \dot{c}_g &= \frac{\hbar c_e}{2} \left(\Omega e^{-i\Delta t} + \Omega^* e^{-i(\omega_{eg} + \omega)t} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta = \omega_{eg} - \omega$ – расстройка, $\Omega = \mathbf{d}_{eg}\mathcal{E}_0/\hbar$ – частота Раби, возможно комплексная. Здесь для простоты мы, как обычно положили $\mathbf{d}_{ee} = \mathbf{d}_{gg} = 0$.

Непосредственное аналитическое решение системы уравнений (2) представляет значительные трудности. Действительно, на языке теорией колебаний мы имеем дело с четырехмерной системой (c_g, c_e комплекс-

ные), находящейся под параметрическим квазипериодическим двухчастотным воздействием (возмущением). Упрощение системы (2) возможно, если амплитуда внешнего поля не слишком велика, $\Omega \ll \omega_{eg}$. В этом случае для описания переходов в условиях, близких к резонансу $\Delta \ll \omega_{eg}$, можно воспользоваться *приближением врачающейся волны* (ПВВ), сохранив в (2) резонансные члены и выкинув быстро осциллирующие (на удвоенной частоте). С точки зрения теории колебаний, переход к ПВВ заменяет квазипериодическое двухчастотное возмущение на гармоническое. Тогда система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} i\dot{c}_e &= \frac{c_g \Omega^*}{2} e^{i\Delta t}, \\ i\dot{c}_g &= \frac{c_e \Omega}{2} e^{-i\Delta t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Систему (3) можно решить разными способами, мы это уже делали в лекции 3. Например, можно подставить «одно в другое» и свести задачу к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. При начальных условиях: $c_g(0)=1$, $c_e(0)=0$ для амплитуды «перехода вверх» получаем

$$c_e(t) = i \cdot \frac{|\Omega|}{\sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2}} e^{\frac{i\Delta t}{2}} \sin \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2} \frac{t}{2}. \quad (4)$$

Это значит, что вероятность перехода ДУС под действием гармонического поля осциллирует с частотой Раби: $\sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2}$. Частота и амплитуда осцилляций растут при увеличении возмущения, и при $\omega_{eg} = \omega$ отклик достигает максимума. Поэтому это явление называется *оптическим резонансом* по аналогии с магнитным.

2. Вектор Блоха, сфера Блоха, уравнения Блоха

Состояние ДУС, взаимодействующей с переменным классическим полем $\mathcal{E}(t)$, удобно описывать с помощью наглядного вектора Блоха (ВБ), тесно связанного с наблюдаемыми величинами. Вектор Блоха $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ есть

$$\begin{cases} R_1 = C_g^* C_e + C_g C_e^*, \\ R_2 = i(C_g^* C_e - C_g C_e^*), \\ R_3 = |C_e|^2 - |C_g|^2. \end{cases} \quad (5)$$

«Продольная» компонента R_3 – разность населенностей уровней $|e\rangle$ и $|g\rangle$, связана с мгновенным значением средней энергии ДУС (в КМ-смысле): $\langle E \rangle = \hbar\omega_{eg}R_3$. «Поперечные» компоненты R_1 и R_2 связаны с действительной и мнимой частями $\mathbf{d}_{eg} = \mathbf{d}_1 + i\mathbf{d}_2$, а именно дипольный момент ДУС в состоянии (1) есть

$$\mathbf{d} = \langle t | \hat{\mathbf{d}} | t \rangle = R_1 \mathbf{d}_1 + R_2 \mathbf{d}_2. \quad (6)$$

Практически всегда можно выбрать $|e\rangle$ и $|g\rangle$ действительными, т. е. положим $\mathbf{d}_2 = 0$. Это означает, что Ω действительна. Тогда уравнения для быстрых амплитуд приут вид

$$\begin{aligned} i \frac{dC_g}{dt} &= \omega_g C_g + \Omega(t) C_e, \\ i \frac{dC_e}{dt} &= \Omega(t) C_g + \omega_e C_e, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Omega = \mathbf{d}_{eg} \mathcal{E}_0 / \hbar$ – действительная переменная частота Раби, дает следующую систему оптических уравнений Блоха:

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} &= -\omega_{eg} R_2, \\ \frac{dR_2}{dt} &= \omega_{eg} R_1 - 2\Omega(t) R_3, \\ \frac{dR_3}{dt} &= 2\Omega(t) R_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Эта система уравнений имеет интеграл движения $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \equiv \mathbf{R}^2 = \text{const}$. Учитывая условие нормировки волновой функции $|C_e|^2 + |C_g|^2 = 1$, находим, что $\mathbf{R}^2 = 1$. Таким образом, вектор Блоха движется по поверхности единичной сферы – сферы Блоха в пространстве \mathbf{R} . Стоит отметить, что сохранение длины ВБ имеет место только в случае отсутствия диссипации, поскольку, по существу, в данной лекции мы рассматриваем только чистые состояния. В общем случае состояние

системы описывается смешанным состоянием и ВБ лежит внутри сферы Блоха.

Недолгое созерцание системы уравнений (8) показывает, что она имеет вид $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$, где $\boldsymbol{\Omega} = (2\Omega(t), 0, \omega_{eg})$. Это значит, что вектор \mathbf{R} поворачивается на сфере Блоха вокруг вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Это дает нам в руки мощный эвристический инструмент, позволяющий наглядно представить себе поведение решения уравнения (8) – динамику ВБ. Однако $\boldsymbol{\Omega}(t)$ – переменный вектор, поэтому следует разбираться во всем последовательно и аккуратно.

Рассмотрим для простоты эволюцию ДУС в гармоническом поле $\Omega(t) = \Omega \cos \omega t$. Как и ранее, будем рассматривать случай малой амплитуды внешнего поля $\Omega \ll \omega_{eg}$, близкого к резонансу $|\omega_{eg} - \omega| \ll \omega_{eg}$, т. е. применимо ПВВ. Из (8) ясно, что скорости изменения поперечных компонент значительно больше скорости изменения продольной. Поэтому вблизи резонанса удобно пересесть в систему отсчета, врачающуюся с угловой скоростью $\omega \parallel z$. В этой системе отсчета скорости изменения компонент вектора ВБ (r_1, r_2, r_3) будут иметь одинаковый порядок величин. Сделаем преобразование к новым компонентам

$$r_1 = R_1 \cos \omega t + R_2 \cos \omega t, \quad r_2 = -R_1 \sin \omega t + R_2 \cos \omega t, \quad r_3 = -R_3. \quad (9)$$

Тогда система уравнений Блоха (8) примет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= -\Delta \cdot r_2 + \Omega r_3 \sin 2\omega t, \\ \dot{r}_2 &= \Delta \cdot r_1 + 2\Omega r_3 \cos^2 \omega t, \\ \dot{r}_3 &= -2\Omega(r_1 \sin \omega t + r_2 \cos \omega t) \cos \omega t, \end{aligned} \quad (10)$$

где, как и ранее, $\Delta = \omega_{eg} - \omega$.

В нашем приближении эволюция системы происходит с характерными скоростями порядка Δ или Ω , много меньшими ω . Поэтому в (10) можно заменить быстро осциллирующие слагаемые их средними значениями. Получаются следующие усредненные уравнения Блоха для врачающихся компонент вблизи резонанса:

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= -\Delta \cdot r_2, \\ \dot{r}_2 &= \Delta \cdot r_1 + \Omega r_3, \\ \dot{r}_3 &= -\Omega r_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь видно, что (11) имеет вид $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, где вектор $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega, 0, \Delta)$ уже постоянен. Это сильно упрощает качественный анализ решений уравнений (11).

Автономная система уравнений (11) имеет два интеграла движения. Первый из них: $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$ показывает, что, несмотря на сделанные при усреднении приближения, ВБ системы по-прежнему движется по сфере Блоха. Второй интеграл движения: $\Omega r_1 - \Delta \cdot r_3 = \text{const}$ задает уравнение секущей плоскости. Возникающая при этом на поверхности сферы Блоха окружность и будет описывать конец ВБ.

Использование интегралов движения позволяет найти решение (11) графически. Например, если в начальный момент времени ДУС находилась в состоянии $|g\rangle$, $r_1(0) = r_2(0) = 0$, $r_3(0) = 1$, решение имеет вид

$$\begin{aligned} r_1(t) &= -\frac{\Delta \cdot \Omega}{(\Omega^2 + \Delta^2)} \cdot \left(1 - \cos \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} t\right), \\ r_2(t) &= \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}} \sin \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} t, \\ r_3(t) &= \frac{\Delta^2 + \Omega^2 \cos \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} t}{(\Delta^2 + \Omega^2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Например, при точном резонансе, $\Delta = 0$, ВБ всегда находится в плоскости 023. Это значит, что амплитуда осцилляции Раби максимальна.

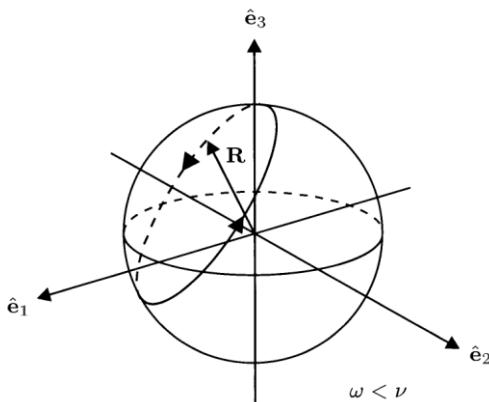


Рис. 4. Сфера Блоха

3. Сдвиг Блоха–Зигерта

Переход от (10) к (11) соответствует ПВВ. Попробуем найти поправки к решению «усредненной» системы уравнений (11) $\mathbf{r}_0(t)$, разыскивая решения «неусредненной» системы уравнений (10) в виде $\mathbf{r}_0(t) + \delta\mathbf{r}(t)$. Перепишем (10) в виде

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= -\Delta \cdot r_2 + \Omega r_3 \sin 2\omega t, \\ \dot{r}_2 &= \Delta \cdot r_1 + \Omega r_3 + \Omega r_3 \cos 2\omega t, \\ \dot{r}_3 &= -\Omega r_2 - \Omega r_1 \sin 2\omega t - \Omega r_2 \cos 2\omega t\end{aligned}\quad (13)$$

и подставим туда $\mathbf{r}_0(t) + \delta\mathbf{r}(t)$. Система уравнений на поправки имеет вид

$$\begin{aligned}\delta\dot{r}_1 &= -\Delta \cdot \delta r_2 + \Omega r_{30} \sin 2\omega t, \\ \delta\dot{r}_2 &= \Delta \cdot \delta r_1 + \Omega \delta r_3 + \Omega r_{30} \cos 2\omega t, \\ \delta\dot{r}_3 &= -\Omega \delta r_2 - \Omega r_{10} \sin 2\omega t - \Omega r_{20} \cos 2\omega t.\end{aligned}\quad (14)$$

Идея этой нехитрой итерационной процедуры состоит в том, чтобы найти приближенное решение (14) $\delta\mathbf{r}(t)$, подставить его в (13) и снова усреднить, теперь уже в поправленном виде. Имея ввиду такую последовательность действий, присмотримся внимательно к первым двум уравнениям (13). Из их вида ясно, что после усреднения дополнительные слагаемые возникнут только из-за поправки δr_3 .

Рассмотрим ее подробнее. Система уравнений на вариации (14), очевидно, имеет вид $\delta\dot{\mathbf{r}} = \hat{A}\delta\mathbf{r} + \mathbf{b} \cos 2\omega t + \mathbf{c} \sin 2\omega t$. Поскольку она линейна, то ее решение будет суммой собственного (однородного) $\delta\mathbf{r} \sim e^{\lambda t}$, где λ – собственные значения матрицы \hat{A} , порядка Δ, ω , и вынужденного (неоднородного) $\delta\mathbf{r} \sim \cos 2\omega t, \sin 2\omega t$. Поэтому можно ограничиться поиском только быстрого решения, удовлетворяющего уравнению

$$\delta\dot{r}_3 = -\Omega r_{10} \sin 2\omega t - \Omega r_{20} \cos 2\omega t. \quad (15)$$

Интегрируем, полагая медленные функции $r_{10}(t)$ и $r_{20}(t)$ константами, и получаем

$$\delta r_3 = \frac{\Omega}{2\omega} r_{10} \cos 2\omega t - \frac{\Omega}{2\omega} r_{20} \sin 2\omega t. \quad (16)$$

Подставляя это выражение в правые части первых двух уравнений (13), снова усредняем по быстрым осцилляциям. В результате получаем следующие уравнения для медленных компонент ВБ:

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= -\left(\Delta + \frac{\Omega^2}{4\omega}\right)r_2, \\ \dot{r}_2 &= \left(\Delta + \frac{\Omega^2}{4\omega}\right)r_1 + \Omega r_3.\end{aligned}\tag{17}$$

Из сравнения (17) с исходной системой усредненных уравнений (11) видно, что учет быстро осциллирующих членов (выход за рамки ПВВ) эквивалентен увеличению частоты перехода ДУС, а с ней и расстройки, на величину

$$\delta\omega = \frac{\Omega^2}{4\omega},\tag{18}$$

которая называется сдвигом Блоха–Зигерта. Для типичных значений параметров: атомного перехода $d_{eg} \sim ea_B$ и поля $\mathcal{E} \sim 10^3 \text{ Гс}$, соответствующего интенсивности $I \sim 10^8 \text{ Вт/см}^2$, получаем $\omega \sim 2 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $\Omega \sim 2 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$ и $\delta\omega \sim 7 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$.

4. Рассеяние гармонического поля на ДУС

Оценим мощность излучения возбуждаемой ДУС. Для простоты дальнейших выкладок будем считать, что дипольный момент перехода действителен. Тогда, как мы видели выше, $\langle t | \hat{\mathbf{d}} | t \rangle = \mathbf{d}_{eg} R_1$. Используя решение в ПВВ (12), соответствующее тому, что в начальный момент ДУС находилась в основном состоянии, получаем

$$\begin{aligned}R_1 &= -\frac{\Delta \cdot \Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}} \cos \omega t + \\ &+ \frac{\Omega(\Delta + \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2})}{2(\Omega^2 + \Delta^2)} \cos(\omega + \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2})t - \\ &- \frac{\Omega(\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} - \Delta)}{2(\Omega^2 + \Delta^2)} \cos(\omega - \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2})t.\end{aligned}\tag{19}$$

Это значит, что под действием гармонического поля ДУС излучает не только на частоте внешнего поля ω , но и на боковых частотах $\omega \pm \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$. При исследовании резонансной флуоресценции это явление называется *моловским триплетом* (1969). Для величины полной мощности излучения P , пренебрегая малыми величинами порядка Δ/ω и Ω/ω , получаем

$$P = \frac{2\langle \ddot{\mathbf{d}} \rangle}{3c^3} \approx \frac{\mathbf{d}_{eg}^2 \omega^4}{6c^3}. \quad (20)$$

Соответствующее сечение рассеяния $\sigma = P/I$, где $I = c\mathcal{E}^2/8\pi$, по порядку величины равно

$$\sigma \approx \frac{\mathbf{d}_{eg}^2 \omega^4}{6Ic^3}. \quad (21)$$

Для типичных значений параметров $d_{eg} \approx ea_B \approx 2 \cdot 10^{-18}$ СГС = 2Дб, $I \sim 10^8$ Вт·см⁻², $\mathcal{E} \sim 10^3$ Гс (1Дб = 10^{-18} СГС = $3 \cdot 10^{-30}$ Кл·м) получаем $\sigma \approx 4 \cdot 10^{-22}$ см². Это примерно в 600 раз больше томсоновского сечения рассеяния на свободном электроне: $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \alpha^4 a_B^2$, $\alpha = e^2/hc$, $a_B = \hbar^2/me^2$.

Здесь важно подчеркнуть, что мощность излучения, рассеиваемого ДУС в гармоническом резонансном поле, почти не зависит от амплитуды действующего на ДУС поля, а сечение рассеяния убывает обратно пропорционально интенсивности падающего на ДУС излучения.

Контрольные вопросы

1. Когда применимо приближение ДУС?
2. Что называется оптическим резонансом?
3. Какой интеграл движения имеет система оптических уравнений Блоха?
4. Что называют сдвигом Блоха–Зигерта?
5. Запишите выражение для сечения рассеяния оптической волны на ДУС.

Задачи

1. Показать, что $|c_g|^2 + |c_e|^2$ является интегралом движения системы (4).
2. Описание ДУС на языке ВФ требует задания 4-х действительных параметров ($\operatorname{Re} C_g, \operatorname{Re} C_e, \operatorname{Im} C_g, \operatorname{Im} C_e$), подчиненных одному условию нормировки. Описание с помощью вектора Блоха требует задания 3-х действительных параметров (R_1, R_2, R_3), подчиненных одному условию нормировки. Какую информацию содержит опущенный при переходе от ВФ к вектору Блоха параметр?
3. Покажите, что компоненты вектора Блоха можно представить в виде $R_i = \langle t | \hat{\sigma}_i | t \rangle$, где $\hat{\sigma}_i$ – операторы Паули, действующие в двумерном пространстве ($|g\rangle, |e\rangle$). Матрицы Паули пропорциональны компонентам оператора спина $1/2$. В силу этого сходства вектор Блоха называют также вектором энергетического (квази) спина, псевдоспином.
4. Покажите, что $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$ является интегралом движения системы уравнений (8).
5. Покажите, что система уравнений (11) имеет два интеграла движения: $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$ и $\Omega r_1 - \Delta \cdot r_3 = \text{const.}$
6. Воспользовавшись интегралами движения: $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $\Omega r_1 - \Delta \cdot r_3$ системы уравнений (11), получите ее решение (12).
7. Найдите зависимость мощности P излучения ДУС в гармоническом поле в зависимости от расстройки Δ и амплитуды поля Ω в резонансном случае $\Delta \ll \Omega$.

Литература

1. *Allen L., Eberly J.H.* Optical resonance and two-level atoms. – New York: Dover, 1987. – 233 p.
2. *Mandel L., Wolf E.* Optical coherence and quantum optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 1166 p.

ЛЕКЦИЯ 5. Квантовая теория. Взаимодействие ДУС и МР. Вакуумные осцилляции Раби

Сотри случайные черты –
и ты увидишь: мир прекрасен.
А. Блок

1. Полностью квантовое рассмотрение

Итак, мы рассмотрели полуклассическую теорию взаимодействия атома со светом; когда атом квантовый (ДУС), а оптическое поле – классическая гармоническая волна.

Мы обнаружили, что есть сходство с полностью классической теорией (когда атомный оптический электрон – это заряд на пружинке) и есть отличия. Сходны расчеты поляризуемости, а различны осцилляции Раби, которых нет у заряда на пружинке. Это связано с тем, что у классического электрона нет никакого собственного дипольного момента. Если пружинка не растянута, то нет и диполя. А у ДУС есть дипольный момент перехода. Он и формирует медленную (микроволновую), по сравнению с оптической, частоту Раби.

Обнаруженная нами картина осцилляций Раби допускает и полностью квантовую интерпретацию. Оптическую волну, падающую на ДУС, можно рассматривать как поток фотонов с частотой, резонансной с частотой перехода ДУС. Если фотон сталкивается с невозбужденной ДУС, то он отдает ей свою энергию и переводит ее из основного состояния $|g\rangle$ в возбужденное состояние $|e\rangle$. Другой фотон, пролетающий мимо уже возбужденной ДУС, приводит к ее девозбуждению, т. е. излучению еще одного фотона той же частоты и фазы, и возвращению исходного фотона обратно в волну. Этот процесс называется *вынужденным излучением*. Осцилляции Раби означают, что этот процесс немонотонный, т. е. взаимодействие ДУС с МР не приводит ни к окончательному и ни к полному возбуждению ДУС, когда вся энергия в ДУС; ни к полному ее девозбуждению, когда вся энергия в МР. Эти осцилляции имеют свою, неоптическую частоту, пропорциональную приложенному оптическому полю, т. е. корню из числа фотонов.

Давайте теперь рассмотрим эту ситуацию на полностью квантовом языке и посмотрим, не приведет ли это к новым явлениям, описываемым

полуклассической теорией. Кроме того, из опыта хорошо известно, что, помимо «вынужденного», существует еще и «спонтанное» излучение. Это явление еще не появлялось ни в каком из рассмотренных нами приближений.

Корректное объединение волновых и корпускулярных свойств света удалось только в рамках КЭД с ее фотонной структурой света. Следствием квантования поля излучения являются его колебания, соответствующие нулевой энергии, так называемые *вакуумные флюктуации*. Эти флюктуации не имеют классического аналога и лежат в основе многих важных явлений квантовой оптики. В отличие от полуклассической теории, только квантовая теория излучения способна объяснить такие эффекты, как спонтанное излучение, лэмбовский сдвиг, *ширина линии излучения лазера*, *эффект Казимира*, *фотонная статистика излучения лазера* и т. д. В действительности, каждый из этих физических эффектов можно объяснить с точки зрения вакуумных флюктуаций, возмущающих атомы. Например, часто говорят, что спонтанное излучение возникает в результате воздействий на атом вакуумных флюктуаций поля излучения. Однако имеются и другие, более существенные причины и логические аргументы в пользу квантования поля излучения.

Кроме того, квантование излучения совершенно необходимо для объяснения квантовых биений, вакуумных флюктуаций Раби, двухфотонной интерференции, создания перепутанных фотонных состояний, не-классических (сжатых) состояний света, субпуассоновской статистики фотонов и антигруппировки фотонов. Для этих явлений результаты самосогласованных, полностью квантовых вычислений существенно отличаются от результатов, полученных с помощью полуклассической теории с учетом или без учета феноменологических квантовых флюктуаций. Таковы вкратце аргументы в пользу необходимости квантования поля излучения.

2. Гамильтониан Джейнса–Каммингса

Снова воспользуемся дипольным приближением для оператора взаимодействия ДУС и МР: $\hat{V} = -\mathbf{d}\mathbf{E}$. Подставляя сюда выражение (28) из лекции 2 и (6) из лекции 3, получаем

$$\hat{V} = \hbar\Omega_R (\hat{a} + \hat{a}^*) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*), \quad (1)$$

где $\Omega_R = -(\mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{d}}_{eg}) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$ – частота Раби в поле «одного фотона», поляризованного вдоль оси x . Она играет роль константы связи ДУС и МР,

выраженной в единицах частоты. Если в (1) раскрыть скобки, то получится четыре слагаемых. Поскольку взаимодействие ДУС и МР резонансное, то из четырех слагаемых главными являются только два. Остальные мы должны отбросить, так как их матричные элементы осциллируют на удвоенной частоте. ПРОще всего убедиться в этом, рассмотрев операторы в картине Гейзенберга: $\hat{a}(t) = \hat{a}e^{i\omega_{MP}t}$, $\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}e^{i\omega_{DUC}t}$. Пренебрежение быстро осциллирующими слагаемыми возможно при $|\omega_{MP} - \omega_{DUC}| \ll \omega_{MP}, \omega_{DUC}$. Это приближение вращающейся волны, с которым мы уже знакомы. Итак, мы оставляем в (1) слагаемые $\hat{a}^+ \hat{\sigma}$ и $\hat{a} \hat{\sigma}^+$ и отбрасываем $\hat{a} \hat{\sigma}$ и $\hat{a}^+ \hat{\sigma}^+$. На квантово-механическом языке это означает, что мы оставляем члены, описывающие процессы с сохранением энергии (ДУС возбуждается, фотон поглощается и наоборот). А члены, описывающие процессы с нарушением закона сохранения энергии (ДУС возбуждается, фотон испускается и наоборот), отбрасываются. Процессы, которые идут с нарушением классического закона сохранения энергии, хотя и не запрещены (1), но значительно менее вероятны. Пренебрежение членами, которые не сохраняют энергию в элементарном акте, есть квантово-механический смысл «*приближения вращающейся волны*». Итак, с учетом гамильтонианов свободных ДУС и МР получаем известный гамильтониан Джейнса–Каммингса:

$$\hat{H} = \hbar\omega_{MP}\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\omega_{DUC}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma} + \hbar\Omega_R(\hat{a}^+\hat{\sigma} + \hat{a}\hat{\sigma}^+). \quad (2)$$

3. Эволюция системы ДУС+МР

Уравнение движения нашей системы в картине Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (3)$$

Невозмущенными состояниями полной системы ДУС+МР являются прямые произведения $|e, N\rangle = |e\rangle|n\rangle$, $|g, N\rangle = |g\rangle|n\rangle$, образующие гильбертово пространство состояний системы $|\psi\rangle$. Наглядно их можно изобразить в виде такой картинки, где стрелки показывают возможные переходы между состояниями.

Взаимодействие ДУС и МР вида (2) может приводить только к переходам вида $|e, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle$ и $|g, n\rangle \rightarrow |e, n-1\rangle$, это означает, что реше-

ние (3) следует искать не в виде линейной комбинации всех таких прямых произведений, а только тех, между которыми происходят переходы:

$$|\psi\rangle = C_{g,n+1}^{(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{g,n+1} t} |g, n+1\rangle + C_{e,n}^{(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{e,n} t} |e, n\rangle. \quad (4)$$

Здесь мы сразу ищем амплитуду в представлении взаимодействия.

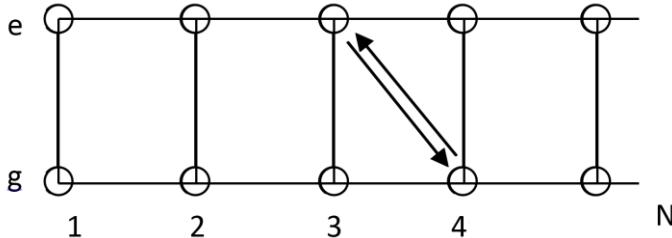


Рис. 5. Схема состояний системы ДУС + МР

Таким образом, гильбертово пространство состояний системы распадается на сектора, внутри которых эволюция $|\psi\rangle$ происходит независимо. Это сильно упрощает задачу решения уравнения Шредингера (3). Еще раз подчеркнем, что независимость секторов (4) имеет место с точностью до «приближения вращающихся векторов».

Подставляя (4) в (3) и учитывая, что гамильтониан взаимодействия (2) имеет в секторе гильбертова пространства состояний только один ненулевой матричный элемент

$$\langle g, n+1 | \hat{V} | e, n \rangle = \hbar \Omega_R \sqrt{n+1}, \quad (5)$$

получаем уравнение для амплитуд:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{g,n+1} &= -i\omega_R \sqrt{n+1} e^{i\Delta t} C_e, \\ \dot{C}_{e,n} &= -i\omega_R \sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} C_g. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (6) описывают динамику ДУС в поле МР вне влияния каких-либо внешних источников и без учета процессов релаксации из-за взаимодействия с резервуаром. Уравнения (6) совершенно идентичны тем, которые мы уже решали в предыдущей лекции с частотой Раби: $\Omega_R \sqrt{n+1}$.

Поэтому мы можем воспользоваться уже полученным решением. Например, если ДУС первоначально находилась в возбужденном состоянии $C_{e,n}(0) = C_n$, $C_{g,n}(0) = 0$, то

$$C_{e,n}(t) = C_n \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} t - \\ - \frac{i\Delta/2}{\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}} \sin \sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} t \end{pmatrix} e^{\frac{i\Delta t}{2}},$$

$$C_{g,n}(t) = C_n \frac{i\Omega_R \sqrt{n+1}}{\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}} \sin \sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} t e^{-\frac{i\Delta t}{2}}, \quad (7)$$

где $\Delta = \omega_{\text{ДУС}} - \omega_{MP}$, $\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}$ – частота Раби ДУС при наличии n фотонов в МР и расстройки Δ .

Эти уравнения дают полное решение задачи, из них можно получить все основные физические величины, относящиеся к системе ДУС и квантованиям МР. Например, вероятность $p(n)$ того, что в момент времени t в МР имеется n фотонов, равна следу по атомным состояниям:

$$p(n,t) = |C_{e,n}(t)|^2 + |C_{g,n}(t)|^2 =$$

$$= p(n,0) \left(\cos^2 \sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} t + \left(\frac{\Delta}{2\Omega_R}\right)^2 \sin^2 \sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} t \right) + (8)$$

$$+ p(n-1,0) \frac{\Omega_R^2 n}{\sqrt{\Omega_R^2 n + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}} \sin^2 \sqrt{\Omega_R^2 n + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} t,$$

где $p(n,0) = |c_n|^2$.

Из этого распределения видно, что в соответствии с физикой процесса $\langle n \rangle$ удовлетворяет закону сохранения, а дисперсия эволюционирует в соответствии с коллапсами и возрождениями.

Другой важной величиной является инверсия ДУС, которая является следом по фотонным состояниям:

$$D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(|C_{e,n}(t)|^2 + |C_{g,n}(t)|^2 \right). \quad (9)$$

Подставляя сюда (7), получаем

$$D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,0) \begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta}{2\Omega_R}\right)^2 + \\ + \frac{\Omega_R^2(n+1)}{\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}} \cos 2\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} t \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Важным следствием полностью квантового рассмотрения является то, что если в качестве начального состояния взять вакуумное поле МР $p(n,0) = \delta_{n0}$, то

$$D(t) = \frac{\Delta^2 / 4 + \Omega_R^2 \cos 2\Omega_R \sqrt{(n+1)t}}{\left(\Delta^2 / 4 + \Omega_R^2\right)}, \quad (11)$$

т. е. имеют место вакуумные осцилляции Раби. Этот результат совершенно отличается от предсказаний полуклассической теории, рассмотренной в предыдущей лекции. В полуклассической теории ДУС частица, находящаяся в возбужденном состоянии, не может совершить переход в нижнее состояние в отсутствие возбуждающего поля. В полностью квантовой теории переход из верхнего состояния в нижнее становится возможным в вакууме МР благодаря спонтанному излучению.

Это самый простой пример спонтанного излучения, в котором спонтанно испущенный фотон вносит вклад в рассматриваемую одиночную моду. Однако в силу осцилляций Раби, этот фотон будет снова поглощен ДУС, снова излучен и т. д. Настоящий спонтанный распад возбужденного состояния с экспоненциальным характером затухания обусловлен наличием континуума (резервуара) вакуумных мод и будет рассмотрен в лекциях 6, 7.

Таким образом, модель Джейнса–Каммингса демонстрирует нам проявления истинно квантово-механических явлений. Единичная ДУС (например КТ), «сильно» взаимодействующая с МР (будучи помещенной в нанорезонатор с высокой добротностью), демонстрирует (обнаруживает) экспериментально вакуумные осцилляции Раби. Это, действительно, квантовая система в силу своей миниатюрности – в ней сильны кванто-

вые флуктуации. Возможным проявлением этого может быть сильное изменение оптических свойств такого нанорезонатора при добавлении в него еще одной ДУС или еще всего лишь одного фотона. Это позволяет изучать квантовые свойства света экспериментально, т. е. осуществляется «КЭД на столе», исследовать границы квантового и классического описания явлений опытным путем.

Другим важным проявлением квантовой структуры света являются явления «коллапсов» и «возрождений» инверсии населенностей ДУС. Поведение (10) $D(t)$ совершенно отличается от соответствующей зависимости (лекция 3, (17)), полученной в полуklassической теории. Для иллюстрации, в качестве начального распределения выберем конкретное состояние. Распределение вероятности по числу фотонов n для него, как мы видели в лекции 2, пуассоновское:

$$p(n, 0) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!} \quad (12)$$

с дисперсией $\overline{\Delta n^2} = \bar{n}$.

Численное моделирование показывает, что огибающая синусоидальных колебаний Раби $D(t)$ через некоторое время «коллапсирует» до нуля и остается нулевой в течение продолжительного периода времени (рис. 6).

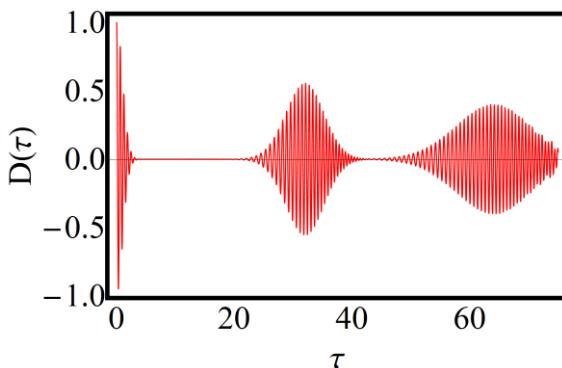


Рис. 6. Эволюция инверсии населенностей во времени

Тем не менее с течением времени происходит «возрождение» исчезнувшей инверсии. Такое поведение коллапсов и возрождений инверсии повторяется со временем, причем амплитуда осцилляций Раби уменьшается.

ется, а продолжительность периодов возрождений увеличивается. В конце концов наступает перекрытие более поздних возрождений с предыдущими. Величина среднего числа фотонов в МР $\bar{n}(t)$ при этом повторяет зависимость $D(t)$, поскольку имеет место интеграл движения $\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma} = \text{const}$ (см. ниже), поскольку $\bar{n}(t) = \langle t | \hat{a}^+ \hat{a} | t \rangle$ и $D(t) = \langle t | \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma} | t \rangle + \text{const}$. Интересно отметить поведение дисперсии $\overline{\Delta n^2}(t)$. График её зависимости также периодически распадается на осцилляции (см. рис. 6).

Физику явлений коллапса и возрождения можно понять из (10). Каждый член этой суммы отвечает за осцилляции Раби для определенного n . Осцилляции Раби, связанные с различным числом фотонов n , имеют разные частоты (10), поэтому с течением времени становятся некоррелированными по фазе. Это и приводит к коллапсу инверсии. В дальнейшем корреляции восстанавливаются и происходит возрождение. Продолжая этот процесс, получаем последовательности возрождений. Важным моментом является то, что коллапсы и возрождения происходят только благодаря дискретной структуре распределения фотонов. Таким образом, коллапсы и возрождения являются чисто квантово-оптическими явлениями. Непрерывное распределение фотонов в полуклассической теории, как мы видели, не дает ничего подобного.

Простые оценки для периода осцилляций Раби t_R , времени коллапса этих осцилляций t_c и их возрождений t_r можно получить для начально-го пуасоновского распределения (12) в пределе $\bar{n} \gg 1$ и при нулевой расстройке $\Delta = 0$. Усредненный период осцилляций Раби определяется при $n = \bar{n}$, т. е.

$$t_R \approx \frac{\pi}{\Omega_R \sqrt{\bar{n}}} . \quad (13)$$

Эти осцилляции продолжаются до тех пор, пока колебания, связанные с различными значениями n , становятся некоррелированными по фазе. Вспомним, что для первоначально коррелированного по фазе распределения Пуассона среднеквадратичный разброс числа фотонов $\sqrt{\Delta n^2} = \sqrt{\bar{n}}$. Поэтому оценку для первого коллапса можно получить из условия

$$\left[\Omega_R \sqrt{\bar{n} + \sqrt{\bar{n}}} - \Omega_R \sqrt{\bar{n} - \sqrt{\bar{n}}} \right] t_c \sim \pi . \quad (14)$$

В пределе $\bar{n} \gg 1$ получаем

$$t_c \approx \frac{\pi}{\Omega_R}. \quad (15)$$

Аналогичные рассуждения приводят к оценке времени между возрождениями

$$\left[\Omega_R \sqrt{\bar{n}} - \Omega_R \sqrt{\bar{n}-1} \right] t_r \approx \pi m, \quad (16)$$

где $m = 1, 2, \dots$, т. е. возрождения имеют место, когда фазы колебаний соседних членов в (10) отличаются на число, кратное 2π . В пределе $\bar{n} \gg 1$ получаем

$$t_r \approx \frac{\pi \sqrt{\bar{n}}}{\Omega_R}. \quad (17)$$

Отсюда видно, что возрождения происходят через регулярные промежутки времени, которые увеличиваются с ростом \bar{n} . Отметим, что мы получили три характерные времена задачи: время осцилляций Раби: $t_R \sim 1/\Omega_R \bar{n}^{1/2}$, время коллапса: $t_c \sim 1/\Omega_R$ и время возрождения: $t_r \sim \bar{n}^{1/2}/\Omega_R$, при этом $t_r \gg t_c \gg t_R$. Также отметим, что наличие возрождений колебаний является следствием квантовой структуры. Затухание колебаний можно получить в классической модели, если положить, что амплитуда классического поля имеет некоторое распределение вероятности (задача 9).

4. «Одетые» состояния

Существует несколько подходов для описания динамики модели Джейнса–Каммингса. В предыдущем разделе мы решили временное уравнение Шредингера. Другой способ заключается в нахождении стационарных состояний гамильтониана Джейнса–Каммингса. Эти собственные состояния называются «одетыми».

Снова запишем гамильтониан Джейнса–Каммингса:

$$\hat{H} = \hbar \omega_{Mp} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \omega_{duc} \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma} + \hbar \Omega_R (\hat{a} \hat{\sigma}^+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}) \quad (18)$$

и выделим состояния невозмущенного гамильтониана: $|e, n\rangle$ и $|g, n\rangle$, которые будем называть «голыми». Взаимодействие в гамильтониане Джейнса–Каммингса приводит к переходам только одного типа $|e, n\rangle \rightleftharpoons |g, n+1\rangle$. Таким образом, динамика проистекает независимо в

таких подпространствах 2×2 вида $|1n\rangle = |e, n\rangle$ и $|2n\rangle = |g, n+1\rangle$ для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что это подпространство ортонормировано: $\langle 1n|2n\rangle = 0$. Матрица гамильтониана Джейнса–Каммингса в этом подпространстве имеет вид

$$H^{(n)} = \hbar \begin{pmatrix} n\omega_{CM} + \frac{\omega_{TLS}}{2} & \Omega_R \sqrt{n+1} \\ \Omega_R \sqrt{n+1} & (n+1)\omega_{CM} - \frac{\omega_{TLS}}{2} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Собственные значения этой матрицы:

$$E_{\pm}(n) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{CM} \pm 2\hbar \sqrt{\Omega_R^2(n+1) + (\Delta/2)^2} \quad (20)$$

являются уровнями энергии нашей системы, описываемой моделью Джейнса–Каммингса. Этим уровням энергии соответствуют следующие собственные векторы

$$\begin{aligned} |n, +\rangle &= \cos \varphi_n |1n\rangle + \sin \varphi_n |2n\rangle, \\ |n, -\rangle &= -\sin \varphi_n |1n\rangle + \cos \varphi_n |2n\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

с углом поворота $\varphi_n = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\Omega_R \sqrt{n+1}}{\Delta/2} \right)$, для которого выполняются

соотношения

$$\begin{aligned} \sin \varphi_n &= \left(\frac{\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + (\Delta/2)^2} - \Delta/2}{2\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + (\Delta/2)^2}} \right)^{1/2}, \\ \cos \varphi_n &= \left(\frac{\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + (\Delta/2)^2} + \Delta/2}{2\sqrt{\Omega_R^2(n+1) + (\Delta/2)^2}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Состояния $|n, \pm\rangle$ называются «одетыми», или дублетом Джейнса–Каммингса. Уровни энергии голых состояний $|1n\rangle$ и $|2n\rangle$ имеют вид: $E_{1n} = \hbar \omega_{TLS}/2 + \hbar n \omega_{CM}$ и $E_{2n} = -\hbar \omega_{TLS}/2 + \hbar(n+1) \omega_{CM}$ и разделены постоянной щелью: $E_{2n} - E_{1n} = \hbar \delta$. Энергии одетых состояний разделены промежутком $E_+(n) - E_-(n) = 4\hbar \sqrt{\Omega_R^2(n+1) + (\Delta/2)^2}$, который увеличивается с ростом n . Увеличение расщепления при переходе от «голых состоя-

ний» к «одетым состояниям» представляет собой разновидность *Штарк-эффекта*, часто называемого АС или динамического *Штарк-эффекта*. Заметим, что в случае точного резонанса $\Delta=0$ картина выглядит особенно наглядно. Голые состояния при этом вырождены, но расщепление «одетых» состояний, естественно, остается. «Одетые» состояния связаны с «голыми» как

$$\begin{aligned} |n,+\rangle &= 2^{-1/2} (|e,n\rangle + |g,n+1\rangle), \\ |n,-\rangle &= 2^{-1/2} (-|e,n\rangle + |g,n+1\rangle). \end{aligned} \quad (23)$$

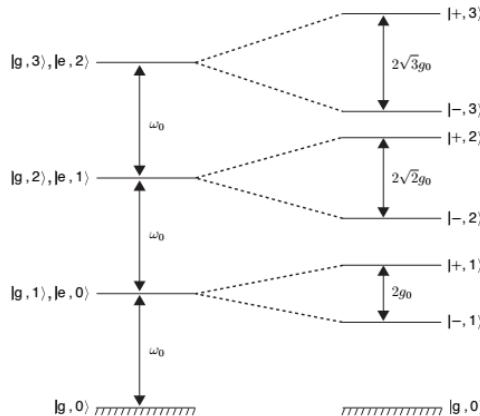


Рис. 7. Уровни энергии «голых» и «одетых» состояний

Для того чтобы увидеть, как при помощи «одетых» состояний можно получить динамику модели Джейнса–Каммингса, рассмотрим то же начальное состояние, что и в предыдущем разделе:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n |n,e\rangle = \sum_n C_n |1n\rangle. \quad (24)$$

Из (21) выражаем $|1n\rangle$ через «одетые» состояния $|n,\pm\rangle$ как

$$|1n\rangle = \cos \varphi_n |n,+\rangle - \sin \varphi_n |n,-\rangle. \quad (25)$$

Таким образом,

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n (\cos \varphi_n |n,+\rangle - \sin \varphi_n |n,-\rangle). \quad (26)$$

А поскольку «одетые» состояния являются стационарными состояниями полной системы с учетом взаимодействия, то вектор состояния в последующие моменты времени $t > 0$ есть

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n \left[\cos \varphi_n |n,+\rangle e^{-i \frac{E_+(n)t}{\hbar}} - \sin \varphi_n |n,-\rangle e^{-i \frac{E_-(n)t}{\hbar}} \right]. \quad (27)$$

Теперь, возвращаясь снова от «одетых» к более привычным «голым» состояниям, просто подставив в (27) $|n,\pm\rangle$ из (23), мы снова получаем результат предыдущего параграфа (7).

Контрольные вопросы

1. К каким переходам приводит взаимодействие ДУС и МР?
2. Чем объясняются вакуумные осцилляции Раби?
3. Записать выражение для частоты вакуумных осцилляций.
4. С чем связаны явления «коллапсов» и «возрождений»?
5. Записать матрицу гамильтониана Джейнса–Каммингса в базисе чисел заполнения.
6. Какова щель между уровнями энергии одетых состояний? Запишите выражение для этой щели.
7. Записать выражение для времени первого коллапса.
8. Записать выражения для времени первого «возрождения».
9. Как выражаются «одетые» состояния через «голые» состояния?
10. Записать распределение вероятности по числу фотонов в когерентном состоянии.

Задачи

1. Прямым вычислением покажите, что для распределения Пуассона (12) среднее число фотонов равно \bar{n} , а дисперсия: $\Delta n^2 = \bar{n}$.
2. Покажите, что для гамильтониана Джейнса–Каммингса имеет место интеграл движения $\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} = \text{const.}$
3. Квантовые биения в системе с близкими уровнями. Пусть имеется двукратно $|1\rangle$ и $|2\rangle$ вырожденный уровень системы с гамильтонианом

$$\begin{pmatrix} E & A \\ A & E \end{pmatrix}. \quad (28)$$

После включения взаимодействия вырождение снимается и образуется дублет близких уровней $A \ll E$. Покажите, что населенности состояний

$|1\rangle$ и $|2\rangle$ испытывают квантовые биения с частотой $2A/\hbar$. Объясните, что физика этих биений идентична осцилляциям Раби ДУС.

4. Используя результат предыдущей задачи, покажите, что населенности «голых» состояний МДК испытывают осцилляции Раби с частотой, равной расщеплению уровней «одетых» состояний. Для простоты вычислений рассмотрите случай точного резонанса $\delta = 0$.

5. Оцените времена «коллапсов» и «возрождений» в модели Джейнса–Каммингса. Для оценки воспользуйтесь пуассоновской статистикой фотонов.

6. Вычислите величину и объясните физический смысл вакуумных осцилляций Раби.

7. Вычислите собственные энергии «одетых» состояний в модели Джейнса–Каммингса.

8. В соответствии с (8) существуют ненулевые амплитуды перехода $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ «снизу вверх». Существует ли скорость (хотя бы малая) такого перехода (вероятность в единицу времени)?

9. Предположив, что амплитуда классического поля имеет гауссово распределение вероятности, показать, используя результаты лекции 3, что амплитуды вероятности будут затухать.

10. Найти преобразование, приводящее гамильтониан Джейнса–Каммингса к гамильтониану, соответствующему взаимодействию частицы со спином $\frac{1}{2}$ с магнитным полем, и показать, что полученный гамильтониан обладает $SU(2)$ симметрией.

11. Найти времена коллапса и возрождения колебаний в случае большой расстройки, $\Delta \gg \Omega_R \sqrt{n+1}$.

Литература

1. *Allen L., Eberly J.H.* Optical resonance and two-level atoms. – New York: Dover, 1987. – 233 p.
2. *Loudon R.* The quantum theory of light. – Oxford: Oxford University Press, 2000. – 438 p.
3. *Mandel L., Wolf E.* Optical coherence and quantum optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 1166 p.
4. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 6. Теория Вайскопфа–Вигнера спонтанного излучения ДУС в свободном пространстве

Спасибо тебе, Господи, что ты создал
все нужное нетрудным, а все трудное – ненужным.
Григорий Саввич Сковорода, 1772

Введение

Итак, выше мы подробно рассмотрели динамику взаимодействия ДУС с единичной, выделенной МР. Мы обнаружили, что излученный в моду фотон все равно возвращается обратно в ДУС, и этот процесс периодически повторяется. Возникает вопрос, как же тогда происходит спонтанное излучение, хорошо известное из этого опыта. Оказывается, что для возможности возбужденной ДУС излучить фотон навсегда, необходимо наличие не одной, а континуума фотонных мод. В каком случае в задаче эффективно возникает континуум мод? Для ответа на этот вопрос нужно вспомнить, что при взаимодействии ДУС с монохроматической волной (лекции 3 и 4) максимальное значение амплитуды вероятности атома находиться в возбуждённом состоянии было равно $c_e \sim \Omega_R / \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}$. Это означает, что ДУС эффективно взаимодействует с теми модами, частота которых лежит в интервале от $\omega_{TLS} - \Omega_R$ до $\omega_{TLS} + \Omega_R$. Если в этом интервале лежит много мод резонатора, то их можно эффективно рассматривать как континуум. Как мы увидели в лекции 2, расстояние между модами резонатора $\Delta\omega \sim \pi c / L$. Таким образом, критерием возможности спонтанной релаксации ДУС в моды резонатора будет $\pi c / L \Omega_R \ll 1$. Рассмотрим это подробнее.

