ЛЕКЦИЯ 11.

ПОНЯТИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

§1. Определение конформного отображения в точке и в области. Основные свойства конформного отображения

Ранее мы показали (см. лекцию 2), что однозначная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеет производную $f'(z)$ в точке z тогда и только тогда, функция дифференцируема в вещественном смысле и выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

Напомним, что такую функцию называют аналитической в точке z.

Рассмотрим некоторые геометрические свойства аналитической функции $f(z)$ в малой окрестности точки z_0, считая $f'(z_0) \neq 0$. Пусть C – кривая, выходящая из точки z_0. На плоскости $w = u + iv$ ей соответствует кривая Γ, выходящая из точки $w_0 = f(z_0)$ (рис.1, рис. 2) . Пусть z – соседняя точка кривой C, $w = f(z)$ – соответствующая ей точка кривой Γ. При $z \to z_0$ будет

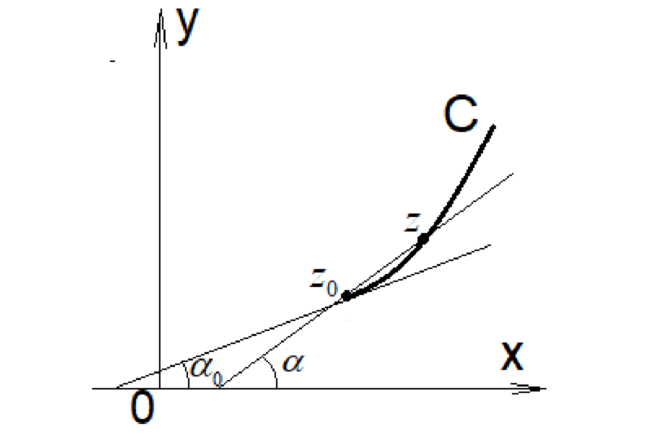

Рис.1

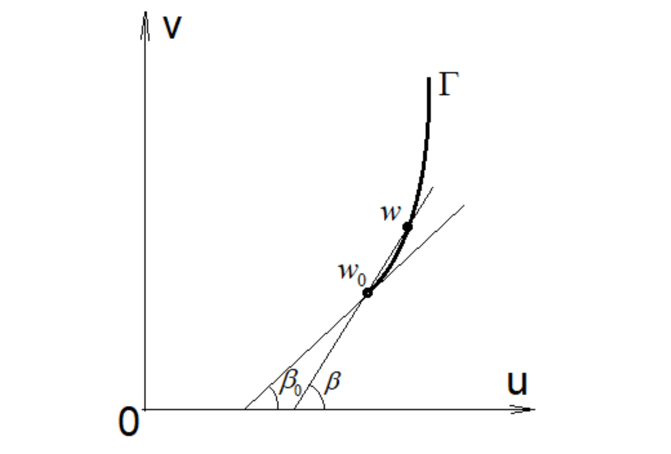

Рис.2

$w \to w_0$, тогда

$$\frac{w - w_0}{z - z_0} \to f'(z_0) \ \Rightarrow \ \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} \to |f'(z_0)| \tag{2}$$

Предельное соотношение (2) допускает следующую трактовку. Вспомним, что величины $|z - z_0|$ и $|w - w_0|$ являются хордами кривых C и Γ соответственно, и, в случае их малости, эти хорды называют линейными элементами кривых C и Γ в точках z_0 и w_0 соответственно. Тогда, предельное равенство (1) указывает на то, что отношение линейного элемента кривой Γ к линейному элементу кривой C одно и тоже, не зависит от вида кривых C и Γ и равно модулю производной функции $f(z)$ в точке z_0.

Итак, величина $|f'(z_0)|$ характеризует увеличение линейных элементов в точке z_0. Она называется *коэффициентом растяжения в точке* z_0.

Далее, поскольку производная $f'(z_0)$ является комплексным числом, то она имеет аргумент. Из предельного равенства (2) следует, что этот аргумент совпадает, с точностью до малых высокого порядка, с выражением

$$\arg f'(z_0) \approx \arg\frac{w-w_0}{z-z_0} = \arg(w-w_0) - \arg(z-z_0)$$

Но $\arg(w-w_0)=\beta$, $\arg(z-z_0)=\alpha$ (см. рис.1, рис. 2). Тогда, в пределе при $z \to z_0$ и $w \to w_0$ имеем $\alpha \to \alpha_0, \beta \to \beta_0$, где α_0, β_0 – углы наклона касательных к кривым C и Γ соответственно. В пределе получим

$$\arg f'(z_0) = \beta_0 - \alpha_0$$

Итак, $\arg f'(z_0)$ *равен углу, на который надо повернуть касательную к кривой* C *в точке* z_0, *чтобы получить касательную к кривой* Γ *в точке* w_0. В силу этого свойства $\arg f'(z_0)$ задает *вращение отображения в точке* z_0.

