Лекции по функциональному анализу

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Лектор: Иванов Сергей Валерьевич | Конспект составила: Настя "The" Прудникова

Примечание: если найдёте ошибки или опечатки, пишите в Telegram или ВК

"Любой математик должен знать две вещи: меру и норму."

Содержание

1 Лекция от 05.09.22: Алгебра множеств

Пусть $\Omega \neq \varnothing$ – некоторое пространство, а $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ – класс подмножеств.
Определение: $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ – *алгебра*, если

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Если множества $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B,\ A \cup B,\ A \backslash B \in \mathcal{A}$

Утверждение: Свойства 1), 2) эквивалентны свойствам 1), 2'), где 2') $A,\ B \in \mathcal{A} \implies A \cap B,\ \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$.
Доказательство:
$\Rightarrow$: очевидно.

$\Leftarrow$: $A \cup B = \Omega \backslash ((\Omega \backslash A) \cap (\Omega \backslash B))$
$A \backslash B = A \cap (\Omega \backslash B)$ □

Определение: $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ – σ- *алгебра*, если

1. $\mathcal{A}$ – алгебра
2. $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Утверждение: Если $\mathcal{A}$ – σ - алгебра, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Доказательство: $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (\Omega \backslash A_i)$ □

Примеры:

0. $\Omega \neq 0 \quad \mathcal{A}_0 = \{\varnothing, \Omega\},\ \mathcal{A}_1 = 2^{\Omega}$ (множество всех подмножеств Ω)– алгебры и сигма-алгебры
1. $\Omega = (0;\ 1] \quad \mathcal{A} = \{\varnothing, (0;\ 1], (0;\ \frac{1}{3}], (\frac{1}{3};\ 1]\}$ – алебра и сигма-алгебра
2. $\Omega = (0;\ 1] \quad \mathcal{A} = \{(a_1;\ b_1] \cup (a_2;\ b_2] \cup ... \cup (a_n;\ b_n] \mid 0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant b_n \leqslant 1\}$ – алгебра, но не сигма-алгебра: $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) = \bigcup_{i,\ j} A_i \bigcap B_j \quad (k;\ k] = \varnothing$
3. $\Omega = \mathbb{R}^n \quad \mathcal{A} =$\{конечные множества и их дополнения\} – алгебра, но не сигма-алгебра
4. $\Omega = \mathbb{R} \quad \mathcal{A} =$ \{не более чем счётные множества и их дополнения\} – алгебра и сигма-алгебра

Утверждение: $\mathcal{A}_{\alpha}$ – алгебры Ω, $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathbb{A}} \mathcal{A}_{\alpha}$ – алгебра; $\mathcal{A}_{\alpha}$ – сигма-алгебры Ω, $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathbb{A}} \mathcal{A}_{\alpha}$ – сигма-алгебра.
Доказательство:
1) $\Omega \in \bigcap\limits_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha}$ 2) $A,\ B \in \mathcal{A}_{\alpha} \implies A \cap B \in \mathcal{A}_{\alpha} \implies A \cap B \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{A}_{\alpha}$

$\forall\, \alpha\ A_i \in \mathcal{A}_{\alpha} \implies \forall\, \alpha\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\alpha} \implies \forall\, \alpha\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathbb{A}} \mathcal{A}_{\alpha}$. □

Определение: Пусть $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$, тогда $\alpha(\mathcal{F})$ – минимальная алгебра, порождённая $\mathcal{F}$, если

1. $\mathcal{F} \subset \alpha(\mathcal{F})$
2. $\alpha(\mathcal{F})$ – алгебра
3. $\mathcal{F} \subset \alpha',\ \alpha'$ – алгебра $\implies \alpha(\mathcal{F}) \subset \alpha'$

Определение: $\sigma(\mathcal{F})$ – минимальная сигма-алгебра, порождённая $\mathcal{F}$, если

1. $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$
2. $\sigma(\mathcal{F})$ – сигма-алгебра

3. Если $\sigma'(\mathcal{F})$ – это сигма-алгебра и $\mathcal{F} \subset \sigma'(\mathcal{F}) \implies \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma'(\mathcal{F})$

Утверждение: $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega} \implies \exists!\ \min \alpha(\mathcal{F}),\ \exists!\ \min \sigma(\mathcal{F})$