1. Динамика спонтанного распада возбуждённого состояния

Рассмотрим динамику процесса распада возбужденного состояния ДУС (спонтанного излучения ДУС). Ранее мы рассматривали взаимодействие ДУС только с одной МР. Было показано, что ДУС совершает переходы из возбужденного состояния в основное и обратно даже в отсутствие фотонов МР (вакуумные осцилляции Раби). При излучении же

в свободное пространство, как хорошо известно, возбужденное состояние ДУС распадается в нижнее состояние экспоненциально с характерным временем жизни $\tau = \Gamma^{-1}$. Осцилляций Раби при этом не наблюдается. Чтобы должным образом описать такой распад, нужно включить в рассмотрение весь континуум мод электромагнитного (радиационного) поля свободного пространства. Этот континуум обычно представляют как квантовые состояния поля в бесконечно протяженном резонаторе. Пока мы не будем конкретизировать структуру этих мод, а будем только предполагать, что гамильтониан, описывающий взаимодействие ДУС с континуумом мод, есть обобщение гамильтониана Джейнса–Каммингса на этот случай:

$$\hat{H} = \hbar\omega_{TLS}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{CM\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{R,\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{\sigma}^+). \quad (1)$$

Отметим, что при этом мы предполагаем, что взаимодействие ДУС с континуумом мод радиационного поля носит резонансный характер.

Будем считать, что в начальный момент $t=0$ ДУС находится в возбужденном состоянии $|e, 0\rangle$, а в пространстве нет ни одного фотона. Тогда в последующие моменты времени волновую функцию $|\Psi(t)\rangle$ системы «ДУС + моды свободного пространства» можно искать в виде

$$|\Psi(t)\rangle = C_e(t)e^{-i\omega_{TLS}t}|e, 0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} C_{g,\mathbf{k}}(t)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}|g, 1_{\mathbf{k}}\rangle, \quad (2)$$

где $C_e(0)=1$, $C_{g,\mathbf{k}}(0)=0$, а $|g, 1_{\mathbf{k}}\rangle$ – состояние системы, когда ДУС находится в основном состоянии, а в свободном пространстве имеется один фотон с (\mathbf{k}, α) . Мы хотим найти состояние ДУС и радиационного поля через некоторый промежуток времени t , когда ДУС начнет излучать фотон. Подставляя (2) в уравнение Шредингера:

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$, получаем уравнение движения для амплитуд вероятности $C_e(t)$ и $C_{g,\mathbf{k}}(t)$:

$$\dot{C}_e(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} \omega_{R,\mathbf{k}} e^{i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,\mathbf{k}})t} C_{g,\mathbf{k}}(t), \quad (3)$$

$$\dot{C}_{g,\mathbf{k}}(t) = -i \omega_{R,\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,\mathbf{k}})t} C_e(t). \quad (4)$$

Для того чтобы исключить из уравнения (3) переменную $C_{g,\mathbf{k}}$, проинтегрируем (4) с учётом начального условия:

$$C_{g,k}(t) = -i\omega_{R,k} \int_0^t dt' e^{-i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,k})t'} C_e(t'). \quad (5)$$

Теперь, подставляя (5) в уравнение (3) и делая замену $\tau = t - t'$, получаем

$$\dot{C}_e(t) = -\sum_k \omega_{R,k}^2 \int_0^t d\tau e^{-i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,k})\tau} C_e(t - \tau). \quad (6)$$

Таким образом, мы перешли от двух дифференциальных уравнений (3), (4) к одному интегродифференциальному уравнению (6).

Это уравнение все еще остается точным (в рамках уже сделанных приближений). Теперь же для решения (6) используем приближение, основанное на следующем предположении. Будем считать, как нам это и подсказывает опыт, что распад возбужденного состояния ДУС – медленный процесс ($\Gamma \ll \omega_{TLS}$). Это обусловлено слабостью электромагнитного взаимодействия ДУС с вакуумными флуктуациями радиационного поля. Отсюда следует, что на временах τ таких, что $\tau \gg 0$, множитель $e^{i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,k})\tau}$ в подынтегральном выражении (6) быстро осциллирует, и подынтегральное выражение не дает вклада в интеграл. Существенный вклад дает лишь окрестность $\tau \approx 0$. Поэтому будем считать, что $C_e(t - \tau) \approx C_e(t)$, и вынесем этот множитель из интеграла. Физический смысл такого приближения заключается в том, что мы считаем распад возбуждения ДУС процессом «без памяти», т. е. марковским процессом. Поскольку основной вклад в интеграл в (6) дает окрестность нуля, мы расширим верхний предел интегрирования по τ до ∞ . Окончательно получаем

$$\dot{C}_e(t) = -C_e(t) \sum_k \omega_{R,k}^2 \int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,k})\tau}. \quad (7)$$

Теперь интегрирование можно провести аналитически, воспользовавшись формулой Сохоцкого:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) \mp i\pi\delta(x), \quad (8)$$

где \mathcal{P} – главное значение интеграла. Для этого введем в показатель экспоненты в (7) слагаемое $\varepsilon t''$ для того, чтобы интеграл «сошелся», а затем устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ к нулю, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,k})\tau - \varepsilon\tau} &= \frac{i}{\omega_{CM,k} - \omega_{TLS} + i\varepsilon} = \\ &= i \left[\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega_{CM,k} - \omega_{TLS}}\right) - i\pi\delta(\omega_{CM,k} - \omega_{TLS}) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получаем окончательно

$$\dot{C}_e(t) = -\left(\frac{\Gamma}{2} + i\Delta\omega\right)C_e(t), \quad (10)$$

где

$$\Gamma/2 = \pi \sum_k \omega_{R,k}^2 \delta(\omega - \omega_{TLS}) \quad (11)$$

– скорость спонтанной релаксации, и

$$\Delta\omega = \sum_k \frac{\omega_{R,k}^2}{\omega - \omega_{TLS}} \quad (12)$$

есть смещение частоты перехода ДУС. В свободном пространстве эта величина ответственна за лэмбовский сдвиг.

Выражения (11) и (12) можно записать в несколько ином виде

$$\Gamma/2 = V\pi \int d\omega \omega_R^2(\omega) \rho(\omega) \delta(\omega - \omega_{TLS}) = V\pi \omega_R^2(\omega_{TLS}) \rho(\omega_{TLS}), \quad (13)$$

$$\Delta\omega = \mathcal{P} \int d\omega \frac{V\rho(\omega)\omega_{R,k}^2(\omega)}{\omega - \omega_{TLS}}. \quad (14)$$

Здесь мы ввели плотность состояний $\rho(\omega)$ – число мод в частотном интервале $d\omega$ в единице объёма V . Отметим, что в каждом конкретном случае величину $\rho(\omega)$ нужно вычислять исходя из физической природы континуума мод, с которыми взаимодействует атом. Однако в некоторых случаях в качестве плотности состояний можно взять некоторую модельную функцию, чтобы оценить скорость спонтанной релаксации.

Теперь рассмотрим два частных случая применения развитой выше теории. А именно, мы рассмотрим релаксацию ДУС в свободном пространстве и в резонаторе с конечной шириной линии.

2. Релаксация в свободном пространстве

Атом в свободном пространстве можно рассматривать как атом в резонаторе, объём которого $V \rightarrow \infty$, и, следовательно, все моды будут близко

расположены по частоте. Теперь в выражении (1): $\omega_{CM,k} \equiv \omega_k = c|\mathbf{k}|$ – частоты мод свободного пространства, моделируемого большим резонатором с размером L и объемом квантования $V = L^3$, $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(m,n,l)$, а суммирование подразумевается как по волновым векторам, так и по поляризациям. Константа взаимодействия: $\omega_{R,k} = \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{\hbar V}} \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{eg}$ является вакуумной частоты Раби в случае свободного пространства, а $\mathbf{e}_{k,\alpha}$ – единичный вектор в направлении поляризации электрического поля МР.

Суммирование в (6) нужно заменить на интегрирование, воспользовавшись стандартным «правилом суммирования»:

$$\sum_{\mathbf{k}} \omega_{R,k}^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dk \cdot k^2 \omega_R^2(k, \theta, \varphi), \quad (15)$$

где (φ, θ, k) – запись вектора \mathbf{k} в полярной системе координат, а индекс α означает поляризацию.

Произведём сначала суммирование по поляризациям.

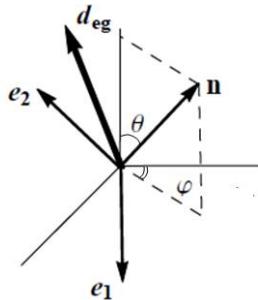


Рис. 8. Взаимное расположение действующих векторов

Выберем для простоты линейные поляризации, когда орты действительны и

$$\begin{aligned} & (\mathbf{e}_1 \mathbf{d}_{eg})^2 + (\mathbf{e}_2 \mathbf{d}_{eg})^2 = ? \\ & \mathbf{d} = \mathbf{e}_1 (\mathbf{d}_{eg} \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2 (\mathbf{d}_{eg} \mathbf{e}_2) + \mathbf{n} (\mathbf{d}_{eg} \mathbf{n}), \\ & \mathbf{d}_{eg}^2 = (\mathbf{d}_{eg} \mathbf{e}_1)^2 + (\mathbf{d}_{eg} \mathbf{e}_2)^2 + (\mathbf{d}_{eg} \mathbf{n})^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Если \mathbf{d}_{eg} – действительный вектор, то искомая сумма $\mathbf{d}_{eg}^2 - (\mathbf{d}_{eg} \cdot \mathbf{n})^2 = \mathbf{d}_{eg}^2 \sin^2 \theta$. Дальнейшее интегрирование в (13) элементарно и в итоге даёт

$$\Gamma = \frac{4}{3} \frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2 \omega_{TLS}^3}{\hbar c^3}. \quad (17)$$

Аналогично для сдвига частоты получаем

$$\Delta\omega = \frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2 \omega_{TLS}^3}{3\pi\hbar c^3} \int_0^\infty \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega_{CM,\mathbf{k}} - \omega_{TLS}}\right) d\omega_{CM,\mathbf{k}}. \quad (18)$$

Данная величина представляет собой лэмбовский сдвиг частоты перехода ДУС (частоты центра линии излучения), возникающий из-за взаимодействия ДУС с вакуумными флуктуациями радиационных мод свободного пространства. Формально интеграл (16) расходится. Физический смысл этой расходимости связан с неприменимостью нерелятивистского гамильтониана Джейнса–Каммингса на высоких частотах, когда излученные ДУС-фотоны способны рождать («выбивать» из вакуума) виртуальные электрон–позитронные пары с энергией $\hbar\omega_{\mathbf{k}} \approx 2mc^2$, где m – масса электрона. Точное вычисление лэмбовского сдвига $\Delta\omega$ может быть проведено только методами КЭД с учетом релятивистских и радиационных поправок. Однако оценку $\Delta\omega$ по порядку величины можно сделать, обрезав интеграл (18) на частоте $\omega_{CM,\mathbf{k}} \approx \hbar^{-1} 2mc^2$. Это дает

$$\Delta\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2 \omega_{TLS}^3}{3\pi\hbar c^3} \ln\left(\frac{2mc^2}{\hbar\omega_{TLS}}\right). \quad (19)$$

Полученное выражение лишь численным множителем отличается от предсказания КЭД. Таким образом, лэмбовский сдвиг: $\Delta\omega \sim \Gamma \ll \omega_{TLS}$, т. е. находится в микроволновой области частот. Это оправдывает сделанное выше предположение: $\Gamma \ll \omega_{TLS}$, составляющее существо приближения Вайскопфа–Вигнера.

Итак, вероятность нахождения ДУС в возбужденном состоянии убывает экспоненциально:

$$|C_e(t)|^2 = \exp(-\Gamma t) \quad (20)$$

с характерным временем жизни $\tau = \Gamma^{-1}$.

Теперь выясним, в каком состоянии находится излучаемый фотон. В процессе спонтанного распада ДУС излучает квант энергии, среднее значение которой равно $\hbar\omega_{TLS}$. Состояние волны, испущенной в процессе спонтанного излучения описывается амплитудой

$$\begin{aligned} C_{g,k}(t) &= -i\omega_{R,k} \int_0^t dt' e^{-i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,k})t' - \Gamma t'/2} = \\ &= \omega_{R,k} \frac{\left(1 - e^{-i(\omega_{TLS} - \omega_{CM,k})t - \Gamma t/2}\right)}{(\omega_{CM,k} - \omega_{TLS}) + i\Gamma/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, состояние поля излучения (фотонная часть волновой функции) на больших временах $t \gg \Gamma^{-1}$ есть

$$|pole\rangle = \sum_k \omega_{R,k} \frac{1}{(\omega_{CM,k} - \omega_{TLS}) + i\Gamma/2} |1_k\rangle. \quad (22)$$

В этом можно убедиться ещё так. Волновая функция системы «ДУС + поле» есть

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{\Gamma t}{2}} |e\rangle |0\rangle + \sum_k \omega_{R,k} \frac{1 - e^{i(\omega_{CM,k} - \omega_{TLS})t - \frac{\Gamma t}{2}}}{(\omega_{CM,k} - \omega_{TLS}) + i\Gamma/2} |g\rangle |1_k\rangle. \quad (23)$$

Таким образом, при $t \gg \Gamma^{-1}$ состояние полной системы есть $|\Psi(\infty)\rangle = |g\rangle |pole\rangle$, как в (16). Полевое состояние $|pole\rangle$ уже в готовом виде разложено по однофотонным состояниям. Это позволяет получить распределение вероятности излученных фотонов по частотам:

$$\begin{pmatrix} \text{вероятность} \\ \text{испущенному фотону} \\ \text{иметь частоту } \omega, \omega + d\omega \end{pmatrix} = d\omega \frac{\omega_{R,k}^2 \rho(\omega)}{|(\omega - \omega_{TLS}) + i\Gamma/2|^2}, \quad (24)$$

где $\rho(\omega)$ – плотность числа фотонных мод свободного пространства обоих поляризаций. Здесь важно отметить, что $\omega_{R,k}^2 \rho(\omega)$ есть в точности $(1/\pi)(\Gamma/2)$, т. е. нормировка (23) выполняется автоматически, как и должно быть, т.к. (23) нормирует волновой вектор $|\Psi(t)\rangle$.

Таким образом, распределение вероятностей, а значит и интенсивностей $I(\omega)$, представляет собой лоренцевскую линию:

$$\frac{I(\omega)}{I_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(\omega - \omega_{TLS})^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (25)$$

где I_0 – полная интенсивность излучения, определяемая из условия нормировки:

$$\int I(\omega) d\omega = I_0. \quad (26)$$

В заключении отметим, что сравнивая (13) и (17), получаем выражение для плотности состояний электромагнитного поля в вакууме:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{3\pi^2 c^3}. \quad (27)$$

3. Релаксация в резонаторе, фактор Пёрселла

Теперь кратко на качественном уровне обсудим вопрос, как меняется скорость спонтанного излучения атома, находящегося не в свободном пространстве, а в резонаторе. Этот вопрос впервые был рассмотрен Пёрселлом. Он утверждал, что вероятность спонтанного излучения в однодомовом резонаторе Γ_{res} может быть получена из вероятности спонтанного излучения атома в свободном пространстве Γ путём деления её на плотность осцилляторов поля в свободном пространстве $\rho(\omega) = \omega^2 / 3\pi^2 c^3$ и умножения на величину $Q / \pi\omega_{CM}V$, имеющую условный смысл плотности осцилляторов поля в mode резонатора (Q – добротность, V – объём моды резонатора, $\lambda = 2\pi c / \omega_{CM}$, c – скорость света):

$$\Gamma_{res} = \Gamma \frac{3\lambda^3 Q}{8\pi^2 V}. \quad (28)$$

Последняя формула предсказывает изменение вероятности спонтанного распада при переходе от свободного пространства к резонатору. Например, для микроволнового диапазона длин волн, когда длина волны излучения сравнима с линейными размерами резонатора, $\lambda^3 \sim V$ и $Q \approx 10^4$, имеем $\Gamma_{res} \approx 4 \cdot 10^2 \Gamma$. Также существенное увеличение скорости спонтанного распада будет иметь место вблизи открытых металлических нанорезонаторов в оптическом диапазоне, $V \sim (\lambda/10)^3$ и $Q \sim 10$, $\Gamma_{res} \approx 4 \cdot 10^2 \Gamma$. Однако возможен и обратный предельный случай. Например, для тех же

микроволновых резонаторов больших размеров, $V \sim (100\lambda)^3$ и $Q \approx 10^4$, получаем $\Gamma_{res} \approx 4 \cdot 10^{-3}$.

В следующей лекции мы получим формулу (25), используя метода преобразования Лапласа.

Контрольные вопросы

1. Напишите гамильтониан взаимодействия ДУС с континуумом мод поля.
2. На каком предположении основано приближение Вайскопфа–Вигнера?
3. Почему мы в наших рассуждениях можем применить формулу Сохоцкого?
4. Каков физический смысл расходимости интеграла (13)?
5. Записать плотность состояний свободного пространства.
6. Записать выражение для скорости релаксации ДУС в свободном пространстве.
7. Какова плотность состояний электромагнитного поля в резонаторе?
8. Записать скорость релаксации ДУС в резонаторе.
9. Что такое фактор Пёрселла?
10. Записать выражение для фактора Пёрселла прямоугольного резонатора.

Задачи

1. Докажите справедливость формулы Сохоцкого:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x).$$

2. Покажите, что плотность числа фотонных состояний $\rho(\omega)$ равна $\omega^2/\pi^2 c^3$.
3. Покажите, что частота Раби «на один фотон» для разложения по «бесгущим фотонам» в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем для «стоячих».
4. По какому параметру малости мы ограничиваем наше гильбертово пространство только сектором () .
5. Покажите, что оценка для лэмбовского сдвига (13) совпадает с ответом
Бете $\Delta\omega/\omega \approx \ln \frac{mc^2}{\hbar\omega_{TLS}}$ с точностью до численного коэффициента.
6. Покажите, что выражение для распределения вероятностей излученного фотона по частоте (17) уже нормировано.

7. Радиационный переворот спина в магнитном поле. Вычислите время жизни «верхнего» состояния спина $s=1/2$ в магнитном поле H_0 .
8. Оцените по порядку величины время жизни $2p$ состояния атома водорода.
9. Найти угловое распределение фотонов спонтанного перехода $|2,1,0\rangle \rightarrow |1,0,0\rangle$ и $|2,1,\pm 1\rangle \rightarrow |1,0,0\rangle$ атома водорода.
10. Вычислить скорость спонтанного перехода атома водорода из $2p$ в $1s$ состояние.
11. Покажите эквивалентность гамильтонианов взаимодействия $-\frac{e}{mc}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}}$ и $-\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{E}}$ в дипольном приближении.
12. Матрица плотности в смешанном состоянии имеет вид $\hat{\rho} = \sum_{\psi} \rho_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi|$. Используя уравнение Шредингера для чистого состояния $|\psi\rangle$, вычислить $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}$.
13. Доказать, что $\det e^{\hat{A}} = e^{Sp\hat{A}}$.
14. Классический заряд e с массой m вращается по круговой орбите вокруг кулоновского центр-заряда e . Учитывая слабость радиационного затухания, вычислите ширину его линии излучения Γ , время высвечивания τ и лэмбовский сдвиг $\Delta\omega_L$. Оцените численные значения этих величин для водородного электрона на орбите основного состояния.
15. При условиях предыдущей задачи найти выражение для лэмбовского сдвига $\Delta\omega_L$ в квантовом рассмотрении и его оценку для перехода $2p \rightarrow 1s$ в атоме водорода.
16. Гамильтониан заряженной частицы в электромагнитном поле в нерелятивистском приближении имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}/c)^2 + q\varphi - \mu\mathbf{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

где $\hat{H}_0 = \mathbf{p}^2/2m$. Для задачи об излучении атома водорода в свободном пространстве слагаемое $q\varphi$ можно положить равным нулю. Остальные слагаемые по порядку величины можно оценить следующим образом:

$$q\mathbf{A}\mathbf{p}/mc \sim \alpha^{3/2} \left(\frac{\lambda^3}{V} \right)^{1/2} E_0,$$

$$\mu H \sim (ka_B) \alpha^{3/2} \left(\frac{\lambda^3}{V} \right)^{1/2} E_0,$$

$$q^2 A^2 / 2mc^2 \sim \alpha^3 \left(\frac{\lambda^3}{V} \right) E_0.$$

Здесь E_0 – характерная энергия электрона в атоме водорода, λ – длина волн излучения при переходе $2p \rightarrow 1s$, V – объём квантования. Видно, что в оптическом диапазоне взаимодействием спина с магнитным полем можно пренебречь, поскольку $ka_B \sim \alpha$. В свободном пространстве $V \gg \lambda$, поэтому третьим слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым. При рассмотрении излучения атома не в свободном пространстве, а в резонаторе, обычно также оставляют только первое из выше перечисленных слагаемых, которое приводит к гамильтониану вида $-dE$. Для резонаторов типа Фабри–Перо такое приближение оправдано, поскольку минимально возможный объём резонатора $V \sim \lambda^3$, и первое слагаемое остаётся доминирующим.

Однако ситуация становится более интересной, если в качестве резонатора рассмотреть плазмонные наноструктуры. Объём таких резонаторов может быть много меньше длины волн. А если добиться условия $V \leq (\alpha\lambda)^3$, то третье слагаемое по порядку величины будет сравнимо с первым слагаемым.

Исследуйте характер спонтанной релаксации атома в резонаторе, объём которого $V \leq (\alpha\lambda)^3$.

Литература

1. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. – М.: Физматлит, 2000. – 895 с.
2. Скали М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. – М.: Физматлит, 2003. – 510 с.
3. Шляих В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве. – М.: Физматлит, 2005. – 756 с.
4. Carmichael H.J. An open systems approach to quantum optics. – Berlin: Springer, 1993. – 179 p.
5. Carmichael H.J. Statistical Methods in Quantum Optics 2: Non-Classical Fields. – Berlin: Springer, 2008. – 540 p.
6. Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G. Atom-photon interactions Basic processes and applications. – New York: John Wiley & Sons, 1992. – 656 p.
7. Ораевский А.Н. Спонтанное излучение в резонаторе // УФН. – 1994. – 164. – С. 415–427.

ЛЕКЦИЯ 7. Спонтанное излучение атома в резонаторе

Усложнять – просто, упрощать – сложно.
Законы Мёрфи

Введение

В предыдущей лекции мы кратко обсудили вопрос о том, как меняется скорость спонтанного излучения атома, находящегося не в свободном пространстве, а в резонаторе. Было отмечено, что главным фактором, влияющим на скорость спонтанной релаксации, является плотность состояний окружения, в котором находится атом. Отметим однако, что приведённые рассуждения имеют один серьёзный недостаток. Именно, если связь с модой резонатора является достаточно сильной, а затухание моды слабым, то ожидается в некотором виде получить осцилляции Раби, которые были нами рассмотрены в лекции 5. Аргументы же, основанные на сравнении только плотности состояний, не позволяют получить динамики, отличные от экспоненциальной. В данной лекции мы рассмотрим вопрос о динамике атома в резонаторе подробнее.

1. Динамика спонтанного распада возбуждённого состояния, находящегося в резонаторе

Гамильтониан взаимодействующих мод резонатора и двухуровневого атома был нами подробно исследован в лекции 5. Он имеет вид

$$\hat{H} = \hbar\omega_{TL} \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hbar\omega_{CM} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\Omega_R (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}). \quad (1)$$

Мы знаем, что данный гамильтониан описывает осцилляции Раби (осцилляции энергии) как моды резонатора, так и ДУСа. В то же время для описания спонтанной релаксации необходим континuum мод. Роль континума мод в данной задаче будут играть «стенки» резонатора – набор мод, описывающих потери энергии резонатора. Ввести такие моды можно точно так же, как в предыдущей лекции мы описывали континум мод свободного пространства. При этом физика взаимодействия моды резонатора с модами «стенок» для нас несущественна, поскольку её, как мы увидим ниже, при достаточно общих предположениях можно будет описать одним параметром – добротностью резонатора.

Итак, гамильтониан системы «двуухровневый атом» + «мода резонатора» + «стенки резонатора» запишем в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega_{TLS}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \hbar\omega_{CM}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega_R(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a}) + \hbar\sum_n\omega_n\hat{b}_n^\dagger\hat{b}_n + \hbar\sum_n\gamma_n(\hat{a}^\dagger\hat{b}_n + \hat{b}_n^\dagger\hat{a}). \quad (2)$$

Здесь ω_n , \hat{b}_n , γ_n – собственная частота, оператор уничтожения и константа взаимодействия n -й моды стенки резонатора соответственно. Далее мы воспользуемся тем же приёмом, что и в предыдущей лекции, а именно, выделим из всего пространства возможных состояний только такие, которые соответствуют одному кванту возбуждения в системе. Тогда волновую функцию системы атом + моды резонатора + «стенки» можно представить в виде

$$\Psi(t) = A(t)\exp(-i\omega_{TLS}t)|e,0,0\rangle + B(t)\exp(-i\omega_{CM}t)|g,1,0\rangle + \sum_n C_n(t)\exp(-i\omega_n t)|g,0,1_n\rangle. \quad (3)$$

Здесь $|e,0,0\rangle$ означает состояние, в котором атом возбуждён, а моды резонатора и стенки – «пустые», $|g,1,0\rangle$ – состояние, в котором возбуждена мода резонатора, $|g,0,1_n\rangle$ – состояние, в котором возбуждена n -я мода стенки резонатора.

Подставляя (3) в уравнение Шредингера, получим систему

$$i\dot{A}(t) = \Omega_R B(t)\exp(-i(\omega_{CM} - \omega_{TLS})t), \quad (4)$$

$$i\dot{B}(t) = \Omega_R A(t)\exp(i(\omega_{CM} - \omega_{TLS})t) + \sum_n \gamma_n C_n(t)\exp(-i(\omega_n - \omega_{CM})t), \quad (5)$$

$$i\dot{C}_n(t) = \gamma_n B(t)\exp(i(\omega_n - \omega_{CM})t). \quad (6)$$

Данную систему уравнений удобно решать методом фурье-преобразования, явно учитывающего начальные условия, которые в нашем случае имеют вид $A(0)=1$, $B(0)=0$, $C_n(0)=0$. Выполняя фурье-преобразование:

$$\alpha(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty A(t)\exp(iqt)dt, \quad (7)$$

$$\beta(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty B(t) \exp(-i(\omega_{CM} - \omega_{TLS})t) \exp(iqt) dt, \quad (8)$$

$$S_n(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty C_n(t) \exp(-i(\omega_n - \omega_{TLS})t) \exp(iqt) dt, \quad (9)$$

получаем следующую алгебраическую систему уравнений:

$$-\frac{i}{2\pi} + q\alpha(q) = \Omega_R \beta(q), \quad (10)$$

$$(q - \Delta)\beta = \Omega_R \alpha(q) + \sum_n \gamma_n S_n(q), \quad (11)$$

$$(q - \delta_n) S_n(q) = \gamma_n \beta, \quad (12)$$

где введены обозначения $\Delta = \omega_{CM} - \omega_{TLS}$, $\delta_n = \omega_n - \omega_{TLS}$. Решения уравнений (11) и (12) будут следующими:

$$S_n(q) = \frac{\gamma_n}{q - \delta_n} \beta(q), \quad (13)$$

$$\beta(q) = \frac{\Omega_R}{q - \Delta} \alpha(q) + \frac{\beta(q)}{q - \Delta} \sum_n \frac{\gamma_n^2}{q - \delta_n}. \quad (14)$$

Для дальнейших вычислений рассуждают следующим образом. Если мы рассмотрим систему, состоящую только из моды резонатора и мод «стенок», то получим следующий ответ

$$S_n(q) = \frac{\gamma_n}{q - \delta_k} \beta(q), \quad (15)$$

$$\beta(q) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{q - \sum_n \frac{\gamma_n^2}{q - \delta_n}}. \quad (16)$$

Для временной зависимости амплитуды вероятности возбуждения моды получим

$$B(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-iqt) dq}{q - \sum_n \frac{|\gamma_n|^2}{q - \delta_n}}. \quad (17)$$

По теореме о вычетах динамика $B(t)$ определяется полюсами подынтегрального выражения в (17). Чтобы их найти, мы, как и в предыдущей лекции, перейдём от суммирования к интегрированию, вводя плотность состояний $\rho(\omega)$:

$$\sum_n \frac{|\gamma_n|^2}{q - \delta_n} = \int \frac{d\omega \rho(\omega) |\gamma_n(\omega)|^2}{q - \delta_n(\omega)}. \quad (18)$$

Полученный интеграл оценим, как и в предыдущей лекции, по формуле Сохоцкого:

$$\int \frac{d\omega \rho(\omega) |\gamma_n(\omega)|^2}{q - \delta_n(\omega)} \simeq \int \frac{d\omega \rho(\omega) |\gamma_n(\omega)|^2}{q - \delta_n(\omega) + i\varepsilon} = -i\Gamma/2 + \Delta\omega. \quad (19)$$

Здесь скорость затухания моды резонатора $\Gamma/2$ и сдвиг частоты $\Delta\omega$ определяются формулами (13) и (14) из предыдущей лекции. Тогда затухание моды резонатора будет иметь вид

$$B(t) \sim \exp(-i\Delta\omega t - \Gamma t/2), \quad (20)$$

т. е. будет представлять экспоненциальное затухание. Этот же результат мы получили в предыдущей лекции, используя те же самые приближения. По существу, мы свели всю информацию о взаимодействии резонатора со стенками к эффективной скорости затухания.

Основным приближением на данном этапе является то, что в мы будем полагать, что при возбуждении двухуровневой системой мода резонатора затухает так же, как и в её отсутствии. Тогда знаменатель выражения (14) будет выглядеть следующим образом

$$\sum_n \frac{|\gamma_n|^2}{q - \delta_n} \rightarrow -i\Gamma/2. \quad (21)$$

(для простоты будем считать сдвиг частоты равным нулю, $\Delta\omega = 0$).

Это даёт следующее решение для уравнений (10) – (12):

$$\alpha(q) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{q - \frac{\Omega_R^2}{q - \Delta + i\Gamma/2}}, \quad (22)$$

$$\beta(q) = \frac{\alpha(q)\Omega_R}{q - \Delta + i\Gamma/2}. \quad (23)$$

Обратное фурье-преобразование даёт решение исходной системы уравнений (10) – (12) на амплитуды вероятностей:

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon-\infty} \frac{\exp(-iqt) dq}{q - \frac{\Omega_R^2}{q - \Delta + i\Gamma/2}}, \quad (24)$$

$$B(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega_R \exp(-i(q-\Delta)t) dq}{(q-\Delta+i\Gamma/2) \left(q - \frac{\Omega_R^2}{q-\Delta+i\Gamma/2} \right)}, \quad (25)$$

$$C_n(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_n \Omega_R \exp(-i(q-\delta_n)t) dq}{(q-\delta_n)(q-\Delta+i\Gamma/2) \left(q - \frac{\Omega_R^2}{q-\Delta+i\Gamma/2} \right)}. \quad (26)$$

Видно, что полюса подынтегральных выражений будут определяться корнями уравнений

$$q_{1,2}(q_{1,2}-\Delta+i\Gamma/2)-\Omega_R^2=0, \quad q_3-\delta_n=0, \quad (27)$$

зная которые, можно записать (24) – (26) в виде

$$A(t) = \frac{(q_1-\Delta+i\Gamma/2)\exp(-iq_1t)}{q_1-q_2} + \frac{(q_2-\Delta+i\Gamma/2)\exp(-iq_2t)}{q_2-q_1}, \quad (28)$$

$$B(t) = \Omega_R \left(\frac{\exp(-i(q_1-\Delta)t)}{q_1-q_2} + \frac{\exp(-i(q_2-\Delta)t)}{q_2-q_1} \right), \quad (29)$$

$$C_n(t) = \gamma_n \Omega_R \left(\frac{\exp(-i(q_1-\delta_n)t)}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)} + \frac{\exp(-i(q_2-\delta_n)t)}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)} + \frac{\exp(-i(q_3-\delta_n)t)}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)} \right). \quad (30)$$

Прежде чем приступить к анализу полюсов, отметим, что корни $q_{1,2}$ имеют мнимую часть, поэтому $A(\infty)=B(\infty)=0$, а корень q_3 действительный, поэтому $C(\infty)$ отлично от нуля. Это соответствует тому, что квант возбуждения переходит безвозвратно в континuum мод стенок резонатора. Спектр спонтанной релаксации определим поэтому как

$$g(\omega) = |C(\infty)|^2 \rho(\omega) = \frac{\Omega_R^2 \rho(\omega)}{|q_3-q_1|^2 |q_3-q_2|^2}. \quad (31)$$

2. Режим слабой связи, фактор Пёрселла

Уравнение (27) можно решить точно, однако с точки зрения физики представляется интересным рассмотреть два предельных случая. Первый соответствует случаю, когда константа Раби взаимодействия атома с модой резонатора много меньше скорости затухания резонатора, $\Omega_R \ll \Gamma$. В этом случае корни (27) можно оценить, как

$$q_1 \approx -i\Gamma/2 + \Delta, q_2 \approx \Omega_R^2 / (i\Gamma/2 - \Delta). \quad (32)$$

Тогда

$$|A(t)|^2 \approx \exp\left(-\frac{\Omega_R^2 \Gamma}{(\Gamma/2)^2 + \Delta^2} t\right). \quad (33)$$

Таким образом, эффективная скорость спонтанной релаксации атома в резонаторе есть

$$\gamma_{CM} = \frac{\Omega_R^2 \Gamma}{(\Gamma/2)^2 + \Delta^2}. \quad (34)$$

В резонансном случае, $\Delta = 0$, можно получить хорошо известное выражение для фактора Пёрселла – отношение скоростей спонтанной релаксации атома в резонаторе и в свободном пространстве:

$$P \equiv \gamma_{CM} / \gamma_0 = \frac{4\Omega_R^2}{\Gamma \gamma_0}. \quad (35)$$

Подставляя полученное в прошлой лекции значение для скорости спонтанной релаксации в свободном пространстве γ_0 и выражение для частоты Раби Ω_R , мы придём к полученному в прошлой лекции из эфристических соображений выражение для фактора Перселя (25).

Спектр спонтанной релаксации будет иметь вид лоренцевской линии.

3. Режим сильной связи, дублетная структура спектра

Теперь рассмотрим случай сильной связи, когда $\Omega_R \gg \Gamma$. Корни уравнения (27) можно оценить, как

$$q_1 \approx -(i\Gamma/4 - \Delta/2) \pm \Omega_R. \quad (36)$$

Тогда

$$|P(t)|^2 \approx \exp(-\Gamma t/2) \cos^2(\Omega_R t). \quad (37)$$

Видно, что вместо экспоненциальной релаксации имеют место осцилляции Раби. Это естественно, поскольку в пределе малых потерь мы должны получить результат бездиссипационного случая, а именно осцилляции Раби.

Спектр спонтанной релаксации примет вид

$$g(\omega) = \frac{\Omega_R^2 \Gamma / 2\pi}{\left((\omega - \omega_{CM} - \Omega_R)^2 + (\Gamma/4)^2\right)^2 \left((\omega - \omega_{CM} + \Omega_R)^2 + (\Gamma/4)^2\right)^2}. \quad (38)$$

Видно, что получившаяся линия имеет два максимума на частотах, отстоящих от частоты моды резонатора на $\pm \Omega_R$. Это отражает осцилляции Раби амплитуд вероятностей.

В заключении отметим, что само понятие фактора Перселла (35) справедливо только в случае слабой связи. Это даёт для него оценку сверху

$$P = \frac{4\Omega_R^2}{\Gamma\gamma_0} \approx \left(\frac{\Omega_R}{\Gamma}\right)^2 \frac{\Gamma}{\gamma_0} \leq \frac{\Gamma}{\gamma_0}. \quad (39)$$

Это и понятно, потому что в режиме сильной связи имеет место не экспоненциальное затухание, а осцилляции Раби, затухающие со скоростью $\Gamma/2$.

Контрольные вопросы

1. Запишите гамильтониан взаимодействия атома с модой резонатора и со стенками резонатора.
2. Записать выражение для скорости релаксации ДУС в резонаторе в режиме слабой связи.
3. Записать выражение для спектра спонтанной релаксации ДУС в резонаторе в режиме слабой связи.
4. Записать выражение для скорости релаксации ДУС в резонаторе в режиме сильной связи.
5. Записать выражение для спектра спонтанной релаксации ДУС в резонаторе в режиме сильной связи.

Задачи

1. Покажите, что величина фактора Перселла (35) совпадает с полученной ранее в лекции 6.
2. Получите спектр спонтанной релаксации атома в резонаторе в случае слабой связи.

3. Исследуйте, как меняется спектр спонтанной релаксации атома в резонаторе в случае сильной связи при наличии расстройки частот между частотой перехода ДУС ω_{TLS} и частотой моды резонатора ω_{CM} .

Литература

1. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. – М.: Физматлит, 2000. – 895 с.
2. Скали М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. – М.: Физматлит, 2003. – 510 с.
3. Шляих В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве. – М.: Физматлит, 2005. – 756 с.
4. Carmichael H.J. An open systems approach to quantum optics. – Berlin: Springer, 1993. – 179 p.
5. Carmichael H.J. Statistical Methods in Quantum Optics 2: Non-Classical Fields. – Berlin: Springer, 2008. – 540 p.
6. Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G. Atom-photon interactions Basic processes and applications. – New York: John Wiley & Sons, 1992. – 656 p.
7. Ораевский А.Н. Спонтанное излучение в резонаторе // УФН. – 1994. – 164. – С. 415–427.

ЛЕКЦИЯ 8. Сила Казимира

Сила Казимира: toy model, вакуумные флуктуации электромагнитного поля, температурные поправки.

Продавец газированной воды спрашивает:
«С каким сиропом желаете?» Если покупатель пожелал воды без сиропа, то продавец спрашивал: «Без какого сиропа? Без малинового, без вишневого?...»

Я.Б. Зельдович. Теория вакуума, быть может, решает загадку космологии. УФН, 1981, т. 133, вып. 3, с. 479.

Введение

Необходимость перехода к представлению о квантованном электромагнитном поле связана с экспериментальными фактами, которые невозможно объяснить полуклассической теорией. Квантованное электромагнитное поле представляет собой резервуар (термостат) – систему с бесконечным числом степеней свободы, обеспечивающую отток энергии от ДУС. Основное состояние поля, при котором отсутствуют фотоны, называется вакуумом $|0\rangle$. Вакуум даже в ограниченном объеме обладает бесконечно большой энергией. Поскольку вакуум – это простейшая модель поля в резонаторе, представляется важным оценить величину давления, оказываемого вакуумом на стенки резонатора.

С проблемой вакуума тесно связана задача об эффекте Казимира. С точки зрения теоретической физики вакуум вовсе не пустота. Вакуум представляет собой чрезвычайно динамичную среду, нечто вроде кипящей жидкости нулевых флуктуаций. Даже если в пространстве нет ни одной реальной частицы, ни одного кванта возбуждения. Оказывается, нулевые колебания вакуума имеют весьма отчетливые экспериментальные проявления. Одним из них является сила Казимира.

1. Toy model. Одномерное безмассовое скалярное поле

Основную идею возникновения эффекта Казимира можно проиллюстрировать на простейшем примере: давлении одномерного скалярного поля на стенки резонатора длины a . Такое поле можно представлять себе как струну с закрепленными концами, частоты мод которой

$$\omega_n = \frac{\pi n c}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Энергия вакуума в таком резонаторе:

$$E_{VR} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar \omega_n}{2} = \frac{\hbar \omega}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (2)$$

складывается из энергии пустых (не заполненных возбуждениями) мод резонатора. Здесь $\omega = \omega_1 = \frac{\pi c}{a}$. Энергия (2) представляет собой бесконечную величину. Ключевая идея Казимира (1948) заключалась в том, что давление на стенки резонатора (в данном случае – натяжение струны) определяется разностью (2), и энергии вакуума того же объема, но в отсутствии резонатора:

$$E_{VF} = \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega}{2} \rho(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega}{2} \int_0^{\infty} n dn, \quad (3)$$

где $\rho(\omega) = \frac{a}{\pi c}$ – спектральная плотность непрерывного частотного спектра мод поля в вакууме без резонатора. Изменение энергии вакуума, связанного с «внесением» в это место резонатора, и есть придуманная Казимиром, настоящая физическая энергия вакуума в резонаторе $E_{VC} = E_{VR} - E_{VF}$. Она представляет собой разность двух бесконечных величин:

$$E_{VC} = \frac{\hbar \omega}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n - \int_0^{\infty} n dn \right]. \quad (4)$$

Гениальное прозрение Казимира заключалось в том, что в этой разности бесконечностей тем не менее содержится осмысленная физическая информация. Оказалось, что выражение (4) обладает огромной предсказательной силой, если суметь его вычислить. Трюк, применяемый для вычисления этой разности, фактически представляет собой идеиное содержание, сущность любой перенормировки. Для вычисления (4) воспользуемся следующим приемом: введем экспоненциальное обрезание частоты с ростом n и в сумме, и в интеграле; а затем устремим его к нулю. Произведем в (4) замену $n \rightarrow ne^{-\alpha n}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\alpha n} = \frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^2},$$

$$\int_0^{\infty} ndn \rightarrow \int_0^{\infty} ne^{\alpha n} dn = \frac{1}{\alpha^2}.$$
(5)

При малых $\alpha \rightarrow 0$ разность этих двух величин есть $-\frac{1}{12} + O(\alpha)$.

Произошло обыкновенное чудо, в пределе $\alpha \rightarrow 0$ получился конечный ответ

$$E_{vc} = -\frac{\pi \hbar c}{24a}.$$
(6)

Таким образом, в нашей игрушечной модели наличие граничных условий, связывающих поле, ведет к появлению силы натяжения струны, стремящейся сблизить «стенки» резонатора. Чем меньше a , тем меньше энергия системы. Здесь проявляется роль граничных условий: физически они играют роль внешнего поля, действующих на систему внешних сил.

Итак, сила натяжения вакуума $P = \frac{\partial E_{vc}}{\partial a}$ есть

$$P = \frac{\pi \hbar c}{24a^2}.$$
(7)

Регуляризации расходящихся величин (5) можно добиться и более стандартным способом. Применяя формулу суммирования Абеля–Плана (см. задачу 3), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} n - \int_0^{\infty} ndn = i \int_0^{\infty} \frac{2itdt}{e^{2\pi t} - 1} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{xdx}{(e^x - 1)} = -\frac{1}{12}.$$
(8)

Здесь мы учли, что $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{(e^x - 1)} = (n-1)! \zeta(n)$ и $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Таким обра-

зом, мы снова приходим к выражению для силы натяжения вакуума (7).

Итак, мы рассмотрели азбуку эффекта Казимира. Мы увидели, что для простейшей модели квантованной струны (скалярного безмассового поля) граничные условия играют роль идеализированного внешнего поля. Квантовые свойства вакуума во внешнем поле существенно зависят от граничных условий. Например, в случае непроницаемых границ области,

в которую он заключен, вакуум ведет себя подобно максвелловскому упругому эфиру с отрицательной энергией и напряжением [4–7]. Подобная ясность в понимании физического смысла явления стала возможной благодаря ключевой идеи Крамерса: энергия вакуума представляет собой разность энергии вакуума в резонаторе и энергии вакуума без резонатора. Таким образом, наблюдаемой величиной является таким образом регуляризованная (ренормированная) разность энергий E_{VC} нулевых колебаний, E_{VR} и E_{VF} , каждая из которых представляет собой бесконечную величину.

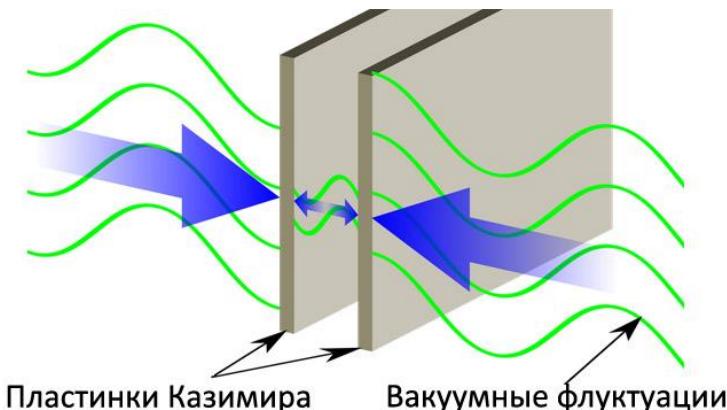


Рис. 9. Иллюстрация эффекта Казимира

При изменении расстояния между стенками резонатора a энергия внутренней области E_{VC} изменяется. Вакуумная же энергия внешних областей, даже если и отлична от нуля вследствие наличия границ, при передвижении стенок не изменяется: это ясно уже из отсутствия конечного параметра (размера) внешнего пространства (см. рис. 9). Полная энергия системы, таким образом, уменьшается как $E_{VC} \sim -a^{-1}$ при сближении стенок. Так возникает сила (давление, натяжение) $P \sim -a^{-2}$, стремящаяся сблизить стены. Важно подчеркнуть, что этот вывод существенно определяется как свойствами струны, так и конкретным видом граничных условий. Например, для массивного скалярного поля, или при полупроницаемых границах сила натяжения может изменять знак [4, 5]. Для того, чтобы обсудить это подробнее, рассмотрим более реалистическую модель эффекта Казимира.

2. Вакуумные флуктуации электромагнитного поля

Пусть электромагнитное поле заключено в прямоугольный резонатор объемом L^2 с идеально проводящими стенками. Стенки представляют собой квадраты со стороной L , расположенные на расстоянии a друг от друга. Будем, как и выше, рассматривать энергию вакуума на единицу площади квадратных пластин за вычетом энергии вакуума свободного пространства того же объема (казимировскую энергию E_C). Ее производная по координате a равна давлению вакуума на пластины P и имеет размерность $[ML^{-1}T^{-2}]$. В задачу входят только величины \hbar, c и a . Границные условия, состоящие в том, что вектор \mathbf{E} перпендикулярен, а \mathbf{B} параллелен на внутренней поверхности пластины, не добавляют никаких размерных величин.

Ясно, что, как и E_C , давление $P \sim \hbar$. Следовательно, из соображений размерностей, давление должно быть $P \sim \frac{\hbar c}{a^4}$. Мы покажем сейчас, что это будет сила притяжения.

Продольные моды ($k_x, k_y = k_{\parallel}$) квазинепрерывны с плотностью числа состояний $2 \frac{L^2}{(2\pi)^2}$. Поперечные моды принимают дискретные состояния $k_z = \frac{\pi n}{a}$; $n = 0, 1, \dots$, чтобы узлы поля располагались на пластинах. При этом имеется две поляризации, за исключением $n = 0$ ($k_z = 0$), когда поляризация одна. Энергия нулевых колебаний поля в таком резонаторе E_R равна сумме по модам α , описанным выше

$$E_R = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} = \frac{\hbar c}{2} \sum_a |\mathbf{k}_{\alpha}| = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L^2 d\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[|\mathbf{k}_{\parallel}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \right]. \quad (9)$$

Видно, что мы выделили в (9) вклад моды $n = 0$ с одной поляризацией в отдельное слагаемое. Мы должны вычесть отсюда энергию нулевых колебаний свободного пространства того же объема:

$$E_R = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} = \frac{\hbar c}{2} \sum_a |\mathbf{k}_{\alpha}| = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L^2 d\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[|\mathbf{k}_{\parallel}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \right], \quad (10)$$

где мы перешли к интегрированию по непрерывной n для сходства с выражением (9). Таким образом, казимировская энергия на единицу площади равна

$$L^2 E_C = \frac{\hbar c}{2\pi} \int_0^\infty k dk \left(\frac{k}{2} + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} - \int_0^\infty dn \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \right), \quad (11)$$

где мы перешли к интегрированию по полярным координатам $|\mathbf{k}_\parallel| = k$.