Отсюда следует, что угол φ пересечения двух кривых C_1 и C_2 в точке z_0 равен углу Φ пересечения кривых $\Gamma_1 = f(C_1)$ и $\Gamma_2 = f(C_2)$ в точке w_0 (см. рис. 3), т.е. $\Phi = \varphi$. Действительно, каждая из сторон угла φ направлена по касательной либо к кривой C_1, либо к кривой C_2. Поэтому две стороны угла поворачивается на один и тот же угол $(\beta_0 - \alpha_0)$ и совпадают, при отображении, задаваемом функцией $w = f(z)$, со сторонами угла Φ. Следовательно, $\Phi = \varphi$.

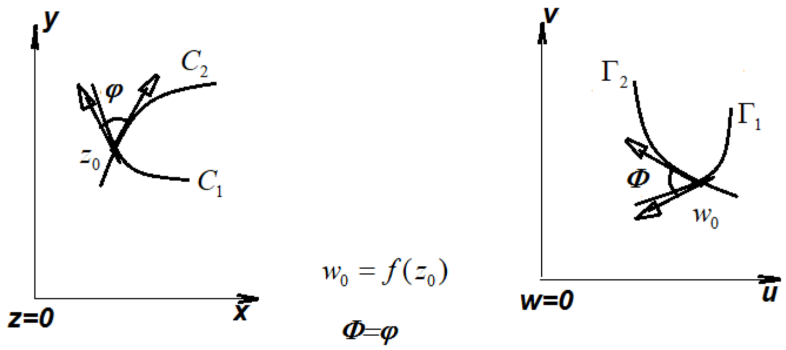

Рис. 3

Итак, *отображение*

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y), \tag{3}$$

задаваемое однозначной аналитической функцией $f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$, *сохраняет – в малой окрестности точки* z_0 *– углы пересечения кривых образа и прообраза и растягивает линейные элементы кривых с коэффициентом подобия* $k = |f'(z_0)|$. *Такие отображения называют конформными в окрестности точки* z_0.

В окрестности точки z_0 однозначная функция $f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$ будет взаимно однозначной. Действительно, разложим отображение (1) в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$u - u_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \cdots$$

$$v - v_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \cdots$$

Если пренебречь членами высшего порядка малости, то отображение (3) будет обратимым, если

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \neq 0$$

Так как функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической, мы можем производные по y, пользуясь условиями Коши-Римана (1), выразить через производные по x:

$$\Delta=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0^2=\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\right|^2=\left|f'(z_0)\right|^2\neq 0$$

Отсюда следует, что величины $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ однозначно выражаются через величины $(u-u_0)$, $(v-v_0)$, поэтому – в малой окрестности точки z_0 – определено обратное, однозначное отображение $z=g(w)$, аналитическое в малой окрестности точки z_0.

Это значит, что между малыми окрестностями точек z_0 и w_0 устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Распространим локальные свойства отображения $f(z)$ на всю односвязную область G комплексной плоскости z. Пусть D – образ G при отображении $f(z)$, т.е. $D=f(G)$.

Определение 1. *Отображение области G комплексной плоскости z на область D комплексной плоскости w, задаваемое непрерывной функцией $f(z)$, будем называть конформным в G, если это отображение во всех точках $z\in G$ обладает свойствами сохранения углов пересечения кривых образа и прообраза и постоянства растяжений.*

Очевидно, что аналитическая функция $f(z)$ такая, что $f'(z)\neq 0$ в каждой точке области *G* отображает *G* на *D* конформно. Поэтому $f(z)$ конформно в *G* в силу определения 1.

Если в области D введена некоторая ортогональная криволинейная система координат, то при конформном отображении эта система координат перейдет также в ортогональную систему.

Лемма. *Пусть функция $f(z)$ является однозначной аналитической функцией в области G и $f'(z)\neq 0$ в каждой точке $z\in G$. Тогда функция $f(z)$ производит конформное отображение области G на область D комплексной плоскости w.*

Доказательство следует из определения 1 и описанных выше свойств аналитической функции в окрестности точки z_0, когда $f'(z_0)\neq 0$.

Оказывается, что взаимно - однозначное аналитическое отображение области G комплексной плоскости z на область D комплексной плоскости w является определяющим свойством конформного отображения.

Теорема. *Для того, чтобы непрерывная функция $f(z)$ задавала конформное отображение области G на область D необходимо и достаточно, чтобы она была взаимно-однозначной аналитической функцией.*

Доказательство опускаем. Отметим только, что при доказательстве теоремы показывают, что из конформности следует взаимная однозначность и аналитичность функции, при этом $f'(z)\neq 0$ в любой точке $z\in G$. Тогда теорема следует из леммы.