Доказательство:

$$\alpha(\mathcal{F}) = \cap \mathcal{A},\ \mathcal{A} \text{ – алгебра},\ \mathcal{F} \subset \mathcal{A}; \quad \alpha' \supset \alpha(\mathcal{F}) \implies \alpha' \text{ – алгебра},\ \alpha' \supset \mathcal{F} \implies \alpha' \subset \cap \mathcal{A}$$

Предположим, что β – другая минимальная алгебра, тогда

$$\beta \supset \alpha(\mathcal{F}) \implies \beta \cap \alpha(\mathcal{F}) = \alpha(\mathcal{F}),\ \alpha(\mathcal{F}) \text{ – единственная минимальная.} \qquad \square$$

Определение: *Борелевская сигма-алгебра* на $\mathbb{R}$ – это минимальная сигма-алгебра, порождённая системой открытых множеств.
[Обозначение: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$]
Примечание: Напомним, что открытое множество – это множество, каждая точка которого входит в него со своей окрестностью.

Утверждение: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(A)$, где A :

0. $\mathcal{A}_0 = \{$все открытые множества$\}$
1. $\mathcal{A}_1 = \{$все замкнутые множества$\}$
2. $\mathcal{A}_2 = \{$все интервалы $(a;\, b)\}$
3. $\mathcal{A}_3 = \{[a;\, b]\}$
4. $\mathcal{A}_4 = \{(a;\, b]\}$
5. $\mathcal{A}_5 = \{(-\infty;\, a]\}$
6. $\mathcal{A}_6 = \{(-\infty;\, a)\}$
7. $\mathcal{A}_7 = \{(a;\, b) \mid a,\, b \in \mathbb{Q}\}$

Доказательство:

$\mathcal{A}_0 \Rightarrow \mathcal{A}_1$: Заметим, что дополнение открытого множества – замкнутое множество. Тогда $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}_1)$.

$\mathcal{A}_0 \Rightarrow \mathcal{A}_2$: Интервал – это открытое множество, значит, что $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_0 \implies \sigma(\mathcal{A}_2) \subset \sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathcal{A}_3$: Аналогично предыдущему пункту (отрезок – замкнутое множество).

$\mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_4$: $(a;\, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a;\, b + \frac{1}{n}) \implies \mathcal{A}_4 \subset \sigma(\mathcal{A}_2) \implies \sigma(\mathcal{A}_4) \subset \sigma(\mathcal{A}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Можно также доказать возможность порождения борелевской алгебры полуинтервалами альтернативным образом с помощью операций дополнения/пересечения/объединения над отрезками/интервалами.

$\mathcal{A}_4 \Rightarrow \mathcal{A}_5$: $(a;\, b] = (-\infty;\, b] \setminus (-\infty;\, a] \implies (-\infty;\, a] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n;\, a] \implies \sigma(\mathcal{A}_5) \subset \sigma(\mathcal{A}_4) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_6$: Аналогично предыдущему доказательству устремляем a в $-\infty$.

$\mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_7$: $(a;\, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n;\, b_n),\ a_n,\, b_n \in \mathbb{Q} \quad \sigma(\mathcal{A}_7) \subset \sigma(\mathcal{A}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема: [*из семинара*] Если $f : \Omega \to \Xi,\ \mathcal{F} \in 2^{\Xi}$ – сигма-алгебра, то $\mathcal{G} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ – тоже сигма-алгебра.

Доказательство:
$f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha)$. Пусть $x \in f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha) \iff f(x) \in \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha \iff \forall \alpha\ f(x) \in A_\alpha \iff \forall \alpha\ x \in f^{-1}(A_\alpha) \iff x \in \bigcap\limits_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha)$. $\square$

Теорема: [*из семинара*] $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$.

Доказательство: Пусть $x \in f^{-1}(A \backslash B)$. Тогда

$$f(x) \in A \backslash B \implies \begin{cases} f(x) \in A, \\ f(x) \notin B; \end{cases} \implies \begin{cases} x \in f^{-1}(A), \\ x \notin f^{-1}(B); \end{cases} \implies x \in (f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)). \qquad \square$$

2 Лекция от 12.09.22: Мера

Определение: *Дизъюнктное объединение* $C = A \sqcup B$ – это такое объединение двух множеств, что $C = A \cup B,\ A \cap B = \varnothing$.