Выражение (11) имеет вид

$$L^2 E_C = \frac{\pi \hbar c}{4a^3} \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty dn F(n) \right], \quad (12)$$

удобный для применения формулы суммирования Эйлера–Маклорена.

Здесь мы ввели для удобства $F(n) = \int_0^\infty dx \sqrt{x+n^2}$. Замечая, что

$F(n) = \int_{n^2}^\infty dx \sqrt{x}$, получаем $F'(n) = -2n^2$, $F''(n) = -4$. Воспользовавшись

формулой суммирования Эйлера–Маклорена, получаем

$$L^2 E_C = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720a^3}. \quad (13)$$

При этом давление $P = -\frac{\partial(L^2 E_C)}{\partial a}$ дается выражением

$$P = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} = -\frac{0,013}{\left(\frac{a}{1\text{мкм}}\right)^4} \left[\frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right]. \quad (14)$$

Таким образом, изменение энергии вакуума электромагнитного поля вследствие внесения двух параллельных проводящих пластин приводит к возникновению между ними силы притяжения. Ее и называют силой Казимира. Эту крошечную силу экспериментально обнаружил в 1958 г. Спарни М. Дж., который смог измерить не только ее величину, но и проверить зависимость от расстояния между пластинами.

К расчету (9)–(14) следует сделать важный комментарий. Из-за ультрафиолетовых расходимостей при больших k , выражения (9) и (10) все еще не определены, они представляют собой бесконечные величины. Для получения сходящихся выражений необходимо умножить подынтеграль-

ные функции в (9), (10) на гладкую «обрезающую» функцию $f(k)$, равную единице $f(0)=1$ при малых $k \rightarrow 0$ и быстро спадающую $f(\infty)=0$ при больших $k \rightarrow \infty$. Она имеет ясный физический смысл. Для длин волн меньших, чем размер атома $k \ll a_B^{-1}$, приближение идеального проводника перестает быть реалистичным. При столь высоких частотах металл становится прозрачным, и стенки перестают удерживать излучение. «Обрезающая» функция как раз и учитывает это обстоятельство. Однако, как показывают вычисления, учет «обрезающего» фактора $f(k)$ приводит в окончательном результате (13), (14) лишь к малым поправкам $\sim \left(\frac{a_B}{a}\right)^2$ [1, 5–7].

3. Температурные поправки

Температура T стенок и среды, заполняющей резонатор, влияют на величину силы Казимира. Действительно, при $T \neq 0$ сила определяется производной не от энергии E , а от свободной энергии $F(T)$. Рассмотрим связь между P и $F(T)$ поподробнее.

Для вычисления $F(T)$ идеального газа фотонов в нашем резонаторе, удобнее всего воспользоваться большим каноническим ансамблем. Омега-потенциал в общем случае равен

$$\Omega = -T \ln Z, \quad Z = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_n e^{\frac{\mu N - E_n N}{T}}. \quad (15)$$

При вычислении большой статистической суммы Z идеального газа не являются фиксированными ни его энергия $\sum_k \varepsilon_k n_k$, ни полное число частиц $\sum_k n_k$, поскольку параметрами \mathbf{k} большого канонического ансамбля являются (T, V, μ) . Это очень удобно, особенно при работе с квазичастицами $\mu = 0$.

Это позволяет рассматривать газ как множество независимых «тел», помещенных в термостат. Под «телем» понимаем совокупность частиц газа, находящихся в данном (\mathbf{k}) одиночественном квантовом состоянии, а под термостатом – остальной газ. Тогда большая статсумма Z_k для каждого квантового состояния («тела») есть

$$Z_k = \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{\frac{(\mu - \varepsilon_k)n_k - \frac{\varepsilon_k}{2}}{T}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_k}{2T}}}{1 - e^{-\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}}}, \quad (16)$$

а для всего газа –

$$Z = \prod_k Z_k. \quad (17)$$

Для ферми-частиц в (16) вместо геометрической прогрессии будет всего два слагаемых. Кроме того, мы в явном виде ввели в (16) энергию нулевых колебаний так, что энергия $n_{\vec{k}}$ фотонов равна $\varepsilon_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$, где $\varepsilon_k = \hbar \omega_k$. Итак, омега-потенциал газа равен

$$\Omega = -T \ln Z = \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2} + T \ln \left(1 - e^{-\frac{\mu - \hbar \omega_k}{2T}} \right). \quad (18)$$

Теперь, учитывая, что химпотенциал фотонов равен нулю, $\mu = 0$, получаем для свободной энергии фотонного газа: $F = \Omega + \mu N = \Omega$; свободная энергия совпадает с омега-потенциалом:

$$F = \sum_k \left(\frac{\hbar \omega_k}{2} + T \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega_k}{T}} \right) \right). \quad (19)$$

Тогда для давления фотонного газа $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$ имеем

$$P = -\hbar \sum_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_k}{T}} - 1} \right) \frac{\partial \omega_k}{\partial V}. \quad (20)$$

В полученном виде соотношение (20) годится не только для фотонного, но и для фононного газов. Величины типа $\frac{\hbar \omega_k}{2}$ обычно опускаются, поскольку бесконечная нулевая энергия не важна для вопросов теплоемкости, коэффициента теплового расширения и параметра Грюнайзена. Однако нулевая энергия должна учитываться при рассмотрении фазовых переходов в решетке и силы Казимира в вакууме. Ее формально бесконечная величина

$$E_F = \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\hbar c k}{2} \frac{4\pi k^2 dk \cdot 2V}{(2\pi)^3} \sim \int_0^{\infty} k^3 dk = \infty \quad (21)$$

представляет определенную проблему для теории. Вклад нулевых колебаний в энергию оказывается бесконечным. Спасти теориюказалось возможным, признав, что речь идет о величине, которую невозможно измерить. От неприятной необходимости можно избавиться, просто сместив начало отсчета энергии фотонов, т. е. признав, что нулевых колебаний вовсе не существует. Однако такой подход оказался ошибочным. Нулевые колебания электромагнитного поля были обнаружены экспериментально. Сначала это был лэмбовский сдвиг (1947), а потом сила Казимира (1958).

Вернемся к последней. Зависимость частот собственных колебаний электромагнитного поля от размера резонатора приводит к возникновению давления вакуума в резонаторе. Используя выражение (20) и действуя аналогично изложенной выше процедуре регуляризации, для P получаем выражение, обобщающее (14) на случай ненулевой температуры $T \neq 0$. Приведем здесь для краткости только добавку $L^2 \Delta E_C$ к уже полученному результату (13), обусловленную конечной температурой:

$$L^2 \Delta E_C = \frac{\hbar c}{\pi} \int_0^\infty k dk \left[\frac{k}{2 \left(e^{\frac{ck}{T}} - 1 \right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}}{e^{\frac{c \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}}{T}} - 1} - \int_0^\infty \frac{dn \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}}{e^{\frac{c \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}}{T}} - 1} \right]. \quad (22)$$

Подробный анализ температурной поправки дан в [4, 5]. Здесь укажем только, что при малых температурах $T \ll T_0$, где $T_0 = \frac{\hbar c}{a}$ – температура излучения вакуума, поправка к давлению $\sim \left(\frac{T}{T_0} \right)^4$, а при высоких температурах получается $P \sim T$.

Контрольные вопросы

1. Какова ключевая идея возникновения эффекта Казимира?
2. Запишите Казимировскую энергию на единицу площади, а также формулу для давления на пластины и связь между ними.

3. Какой порядок имеет температурная поправка к давлению при малых температурах?

Задачи

1. Покажите, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1-q)^{-1} \quad u \quad \sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = (1-q)^{-2}. \quad (23)$$

2. Докажите справедливость формулы суммирования Эйлера–Маклорена:

$$-\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = -\frac{F'(0)}{12} + \frac{F'''(0)}{720} + \dots \quad (24)$$

и укажите область ее применимости.

3. Докажите справедливость формулы суммирования Абеля–Плана:

$$-\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{(e^{2\pi t} - 1)} dt \quad (25)$$

и укажите область ее применимости.

Подсказка: формула справедлива для аналитических в правой полу-плоскости функций $F(z)$, растущих на бесконечности медленнее $e^{2\pi|z|}$. На мнимой оси $F(z)$ может иметь простые полюса или точки ветвления, которые надо обходить справа.

4. Покажите, что (25) дает правильное аналитическое продолжение ζ -функции Римана $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ в левую полуплоскость.

5. Числа Бернули B_n определяются как коэффициенты разложения:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}. \quad (26)$$

Покажите, что $B_{2n} = (-1)^{n+1} (2\pi)^{-2n} \cdot 2 \cdot (2n)! \cdot \zeta(2n)$. Таким образом,

$B_0 = 1$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$. Покажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1} dx}{(e^x - 1)} = \frac{(2\pi)^{2n} (-1)^{n+1}}{4n} B_{2n}. \quad (27)$$

6. Покажите, что формула суммирования Абеля–Плана (25) справедлива, если

а) функция $F(z)$ регулярна при $\operatorname{Re}(z) \geq 0$;

б) равенство $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-2\pi|y|} F(x+iy) = 0$ выполняется равномерно, при $0 \leq x < \infty$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|y|} |F(x+iy)| dy = 0$.

7. Покажите, что формулу суммирования Эйлера–Маклорена можно записать в виде

$$-\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = -\frac{B_2}{2!} F'(0) - \frac{B_4}{4!} F''(0) - \dots \quad (28)$$

Литература

1. Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G. Atom-photon interactions Basic processes and applications. – New York: John Wiley & Sons, 1992. – 656 p.
2. Carmichael H.J. Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations. – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. Walls D.F., Milburn G.J. Quantum Optics. – Berlin: Springer, 2008. – 425 p.

ЛЕКЦИЯ 9. Диссипация в квантовой механике

Многие вещи нам непонятны не потому, что
Наши понятия слабы, но потому, что сии вещи

Не входят в круг наших понятий.
Козьма Прутков, «Плоды раздумий»

Введение

Как было установлено в предыдущих лекциях, для того чтобы описать спонтанное излучение атома в свободном пространстве или в резонаторе, необходимо включать в рассмотрение степени свободы той системы, взаимодействие с которой вызывает спонтанное излучение. В рассмотренных выше случаях это было электромагнитное поле. Отметим, что в случае резонатора в пределе слабой связи вероятность атома находится в возбуждённом состоянии убывала со временем по экспоненциальному закону, как и в случае свободного пространства. В связи с этим возникает вопрос о том, возможно ли описать процесс диссипации, пользуясь степенями свободы только атома и не вдаваясь в конкретный механизм его взаимодействия с окружением. Допустим, что это сделать можно, и состояние атома описывается волновой функцией $|\psi\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle$. Среднее значение дипольного момента было бы равно $\langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = \mathbf{d}_{eg} \langle \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^+ \rangle = c_e^* c_g + c_g^* c_e$ и отлично от нуля только когда либо $c_e = 0$, либо $c_g = 0$. Однако, если мы вычислим среднее значение дипольного момента атома, пользуясь состоянием для системы «атом» + «моды электромагнитного поля», полученным в лекции 6 выражением (23), мы будем иметь $\langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = 0$ во все моменты времени. Таким образом, описание процесса спонтанной релаксации атома с помощью волновой функции встречает существенные трудности. Однако их можно преодолеть, если ввести понятие матрицы плотности.

1. Матрица плотности, общие свойства

Если состояние системы можно описать волновой функцией (до сих пор только такие случаи и рассматривались), то его называют чистым

состоянием, а динамика волновой функции состояния подчиняется уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (1)$$

Матрица плотности чистого состояния определяется как $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Из уравнения (1) несложно получить уравнение, описывающее её динамику:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (2)$$

Допустим теперь, что состояние системы принимает с некоторой вероятностью p_i , $0 \leq p_i < 1$, состояние $|\psi_i\rangle$, и таких возможных состояний более одного. Тогда такое состояние называется *смешанным*, а его матрица плотности определяется как

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (3)$$

Поскольку коэффициенты p_i имеют смысл вероятностей, то $\sum_i p_i = 1$.

Среднее значение любого оператора \hat{A} определяется как

$$\hat{A} = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}). \quad (4)$$

Нетрудно получить следующие свойства матрицы плотности:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^*, \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle \geq 0 \quad \forall \psi. \quad (5)$$

Первое свойство отражает эрмитовость матрицы плотности, второе – её вероятностный характер. Третье свойство утверждает положительную определённость матрицы плотности.

Рассмотрим теперь, какой вид принимает матрица плотности в простейшем случае двухуровневого атома. Для чистого состояния $|\psi\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle$ она принимает вид

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |c_e|^2 & c_e c_g^* \\ c_e^* c_g & |c_g|^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для того чтобы получить матрицу плотности для смешанного состояния двухуровневой системы, необходимо просуммировать (6) с некоторыми коэффициентами p_i . Однако в общем виде её можно записать как

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} p_e & d_{eg} \\ d_{eg}^* & p_g \end{pmatrix}, \quad (7)$$

при этом коэффициенты удовлетворяют условиям

$$p_e + p_g = 1, \quad p_e p_g - |d_{eg}|^2 \geq 0. \quad (8)$$

Видно, что в при таких условиях дипольный момент двухуровневой системы d_{eg} может быть равен нулю при любых значениях населённостей верхнего p_e и нижнего p_g состояний.

Оказывается, что если состояние системы описывать матрицей плотности, то возможно описать процесс релаксации системы при достаточно общих предположениях.

2. Описание диссипации с помощью матрицы плотности. Управляющее уравнение

Мы представим теорию релаксации, основанную на использовании матрицы плотности. Будем считать, что система, релаксацию которой мы хотим описать, взаимодействует с другой системой, резервуаром. Нашей целью будет описание релаксации системы «в резервуар». Переменные, описывающие систему, будем отмечать индексом S , а резервуар – R . Гамильтониан системы, взаимодействующей с резервуаром, запишется следующим образом

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (9)$$

где \hat{H}_{SR} описывает взаимодействие системы и резервуара. В общем случае, состояние системы и резервуара будет описываться матрицей плотности ρ , а состояние одной системы будет определяться как $\rho_S = Tr_R[\rho]$, где след берётся по состояниям резервуара. Тогда среднее значение любого оператора \hat{O} (действующего на состояния системы): $\langle \hat{O} \rangle = Tr[\hat{O}\rho] = = Tr_S[Tr_R[\hat{O}\rho]] = Tr_S[\hat{O}\rho_S]$, т. е. выражается через матрицу плотности системы. Таким образом, необходимо получить уравнение на матрицу плотности системы так, чтобы свойства резервуара учитывались только в качестве параметров этого уравнения.

Динамика матрицы плотности всей системы описывается уравнением

$$\dot{\rho} = i/\hbar \cdot [\rho, \hat{H}] = i/\hbar \cdot [\rho, \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}]. \quad (10)$$

Далее мы будем работать в представлении взаимодействия, которое позволяет исключить слагаемые гамильтониана \hat{H}_S и \hat{H}_R , отвечающие собственным значениям энергии системы и резервуара, с помощью преобразования

$$\tilde{\rho} = \exp(i(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t/\hbar)\rho\exp(-i(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t/\hbar). \quad (11)$$

Тогда уравнение движения для матрицы плотности примет вид

$$\dot{\tilde{\rho}} = i/\hbar \cdot [\tilde{\rho}, \hat{H}_{SR}], \quad (12)$$

где $\hat{H}_{SR}(t) = \exp(i(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t/\hbar)\hat{H}_{SR}\exp(-i(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t/\hbar)$. Формальное интегрирование (12) даёт

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) + i/\hbar \cdot \int_0^t [\tilde{\rho}(t'), \hat{H}_{SR}(t')]dt'. \quad (13)$$

Подставляя это выражение для $\tilde{\rho}(t)$ в (12), получаем

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = i/\hbar \cdot [\tilde{\rho}(0), \hat{H}_{SR}(t)] - 1/\hbar^2 \cdot \int_0^t [[\tilde{\rho}(t'), \hat{H}_{SR}(t')], \hat{H}_{SR}(t)]dt'. \quad (14)$$

Данное уравнение полностью эквивалентно исходному уравнению на матрицу плотности (12), но в таком виде более удобно делать последующие приближения. Отметим, что данное уравнение является интегродифференциальным, т. е. значение матрицы плотности в данный момент времени зависит от её значения во все предыдущие моменты времени.

Первое слагаемое в (14) может быть исключено путем следующего преобразования

$$\hat{H}_S = \hat{H}_S + Tr_R(\hat{H}_{SR}\hat{\rho}_R(0)) \otimes \hat{1}_R, \quad (15)$$

которое представляет собой сдвиг нулевого уровня энергии гамильтониана системы \hat{H}_S .

Если теперь в уравнении (14) взять след по переменным резервуара, то получим уравнение на матрицу плотности системы:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -1/\hbar^2 \cdot \int_0^t Tr_R[[\tilde{\rho}(t'), \hat{H}_{SR}(t')], \hat{H}_{SR}(t)]dt'. \quad (16)$$

Дальнейшие вычисления существенным образом опираются на следующие приближения.

Во-первых, будем предполагать, что резервуар представляет собой систему с большим числом степеней свободы, а взаимодействие системы

с резервуаром будем считать настолько слабым, что его состояние не меняется со временем. То есть будем предполагать, что

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_R(0). \quad (17)$$

Можно показать, что поправки к выражению (17) будут содержать степени оператора взаимодействия \hat{H}_{SR} выше второй. По существу, данное приближение есть первый член в теории возмущений, построенной по оператору взаимодействия \hat{H}_{SR} . Данное приближение называют *борновским приближением*.

В результате получим уравнение на матрицу плотности одной системы:

$$\dot{\hat{\rho}}_S(t) = -1/\hbar^2 \cdot \int_0^t Tr_R \left\{ [[\tilde{\rho}_S(t') \cdot \rho_R(0), \hat{H}_{SR}(t')], \hat{H}_{SR}(t)] \right\} dt', \quad (18)$$

Во-вторых, будем предполагать, что гамильтониан системы и резервуара имеет следующий вид

$$\hat{H}_S = \hbar \omega_S \hat{s}^+ \hat{s}, \quad \hat{H}_R = \sum_k \hbar \omega_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k, \quad (19)$$

где операторы подчиняются либо бозонным, либо фермионным коммутационным соотношениям. Также будем считать, что гамильтониан взаимодействия между системой и резервуаром можно представить в виде гамильтониана Джейнса–Каммингса:

$$\hat{H}_{SR} = \sum_k \hbar \gamma_k \left(\hat{b}_k^+ \hat{s} + \hat{s}^+ \hat{b}_k \right). \quad (20)$$

Пользуясь формулой Бейкера–Хаусдорфа, полученной нами в лекции 1, можно показать, что как для бозонных, так и для фермионных коммутационных соотношений операторов \hat{s} , \hat{s}^+ и \hat{b} , \hat{b}^+ гамильтониан взаимодействия (20) в представлении взаимодействия будет иметь вид

$$\hat{H}_{SR} = \sum_k \hbar \gamma_k \left(\hat{b}_k^+ \hat{s} \exp(-i(\omega_S - \omega_k)t) + \hat{s}^+ \hat{b}_k \exp(i(\omega_S - \omega_k)t) \right). \quad (21)$$

Далее удобно будет ввести обозначения

$$\hat{F}(t) = -i \sum_k \gamma_k \hat{b}_k \exp(i(\omega_S - \omega_k)t). \quad (22)$$

Тогда гамильтониан (21) можно переписать в виде

$$\hat{H}_{SR} = \hbar \left(\hat{F}^+ \hat{s} + \hat{s}^+ \hat{F} \right). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (18) и раскрывая коммутатор, получаем

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t) = \int_0^t \left\{ \begin{aligned} & \left(\hat{s} \tilde{\rho}_S(t') \hat{s}^\dagger - \hat{s}^\dagger \hat{s} \tilde{\rho}(t') \right) \langle \hat{F}(t) \hat{F}^\dagger(t') \rangle \\ & + \left(\hat{s}^\dagger \tilde{\rho}_S(t') \hat{s} - \hat{s} \hat{s}^\dagger \tilde{\rho}(t') \right) \langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t') \rangle \\ & - \left(\hat{s}^\dagger \tilde{\rho}_S(t') \hat{s}^\dagger - \hat{s}^{\dagger 2} \tilde{\rho}(t') \right) \langle \hat{F}(t) \hat{F}(t') \rangle \\ & - \left(\hat{s}^\dagger \tilde{\rho}_S(t') \hat{s}^\dagger - \tilde{\rho}(t') \hat{s}^{\dagger 2} \right) \langle \hat{F}(t') \hat{F}(t) \rangle \end{aligned} \right\} dt' + h.c., \quad (24)$$

где угловые скобки обозначают след по переменным резервуара: $\langle \rangle = Tr_R(\)$.

В-третьих, будем считать, что резервуар находится в состоянии теплового равновесия, т. е. описывается распределением Гиббса:

$$\rho_R(0) = \prod_k \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right) \right) \exp\left(-\frac{\hbar\omega_k b_k^+ b_k^-}{k_B T}\right), \quad (25)$$

где k_B – постоянная Больцмана, T – температура. Пользуясь данной матрицей плотности, можно показать, что для средних значений операторов резервуара имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_k \rangle &= \langle \hat{b}_k^\dagger \rangle = \langle \hat{b}_k \hat{b}_k \rangle = \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k^\dagger \rangle = 0, \\ \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} \rangle &= \bar{n} \delta_{kk'}, \\ \langle \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger \rangle &= (\bar{n} + 1) \delta_{kk'}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\bar{n} = \left(\exp(\hbar\omega_k / k_B T) - 1 \right)^{-1}. \quad (26)$$

Теперь нужно вычислить корреляторы квантового шума резервуара. Используя выражения для средних значений операторов теплового резервуара, получаем следующие значения корреляторов:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}(t) \hat{F}(t') \rangle &= \langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}^\dagger(t') \rangle = 0, \\ \langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t') \rangle &= \sum_k \gamma_k^2 \bar{n}_k \exp(i(\omega_k - \omega_S)(t - t')), \\ \langle \hat{F}(t) \hat{F}^\dagger(t') \rangle &= \sum_k \gamma_k^2 (\bar{n}_k + 1) \exp(-i(\omega_k - \omega_S)(t - t')). \end{aligned} \quad (27)$$

Далее используем стандартный метод замены суммирования на интегрирование путём введения плотности состояний $D(\omega)$:

$$\sum_k \rightarrow \int_0^\infty D(\omega_k) d\omega_k, \quad (28)$$

что даёт

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t') \rangle &= \int_0^\infty D(\omega_k) \gamma^2(\omega_k) \bar{n}(\omega_k) \exp(i(\omega_k - \omega_s)(t - t')) d\omega_k, \\ \langle \hat{F}(t) \hat{F}^\dagger(t') \rangle &= \int_0^\infty D(\omega_k) \gamma^2(\omega_k) (\bar{n}(\omega_k) + 1) \exp(-i(\omega_k - \omega_s)(t - t')) d\omega_k. \end{aligned} \quad (29)$$

Заметим, что при подстановке (29) в (24) появятся интегралы от экспоненты, основной вклад в которые будут давать значения функций в момент времени t . Поэтому мы можем воспользоваться марковским приближением, как это было сделано в лекции 6.

Итак, в четвёртых, будем считать, что оператор плотности системы $\tilde{\rho}_s(t')$ под знаком интеграла можно заменить оператором $\tilde{\rho}_s(t)$. Это предположение разумно, поскольку релаксация разрушает память о прошлом. В результате получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt' \langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t') \rangle &= \gamma_s \bar{n}(\omega_s) + i\Delta_1, \\ \int_0^\infty dt' \langle \hat{F}(t) \hat{F}^\dagger(t') \rangle &= \gamma_s (\bar{n}(\omega_s) + 1) + i(\Delta_1 + \Delta_2), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \pi D(\omega_s) \gamma^2(\omega_s), \\ \Delta_1 &= P \int_0^\infty d\omega_k \frac{D(\omega_k) \gamma^2(\omega_k)}{\omega_s - \omega_k} \bar{n}(\omega_k), \quad \Delta_2 = P \int_0^\infty d\omega_k \frac{D(\omega_k) \gamma^2(\omega_k)}{\omega_s - \omega_k}, \end{aligned} \quad (31)$$

а P означает интеграл в смысле главного значения.

В результате получаем следующее уравнение на матрицу плотности системы:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_s(t) &= \frac{\gamma_s}{2} (\bar{n} + 1) \left(2\hat{s}\tilde{\rho}_s\hat{s}^\dagger - \hat{s}^\dagger\hat{s}\tilde{\rho}_s - \tilde{\rho}_s\hat{s}^\dagger\hat{s} \right) + \\ &\quad + \frac{\gamma_s}{2} \bar{n} \left(2\hat{s}^\dagger\tilde{\rho}_s\hat{s} - \hat{s}\hat{s}^\dagger\tilde{\rho}_s - \tilde{\rho}_s\hat{s}\hat{s}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (32)$$

В случае одномодового поля \hat{s} – оператор уничтожения \hat{a} , а в случае ДУС – оператор дипольного перехода $\hat{\sigma}$. Уравнение (32) является уравнением линдбладовского типа, описывающего общий вид допустимых

квантовых диссипативных уравнений. Иногда его удобно представить в виде

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) = \hat{L}\tilde{\rho}_s, \quad (33)$$

где \hat{L} – супероператор Лиувилля (лиувиллиан, иногда используется название линобладиан).

Далее нас будет интересовать класс задач, когда частота системы ω_s находится в оптическом диапазоне. Тогда даже при комнатной температуре $\bar{n}(\omega_s) = 0$ и (32) переходит в

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) = \frac{\gamma_s}{2} (2\hat{s}\tilde{\rho}_s\hat{s}^+ - \hat{s}^+\hat{s}\tilde{\rho}_s - \tilde{\rho}_s\hat{s}^+\hat{s}). \quad (34)$$

В заключении отметим, что помимо конкретизации модели системы и резервуара, мы использовали ещё два аспекта, независящих от модели приближения. А именно: мы считали, что, во-первых, взаимодействие с резервуаром слабое (борновское приближение), а, во-вторых, время корреляции резервуара много меньше характерной скорости релаксации системы настолько, что диссипативный процесс не имеет памяти (марковское приближение).

Контрольные вопросы

1. Записать определение чистого и смешанного состояний.
2. Записать определение для матрицы плотности.
3. Какому уравнению подчиняется динамика матрицы плотности?
4. Как определяется матрица плотности системы, которая взаимодействует с резервуаром?
5. Сформулировать приближения, которые используются для вывода управляющего уравнения (34).

Задачи

1. Получите из уравнения Шредингера (1) уравнения на матрицу плотности (2).
2. Покажите, что если гамильтониан системы является эрмитовым оператором, то из уравнения на матрицу плотности (2) следует уравнение Шредингера (1).
3. Покажите, что преобразование (15) обнуляет первое слагаемое уравнения (14).

4. Покажите, что поправка к выражению (17) приведёт к добавке в уравнении (16) третьей степени по константе взаимодействия. Вычислите эту добавку.
5. Покажите, что гамильтониан (20) в представлении взаимодействия имеет вид (21).

Литература

1. *Carmichael H.J.* An open systems approach to quantum optics. – Berlin: Springer, 1993. – 179 p.
2. *Barnett S.M., Radmore P.M.* Methods in theoretical quantum optics. – Oxford: Clarendon Press, 1997. – 292 p.
3. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. – Oxford: Oxford University Press, 2002. – 613 p.

ЛЕКЦИЯ 10. Простейшие решения управляющего уравнения

Работая над решением задачи,
всегда полезно знать ответ.
Законы Мёрфи

Введение

На прошлой лекции нами было получено управляющее уравнение, описывающее диссипацию квантовой системы. Это уравнение имеет вид

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) = \frac{\gamma_s}{2} (2\hat{s}\tilde{\rho}_s\hat{s}^+ - \hat{s}^+\hat{s}\tilde{\rho}_s - \tilde{\rho}_s\hat{s}^+\hat{s}), \quad (1)$$

где \hat{s} – оператор системы. При выводе данного уравнения нами явно использовалось то, что \hat{s} удовлетворяет либо бозонным, либо фермионным коммутационным соотношениям. Однако можно показать, что данное уравнение представляет собой наиболее общий вид локальных по времени уравнений, сохраняющих след и положительную определённость матрицы плотности.

В данной лекции мы исследуем решения этого уравнения в простейших случаях гармонического осциллятора и двухуровневой системы.

1. Диссипация гармонического осциллятора

В случае гармонического осциллятора управляющее уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_a(t) = & \frac{\gamma_a}{2} (\bar{n} + 1) (2\hat{a}\tilde{\rho}_a\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}\tilde{\rho}_a - \tilde{\rho}_a\hat{a}^+\hat{a}) + \\ & + \frac{\gamma_a}{2} \bar{n} (2\hat{a}^+\tilde{\rho}_a\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+\tilde{\rho}_a - \tilde{\rho}_a\hat{a}\hat{a}^+), \end{aligned} \quad (2)$$

где \hat{a} – оператор уничтожения. Найдём стационарное решение данного уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_a}{2} (\bar{n} + 1) (2\hat{a}\tilde{\rho}_a^{st}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}\tilde{\rho}_a^{st} - \tilde{\rho}_a^{st}\hat{a}^+\hat{a}) + \\ & + \frac{\gamma_a}{2} \bar{n} (2\hat{a}^+\tilde{\rho}_a^{st}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+\tilde{\rho}_a^{st} - \tilde{\rho}_a^{st}\hat{a}\hat{a}^+) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для этого нам необходимо выбрать базис в гильбертовом пространстве системы и составить уравнение на матричные элементы. Во второй лекции мы видели, что в случае гармонического осциллятора в качестве базиса можно выбрать собственные состояния $|n\rangle$ энергии гармонического осциллятора $\hat{H} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a}$, а также собственные состояния $|\alpha\rangle$ оператора уничтожения \hat{a} . В первом случае базис будет счётным, и уравнение (3) даст систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В случае осциллятора таких уравнений будет бесконечно много. Во втором случае комплексное собственное значение α состояния $|\alpha\rangle$ принимает континuum значений. Поэтому при разложении по такому базису возникнет уравнение в частных производных на функцию распределения по комплексному параметру α . При решении задач применяются оба подхода. В данной лекции удобнее будет произвести разложение по состояниям $|n\rangle$.

Домножая слева и справа уравнение (3) на состояние $\langle n|$ и $|n\rangle$ соответственно, получим

$$\gamma_a (\bar{n}+1) ((n+1)p_{n+1} - np_n) + \gamma_a \bar{n} (np_{n-1} - (n+1)p_n) = 0, \quad (4)$$

где $p_n = \langle n | \hat{\rho}_a^{\text{st}} | n \rangle$. Отметим, что n пробегает целые значения от 0 до ∞ . Решение разностного уравнения (4) будем искать в виде $p_n = C\xi^n$, где ξ не зависит от n . Такая подстановка даёт следующее уравнение на ξ :

$$(\bar{n}+1)(n+1)\xi - ((\bar{n}+1)n + \bar{n}(n+1)) + \bar{n}n / \xi = 0, \quad (5)$$

которое имеет два решения

$$\xi_1 = \frac{n}{n+1}, \quad \xi_2 = \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}. \quad (6)$$

Подходит только второе решение, поскольку оно не зависит от n . В результате получаем

$$p_n = C \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} \right)^n. \quad (7)$$

Неизвестный коэффициент C найдем из условия равенства следа матрицы плотности единице: $\sum_n p_n = 1$. Отсюда получаем

$$C = \frac{1}{\bar{n}+1}, \quad (8)$$

и окончательно

$$p_n = \frac{1}{\bar{n}+1} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} \right)^n. \quad (9)$$

В полученном распределении можно «узнать» распределение Гиббса. Действительно, вспоминая, что $\bar{n} = (\exp(\hbar\omega_a/kT) - 1)^{-1}$, получаем

$$p_n = \frac{\exp(-n\hbar\omega_a/kT)}{\bar{n}+1}. \quad (10)$$

Данный результат имеет ясный физический смысл. Взаимодействие гармонического осциллятора с резервуаром с температурой T приводит к тому, что сам осциллятор будет иметь температуру T , а среднее число квантов в нем будет определяться средним числом тепловых возбуждений в резервуаре \bar{n} .

Отметим также, что в стационарном состоянии выполняется принцип детального равновесия. Из выражения (4) следует, что вероятность заполнения $p_n |n\rangle$ определяется балансом скоростей перехода из данного состояния в состояния $|n-1\rangle$ и $|n+1\rangle$ со скоростями $\gamma_a(\bar{n}+1)p_n$ и $\gamma_a\bar{n}(n+1)p_n$ соответственно, и в данное состояние из состояний $|n-1\rangle$ и $|n+1\rangle$ со скоростями $\gamma_a\bar{n}p_{n-1}$ и $\gamma_a(\bar{n}+1)(n+1)p_{n+1}$ соответственно. Таким образом, можем сделать вывод о том, что первое слагаемое в (2) отвечает за релаксацию в резервуар, скорость которой пропорциональна $\gamma_a(\bar{n}+1)$, а второе слагаемое – за накачку резервуаром, скорость которой пропорциональна $\gamma_a\bar{n}$.

Теперь исследуем вопрос о том, как изменяются средние значения операторов со временем. Рассмотрим сначала среднее число квантов в осцилляторе:

$$\begin{aligned}
\dot{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} &= Tr(\dot{\hat{a}^\dagger} \hat{a} \hat{\rho}) = \frac{\gamma_a}{2} (\bar{n} + 1) Tr(\hat{a}^\dagger \hat{a} (2\hat{a} \tilde{\rho}_a \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho}_a - \tilde{\rho}_a \hat{a}^\dagger \hat{a})) + \\
&+ \frac{\gamma_a}{2} \bar{n} Tr(\hat{a}^\dagger \hat{a} (2\hat{a}^\dagger \tilde{\rho}_a \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \tilde{\rho}_a - \tilde{\rho}_a \hat{a} \hat{a}^\dagger)) = \\
&= \frac{\gamma_a}{2} (\bar{n} + 1) Tr(2\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho}_a - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho}_a - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho}_a) + \\
&+ \frac{\gamma_a}{2} \bar{n} Tr(2\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \tilde{\rho}_a - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \tilde{\rho}_a - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho}_a) = \\
&= \frac{\gamma_a}{2} (\bar{n} + 1) \langle 2\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + \\
&+ \frac{\gamma_a}{2} \bar{n} \langle 2\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь мы использовали управляющее уравнение на матрицу плотности (3) и возможностью циклической перестановки. Отметим, что уравнение (11) связывает производную от среднего значения оператора $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ с другими операторами. Таким образом, получается, вообще говоря, бескончная цепочка уравнений. Эта стандартная ситуация, с которой мы постоянно будем встречаться в дальнейшем. Однако в случае одного гармонического осциллятора выражение (11) сильно упрощается. А именно, используя коммутационное соотношение $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}$, получаем

$$\dot{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = -\gamma_a \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + \gamma_a \bar{n}. \tag{12}$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(0) \exp(-\gamma_a t) + \bar{n} (1 - \exp(-\gamma_a t)). \tag{13}$$

Видно, что среднее число квантов в осцилляторе экспоненциально затухает к стационарному значения \bar{n} , которое мы уже получили ранее из стационарного распределения p_n .

Найдем теперь, как меняется средняя величина амплитуды колебаний осциллятора $\langle \hat{a} \rangle$. Поступая аналогично выводу уравнения на $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, получаем

$$\dot{\langle \hat{a} \rangle} = -\frac{\gamma_a}{2} \langle \hat{a} \rangle, \tag{14}$$

или

$$\langle \hat{a} \rangle(t) = \langle \hat{a} \rangle(0) \exp(-\gamma_a t / 2). \quad (15)$$

Видно, что скорость затухания амплитуды в два раза меньше скорости затухания энергии. Это связано с видом Джейнса–Каммингса взаимодействия системы с резервуаром и, как следствие, с конкретным выбором оператора \hat{s} . В рассматриваемом нами случае этот оператор есть оператор уничтожения \hat{a} . Другие виды взаимодействия приводят к другому виду оператора \hat{s} и разным скоростям релаксации $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ и $\langle \hat{a} \rangle$.

2. Диссипация двухуровневой системы

В случае двухуровневой системы управляющее уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_\sigma(t) &= \frac{\gamma_\sigma}{2} (\bar{n} + 1) (2\hat{\sigma}\tilde{\rho}_\sigma\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\tilde{\rho}_\sigma - \tilde{\rho}_\sigma\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}) + \\ &+ \frac{\gamma_\sigma}{2} \bar{n} (2\hat{\sigma}^\dagger\tilde{\rho}_\sigma\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger\tilde{\rho}_\sigma - \tilde{\rho}_\sigma\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\hat{\sigma}$ – оператор перехода из возбуждённого $|e\rangle$ в основное $|g\rangle$ состояние. Будем действовать тем же способом, что и при исследовании гармонического осциллятора. Выберем в качестве базиса векторы $|e\rangle$ и $|g\rangle$.

Тогда из уравнения (16) получим

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ee}(t) &= -\gamma_D(\bar{n} + 1)\rho_{ee} + \gamma_D\bar{n}\rho_{gg}, \\ \dot{\rho}_{gg}(t) &= -\gamma_D\bar{n}\rho_{gg} + \gamma_D(\bar{n} + 1)\rho_{ee}, \\ \dot{\rho}_{eg}(t) &= -\frac{\gamma_D}{2}(2\bar{n} + 1)\rho_{eg}. \end{aligned} \quad (17)$$

Стационарное решение данной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_{ee}^{st} &= \frac{\bar{n}}{2\bar{n} + 1}, \\ \rho_{gg}^{st} &= \frac{\bar{n} + 1}{2\bar{n} + 1}, \\ \rho_{eg}^{st} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Видно, что первые два уравнения (18) представляют собой распределение Гиббса, поскольку $\rho_{ee}^{st}/\rho_{gg}^{st} = \exp(-\hbar\omega/kT)$, а ограниченность числа

уровней делает это распределение распределением Ферми–Дирака. Действительно, $\rho_{ee}^{st} = \left(\exp(\hbar\omega/kT) + 1 \right)^{-1}$.

Заметим, что полученные матричные элементы есть средние значения дипольного момента и инверсии населённостей. Действительно, $\langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = \mathbf{d}_{eg} \langle \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^+ \rangle = \mathbf{d}_{eg} (\rho_{eg} + \rho_{ge})$, $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \rho_{ee} - \rho_{gg}$. Стационарное значение инверсии населённостей равно

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle^{st} = -\frac{1}{2\bar{n} + 1}, \quad (19)$$

и в оптическом диапазоне может быть положено равным минус единице. Таким образом, для двухуровневой системы справедливы те же выводы, что и для гармонического осциллятора. А именно: взаимодействие с резервуаром с температурой T приводит к тому, что у двухуровневой системы также будет температура T , а среднее число квантов возбуждений будет определяться статистикой Ферми–Дирака.

3. Диссипация двухуровневой системы во внешнем поле

Теперь рассмотрим динамику двухуровневой системы, взаимодействующей с внешним монохроматическим полем и диссилирующей в резервуар. Напомним, что в случае отсутствия диссипации двухуровневая система во внешнем поле испытывала осцилляции Рabi.

Для того чтобы описать динамику, мы должны записать управляющее уравнение (16) не в представлении взаимодействия, а в исходном представлении Шредингера:

$$\dot{\rho}_\sigma(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_\sigma] + \frac{\gamma_\sigma}{2} (2\hat{\sigma}\hat{\rho}_\sigma\hat{\sigma}^+ - \hat{\sigma}^+\hat{\sigma}\hat{\rho}_\sigma - \hat{\rho}_\sigma\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}), \quad (20)$$

где в случае взаимодействия с внешним полем

$$\hat{H} = \hbar\omega_\sigma \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma} + \hbar\Omega (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^+)/2. \quad (21)$$

Уравнение на средние значение операторов примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\langle \hat{\sigma} \rangle} &= -\frac{\gamma_D}{2} \langle \hat{\sigma} \rangle + \frac{i\Omega}{2} \langle \hat{\sigma}_z \rangle, \\ \dot{\langle \hat{\sigma}^+ \rangle} &= -\frac{\gamma_D}{2} \langle \hat{\sigma}^+ \rangle - \frac{i\Omega}{2} \langle \hat{\sigma}_z \rangle, \\ \dot{\langle \hat{\sigma}_z \rangle} &= -\gamma_D (\langle \hat{\sigma}_z \rangle + 1) + i\Omega (\langle \hat{\sigma} \rangle - \langle \hat{\sigma}^+ \rangle). \end{aligned} \quad (22)$$

Видно, что система (22) отличается от бездиссипативного случая наличием релаксационных слагаемых. Стационарное решение данной системы имеет вид

$$\begin{aligned}\langle \hat{\sigma} \rangle &= -\frac{i\Omega_R \gamma_D}{\gamma_D^2 + 2\Omega_R^2}, \\ \langle \hat{\sigma}_z \rangle &= -\frac{\gamma_D^2}{\gamma_D^2 + 2\Omega_R^2}.\end{aligned}\tag{23}$$

Отметим, что средний дипольный момент имеет максимум при $\Omega_R = \gamma_D / \sqrt{2}$. С другой стороны, если зафиксировать константу взаимодействия Ω_R с внешним полем, то дипольный момент будет иметь максимум при $\gamma_D = \sqrt{2}\Omega_R$. Здесь мы столкнулись с первым примером нетривиального влияния диссипации на динамику системы: отклик системы максимален при конечных потерях. Это является частным проявлением эффекта стохастического резонанса.

Интересно отметить, что в отличие от бездиссипативного случая здесь нет осцилляций Раби. Возникает вопрос, проявляются ли в динамике системы эти социлляции. В следующей лекции мы подробно обсудим этот вопрос.

Контрольные вопросы

1. Запишите управляющее уравнение для гармонического осциллятора.
2. Запишите стационарное решение управляющего уравнения для гармонического осциллятора.
3. Запишите управляющее уравнение для двухуровневой системы.
4. Запишите стационарное решение управляющего уравнения для двухуровневой системы.
5. Запишите стационарное решение управляющего уравнения для двухуровневой системы во внешнем поле.

Задачи

1. Рассмотрите управляющее уравнение (1) для гармонического осциллятора в том случае, когда в качестве оператора \hat{s} используется оператор $\hat{a}^+ \hat{a}$. Выведите уравнение на средние значения операторов \hat{a} и $\hat{a}^+ \hat{a}$ и решите их.

2. То же, что и в задаче 1, только для случая двухуровневой системы с оператором \hat{s} , равным $\hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}$. Выведите уравнение на средние значения операторов $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}$ и решите их.
3. То же, что в задаче 2 для двухуровневой системы, взаимодействующей с внешним полем $E = E_0 \cos \omega t$.

Литература

1. *Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G.* Atom-photon interactions Basic processes and applications. – New York: John Wiley & Sons, 1992. – 656 p.
2. *Carmichael H.J.* Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations. – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Walls D.F., Milburn G.J.* Quantum Optics. – Berlin: Springer, 2008. – 425 p.

ЛЕКЦИЯ 11. Квантовая теорема регрессии. Двухвременные корреляционные функции

Если хочешь быть скучным – говори все.
Вольтер

Введение

В предыдущей лекции мы получили решение уравнения Линдблада в простейших случаях. Было также показано, каким образом получить динамику средних значений операторов. А именно, если известна зависимость матрицы плотности от времени $\rho(t)$, то среднее значение некоторого оператора \hat{A} в момент времени t есть $Tr(\hat{A}\hat{\rho}(t))$. Однако в некоторых задачах часто бывает нужно знать средние значения операторов в разные моменты времени, т. е. средние типа $\langle \hat{A}(t)\hat{B}(t') \rangle$. Такая ситуация возникает при вычислении спектров излучения. Действительно, спектр излучения можно определить как энергию на частоте ω : $S(\omega) = \hbar\omega \langle n(\omega) \rangle$. Используя преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \hbar\omega \langle n(\omega) \rangle = \hbar\omega \langle \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega) \rangle = \\ &= \hbar\omega \left\langle \int_0^\infty dt \hat{a}^+(t) \exp(i\omega t) \int_0^\infty dt' \hat{a}(t') \exp(-i\omega t') \right\rangle = . \quad (1) \\ &= \hbar\omega \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \langle \hat{a}^+(t) \hat{a}(t') \rangle \exp(i\omega(t-t')). \end{aligned}$$

Таким образом, двухвременные средние определяют спектр излучения и их вычисление является важной задачей. Однако заранее неясно, как их вычислять, если известна матрица плотности $\rho(t)$. Исследованию этого вопроса и посвящена настоящая лекция.

1. Вычисление двухвременных средних с помощью управляющего уравнения.