§2. **Примеры конформных отображений**

I. Отображение посредством линейной функции

Рассмотрим линейную функцию $L(z)=\alpha z+\beta$, где α,β – комплексные константы. В действительных переменных это функция задает отображение $x,y\to u,v$ в виде

$$u=\alpha_1 x-\alpha_2 y+\beta_1$$
$$v=\alpha_2 x+\alpha_1 y+\beta_2$$

Здесь $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, $\beta=\beta_1+i\beta_2$

Очевидно, что $L'(z)=\alpha$, причем $L'(z)\neq 0$, если $\alpha\neq 0$. Поэтому $L(z)$ производит конформное отображение всей плоскости комплексного переменного z. При этом отображении касательные ко всем кривым плоскости z поворачиваются на *один и тот же угол*, равный $\operatorname{Arg}\alpha$, и растяжение во всех точках оказываются равным $|\alpha|$.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда $L(z) = z + \beta$, имеем сдвиг всей плоскости как целого на вектор β. Поворот отсутствует, растяжение отсутствует (коэффициент $k = |\alpha| = 1$).

Пусть $\alpha \neq 1$. То отображение $w = L(z)$ можно представить в виде $w - \gamma = \alpha(z - \gamma)$, где $\gamma - \alpha\gamma = \beta$. Отсюда следует, что γ есть неподвижная точка отображения, так как из равенства $z = \gamma$ следует равенство $w = \gamma$. Далее, каждый вектор $(z - \gamma)$, выходящий из точки γ, поворачивается на угол $\operatorname{Arg}\alpha$ и подвергается растяжению в $|\alpha|$ раз, превращаясь в вектор $(w - \gamma)$, выходящий из той же точки γ. Итак, отображение $L(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 1$ сводится к повороту всей плоскости как целого вокруг точки $\gamma = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ на угол $\operatorname{Arg}\alpha$ и к растяжению относительно этой точки в $|\alpha|$ раз.

II. Конформное отображение посредством показательной функции.

Из определения показательной функции имеем

$$w = e^z = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \quad (z = x + iy)$$

Здесь $|w| = e^x$, $\operatorname{Arg} w = y + 2k\pi$ $(y = \arg w,\ 0 \le y < 2\pi)$. Несложно видеть, что период этой функции есть $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$$

Исследуем отображение плоскости, задаваемое этой функцией. Заметим, что значение $w = 0$ не принимается этой функцией ни при каком z, т.к. $w = e^z > 0$ при любом z. Любой другой точке $w \neq 0$ соответствует z, удовлетворяющее равенству $w = e^z$. Действительно, рассматривая равенство $w = e^z$ как уравнение относительно z, получим

$$z \equiv \operatorname{Ln} w = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w = \ln|w| + i\left(\arg w + 2k\pi\right),\ k = 0, \pm1, \pm2\ldots \qquad (4)$$

Все эти точки – при фиксированном w – расположены на расстоянии 2π друг от друга на одной прямой $x = \ln|w|$, параллельной мнимой оси (см. левую часть рис. 5, где точки (4) обозначены крестиками). Этих точек бесконечно много, поэтому $\operatorname{Ln} w$ – многозначная функция.

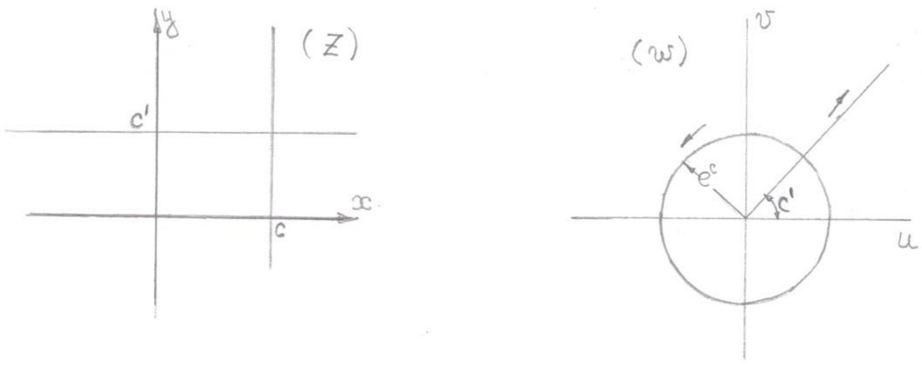

Рис. 4

Рассмотрим, во что отображается сетка декартовых координат точки z. Пусть $z = c + it$ – прямая, проходящая через точку $x = c$ параллельно мнимой оси y. Тогда $w = e^c(\cos t + i\sin t)$, т.е. изображающая точка будет находится на окружности с центром в начале координат и радиусом e^c. При $-\infty < t < +\infty$ точка z обегает прямую от $-\infty$ до $+\infty$, изображающая точка w обегает окружность бесконечно много раз.