Определение: Пусть $\Omega \neq \varnothing,\ \mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$. Функция μ определена на алгебре $\mathcal{A}$ ($\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$) и называется *мерой*, если

1. $\forall A \in \mathcal{A} :\ \mu(A) \geqslant 0$
2. $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$ (аддитивность)

Определение: Мера μ называется *σ-аддитивной* или *счётно-аддитивной*, если $A_k \in \mathcal{A},\ \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A} \implies \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Свойства меры:

1. $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$
2. $\mu(\varnothing) = 0$ *Док-во:* $\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) \implies \mu(\varnothing) = 0$
3. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
4. $A \subset B \implies \mu(A) \leqslant \mu(B)$ *Док-во:* $B = A \sqcup (B \backslash A) \quad \mu(B) = \mu(B \backslash A) + \mu(A) \geqslant \mu(A)$
5. $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A} \implies \mu(A) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *Док-во:* $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in A \to (4) \to \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leqslant \mu(A)$
6. Если μ сигма-аддитивна, то $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

Определение: Мера является *конечной*, если $\mu(\Omega) < \infty$.

Определение: Мера является *нормированной*, если $\mu(\Omega) = 1$.

Определение: Сигма-аддитивная нормированная мера называется *вероятностью.*

Примеры:

1. $\Omega = (a, b] \quad \mathcal{A} = \{\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (a_k; b_k]\} \quad \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (a_k; b_k]) = \sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \implies$ счётно-аддитивная
2. $\Omega = \mathbb{N} \quad \mathcal{A} = \{$конечные множества и их дополнения$\}$
   $\mu\ \{$конечное множество$\} = 0, \quad \mu\ \{$бесконечное множество (доп. конечного)$\} = 1$
   $\mathbb{N} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \{k\} \qquad 1 = \mu(\mathbb{N}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\{k\}) = 0$ – противоречие $(1 \neq 0) \implies$ не счётно-аддитивная

Определение: Мера называется *непрерывной*, если $\forall A_n \in \mathcal{A} :\ A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$

Определение: Мера *непрерывна в нуле*, если $\forall A_n \in \mathcal{A} :\ A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$

Утверждение: Пусть μ – конечная мера, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. μ – σ-аддитивна
2. μ непрерывна
3. μ непрерывна в 0

Доказательство:
1 $\implies$ 2:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \qquad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad A_1 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1}) \sqcup A$$

$$\mu(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \backslash A_{n+1}) + \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \backslash A_{k+1}) + \mu(A)$$

$$\mu(A_k \backslash A_{k+1}) = \mu(A_k) - \mu(A_{k+1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\mu(A_k) - \mu(A_{k+1})) = \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_2) - \mu(A_3) + \ldots - \mu(A_{n+1}) = \mu(A_1) - \mu(A_{n+1})$$

$$\implies \mu(A_1) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1}) + \mu(A) \implies \mu(A_{n+1}) \to \mu(A) \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1}) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+1})$$

2 $\implies$ 3: очевидно.
3 $\implies$ 1:

$$B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \qquad \left\{ B_1 = B,\ B_2 = \bigsqcup_{n=2}^{\infty} A_n,\ \ldots\ B_k = \bigsqcup_{n=k}^{\infty} A_n \right\} \qquad B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ \ldots \implies \bigcap_{n=1}^{k-1} B_n \neq \varnothing$$

В силу непрерывности в 0: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{k-1} \mu(A_n) + \mu(B_k),\ k \to \infty$$

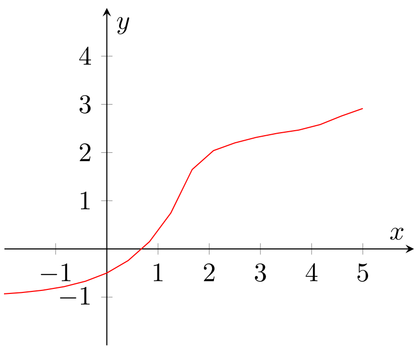
$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + 0 \implies \mu(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad \square$$

Примеры:

1) $\mathbb{R} \backslash [-n,\, n]$

2) Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. F – неубывающая
2. F непрерывна справа (т. е. $F(x_0) = \lim\limits_{x\to x_{0+}} F(x)$)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) < +\infty$ $(F(x) = F_+)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) > -\infty$ $(F(x) = F_-)$



В этом случае F – это функция распределения. Определим меру:

$$\mu_F\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k;\, b_k]\right) = \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k));\ a_k,\ b_k \text{ могут принимать значения } -\infty,\ +\infty \text{ соответственно.}$$

Докажем, что эта мера является сигма-аддитивной. Рассмотрим случай, где $(a;\, b] = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k;\, b_k]$, а a и b конечны. По свойству меры $\mu(a;\, b] \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(a_k;\, b_k]$. Теперь докажем, что $\mu(a,\, b] \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(a_k;\, b_k]$.