Итак, нам необходимо уметь вычислять двухвременные средние типа $\langle \hat{A}(t+\tau) \hat{B}(t) \rangle$, зная решение управляющего уравнения $\rho(t)$. Для этого, однако, нам необходимо начать с рассмотрения замкнутой большой системы, включающей как исследуемую систему S , так и резервуар R . В случае замкнутой системы имеем

$$\begin{aligned} & \langle A(t+\tau) B(t) \rangle = \\ & = Tr_{S+R} \left(\exp(i\hat{H}(t+\tau)) \hat{A} \exp(-i\hat{H}(t+\tau)) \exp(i\hat{H}t) \hat{B} \exp(-i\hat{H}t) \rho_S \otimes \rho_R \right) = (2) \\ & = Tr_S \left(\hat{A} Tr_R \left(\exp(-i\hat{H}\tau) \hat{B} \exp(-i\hat{H}t) \rho_S \otimes \rho_R \exp(i\hat{H}t) \exp(-i\hat{H}\tau) \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали то, что операторы \hat{A} и \hat{B} действуют только на степени свободы системы S , и возможность циклической перестановки под знаком следа. Теперь заметим, что величина $\exp(-i\hat{H}t) \rho_S \otimes \rho_R \exp(i\hat{H}t)$ есть $\rho(t)$, поскольку вся система является замкнутой, и её эволюция описывается эрмитовым гамильтонианом \hat{H} . Таким образом,

$$\langle A(t+\tau) B(t) \rangle = Tr_S \left(\hat{A} Tr_R \left(\exp(-i\hat{H}\tau) \hat{B} \rho(t) \exp(-i\hat{H}\tau) \right) \right). \quad (3)$$

Теперь заметим, что величина $\exp(-i\hat{H}\tau) \hat{B} \rho(t) \exp(-i\hat{H}\tau) \equiv X(t, \tau)$ подчиняется уравнению

$$\frac{d}{d\tau} X(t, \tau) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, X(t, \tau)], \quad X(t, 0) = \hat{B} \rho(t). \quad (4)$$

Такому же уравнению подчиняется матрица плотности всей системы $\rho(t)$. Для упрощения выражения (3) нам необходимо вычислить след $X(t, \tau)$ по переменным резервуара. Но, как мы видели в лекции 8, след по переменным резервуара в приближении Борна–Маркова приводит к тому, что след матрицы плотности по переменным резервуара $Tr_R(\rho(t))$ подчиняется управляющему уравнению в форме Линдблада. Действуя абсолютно аналогично для $X(t, \tau)$, получим, что след $X(t, \tau)$ по пере-

менным резервуара: $\text{Tr}_R X(t, \tau)$ также подчиняется управляющему уравнению в форме Линдблада:

$$\frac{d}{d\tau} \text{Tr}_R X(t, \tau) = \hat{L} \text{Tr}_R X(t, \tau), \quad X(t, 0) = \hat{B}\rho(t). \quad (5)$$

Таким образом, мы получили рецепт для вычисления средних типа $\langle \hat{A}(t + \tau) \hat{B}(t) \rangle$. Для этого необходимо сначала, решив управляющее уравнение, найти $\rho(t)$. Затем подействовать оператором \hat{B} и ещё раз решить управляющее уравнение с начальным условием $\hat{B}\rho(t)$. И, наконец, подействовать оператором \hat{A} , и взять след по переменным системы S . Отметим, что описанная выше процедура использует операции только в пространстве исследуемой системы S . Этую процедуру можно формально представить следующим образом. Если записать решение управляющего уравнения $\dot{\rho} = \hat{L}\rho$ в виде $\rho(t) = \hat{V}(t, 0)\rho(0)$, то тогда

$$\langle A(t + \tau) B(t) \rangle = \text{Tr}_S (\hat{A} V(t + \tau, t) \hat{B} V(t, 0) \rho(0)). \quad (6)$$

2. Квантовая теорема регрессии

Описанную выше процедуру также можно переписать в несколько ином виде. Допустим, что нам известен набор операторов $\{\hat{Y}_i\}$ такой, что динамика средних значений операторов описывается замкнутой линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \langle Y_i(t) \rangle = \sum_j M_{ij}(t) \langle Y_j(t) \rangle. \quad (7)$$

Тогда динамика двухвременных средних удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\tau} \langle Y_i(t + \tau) Y_k(t) \rangle = \sum_j M_{ij}(\tau) \langle Y_j(t + \tau) Y_k(t) \rangle \quad (8)$$

с начальным условием $\left. \langle Y_j(t + \tau) Y_k(t) \rangle \right|_{\tau=0} = \langle Y_j(t) Y_k(t) \rangle$, которое должно быть найдено из системы (7). Данное утверждение носит название *квантовой теоремы регрессии*. Её удобство состоит в том, что если известна система (7), то для нахождения двухвременных средних нужно решить, по существу, точно такую же систему (8) с новым начальным условием.

Квантовая теорема регрессии следует из равенства (6). Действительно, по определению среднего значения оператора имеем

$$\frac{d}{dt} \langle Y_i(t) \rangle = Tr_s(Y_i \dot{\rho}(t)) = Tr_s(Y_i \hat{L}\rho(t)). \quad (9)$$

По условию квантовой теоремы регрессии, след в (9) можно преобразовать как

$$Tr_s(Y_i \hat{L}\rho(t)) = \sum_j M_{ij}(t) \langle Y_j(t) \rangle = \sum_j M_{ij}(t) Tr_s(Y_j \rho(t)). \quad (10)$$

Из равенства (6) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle Y_i(t+\tau) Y_k(t) \rangle &= \frac{d}{d\tau} \langle Y_i V(t+\tau) Y_k V(t, 0) \rho(0) \rangle = \langle Y_i \hat{L}_\tau Y_k \rho(t) \rangle \\ &= Tr_s(Y_i \hat{L}_\tau Y_k \rho(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

По условию теоремы среднее значение в (11) можно преобразовать как

$$\begin{aligned} Tr_s(Y_i \hat{L}_\tau Y_k \rho(t)) &= \sum_j M_{ij}(\tau) Tr_s(Y_j V(t+\tau) Y_k \rho(t)) = \\ &= \sum_j M_{ij}(\tau) \langle Y_j(t+\tau) Y_k(t) \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались равенством (6). Из (11) и (12) следует утверждение квантовой теоремы регрессии.

Отметим, что ситуация, когда удается получить замкнутую систему уравнений на средние значения операторов, нередко возникает в задачах квантовой оптики. Ниже мы рассмотрим простейшие примеры применения квантовой теоремы регрессии.

3. Спектр затухающего квантового гармонического осциллятора

На прошлой лекции мы получили, что

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a} \rangle = -\frac{\gamma_a}{2} \langle \hat{a} \rangle. \quad (13)$$

Используя квантовую теорему регрессии, получаем, что

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{a}^+ (t+\tau) \hat{a}(t) \rangle = -\frac{\gamma_a}{2} \langle \hat{a}^+ (t+\tau) \hat{a}(t) \rangle \quad (14)$$

с начальным условием $\left. \langle \hat{a}^+ (t + \tau) \hat{a}(t) \rangle \right|_{\tau=0} = \langle \hat{a}^+ (t) \hat{a}(t) \rangle$. Величину $\langle \hat{a}^+ (t) \hat{a}(t) \rangle$ мы также вычислили на прошлой лекции:

$$\langle \hat{a}^+ (t) \hat{a}(t) \rangle = \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle (0) \exp(-\gamma_a t) + \bar{n} (1 - \exp(-\gamma_a t)). \quad (15)$$

Из (14) и (15) получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^+ (t + \tau) \hat{a}(t) \rangle &= \exp(-\gamma_a \tau / 2) \langle \hat{a}^+ (t) \hat{a}(t) \rangle = \\ &= \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle (0) \exp(-\gamma_a t) \exp(-\gamma_a \tau / 2) + \bar{n} (1 - \exp(-\gamma_a t)) \exp(-\gamma_a \tau / 2). \end{aligned} \quad (16)$$

Обычно в задачах о вычислении спектра излучения рассматривают стационарные процессы. Для вычисления спектра в стационарном режиме необходимо в (16) время t устремить к бесконечности. Тогда получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{a}^+ (t + \tau) \hat{a}(t) \rangle = \bar{n} \exp(-\gamma_a \tau / 2). \quad (17)$$

Видно, что спектр, соответствующий такой двухвременной корреляционной функции, будет иметь вид лоренцевской линии с полной шириной γ_a . Отметим, что затухающим гармоническим осциллятором можно описать системы с квантованным дипольным моментом, например, плазмонные наночастицы, с потерями энергии на излучение. Поскольку интенсивность излучения пропорциональна дипольному моменту, то (17) будет описывать спектр излучения такой системы.

4. Спектр затухающей двухуровневой системы

На прошлой лекции мы получили, что $\rho_{eg}(t) = -\frac{\gamma_D}{2}(2\bar{n}+1)\rho_{eg}$,

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma(t) \rangle = \frac{d}{dt} \rho_{eg}(t) = -\frac{\gamma_D}{2}(2\bar{n}+1) \langle \sigma(t) \rangle. \quad (18)$$

Используя квантовую теорему регрессии, получаем

$$\frac{d}{d\tau} \langle \sigma^+ (t + \tau) \sigma(t) \rangle = -\frac{\gamma_D}{2}(2\bar{n}+1) \langle \sigma^+ (t + \tau) \sigma(t) \rangle. \quad (19)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \langle \sigma^+ (t + \tau) \sigma(t) \rangle &= \exp(-\gamma_D (2\bar{n}+1) \tau / 2) \langle \sigma^+ (t) \sigma(t) \rangle = \\ &= \exp(-\gamma_D (2\bar{n}+1) \tau / 2) \langle \sigma^+ \sigma \rangle (0) \exp(-\gamma_D (2\bar{n}+1) \tau) + \\ &+ \bar{n} (1 - \exp(-\gamma_D t)) \exp(-\gamma_D (2\bar{n}+1) \tau / 2) / (2\bar{n}+1). \end{aligned} \quad (20)$$

В стационарном режиме, $t \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma^+ (t + \tau) \sigma(t) \rangle = \frac{\bar{n}}{2\bar{n} + 1} \exp(-\gamma_D (2\bar{n} + 1)\tau / 2). \quad (21)$$

Видно, что, как и в случае гармонического осциллятора, спектр будет описываться лоренцевской линией с полной шириной: $\gamma_D (\bar{n} + 1/2)$.

Отметим, что часто в стационарном состоянии вместо $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma^+ (t + \tau) \sigma(t) \rangle$ пишут $\langle \sigma^+ (\tau) \sigma(0) \rangle$, т. е. за начало отсчёта времени принимают начало стационарного режима. Мы будем использовать такое обозначение в дальнейшем.

5. Спектр резонансной флуоресценции

Теперь рассмотрим спектр в стационарном режиме двухуровневой системы, находящейся во внешнем поле. Её временная динамика была проанализирована в предыдущей лекции. Её можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{Mx} + \mathbf{x}_0, \quad (22)$$

где $\mathbf{x} = (\langle \sigma(t) \rangle, \langle \sigma^+(t) \rangle, \langle \sigma_z(t) \rangle)^T$, $\mathbf{x}_0 = (0, 0, -\gamma_D)^T$, а матрица \mathbf{M} имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\gamma_D / 2 & 0 & i\Omega_R / 2 \\ 0 & -\gamma_D / 2 & -i\Omega_R / 2 \\ i\Omega_R & -i\Omega_R & -\gamma_D \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Для применения квантовой теоремы регрессии сначала необходимо избавиться от слагаемого \mathbf{x}_0 в правой части (22). Делая замену

$$\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \left(\langle \sigma \rangle_{st}, \langle \sigma^+ \rangle_{st}, \langle \sigma_z \rangle_{st} \right)^T \equiv \left(\langle \Delta \sigma \rangle_{st}, \langle \Delta \sigma^+ \rangle_{st}, \langle \Delta \sigma_z \rangle_{st} \right)^T, \quad (24)$$

получаем

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (25)$$

Теперь, применяя квантовую теорему регрессии, получаем

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}}, \quad (26)$$

где матрица корреляторов $\tilde{\mathbf{X}}$ для стационарного случая имеет вид

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \langle \Delta\sigma(\tau)\Delta\sigma(0) \rangle & \langle \Delta\sigma(\tau)\Delta\sigma^+(0) \rangle & \langle \Delta\sigma(t+\tau)\Delta\sigma_z(0) \rangle \\ \langle \Delta\sigma^+(\tau)\Delta\sigma(0) \rangle & \langle \Delta\sigma^+(\tau)\Delta\sigma^+(0) \rangle & \langle \Delta\sigma^+(\tau)\Delta\sigma_z(0) \rangle \\ \langle \Delta\sigma_z(\tau)\Delta\sigma(0) \rangle & \langle \Delta\sigma_z(\tau)\Delta\sigma^+(0) \rangle & \langle \Delta\sigma_z(\tau)\Delta\sigma_z(0) \rangle \end{pmatrix} \quad (27)$$

с начальным условием $\tilde{\mathbf{X}}(0) = \langle \hat{s}_i \hat{s}_j \rangle_{st} - \langle \hat{s}_i \rangle_{st} \langle \hat{s}_j \rangle_{st}$, где \hat{s}_i – один из операторов $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}^+$, $\hat{\sigma}_z$, ввиду замены (24). Для вычисления спектра нам необходимо найти величины $\langle \sigma^+(\tau)\sigma(0) \rangle$. Из решения (26), однако, мы найдём только $\langle \Delta\sigma^+(\tau)\Delta\sigma(0) \rangle$. Связь этих величин определяется согласно равенству

$$\begin{aligned} \langle \Delta\sigma^+(t+\tau)\Delta\sigma(t) \rangle &= \left\langle (\sigma^+(t+\tau) - \langle \sigma^+ \rangle_{st})(\sigma(t) - \langle \sigma \rangle_{st}) \right\rangle = \\ &= \langle \sigma^+(t+\tau)\sigma(t) \rangle - \langle \sigma^+(t+\tau) \rangle \langle \sigma \rangle_{st} - \langle \sigma^+ \rangle_{st} \langle \sigma(t) \rangle + \langle \sigma^+ \rangle_{st} \langle \sigma \rangle_{st}. \end{aligned} \quad (28)$$

В стационарном режиме, $t \rightarrow \infty$, имеем

$$\langle \Delta\sigma^+(\tau)\Delta\sigma(0) \rangle = \langle \sigma^+(\tau)\sigma(0) \rangle - \langle \sigma^+ \rangle_{st} \langle \sigma \rangle_{st}. \quad (29)$$

Спектр резонансной флуоресценции тогда можно записать в виде

$$S(\omega) = \int_0^{2\pi} d\tau \exp(i\omega\tau) \langle \sigma^+(\tau)\sigma(0) \rangle = S_{coh} + S_{incoh}, \quad (30)$$

где

$$S_{coh} = \int_0^{2\pi} d\tau \exp(i\omega\tau) \langle \sigma^+ \rangle_{st} \langle \sigma \rangle_{st} \quad (31)$$

– когерентная часть спектра, определяемая стационарной динамикой дипольного момента двухуровневой системы, и

$$S_{incoh} = \int_0^{2\pi} d\tau \exp(i\omega\tau) \langle \Delta\sigma^+(\tau)\Delta\sigma(0) \rangle \quad (32)$$

– некогерентная часть спектра, определяемая квантовыми флюктуациями в стационарном режиме.

Отметим, что (31) можно вычислить сразу, поскольку стационарное значение дипольного момента мы знаем из предыдущей лекции:

$$S_{coh} = \frac{Y^2}{(1+Y^2)^2} \delta(\omega - \omega_{TLS}), \quad (33)$$

где $Y = \sqrt{2}\Omega_R / \gamma_D$. Данный вклад в спектр имеет классическую природу. Действительно, в классическом случае диполь под резонансным действием внешней силы в стационарном режиме испытывает гармонические колебания, спектр которых пропорционален дельта-функции.

Для вычисления некогерентного вклада в спектр $S_{incoh}(\omega)$ необходимо решить систему (26) и найти $\langle \sigma^+(\tau)\sigma(0) \rangle$. Прежде чем это сделать, приведём некоторые качественные соображения.

Мы можем сразу определить суммарную интенсивность:

$$I_{coh} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{coh}(\omega) = \frac{Y^2}{(1+Y^2)^2}, \quad (34)$$

$$I_{coh} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{incoh}(\omega) = \langle \Delta\sigma^+(0)\Delta\sigma(0) \rangle = \frac{Y^4}{(1+Y^2)^2}. \quad (35)$$

Отсюда видно, что отношение некогерентной и когерентной частей спектра определяется величиной $Y^2 = 2(\Omega_R / \gamma_D)^2$.

При $\Omega_R \ll \gamma_D$, т. е. в пределе слабого поля, преобладает когерентная часть спектра, которая имеет вид дельта-функции. В случае сильного поля, $\Omega_R \gg \gamma_D$, преобладает некогерентная часть спектра, которая, в свою очередь, определяется решением системы (26). Как мы видели в предыдущей лекции, в случае сильного поля собственные числа матрицы \mathbf{M} имеют два комплексно сопряжённых корня. То есть можно ожидать, что в спектре будут боковые пики на частотах $\omega_{TLS} \pm \Omega_R$.

Точное решение подтверждает это качественное соображение. Решение (26) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \sigma^+(\tau)\sigma(0) \rangle &= \frac{1}{4} \frac{Y^2}{1+Y^2} \exp(-\gamma_D \tau / 2) - \\ &- \frac{1}{8} \frac{Y^2}{(1+Y^2)^2} \left(1 - Y^2 + (1 - 5Y^2) \frac{\gamma_D}{4\delta} \right) \exp(-(3\gamma_D / 4 - \delta)t) - \\ &- \frac{1}{8} \frac{Y^2}{(1+Y^2)^2} \left(1 - Y^2 - (1 - 5Y^2) \frac{\gamma_D}{4\delta} \right) \exp(-(3\gamma_D / 4 + \delta)t). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $\delta = \sqrt{(\gamma_D / 4)^2 - \Omega_R^2}$. Видно, что в случае $\gamma_D / 4 \geq \Omega_R$ спектр имеет один пик с шириной $-\gamma_D$. В случае $\gamma_D / 4 \leq \Omega_R$ появляются два боковых

пика с ширинами $-3\gamma_D / 2$. Таким образом, в сильном поле спектр двухуровневой системы имеет трёхпиковую структуру. Такой спектр называется *спектром резонансной флуоресценции*, а также *триплетом Моллоу*.

6. Корреляционные функции второго порядка. Эффект Хенберри Брауна–Твисса

В дальнейшем нам понадобиться также вычислять корреляционные функции вида $\langle \hat{B}_1(t)\hat{A}(t+\tau)\hat{B}_2(t) \rangle$. Аналогично доказательству квантовой теоремы регрессии можно доказать, что дифференциальное уравнение на величину $\langle \hat{B}_1(t)\hat{A}(t+\tau)\hat{B}_2(t) \rangle$ по переменной τ будет точно таким же, как и дифференциальное уравнение на величину $\langle \hat{A}(t+\tau) \rangle$ по переменной t .

Важным примером является вычисление функции когерентности второго порядка, которая определяется как

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, t, \tau) = \frac{\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t+\tau)\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t+\tau)\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle}{\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t+\tau)\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t+\tau) \rangle}. \quad (37)$$

Здесь $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ – отрицательно и положительно определенные частотные части электрического поля в момент времени t в точке \mathbf{r} (подробнее см. в лекции 2). Данная функция характеризует корреляцию интенсивности излучения в различные моменты времени. Можно показать, что в терминах операторов рождения и уничтожения она примет вид

$$g^{(2)}(t, \tau) = \frac{\langle \hat{a}^+(t)\hat{a}^+(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle}{\langle \hat{a}^+(t)\hat{a}(t) \rangle^2}. \quad (38)$$

Вычислим корреляционную функцию второго порядка для излучающего затухающего гармонического осциллятора. В этом случае излученное поле пропорционально амплитуде осциллятора \hat{a} , поэтому нам достаточно вычислить (38), считая \hat{a} оператором уничтожения осциллятора.

На прошлой лекции мы получили следующее уравнение на число квантов в затухающем осцилляторе:

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a}^+(t)\hat{a}(t) \rangle = -\gamma_a \langle \hat{a}^+(t)\hat{a}(t) \rangle + \gamma_a \bar{n}. \quad (39)$$

Введём переменную $\hat{n} = \hat{n} - \bar{n}$. Для неё уравнение (38) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{n} \rangle = -\gamma_a \langle \hat{n} \rangle. \quad (40)$$

Используя указанные выше соображения, находим

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{a}^+ (t) \hat{n}(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle = -\gamma_a \langle \hat{a}^+ (t) \hat{n}(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle. \quad (41)$$

Отсюда находим

$$\langle \hat{a}^+ (t) \hat{n}(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle = \langle \hat{a}^+ (t) \hat{n}(t) \hat{a}(t) \rangle \exp(-\gamma_a \tau). \quad (42)$$

Теперь положим $t \rightarrow \infty$, т. е. будем рассматривать корреляцию второго порядка для стационарного состояния, и заметим, что

$$\langle \hat{a}^+ \hat{n} \hat{a} \rangle_{st} = \langle \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} \rangle_{st} - \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle_{st} \bar{n} = 2\bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \bar{n}^2. \quad (43)$$

Тогда получим

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \exp(-\gamma_a \tau). \quad (44)$$

Видно, что в начальный момент времени $g^{(2)}(0) = 2 > 1$. Случай, когда $g^{(2)}(0) > 1$ в эксперименте соответствует тому, что при разделении пучка испущенного света фотоны в разных пучках будут детектироваться группами с большей вероятностью, чем по отдельности. Поэтому случай $g^{(2)}(0) > 1$ называют группировкой фотонов. Видно, что для затухающего осциллятора как раз имеет место явление группировки фотонов.

Теперь рассмотрим случай затухающей двухуровневой системы. В этом случае имеем

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}^+ (t) \hat{\sigma}(t) \rangle = -\gamma_D \langle \hat{\sigma}^+ (t) \hat{\sigma}(t) \rangle + \gamma_D \bar{n}. \quad (45)$$

Введём переменную $\hat{s} = \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma} - \bar{n} / (2\bar{n} + 1)$. Для неё уравнение (38) перепишется в виде

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{\sigma}^+ (t) \hat{s}(t+\tau) \hat{\sigma}(t) \rangle = -\gamma_D (2\bar{n} + 1) \langle \hat{\sigma}^+ (t) \hat{s}(t+\tau) \hat{\sigma}(t) \rangle. \quad (46)$$

Отсюда находим

$$\langle \hat{\sigma}^+ (t) \hat{s}(t+\tau) \hat{\sigma}(t) \rangle = \langle \hat{\sigma}^+ (t) \hat{s}(t) \hat{\sigma}(t) \rangle \exp(-\gamma_D (2\bar{n} + 1) \tau). \quad (47)$$

Теперь положим $t \rightarrow \infty$, т. е. будем рассматривать корреляцию второго порядка для стационарного состояния и заметим, что

$$\left\langle \hat{o}^+ \hat{\tilde{s}} \hat{o} \right\rangle_{st} = \left\langle \hat{o}^+ \hat{o}^+ \hat{o} \hat{o} \right\rangle - \left\langle \hat{o}^+ \hat{o} \right\rangle_{st} \bar{n} / (2\bar{n} + 1) = - \left(\bar{n} / (2\bar{n} + 1) \right)^2. \quad (48)$$

Тогда получим

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \exp(-\gamma_D (2\bar{n} + 1)\tau). \quad (49)$$

Видно, что в начальный момент времени $g^{(2)}(0) = 0 < 1$. Таким образом, для затухающего двухуровневого атома имеет место явление антигруппировки фотонов.

В заключение приведём ответ для двухвременной корреляционной функции затухающего двухуровневого атома, находящегося под воздействием внешней гармонической волны. Он имеет вид

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \exp(-3\gamma_D (2\bar{n} + 1)\tau / 4) (\cosh \delta\tau + 3\gamma_D (2\bar{n} + 1) \sinh \delta\tau / 4\delta) \quad (50)$$

Видно, что когда амплитуда внешнего поля меньше критической величины, $\Omega_R \leq \gamma_D / 4$, то $g^{(2)}(\tau)$ монотонно увеличивается от нуля до единицы, т. е. качественно воспроизводится результат затухающего двухуровневого атома. Когда $\Omega_R > \gamma_D / 4$, существуют моменты времени, когда $g^{(2)}(\tau) > 1$.

Контрольные вопросы

1. Как вычисляются двухвременные средние значения операторов?
2. Запишите и докажите квантовую теорему регрессии.
3. Дайте определение корреляционной функции первого порядка.
4. Как связан спектр сигнала с корреляционной функцией первого порядка?
5. Запишите спектр затухающего гармонического осциллятора.
6. Запишите спектр затухающего двухуровневого атома.
7. Запишите спектр затухающего двухуровневого атома, взаимодействующего с внешней электромагнитной волной.
8. Дайте определение корреляционной функции второго порядка.
9. Запишите корреляционную функцию второго порядка для затухающего гармонического осциллятора.
10. Запишите корреляционную функцию второго порядка для затухающего двухуровневого атома.

11. Запишите корреляционную функцию второго порядка для затухающего двухуровневого атома, взаимодействующего с внешней электромагнитной волной.

Задачи

1. На основе квантовой теоремы регрессии получите спектр двухуровневой системы, взаимодействующей с внешней когерентной волной.
2. Получите корреляционную функцию второго порядка двухуровневой системы, взаимодействующей с внешней когерентной волной (выражение (50)).
3. Докажите справедливость следующих выражений:

$$\langle A(t_0)B(t_1)C(t_1)D(t_0) \rangle = Tr_s(BCV(t_1, t_0)D\rho(t_0)A), \quad (51)$$

$$\langle A(t)B(t+\tau) \rangle = Tr_s(BV(t+\tau, t)\rho(t)A), \quad (52)$$

$$\langle B(t+\tau)A(t) \rangle = Tr_s(BV(t+\tau, t)A\rho(t)). \quad (53)$$

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P.* Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics. – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J.* Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations. – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 12. Уравнение Линдблада для одномодового многоатомного лазера. Полуклассическое приближение

В действительности всё обстоит не так, как на самом деле.

Станислав Ежи Лец

Введение

В предыдущих лекциях мы описали в приближении Борна–Маркова диссиацию произвольной квантово-механической системы. В качестве частных случаев мы рассмотрели диссиацию двухуровневой системы и гармонического осциллятора. В оптическом диапазоне, когда число квантов в резервуаре $\bar{n} \approx 0$, динамику матрицы плотности можно описать следующим образом:

$$\dot{\rho}_s(t) = \frac{\gamma_s}{2} (2\hat{s}\rho_s\hat{s}^+ - \hat{s}^+\hat{s}\rho_s - \rho_s\hat{s}^+\hat{s}), \quad (1)$$

где оператор \hat{s} для двухуровневого атома есть оператор дипольного перехода $\hat{\sigma}$, а для гармонического осциллятора – оператор уничтожения \hat{a} . Напомним, что такой вид уравнения приводил к диссиации как амплитуды, так и энергии. Однако для описания динамики лазера нам потребуется рассмотреть ещё несколько важных типов диссипативных процессов, а именно процесс сбоя фазы и накачку двухуровневых атомов.

1. Фазовая релаксация и накачка двухуровневых атомов

В действительности, атомы, которые используются в качестве активной среды, не являются двухуровневыми. Однако для исследования многих вопросов такое двухуровневое приближение допустимо, если частота моды резонатора находится в резонансе с частотой рабочего перехода атома. Однако сложная энергетическая структура активной среды приводит к тому, что недиагональные элементы матрицы плотности, которые определяют фазовую когерентность между рабочими уровнями, затухают на несколько порядков быстрее, чем диагональные элементы, определяющие вероятность заселённостей рабочих уровней. Для описания процес-

са фазовой релаксации необходимо рассмотреть более сложное взаимодействие с внешним резервуаром. А именно: необходимо рассмотреть процессы рассеяния квантов энергии резервуара на двухуровневом атоме (задача 1). Мы здесь не будем приводить подробного вывода, а приведём лишь окончательный вид управляющего уравнения, которое получается в приближении Борна–Маркова и описывает фазовую релаксацию:

$$\dot{\rho}_s(t) = \frac{\gamma_{ph}}{2} (\hat{\sigma}_z \rho_s \hat{\sigma}_z - \rho_s). \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2) имеет вид уравнения Линдблада с оператором $\hat{s} = \hat{\sigma}_z$. Используя (2), с помощью соотношения $\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{A})$ можно вычислить, как будут релаксировать дипольный момент и инверсия населённостей атома (задача 2):

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{\sigma}} \rangle &= -\gamma_{ph} \langle \sigma \rangle / 2, \\ \langle \dot{\hat{\sigma}}_z \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Видно, что дипольный момент атома затухает, в то время как его инверсия населённостей, а следовательно и энергия, не меняются.

Ещё один диссипативный процесс, который необходимо описать, это накачка двухуровневых атомов. Соответствующее управляющее уравнение можно получить, если рассмотреть взаимодействие двухуровневого атома с резервуаром двухуровневых атомов с отрицательной температурой, т. е. считая, что такой резервуар постоянно находится в инвертированом состоянии (задача 3). Окончательный вид соответствующего управляющего уравнения в том случае, когда резервуар полностью инвертирован, следующий:

$$\dot{\rho}_s(t) = \frac{\gamma_{pump}}{2} (2\hat{\sigma}^\dagger \rho_s \hat{\sigma} - \hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger \rho_s - \rho_s \hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger). \quad (4)$$

Можно заметить, что процесс накачки отличается от процесса диссипации заменой операторов $\hat{\sigma}$ на $\hat{\sigma}^\dagger$ и наоборот. Уравнения движения имеют вид (задача 4):

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{\sigma}} \rangle &= -\gamma_{pump} \langle \sigma \rangle / 2, \\ \langle \dot{\hat{\sigma}}_z \rangle &= -\gamma_{pump} (\langle \hat{\sigma}_z \rangle - 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Видно, что процесс накачки приводит к тому, что инверсия релаксирует к максимальному значению, равному единице. Важно отметить, что про-

цесс накачки приводит к затуханию дипольного момента. Таким образом, накачка, как и диссипация, приводит к сбою фазы дипольного момента.

2. Управляющее уравнения одномодового многоатомного лазера

«Компьютеры бесполезны. Всё, что они могут дать –
это ответы на наши вопросы»
П. Пикассо

Теперь нам необходимо учесть все описанные выше процессы релаксации и записать управляющее уравнение для лазера. Ещё раз опишем модель, в рамках которой мы будем это делать. Мы рассматриваем одну моду резонатора, которая резонансно взаимодействует с двухуровневыми атомами. Такое взаимодействие мы будем описывать в рамках гамильтониана Джейнса–Каммингса, подробно проанализированного нами в лекции 6. Мода резонатора, взаимодействуя со стенками резонатора, затухает. Инверсия двухуровневых атомов и их дипольные моменты также затухают; также имеет место накачка двухуровневых атомов. Объединяя все эти процессы, получаем следующее управляющее уравнение, описывающее динамику одномодового одноатомного лазера:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \rho] + L_a[\rho] + L_\sigma[\rho] + L_{ph}[\rho] + L_{pump}[\rho], \quad (6)$$

где

$$\hat{H} = \hbar\omega_{CM}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sum_i \omega_{TLS}^i \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hbar\sum_i \Omega_R^i (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_i^\dagger \hat{a}), \quad (7)$$

$$L_a[\rho] = \frac{\gamma_a}{2} (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho), \quad (8)$$

$$L_\sigma[\rho] = \sum_i \frac{\gamma_\sigma^i}{2} (2\hat{\sigma}_i\rho\hat{\sigma}_i^\dagger - \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i\rho - \rho\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i), \quad (9)$$

$$L_{ph}[\rho] = \sum_i \frac{\gamma_{ph}^i}{2} (\hat{\sigma}_{zi}\rho\hat{\sigma}_{zi}^\dagger - \hat{\sigma}_{zi}^\dagger\hat{\sigma}_{zi}\rho - \rho\hat{\sigma}_{zi}^\dagger\hat{\sigma}_{zi}), \quad (10)$$

$$L_{pump}[\rho] = \sum_i \frac{\gamma_{pump}^i}{2} (2\hat{\sigma}_i^\dagger\rho\hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i\rho - \rho\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i). \quad (11)$$

Решение уравнений (6) – (11) достаточно трудоёмкая задача. Однако во многих ситуациях её можно сильно упростить и выявить некоторые характерные черты поведения лазера.

В дальнейшем для упрощения вычисления мы будем считать, что все атомы одинаковы: они одинаково затухают и накачиваются, т. е. $\gamma_D^i = \gamma_D$, $\gamma_{ph}^i = \gamma_{ph}$, $\gamma_{pump}^i = \gamma_{pump}$. Далее будем предполагать, что атомы одинаково взаимодействуют с модой резонатора, т. е. $\Omega_R^i = \Omega_R$. Это приближение очень сильное, и для большинства систем не выполняется. Оно предполагает, что атомы локализованы в субволновом объёме, либо расположены на расстоянии друг от друга, равному целому числу длин волн. Однако такое приближение качественно даст правильное описание динамики лазера.

3. Уравнения движения. Гипотеза масштабной инвариантности и разложение по «размеру» системы

Работая над решением задачи,
всегда полезно знать ответ

Для того, чтобы продвинуться дальше, запишем уравнения движения для средних значений оператора уничтожения \hat{a} , оператора дипольного перехода $\hat{\sigma}_i$ и инверсии населённостей $\hat{\sigma}_{zi} \equiv \hat{D}_i$ (задача 6):

$$\langle \dot{\hat{a}} \rangle = (-i\omega_{CM} - \gamma_a / 2) \langle \hat{a} \rangle - i\Omega_R \sum_i \langle \hat{\sigma}_i \rangle, \quad (12)$$

$$\langle \dot{\hat{\sigma}}_i \rangle = \left(-i\omega_{TLS} - (\gamma_D + \gamma_{ph} + \gamma_{pump}) / 2 \right) \langle \hat{\sigma}_i \rangle + i\Omega_R \langle \hat{a} \hat{D}_i \rangle, \quad (13)$$

$$\langle \dot{\hat{D}}_i \rangle = -\gamma_D (\langle \hat{D} \rangle + 1) - \gamma_{pump} (\langle \hat{D} \rangle - 1) + 2i\Omega_R \langle \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i^\dagger \hat{a} \rangle. \quad (14)$$

Данная система уравнений является неполной, потому что содержит средние значения от произведения операторов $\langle \hat{a} \hat{D}_i \rangle$ и $\langle \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i^\dagger \hat{a} \rangle$. Если мы попытаемся записать уравнения движения на эти операторы, то получим, что они содержат средние от произведения трёх операторов. В итоге мы придём к бесконечной системе уравнений.

Однако в некотором приближении, можно «расцепить» средние значения, т. е. положить $\langle \hat{a} \hat{D}_i \rangle \approx \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{D}_i \rangle$. Чтобы понять, когда это будет

работать, вспомним, что мы рассматриваем систему из многих атомов, $N \gg 1$. Исследуем, как масштабируются переменные системы при увеличении числа атомов. Для этого просуммируем по атомам уравнения (13) и (14). В результате получим

$$\langle \hat{a} \rangle = (-i\omega_{CM} - \gamma_a / 2) \langle \hat{a} \rangle - i\Omega_R \langle \hat{\Sigma} \rangle, \quad (15)$$

$$\langle \dot{\hat{\Sigma}} \rangle = (-i\omega_{TLS} - \gamma_\sigma / 2) \langle \hat{\Sigma} \rangle + i\Omega_R \langle \hat{a} \hat{D} \rangle, \quad (16)$$

$$\langle \dot{\hat{D}} \rangle = -\gamma_I (\langle \hat{D} \rangle - ND_0) + 2i\Omega_R \langle \hat{a}^\dagger \hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}^\dagger \hat{a} \rangle. \quad (17)$$

Здесь мы ввели обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} &= \sum_i \hat{\sigma}_i, \quad \hat{D} = \sum_i \hat{D}_i, \quad \gamma_\sigma = \gamma_D + \gamma_{ph} + \gamma_{pump}, \quad \gamma_I = \gamma_D + \gamma_{pump}, \\ D_0 &= \frac{\gamma_{pump} - \gamma_D}{\gamma_{pump} + \gamma_D}. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее будем предполагать, что при увеличении числа томов, система примерно описывается классической версией системы (15) – (17), т. е. системой, где все операторы заменены на *c*-числа (комплексные числа). С учётом данного предположения, запишем

$$\hat{a} = N^{p_a} (a + N^{-q_a} \delta \hat{a}), \quad (19)$$

$$\hat{\Sigma} = N^{p_\sigma} (\sigma + N^{-q_\sigma} \delta \hat{\sigma}), \quad (20)$$

$$\hat{D} = N^{p_d} (D + N^{-q_d} \delta \hat{D}). \quad (21)$$

Здесь a, σ, D – *c*-числа, а $\delta \hat{a}, \delta \hat{\sigma}$ и $\delta \hat{D}$ – операторные поправки, которые описывают квантовые флуктуации. Также мы предполагаем, что $p_a, p_\sigma, p_d, q_a, q_\sigma, q_d > 0$, т. е. с увеличением размера системы квантовые флуктуации убывают, а система (15) – (17) становится классической. Коэффициенты $p_a, p_\sigma, p_d, q_a, q_\sigma, q_d$ мы найдём самосогласованно, считая, что система уравнений на *c*-числовые переменные a, σ, D не должна зависеть от N (гипотеза масштабной инвариантности).

Теперь нам необходимо понять, как меняется с увеличением N константа взаимодействия Ω_R . Ответ будет зависеть от конкретной задачи. Мы будем предполагать, что атомы заполняют резонатор с постоянной плотностью v , так что при увеличении числа атомов увеличивается объём резонатора, $N = vV$. Тогда

$$\Omega_R = -\frac{\mathbf{d}_{TLS} \mathbf{E}_{CM}}{\hbar} = -\mathbf{d}_{TLS} \mathbf{e}_{CM} \sqrt{\frac{4\pi\omega_{CM}}{\hbar V}} = -\mathbf{d}_{TLS} \mathbf{e}_{CM} \sqrt{\frac{4\pi\omega_{CM}V}{\hbar N}} = \Omega_R^0 / \sqrt{N}, \quad (22)$$

т. е. Ω_R масштабируется как $1/\sqrt{N}$. Тогда, подставляя (19) – (22) в (15) – (17), получаем

$$N^{p_a} \dot{a} + N^{p_a - q_a} \delta \dot{\hat{a}} = (-i\omega_{CM} - \gamma_a / 2) (N^{p_a} a + N^{p_a - q_a} \delta \hat{a}) - i\Omega_R^0 (N^{p_\sigma - 1/2} \sigma + N^{p_\sigma - q_\sigma - 1/2} \delta \hat{\sigma}), \quad (23)$$

$$N^{p_\sigma} \dot{\sigma} + N^{p_\sigma - q_\sigma} \delta \dot{\hat{\sigma}} = (-i\omega_{TLS} - \gamma_\sigma / 2) (N^{p_\sigma} \sigma + N^{p_\sigma - q_\sigma} \delta \hat{\sigma}) + i\Omega_R^0 (N^{p_a + p_d - 1/2} aD + N^{p_a + p_d - q_d - 1/2} a \delta \hat{D}) + i\Omega_R^0 (N^{p_a + p_d - q_a - 1/2} D \delta a + N^{p_a + p_d - q_a - q_d - 1/2} \delta a \delta D), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \left(N^{p_\sigma} \dot{D} + N^{p_\sigma - q_\sigma} \delta \dot{\hat{D}} \right) &= -\gamma_I N^{p_d} D - \gamma_I N^{p_d - q_d} \delta D + \gamma_I N D_0 + \\ &+ 2i\Omega_R^0 N^{p_a + p_\sigma - 1/2} (a^* \sigma - \sigma^* a) + 2i\Omega_R^0 N^{p_a + p_\sigma - q_a - 1/2} (\delta a^* \sigma - \sigma^* \delta a) + \\ &+ 2i\Omega_R^0 N^{p_a + p_\sigma - q_\sigma - 1/2} (a^* \delta \sigma - \delta \sigma^* a) + \\ &+ 2i\Omega_R^0 N^{p_a + p_\sigma - q_a - q_\sigma - 1/2} (\delta a^* \delta \sigma - \delta \sigma^* \delta a). \end{aligned} \quad (25)$$

Для того чтобы система уравнений на c -числа a , σ , D не зависела от числа атомов N , необходимо, чтобы старшие степени N во всех уравнениях совпадали. Это даёт

$$p_a = p_\sigma - 1/2, p_\sigma = p_a + p_d - 1/2, p_d = 1 = p_a + p_\sigma - 1/2. \quad (26)$$

Решение этой системы имеет вид

$$p_a = 1/2, p_\sigma = p_d = 1. \quad (27)$$

Система уравнений, которая будет соответствовать этим степеням N , имеет вид

$$\dot{a} = (-i\omega_{CM} - \gamma_a / 2) a - i\Omega_R^0 \sigma, \quad (28)$$

$$\dot{\sigma} = (-i\omega_{TLS} - \gamma_\sigma / 2) \sigma + i\Omega_R^0 aD, \quad (29)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I (D - D_0) + 2i\Omega_R^0 (a^* \sigma - \sigma^* a). \quad (30)$$

Эта система уравнений Максвелла–Блоха, которая, по существу, соответствует приближению среднего поля.

Отметим, что из системы (23) – (25) мы сможем найти соотношения между коэффициентами q :

$$q_a = q_\sigma = q_d, \quad (31)$$

однако не сможем найти их значения. Так и должно быть, поскольку исходная операторная система (15) – (17) неполна, и на её основе мы не можем судить о точности приближения (19) – (21). Более корректный подход основан на разложении управляющего уравнения (6) – (11) в представлении когерентных состояний по числу атомов (подробнее см. [2]). На основе этого подхода можно показать, что $q_a = q_\sigma = q_d = 1/2$. Мы не будем здесь выводить этих соотношений, однако вернёмся к обсуждению коэффициентов q в следующих лекциях.

Итак, динамика лазера в приближении большого числа атомов может быть описана полуклассической системой уравнений Максвелла–Блоха. Несмотря на её приближенный характер, она описывает многие явления лазерной физики, например, порог генерации, затягивание частоты, детерминированный хаос, релаксационные колебания. Эти эффекты мы будем обсуждать на следующей лекции.

Контрольные вопросы

1. Запишите управляющее уравнение, описывающее фазовую релаксацию двухуровневой системы.
2. Запишите уравнения движения на оператор дипольного момента и инверсию населённостей, которые задаются фазовой релаксацией двухуровневой системы.
3. Запишите управляющее уравнение, описывающее накачку двухуровневой системы.
4. Запишите уравнения движения на оператор дипольного момента и инверсию населённостей, которые задаются накачкой двухуровневой системы.
5. Запишите управляющее уравнение, описывающее динамику лазера.
6. Запишите уравнения движения на средние значение операторов \hat{a} , $\hat{\sigma}$, \hat{D} .
7. В каком приближении можно перейти от операторных уравнений к с числами
8. Запишите уравнения Максвелла–Блоха.

Задачи

1. Получите управляющее уравнение (2), описывающее фазовую релаксацию двухуровневой системы. Для этого рассмотрите резервуар из набора гармонических осцилляторов и взаимодействие вида $\hat{H} = \hbar \sum_i \Omega_{R1}^i \hat{a}_{1i}^\dagger \hat{a}_{1i} \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hbar \sum_i \Omega_{R2}^i \hat{a}_{2i}^\dagger \hat{a}_{2i} \hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger$. Далее воспользуйтесь приближением Борна–Маркова.
2. Получите уравнения движения (3).
3. Получите управляющее уравнение (4), описывающее накачку двухуровневой системы. Для этого рассмотрите резервуар из набора двухуровневых систем и взаимодействие вида $\hat{H} = \hbar \sum_i \Omega_R^i (\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_i^\dagger \hat{\sigma})$. Далее воспользуйтесь приближением Борна–Маркова и считайте, что двухуровневые системы резервуара находятся в полностью инвертированном состоянии.
4. Получите уравнения движения (5).
5. Получите уравнения движения (12) – (14).
6. Получите соотношение (31) между коэффициентами q_a , q_σ и q_d и покажите, что операторные поправки удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \hat{a} \\ \delta \hat{\sigma} \\ \delta \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_a / 2 & -i\Omega_R & 0 \\ i\Omega_R^0 D & -\gamma_\sigma / 2 & i\Omega_R^0 a \\ -2i\Omega_R^0 \sigma & 2i\Omega_R^0 a & -\gamma_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \hat{a} \\ \delta \hat{\sigma} \\ \delta \hat{D} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P. Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics.* – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J. Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations.* – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum Optics.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 13. Уравнения Максвелла–Блоха. Режимы работы одномодового лазера

Механиком является не тот, кто пишет уравнения,
а тот, кто пишет их так, что они интегрируются.

H.E. Жуковский

Введение

На предыдущей лекции в пределе большого числа атомов мы получили систему уравнений, которая описывает динамику электрического поля моды резонатора a , а также поляризацию σ и инверсию населённостей D двухуровневой системы:

$$\dot{a} = (-i\omega_{CM} - \gamma_a / 2) a - i\Omega_R \sigma, \quad (1)$$

$$\dot{\sigma} = (-i\omega_{TLS} - \gamma_\sigma / 2) \sigma + i\Omega_R a D, \quad (2)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I (D - D_0) + 2i\Omega_R (a^* \sigma - a \sigma^*). \quad (3)$$

Здесь мы для краткости опустили обозначения среднего значения оператора. Данная система нелинейна и, несмотря на её кажущуюся простоту, содержит богатую информацию о физике одномодового лазера, когда можно пренебречь спонтанным излучением. На прошлой лекции мы показали, что это происходит выше порога при числе атомов $N \gg 1$.

1. Генерация. Затягивание частоты

Для решения системы (1) – (3) перейдем к медленным амплитудам, сделав замену переменных $a \rightarrow a \exp(-i\omega t)$, $\sigma \rightarrow \sigma \exp(-i\omega t)$, где ω – пока произвольная частота. В результате получим

$$\dot{a} = (i\Delta - \gamma_a / 2) a - i\Omega_R \sigma, \quad (4)$$

$$\dot{\sigma} = (i\delta - \gamma_\sigma / 2) \sigma + i\Omega_R a D, \quad (5)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I (D - D_0) + 2i\Omega_R (a^* \sigma - a \sigma^*), \quad (6)$$

где $\Delta = \omega - \omega_{CM}$, $\delta = \omega - \omega_{TLS}$. Найдём стационарное решение системы (4) – (6), приравняв к нулю производные. Тогда из первого уравнения имеем

$$\sigma = (i\Delta - \gamma_a / 2)a / i\Omega_R \quad (7)$$

и, подставляя (7) в уравнение (5), получаем

$$((i\Delta - \gamma_a / 2)(i\delta - \gamma_\sigma / 2) - \Omega_R^2 D)a = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) имеет два решения. Первое из них соответствует случаю, когда $a = 0$. Используя (4) и (6), находим первое стационарное решение:

$$a = \sigma = 0, D = D_0. \quad (9)$$

Второе решение (8) возможно в том случае, когда выполняется равенство

$$(i\Delta - \gamma_a / 2)(i\delta - \gamma_\sigma / 2) - \Omega_R^2 D = 0. \quad (10)$$

Данное уравнение содержит как действительную, так и мнимую часть. Приравнивая их к нулю, находим

$$\omega = \frac{\gamma_\sigma \omega_{CM} + \gamma_a \omega_{TLS}}{\gamma_a + \gamma_\sigma}, \quad (11)$$

$$D = D_{th} = \frac{\gamma_a \gamma_{CM}}{4\Omega_R^2} \left(1 + \frac{4\Delta^2}{\gamma_a^2} \right). \quad (12)$$

Видно, что помимо стационарного значения инверсии населённостей определяется частота колебаний ω . Стационарные значения a и σ находятся из подстановки (11) и (12) в (6) и (7):

$$a_{st} = \sqrt{\frac{\gamma_I}{2\gamma_a}} \sqrt{D_0 - D_{th}} \exp(i\varphi), \sigma_{st} = a_{st} \frac{\sqrt{\gamma_a^2 + 4\Delta^2}}{2\Omega_R} \exp(i\psi), \tan \psi = \frac{\gamma_a}{2\Delta}. \quad (13)$$

Здесь φ – фаза a в стационаре, она определяется начальным условием, а ψ есть разность фаз между колебаниями поля и колебанием поляризации.

Таким образом, мы получили два стационарных решения. Первое из них (9) соответствует нулевым значениям амплитуды поля и поляризации. Инверсия населённостей в этом случае определяется накачкой. Второе решение (12) – (13) соответствует ненулевым значениям амплитуды поля и поляризации, которые зависят от параметра накачки D_0 корневым образом. При этом частота колебаний поля и поляризации одинакова и определяется выражением (11).