Пусть $z = t + ic'$ -- прямая, параллельная действительной оси x и проходящая через точку $y = c'$ (рис.3). Тогда $w = e^t\left(\cos c' + i\sin c'\right)$. Точка w движется по прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью x угол c'. При $-\infty < t < +\infty$ точка w движется по лучу от $w = 0$ до $w = \infty$.

Итак, при отображении плоскости z посредством функции $w = e^z$ семейство прямых, параллельных мнимой оси, преобразуется в семейство окружностей, а семейство прямых, параллельных действительной оси, – в семейство прямолинейных лучей, выходящих из начала координат. Это значит, что декартовая сетка координат отображается в сетку полярных координат.

Опишем теперь отображение $w = e^z$ как конформное отображение. Это отображение должно быть – по теореме предыдущего параграфа – взаимно однозначным, поэтому рассмотрим его на области *G*, где обратное отображение

$$z = \mathrm{Ln}\, w = \ln|w| + i(\arg w + 2k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$$

является однозначным (прямое отображение $w = e^z$ уже однозначно). Область G должна содержать *одну* точку многозначной функции $\mathrm{Ln}\, w$. Этому условию удовлетворяет прямолинейная полоса шириной $h,\ 0 \le h < 2\pi$, параллельная действительной оси:

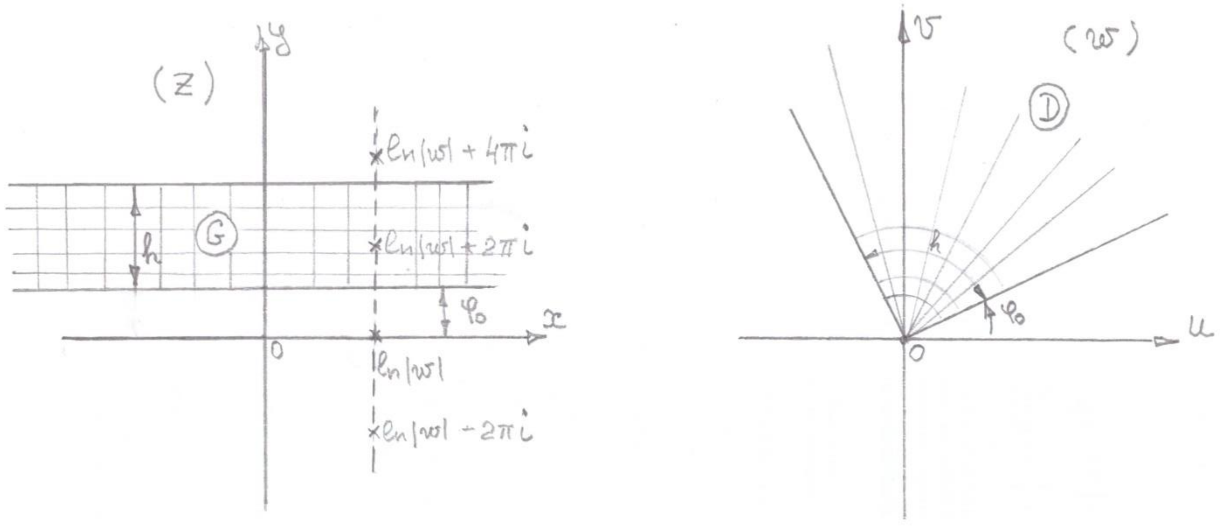

Рис. 5

Полоса *G* ограничена прямыми линиями $y = \varphi_0,\ y = \varphi_0 + h$. Образ полосы (область *D*) есть угол раствора h с вершиной в начале координат, ограниченный прямолинейными лучами $\arg w = \varphi_0,\ \arg w = \varphi_0 + h$. При этом соответствие между точками областей *G* и *D* будет взаимно однозначным, так как в рассматриваемой полосе *G* обратное отображение $\mathrm{Ln}\, w$ будет однозначным (полоса *G* содержит одно значение $\mathrm{Ln}\, w$).

Мы видим, *что показательная функция* $w = e^z$ *отображает полосу G шириной* h ($0 \le h < 2\pi$), *параллельную действительной оси, на угол раствора* h *с вершиной в начале координат конформно.*

При этом отображении сетка декартовых координат переходит в сетку полярных координат. Поэтому к показательной функции прибегают каждый раз, когда нужно конформно отобразить некоторую прямолинейную полосу на внутренность угла раствора.