1) Функция непрерывна справа $\implies 0 \leqslant F(c) - F(a) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\forall\, k\ \exists\, d_k:\ 0 \leqslant F(d_k) - F(b_k) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

2) *Лемма о конечном покрытии*: из всякой бесконечной системы интервалов, покрывающей отрезок числовой прямой, можно выбрать конечную подсистему, также покрывающую этот отрезок. Тогда $[c;\, b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (a_k;\, d_k)$.

$$\mu(c;\, b] \leqslant \mu(a;\, b] + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(в силу свойства 1)}; \quad \mu(c;\, b] = F(b) - F(c),\ \mu(a;\, b] = F(b) - F(a) (c;\, b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k;\, d_k]$$

$$\mu(a;\, b] \leqslant \mu(c;\, b] + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\mu(a_k;\, d_k] + \frac{\varepsilon}{2}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(a_k;\, d_k]) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(a_k;\, b_k] + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) + \frac{\varepsilon}{2} =$$

Здесь $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ – это геометрическая прогрессия. Суммируем и получаем $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(a_k;\, b_k]) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \mu(a;\, b] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(a_k;\, b_k] \implies \mu(a;\, b] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(a_k;\, b_k]$$

Следует дополнительно разобрать случай, где одна из точек устремлена в бесконечность.

2.1 Лебегово продолжение меры

Определение: Пусть A – произвольное множество ($A \subset \Omega$). *Внешней мерой* множества A является

$$\mu^*(A) := \inf_{A \subset \bigcup\limits_k A_k} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, внешняя мера множества – это инфинум объединения его покрытий.
Если $A \in \mathcal{A}$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Замечание 1: Внешняя мера может не являться мерой.

Замечание 2: Внешняя мера есть у любого множества.

Определение: Множество называется *измеримым* относительно меры μ, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A} : \mu^*(A \bigtriangleup A_\varepsilon) < \varepsilon$, где $\bigtriangleup$ – симметрическая разность ($A \bigtriangleup B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$).

Теорема: Пусть μ – σ-аддитивная мера. Тогда

1. $\mathcal{L}_\mu(\Omega) = \{$измеримые множества относительно $\mu\}$ – σ-алгебра
2. μ^* – мера на $\mathcal{L}_\mu(\Omega)$
3. μ^* – единственная мера на $\mathcal{L}_\mu(\Omega)$: $\forall\, A \in \mathcal{A} \quad \mu^*(A) = \mu(A) \quad$ (μ^* – *продолжение меры*)

Доказательство:

Определение: Продолжение меры

$$\mu_F\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k;\, b_k]\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(F(b_k) - F(a_k)\right)$$

называется *мерой Лебега-Стилтьеса*, если F – монотонная неубывающая функция на $\mathbb{R}$.

Определение: Пусть $\Omega_N = (-N,\, N]^n \subset \mathbb{R}^n$ и известна мера:

$$\mu((a_1;\, b_1] \times (a_2;\, b_2] \times ... \times (a_n;\, b_n]) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

Заметим, что на ограниченном множестве эта мера является мерой Лебега-Стилтьеса, поскольку порождающая её F тоже ограничена.
λ_n продолжим на систему измеримых множеств $\mathcal{L}_{\lambda_n}((-N;\, N])$. Полученная мера называется *мерой Лебега* (λ_n^*) на множестве $(-N;\, N]^n$. Меру неограниченного множества определим таким образом:

$$\lambda_n(A) = \lim_{n\to\infty}\lambda_n(A \cap (-N;\, N]^n)$$

Полученная мера сохраняет свойство сигма-аддитивности, но теряет свойство непрерывности (в силу неограниченности).
Примечание: Свойства меры Л-С на прямой будут верны и для меры Лебега некоторого ограниченного подмножества прямой.