Забегая вперёд, отметим, что решение (9) реализуется, когда значение параметра накачки $D_0 < D_{th}$, а решение (12) – (13) реализуется при $D_0 \geq D_{th}$. Таким образом, значение D_{th} является пороговым значением накачки, выше которого реализуется режим лазерной генерации (12) – (13), а формула (11) определяет частоту генерации, которая всегда лежит между частотой моды резонатора ω_{CM} и частотой перехода двухуровневого атома ω_{TLS} (затягивание частоты).

Теперь исследуем полученные решения на устойчивость. Для простоты ограничимся случаем нулевой расстройки, $\omega_{CM} = \omega_{TLS}$. Тогда частота генерации $\omega = \omega_{CM} = \omega_{TLS}$. Систему уравнений (4) – (6) тогда можно упростить, поскольку в отсутствии расстройки мнимая часть $\text{Im}\sigma = \sigma_2$ взаимодействует только с действительной частью $\text{Re}a = a_1$, и наоборот. Таким образом, если в начальный момент времени $\text{Im}a = \text{Re}\sigma = 0$, то это справедливо и в последующие моменты времени (задача 1). Поэтому имеем

$$\dot{a}_1 = -\gamma_a a_1 / 2 + \Omega_R \sigma_2, \quad (14)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -\gamma_\sigma \sigma_2 / 2 + \Omega_R a_1 D, \quad (15)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I (D - D_0) - 4\Omega_R a_1 \sigma_2. \quad (16)$$

Таким образом, мы получили систему из трёх действительных уравнений. Далее будет удобно перейти к нормированным переменным. Для этого разделим a_1 , σ_2 и D на их стационарные значения:

$$a_1^{st} = \sqrt{\frac{\gamma_I}{2\gamma_a}} \sqrt{D_0 - D_{th}}, \quad \sigma_2^{st} = a_1^{st} \gamma_a / 2\Omega_R, \quad D^{st} = D_{th} = \gamma_a \gamma_\sigma / 4\Omega_R^2 \quad \text{и введём}$$

переменные: $x = a_1 / a_1^{st}$, $y = \sigma_2 / \sigma_2^{st}$, $z = D / D^{st}$. В результате получим

$$\dot{x} = -\alpha(x - y), \quad (17)$$

$$\dot{y} = -y + xz, \quad (18)$$

$$\dot{z} = -\beta(z - r) + \beta(1 - r)xy, \quad (19)$$

где $\alpha = \gamma_a / \gamma_\sigma$, $\beta = \gamma_d / \gamma_\sigma$, $r = D_0 / D_{th}$, а дифференцирование ведётся по безразмерному времени $\tau = \gamma_\sigma t$. Для того чтобы проверить устойчивость стационарных решений, линеаризуем (17) – (18) около положения равновесия и получим

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ z^{st} & -1 & x^{st} \\ \beta(1-r)y^{st} & \beta(1-r)x^{st} & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Характеристическое уравнение для данной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \lambda^2(\alpha + \beta + 1) + \lambda(\alpha(1 - z_{st}) + \beta(1 - x_{st}^2 + \alpha + rx_{st}^2)) + \\ + \alpha\beta(1 - x_{st}^2 + rx_{st}^2 - z_{st} + (1 - r)x_{st}y_{st}) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Проверим устойчивость решения $x = y = 0, z = r$. Характеристическое уравнение (21) принимает вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(\alpha + \beta + 1) + \lambda(\alpha(1 - r) + \beta(1 + \alpha)) + \alpha\beta(1 - r) = 0. \quad (22)$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_1 = -\beta, \quad \lambda_{2,3} = -(\alpha + 1) \pm \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4\alpha(1 - r)}. \quad (23)$$

Из (23) видно, что решение $x = y = 0, z = r$ теряет устойчивость при $r > 1$ или, возвращаясь к исходным переменным, когда $D_0 > D_{th}$. По этой причине величину накачки D_{th} называют порогом генерации.

Теперь исследуем устойчивость решения $|x| = |y| = 1, z = 1$. Напомним, что оно существует только в том случае, когда $r > 1$. Уравнение (21) принимает вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(\alpha + \beta + 1) + \lambda\beta(1 + \alpha) - 2\alpha\beta(1 - r) = 0. \quad (24)$$

Для определения устойчивости в этом случае будет удобно воспользоваться критерием Гурвица. А именно, для того чтобы все корни (24) имели отрицательную действительную часть, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительными. Если же хотя бы один из них отрицателен, то найдётся корень с положительной действительной частью. Проверяя определители Гурвица, приходим к выводу, что решение $|x| = |y| = 1, z = 1$ неустойчиво при

$$r > r^* = \frac{\alpha(\alpha + \beta + 3)}{\alpha - \beta - 1}. \quad (25)$$

В силу положительности параметров α и β находим, что $r^* > 3$, т. е. всегда существует область, где решение $|x| = |y| = 1, z = 1$ устойчиво. Более того, когда r становится больше единицы, только это решение

устойчиво. Также, поскольку $r > 1$, то решение $|x| = |y| = 1, z = 1$ может потерять устойчивость только при выполнении условия $\alpha > \beta + 1$.

Теперь обсудим физический смысл полученных результатов. Когда параметр накачки меньше порогового значения, $D_0 < D_{th}$, электрическое поле и поляризация равны нулю, $a = \sigma = 0$, а инверсия определяется накачкой, $D = D_0$. При превышении порогового значения накачки, $D_0 > D_{th}$, электрическое поле и поляризация растут как $\sim \sqrt{D_0 - D_{th}}$ (см. (13)), а инверсия не меняется и равна своему пороговому значению, $D = D_{th}$. Если вернуться к быстроосциллирующим переменным, см. (1) – (3), то получится, что происходят осцилляции на строго определённой частоте, не зависящей от начальных условий. Иными словами, у системы возникает предельный цикл. Данный вид перехода на языке теории нелинейных колебаний есть *бифуркация Хонфа* – при некотором значении параметра системы одно из решений теряет устойчивость и одновременно появляется новое решение. Данный переход есть возникновение лазерной генерации – один из главных эффектов лазерной физики. Таким образом, лазер представляет собой квантовую автоколебательную систему с амплитудами предельного цикла (12) – (13), см. рис. 10.

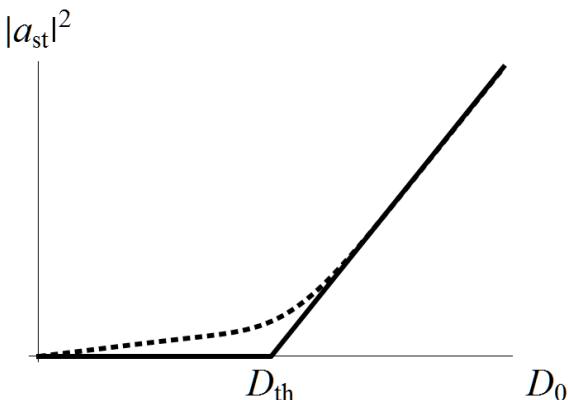


Рис. 10. Зависимость безразмерной энергии электрического поля $|a_{st}|^2$ от накачки D_0

Также отметим, что при лазерной генерации в случае точного резонанса, $\omega_{CM} = \omega_{TLS}$, колебания электрического поля отстают от колебаний

поляризации на $\pi/2$, см. (13). Такая же ситуация возникает при взаимодействии затухающего гармонического осциллятора с внешней силой – его стационарные колебания отстают по фазе от колебаний внешней силы на $\pi/2$. Это означает, что устанавливается стационарный поток энергии от внешней силы к осциллятору. То же самое имеет место и в лазере. Энергия поступает в активную среду за счёт накачки, а далее за счет взаимодействия передаётся электрическому полю, т. е. роль внешней силы играет инвертированная двухуровневая система. Существенным отличием от линейной задачи является обратное влияние поля на двухуровневую систему (т. е. нелинейность). Это приводит к существованию порога лазерной генерации.

Остановимся подробнее на том, как происходит переход к лазерной генерации вблизи порога. Оказывается, что в предельном случае большой добротности резонатора:

$$\gamma_a \ll \gamma_\sigma, \gamma_I, \quad (26)$$

особенно ярко проявляется аналогия с фазовым переходом второго рода.

В этом случае активная среда «мгновенно» следит за изменением амплитуды электрического поля, поэтому мы можем записать

$$\dot{D} = \dot{\sigma} = 0. \quad (27)$$

Тогда, подставляя (5) и (6) в (4) и производя разложение, получим уравнение

$$\dot{a} = \left(2\Omega_R^2 D_0 / \gamma_\sigma - \gamma_a / 2 \right) a - 16\Omega_R^4 D_0 |a|^2 a / \gamma_\sigma^2 \gamma_I \quad (28)$$

по виду полностью совпадающее с временным уравнением Гинзбурга–Ландау [1, 6, 7]:

$$\tau_\psi \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta F[\psi]}{\delta \psi}, \quad (29)$$

где функционал свободной энергии имеет вид

$$F[\psi] = \int \left[\alpha(T - T_c) |\psi|^2 - \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \right] dV. \quad (29)$$

С помощью такого уравнения описывается фазовый переход сверхпроводник–нормальный металл, ферромагнетик–парамагнетик и многие другие. Это позволяет установить однозначное соответствие между данными явлениями.

Более строго аналогию перехода к лазерной генерации для газового лазера и фазовым переходом второго рода можно установить, используя разложение по когерентным состояниям электромагнитного поля. В этой

ситуации роль функционала свободной энергии будет играть функция распределения Глаубера–Сударшана.

Величины	Лазер	Сверхпроводник	Ферромагнетик
Параметр порядка	a	ψ	M
Температура, накачка	D_0	T	T
Критическая температура, пороговая накачка	D_{th}	T_c	T_c

Теперь обсудим случай, когда $r > r^*$, т. е. когда оба стационарных решения неустойчивы. В этом случае динамика системы может быть исследована только численно. Оказывается, что динамика системы в этом случае будет «хаотической». Две траектории, сколь угодно близкие в начальный момент времени, с течением времени расходятся, однако остаются в пределах некоторого множества – *странный аттрактор*, рис. 11.

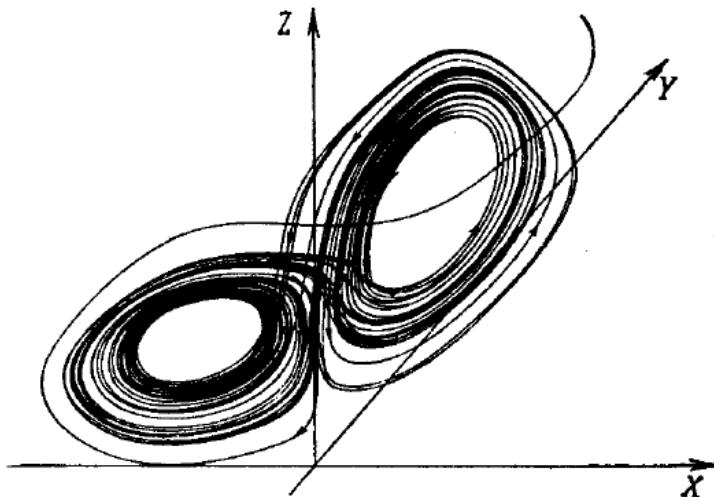


Рис. 11. Странный аттрактор

Термин «хаотическое излучение» в нашем контексте имеет двоякий смысл. В оптике хаотическим называется тепловое излучение термически возбужденных атомов. То есть речь идет о шуме спонтанных переходов, и никакой генерации нет. Атомы накачиваются очень слабо, после возбуждения каждый атом начинает спонтанно испускать *волновой* цуг. Поскольку акты спонтанного излучения совершенно некоррелированы, создается полностью случайное световое поле. Лазер ниже порога работает как обычная лампочка накаливания. Хаотичность излучения здесь создается квантовыми флюктуациями спонтанного излучения. Полуклассическая теория (4) – (6) не описывают этот хаотический шум. Тут необходима полностью квантовая теория лазера, которую мы изложим ниже.

Сейчас же идет речь о совершенно ином типе хаоса, возникающем в детерминистических уравнениях (4) – (6), не содержащих заранее никаких флюктуаций. Вскоре после создания полуклассической теории лазера, Хакен (1975) обнаружил полную математическую идентичность уравнений одномодового лазера (4) – (6) и знаменитой системы уравнений Лоренца для «странных аттракторов». Это наблюдение имело далеко идущие последствия как в лазерной физике, так и в синергетике. Суть аналогии такова: в гидродинамике существует давняя и не до конца решенная проблема возникновения турбулентности. Лоренц пришел к своим уравнениям в поисках простой модели турбулентности. Он рассматривал известную задачу о конвективной неустойчивости Бенара для слоя подогреваемой снизу жидкости. Для основных гармоник поля скоростей X, Y и температуры Z жидкости Лоренц (1963) получил систему уравнений (4) – (6), где α – число Прандтля, r – число Релея, β – размер конвективной ячейки. Имеет место полное соответствие проблемы Бенара и возникновения детерминированного хаоса в лазере.

Итак, уравнения (4) – (6) описывают две различные неустойчивости, которые были открыты в гидродинамике и в лазерах независимо. Первая из них связана с возникновением генерации (конвекции). При $r < 1$ лазерной генерации нет (жидкость в покое). При $r > 1$ возникает стационарная лазерная генерация (конвективное движение жидкости) с устойчивым предельным циклом. При дальнейшем увеличении накачки (числа Релея) и выполнении условий $\alpha > \beta + 1$ и $r > \alpha(\alpha + \beta + 3)/(\alpha - \beta - 1)$ в задаче возникает новая неустойчивость, приводящая к хаосу (турбулентности). Если первая неустойчивость представляет собой *биfurкацию Хонфа рождения предельного цикла*, то вторая является *биfurкацией рождения «странных аттракторов»*.

2. Пичковые (релаксационные) колебания

Исследуем теперь динамику лазера в переходном режиме. Наиболее просто это сделать в случае точного резонанса в приближении газового лазера, т. е. при условии (26). Заметим, что в этом случае стационарное решение (12) – (13) всегда устойчиво. Исключая поляризацию σ из системы (4) – (6) и вводя переменную $n = |a|^2$, получаем

$$\dot{n} = -\gamma_a n + \frac{\Omega_R^2}{\gamma_\sigma} n D, \quad (30)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I (D - D_0) - \frac{2\Omega_R^2}{\gamma_\sigma} n D. \quad (31)$$

Данная система уравнений описывает динамику инверсии населённостей D и числа фотонов n и называется системой скоростных уравнений без спонтанного излучения. Линеаризация (30) – (31) около положения равновесия (12) – (13) даёт

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_a + \frac{\Omega_R^2}{\gamma_\sigma} D_{st} & \frac{\Omega_R^2}{\gamma_\sigma} n_{st} \\ -\frac{2\Omega_R^2}{\gamma_\sigma} D_{st} & -\gamma_I - \frac{2\Omega_R^2}{\gamma_\sigma} n_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta D \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Характеристические корни данной системы имеют мнимую часть, если

$$\omega_{rel}^2 = \frac{2\Omega_R^4}{\gamma_\sigma^2} n_{st} D_{st} - \left(\gamma_I + 2 \frac{\Omega_R^2}{\gamma_\sigma} n_{st} \right)^2 > 0. \quad (33)$$

При выполнении условия (33) система (4) – (6) релаксирует к положению равновесия немонотонно, а в режиме релаксационных колебаний с частотой ω_{rel} . В силу нелинейности системы релаксационные колебания в этом случае почти автоколебания. При больших амплитудах отклонения n_{st} и D_{st} от стационарных значений их временная развёртка в силу нелинейности (1) – (2) имеет вид чередующихся пиков (рис. 12). Это послужило причиной возникновения термина «пичковый» режим.

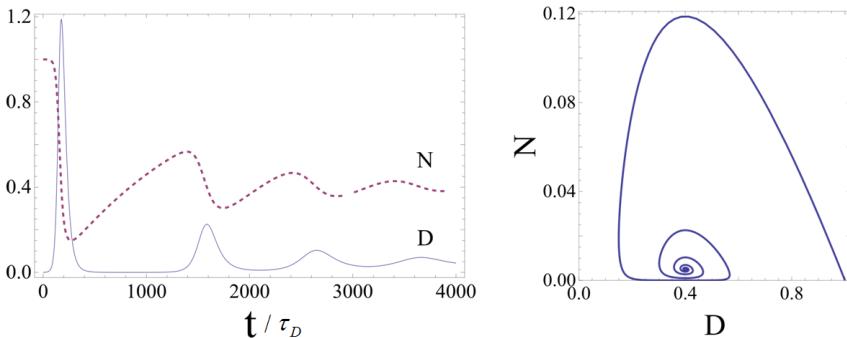


Рис. 12. Зависимость числа фотонов n и инверсии населённостей от времени в режиме пичковых колебаний

Контрольные вопросы

1. Что называют полуклассическим приближением в теории лазера?
2. Запишите систему уравнений, описывающих динамику лазера, в полуклассическом приближении (уравнения Максвелла–Блоха).
3. Запишите стационарное решение уравнений Максвелла–Блоха.
4. Поясните явление затягивания частоты.
5. Какие стационарные решения уравнений Максвелла–Блоха являются устойчивыми выше и ниже порога генерации.
6. Что называют бифуркацией Хопфа?
7. Опишите динамику системы в том случае, когда ни одно из стационарных решений уравнений Максвелла–Блоха неустойчиво.
8. Что называют детерминированным хаосом?
9. В чём заключается аналогия между возникновением лазерной генерации и фазовым переходом второго рода?
10. Опишите физику пичковых (релаксационных) колебаний.

Задачи

1. Покажите, что система (4) – (6) для комплексных величин a , σ и D в случае нулевой расстройки может быть сведена к системе уравнений (14) – (16) для действительных величин $\text{Re} a$, $\text{Im} \sigma$, D .
2. Исследуйте устойчивость нулевого стационарного решения (9) в случае ненулевой расстройки, $\omega_{CM} \neq \omega_{TLS}$. Покажите, что порогом генерации в этом случае будет выражение (12).

3. Исследуйте устойчивость ненулевого стационарного решения (12) – (13) в случае ненулевой расстройки, $\omega_{CM} \neq \omega_{TLS}$. Исследуйте переход к хаотическому режиму. Установите, как зависит от расстройки условие возникновения детерминированного хаоса (25). При необходимости воспользуйтесь численным моделированием.
4. В случае точного резонанса численно исследуйте зависимость параметров r^* , r_1 , r_2 и r_3 от параметров α и β .
5. Выясните, возможны ли релаксационные колебания в случае низкодобротного резонатора, т. е. когда $\gamma_a \gg \gamma_\sigma, \gamma_I$.

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P.* Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics. – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J.* Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations. – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 14. Влияние спонтанного излучения на лазерную генерацию. Уравнения Зябловского. Ширина линии излучения

На свете есть вещи поважнее самых прекрасных открытий – это знание метода, которым они были сделаны.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Введение

В предыдущих лекциях мы исследовали динамику лазера в приближении большого числа атомов. В этом приближении путем расцепления квантово-механических корреляций нами были получены полуклассические уравнения Максвелла–Блоха. Эти уравнения предсказывают наличие порогового значения накачки. Выше порогового значения происходит генерация лазерного излучения, которое характеризуется корневой зависимостью амплитуды поля от накачки и определённой частотой. Однако полуклассические уравнения не могут учесть влияния спонтанного излучения на лазерную генерацию и, как следствие, конечную ширину линии. Изучению этих вопросов и посвящена настоящая лекция.

1. Учёт спонтанного излучения. Квантовые флуктуации вблизи порога генерации

Итак, нам необходимо учесть влияние спонтанного излучения на лазерную генерацию. Вспомним (см. лекции 6, 7), что при спонтанном излучении меняются во времени только энергетические переменные системы, например, энергия двухуровневого атома или осциллятора. В то же время амплитуда дипольного момента атома или колебаний осциллятора во все моменты времени равна нулю. Уравнения Максвелла–Блоха описывают динамику именно амплитуды электрического поля моды резонатора и дипольного момента атома и не учитывают процессы спонтанного излучения. Поэтому идея состоит в том, чтобы записать уравнения движения на энергетические переменные, которые учитывают процессы спонтанного излучения. В качестве таких переменных выберем число

фотонов в mode резонатора $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, инверсию населённостей двухуровневой системы \hat{D} и оператор обмена энергией $S = i(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma})$. Далее применим гипотезу масштабной инвариантности, описанную в лекции 11.

Как всегда, стартуем с управляющего уравнения, описывающего динамику взаимодействующих моды резонатора и n двухуровневых атомов:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \rho] + L_a[\rho] + L_\sigma[\rho] + L_{ph}[\rho] + L_{pump}[\rho]. \quad (1)$$

Здесь

$$\hat{H} = \hbar\omega_{CM}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sum_i \omega_{TLS}^i \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hbar\sum_i \Omega_R^i (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_i^\dagger \hat{a}), \quad (2)$$

$$L_a[\rho] = \frac{\gamma_a}{2} (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho), \quad (3)$$

$$L_\sigma[\rho] = \sum_i \frac{\gamma_D^i}{2} (2\hat{\sigma}_i\rho\hat{\sigma}_i^\dagger - \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i\rho - \rho\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i). \quad (4)$$

Теперь запишем уравнения на средние значения операторов числа фотонов $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, инверсии населённостей двухуровневой системы \hat{D}_i и обмена энергией $S_i = \langle i(\hat{\sigma}_i^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_i) \rangle$:

$$\dot{\langle \hat{n} \rangle} = -\gamma_a \langle \hat{n} \rangle + \Omega_R \sum_i \langle \hat{S}_i \rangle, \quad (5)$$

$$\dot{\langle \hat{S}_i \rangle} = -\left(\frac{\gamma_a}{2} + \frac{\gamma_\sigma}{2}\right) \langle \hat{S}_i \rangle + \Omega_R \left(\langle \hat{D}_i \rangle + 2\langle \hat{n}\hat{D}_i \rangle + 1 + \sum_{j \neq i} \langle \hat{\sigma}_i^\dagger \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_i \rangle \right), \quad (6)$$

$$\dot{\langle \hat{D}_i \rangle} = -\gamma_I (\langle \hat{D}_i \rangle - D_0) - 2\Omega_R \langle \hat{S}_i \rangle. \quad (7)$$

Здесь, как и в лекции 11, $D_0 = \frac{\gamma_{pump} - \gamma_D}{\gamma_{pump} + \gamma_D}$. Теперь просуммируем полученные уравнения по атомам. Вводя коллективные переменные $\hat{S} = \sum_i \hat{S}_i$ и

$$\hat{D} = \sum_i \hat{D}_i, \text{ получаем}$$

$$\dot{\langle \hat{n} \rangle} = -\gamma_a \langle \hat{n} \rangle + \Omega_R \langle \hat{S} \rangle, \quad (8a)$$

$$\begin{aligned}\langle \dot{\hat{S}} \rangle &= -\left(\frac{\gamma_a}{2} + \frac{\gamma_\sigma}{2}\right)\langle \hat{S} \rangle + \\ &+ \Omega_R \left(\langle \hat{D} \rangle + 2\langle \hat{n}\hat{D} \rangle + N + \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \langle \hat{\sigma}_i^\dagger \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_i \rangle \right),\end{aligned}\quad (9a)$$

$$\langle \dot{\hat{D}}_i \rangle = -\gamma_I (\langle \hat{D} \rangle - D_0) - 2\Omega_R \langle \hat{S} \rangle. \quad (10a)$$

Отметим, что, как и в случае уравнений Максвелла–Блоха, система на средние значения операторов неполна, поскольку содержит среднее от произведений $\hat{n}\hat{D}$ и $\hat{\sigma}_i^\dagger \hat{\sigma}_j$. Однако в отличие от системы Максвелла–Блоха в системе (8) – (10) появляются корреляции между различными атомами за счёт взаимодействия с модой резонатора. Учёт этих корреляций крайне сложен и может быть вычислен только численно. Однако наличие таких корреляций, по существу, есть существование ненулевых диагональных элементов матрицы плотности атомной подсистемы. В реальных экспериментах такие корреляции пренебрежимо малы. Это связано с тем, что помимо процессов диссипации, которые описываются релаксационными членами (2) – (4), в реальной системе присутствуют процессы релаксации, связанные с затуханием фаз между различными атомами. Поэтому мы в дальнейшем пренебрежем такими корреляциями, т. е. отбросим последнее слагаемое в уравнении (9). Однако отметим, что в некоторых ситуациях такие корреляции играют принципиальную роль, например, в холодных атомах, в оптических ловушках, сверхпроводящих кубитах, бозе-эйнштейновских конденсатах.

Итак, система уравнений на средние значения операторов принимает вид

$$\langle \dot{\hat{n}} \rangle = -\gamma_a \langle \hat{n} \rangle + \Omega_R \langle \hat{S} \rangle, \quad (8b)$$

$$\langle \dot{\hat{S}} \rangle = -\left(\frac{\gamma_a}{2} + \frac{\gamma_\sigma}{2}\right)\langle \hat{S} \rangle + \Omega_R \left(\langle \hat{D} \rangle + 2\langle \hat{n}\hat{D} \rangle + N \right), \quad (9b)$$

$$\langle \dot{\hat{D}}_i \rangle = -\gamma_I (\langle \hat{D} \rangle - D_0) - 2\Omega_R \langle \hat{S} \rangle. \quad (10b)$$

Теперь мы применим гипотезу масштабной инвариантности, т. е. предположим, что с увеличением числа атомов операторы описываются c -числами, а квантовые поправки, связанные с операторной структурой переменных, исчезают с увеличением числа атомов:

$$\hat{n} = N^{p_n} \left(n + N^{-q_n} \delta \hat{n} \right), \quad (11)$$

$$\hat{S} = N^{p_s} \left(S + N^{-q_s} \delta \hat{S} \right), \quad (12)$$

$$\hat{D} = N^{p_d} \left(D + N^{-q_d} \delta \hat{D} \right). \quad (13)$$

Здесь n, S, D – c -числа, а $\delta \hat{n}, \delta \hat{S}$ и $\delta \hat{D}$ – операторные поправки, которые описывают квантовые флуктуации. Также мы предполагаем, что $p_n, p_s, p_d, q_n, q_s, q_d > 0$, т. е. с увеличением размера системы квантовые флуктуации убывают, а система (8) – (10) становится классической. Коэффициенты $p_n, p_s, p_d, q_n, q_s, q_d$ мы найдём самосогласованно, считая, что система уравнений на c -числовые переменные n, S, D не должна зависеть от N (гиротеза масштабной инвариантности). Также вспомним, что константа Раби $\Omega_R = \Omega_R^0 / \sqrt{N}$, т. е. масштабируется как $1/\sqrt{N}$. Подстановка (11) – (13) в (8) – (10) даёт

$$N^{p_n} \dot{n} + N^{p_n - q_n} \langle \delta \dot{\hat{n}} \rangle = -\gamma_a N^{p_n} n - \gamma_a N^{p_n - q_n} \langle \delta \hat{n} \rangle + \Omega_R^0 N^{p_s - 1/2} S + \Omega_R^0 N^{p_s - q_s - 1/2} \langle \delta \hat{S} \rangle, \quad (14)$$

$$N^{p_s} \dot{S} + N^{p_s - q_s} \langle \delta \dot{\hat{S}} \rangle = -(\gamma_a / 2 + \gamma_\sigma / 2) N^{p_s} S - (\gamma_a / 2 + \gamma_\sigma / 2) N^{p_s - q_s} \langle \delta \hat{S} \rangle + \Omega_R^0 N^{p_d - 1/2} D + \Omega_R^0 N^{p_d - q_d - 1/2} \langle \delta \hat{D} \rangle + \Omega_R^0 N^{1/2} + 2\Omega_R^0 N^{p_n + p_d - 1/2} n D + 2\Omega_R^0 N^{p_n + p_d - q_d - 1/2} n \langle \delta \hat{D} \rangle + 2\Omega_R^0 N^{p_n + p_d - q_n - 1/2} D \langle \delta \hat{n} \rangle + 2\Omega_R^0 N^{p_n + p_d - q_n - q_d - 1/2} \langle \delta \hat{D} \delta \hat{n} \rangle, \quad (15)$$

$$N^{p_d} \dot{D} + N^{p_d - q_d} \langle \delta \dot{\hat{D}} \rangle = -\gamma_I N^{p_d} D - \gamma_I N^{p_d - q_d} \langle \delta \hat{D} \rangle + \gamma_I N D_0 - 2\Omega_R^0 N^{p_s - 1/2} S - 2\Omega_R^0 N^{p_s - 1/2} \langle \delta \hat{S} \rangle. \quad (16)$$

Здесь мы специально оставили угловые скобки, поскольку уравнение (15) содержит произведение операторов $\delta \hat{D} \delta \hat{n}$. Теперь необходимо «собрать» уравнения при одинаковых степенях N , а также определить коэффициенты $p_n, p_s, p_d, q_n, q_s, q_d$. Стоит отметить, что ввиду наличия степеней N , которые не зависят от масштабирования переменных n, S, D , заранее неясно, в каком порядке по N будет входить, например, слагаемое $\Omega_R^0 N^{1/2}$. Поэтому необходимо перебрать несколько возможных вариантов и выбрать тот, который приводит к существованию решения для коэффициентов $p_n, p_s, p_d, q_n, q_s, q_d$. Таким образом можно установить, что

старшие степени N в каждом уравнении будут даваться следующими соотношениями:

$$p_n = p_s - 1/2, p_s = p_n + p_D - 1/2, p_d = 1 = p_s - 1/2, \quad (17)$$

разрешая которые, находим

$$p_n = p_D = 1, p_s = 3/2. \quad (18)$$

Система уравнений, соответствующая старшим степеням N , будет иметь вид

$$\dot{n} = -\gamma_a n + \Omega_R^0 S, \quad (19)$$

$$\dot{S} = -\left(\frac{\gamma_a}{2} + \frac{\gamma_\sigma}{2}\right)S + 2\Omega_R^0 n D, \quad (20)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I (D - D_0) - 2\Omega_R^0 S. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что система (19) – (21) – «энергетическая» версия уравнений Максвелла–Блоха без атомных корреляций, т. е. может быть получена из системы Максвелла–Блоха (28) – (30) лекции 11 путем перехода к переменным $n = |a|^2$, $S = i(\sigma^* a - a^* \sigma)$, D и отбрасыванием слагаемых, содержащих атомные переменные степени выше второй. Таким образом, в старшем порядке по N нет слагаемых, отвечающих квантовым флуктуациям и, следовательно, спонтанному излучению. Решение системы (19) – (21) для одного атома имеет вид

$$n_{st} = S_{st} = 0, D_{st} = D_0 \quad (22)$$

– ниже порога генерации, $D_0 < D_{th}$, и

$$\begin{aligned} n_{st} &= \gamma_I (D_0 - D_{th}) / 2\gamma_a, & S_{st} &= \gamma_I (D_0 - D_{th}) / 2\Omega_R^0, \\ D_{st} &= D_{th} = \gamma_a \gamma_\sigma / 4(\Omega_R^0)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

– выше порога генерации, $D_0 \geq D_{th}$. Итак, имеем те же особенности, что и в системе уравнений Максвелла–Блоха, т. е. наличие порога генерации.

Теперь соберём следующие степени N в уравнениях (14) – (16). Эти степени будут задаваться соотношениями

$$\begin{aligned} p_n - q_n &= p_s - q_s - 1/2, \\ p_s - q_s &= p_D - 1/2 = 1/2 = p_D + p_n - q_n - 1/2 = p_n + p_D - q_D - 1/2, \\ p_D - q_D &= p_s - q_s - 1/2, \end{aligned} \quad (24)$$

решая которые, находим

$$q_n = q_s = q_D = 1. \quad (25)$$

Видно, что квантовые флюктуации убывают как $1/N$. Соответствующая степеням (24) система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{n} \rangle \\ \langle \delta \hat{S} \rangle \\ \langle \delta \hat{D} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_a & \Omega_R^0 & 0 \\ 2\Omega_R^0 D & -(\gamma_a + \gamma_\sigma)/2 & 2\Omega_R^0 n \\ 0 & -2\Omega_R^0 & -\gamma_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{n} \rangle \\ \langle \delta \hat{S} \rangle \\ \langle \delta \hat{D} \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_R^0 (1+D) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Данная система описывает квантовые флюктуации вблизи положения равновесия (22) – (23). Эта линейная система с зависящими от времени коэффициентами $D(t)$ и $n(t)$. Прежде чем её исследовать, найдем детерминант матрицы в стационарном режиме, т. е. положив $n = n_{st}$, $D = D_{st}$:

$$\det \begin{pmatrix} -\gamma_a & \Omega_R^0 & 0 \\ 2\Omega_R^0 D_{st} & -(\gamma_a + \gamma_\sigma)/2 & 2\Omega_R^0 n_{st} \\ 0 & -2\Omega_R^0 & -\gamma_I \end{pmatrix} = -\gamma_I (\gamma_a^2 + 4\Omega_R^0 |D_0 - D_{th}|)/2. \quad (27)$$

Данное выражение справедливо как выше, так и ниже порога. Видно, что на пороге, когда $D_0 = D_{th}$, детерминант достигает минимума. Более того, в пределе $\gamma_a \ll \Omega_R^0$ детерминант и стационарные решения (26) имеют резкий максимум. Действительно, для стационарных значений $\delta \hat{n}$ и $\delta \hat{D}$ находим

$$\langle \delta \hat{n} \rangle_{st} = \frac{2\Omega_R^0 (1+D_{st})}{\gamma_a^2 + 4\Omega_R^0 |D_0 - D_{st}|}, \quad (28)$$

$$\langle \delta \hat{D} \rangle_{st} = -\frac{4\Omega_R^0 \gamma_a (1+D_{st})}{\gamma_I (\gamma_a^2 + 4\Omega_R^0 |D_0 - D_{st}|)}. \quad (29)$$

Видно, что вблизи порога в случае $\gamma_a \ll \Omega_R^0$ квантовые флюктуации практически расходятся. Это есть отражение факта, уже отмеченного в лекции 12: переход к лазерной генерации похож на фазовый переход второго рода. Отметим, что в обратном предельном случае, $\gamma_a \gg \Omega_R^0$, квантовые флюктуации не имеют максимума вблизи порога. Зависимость $\langle \delta \hat{n} \rangle_{st}$ и $\langle \delta \hat{D} \rangle_{st}$ от D_0 представлена на рис. 13.

Отметим, что $\langle \delta \hat{n} \rangle_{st} > 0$, а $\langle \delta \hat{D} \rangle_{st} < 0$, т. е. учёт спонтанного излучения приводит к тому, что число фотонов увеличивается, а инверсия населённостей уменьшается.

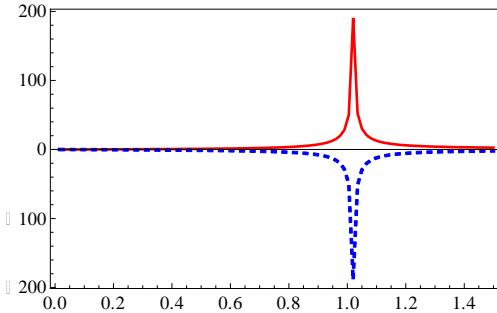


Рис. 13. Зависимость $\langle \delta\hat{n} \rangle_{st}$ (сплошная линия) и $\langle \delta\hat{D} \rangle_{st}$ (пунктирная линия) от D_0

Наконец, найдём соотношения для степеней N следующего порядка малости. Оставшиеся слагаемые в (14) – (16) имеют степени

$$p_D - q_D - 1/2 = p_n - q_n + p_D - q_D - 1/2. \quad (30)$$

Данные равенства тождественно удовлетворяются, если $p_n, p_S, p_D, q_n, q_S, q_D$ задаются выражениями (18) – (25), при этом сама степень равна $-1/2$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\langle \delta\hat{D} \rangle + 2\langle \delta\hat{n}\delta\hat{D} \rangle = 0. \quad (31)$$

Оно задаёт соотношение между операторами числа частиц и инверсии. Используя это уравнение, мы можем оценить, с какой точностью можно расцепить корреляцию операторов, т. е. какова точность приближения $\langle \hat{n}\hat{D} \rangle \approx \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{D} \rangle$. Применяя (11) – (13) и (31), получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}\hat{D} \rangle - \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{D} \rangle &= \langle \delta\hat{n}\delta\hat{D} \rangle - \langle \delta\hat{n} \rangle \langle \delta\hat{D} \rangle = \\ &= -1/2\langle \delta\hat{D} \rangle - \langle \delta\hat{n} \rangle \langle \delta\hat{D} \rangle = -\langle \delta\hat{D} \rangle (1 + 2\langle \delta\hat{n} \rangle)/2. \end{aligned} \quad (32)$$

Видно, что разность $\langle \hat{n}\hat{D} \rangle - \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{D} \rangle$ не зависит от числа атомов и заведомо мала при $N \gg 1$. Более того, разность ниже порога, когда $D_{st} \rightarrow -1$; и из (29) получим, что $\langle \delta\hat{D} \rangle \rightarrow 0$, а следовательно, и $\langle \hat{n}\hat{D} \rangle - \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{D} \rangle$ также стремится к нулю. То есть приближение $\langle \hat{n}\hat{D} \rangle \approx \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{D} \rangle$ хорошо работает много ниже порога даже при $N \approx 1$. Выше порога имеем

$$\begin{aligned}\langle \delta \hat{D} \rangle &= -\frac{4(\Omega_R^0)^2 \gamma_a (1+D_{st})}{\gamma_I (\gamma_a^2 + 4(\Omega_R^0)^2 |D_0 - D_{st}|)} = -\frac{4(\Omega_R^0)^2 (1+D_{th})}{\gamma_I \gamma_a (1+4(\Omega_R^0)^2 (D_0 - D_{th})/\gamma_a^2)} = \\ &= -\frac{4(\Omega_R^0)^2 (1+D_{th})}{\gamma_a (\gamma_I + 8(\Omega_R^0)^2 n_{st} / \gamma_a)}.\end{aligned}\quad (33)$$

Когда накачка сильно превышает пороговую, т. е. $\gamma_I = \gamma_a + \gamma_p$ превышает все характерные скорости системы, то $\langle \delta \hat{D} \rangle \rightarrow 0$. В пределе газового лазера, когда γ_a много меньше всех характерных скоростей, $n_{st} \gg 1$, $\langle \delta \hat{D} \rangle \sim -1/n_{st}$ и

$$\langle \hat{n} \hat{D} \rangle - \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{D} \rangle \sim -1/n_{st}. \quad (34)$$

Таким образом, приближение $\langle \hat{n} \hat{D} \rangle \approx \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{D} \rangle$ хорошо работает выше порога даже при $N \approx 1$.

2. Уравнения Зябловского

Данный результат наводит на мысль, что динамику лазера вблизи порога генерации можно получить из системы уравнений (8) – (10), сделав приближение $\langle \hat{n} \hat{D} \rangle \approx \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{D} \rangle$. В этом случае система уравнений примет вид

$$\dot{n} = -\gamma_a n + \Omega_R S, \quad (35)$$

$$\dot{S} = -\left(\frac{\gamma_a}{2} + \frac{\gamma_\sigma}{2}\right) S + \Omega_R (D + 2nD + N), \quad (36)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I (D - ND_0) - 2\Omega_R S, \quad (37)$$

Данная система, во-первых, замкнута, т. е. полностью описывает (грубо или точно) динамику переменных n , S и D , и, во-вторых, нелинейна, т. е. не имеет расходимости вблизи порога, в отличие от системы (26). Отметим, что эта система содержит слагаемые, учитывающие спонтанное излучение. Как показано выше, даже при $N \approx 1$, эта система приближается к точному решению ниже и выше порога генерации. Оказывается, что она также хорошо работает и вблизи порога даже в случае $N \approx 1$. Поэтому

му систему (35) – (37) часто используют в численных расчётах, когда учёт спонтанного излучения необходим, но нет возможности точно решить управляющее уравнение (1) – (4). Стационарное решение (35) – (37) для числа фотонов n_{st} на рис. 14. сравнивается с точным решением при $N = 1$.

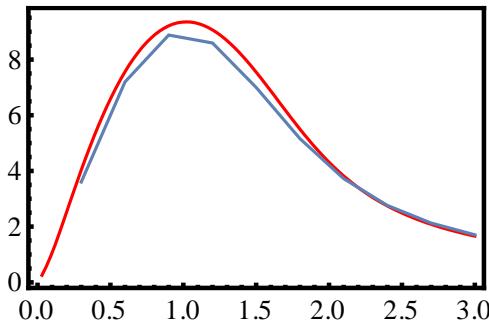


Рис. 14. Зависимость n_{st} от D_0 , полученная при решении системы (35) – (37) (сплошная линия) и при решении управляющего уравнения (1) – (4) (ломаная линия)

3. Ширина линии излучения

Одним из важных свойств лазера, имеющим большое практическое значение, является ширина линии излучения. Лазеры позволяют создавать излучение с очень большой временной и пространственной когерентностью. Чтобы увидеть, каким образом это следует из управляющего уравнения (1) – (4), запишем уравнения движения на средние значения операторов $\hat{a}^\dagger(t)\exp(i\omega_{CM}t)$ и $\hat{\sigma}^\dagger=\sum_i \hat{\sigma}_i^\dagger(t)\exp(-i\omega_{TLS}t)$ в случае точно-го резонанса $\omega_{CM}=\omega_{TLS}$:

$$\langle \dot{\hat{a}}^\dagger(t) \rangle = -\gamma_a \langle \hat{a}^\dagger(t) \rangle / 2 + i\Omega_R \langle \hat{\sigma}^\dagger(t) \rangle, \quad (38)$$

$$\langle \dot{\hat{\sigma}}^\dagger(t) \rangle = -\gamma_\sigma \langle \hat{\sigma}^\dagger(t) \rangle / 2 - i\Omega_R \langle \hat{D}(t)\hat{a}^\dagger(t) \rangle. \quad (39)$$

Для вычисления спектра излучения, нам необходимо вычислить двухвременную корреляционную функцию $\langle \hat{E}(t+\tau)\hat{E}(t) \rangle \sim \langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle$ (см. лекцию 10). Для этого мы воспользуемся квантовой теоремой ре-

грессии, которая позволяет, зная уравнения на эволюцию средних значений операторов $\hat{a}(t)$ и $\hat{\sigma}(t)$ (система (38) – (39)), записать уравнения для двухвременных средних $\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t)$ и $\hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{\sigma}(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle = -\gamma_a \langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle / 2 + i\Omega_R \langle \hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle, \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle = -\frac{\gamma_\sigma}{2} \langle \hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle - i\Omega_R \langle \hat{D}(t+\tau)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle. \quad (41)$$

Начальным условием для данной системы является $\langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle|_{\tau=0} = \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle$, $\langle \hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle|_{\tau=0} = \langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle$. Система (40) – (41) неполна, т.к. содержит среднее значение оператора $\langle \hat{D}(t+\tau)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle$. Однако выше мы видели, что с хорошей точностью число фотонов и инверсия не коррелируют в один момент времени. Поэтому естественно предположить, что в разные моменты времени они также не коррелируют, т. е. положим, что $\langle \hat{D}(t+\tau)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle \approx \langle \hat{D}(t+\tau) \rangle \langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle$. Тогда в стационарном режиме из (40) – (41) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle = -\gamma_a \langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle / 2 + i\Omega_R \langle \hat{\sigma}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle, \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \hat{\sigma}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle = -\frac{\gamma_\sigma}{2} \langle \hat{\sigma}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle - i\Omega_R D_{st} \langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle. \quad (43)$$

Система (42) – (43) замкнута и позволяет найти $\langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle$ и, следовательно, ширину линии.

Оценить ширину линии можно, если найти собственные значения матрицы системы (42) – (43). Наименьшее собственное значение имеет вид

$$\lambda_{\min} = -\frac{\gamma_a + \gamma_\sigma}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 16\Omega_R^2 (D_{th} - D_{st}) / (\gamma_a + \gamma_\sigma)^2} \right). \quad (44)$$

Если для определения D_{st} пользоваться выражением, полученным из системы уравнений Максвелла–Блоха, $D_{st} = D_{th}$, то мы получим $\lambda_{\min} = 0$, т. е. нулевую ширину линии выше порога генерации. Это соответствует тому, что полуклассическая система уравнений предсказывает определённую частоту колебаний амплитуды поля и поляризации атома – частоту генерации (см. лекцию 11).

Более точный ответ получится, если мы оценим $D_{th} - D_{st}$ как $-\langle \delta \hat{D} \rangle_{st}$ из выражения (29). Тогда находящееся выше порога минимальное собственное значение может быть оценено как

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= -\frac{\gamma_a + \gamma_\sigma}{4} \left(1 - \sqrt{1 - 16(\Omega_R^0)^2 |\langle \delta D \rangle_{st}| / (\gamma_a + \gamma_\sigma)^2} \right) \approx \\ &\approx \frac{-2(\Omega_R^0)^2 |\langle \delta D \rangle_{st}|}{\gamma_a + \gamma_\sigma} = \frac{-8(\Omega_R^0)^4 (1 + D_{th})}{8(\Omega_R^0)^2 (\gamma_a + \gamma_\sigma) n_{st} + \gamma_a \gamma_I (\gamma_a + \gamma_\sigma)},\end{aligned}\quad (45)$$

где на последнем шаге мы воспользовались (33). Видно, что λ_{\min} по модулю убывает с увеличением накачки. В пределе $\gamma_a \ll (\Omega_R^0)^2 / \gamma_I$ ширина линии убывает как $\sim 1/n_{st}$, т. е. обратна пропорциональна числу фотонов или, что то же самое, мощности лазерного излучения. Это есть закон Шавлова–Таунса. В случае $n_{st} \gg 1$ ширина линии лазерного излучения много меньше ширины линии как моды резонатора, так и линии излучения атома.

Отметим, что данная оценка достаточно точно воспроизводит ответ, полученный из управляющего уравнения (1) – (4) для одного атома, рис. 15.

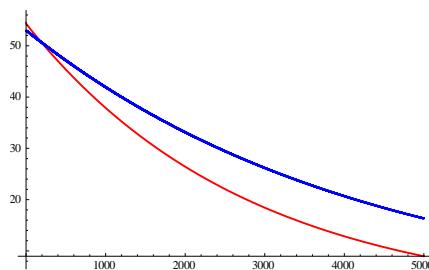


Рис. 15. Зависимость $\langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle$, полученная при решении системы (42) – (42) (красная линия) и при решении управляющего уравнения (1) – (4) (синяя линия)

Контрольные вопросы

- Почему спонтанное излучение не учитывается полуклассической системой уравнений Максвелла–Блоха?
- Динамика каких операторов будет учитывать спонтанное излучение?

3. Запишите уравнения на средние значения операторов $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, $i(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma})$ и \hat{D} .
4. Запишите систему уравнений, которая получается в нулевом порядке разложения по числу атомов N . Какой степени N соответствует каждое уравнение?
5. Запишите систему уравнений, которая получается в первом порядке разложения по числу атомов N . Какой степени N соответствует каждое уравнение?
6. Покажите, что вблизи порога квантовые флюктуации вблизи положения равновесия, описываемого полуклассической теорией, имеют максимум.
7. Запишите систему уравнений, которая получается во втором порядке разложения по числу атомов N . Какой степени N соответствует каждое уравнение?
8. Какова точность расщепления корреляции между оператором числа фотонов и инверсии населённостей?
9. Как, используя квантовую теорему регрессии, вычислить спектр излучения лазера?
10. Получите в пределе газового лазера закон Шавлова–Таунса.

Задачи

1. Получите уравнения (5) – (7).
2. Найдите диссипатор, который описывает затухание оператора $\langle \hat{\sigma}_i^\dagger \hat{\sigma}_j \rangle$.
3. Определите, как зависит от накачки флюктуация оператора обмена энергией \hat{S} .
4. Найдите точную форму линии лазерного излучения, используя систему (42) – (43). Покажите, что она имеет форму двух лоренцевских линий. Исследуйте ширины и амплитуды этих лоренцевских линий выше и ниже порога.

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P. Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics.* – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J. Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations.* – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum Optics.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 15. Атомы в резонаторе, оптическая бистабильность

Очень часто упрощенная модель проливает больше света на то, как в действительности устроена природа, чем любое число вычислений *ab initio*.

P.W. Anderson

Введение

Применение света для передачи, обработки и хранения информации имеет большие преимущества, связанные с большой частотой оптического излучения ($\sim 10^{15}$ Гц) по сравнению, например, с радиочастотным диапазоном. Здесь имеется широкая полоса частот для передачи информации. Волоконные световоды и лазерные источники света обеспечивают оптическую связь с высокой информационной емкостью.

Для реализации таких систем ключевым элементом является оптический транзистор, позволяющий усиливать, переключать сигнал и осуществлять с ним логические операции. В оптических системах обработки информации, в частности в оптическом компьютере, таким элементом должен стать оптический транзистор. Его действие должно быть основано на оптической бистабильности, возникающей в нелинейных оптических системах с обратной связью. Он должен обладать быстродействием, малыми размерами и минимальной потребляемой мощностью. Это может обеспечить также создание систем для управления светом с помощью света. Для этого необходимы среды и материалы с большими и в то же время быстрыми нелинейностями.

1. Управляющее уравнение для описания оптической бистабильности

Итак, систему, которую мы будем изучать в данной лекции, состоит из атомов, находящихся в резонаторе. Последний, в свою очередь, подвергается воздействию внешнего электромагнитного поля, которое проходит в резонатор за счёт неидеальных стенок. Основное отличие от лазерной системы состоит в том, что атомы не накачиваются, т. е. отсут-

ствует некогерентная накачка. Вместо этого энергия в систему поступает за счёт внешнего поля, которое « заводится » в резонатор. Иногда в литературе такую накачку называют когерентной, поскольку внешнее поле, как правило, выбирается таким образом, чтобы его частота совпадала с частотой моды резонатора.

Для исследования такой системы запишем управляющее уравнение, описывающее динамику взаимодействующих моды резонатора и n двухуровневых атомов:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \rho] + L_a[\rho] + L_\sigma[\rho] + L_{ph}[\rho]. \quad (1)$$

Здесь

$$L_a[\rho] = \frac{\gamma_a}{2} (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho), \quad (2)$$

$$L_\sigma[\rho] = \sum_i \frac{\gamma_D^i}{2} (2\hat{\sigma}_i\rho\hat{\sigma}_i^\dagger - \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i\rho - \rho\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i), \quad (3)$$

$$L_{ph}[\rho] = \sum_i \frac{\gamma_{ph}^i}{2} (\hat{D}_i\rho\hat{D}_i^\dagger - \rho). \quad (4)$$

Для того, чтобы записать гамильтониан системы, необходимо выяснить вид гамильтониана взаимодействия резонатора с внешним полем. Для этого мы запишем полную энергию электромагнитного поля в резонаторе:

$$W(t) = \frac{1}{8\pi} \int_V \left(|\mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2 + |\mathbf{H}_{CM}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2 \right) dV, \quad (5)$$

где $\mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}_{CM}(\mathbf{r}, t)$ – электрическое и магнитное поля моды резонатора, а $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}_{ext}(\mathbf{r}, t)$ – электрическое и магнитное поля внешней волны, зашедшей в резонатор. После процедуры квантования электромагнитного поля (см. лекцию 2) электрическое и магнитное поля резонатора представляются в виде

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0(\hat{a}^+(t) + \hat{a}(t)) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right), \quad \hat{B}_y(z, t) = i\mathcal{B}_0(\hat{a}^+(t) - \hat{a}(t)) \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right). \quad (6)$$

Полную энергию поля можно записать в виде

$$W = W_{CM} + W_{ext} + W_{int}, \quad (7)$$

где

$$W_{CM} = \hbar\omega_{CM}\hat{a}^\dagger\hat{a}, W_{ext} = \frac{1}{8\pi}\int_V \left(|\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2 + |\mathbf{H}_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2 \right) dV, \\ W_{int} = \hbar\Omega_1(t)(\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)) + \hbar\Omega_2(t)i(\hat{a}(t) - \hat{a}^\dagger(t)). \quad (8)$$

Константы взаимодействия Ω_{R1} и Ω_{R2} задаются равенствами:

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{8\pi}\int_V (\mathbf{E}_{CM}^*(\mathbf{r})\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r})\mathbf{E}_{ext}^*(\mathbf{r}, t)) dV, \\ \Omega_2(t) = \frac{1}{8\pi}\int_V (\mathbf{H}_{CM}^*(\mathbf{r})\mathbf{H}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_{CM}(\mathbf{r})\mathbf{H}_{ext}^*(\mathbf{r}, t)) dV. \quad (9)$$

Далее для простоты будем считать, что $\Omega_2 = 0$. Также будем полагать внешнее поле монохроматическим: $\Omega_1(t) = 2\Omega \cos \omega_{ext} t$. Таким образом, воздействие внешнего поля на поле резонатора аналогично воздействию гармонической внешней силы на гармонический осциллятор.

Теперь мы можем записать гамильтониан задачи в следующем виде:

$$\hat{H} = \hbar\omega_{CM}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_{TLS}\sum_i \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i + \\ + \hbar\Omega_R\sum_i (\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{a}) + 2\hbar\Omega \cos \omega_{ext} t (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (10)$$

Здесь отметим, что мы пренебрегли взаимодействием внешнего поля, зашедшего в резонатор, с двухуровневыми атомами. Это взаимодействие не приводит к новым эффектам, однако существенно усложняет расчёты.

2. Приближение среднего поля

Далее нам необходимо воспользоваться гипотезой масштабной инвариантности для того, чтобы получить уравнения на средние значения. Для этого нужно знать, как масштабируется константа взаимодействия резонатора с внешним полем. Из (9) видно, что $\Omega \sim V\mathbf{E}_{CM} \sim \sqrt{V} \sim \sqrt{N}$. Теперь в качестве исследуемых операторов выберем \hat{a} , $\hat{\sigma}_i$ и \hat{D}_i . Далее вспомним, что уравнение на \hat{a} масштабировалось как \sqrt{N} – в точности так же, как и Ω . Таким образом, в старшем порядке по числу атомов мы получим систему уравнений Максвелла–Блоха с учётом взаимодействия моды резонатора с внешним полем:

$$\dot{a} = (-i\omega_{CM} - \gamma_a/2)a - i\Omega_R\sigma - i\Omega \exp(-i\omega_{ext}t), \quad (11)$$

$$\dot{\sigma} = (-i\omega_{TLS} - \gamma_\sigma/2)\sigma + i\Omega_R^0 a D, \quad (12)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I(D+1) + 2i\Omega_R^0(a^*\sigma - \sigma^*a). \quad (13)$$

В последнем уравнении мы учли, что атомы не накачиваются, т. е. $D_0 = -1$. Видно, что в (11) в правой части присутствует явная зависимость от времени. Чтобы её устраниТЬ, мы, как и всегда, перейдем к медленным амплитудам. Однако теперь необходимо сделать замену таким образом, чтобы переменные осциллировали на частоте внешнего поля, т. е. нужно перейти к переменным $a \rightarrow a \exp(-i\omega_{ext}t)$, $\sigma \rightarrow \sigma \exp(-i\omega_{ext}t)$.

В результате получаем

$$\dot{a} = (i\Delta - \gamma_a/2)a - i\Omega_R^0\sigma - i\Omega, \quad (14)$$

$$\dot{\sigma} = (i\delta - \gamma_\sigma/2)\sigma + i\Omega_R^0aD, \quad (15)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I(D+1) + 2i\Omega_R^0(a^*\sigma - \sigma^*a). \quad (16)$$

Далее будем рассматривать случай точного резонанса: $\Delta = \delta = 0$. Из (14) видно, что переменная a – комплексная амплитуда поля в резонаторе – в отсутствии взаимодействия с атомами отстает от амплитуды внешнего поля Ω на $\pi/2$. Это поведение аналогично поведению линейного осциллятора под действием внешней силы. Поэтому можно перейти к действительным переменным $-\text{Im } a$ и $\text{Re } \sigma$ (далее эти переменные будем обозначать теми же буквами a и σ). В результате получим

$$\dot{a} = -\gamma_a a/2 + \Omega_R^0 \sigma + \Omega, \quad (17)$$

$$\dot{\sigma} = -\gamma_\sigma \sigma/2 + \Omega_R^0 a D, \quad (18)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I(D+1) - 4\Omega_R^0 a \sigma. \quad (19)$$

Найдем стационарное решение данной системы. Выражая σ из (18) через a и D , затем подставляя в (19), получаем

$$D = -\frac{1}{1 + 8(\Omega_R^0)^2 a^2 / \gamma_\sigma \gamma_D}, \quad \sigma = -\frac{2\Omega_R^0 a / \gamma_\sigma}{1 + 8(\Omega_R^0)^2 a^2 / \gamma_\sigma \gamma_D}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (17), находим

$$a = \frac{\frac{2\Omega_R^0 / \gamma_a}{1 + \frac{4(\Omega_R^0)^2 / \gamma_a \gamma_D}{1 + 8(\Omega_R^0)^2 a^2 / \gamma_\sigma \gamma_D}}}{1 + \frac{\xi}{1 + \eta \xi a^2}}, \quad (21)$$

где введены обозначения

$$\xi = 4(\Omega_R^0)^2 / \gamma_\sigma \gamma_a, \quad \eta = 2\gamma_a / \gamma_D, \quad \alpha = 2\Omega_R^0 / \gamma_a. \quad (22)$$

Параметр ξ иногда называют *кооперативностью*. Заметим, что α есть значение a в случае, когда $\Omega_R^0 = 0$, т. е. линейный отклик резонатора на внешнее поле в отсутствии атомов. Поэтому обозначим $I_{in} = \alpha^2$, $I_{out} = a^2$. После возведения (21) в квадрат, получим

$$I_{out} = \frac{I_{in}}{\left(1 + \xi / (1 + \eta \xi I_{out})\right)^2}. \quad (23)$$

Выражение (23) описывает нелинейный отклик резонатора с атомами на внешнее воздействие. Его можно переписать в виде

$$I_{out} = T(I_{out}) I_{in}, \quad (24)$$

где

$$T(I_{out}) = \frac{1}{\left(1 + \xi / (1 + \eta \xi I_{out})\right)^2} \quad (25)$$

— нелинейный коэффициент пропускания. Зависимость $T(I_{out})$ от интенсивности поля в резонаторе I_{out} изображена на рис. 16.

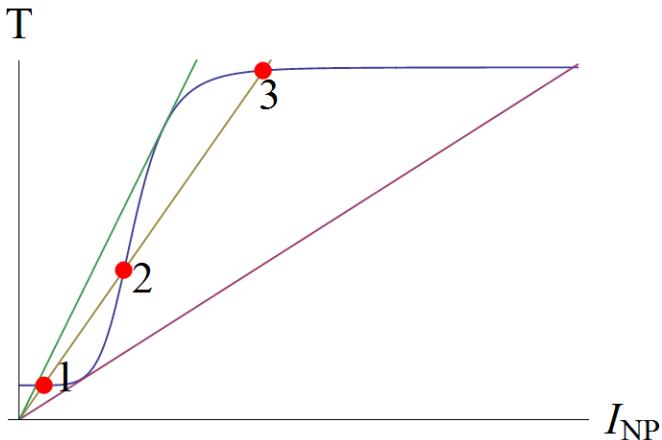


Рис. 16. Зависимость нелинейного пропускания от интенсивности поля в резонаторе I_{out}

Стационарное значение интенсивности поля в резонаторе I_{out} определяется решением уравнения (24), т. е. пересечением кривой $T(I_{out})$ и прямой I_{out} / I_{in} , наклон которой зависит от интенсивности внешнего поля I_{in} . Видно, при определённых значениях интенсивности внешнего поля существуют три стационарных значения поля в резонаторе I_{out} (см. рис. 16). Значения, обозначенные точками 1 и 3 – устойчивы, а точкой 2 – нет. Таким образом, имеется два устойчивых значения интенсивности поля в резонаторе I_{out} . При этом одно из них в несколько раз больше другого (см. рис. 16)

Полученный результат имеет ясный физический смысл. Если поле в резонаторе I_{out} изначально достаточно большое, то оно может вызывать увеличение инверсии населённостей в атоме. А оно, в свою очередь, приводит к усилению поля резонатора вплоть до его насыщения. Если же оно изначально мало, то поле и инверсия населённостей атома определяются только накачкой. В этом случае поле резонатора остаётся малым. Это объясняет возможность существования двух устойчивых решений. Данное явление – существование двух устойчивых решений – называют *бистабильностью*.

Теперь исследуем вопрос о том, когда возникает бистабильность. Для этого (23) перепишем в виде

$$I_{in} = I_{out} \left(1 + \xi / (1 + \eta \xi I_{out}) \right)^2. \quad (26)$$

Для возникновения бистабильности необходимо, чтобы при одном значении I_{in} существовало три различных значения I_{out} . Это будет возможно, если будет существовать область значений I_{out} , для которой

$$\partial I_{in} / \partial I_{out} < 0. \quad (27)$$

Таким образом, условие возникновения бистабильности примет вид

$$\partial I_{in} / \partial I_{out} = 0. \quad (28)$$

Это даёт

$$I_{out}^2 \eta^2 \xi^2 + I_{out} \left(2\eta\xi - \eta\xi^2 \right) + 1 + \xi = 0. \quad (29)$$

Данное уравнение будет иметь решение, если его дискриминант отрицателен, т. е. $\eta^2 \xi^3 (\xi - 8) \geq 0$, или

$$\xi \geq 8. \quad (30)$$

Решения (29) имеют вид

$$I_{out} = \frac{\xi - 2}{2\eta\xi} \pm \frac{\sqrt{\xi(\xi-8)}}{2\eta\xi}. \quad (31)$$

Видно, что при выполнении условия (30) они всегда положительны. Эти решения определяют границы области существования двух устойчивых и одного неустойчивого решения. Ширина этой области

$$\Delta I_{out} = \frac{\sqrt{\xi(\xi-8)}}{\eta\xi}. \quad (32)$$

Отметим, что существование двух устойчивых решений приводит к появлению гистерезиса в экспериментальной зависимости $I_{out}(I_{in})$, рис. 17.

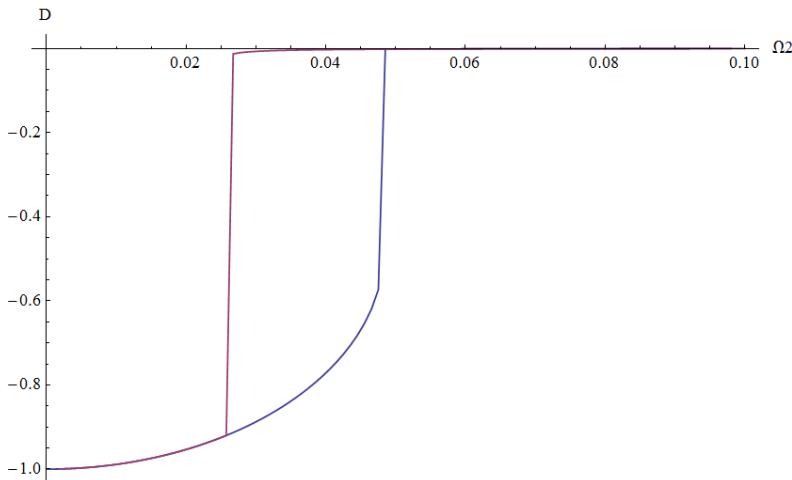


Рис. 17. Зависимость инверсии населённостей в КТ при возрастающей амплитуде внешнего поля (синяя линия) и при убывающей (красная линия), $\gamma_a \sim 5 \cdot 10^{13} c^{-1}$, $\gamma_\sigma \sim 10^{11} c^{-1}$, $\gamma_D \sim 10^{13} c^{-1}$, $\Omega_R \sim 10^{13} c^{-1}$, $D_0 = -1$

Из данных графиков видно, что при переходе с одного решения на другое переменные могут сильно изменяться, в то время как амплитуда поля, необходимая для этого изменения, может быть малой. То есть мы можем с помощью малого сигнала во много раз изменять параметры системы. Это наводит на мысль использовать лазер в качестве прибора, аналогичного обычному транзистору в схемах оптического компьютера.

3. Оптическая бистабильность цепочки лазеров: волны переключения и структуры

Теперь рассмотрим динамику бесконечной цепочки резонаторов, взаимодействующих друг с другом, помещённых во внешнее поле. Данная схема аналогична предложенной в [2], где предполагается, что электромагнитная волна падает перпендикулярно оси цепочки. Система уравнений, описывающих данную ситуацию, будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}}_n = & \left(i\Delta - \tau_a^{-1} \right) \hat{a}_n - i\Omega_R \hat{\sigma}_n - i\Omega_{NP-TLS} \hat{\sigma}_{n-1} - \\ & - i\Omega_{NP-TLS} \hat{\sigma}_{n-1} - i\Omega_{NP-NP} (\hat{a}_{n-1} + \hat{a}_{n+1}) - i\Omega_1,\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\sigma}}_n = & \left(i\delta - \tau_\sigma^{-1} \right) \hat{\sigma}_n + i\Omega_R \hat{a}_n \hat{D}_n + i\Omega_{NP-TLS} \hat{a}_{n-1} \hat{D}_n + \\ & + i\Omega_{NP-TLS} \hat{a}_{n+1} \hat{D}_n + i\Omega_2 \hat{D}_n,\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{D}}_n = & 2i\Omega_R (\hat{a}_n^\dagger \hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_n^\dagger \hat{a}_n) + 2i\Omega_{NP-TLS} (\hat{a}_{n-1}^\dagger \hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_n^\dagger \hat{a}_{n-1}) \\ & + 2i\Omega_{NP-TLS} (\hat{a}_{n+1}^\dagger \hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_n^\dagger \hat{a}_{n+1}) - \tau_D^{-1} (\hat{D}_n - \hat{D}_{0n}) + 2i\Omega_2 (\hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_n^\dagger),\end{aligned}\quad (18)$$

где Ω_{NP-NP} , Ω_{NP-TLS} – константы взаимодействия НЧ с соседними НЧ и КТ соответственно [2], а Ω_1 и Ω_2 – константы взаимодействия внешнего поля с НЧ и КТ соответственно.

Рассмотрим сначала полностью синхронизированную цепочку, т. е. решения вида $a_n, \sigma_n, D_n = a_{n+1}, \sigma_{n+1}, D_{n+1}$. Иными словами продольный волновой вектор κ равен нулю. Как показано в [2], однородное, стационарное решение системы (16) – (18) совпадает со стационарным решением для одного лазера (11) – (13) с заменой Ω_R на $\Omega_R + 2\Omega_{NP-TLS}$ и Δ на $\Delta - 2\Omega_{NP-NP}$. Более того, как и в случае единичного лазера, при

$D_0 \leq -8D_{th}$, где $D_{st} = D_{th} = \frac{1 + 4\Omega_{NP-NP}^2 \tau_a^2}{[\Omega_R + 2\Omega_{NP-TLS}]^2 \tau_a \tau_\sigma}$, существует два устой-

чивых решения, т. е. имеется бистабильное поведение. Однако помимо решений с $k = 0$ могут существовать и неоднородные, зависящие от n решения. Например, хорошо известно, что в нелинейных системах могут распространяться волны переключения, т. е. одно решение вытесняет другое, менее устойчивое.

Для того, чтобы получить волну переключения, зададимся следующими начальными условиями: половина цепочки будет находиться в

одном устойчивом решении, а другая половина – в другом. Численный эксперимент (решение системы) показывает, что при таком начальном условии по системе будет распространяться волны переключения, представляющие собой движение границы раздела между двумя решениями. Направление распространения такой волны зависит от величины внешнего поля. При некотором значении внешнего поля граница раздела не движется, т. е. волны переключения не возникает (рис. 18).

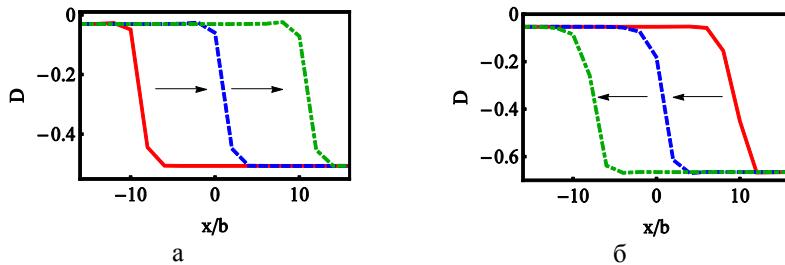


Рис. 18. Распространение волны переключения с одного устойчивого значения инверсии населённостей на другое в цепочке лазеров. Направление зависит от величины внешнего поля, $\gamma_a = 10^{14} \text{ s}^{-1}$, $\gamma_\sigma = 10^{11} \text{ s}^{-1}$, $\gamma_D = 10^{13} \text{ s}^{-1}$,

$$\Omega_R = 10^{13} \text{ s}^{-1}, D_0 = -1$$

В нелинейных распределённых системах, помимо волн переключения, возможно множество вариантов эволюции. В нашем случае проявляется ещё один – образование структур, который будет наблюдаться, если выбрать $\gamma_a = 10^{13} \text{ s}^{-1}$.

В качестве начального условия мы теперь возьмём распределение, изображённое на рис. 19, т. е. всей системе задаётся одно из устойчивых решений, но внутри неё мы создаём зародыш, для которого в качестве начального условия берём другое устойчивое решение. Тогда, в зависимости от внешнего поля, возможны два варианта эволюции системы. Будет либо образовываться структура (рис. 19а–г), либо происходит вытеснение зародыша более устойчивым решением, при этом вытеснение не будет описанной выше волной переключения.

Таким образом, как отмечалось во введении, эффект бистабильности может найти широкие применения. Переменные системы – дипольные моменты НЧ и КТ и инверсия – сильно изменяются вблизи точки возникновения бистабильности, что открывает возможность использования эффекта бистабильности в качестве транзистора для оптических компьютеров.

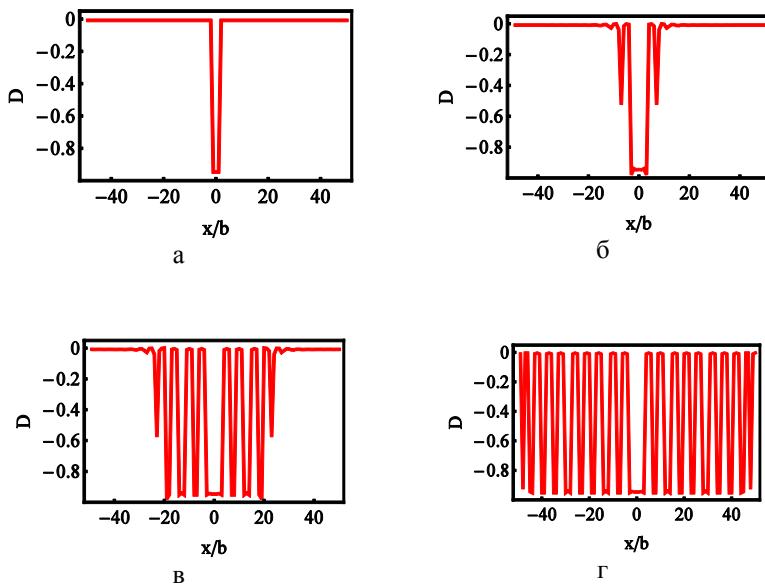


Рис. 19. Образование структур в цепочке лазеров

Контрольные вопросы

1. Какова природа возникновения оптической бистабильности?
2. Какова точность приближения среднего поля?
3. Каков физический смысл параметра кооперативности?
4. Запишите выражение для нелинейного коэффициента пропускания.
5. Какую роль насыщение двухуровневой системы играет в возникновении оптической бистабильности?

Задачи

1. Используя гипотезу масштабной инвариантности, получите уравнения (11) – (13).
2. Покажите, что квантовые флуктуации около положения равновесия системы (11) – (13) описываются системой (32) из лекции 12. Исследуйте положения равновесия (11) – (13) на устойчивость.

3. Покажите, что при наличии некогерентной накачки, бистабильность будет иметь место при условии $D_0 \leq -8D_{th}$, где $D_{th} = \gamma_a \gamma_\sigma / 4\Omega_R^2$ – порог генерации одномодового многоатомного лазера.

4. Используя уравнения движения на операторы $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, $\hat{S} = i(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma})$, \hat{D} , \hat{a} , $\hat{\sigma}$ и гипотезу масштабной инвариантности, покажите, что соответствующие масштабированные переменные будут удовлетворять системе уравнений:

$$\dot{n} = -\gamma_a a + \Omega_R^0 S - 2\Omega_R^0 a, \quad (19)$$

$$\dot{S} = -(\gamma_\sigma + \gamma_a) S / 2 + 2\Omega_R^0 n D + 2\Omega \sigma, \quad (20)$$

$$\dot{D} = -\gamma_I (D + 1) - 4\Omega_R^0 a \sigma, \quad (21)$$

$$\dot{\sigma} = -\gamma_\sigma \sigma / 2 + \Omega_R^0 a D, \quad (22)$$

$$\dot{a} = -\gamma_a a / 2 + \Omega_R^0 \sigma + \Omega, \quad (23)$$

а квантовые флуктуации – следующей системе:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{n} \rangle \\ \langle \delta \hat{S} \rangle \\ \langle \delta \hat{D} \rangle \\ \langle \delta \hat{a} \rangle \\ \langle \delta \hat{\sigma} \rangle \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{n} \rangle \\ \langle \delta \hat{S} \rangle \\ \langle \delta \hat{D} \rangle \\ \langle \delta \hat{a} \rangle \\ \langle \delta \hat{\sigma} \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega_R^0 (1 + D_{st}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\gamma_a & \Omega_R^0 & 0 & -2\Omega & 0 \\ 2\Omega_R^0 D_{st} & -(\gamma_a + \gamma_\sigma)/2 & 2\Omega_R^0 n_{st} & 0 & 2\Omega \\ 0 & -2\Omega_R^0 & -\gamma_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_a/2 & \Omega_R^0 \\ 0 & 0 & \Omega_R^0 a_{st} & \Omega_R^0 D_{st} & -\gamma_\sigma/2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

И в самом младшем порядке получается уравнение

$$\langle \delta \hat{D} \rangle + 2 \langle \delta \hat{n} \delta \hat{D} \rangle = 0. \quad (26)$$

Исследуйте, как зависит квантовая поправка $\langle \delta \hat{n} \rangle$ к числу фотонов в области бистабильности.

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P.* Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics. – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J.* Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations. – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 16. Сверхизлучение Дике

Reality is just an approximation to theory
D.I. Zhukhovitsky

Введение

Одним из ярких примеров коллективной квантовой релаксации является сверхизлучение. *Сверхизлучение* – это явление резкого увеличения скорости спонтанного излучение ансамбля независимых излучателей. Явление было предсказано в работе Дике для квантовых излучателей, находящихся в субволновом объеме. Дике было показано, что увеличение интенсивности излучения N двухуровневых систем достигается за время $\sim \log N / N$, пик сверхизлучения длится время в N раз меньшее, чем время излучения отдельного излучателя, а максимальная интенсивность излучения $\sim N^2$. К настоящему времени с применением различных приближений были подробно исследовано СИ в бозе-конденсатах, плазмонных структурах, полупроводниках, кубитах, массивах квантовых точек и т.д. Ниже мы исследуем возникновение увеличения скорости спонтанной релаксации и проанализируем связь с известной в теории антенн классической задачей об увеличении скорости излучения фазированных диполей.

1. Модель Дике сверхизлучения ансамбля двухуровневых атомов

Рассмотрим ансамбль двухуровневых атомов, находящихся в субволновом объеме. В первом приближении будем считать, что они не взаимодействуют посредством близких полей. Сразу отметим, что эти два предположения противоречат друг другу. Однако они сильно упрощают расчеты и позволяют ухватить основные эффекты. Операторы перехода между основным и возбужденным состоянием для j -го атома, $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$ и $\hat{\sigma}^+ = |e\rangle\langle g|$, при наличии других атомов, будут определяться как $\hat{\sigma}_j = \underbrace{\hat{1} \otimes \dots \otimes}_{j-1} \hat{\sigma} \otimes \dots \otimes \underbrace{\hat{1}}_{N-j}$ и $\hat{\sigma}_j^+ = \underbrace{\hat{1} \otimes \dots \otimes}_{j-1} \hat{\sigma}^+ \otimes \dots \otimes \underbrace{\hat{1}}_{N-j}$, где $\hat{1}$ – единичный оператор. Данная запись означает, что операторы, соответствующие j -му атому, не меняют состояния остальных атомов. Гамильтониан взаимодействия

ствия атомов с электромагнитным полем в дипольном приближении и приближении врачающейся волны будет иметь вид

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar \omega \hat{J}^z + \sum_k \hbar \Omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{J}^- + \hat{J}^+ \hat{a}_k), \quad (1)$$

где \hat{a}_k^\dagger и \hat{a}_k являются операторами рождения и уничтожения фотонов в k -й моде с частотой ω_k , ω – частота перехода двухуровневых атомов, $\Omega_k = -\mathbf{d}_{eg} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)/\hbar$ – константа взаимодействия моды k электромагнитного поля с атомом, $\hat{J}^- = \sum_k \hat{\sigma}_k$ – коллективный оператор дипольного момента, $\hat{J}^+ = (\hat{J}^-)^\dagger$, $\hat{J}^z = \sum_k \hat{\sigma}_k^z$ – оператор коллективной инверсии. Для того, чтобы получить управляющее уравнение, необходимо провести процедуру исключения мод поля свободного пространства, как это было сделано в лекции 8. Заметим, что операторы коллективного дипольного момента и коллективной инверсии обладают теми же коммутационными соотношениями, что и операторы дипольного момента и инверсии для одиночного атома:

$$[\hat{J}^+, \hat{J}^-] = \hat{J}^z, [\hat{J}^+, \hat{J}^z] = -2\hat{J}^+, [\hat{J}^-, \hat{J}^z] = 2\hat{J}^-. \quad (2)$$

При выводе управляющего уравнения для двухуровневого атома именно коммутационные соотношения определяли вид управляющего уравнения. Поскольку коммутационные соотношения и гамильтониан взаимодействия с резервуаром не меняются, то вид управляющего уравнения для системы двухуровневых атомов будет аналогичен виду управляющего уравнения для одиночного атома с заменой $\hat{\sigma}$ на \hat{J} . Таким образом, получаем следующее управляющее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -i \frac{\omega}{2} [\hat{J}^z, \rho] + \frac{\gamma}{2} (2\hat{J}^- \rho \hat{J}^+ - \hat{J}^+ \hat{J}^- \rho - \rho \hat{J}^+ \hat{J}^-). \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) нам необходимо выбрать некоторый базис системы. Здесь существует несколько возможностей. Можно выбрать базис невзаимодействующих атомов, т. е. состояния $\otimes |i_k\rangle$, где $|i_k\rangle$ – основное $|g\rangle$ или возбужденное $|e\rangle$ состояние k -го атома. Можно поступить иначе и выбрать такие базисные состояния, которые являются собственными одновременно для операторов \hat{J}^z и $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 =$

$= (\hat{J}^+ \hat{J}^- + \hat{J}^- \hat{J}^+) + (\hat{J}^z)^2$. Построение таких состояний эквивалентно известной из теории углового момента задаче о сложении моментов. Эти состояния характеризуются двумя квантовыми числами $0 \leq N \leq$ и $-N \leq J_z \leq N$ так, что

$$\hat{J}^2 |N, J^z\rangle = N(N+1) |N, J^z\rangle, \quad \hat{J}^z |N, J^z\rangle = J^z |N, J^z\rangle. \quad (4)$$

и выражаются через базис одиночественных состояний как (задача 1)

$$|N, J^z\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_N^{J^z}}} \sum_P \left| e, \dots, e, \underbrace{g, \dots, g}_{N-n} \right\rangle \quad (5)$$

где суммирование ведется по всем возможным перестановкам P . Такие состояния называются *состояниями Дику*. Физический смысл введенных квантовых чисел прозрачен: N определяет коллективный дипольный момент, J^z – его проекцию, которая также является коллективной инверсией населенности. Выбор таких состояний в качестве базиса более предпочтителен, поскольку оператор \hat{J}^2 является интегралом движения уравнения (3), в чем легко убедиться, используя соотношение $\dot{\langle \hat{J}^2 \rangle} = Tr(\hat{J}^2 \dot{\rho})$ (задача 2). Отсюда следует, что квантовое число N является сохраняющейся величиной. Поэтому, если в начальный момент времени система находилась в состоянии $|N_0, J_0^z\rangle$, то в последующие моменты времени система будет в подпространстве состояний с тем же N_0 . Данное наблюдение существенно упрощает решение задачи, поскольку уменьшает размерность пространства состояний.

Рассмотрим динамику системы с начальным состоянием $|N, N\rangle = |e, \dots, e\rangle$, т. е. когда $N_0 = N$ и все атомы в начальный момент времени находятся в возбужденном состоянии. Решение уравнения (3) возможно получить лишь численно. Однако Дику был предложен подход, позволяющий описать все основные черты динамики системы. Этот подход заключается в следующем. Запишем уравнение движения для среднего значения оператора инверсии:

$$\frac{d\langle \hat{J}^z \rangle}{dt} = -\gamma \left(\langle \hat{J}^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle (\hat{J}^z)^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{J}^z \rangle \right). \quad (6)$$

Поскольку оператор \hat{J}^2 является интегралом движения, то в (6) \hat{J}^2 можно заменить на его начальное значение, т. е. на $\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)=N^2/4+N/2$.

Далее предположим, что $\langle \hat{J}_z^2 \rangle = \langle \hat{J}_z \rangle^2$. Тогда уравнение (6) становится замкнутым уравнением на переменную $\langle \hat{J}_z \rangle$:

$$\frac{d\langle \hat{J}_z \rangle}{dt} = -\gamma \left(N^2/4 + N/2 - \frac{1}{4} \langle \hat{J}_z \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle \hat{J}_z \rangle \right). \quad (7)$$

Решением уравнения (7) будет

$$\langle \hat{J}_z(t) \rangle = 1 - (N+1) \tanh \left(\gamma(N+1)(t - t_{delay})/4 \right), \quad (8)$$

где t_{delay} определяется из начального условия $\langle \hat{J}_z(0) \rangle = N$ и равно

$$t_{delay} = \frac{2 \ln N}{\gamma(N+1)}. \quad (9)$$

Интенсивность излучения будет иметь вид

$$I(t) = -\langle J'_z(t) \rangle = \left(\frac{N+1}{2} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\gamma(N+1)(t - t_{delay})/4 \right). \quad (10)$$

Отсюда видно, что максимум интенсивности будет наблюдаться в момент времени $t = t_{delay}$, т. е. t_{delay} имеет смысл времени задержки. Отметим, что в начальный момент времени $\langle \hat{J}_z(t_{delay}) \rangle = N$, а через время t_{delay} согласно (8): $\langle \hat{J}_z(t_{delay}) \rangle = 1$. Иными словами, всплеск сверхизлучения происходит, когда примерно половина атомов находится в основном, а половина в возбуждённом состоянии.

Теперь сравним подход Дике с результатом численного моделирования уравнения (3), см. рис. 20. Видно, что среднее значение инверсии $\langle \hat{J}^z \rangle$ и интенсивности излучения $-\langle J'_z(t) \rangle$ подхода Дике и точного решения хорошо согласуются между собой, хотя точное уравнение (3) дает менее резкий всплеск сверхизлучения в некоторый момент времени.

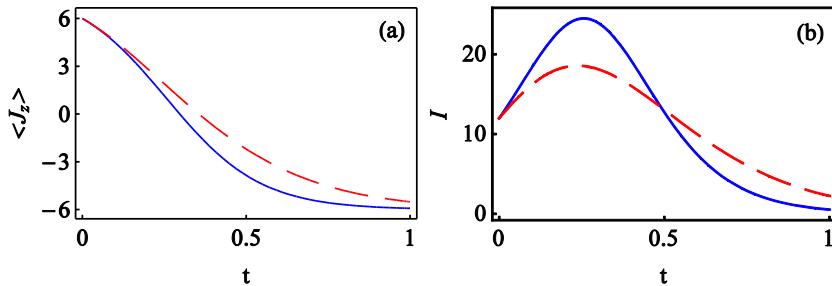


Рис. 20. Зависимости среднего значения инверсии населенности $\langle \hat{J}^z \rangle$ (а) и интенсивности излучения $-\langle J'_z(t) \rangle$ (б) от времени, полученные из решения уравнения Дике (7) (синяя сплошная линия) и управляющего уравнения (3) (красная пунктирная линия)

2. Качественный анализ сверхизлучения на основе «золотого» правила Ферми

Выше из решения уравнения Дике (7) было найдено время запаздывания импульса сверхизлучения. Это же время можно качественно оценить исходя из золотого правила Ферми. Действительно, время перехода системы из полностью инвертированного состояния: $|N, N\rangle = |e, \dots, e\rangle$ в состояние, когда возбуждена ровно половина атомов: $|N, N/2\rangle$, можно оценить как время пошаговых переходов по цепочке состояний: $|N, J^z\rangle$. Согласно золотому правилу Ферми, вероятность перехода в единицу времени из состояния $|N, J^z\rangle$ в состояние $|N, J^z-1\rangle$ равна $\gamma(J^z) = \gamma(J^z)(N - J^z + 1)/2$ (задача 4). Среднее время перехода между этими состояниями равно $\gamma(J^z)^{-1}$. Тогда время перехода из состояния $|N, N\rangle$ в состояние $|N, N/2\rangle$ можно оценить как

$$T_{|N,N\rangle \rightarrow |N,N/2\rangle} = \sum_{J^z=N}^{J^z=N/2} \gamma(J^z)^{-1} = \frac{2}{\gamma} \sum_{J^z=N}^{J^z=N/2} \frac{1}{J^z(N - J^z + 1)} = \\ = \frac{2}{\gamma(N+1)} \sum_{J^z=N}^{J^z=N/2} \left(\frac{1}{J^z} + \frac{1}{N - J^z + 1} \right) \approx \frac{2}{\gamma(N+1)} \sum_{J^z=N}^{J^z=1} \left(\frac{1}{n} \right) \approx \frac{2 \ln N}{\gamma(N+1)}, \quad (11)$$

что в точности совпадает с выражением (9) для времени задержки, полученным из уравнения Дику.

Также видно, что если система стартует из состояния с $J^z < N$, то время перехода к состоянию $|N, N/2\rangle$ будет очевидно уменьшаться (в сумме будет меньшее количество слагаемых), поскольку уменьшается число слагаемых в сумме (11). На рис. 21 приведены зависимости интенсивностей от времени при различных начальных значениях J^z . Видно, что, действительно, при уменьшении J^z время задержки уменьшается и стремится к нулю, когда $J^z \approx 0$. Когда $J^z < 0$, то пик излучения имеет место в нулевой момент времени, и его интенсивность уменьшается.

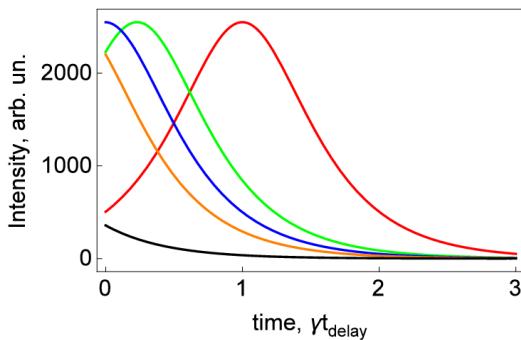


Рис. 21. Зависимость интенсивности от времени для различного числа атомов, находящихся в возбуждённом состоянии в начальный момент времени: $n = N$ (красная линия), $n = 0.75N$ (зелёная линия), $n = 0.5N$ (синяя линия), $n = 0.25N$ (оранжевая линия), $n = 0.01N$ (чёрная линия)

3. Смешанность и запутанность в процессе сверхизлучения

Отметим, что в уравнении Дику неявно предполагается, что система в каждый момент времени находится в состоянии Дику $|N, J^z\rangle$, поскольку при выводе предполагалось, что $\langle \hat{J}_z^2 \rangle = \langle \hat{J}_z \rangle^2$. Иными словами, предполагается, что в каждый момент времени система находится в чистом состоянии $|N, J^z\rangle$. Однако из уравнения (3) следует, что даже если в начальный момент времени система находится в чистом состоянии, то в после-

дующие моменты времени она будет в смешанном состоянии, которое, ввиду сохранения квантового числа N , можно представить в виде $\hat{\rho} = \sum_{J^z} P_{J^z} |N, J^z\rangle\langle N, J^z|$, т. е. состояние становится смешанным. Мерой «смешанности» является отличие величины $Tr(\rho^2) = \sum_{J^z} P_{J^z}^2$ от единицы.

На рис. 22 изображена зависимость этой величины от времени. Видно, что как раз в момент СИ величина сильно отлична от единицы. Это соответствует смешению некоторого количества состояний.

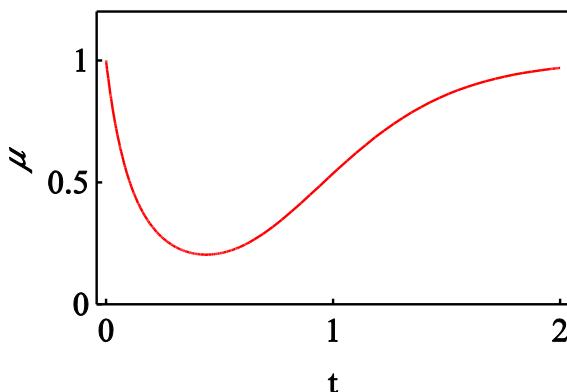


Рис. 22. Зависимость $\mu = Tr(\rho^2)$ от времени

Однако можно показать, что при большом N относительная ошибка подхода Дике стремится к нулю (задача 5).

Вопрос о запутанности в процессе сверхизлучения намного сложнее. Напомним, что по определению состояние считается запутанным, если его нельзя представить в виде $\rho = \sum_i c_i \otimes \hat{\rho}_k$, где $\hat{\rho}_k$ – матрица плотности k -го атома.

Недавно было показано, что в процессе сверхизлучения Дике матрица плотности не является запутанной в указанном выше смысле в процессе всей эволюции. Для описания «коррелированности» было предложено несколько характеристик, в той или иной степени характеризующие такую коррелированность.

В следующей лекции мы рассмотрим связь сверхизлучения Дике с сверхизлучением классических нелинейных диполей. Будут выявлены сходства классической и квантовой моделей.

Контрольные вопросы

1. Запишите выражения для состояний Дикуе.
2. Запишите выражения для времени пика сверхизлучения.
3. Чему равна временная ширина пика сверхизлучения?
4. Как зависит интенсивность пика сверхизлучения от числа атомов?
5. Как меняется запутанность и смешанность состояния атомов в процессе сверхизлучения?

Задачи

1. Покажите, что симметричные по перестановкам всех ДУС состояния Дикуе (5) являются собственными для операторов \hat{J}^2 и \hat{J}_z .
2. Покажите, что оператор \hat{J}^2 является интегралом движения управляющего уравнения (3).
3. Используя золотое правило Ферми, получите скорость перехода из состояния Дикуе $|N, J^z\rangle$ в состояние $|N, J^z - 1\rangle$.
4. Покажите, что $\langle \hat{J}_z^2 \rangle$, полученное из управляющего уравнения (3), стремится к $\langle \hat{J}_z \rangle^2 = \langle \hat{J}_z^2 \rangle$, которое получается при решении уравнения Дикуе (7).

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P. Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics.* – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J. Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations.* – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum Optics.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 17. Полуклассическая теория сверхизлучения

Я больше всего дорожу аналогиями,
Моими самыми верными учителями.

Иоганн Кеплер

Введение

Сверхизлучение, возникающее из состояния Дике, обладает важной особенностью – дипольный момент каждого атома и всей системы равен нулю во все моменты времени. Однако, рассуждая на языке классической электродинамики, мы могли бы ожидать, что сверхизлучение является следствием фазировки излучателей. Эффект увеличения скорости излучения фазированных излучателей хорошо известен из теории антенн. Однако равенство нулю дипольного момента системы в процессе сверхизлучения Дике сильно затрудняет такую интерпретацию, так как невозможно определить фазу нулевого дипольного момента. Ниже мы покажем, что состояние Дике тем не менее является в некотором смысле сферизированным состоянием. Можно ввести оператор фазы состояния, причем квантово-механическая дисперсия его среднего зависит от числа эмиттеров, находящихся в верхнем состоянии. Временная задержка импульса связана с достижением системой состояния, обеспечивающим минимальную дисперсию.

1. Сверхизлучение классических нелинейных диполей

Рассмотрим систему осциллирующих диполей, сосредоточенных в субволновом объеме $V \ll \lambda^3$. Предположим, что энергия их велика в сравнении с величиной $\hbar\omega$, так что классическая теория полностью применима. Переходим к описанию модели, описывающей динамику этих осцилляторов.

Предположим, что все диполи находятся в субволновом объеме и направлены вдоль оси z . Тогда динамика амплитуды z_k k -го диполя в поле реакции излучения остальных диполей будет подчиняться следующему нелинейному уравнению (задача 1):

$$\ddot{z}_k + \omega^2 z_k + \mu z_k^3 = -N\nu \langle \dot{z} \rangle, \quad (1)$$

где $\nu = \frac{2e^2 \omega^2}{3mc^2}$. Введем вместо действительных величин z_k комплексные безразмерные переменные c_k (огибающих) по формуле

$$z_k = \frac{a}{2}(c_k e^{-i\omega t} + c_k^* e^{i\omega t}) = a \operatorname{Re}(c_k e^{-i\omega t}), \quad (2)$$

где a – начальная амплитуда колебаний, ω_0 – начальная частота, которая зависит от амплитуды a . Отметим, что все фазовые расхождения переносятся на комплексную амплитуду. Заполняющие огибающие быстрые колебания оказываются сфазированными. При этом мы вводим вместо одной действительной неизвестной z_k две: $\operatorname{Re} c_k, \operatorname{Im} c_k$. Возникшую переопределенность можно устраниТЬ, наложив дополнительное условие:

$$\dot{c}_k e^{-i\omega_0 t} + \dot{c}_k^* e^{i\omega_0 t} = 0. \quad (3)$$

Принимая во внимание малость нелинейности и затухания, а также медленность изменения, с помощью метода усреднения нетрудно преобразовать уравнения (10) к виду

$$\dot{c}_k + i\Delta\omega_k c_k = -\frac{1}{2} N\nu \langle c \rangle, \quad \langle c \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N c_k, \quad (4)$$

где $\Delta\omega_k = \chi\omega(|c_k|^2 - 1)$ – смещение частоты из-за нелинейности, $\chi = 3\mu a^2 / 8\omega_0^2$ — коэффициент неизохронности.