[*Из семинара*] Вот так считается мера Лебега-Стилтьеса на $\mathbb{R}$ с функцией Хевисайда в дифференциале:

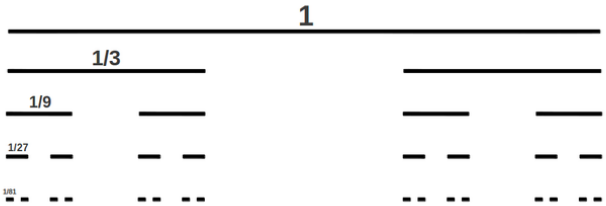
$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\, d(b\,\chi(t-a)) = f(a) \times b, \qquad \chi(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0, \\ 1,\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

3 Лекция от 19.09.22: Измеримые множества и функции

Определение: [из предыдущей лекции] Множество называется *измеримым* относительно меры μ, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A} : \mu^*(A \vartriangle A_\varepsilon) < \varepsilon$, где $\vartriangle$ – симметрическая разность ($A \vartriangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$).

3.1 Канторово множество

Определим канторово множество $C = [0;\, 1] \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}} A_{nk}$, где A_{nk} – интервалы. Это множество замкнутое, у него нет внутренних точек (т.е. точек со своей окрестностью). Проще говоря, на каждом шаге мы "выкидываем" среднюю треть интервала таким образом, что оставшиеся отрезки тоже являются интервалами.



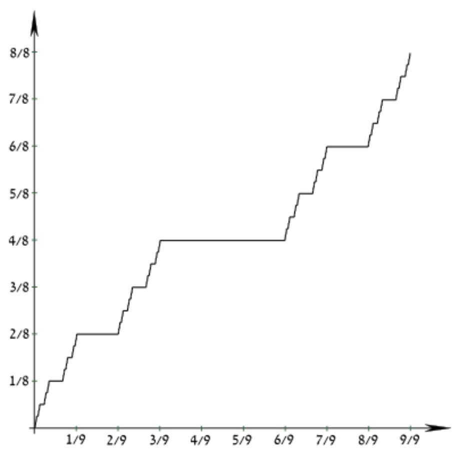
Здесь и далее меру Лебега на прямой обозначим как $\lambda(X)$.

$$\lambda(C) = \lambda[0;\, 1] - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda(A_{nk}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = 0 \qquad \lambda(A_{nk}) = \frac{1}{3^n}$$

$\frac{1}{3} \to 0,1$ в троичной системе. Заметим, что в этой системе канторово множество можно записать без единиц, так как $0,1_3 = 0,0(2)_3$. Это значит, что любое число можно записать как последовательность нулей и двоек. Если мы заменим двойки на единицы, получим множество из последовательностей вида 01101..., что даёт нам определить мощность этого множества: это континуум. Таким образом, все подмножества канторового множества измеримы и имеют мощность $\mathfrak{c}$ (континуум).

3.1.1 Канторова лестница

ФАН факт: её ещё называют дьявольской лестницей.



Запишем функцию канторовой лестницы $\widetilde{C}(x) = \frac{2k-1}{2^n},\ x \in A_{nk};\ C(x) = \inf\limits_{\widetilde{x} \in A_{nk} \,|\, x \leqslant \widetilde{x}} \widetilde{C}(x)$.

Доопределим функцию слева нулём, а справа единицей. Теперь можно рассмотреть $\mu_c((a;\, b]) = c(b) - c(a)$. $\mu_c\{a\} = 0,\ \ \mu_c(C) = 1,\ \ \mu_c([0;\, 1]) = 1 \to \mu_c(\bigsqcup\limits_{n,k} A_{nk}) = \mu_c([0;\, 1] \backslash C) = 0$.

Пример (неизмеримого множества)**:** Возьмём за основу некоторую окружность S. Пусть $\beta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ –

произвольное иррациональное число. Введём следующее отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $\exists\, k \in \mathbb{Z}: \ x = y + 2\pi\beta k \pmod{2\pi}$. В этом случае можно говорить, что одна точка переходит в другую с помощью целого числа поворотов на угол $\pi\beta$. Теперь можно разбить это множество на классы эквивалентности: $S = \bigsqcup\limits_{\alpha \in \mathbb{A}} A_\alpha$.