Вводя безразмерные параметры

$$\tau = \frac{1}{2} N\nu t, \quad \theta = \frac{2\chi\omega_0}{N\nu}, \quad (5)$$

уравнения (4) для медленно меняющихся амплитуд можно переписать в более простой форме:

$$\frac{dc_k}{d\tau} + i\theta(|c_k|^2 - 1)c_k = -\langle c \rangle, \quad (6)$$

содержащей параметр θ , который может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Случай $\theta = 0$ описывает линейные осцилляторы. Ниже мы будем называть эту моделью *огибающих*.

Отметим важное отличие данной постановки задачи от постановки задачи ДиКе. Уравнение (15) описывает динамику комплексной амплитуды. В качестве начального условия можно выбрать различные начальные распределения фаз излучателей. В уравнении ДиКе фигурировала только

инверсия, т. е. начальная энергия, но не было (казалось бы) никакой информации о фазах излучателей.

Рассмотрим случай, когда начальные фазы излучателей, $\arg c_k(0)$, распределены случайным образом. Мы проиллюстрируем его с конкретными значениями параметров: $\theta = 10$, число излучателей $N = 250$. В момент времени $\tau = 0$ $|c_k(0)| = 1$, а фазы колебаний всех частиц случайны. Результаты численного моделирования представлены на (рис. 23), где изображены зависимости средней интенсивности $|\langle c \rangle|^2$ и средней энергии $\langle |c|^2 \rangle$ излучателей от времени τ .

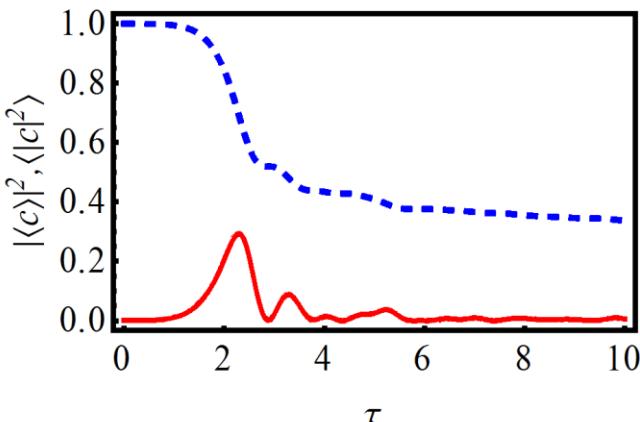


Рис. 23. Численный расчет зависимостей средней энергии (верхняя линия) и средней интенсивности (нижняя линия) от времени τ

Зависимости, изображенные на рис. 23, качественно соответствуют обычной картине сверхизлучения Диже, рассмотренной нами в предыдущей лекции. Действительно, мы имеем резкий пик интенсивности в некоторый момент времени.

Интересно рассмотреть зависимость интенсивности пика и времени его задержки от числа излучателей. На рис. 24 представлена зависимость времени задержки τ_0 пика СИ от натурального логарифма числа частиц. Согласно рис. 22 время задержки τ_0 действительно пропорционально $\ln N$.

Результаты нашего численного моделирования демонстрируют расхождение с общепризнанной зависимостью N^2 . На рис. 25 (случай случайного распределения начальных фаз на отрезке $[-\pi, \pi]$) интенсивность излучения не демонстрирует степенной зависимости максимума интенсивности излучения от числа диполей.

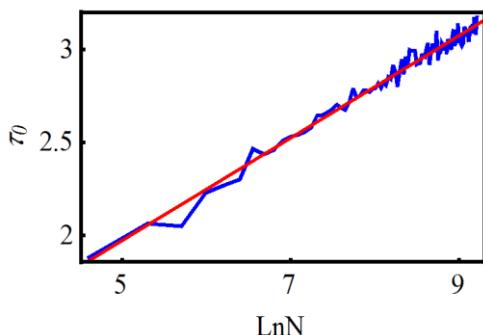


Рис. 24. Зависимость времени задержки от логарифма числа диполей (красным цветом выделена линия аппроксимации $\alpha_{\tau_0} \ln N$) при случайному разбросе фаз

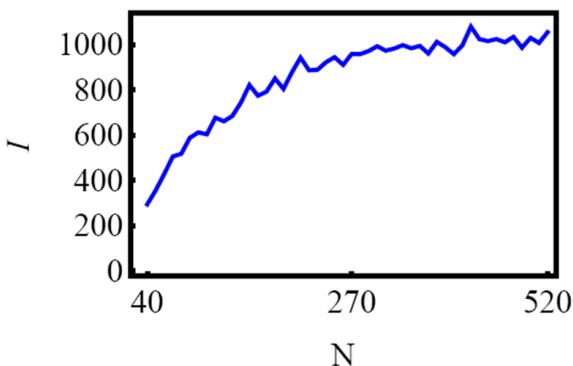


Рис. 25. Зависимость интенсивности излучения от числа диполей при случайному начальном распределении фаз на отрезке $[-\pi, \pi]$

Пик излучения в классической модели, очевидно, связан с фазировкой излучателей. На рис. 26 показана зависимость фазы каждого излучателя от времени. Видно, что в некоторой момент времени фазы стягиваются в одну точку. Именно в этот момент времени и происходит сверхиз-

лучение. Отметим, что в образовании спектра участвуют не все диполи, входящие в начальную флуктуацию, а только часть из них (рис. 26), имеющих близкие начальные фазы. Иными словами, всплеск сверхизлучения создают не все диполи, а только некоторая их часть. Это объясняет отсутствие квадратичной зависимости интенсивности от общего числа излучателей (рис. 25).

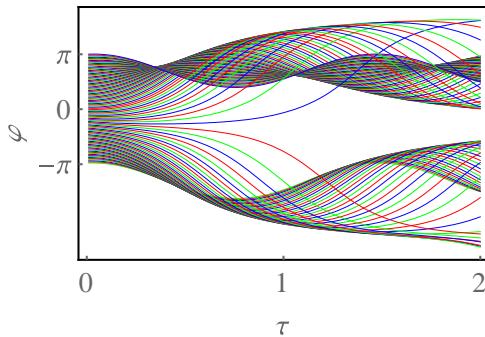


Рис. 26. Зависимость фаз излучателей от времени

В то же время, интенсивность зависит квадратично от числа излучателей, которые формируют всплеск сверхизлучения (рис. 27).

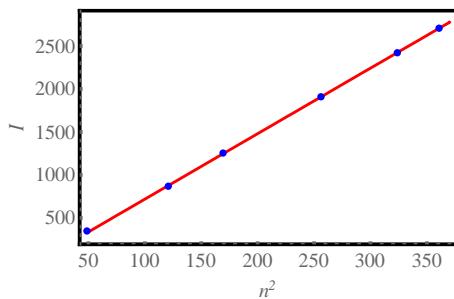


Рис. 27. Зависимость интенсивности пика сверхизлучения от числа излучателей, фазы которых совпадают

Итак, причиной сверхизлучения в случае классических нелинейных диполей является фазировка излучателей в некоторый момент времени. Эта фазировка возникает даже в том случае, если в начальной фазе диполи случайно распределены на интервале $[-\pi, \pi]$. Оказывается, что причиной фазировки является наличие точек притяжения в пространстве фаз

излучателей (см. рис. 26). Такое поведение может проявляться только в нелинейных моделях. Отметим, что наличие точки притяжения фазы существует и для других нелинейностей, отличных от кубической.

2. Фазировка излучателей при сверхизлучении Дике

Для того чтобы понять, есть ли фазировка в процессе сверхизлучения Дике, нам понадобится ввести оператор фазы дипольного момента системы двухуровневых атомов.

Остановимся более подробно на определении оператора фазы для двухуровневого атома. Для M -уровневой системы эрмитов оператор фазы $\hat{\theta}$ можно определить как [Попов, Ярунин, Пегг, Барнетт, Газо]:

$$\hat{\phi} = \left(\varphi_0 + \pi \frac{M-1}{M} \right) \hat{I}_N + \frac{2\pi}{M} \sum_{m \neq m'}^{M-1} \frac{\exp(i(m-m')\varphi_0)}{\exp(2\pi i(m-m')/M)-1} |m\rangle\langle m'|, \quad (7)$$

где $\hat{I}_M = \sum_{m=0}^{M-1} |m\rangle\langle m|$, φ_0 – фаза, от которой отсчитываются все остальные;

далее будем полагать $\varphi_0 = 0$. Используя этот оператор, можно определить унитарный оператор $\exp(i\hat{\phi})$:

$$\exp(i\hat{\phi}) = \left(\sum_{m=0}^{M-2} |m\rangle\langle m+1| \right) + (|M-1\rangle\langle 0|) \quad (8)$$

и синус и косинус фазы:

$$\sin(\hat{\phi}) = (\exp(i\hat{\phi}) - \exp(-i\hat{\phi}))/2i, \quad (9)$$

$$\cos(\hat{\phi}) = (\exp(i\hat{\phi}) + \exp(-i\hat{\phi}))/2. \quad (10)$$

Операторы рождения (повышения) и уничтожения (понижения) определяются через оператор фазы (7) и оператор числа частиц $\hat{M} = \sum_{m=0}^{M-1} m|m\rangle\langle m|$ следующим образом:

$$\hat{a} = \exp(i\hat{\phi}) \hat{M}^{1/2} = \sum_{m=1}^{M-1} \sqrt{m} |m-1\rangle\langle m|, \quad \hat{a}^+ = \sum_{m=0}^{M-2} \sqrt{m+1} |m+1\rangle\langle m|. \quad (11)$$

Данные соотношения представляют конечномерный случай введенных Дираком операторов фазы для фотона. Отметим, что для конечномерного случая стандартное коммутационное соотношение для операторов рождения принимает следующий вид:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}_M - M |M-1\rangle\langle M-1|. \quad (12)$$

Применим данную конструкцию для построения оператора фазы двухуровневого атома. Отождествляя возбуждённое состояние атома $|e\rangle$ с двумерным вектором $(1, 0)^T$, а основное состояние $|g\rangle$ с вектором $(0, 1)^T$, можно представить оператор фазы (7) в виде двумерной матрицы:

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \pi/2 & -\pi/2 \\ -\pi/2 & \pi/2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

а операторы синуса и косинуса имеют вид

$$\cos \hat{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x, \quad \sin \hat{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_y. \quad (14)$$

Видно, что операторы косинуса и синуса фазы совпадают с операторами проекции спина на оси x и y .

Теперь рассмотрим ансамбль N двухуровневых атомов. Оператор фазы i -го атома $\hat{\phi}_i^N$ в пространстве состояний размерностью 2^N будет определяться как прямое произведение оператора фазы i -го атома (7) и единичных операторов остальных атомов:

$$\hat{\phi}_i^N = \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \hat{\phi}_i \otimes \dots \otimes \hat{I}_N. \quad (15)$$

Теперь мы можем найти средние значения фаз и их квадратов для состояний Дикуе $|N, n\rangle$, введенное в предыдущей лекции (задача 2):

$$\langle N, J_z | \hat{\phi}_i^N | N, J_z \rangle = \pi/2, \quad \langle N, J_z | (\hat{\phi}_i^N)^2 | N, J_z \rangle = \pi^2/2. \quad (16)$$

Отсюда получаем дисперсию фазы:

$$\langle N, J_z | (\hat{\phi}_i^N)^2 | N, J_z \rangle - \langle N, J_z | \hat{\phi}_i^N | N, J_z \rangle^2 = \pi^2/4. \quad (17)$$

Она одинакова для любого атома (в силу симметрии состояний Дикуе по перестановкам атомов) и для всех состояний Дикуе. Таким образом, в состоянии Дикуе дисперсия фазы каждого атома одинакова и равна $\pi^2/4$. Здесь важно подчеркнуть, что состояние Дикуе сфазировано, однако квантово-механическая дисперсия фазы отлична от нуля.

Вычислим теперь, чему равна разность фаз и дисперсия разности фаз любых двух диполей для состояний Дикуе $|N, J_z\rangle$. Нетрудно показать, что (задача 3):

$$\langle N, J_z | \hat{\phi}_i^N - \hat{\phi}_j^N | N, J_z \rangle = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \langle N, J_z | (\hat{\phi}_i^N - \hat{\phi}_j^N)^2 | N, J_z \rangle - \langle N, J_z | \hat{\phi}_i^N - \hat{\phi}_j^N | N, J_z \rangle^2 \equiv \\ & \equiv \Delta\delta\varphi = \frac{\pi^2}{2} \left(1 - \frac{2n(N-n)}{N(N-1)} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Видно, что дисперсия $\Delta\delta\varphi$ достигает наименьшего значения, когда $n = N/2$. Таким образом, когда половина частиц находится в возбуждённом состоянии, а половина частиц находится в основном, дисперсия разности фаз любых двух диполей минимальна. А поскольку средние значения фаз совпадают, то получаем, что для состояния $|N, 0\rangle$ фазы наиболее сильно совпадают. Именно в этот момент происходит всплеск сверхизлучения. Таким образом, момент СИ Дике всплеска можно отождествить с моментом достижения квантово-механической синфазности, т. е. с моментом достижения $\Delta\delta\varphi$ своего минимума.

Итак, для сверхизлучения Дике можно провести аналогию со сверхизлучением классических диполей. Состояние Дике изначально являются сферизированными, поэтому, следуя классической интерпретации, стоит ожидать всплеска сверхизлучения. Однако он имеет задержку, связанную с квантово-механической неопределенностью разности фаз излучателей. Только тогда, когда эта неопределенность достигает минимума, имеет место всплеск сверхизлучения.

Здесь можно поставить следующий вопрос: возможно ли сверхизлучения двухуровневых излучателей, которые изначально не сферизированы, т. е. находятся не в состоянии Дике? Ответ на этот вопрос положительный. Это связано с тем, что система из большого числа двухуровневых излучателей имеет нелинейный отклик на среднее поле остальных излучателей. Это приводит к наличию точек сгущения средней фазы излучателей, как это имеет место для классических нелинейных диполей.

3. Сверхизлучение линейных квантовых осцилляторов

Теперь рассмотрим вопрос о том, возможно ли сверхизлучение в системе линейных квантовых осцилляторов. В связи с вышесказанным, ожидается, что увеличение интенсивности излучения будет только в случае, если изначально осцилляторы сферизированы. При этом всплеска сверхизлучения не будет, поскольку система линейная и не будет точки сгущения фазы. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что как и в случае двухуровневых атомов, осцилляторы находятся в субволновом объёме и взаимодействуют с модами электромагнитного поля свободного пространства. Будем считать, что взаимодействие с электромагнитным полем свободного пространства имеет вид $-\mathbf{d}_i \mathbf{E}$, где $\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_0 (\hat{a}_i + \hat{a}_i^+)$. В этом случае динамика матрицы плотности ρ системы осцилляторов будет описываться уравнением Линдблада:

$$\dot{\rho} = \frac{\gamma_0}{2} (2\hat{A}\rho\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{A}\rho - \rho\hat{A}^+\hat{A}), \quad (20)$$

где $\hat{A} = \sum_i \hat{a}_i$ – оператор коллективного дипольного момента осцилляторов, \hat{a}_i – оператор уничтожения для i -го осциллятора. Вывод данного уравнения аналогичен выводу управляющего уравнения для системы двухуровневых излучателей (задача 4).

С помощью уравнения (20) можно получить динамику дипольного момента каждого осциллятора:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{a}}_i \rangle &= Tr(\hat{a}_i \dot{\rho}) = \frac{\gamma_0}{2} Tr(2\hat{a}_i \hat{A} \rho \hat{A}^+ - \hat{a}_i \hat{A}^+ \hat{A} \rho - \hat{a}_i \rho \hat{A}^+ \hat{A}) = \\ &= \frac{\gamma_0}{2} Tr(2\hat{A}^+ \hat{a}_i \hat{A} \rho - \hat{a}_i \hat{A}^+ \hat{A} \rho - \hat{A}^+ \hat{A} \hat{a}_i \rho) = \frac{\gamma_0}{2} \langle 2\hat{A}^+ \hat{a}_i \hat{A} - \hat{a}_i \hat{A}^+ \hat{A} - \hat{A}^+ \hat{A} \hat{a}_i \rangle = \\ &= \frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2 \left(\sum_j \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i \left(\sum_k \hat{a}_k \right) - \hat{a}_i \left(\sum_j \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_k \hat{a}_k \right) - \left(\sum_j \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_k \hat{a}_k \right) \hat{a}_i \right\rangle = \\ &= \frac{\gamma_0}{2} \langle 2\hat{a}_i^+ \hat{a}_i \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i - \hat{a}_i^+ \hat{a}_i \hat{a}_i \rangle + \quad (21) \\ &+ \frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2 \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) - \hat{a}_i \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) - \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) \hat{a}_i \right\rangle + \\ &+ \frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2 \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i \hat{a}_i - \hat{a}_i \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i - \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i \hat{a}_i \right\rangle + \\ &+ \frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2\hat{a}_i^+ \hat{a}_i \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) - \hat{a}_i \hat{a}_i^+ \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) - \hat{a}_i^+ \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) \hat{a}_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Оценим отдельно каждое из четырёх слагаемых в последнем равенстве. Первое слагаемое определяет затухание одного гармонического осциллятора в вакууме:

$$\frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2\hat{a}_i^+ \hat{a}_i \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i - \hat{a}_i^+ \hat{a}_i \hat{a}_i \right\rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \left\langle \hat{C} \hat{a}_i \right\rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \langle \hat{a}_i \rangle. \quad (22)$$

Здесь в явном виде выделен коммутатор $\hat{C}_i = [\hat{a}_i, \hat{a}_i^+]$ и использовано то, что для гармонического осциллятора $\hat{C}_i = \hat{1}$. Второе слагаемое равно нулю, поскольку операторы, соответствующие разным осцилляторам, коммутируют:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2 \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) - \hat{a}_i \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) - \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) \hat{a}_i \right\rangle = \\ & = \frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2 \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) \hat{a}_i - \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) \hat{a}_i - \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) \hat{a}_i \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Третье и четвёртое слагаемые дают вклады в затухание, связанные с коллективным взаимодействием осцилляторов с модами свободного пространства:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2 \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i \hat{a}_i - \hat{a}_i \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i - \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) \hat{a}_i \hat{a}_i \right\rangle + \\ & + \frac{\gamma_0}{2} \left\langle 2 \hat{a}_i^+ \hat{a}_i \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) - \hat{a}_i \hat{a}_i^+ \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) - \hat{a}_i^+ \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) \hat{a}_i \right\rangle = \\ & = \frac{\gamma_0}{2} \left\langle \left(\sum_{j \neq i} \hat{a}_j^+ \right) (2\hat{a}_i \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i) + \left(\sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right) (2\hat{a}_i^+ \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i^+ - \hat{a}_i^+ \hat{a}_i) \right\rangle = \\ & = -\frac{\gamma_0}{2} \left\langle \hat{C}_i \sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Объединяя (22) – (24) и используя равенство $\hat{C} = \hat{1}$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{a}}_i \rangle &= -\frac{\gamma_0}{2} \left\langle \hat{C}_i \hat{a}_i + \hat{C}_i \sum_{k \neq i} \hat{a}_k \right\rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \left\langle \sum_k \hat{C}_i \hat{a}_k \right\rangle = \\ & = -\frac{\gamma_0}{2} \sum_k \langle \hat{C}_i \hat{a}_k \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \sum_k \langle \hat{a}_k \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, получившаяся система уравнений, описывающая динамику гармонических осцилляторов, замкнута относительно переменных $\langle \hat{a}_k \rangle$, т. е. представляет собой линейную систему дифференциальных уравнений на амплитуды осцилляторов $\langle \hat{a}_k \rangle$. Хорошо известно, что в линейной системе не может образоваться пик СИ ни при каких началь-

ных условиях. Таким образом, в системе квантовых гармонических осцилляторов не может наблюдаться СИ.

Интересно проследить, что меняется при переходе от осцилляторов к двухуровневым излучателям. Для этого необходимо сделать замену операторов \hat{a}_i на операторы $\hat{\sigma}_i$ и повторить все вычисления, приведённые выше. Однако вся разница в вычислениях сводится к тому, что для атомов необходимо использовать другое коммутационное соотношение: $\hat{C} = [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_i^+] = \hat{D}_i$, где \hat{D}_i – оператор инверсии населённости i -го атома.

Таким образом, для динамики амплитуды дипольного момента $\hat{\sigma}_i$ получаем

$$\langle \dot{\hat{\sigma}}_i \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \left\langle \hat{C}_i \hat{\sigma}_i + \hat{C}_i \sum_{k \neq i} \hat{\sigma}_k \right\rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \langle \hat{\sigma}_i \rangle + \frac{\gamma_0}{2} \sum_{k \neq i} \langle \hat{D}_i \hat{\sigma}_k \rangle. \quad (26)$$

Отсюда видно, что система уравнений, описывающая динамику дипольных моментов ДУС, незамкнута и содержит новые переменные $\langle \hat{D}_i \hat{\sigma}_k \rangle$, для которых необходимо записывать новые уравнения. Именно эта незамкнутость и, как следствие, нелинейность в полуклассическом пределе приводят к возникновению пика СИ.

Интересно также выяснить, какова интенсивность излучения системы осцилляторов, динамика которых описывается уравнением (20). Напомним, что модель Дике (которая отличается от (20) заменой оператора $\hat{A} = \sum_i \hat{a}_i$ на оператор $\hat{J} = \sum_i \hat{\sigma}_i$) выводилась из гамильтониана вида

$$\hat{H} = \hbar \sum_i \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \hbar \omega \sum_k \hat{\sigma}_k^\dagger \hat{\sigma}_k + \hbar \sum_i \gamma_{ik} (\hat{b}_i^\dagger \hat{\sigma}_k + \hat{\sigma}_k^\dagger \hat{b}_i). \quad (27)$$

Интенсивность излучения системы двухуровневых излучателей можно определить как изменение во времени энергии электромагнитного поля:

$$I = \hbar d \left\langle \sum_i \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \right\rangle / dt. \quad (28)$$

Вычисление этого выражения находится с помощью динамического уравнения на оператор $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$. Используя марковское приближение, можно показать, что

$$I = \hbar d \left\langle \sum_i \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \right\rangle / dt = -\hbar \omega_0 \left\langle \sum_k \hat{\sigma}_k^\dagger \hat{\sigma}_k \right\rangle / dt. \quad (29)$$

Отметим, что последнее равенство справедливо только в марковском приближении. Действительно, интегралом движения полного гамильтонiana (27) является полное число возбуждений в системе:

$$\sum_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \sum_k \hat{\sigma}_k^\dagger \hat{\sigma}_k = \text{const.} \quad (30)$$

Однако оператор

$$\sum_i \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \omega \sum_k \hat{\sigma}_k^\dagger \hat{\sigma}_k \quad (31)$$

интегралом движения не является. Но в марковском приближении

$$\sum_i \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \approx -\omega \sum_k \hat{\sigma}_k^\dagger \hat{\sigma}_k. \quad (32)$$

Таким образом, интенсивность СИ Дике:

$$I = -\hbar \omega_0 \left\langle \sum_k \hat{\sigma}_k^\dagger \hat{\sigma}_k \right\rangle / dt \quad (33)$$

и может быть найдена из управляющего уравнения. В приближении $\langle J_z^2 \rangle = \langle J_z \rangle \langle J_z \rangle$ и начальном условии $\langle \hat{J}_z(0) \rangle = N$ с точностью до $1/N$ она имеет вид (см. предыдущую лекцию):

$$I = N^2 \hbar \omega_0 \gamma_0 \operatorname{sech} \left((t - t_{\text{delay}}) / 2t_{\text{delay}} \log N \right) / 4, \quad t_{\text{delay}} = \gamma_0 \log N / 2N. \quad (34)$$

В начальный момент времени $I \sim N$, а в момент СИ t_{delay} достигает своего максимального значения, $I \sim N^2$.

В случае линейных осцилляторов интенсивность примет вид

$$I = -\hbar \omega_0 \left\langle \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right\rangle / dt. \quad (35)$$

Она может быть найдена точно. Действительно, используя (25):

$$\langle \dot{\hat{a}}_i \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \sum_k \langle \hat{a}_k \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \langle \hat{A} \rangle \quad (36)$$

и суммируя по всем осцилляторам, получаем

$$\langle \dot{\hat{A}} \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} N \langle \hat{A} \rangle, \quad (37)$$

откуда

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{A}(0) \rangle \exp(-\gamma_0 N t / 2) \quad (38)$$

и

$$\langle \dot{\hat{a}}_i \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} \langle \hat{A}(0) \rangle \exp(-\gamma_0 N t / 2). \quad (39)$$

Решением (39) является

$$\langle \hat{a}_i(t) \rangle = \langle \hat{a}_i(0) \rangle - \langle \hat{A}(0) \rangle / N + \langle \hat{A}(0) \rangle \exp(-\gamma_0 N t / 2) / N. \quad (40)$$

Далее,

$$\begin{aligned} d \langle \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_i(t) \rangle / dt &= \left\langle \frac{d\hat{a}_i^\dagger(t)}{dt} \hat{a}_i(t) + \hat{a}_i^\dagger(t) \frac{d\hat{a}_i(t)}{dt} \right\rangle = \\ &\left\langle \left(\hat{a}_i^\dagger(0) - \frac{\hat{A}^\dagger(0)}{N} + \frac{\hat{A}^\dagger(0) \exp(-\gamma_0 N t / 2)}{N} \right) \left(\frac{-\gamma_0 \hat{A}(0) \exp(-\gamma_0 N t / 2)}{2} \right) \right\rangle + \\ &+ h.c. = \left\langle \frac{-\gamma_0 \hat{a}_i^\dagger(0) \hat{A}(0) \exp(-\gamma_0 N t / 2)}{2} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\gamma_0 \hat{A}^\dagger(0) \hat{A}(0) (\exp(-\gamma_0 N t / 2) - \exp(-\gamma_0 N t))}{2N} \right\rangle + h.c. \end{aligned} \quad (41)$$

Суммируя по всем осцилляторам, получаем

$$\begin{aligned} \sum_i d \langle \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_i(t) \rangle / dt &= \\ &= \left\langle \frac{-\gamma_0 \hat{A}^\dagger(0) \hat{A}(0) \exp(-\gamma_0 N t / 2)}{2} + \frac{\gamma_0 \hat{A}^\dagger(0) \hat{A}(0) \exp(-\gamma_0 N t / 2)}{2} \right\rangle - \quad (42) \\ &- \left\langle \frac{\gamma_0 \hat{A}^\dagger(0) \hat{A}(0) \exp(-\gamma_0 N t)}{2} \right\rangle + h.c. = - \langle \gamma_0 \hat{A}^\dagger(0) \hat{A}(0) \exp(-\gamma_0 N t) \rangle, \end{aligned}$$

и окончательно для интенсивности:

$$I = -\hbar \omega_0 \left\langle \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right\rangle / dt = \hbar \omega_0 \gamma_0 |A(0)|^2 \exp(-\gamma_0 N t). \quad (43)$$

Теперь отметим различие от СИ двухуровневых излучателей. Из (43) видно, что СИ, т. е. $I \sim N^2$, может быть, только если в начальный момент времени $\langle A(0) \rangle \sim N$, т. е. все осцилляторы синфазированы. При этом максимальная интенсивность достигается в нулевой момент времени, т. е. нет задержки пика сверхизлучения. Если же разброс фаз случаен, то

$\langle A(0) \rangle \sim \sqrt{N}$ и $I \sim N$, т. е. СИ не возникает. Отсутствие СИ как фазировка есть следствие линейности системы.

Также отметим, что в силу линейности временная динамика всегда экспоненциальная, и скорость изменения есть $\gamma_0 N$. Наличие множителя N есть следствие вида управляющего уравнения (20).

Заключение

Итак, мы рассмотрели различные аспекты сверхизлучения в классических и квантовых системах. Можно сделать вывод, что сверхизлучение как фазировка и увеличение интенсивности излучения изначально нефазированных диполей наблюдаются в нелинейных системах и являются следствием существования точки сгущения фаз излучателей. При этом фазировка может проявляться как сближение самих фаз (излучение классических нелинейных диполей), так и уменьшение квантово-механической дисперсии разности фаз излучателей (сверхизлучение Ди-ке). В линейных системах увеличение интенсивности возможно только в случае изначально фазированных диполей и происходит без задержки всплеска сверхизлучения.

Контрольные вопросы

1. Опишите роль нелинейности в процессе сверхизлучения.
2. Какова природа конструктивной интерференции сверхизлучения нелинейных диполей?
3. Как в зависимости от начальных условий меняется интенсивность сверхизлучения с ростом числа атомов?
4. Каково время задержки сверхизлучения квантовых гармонических осцилляторов?
5. Дайте определение оператора фазы N -уровневой системы.

Задачи

1. Получите нелинейную систему уравнений (1), описывающую динамику классических диполей в коллективном поле реакции излучения.
2. Вычислите среднее значение и дисперсию оператора фазы одного атома для системы, находящейся в состоянии Ди-ке.
3. Вычислите дисперсию разности фаз двух излучателей для системы, находящейся в состоянии Ди-ке.

Решение

Для состояния Дике

$$|\psi_D\rangle \equiv |N, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_N^n}} \sum_P \left| e, \dots, e, \underbrace{g, \dots, g}_{N-n} \right\rangle \quad (44)$$

(см. предыдущую лекцию) среднее значение оператора косинуса фазы

$$\cos \hat{\Phi}_i = \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \underset{i}{\cos \hat{\Phi}} \otimes \dots \otimes \hat{I}_N \quad (45)$$

равно

$$\begin{aligned} \langle \psi_D | \cos \hat{\Phi}_i | \psi_D \rangle &= \frac{1}{C_N^n} \sum_P \langle e, \dots, e, \underbrace{g, \dots, g}_{N-n} | \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \underset{i}{\cos \hat{\Phi}} \otimes \dots \\ &\otimes \hat{I}_N \sum_P \left| e, \dots, e, \underbrace{g, \dots, g}_{N-n} \right\rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Если состояние i -го атома $|e\rangle$, то число возможных состояний остальных атомов C_{N-1}^{n-1} , если $|g\rangle$ – то C_{N-1}^n . Полное число возможных состояний $C_{N-1}^{n-1} + C_{N-1}^n = C_N^n$, как и должно быть. В результате (46) принимает вид

$$\langle \psi_D | \cos \hat{\Phi}_i | \psi_D \rangle = \frac{1}{C_N^n} \left(C_{N-1}^{n-1} \langle e | \cos \hat{\Phi} | e \rangle + C_{N-1}^n \langle g | \cos \hat{\Phi} | g \rangle \right) = 0. \quad (47)$$

Для разности фаз двух излучателей имеем

$$\langle \psi_D | \cos \hat{\Phi}_i - \cos \hat{\Phi}_j | \psi_D \rangle = 0. \quad (48)$$

Рассмотрим дисперсию разности косинусов фаз двух произвольных излучателей:

$$D_{ij} \equiv \langle N, n | (\cos \hat{\Phi}_i - \cos \hat{\Phi}_j)^2 | N, n \rangle - \langle N, n | \cos \hat{\Phi}_i - \cos \hat{\Phi}_j | N, n \rangle^2. \quad (49)$$

Последний член равен нулю, а для первого имеем

$$\begin{aligned} \langle N, n | (\cos \hat{\Phi}_i - \cos \hat{\Phi}_j)^2 | N, n \rangle &= \langle N, n | (\cos \hat{\Phi}_i)^2 | N, n \rangle + \\ &+ \langle N, n | (\cos \hat{\Phi}_j)^2 | N, n \rangle - 2 \langle N, n | \cos \hat{\Phi}_i \cos \hat{\Phi}_j | N, n \rangle. \end{aligned} \quad (50)$$

Для вычисления оператора квадрата косинуса фазы:

$$(\cos \hat{\Phi}_i)^2 = \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \underbrace{(\cos \hat{\Phi})^2}_{i} \otimes \dots \otimes \hat{I}_N = \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \hat{I}_N \quad (51)$$

используем те же аргументы, что и для (46). В итоге получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi_D | (\cos \hat{\Phi}_i)^2 | \psi_D \rangle &= \\ &= \frac{1}{C_N^n} \left(C_{N-1}^{n-1} \langle e | (\cos \hat{\Phi})^2 | e \rangle + C_{N-1}^n \langle g | (\cos \hat{\Phi})^2 | g \rangle \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (52)$$

Для вычисления последнего слагаемого в (49) замечаем, что если состояние i -го атома $|e\rangle$, а j -го – $|e\rangle$, то число оставшихся состояний: C_{N-2}^{n-2} , если состояние i -го атома $|e\rangle$, а j -го – $|g\rangle$ (и наоборот), то число оставшихся состояний: C_{N-2}^{n-1} . Наконец, если состояние i -го атома $|g\rangle$, а j -го – $|g\rangle$, то число оставшихся состояний: C_{N-2}^n . Полное число состояний: $C_{N-2}^{n-2} + C_{N-2}^{n-1} + C_{N-2}^{n-1} + C_{N-2}^n = C_N^n$, как и должно быть. В результате имеем

$$\begin{aligned} \langle \psi_D | \cos \Phi_i \cos \Phi_j | \psi_D \rangle &= \frac{1}{C_N^n} \times \\ &\times \left(C_{N-2}^{n-1} \langle e_i, g_j | \cos \Phi_i \cos \Phi_j | g_i, e_j \rangle + C_{N-2}^{n-1} \langle g_i, e_j | \cos \Phi_i \cos \Phi_j | e_i, g_j \rangle \right) = (53) \\ &= \frac{C_{N-2}^{n-1}}{2C_N^n} = \frac{n(N-n)}{2N(N-1)}. \end{aligned}$$

Подставляя (52) и (53) в (50), для дисперсии разности косинусов фаз произвольных двух излучателей получаем

$$D_{ij} = \frac{1}{2} - \frac{n(N-n)}{N(N-1)}. \quad (54)$$

4. Получите управляющее уравнение (20), описывающее диссипацию субволнового ансамбля невзаимодействующих осцилляторов.

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P. Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics.* – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J. Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations.* – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum Optics.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 18. Уравнения Ланжевена и Фоккера–Планка

В нормальный закон распределения ошибок верят все: правда, физики считают его математической теоремой, в то время как математики убеждены, что это твердо установленный экспериментальный факт.

A. Пуанкаре

1. Стохастическое описание системы, взаимодействующей с резервуаром

Для того чтобы понять, каким образом в детерминированной системе возникает случайный шум, рассмотрим системы взаимодействующих осцилляторов. Динамика такой системы может быть описана следующими уравнениями

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \sum_k \gamma_k y_k , \quad (1)$$

$$\ddot{y} + \omega_k^2 x = \gamma_k x . \quad (2)$$

Здесь ω_0 – частота осциллятора, динамику которого мы будем исследовать, ω_k – частоты осцилляторов резервуара, γ_k – константы взаимодействия. Для решения данной системы перейдем к комплексным медленным амплитудам:

$$x = (\nu \exp(i\omega_0 t) + \nu^* \exp(-i\omega_0 t))/2 , \quad (3)$$

$$y_k = (\mu_k \exp(i\omega_0 t) + \mu_k^* \exp(-i\omega_0 t))/2 . \quad (4)$$

Переход от действительных переменных к комплексным кажется усложнением, однако он позволяет избавиться от второй производной в уравнениях (1) – (2). Действительно, дифференцируя (3) и (4), получаем

$$\dot{x} = (\dot{\nu} \exp(i\omega_0 t) + \dot{\nu}^* \exp(-i\omega_0 t))/2 + i\omega_0 (\nu \exp(i\omega_0 t) - \nu^* \exp(-i\omega_0 t))/2 . \quad (5)$$

Наложим на комплексную переменную ν следующее условие:

$$\dot{\nu} \exp(i\omega_0 t) + \dot{\nu}^* \exp(-i\omega_0 t) = 0 . \quad (6)$$

Тогда получим

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \left(v \exp(i\omega_0 t) + v^* \exp(-i\omega_0 t) \right) / 2 + \\ + i\omega_0 \left(\dot{v} \exp(i\omega_0 t) - \dot{v}^* \exp(-i\omega_0 t) \right) / 2. \quad (7)$$

В итоге уравнение (1) запишется в виде

$$i\omega_0 \left(\dot{v} \exp(i\omega_0 t) - \dot{v}^* \exp(-i\omega_0 t) \right) = \sum_k \gamma_k \left(\mu_k \exp(i\omega_0 t) + \mu_k^* \exp(-i\omega_0 t) \right) \quad (8)$$

или

$$i\omega_0 \dot{v} - i\omega_0 \dot{v}^* \exp(-2i\omega_0 t) = \sum_k \gamma_k \left(\mu_k + \mu_k^* \exp(-2i\omega_0 t) \right). \quad (9)$$

Будем считать, что характерное время изменения медленных амплитуд v и μ_k много больше ω_0^{-1} . Тогда (9) можно проинтегрировать на промежутке времени ω_0^{-1} . Это обнулит быстро осциллирующие слагаемые. Проделывая ту же процедуру с уравнением (2), в результате получаем следующую систему:

$$\dot{v} = -i \sum_k \gamma_k \mu_k, \quad (10)$$

$$\dot{\mu}_k = -i\Delta_k \mu_k - i\gamma_k v. \quad (11)$$

Теперь формально проинтегрируем уравнение (11):

$$\mu_k(t) = \mu_k(0) \exp(-i\Delta_k t) - i\gamma_k \int_0^t d\tau v(\tau) \exp(-i\Delta_k(t-\tau)) \quad (12)$$

и подставим в (10):

$$v(t) = -\sum_k \gamma_k^2 \int_0^t d\tau v(\tau) \exp(-i\Delta_k(t-\tau)) + f_v(t), \quad (13)$$

где

$$f_v(t) = -i \sum_k \gamma_k \mu_k(0) \exp(-i\Delta_k t). \quad (14)$$

Далее применим уже известное нам марковское приближение. Для этого в (13) вынесем из-под знака интеграла $v(\tau)$ в момент времени t и воспользуемся формулой Сохоцкого. В результате получим

$$v = -\beta v + f_v(t). \quad (15)$$

В марковском приближении величина $f_\nu(t)$ играет роль случайного шума и удовлетворяет следующим корреляционным свойствам:

$$\langle f_\nu(t) \rangle = \langle f_\nu^*(t) \rangle = 0, \quad (16)$$

$$\langle f_\nu^*(t') f_\nu(t) \rangle = \langle f_\nu(t') f_\nu^*(t) \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (17)$$

где коэффициент диффузии D имеет вид

$$D = \gamma \langle z_{\alpha_0}^* z_{\alpha_0} \rangle / 2 = \beta kT. \quad (18)$$

На последнем шаге мы предположили, что резервуар находится в состоянии теплового равновесия с температурой T , и его средняя энергия есть kT .

Таким образом, нам удалось свести исходную детерминированную систему уравнений с бесконечным числом степеней свободы к одному стохастическому дифференциальному уравнению – *уравнению Ланжевена*. Переходя обратно к переменной x , получим

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \xi(t), \quad (19)$$

где функция $\xi(t)$ имеет те же корреляционные свойства, что и функция $f(t)$.

2. Уравнение Ланжевена

Уравнение (19) представляет собой обычное уравнение Ньютона, в котором кроме детерминированных сил учтены также хаотические силы. В качестве успешного применения такого подхода рассмотрим вязкое (передемптированное) движение частицы в среде под действием случайных сил:

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} = \xi(t) \quad (20)$$

или

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\beta v + \xi(t). \quad (21)$$

Решение второго уравнения будем искать в виде

$$v(t) = C(t) \exp(-\beta t). \quad (22)$$

Подставляя во второе уравнение системы (21), получаем

$$\dot{C}(t) = \xi(t) \exp(\beta t), \quad (23)$$

откуда

$$C(t) = \int_0^t d\tau \xi(\tau) \exp(-\beta\tau) + C(0). \quad (24)$$

В результате имеем

$$v(t) = v(0) \exp(-\beta t) + \int_0^t d\tau \xi(\tau) \exp(-\beta(t-\tau)). \quad (25)$$

Таким образом, мы получили, что скорость частицы представляет собой случайную функцию, поскольку содержит ξ . Исследуем её корреляционные свойства. Для этого найдем её среднее значения и дисперсию:

$$\langle v(t) \rangle = v(0) \exp(-\beta t), \quad (26)$$

т. е. среднее значение скорости экспоненциально убывает. Далее,

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle &= v^2(0) \exp(-2\beta t) + v(0) \exp(-\beta t) \int_0^t d\tau \langle \xi(\tau) \rangle \exp(-\beta(t-\tau)) + \\ &+ \int_0^t d\tau' \int_0^t d\tau'' \exp(-\beta(t-\tau')) \exp(-\beta(t-\tau'')) \langle \xi(\tau') \xi(\tau'') \rangle = \\ &= v^2(0) \exp(-2\beta t) + \exp(-2\beta t) \int_0^t d\tau' \int_0^t d\tau'' \exp(\beta(\tau' + \tau'')) \delta(\tau' - \tau'') = \\ &= v^2(0) \exp(-2\beta t) + \frac{D}{\beta} (1 - \exp(-2\beta t)). \end{aligned} \quad (27)$$

Для дисперсии скорости получаем

$$\sigma_v^2 = \frac{D}{\beta} (1 - \exp(-2\beta t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{D}{\beta} = kT \quad (28)$$

– это есть закон о равнораспределении энергии: на каждую степень свободы приходится энергия теплового движения $kT/2$.

Найдем теперь зависимость координаты от времени. Для простоты положим $x(0) = v(0) = 0$. Подставляя (25) в первое уравнение системы (21), получаем

$$\dot{x} = \int_0^t d\tau \xi(\tau) \exp(-\beta(t-\tau)). \quad (29)$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \xi(\tau) \exp(-\beta(t' - \tau)) = \int_0^t dt' \exp(-\beta t') \int_0^{t'} d\tau \xi(\tau) \exp(\beta\tau) = \\
 &= -\frac{\exp(-\beta t')}{\beta} \int_0^{t'} d\tau \xi(\tau) \exp(\beta\tau) \Big|_{t'=0}^{t'=t} + \int_0^t dt' \frac{\exp(-\beta t')}{\beta} \xi(t') \exp(\beta t') = \\
 &= \frac{1}{\beta} \int_0^t d\tau \xi(\tau) (1 - \exp(-\beta(t - \tau))). \tag{30}
 \end{aligned}$$

Среднее значение координаты $\langle x(t) \rangle = 0$, как и должно быть для частицы с нулевой начальной скоростью и координатой. Для дисперсии получаем

$$\begin{aligned}
 \langle x^2(t) \rangle &= \\
 &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^t d\tau' \int_0^{t'} d\tau'' \langle \xi(\tau') \xi(\tau'') \rangle (1 - \exp(-\beta(t - \tau')))(1 - \exp(-\beta(t - \tau''))) = \\
 &= \frac{2D}{\beta^2} \int_0^t d\tau' \int_0^{t'} d\tau'' \delta(\tau' - \tau'') (1 - \exp(-\beta(t - \tau')))(1 - \exp(-\beta(t - \tau''))) = \\
 &= \frac{2D}{\beta^2} \left(t - \frac{3}{2\beta} + \frac{2}{\beta} \exp(-\beta t) - \frac{1}{2\beta} \exp(-2\beta t) \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{2Dt}{\beta^2} = 2kTt/\beta. \tag{31}
 \end{aligned}$$

Последнее равенство представляет собой известный «закон блуждания пьяного»: дисперсия координаты растет линейно со временем.

3. Функция распределения ансамбля частиц

Уравнение Ланжевена (1) – это уравнение на стохастическую траекторию одной частицы, а уравнение Фоккера–Планка – это уравнение на детерминистическую функцию распределения ансамбля таких частиц.

Уравнение Ланжевена – уравнение, описывающее движение частицы в поле детерминированного потенциала и под действием случайных сил. Рассмотрим сначала передемпифицированное движение, когда $m\ddot{x} \ll \gamma\dot{x}$, а потом обобщим наш результат на общий случай. Идея прозрачна: перейти от уравнения Ланжевена для одной частицы:

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma\dot{x} = \xi(t) \tag{5}$$

к уравнению на функцию распределения $f(x, t)$ ансамбля таких частиц. Здесь $dw = f(x, t)dx$ – вероятность частицы находиться в интервале $[x, x+dx]$. Начнем со случая, когда шум отсутствует:

$$\dot{x} = K(x). \quad (6)$$

Тогда движение полностью детерминировано, частица движется по траектории $x = x(t)$ а $f(x, t) = \delta(x - x(t))$.

Получим уравнение для функции распределения: продифференцируем f по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x(t)} \delta(x - x(t)) \frac{dx(t)}{dt} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x(t)} \delta(x - x(t)) K(x) = -\frac{\partial}{\partial x}(fK). \end{aligned} \quad (7)$$

Мы поменяли дифференцирование и объединили сомножители, потому что δ -функция разрешает такой переход. Итак,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(fK). \quad (8)$$

Понятно, что в многомерном случае всё повторяется слово в слово, и мы получаем аналогичное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla(f\mathbf{K}). \quad (9)$$

Это ещё пока не уравнение Фоккера–Планка, в нём нет диффузии. Это уравнение гидродинамики плотности (вероятности) f текущей в \mathbf{x} -пространстве со скоростью \mathbf{K} . Таким образом, (9) имеет вид уравнения непрерывности.