Соберём в B_0 множества A_k. Положим B_k – поворот B_0 на угол $2\pi\beta k$. Тогда $S = \bigsqcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$. Пусть $x \in S \implies x \in A_\alpha \implies \exists y \in B_0 : \ x = y + 2\pi\beta k \implies x \in B_k$.
Предположим, что существуют такие номера $k \neq l$, что $x \in B_k \cap B_l$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&x = y_1 + 2\pi\beta k\\
&x = y_2 + 2\pi\beta l\\
&y_1 + 2\pi\beta k = y_2 + 2\pi\beta l \qquad y_1 = y_2 + 2\pi\beta(l-k)\\
&y_1,\, y_2 \in B_0,\ y_1 \sim y_2 \implies l = k
\end{aligned}
$$

Значит, предположение неверно, и попасть из одной точки в другую возможно единственным образом.

Аксиома: Если $\exists\, \lambda(B_0)$, то $\lambda(B_0) = \lambda(B_k) = d \implies 2\pi = \lambda(S) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} d \implies B_0$ неизмеримо.

Если мы возьмём набор множеств $...\, B_{-2},\ B_{-1},\ B_0,\ B_1,\ B_2,\ ...$ и распределим их в два других множества $C_1 :=\ ...\ B_{-2},\ B_{-0},\ B_2,\ B_4,\ ...$ и $C_2 :=\ ...\ B_{-3},\ B_{-1},\ B_1,\ B_3,\ ...$, то мы получим такие же наборы, что и исходный.

3.2 Измеримые функции

Пусть у нас имеются измеримые пространства $(\Omega,\, \mathcal{F}),\ (\Xi,\, \mathcal{G})$, где Ω, Ξ – множества, а $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ – σ-алгебры подмножеств этих множеств.

Определение: Функция $f: \ \Omega \to \Xi$ называется $(\mathcal{F},\, \mathcal{G})$-*измеримой*, если $\forall\, A \in \mathcal{G}: \ f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Определение: $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ – *измеримая борелевская функция.*

Определение: $(\mathcal{L}_\mu(\mathbb{R}),\, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ – *измеримая (по Лебегу) функция.*

Утверждение: Пусть даны пространства $(\Omega_1,\, \mathcal{F}_1),\ (\Omega_2,\, \mathcal{F}_2),\ (\Omega_3,\, \mathcal{F}_3)$ и заданные на них функции f- – $(\mathcal{F}_1,\, \mathcal{F}_2)$-измеримая $(f : \ \Omega_1 \to \Omega_2)$, g – $(\mathcal{F}_2,\, \mathcal{F}_3)$-измеримая $(g : \ \Omega_2 \to \Omega_3)$. Тогда их композиция $g \circ f$ $(\mathcal{F}_1,\, \mathcal{F}_3)$-измерима.

Доказательство: Напомним, что $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
$\forall\, A \in \mathcal{F}_3 : \ (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \ \in \mathcal{F}_1\ (g^{-1}(A) \in \mathcal{F}_2) \implies$ отображение измеримо. □

Следствие: Если f измерима (по Лебегу), g борелевская, то их композиция $g \circ f$ измерима.

Пример: Пусть $A \in \mathcal{L}_\mu(\Omega)$. Введём индикаторную функцию

$$
I_A(X) = \begin{cases} 1, \ x \in A, \\ 0, \ x \notin A. \end{cases}
$$

Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$
I_A^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & 0,\, 1 \in B, \\ A, & 0 \notin B,\, 1 \in B, \\ \Omega \backslash A, & 0 \in B,\, 1 \notin B, \\ \varnothing, & 0,\, 1 \notin B. \end{cases}
$$

Теорема *(критерий измеримости)***:**

$(\Omega,\, \mathcal{F}),\ (\Xi,\, \mathcal{G})$: $\mathcal{G} = \sigma(\mathscr{C}),\ f$ – $(\mathcal{F},\, \mathcal{G})$-измеримая $\iff \forall\, C \in \mathscr{C}: \ f^{-1}(C) \in \mathcal{F}$.

Доказательство:

$\Rightarrow$: очевидно.

$\Leftarrow$: Положим $\mathscr{S} = \{A \in 2^{\Xi} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$; $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$. Докажем, что $\mathscr{S}$ – это сигма-алгебра.

Пусть $A_1, A_2, ... \in \mathscr{S} \implies f^{-1}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$ $(f^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}\ \forall n)$.

Проверим, является ли $\mathscr{S}$ алгеброй:

1) $f^{-1}(\Xi) = \Omega \in \mathcal{F}$

2) $f^{-1}(A_1 \backslash A_2) = f^{-1}(A_1) \backslash f^{-1}(A_2) \in \mathcal{F}$.

$\implies \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{S}$; f – измеримая функция. □

Следствия:

1. f измерима (по Лебегу) $\iff \forall c \in \mathbb{R}:\ \{t \mid f(t) \leqslant c\} \in \mathcal{L}_\mu(\Omega)$.
2. f измерима (по Лебегу) $\iff \forall c \in \mathbb{R}:\ \{t \mid f(t) < c\} \in \mathcal{L}_\mu(\Omega)$.
3. f измерима (по Лебегу) $\iff \forall c \in \mathbb{R}:\ \{t \mid f(t) > c\} \in \mathcal{L}_\mu(\Omega)$.

Теорема: Все непрерывные функции являются борелевскими.

Доказательство: Положим $f : A \to B$ $(A \in \mathbb{R}^n,\ B \in \mathbb{R}^m)$, где f непрерывна и B является открытым множеством. Знаем, что прообраз открытого множества также открыт и что борелевская сигма-алгебра порождена открытым множеством. Тогда прообраз A борелев, следовательно, функция является борелевской. □

Утверждение: Пусть $f, g :\ \Omega \to \mathbb{R}$ – измеримые функции. Тогда функция

$\varphi = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$, $\varphi :\ \Omega \to \mathbb{R}^2$ будет измеримой в $(\mathcal{L}_\mu(\Omega),\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

Доказательство: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{(-\infty; x] \times (-\infty; y] \mid x, y \in \mathbb{R}\})$;

$\varphi^{-1}((-\infty; x] \times (-\infty; y]) = \{t \mid f(t) \leqslant x\} \cap \{t \mid g(t) \leqslant y\}$. Оба члена этого пересечения лежат в $\mathcal{L}_\mu(\Omega)$, тогда весь прообраз лежит в $\mathcal{L}_\mu(\Omega)$. Значит, функция φ измерима. □

Теорема: [*из семинара*] Пусть f – измеримая функция, $a, b \in \mathbb{R} \implies g(t) = af(t) + b$ измеримая.
Доказательство: Так как $g(t) = ax + b$ – непрерывная функция, она борелевская (из предыдущего утверждения). Тогда $g(f(t)) = af(t) + b$ – это борелевская функция, взятая от измеримой. В силу следствия такая функция будет измеримой. □

Теорема: [*из семинара*] Если есть две измеримых функции f, g и константы $a, b, c \in \mathbb{R}$, тогда $f + g$, $f - g$, $af + bg + c$, fg, f^2, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ измеримы. Также если $\forall t:\ g(t) \neq 0$, то f/g тоже измерима.

Доказательство: Докажем для суммы.

$$\{t \mid f(t) + g(t) < x\} = \{t \mid f(t) < x - g(t)\} = \{t \mid \exists c \in \mathbb{Q} :\ f(t) < c < x - g(t)\} =$$
$$= \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} \{t \mid f(t) < c < x - g(t)\} = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} (\{t \mid f(t) < c\} \bigcap \{t \mid g(t) < x - c\})$$

□

Теорема: Если f_n – измеримая функция, $f_n \to f(t)$, то f тоже измерима.

Доказательство: Докажем, что $\{t \mid f(t) \leqslant x\} = \{t \mid \forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N,\ n \in \mathbb{N}\ f_n(t) < x + \varepsilon\}$.
Возьмём $\varepsilon = 1/k,\ k \in \mathbb{N}$. Тогда с помощью преобразования кванторов получаем

$$\bigcap_k \bigcup_N \bigcap_{n > N} \{t \mid f_n(t) < x + \frac{1}{k}\} \implies f \text{ измерима.}$$ □

3.3 Сходимость и понятие эквивалентности функций

Определение: Если $\forall t \in \Omega :\ f_n(t) \to f(t)$, то f – *поточечный предел*.

Определение: Если $\sup\limits_{t \in \Omega} |f_n(t) - f(t)| \to 0$, то f – *равномерный предел* $(f_n \rightrightarrows f)$.

Определение: f_n сходится к f *почти всюду*, если $\mu\{\,t \mid \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) \neq f(t)\} = 0$ $(f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f)$.

Пример: $t \in [0;\, 1]$, мера Лебега

$$f_n(t) = t^n \quad h(t) = \begin{cases} 0, \ t < 1, \\ 1, \ t = 1; \end{cases} \quad \implies f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$$

Определение: f_n сходится к f *по мере*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \ \lim\limits_{n\to\infty} \mu\left\{ t \mid |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon \right\} = 0$ ($f_n \xrightarrow{\mu} f$).