4. Уравнение Фоккера–Планка

Теперь включим в наше рассмотрение шум. Этим словом мы будем называть случайную силу $\xi(t)$, действующую на частицу

$$\dot{x} = K(x) + \xi(t). \quad (10)$$

Теперь есть много конкретных реализаций разных траекторий одной частицы $x(t)$, а функция распределения их ансамбля есть

$$f(x, t) = \langle \delta(x - x(t)) \rangle, \quad (11)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Тогда $\langle f \rangle dx$ по-прежнему даёт вероятность частицы находиться в интервале dx . Рассмотрим конечное приращение функции распределения Δf и координаты частицы Δx за время Δt :

$$\begin{aligned}\Delta f(x, t) &= f(x, t + \Delta t) - f(x, t), \\ \Delta x(t) &= x(t + \Delta t).\end{aligned}\tag{12}$$

Теперь, как это ни покажется странным, разложим δ -функцию в ряд по степеням Δx . Это можно сделать, потому что δ -функция такая же «полноценная» функция, как и все остальные, просто её масштаб меньше всех других характерных масштабов задачи. Ограничимся разложением до второго порядка по Δx :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left\langle -\frac{d}{dx} \delta(x - x(t)) \cdot \Delta x(t) \right\rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2}{dx^2} \delta(x - x(t)) \cdot \Delta x^2(t) \right\rangle + \dots,\end{aligned}\tag{13}$$

где в силу уравнения Ланжевена:

$$\Delta x(t) = K \cdot \Delta t + \Delta \xi.\tag{14}$$

За время Δt координата частицы изменяется слабо, а вот шум успевает измениться сильно. Поэтому для $\Delta \xi$ нужно привести более точное выражение:

$$\Delta \xi = \int_t^{t+\Delta t} \xi(t') dt'.\tag{15}$$

Разберёмся сначала с первым слагаемым (13). Подставим туда (14), получаем

$$-\frac{d}{dx} \left\{ \langle \delta(x - x(t)) \cdot K(x(t)) \Delta t \rangle + \langle \delta(x - x(t)) \cdot \Delta \xi \rangle \right\}.\tag{16}$$

Теперь совершим два простеньких, но важных преобразования. Во-первых, в первом слагаемом в (16):

$$\begin{aligned}\langle \delta(x - x(t)) \cdot K(x(t)) \Delta t \rangle &= \langle \delta(x - x(t)) \cdot K(x) \rangle \Delta t = \\ &= \langle \delta(x - x(t)) \rangle \cdot K(x) \Delta t = f \cdot K \Delta t\end{aligned}\tag{17}$$

мы так же, как и в (7) заменили $\Delta x(t)$ на x , а после этого средние «расцепились». Во-вторых, во втором слагаемом в силу линейной независи-

ности шума и координаты на интервале времени Δt (шум быстро изменяется на фоне неизменной координаты), $\langle \Delta \xi \rangle = 0$:

$$\langle \delta(x - x(t)) \cdot \Delta \xi \rangle = \langle \delta(x - x(t)) \rangle \langle \Delta \xi \rangle = 0. \quad (18)$$

Теперь перейдём ко второму слагаемому в (13). Действуя аналогично и используя те же самые аргументы, что и выше, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \delta(x - x(t)) \cdot \Delta x^2(t) \rangle = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \delta(x - x(t)) \rangle \langle \Delta x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f \langle \Delta x^2(t) \rangle). \end{aligned} \quad (19)$$

Подстановка (14) в (19) даёт члены, пропорциональные Δt^2 , $\Delta t \cdot \Delta \xi$ и $\Delta \xi^2$. После усреднения по ансамблю второй член обращается в ноль, т.к. $\langle \Delta \xi \rangle = 0$. А вот $\langle \Delta \xi^2 \rangle$ оказывается пропорциональным первой степени Δt . Действительно, вспомним ещё раз, что шум (случайная сила) быстро меняется на фоне медленного изменения координаты, поэтому процесс можно считать марковским, а шум – белым. Тогда его коррелятор есть δ -функция:

$$\langle \Delta \xi^2 \rangle = \langle \Delta \xi(t) \cdot \Delta \xi(t) \rangle = \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' dt'' \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle = 2D\Delta t. \quad (20)$$

Окончательно, собирая все слагаемые вместе, для функции распределения получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f K) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (21)$$

Это соотношение называется уравнением Фоккера–Планка. Оно в ряде случаев бывает удобнее для анализа, чем исходное уравнение Ланже-вена.

В силу понятных причин первый член, содержащий скорость K в фазовом пространстве, называется *сносовым (дрейфовым)*, а второй – *диффузионным*. Формула (21) легко допускает обобщение на многомерный случай:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla(f \mathbf{K}) + D_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (22)$$

Возможным частным случаем такого обобщения является возврат к полному уравнению Ньютона вместо (10).

Действительно, пусть вектор $\mathbf{x} = (x, v)$ двухкомпонентен, $v = \dot{x}$. Тогда уравнением Ланжевена будет система:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial U}{m \partial x} + \frac{\xi(t)}{m}.\end{aligned}\tag{23}$$

Роль $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ играет вектор $\left(v, -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x}\right)$, а $\xi = (0, m^{-1} \xi(t))$. Тогда для функции распределения частиц по координатам и скоростям $f(x, v, t)$ получаем для шума силы с коррелятором $\langle \xi(t) \cdot \xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{D}{m} \frac{\partial}{\partial v} \right) f. \tag{24}$$

5. Стационарное уравнение Фоккера–Планка

Теперь вернёмся к нашей исходной задаче о комплементарном описании стохастического процесса либо уравнению Ланжевена:

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + \xi(t) \tag{25}$$

с коррелятором марковского (белого) шума $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$, либо уравнению Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial U}{\partial x} \right) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{26}$$

Оказывается, это уравнение описывает не только закон блуждания «пьяного» на ровной плоскости $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, но и диффузию частиц в потенциале $U(x)$, их скопления в потенциальных ямах и т.д. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Начнём со стационарного решения. Наше уравнение Фоккера–Планка имеет вид уравнения непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \tag{27}$$

где поток вероятности есть

$$j = f \frac{\partial U}{\partial x} + D \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (28)$$

Рассмотрим стационарный случай $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, когда равновесие установилось. Тогда $j = \text{const}$. Учитывая граничные условия $f(\pm\infty) = \frac{\partial f}{\partial x}(\pm\infty) = 0$, которые обязательны для выполнения условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx = 1. \quad (29)$$

Мы видим, что $\text{const} = 0$. Итак, в равновесии f удовлетворяет уравнению

$$f \frac{\partial U}{\partial x} + D \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (30)$$

которое имеет единственное решение:

$$f = \text{const} \cdot e^{-\frac{U(x)}{D}}. \quad (31)$$

В (31) мы легко узнаём распределение Больцмана, в котором после подстановки $U \rightarrow \frac{U}{\gamma}$ и использования соотношения Эйнштейна: $kT = \gamma D$ восстанавливаем температурный множитель:

$$f \sim e^{-\frac{U(x)}{kT}}. \quad (32)$$

Уравнение (32) предсказывает диффузионное поведение частиц в потенциальной яме. Частицы скапливаются вблизи потенциального минимума $x = 0$, где

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 \cdot x^2 + \dots \quad (33)$$

с положительной второй производной $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$. Тогда функция распределения:

$$f \sim \exp\left(-\frac{1}{2D}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 \cdot x^2\right) \quad (34)$$

имеет характерный пространственный масштаб $\Delta x = \sqrt{x^2}$, равный среднеквадратичному отклонению координаты частицы:

$$\Delta x = D\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0^{-1}. \quad (35)$$

Полученный результат имеет ясный физический смысл: чем круче минимумы потенциала, тем кучнее собраны в его яме частицы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение марковского процесса.
2. Дайте определение белого шума.
3. Сформулируйте закон блуждания пьяного для броуновской частицы.
4. Запишите уравнение Фоккера–Планка для многомерного случая.
5. Из какого уравнения можно получить распределение Больцмана? Запишите его.

Задачи

1. Пользуясь уравнением Фоккера–Планка, получите уравнение Ланжевена.
2. Определите коррелятор шума в уравнении Ланжевена.

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P. Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics.* – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J. Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations.* – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum Optics.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 19. ШУМЫ В КЛАССИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Мир – это история, рассказанная идиотом.
В ней много шума и ярости, нет лишь
только смысла.

В. Шекспир. Макбет

Введение

В предыдущей лекции мы обсудили, при каких условиях классическую детерминированную систему можно приближенно описывать стохастическими уравнениями. В данной лекции мы продолжим изучение классических систем с шумом и получим некоторые результаты, которые будут использованы нами в квантовой теории.

1. Спектр линейного осциллятора с шумом

Рассмотрим линейный осциллятор с шумом. Уравнение для медленной комплексной амплитуды имеет вид

$$\dot{v} = -\gamma v + \xi(t), \quad (1)$$

где случайный шум $\xi(t)$ обладает следующими корреляционными свойствами:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi^*(t+\tau) \xi(t) \rangle = 2D\delta(\tau), \quad (2)$$

и коэффициент диффузии D связан со скоростью затухания γ флюктуационно-диссипационной теоремой:

$$D = \gamma kT. \quad (3)$$

Исследуем спектральные свойства линейного осциллятора с шумом. Напомним, что согласно теореме Винера–Хинчина, спектр сигнала определяется как преобразование Фурье двухвременной автокорреляционной функции. В случае (1) нам необходимо найти $\langle v^*(t+\tau)v(t) \rangle$. Зависимость от τ данной величины показывает, насколько быстро сбивается сигнал системы. Общее решение (1) имеет вид

$$v(t) = v(0)\exp(-\gamma t) + \int_0^t d\tau \xi(\tau) \exp(-\gamma(t-\tau)). \quad (4)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \langle v^*(t+\tau)v(t) \rangle &= |v(0)|^2 \exp(-2\gamma t) + \\ &+ \exp(-2\gamma t - \gamma\tau) \int_0^{t+\tau} d\tau' \int_0^t d\tau'' \langle \xi(\tau') \xi(\tau'') \rangle \exp(\gamma(\tau' + \tau'')) = . \quad (5) \\ &= 2D \exp(-2\gamma t - \gamma\tau) \int_0^{t+\tau} d\tau' \int_0^t d\tau'' \delta(\tau' - \tau'') \exp(\gamma(\tau' + \tau'')). \end{aligned}$$

Чтобы проинтегрировать дельта-функцию, сначала вычислим интеграл по τ' , потому что верхний пределы интегрирования по этой переменной (от 0 до $t+\tau$) таковы, что заведомо будет существовать такое значение τ' , которое совпадёт с τ'' . Тогда для начального условия $v(0)=0$ получаем

$$\begin{aligned} \langle v^*(t+\tau)v(t) \rangle &= 2D \exp(-2\gamma t - \gamma\tau) \int_0^t d\tau'' \delta \exp(2\gamma\tau'') = \quad (6) \\ &= D \exp(-2\gamma t - \gamma\tau) (\exp(2\gamma t) - 1) / \gamma_{t \rightarrow \infty} = D \exp(-\gamma\tau) / \gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, коррелятор амплитуды осциллятора v убывает экспоненциально. Спектр, очевидно, будет представлять собой лоренцевскую линию с шириной γ .

Обобщим приведенный выше пример на многомерный случай, а именно: пусть имеется линейная система осцилляторов с шумами, описываемая системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{v}} = \hat{M}\mathbf{v} + \xi(t), \quad (7)$$

где матрица \hat{M} такова, что все её собственные значения отрицательны, а вектор случайных шумов удовлетворяет корреляционному соотношению

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi^*(t+\tau) \xi^T(t) \rangle = 2\hat{D}\delta(\tau). \quad (8)$$

Здесь \hat{D} – матрица диффузии. Для вычисления матрицы двухвременных корреляционных функций поступим так же, как и в скалярном случае. Общее решение (7) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \exp(\hat{M}t)\mathbf{v}(0) + \int_0^t d\tau \exp(M(t-\tau))\xi(\tau). \quad (9)$$

Далее для матрицы двухвременных корреляторов имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^*(t+\tau) \mathbf{v}^T(t) \rangle &= \exp(\hat{M}^*(t+\tau)) \mathbf{v}^*(0) \mathbf{v}^T(0) \exp(\hat{M}^T t) + \\ &+ \int_0^{t+\tau} d\tau' \int_0^t d\tau'' \exp(\hat{M}^*(t+\tau-\tau')) \langle \xi^*(\tau') \xi^T(\tau'') \rangle \exp(\hat{M}^T(t-\tau'')). \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая, что $\mathbf{v}^*(0) \mathbf{v}^T(0) = 0$, и используя (8), получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^*(t+\tau) \mathbf{v}^T(t) \rangle &= \\ &= 2 \int_0^{t+\tau} d\tau' \int_0^t d\tau'' \exp(\hat{M}^*(t+\tau-\tau')) \hat{D} \delta(\tau'-\tau'') \exp(\hat{M}^T(t-\tau'')) = \\ &= 2 \exp(\hat{M}^* \tau) \exp(\hat{M}^* t) \left[\int_0^t d\tau'' \exp(-\hat{M}^* \tau'') \hat{D} \exp(-\hat{M}^T \tau'') \right] \exp(\hat{M}^T t). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим равенство (11) подробнее. При $\tau \rightarrow +0$ оно определяет динамику средних значений произведений случайных величин:

$$\langle \mathbf{v}^*(t) \mathbf{v}^T(t) \rangle = 2 \exp(\hat{M}^* t) \left[\int_0^t d\tau'' \exp(-\hat{M}^* \tau'') \hat{D} \exp(-\hat{M}^T \tau'') \right] \exp(\hat{M}^T t). \quad (12)$$

Для них из (12) можно получить более простое выражение, если продифференцировать (12) по времени:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}^*(t) \mathbf{v}^T(t) \rangle = \hat{M}^* \langle \mathbf{v}^*(t) \mathbf{v}^T(t) \rangle + \langle \mathbf{v}^*(t) \mathbf{v}^T(t) \rangle \hat{M}^T + 2\hat{D}. \quad (13)$$

Для приложений часто требуется знать стационарное значение средних. Из (13) следует, что $\langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st}$ удовлетворяет следующей алгебраической системе уравнений

$$\hat{M}^* \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} + \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} \hat{M}^T + 2\hat{D} = 0. \quad (14)$$

В одномерно случае из (14) получаем (6), если \hat{M} заменить на $-\gamma$.

Теперь исследуем динамику двухвременных корреляционных функций при $t \rightarrow \infty$. Из (11) в пределе $t \rightarrow \infty$ получаем

$$\langle \mathbf{v}^*(\tau) \mathbf{v}^T \rangle_{st} = \exp(\hat{M}^* \tau) \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st}, \quad \tau > 0, \quad (15)$$

где $\langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st}$ удовлетворяет уравнению (14). Для вычисления спектра необходимо, согласно теореме Винера–Хинчина, вычислить Фурье образ (14). Здесь окончательное выражение можно упростить, если дополнни-

тельно определить двухвременную корреляционную функцию для $\tau < 0$. Для этого необходимо в уравнении (11) сначала вычислить интеграл по τ'' , а затем усреднить по случайному шуму и сделать замену $t + \tau \rightarrow t$. Тогда при $\tau \rightarrow -0$ получим (14), а вместо (15) будем иметь

$$\langle \mathbf{v}^*(\tau) \mathbf{v}^T \rangle_{st} = \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} \exp(-\hat{M}^T \tau), \quad \tau < 0. \quad (16)$$

Теперь спектр определим как

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) \langle \mathbf{v}^*(\tau) \mathbf{v}^T \rangle_{st} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} \int_{-\infty}^0 d\tau \exp((-\hat{M}^T - i\omega\hat{I})\tau) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\tau \exp((\hat{M}^* - i\omega\hat{I})\tau) \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau \left(\langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} \exp((\hat{M}^T + i\omega\hat{I})\tau) + \exp((\hat{M}^* - i\omega\hat{I})\tau) \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} (\hat{M}^T + i\omega\hat{I})^{-1} + (\hat{M}^* - i\omega\hat{I})^{-1} \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Умножая (17) слева на $(\hat{M}^* - i\omega\hat{I})$ и справа на $(\hat{M}^T + i\omega\hat{I})$, получаем

$$\begin{aligned} &(\hat{M}^* - i\omega\hat{I}) \hat{S}(\omega) (\hat{M}^T + i\omega\hat{I}) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left((\hat{M}^* - i\omega\hat{I}) \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} + \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} (\hat{M}^T + i\omega\hat{I}) \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\hat{M}^* \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} + \langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \rangle_{st} \hat{M}^T \right) = \hat{D} / \pi, \end{aligned} \quad (18)$$

где на последнем шаге использовано (14). Из (18) окончательно для спектров получаем

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} (\hat{M}^* - i\omega\hat{I})^{-1} \hat{D} (\hat{M}^T + i\omega\hat{I})^{-1}. \quad (19)$$

Уравнения (14) и (19) является отправной точкой многих практических вычислений.

2. Спектр осциллятора Ван дер Поля

Теперь рассмотрим пример вычисления спектра нелинейного осциллятора Ван дер Поля. В приближении медленных амплитуд оно будет иметь следующий вид

$$\dot{v} = \lambda v - \mu v |v|^2 + \xi(t). \quad (20)$$

Здесь параметр λ играет роль диссипации либо накачки в зависимости от знака. Основная идея вычисления спектра для нелинейной задачи – линеаризовать уравнение около положения равновесия и затем вычислить спектр в линейном приближении.

Устойчивые положение равновесия (20) без учёта шума имеют вид

$$v_0 = 0, \quad \lambda < 0 \text{ и } v_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \exp(i\psi), \quad \lambda > 0. \quad (21)$$

Здесь важно отметить, что фаза ψ стационарного состояния определяется начальным условием, и именно она сбивается случайным шумом. Поэтому для линеаризации (20) мы будем использовать следующую замену:

$$v = (v_0 + \delta v(t)) \exp(i\delta\varphi(t)). \quad (22)$$

Спектр сигнала в стационарном состоянии будет иметь вид

$$\begin{aligned} \langle v^*(t+\tau)v(t) \rangle &= \langle (v_0 + \delta v(\tau)) \exp(i\delta\varphi(\tau)) v_0 \rangle = \\ &= v_0^2 \langle \exp(i\delta\varphi(\tau)) \rangle + v_0 \langle \delta v(\tau) \exp(i\delta\varphi(\tau)) \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, для расчёта спектра необходимо вычислить $\langle \exp(i\delta\varphi(\tau)) \rangle$ и $\langle \delta v(\tau) \exp(i\delta\varphi(\tau)) \rangle$. Для этого подставим (22) в (20), в результате получим

$$\delta\dot{v} + i\delta\dot{\varphi}v_0 = \lambda\delta v - 3\mu|v_0|^2\delta v + \xi(\tau)\exp(-i\delta\varphi(\tau)). \quad (24)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\delta\dot{v} = -2\lambda\delta v + \operatorname{Re}(\xi(\tau)\exp(-i\delta\varphi(\tau))), \quad (25)$$

$$\delta\dot{\varphi} = \operatorname{Im}(\xi(\tau)\exp(-i\delta\varphi(\tau)))/v_0. \quad (26)$$

Сначала заметим, что в системе (25) – (26) появляются новые шумы. Для того, чтобы найти их средние значения, сначала заметим, что для шума $\xi(\tau)\exp(-i\delta\varphi(\tau))$ будут выполняться те же корреляционные, как и для

исходного шума $\xi(\tau)$. Необходимо вычислить корреляторы действительной и мнимой частей $\xi(\tau)$. Для этого представим $\xi(\tau)$ в виде $\xi_1(\tau) + i\xi_2(\tau)$ и запишем

$$\langle \xi^* \xi \rangle = \langle \xi_1 \xi_1 \rangle + \langle \xi_2 \xi_2 \rangle + i \langle \xi_1 \xi_2 \rangle - i \langle \xi_2 \xi_1 \rangle = 2D\delta(\tau), \quad (27)$$

$$\langle \xi \xi^* \rangle = \langle \xi_1 \xi_1 \rangle + \langle \xi_2 \xi_2 \rangle - i \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + i \langle \xi_2 \xi_1 \rangle = 2D\delta(\tau), \quad (28)$$

$$\langle \xi \xi \rangle = \langle \xi_1 \xi_1 \rangle - \langle \xi_2 \xi_2 \rangle + i \langle \xi_1 \xi_2 \rangle - i \langle \xi_2 \xi_1 \rangle = 0, \quad (29)$$

$$\langle \xi^* \xi^* \rangle = \langle \xi_1 \xi_1 \rangle - \langle \xi_2 \xi_2 \rangle - i \langle \xi_1 \xi_2 \rangle - i \langle \xi_2 \xi_1 \rangle = 0. \quad (30)$$

Из (27) – (30) находим

$$\langle \xi_2 \xi_2 \rangle = D\delta(\tau). \quad (31)$$

Далее заметим, что для $\delta\varphi(\tau)$ из (26) следует следующие равенства

$$\langle \delta\varphi(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \delta\varphi(\tau) \delta\varphi(\tau) \rangle = D\tau / \nu_0^2 = 2D_\varphi\tau. \quad (32)$$

Из (32) следует, что динамика $\delta\varphi(\tau)$ совпадает с динамикой свободной броуновской частицы. Это значит (см. лекцию 15), что вероятность распределения $\delta\varphi(\tau)$ подчиняется уравнению Фоккера–Планка с нулевым дрейфовым членом, которое имеет решение

$$W(\delta\varphi, \tau) = \frac{\exp\left(-\frac{\delta\varphi^2}{4D_\varphi\tau}\right)}{\sqrt{4\pi D_\varphi\tau}}. \quad (33)$$

Зная функцию распределения, легко вычислить $\langle \exp(i\delta\varphi(\tau)) \rangle$:

$$\langle \exp(i\delta\varphi(\tau)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\varphi(\tau)} W(\delta\varphi, \tau) d\varphi = \exp(-D_\varphi\tau) = \exp\left(-\frac{D\tau}{2\nu_0^2}\right). \quad (34)$$

Отсюда получаем спектр:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{D}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{D}{2\nu_0^2}\right)^2}. \quad (35)$$

Видно, что ширина линии сужается с увеличением амплитуды квадрата амплитуды v_0^2 , которая, как видно из (21), пропорциональна накачке.

3. Стохастический резонанс

Одним из примеров совместного действия регулярной и хаотической динамики является возникновение так называемого *стохастического резонанса*. Понятие «стохастический резонанс» было введено в связи с потребностью объяснить близкой к периодической (с периодом равным приблизительно 100 000 лет) смену эпох оледенения Земли. Одной из причин такой смены может быть наблюдающееся периодическое изменение эксцентриситета земной орбиты как раз с указанным периодом. Но это изменение очень мало, и само по себе оно не может вызвать сильного изменения климата. Однако добавление в уравнения движения системы некоторого шума в определенном диапазоне интенсивности этого шума делает такие изменения возможными. Так было открыто явление, названное стохастическим резонансом. И хотя вопрос о том, соответствует ли указанное объяснение истинным причинам наблюдаемой смены эпох оледенения Земли, до сих пор окончательно не решен, явление стохастического резонанса стало широко известным. Оно наблюдается в системах с самой различной физической природой, включая турбулентные струи, лазерную генерацию и т.д.

Первые исследования стохастического резонанса моделировали явление смены эпох оледенения Земли, используя уравнение для температуры поверхности Земли, которое имеет вид уравнения движения легкой частицы в бистабильном потенциальном поле, возмущенном слабым входным периодическим сигналом и шумом:

$$\dot{x} + f(x) = A \cos \omega_0 t + \xi(t), \quad (36)$$

где x – температура, $A \cos \omega_0 t$ – слабое периодическое возмущение, вызванное колебаниями эксцентриситета земной орбиты с частотой ω , $f(x) = dU(x) / dx = -x + x^3$, $U(x) = -x^2 / 2 + x^4 / 4$ – симметричный потенциал с двумя ямами, $\xi(t)$ – белый шум с интенсивностью K , т. е. $\langle \xi(t) \xi(1+\tau) \rangle = K\delta(\tau)$. Величина U_0 представляет собой высоту потенциального барьера для перехода частицы из одной потенциальной ямы в другую. Заметим, что возмущение $A \cos \omega_0 t$ в уравнении (1) может рассматриваться как входной сигнал, а переменная x – как выходной.

Решение уравнения (36) содержит дискретные составляющие (нечетные гармоники с частотой ω_0) и непрерывные составляющие, обусловленные шумом. Отношение амплитуды B первой гармоники сигнала на выходе системы к амплитуде сигнала A на ее входе назовем *коэффициентом преобразования амплитуды* и обозначим как $Q(K)$.

Численное и приближенное аналитические решения уравнения (1) показывают, что коэффициент преобразования $Q(K, \omega, A)$ и фазовый сдвиг $\psi(K, \omega, A)$ являются немонотонными функциями интенсивности шума K . Величина Q достигает максимума при определенном значении K , причем это значение тем больше, чем выше частота сигнала. Зависимость Q от K при фиксированных значениях частоты и амплитуды сигнала напоминает резонансную зависимость амплитуды колебаний некоторого осциллятора от частоты вынуждающего воздействия. Так как K определяет среднюю частоту перескоков из одной ямы в другую под действием шума, вызванных случайными переходами через потенциальный барьер U_0 , то естественно предположить, что максимум в зависимости Q от K имеет место тогда, когда условие резонанса выполняется между частотой сигнала и средней частотой флуктуационных переходов из одного устойчивого состояния в другое. Именно из-за этого условия резонанса и возникает сам термин «стохастический резонанс». В рассматриваемом нами случае это условие соответствует равенству периода сигнала $T = 2\pi / \omega_0$ удвоенному среднему времени T_{tr} первого перехода через потенциальный барьер

$$T_{tr} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{2U_0}{K}\right). \quad (37)$$

Формулу для T_{tr} называют формулой Крамерса (1940), хотя первая работа по вычислению T_{tr} , принадлежит Л.С. Понтрягину, А.А. Андронову и А.А. Витту.

Однако указанное предположение, следующее из простых логических рассуждений, является мифическим, потому что тогда величина Q должна была бы достигать максимального значения не только при изменении интенсивности шума K , определяющей среднюю частоту перехода, но и при изменении ω_0 (частоты воздействия). Вместе с тем известно, что при увеличении ω_0 значение Q монотонно уменьшается.

В более поздних работах было показано, что причиной стохастического резонанса является изменение вследствие шума упругости системы

и коэффициента затухания по отношению к реакции на входной сигнал. Заметим, что сама возможность изменения эффективных параметров системы под действием шума известна давно. Однако стохастический резонанс с этой точки зрения рассматривался только в связи с исследованиями оледенения Земли.

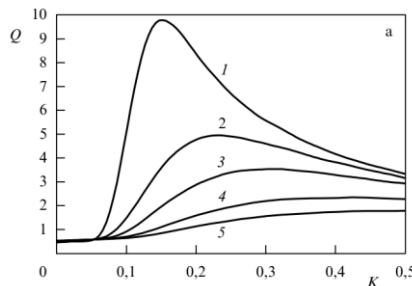


Рис. 28. Зависимость Q от амплитуды шума

Немонотонная зависимость Q от K (рис. 28) наводит на мысль, что явление стохастического резонанса можно использовать с целью увеличения отношения сигнала к шуму. В случае гармонического сигнала это действительно так. Но для гармонического сигнала существуют другие, более эффективные методы выделения сигнала из шума, например, синхронное детектирование. Однако в случае негармонического сигнала вопрос о возможности увеличения отношения сигнала к шуму с помощью стохастического резонанса остается открытым, поскольку коэффициент преобразования Q и сдвиг фаз ψ сильно зависят от частоты, что неизбежно должно привести к значительному искажению выходного сигнала.

Следует отметить, что само понятие отношения сигнала к шуму определено неоднозначно. Например, есть определение: «Отношение сигнал/шум (SNR) определяется как отношение спектральных плотностей мощности сигнала и шума на частоте сигнала. При гармоническом сигнале на входе такому определению в эксперименте отвечает отношение высоты спектральной линии сигнала модуляции над шумовым основанием к высоте шумового основания спектра выходного сигнала». Но спектральная плотность сигнала представляет собой набор δ -функций, и поэтому высота спектральной линии на частоте сигнала теоретически обращается в бесконечность. Таким образом, если следовать данному выше определению, то теоретически отношение сигнала к шуму всегда равно бесконечности. Высота спектральной линии при численном определении спек-

тральной плотности зависит от длительности реализации, частоты дискретизации, параметров усреднения и других факторов. Отсюда ясно, что использовать стохастический резонанс с целью выделения сложного сигнала из шума невозможно. Но обнаруживать сигнал на основе стохастического резонанса возможно и целесообразно.

4. Модель двух состояний

Простейшая модель, на примере которой можно проследить эффект стохастического резонанса, является модель двух состояний. Предположим, что у системы существуют два стационарных состояния: a_1 и a_2 . Пусть $p_1(t)$ и $p_2(t)$ соответствуют вероятностям того, что система находится в состояниях a_1 и a_2 соответственно, и положим, что $p_1(t) + p_2(t) = 1$, т. е. система может находиться только в этих состояниях. Динамику во времени данных вероятностей можно феноменологически описать следующими уравнениями баланса:

$$\dot{p}_1 = -W_1(t)p_1 + W_2(t)p_2, \quad (38)$$

$$\dot{p}_2 = W_1(t)p_1 - W_2(t)p_2. \quad (39)$$

Здесь $W_{1,2}(t)$ – вероятности перехода из состояния 1 в состояние 2 и наоборот. Систему (38) – (39), используя условие нормировки, можно свести к одному уравнению

$$\dot{p}_1 = -(W_1(t) + W_2(t))p_1 + W_2(t). \quad (40)$$

В случае стационарного бистабильного потенциала величины $W_{1,2}$ описываются известной формулой Крамерса:

$$W_{1,2} \equiv \frac{W_0}{2} = \frac{\sqrt{|V''(0)|V''(a_{1,2})}}{2\pi} \exp(-2\Delta V/\gamma), \quad (41)$$

где γ есть коррелятор шума. Тогда коэффициенты в уравнении (40) не зависят от времени и оно имеет решение

$$p_1(t) = \frac{1}{2}(1 - \exp(-W_0 t)) + p_1(0)\exp(-W_0 t). \quad (42)$$

Стационарное значение вероятности $p_1(\infty) = 1/2$, как и должно быть, поскольку потенциал симметричен и нет выделенного по энергии состояния. Среднее значение координаты

$$\langle x(t) \rangle = a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t) = (a_1 - a_2) p_1(t) + a_2. \quad (43)$$

Для дальнейшего нам понадобится определить спектр флюктуаций. Согласно теореме Винера–Хинчина, он находится как фурье-преобразование двухвременной автокорреляционной функции:

$$S(\omega) = 4 \int_0^\infty C(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (44)$$

где двухвременная автокорреляционная функция определяется как

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^T dt \langle x(t + \tau) x(t) \rangle. \quad (45)$$

Здесь мы производим усреднение по периоду внешней периодической силы. Если её нет, то имеет место простое соотношение $C(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x(t + \tau) x(t) \rangle$. В этом случае спектр, очевидно, представляет собой лоренцевскую линию:

$$S_N(\omega) = 4a^2 \frac{W_0}{\omega^2 + W_0^2}. \quad (46)$$

Теперь рассмотрим действие малой периодической силы, которую будем описывать как слабую модуляцию потенциала:

$$V(t) = V_0 + V_1 \sin \omega_0 t. \quad (47)$$

Будем считать, что формула Крамерса (41) приближенно остаётся верной, так что

$$W_{1,2} = \frac{\sqrt{|V''(0)|V''(a_{1,2})}}{2\pi} \exp(-2(\Delta V \pm V_1 \sin \omega_0 t)/\gamma) \approx \frac{W_0}{2} \mp \varepsilon \sin \omega_0 t. \quad (48)$$

Здесь малый параметр $\varepsilon = V_1 / \gamma W_0 \ll 1$. С учетом (48), уравнение (40) перепишется в виде

$$\dot{p}_1 = -W_0 p_1 + W_0 / 2 + \varepsilon \sin \omega_0 t. \quad (49)$$

Нас будет интересовать решение (49), индуцированное внешней периодической силой, т. е. решение неоднородного уравнения, которое имеет вид

$$p_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon \sin(\omega_0 t - \varphi)}{\sqrt{W_0^2 + \omega_0^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{\omega_0}{W_0}. \quad (50)$$

Очевидно, что спектр сигнала, задаваемого (50), будет иметь вид

$$S(\omega) = S_1 \delta(\omega - \omega_0), \quad S_1 = \frac{4\pi a^2 \varepsilon^2}{W_0^2 + \omega_0^2}. \quad (51)$$

Определим отношение сигнал/шум как

$$SNR = S_1 / S_N(\omega_0). \quad (52)$$

Тогда, используя (50), (51) и (41), получаем

$$SNR = \frac{\exp(-2\Delta V / \gamma)}{\gamma^2} \quad (53)$$

с максимумом при $\gamma^* = \Delta V$. Оптимум отношения сигнал/шум при конечном корреляторе шума есть стохастический резонанс.

Контрольные вопросы

- Сформулируйте теорему Винера–Хинчина.
- Как связана подвижность броуновской частицы с коэффициентом диффузии?
- Запишите выражение для спектра линейной системы под действием шума.
- Запишите выражение для крамерсовского времени перехода из одной потенциальной ямы в другую.
- В чем заключается явление стохастического резонанса?

Задачи

- Найдите решение уравнения Ван дер Поля с шумом.

Литература

- Gardiner C.W., Zoller P. Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics.* – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
- Carmichael H.J. Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations.* – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
- Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum Optics.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

ЛЕКЦИЯ 20. Уравнения Гейзенберга–Ланжевена для лазера. Ширина линии, формула Шавлова–Таунса

То, что я понял – прекрасно. Из этого я заключаю,
что и остальное, чего я не понял, – тоже прекрасно.

Sokrat

Введение

В прошлых лекциях мы увидели, что взаимодействие с резервуаром приводит к затуханию энергии системы и случайному шуму в ней. Если система нелинейна, то шум может быть подавлен сколь угодно сильно. Оказывается, что в лазере имеют место аналогичные эффекты. В данной лекции мы увидим, что динамика лазера выше порога генерации может быть описана уравнением Ван дер Поля, для которого выполняется закон Шавлова–Таунса.

1. Шумы в квантовой механике

Рассмотрим квантовый гармонический осциллятор, взаимодействующий с баней, которая представляет из себя набор гармонических осцилляторов. Гамильтониан системы имеет следующий вид

$$\hat{H} = \hbar\omega_{CM}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sum_k\omega_k\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k + \hbar\sum_k\gamma_k(\hat{a}^\dagger\hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger\hat{a}), \quad (1)$$

Далее мы поступим точно также, как в классическом случае. А именно, мы запишем уравнения движения для переменных \hat{a} и \hat{b}_k , далее формально проинтегрируем уравнение для \hat{b}_k и подставим в уравнение для \hat{a} , затем воспользуемся марковским приближением и получим локальное по времени уравнение для \hat{a} . Работать будем в представлении Гейзенberга. Используя стандартные коммутационные соотношения для гармонического осциллятора, получаем следующие уравнения движения:

$$\dot{\hat{a}} = -i\omega_{CM}\hat{a} - i\sum_k\gamma_k\hat{b}_k, \quad (2)$$

$$\dot{\hat{b}}_k = -i\omega_k\hat{b}_k - i\gamma_k\hat{a}. \quad (3)$$

Интегрируем уравнение (3):

$$\hat{b}_k(t) = \hat{b}_k(0) \exp(-i\omega_k t) - i\gamma_k \int_0^t d\tau \hat{a}(\tau) \exp(-i\omega_k(t-\tau)), \quad (4)$$

подставляем в уравнение (2):

$$\dot{\hat{a}} = -i\omega_{CM} \hat{a} - \sum_k |\gamma_k|^2 \int_0^t d\tau \hat{a}(\tau) \exp(-i\omega_k(t-\tau)) - i \sum_k \gamma_k \hat{b}_k(0) \exp(-i\omega_k t), \quad (5)$$

делаем замену $\hat{a}(t) \rightarrow \hat{a}(t) \exp(-i\omega_{CM} t)$ и вводим обозначение

$$\hat{F}_a(t) = -i \sum_k \gamma_k \hat{b}_k(0) \exp(-i(\omega_k - \omega_{CM})t):$$

$$\dot{\hat{a}} = -\sum_k |\gamma_k|^2 \int_0^t d\tau \hat{a}(\tau) \exp(-i\omega_k(t-\tau)) + \hat{F}_a(t), \quad (6)$$

и, наконец, используем марковское приближение:

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_a \hat{a} / 2 + \hat{F}_a(t), \quad (7)$$

где

$$\gamma_a / 2 = \pi \sum_k |\gamma_k|^2 \delta(\omega_k - \omega_{CM}) = \int d\omega \pi \rho(\omega) \gamma^2(\omega) \delta(\omega - \omega_{CM}). \quad (8)$$

До сих пор все выкладки в точности повторяли классический случай. Разница здесь проявляется в квантовости как осцилляторов резервуара, так и гармонического осциллятора системы. Первое приводит к тому, что коррелятор шума становится некоммутативным. Действительно, предполагая, что резервуар все время находится в состоянии термодинамического равновесия, получаем

$$\gamma_a / 2 = \pi \sum_k |\gamma_k|^2 \delta(\omega_k - \omega_{CM}) = \int d\omega \pi \rho(\omega) \gamma^2(\omega) \delta(\omega - \omega_{CM}), \quad (9)$$

где случайный шум $\xi(t)$ обладает следующими корреляционными свойствами:

$$\langle \hat{F}_a(t) \rangle = -i \sum_k \langle \hat{b}_k(0) \rangle \exp(-i\omega_k t) = 0 = \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \rangle, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_a^\dagger(t') \hat{F}_a(t) \rangle &= \sum_{k,k'} \langle \hat{b}_{k'}^\dagger(0) \hat{b}_k(0) \rangle \exp(-i(\omega_k t - \omega_{k'} t' - \omega_{CM}(t-t'))) = \\ &= \sum_k \langle n_k \rangle \exp(-i(\omega_k - \omega_{CM})(t-t')), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_a(t') \hat{F}_a^\dagger(t) \rangle &= \sum_{k,k'} \langle \hat{b}_{k'}(0) \hat{b}_k^\dagger(0) \rangle \exp(i(\omega_k t - \omega_{k'} t' - \omega_{CM}(t-t'))) = \\ &= \sum_k (\langle n_k \rangle + 1) \exp(i(\omega_k - \omega_{CM})(t-t')). \end{aligned} \quad (12)$$

Видно, что из-за коммутационного соотношения корреляторы шумов различаются. Как и в классическом случае, из (11), (12) можно получить флюктуационно-диссипационную теорему:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_a^\dagger(t') \hat{F}_a(t) \rangle &= \sum_k \langle n_k \rangle \exp(-i(\omega_k - \omega_{CM})(t-t')) = \\ &= \int_0^\infty d\omega \rho(\omega) n(\omega) \exp(-i(\omega_k - \omega_{CM})(t-t')) \simeq \\ &\simeq 2\pi\rho(\omega_{CM}) \bar{n}(\omega_{CM}) \delta(t-t') = \gamma_a \bar{n}(\omega_{CM}) \delta(t-t') = 2D_{F^*F} \delta(t-t') \end{aligned} \quad (13)$$

и, аналогично,

$$\langle \hat{F}_a(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle = \gamma_a (\bar{n}(\omega_{CM}) + 1) \delta(t-t') = 2D_{FF^*} \delta(t-t'). \quad (14)$$

Здесь D_{F^*F} и D_{FF^*} – коэффициенты диффузии. Как видим, они различаются из-за квантового характера осцилляторов резервуара. Таким образом, в квантово-механическом случае также выполняется флюктуационно-диссипационная теорема с тем отличием, что матрица диффузии несимметрична.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как влияет шум на коммутационные соотношения для \hat{a} и \hat{a}^\dagger . Из (7) имеем

$$\begin{aligned} \langle [a(t), a^\dagger(t+\tau)] \rangle &= \langle [a(0), a^\dagger(0)] \rangle \exp(-\gamma(t+\tau/2)) + \\ &+ \exp(-\gamma(t+\tau/2)) \int_0^t d\tau' \int_0^{t+\tau} d\tau'' \langle [F_a(\tau'), F_a^\dagger(\tau'')] \rangle \exp(\gamma(\tau'+\tau'')/2) = \\ &= \exp(-\gamma(t+\tau/2)) + \exp(-\gamma(t+\tau/2)) \times \\ &\times \int_0^t d\tau' \int_0^{t+\tau} d\tau'' \exp(\gamma(\tau'+\tau'')/2) \gamma((\bar{n}+1)-\bar{n}) \delta(\tau'-\tau'') = \\ &= \exp(-\gamma(t+\tau/2)) + \exp(-\gamma(t+\tau/2)) \gamma \int_0^t d\tau' \exp(\gamma\tau') = \\ &= \exp(-\gamma(t+\tau/2)) + \exp(-\gamma(t+\tau/2)) (\exp(\gamma t) - 1) = \exp(-\gamma\tau/2). \end{aligned} \quad (15)$$

Видно, что если $\tau=0$, то коммутатор равен единице, т. е. коммутационное значение сохраняется в любой момент времени. Нетрудно заметить,

что это следует из корреляционных соотношений для шума (11) – (12). Если же $\tau > 0$, то коммутатор затухает экспоненциально, т. е. шум приводит к разрушению квантовых корреляций.

Вычислим теперь спектр линейного осциллятора:

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t+\tau)a(t) \rangle_{t \rightarrow \infty} &= \exp(-\gamma(t+\tau/2)) \times \\ &\times \int_0^t d\tau' \int_0^{t+\tau} d\tau'' \exp(\gamma(\tau'+\tau'')/2) \langle F_a^\dagger(\tau'') F_a(\tau') \rangle = , \\ &= \bar{n} \exp(-\gamma\tau/2)(1 - \exp(-\gamma t)) \rightarrow \bar{n} \exp(-\gamma\tau/2). \end{aligned} \quad (16)$$

Спектр, очевидно, имеет вид лоренцевской линии с шириной $\gamma/2$.

2. Спектр лазера выше порога генерации

Теперь приступим к вычислению спектра лазера. Для простоты мы здесь ограничимся случаем газового лазера, когда $\gamma_a \ll \gamma_\sigma, \gamma_D$. В этом случае возможно произвести адиабатическое исключение атомных переменных.

Уравнения Гейзенберга–Ланжевена имеют вид

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_a \hat{a}/2 - i\Omega_R \hat{\sigma} + \hat{F}_a(t), \quad (17)$$

$$\dot{\hat{\sigma}} = -\gamma_\sigma \hat{\sigma}/2 + i\Omega_R \hat{a} \hat{D} + \hat{F}_\sigma(t), \quad (18)$$

$$\dot{\hat{D}} = -\gamma_D (\hat{D} - D_0)/2 + 2i\Omega_R (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}) + \hat{F}_D(t). \quad (19)$$

Переходя от операторов к c -числам и адиабатически исключая из уравнений (18) и (19) поляризацию и инверсию:

$$D = \frac{D_0}{1 + \frac{4\Omega_R^2}{\gamma_\sigma \gamma_D} |a|^2}, \quad \sigma = \frac{i\Omega_R a D / \gamma_\sigma}{1 + \frac{4\Omega_R^2}{\gamma_\sigma \gamma_D} |a|^2}, \quad (20)$$

и подставляя в (17), получаем

$$\dot{a} = -\gamma_a a + \frac{\Omega_R^2 D_0 a / \gamma_\sigma}{1 + \frac{4\Omega_R^2}{\gamma_\sigma \gamma_D} |a|^2} + F_a(t). \quad (21)$$

Далее мы поступим так же, как и при анализе осциллятора Ван дер Поля: представим комплексную амплитуду a в виде

$$a = (A_0 + \delta A) \exp(i\delta\varphi), \quad (22)$$

где A_0 – ненулевое решение стационарного уравнения (22):

$$A_0 = \sqrt{\frac{\gamma_D}{4\gamma_a} (D_0 - D_{th})}, \quad D_{th} = \frac{\gamma_a \gamma_\sigma}{\Omega_R^2}. \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в (21), получаем систему уравнений на амплитудные и фазовые флуктуации:

$$\begin{aligned} \delta \dot{A} = & -\frac{2\Omega_R^2 D_0 A_0^2 / \gamma_\sigma}{\left(1 + \frac{4\Omega_R^2}{\gamma_\sigma \gamma_D} A_0^2\right)^2} \delta A + F_a(t) \exp(-i\delta\varphi), \\ \end{aligned} \quad (24)$$

$$\delta \dot{\varphi} = \text{Im}(F_a(\tau) \exp(-i\delta\varphi(\tau))) / A_0. \quad (25)$$

Дальнейшее вычисление спектра полностью повторяет результат расчёта спектра для осциллятора Ван дер Поля с аналогичным результатом:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{D}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{D}{2\nu_0^2}\right)^2}. \quad (26)$$

Контрольные вопросы

1. Как перейти от управляющего уравнения на матрицу плотности к стохастическому дифференциальному уравнению на средние значения операторов?
2. Какова ширина спектра, связанная с амплитудными флуктуациями лазера?
3. Какова ширина спектра, связанная с фазовыми флуктуациями лазера?
4. Запишите выражение для коэффициента фазовой диффузии.
5. Запишите закон Шавлова–Таунса для ширины спектра излучения лазера выше порога генерации.

Задачи

1. Найдите спектр осциллятора Ван дер Поля в режиме автоколебаний.
2. Найдите спектр лазера выше порога генерации.

Литература

1. *Gardiner C.W., Zoller P.* Quantum noise A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics. – Berlin: Springer, 2004. – 449 p.
2. *Carmichael H.J.* Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker–Planck equations. – Berlin: Springer, 1999. – 361 p.
3. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

Заключение

Итак, наш рассказ о квантовой оптике закончен. Настоящие лекции являются именно введением в современную квантовую оптику. Они помогают читателю не только составить представление о предмете исследований, но и достичь минимального теоретического уровня, позволяющего проводить самостоятельные исследования. Именно этим определялся выбор материала для лекций и цитируемой литературы.

Квантовая оптика представляет собой теорию взаимодействия квантованного излучения с квантованным веществом. Основными математическими образами этой теории являются осциллятор и двухуровневая система. Наглядность и простота этой теории, ее успех в объяснении экспериментов и огромная предсказательная сила связаны с нерелятивистской формулой, позволяющей избежать математических сложностей квантовой теории поля.

Облик современной квантовой оптики меняется очень быстро. Стремительное изменение ее «переднего края» исследований делает задачу учебного изложения квантовой оптики довольно трудной. В настоящее время это вполне развитая область исследований, тесно связанная методологически с квантовой электродинамикой и квантовой статистической физикой. Быстрое развитие экспериментальной техники позволило вплотную приступить к исследованию явлений, в которых первостепенна квантовая структура света. Важная роль квантовой оптики теперь понятна не только с фундаментальной точки зрения, но и с точки зрения приложений.

В лекциях рассматриваются проблемы квантовой оптики, которые являются фундаментальными и необходимыми будущим специалистам в этой области вне зависимости от их конкретной научной деятельности. Лекции отличаются по уровню сложности изложения. Отчасти это связано с их конкретной темой и содержанием, и, конечно, с личными научными пристрастиями авторов. Тем не менее мы надеемся, что лекции будут полезны широкому кругу студентов и аспирантов, только начинающих свою научную карьеру и стремящихся найти свой путь в науке.

Однако в силу ограниченности объема пособия после первоначального знакомства с предметом за пределами этих лекций остался целый ряд актуальных задач и вопросов квантовой оптики. Это сжатые, субпушковские состояния света, антигруппировка фотонов, процессы фотодетектирования и непрерывные и неразрушающие квантовые измерения. Для того чтобы изучить эти вопросы, следует обратиться к приведенной в тексте литературе. Но это уже совсем другая история!

Учебное издание

**Андианов Евгений Сергеевич
Виноградов Алексей Петрович
Пухов Александр Александрович**

**ЛЕКЦИИ
ПО КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ**

Редактор *H. E. Кобзева*. Корректор *O. П. Котова*

Компьютерная верстка *H. E. Кобзева*

Дизайн обложки *H. E. Кобзева*

Подписано в печать 03.04.2018. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 14,13.

Уч.-изд. л. 12,5. Тираж 150 экз. Заказ № 104.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

ISBN 978-5-7417-0664-0



9 785741 706640