Определение: f *эквивалентна* g, если $\mu\left\{t \mid f(t) \neq g(t)\right\} = 0 \quad (f \cong g)$.

Из предыдущего примера: $h(t) \cong 0$.

Примечание: Из сходимости почти всюду следует сходимость по мере (в ТВиМС: из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности).

3.4 Меры на прямой

1. Абсолютно непрерывные относительно меры Лебега
2. Дискретные меры ($\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\sqcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}\right), \ \mu\{a_n\} > 0$)
3. Сингулярные меры ($\exists A \neq 0 : \ \mu(\mathbb{R} \backslash A) = 0, \ \mu\{a\} = 0 \ \forall\, a \in \mathbb{R}, \ \lambda(A) = 0$)

Замечание: Любая мера может быть представлена в виде линейной комбинации вышеперечисленных мер.

Пример: Пусть ξ_k – случайные величины, распределённые по закону Бернулли с параметром $1/2$ ($\xi_k \sim Be(1/2)$). Тогда $F_\xi(t) = C(t)$, где $C(t)$ – канторово множество.

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\xi_n}{3^n}$$

4 Лекция от 26.09.22: Интеграл Лебега для простой функции

Пусть есть пространство $(\Omega,\,\mathcal{L}_\mu,\,\mu)$, где Ω – некоторое множество, а $\mathcal{L}_\mu$ и μ – его сигма-алгебра и мера соответственно.

Определение: Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – *простая функция*, если она измерима и принимает конечное либо счётное число значений.

Пусть $\Omega = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \quad f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n I_{A_n}(t)$, где A_n – измеримое множество $\forall\, n$, а I_{A_n} – индикатор,
$I_{A_n} = \begin{cases} 1, \ t \in A_n, \\ 0, \ t \notin A_n. \end{cases}$

Определение: *Интегралом Лебега* простой функции называется выражение

$$\int\limits_{\Omega} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n\,\mu(A_n),$$

если ряд сходится абсолютно.

Пример:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}; \end{cases} \quad \text{(функция Дирихле)} \int\limits_{[0;\,1]} D(x)\,dx = \ 1 \times \mu\,\{\mathbb{Q} \cap [0;\,1]\} + 0 \times \mu\{(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0;\,1]\} = 0$$

Теперь определим

$$\int\limits_{A} f\,d\mu = \int\limits_{\Omega} f I_A\,d\mu = \sum_{k} y_k\,\mu(A_k \cap A)$$

4.1 Свойства интеграла Лебега для простых функций

1) $\int\limits_{A} 1\,d\mu = \mu(A)$ *Док-во:* $0 \times \mu(\Omega\backslash A) + 1 \times \mu(A) = \mu(A)$

2) $\int\limits_{A} cf\,d\mu = c\int\limits_{A} f\,d\mu, \quad c \in \mathbb{R}$

3) Если $|f| \leqslant c$, то f интегрируема и $\int\limits_{\Omega} f\,d\mu \leqslant c\mu(\Omega)$

4) Если f, g интегрируемы, то $\int\limits_{\Omega} (f+g)\,d\mu = \int\limits_{\Omega} f\,d\mu + \int\limits_{\Omega} g\,d\mu$

Док-во:

$$\int\limits_{\Omega} f\,d\mu + \int\limits_{\Omega} g\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k\mu(A_k) + \sum_{n=1}^{\infty} z_n\mu(B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_k \cap B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap B_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (y_k + z_n)\mu(A_k \cap B_n) = \int\limits_{\Omega} (f+g)\,d\mu$$

5 Лекция от 03.10.22: Интеграл Лебега

Лемма: f – измеримая функция $\iff \exists f_n$ – измеримые функции такие, что $f_n \rightrightarrows f$
Доказательство:

$$\text{Положим } f_n(t) := \frac{k}{n} \quad \text{при } t \in \left[\frac{k}{n};\, \frac{k+1}{n}\right), \text{ тогда}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \leqslant \frac{1}{n} \text{ – условие равномерной сходимости выполнено при } n \to \infty$$

$$f_n^{-1}\left(\left\{\frac{k}{n}\right\}\right) = \left\{t \,|\, f(t) \in \left[\frac{k}{n};\, \frac{k+1}{n}\right)\right\}$$

□

Определение: Пусть f – измеримая функция ($f \in \mathcal{L}_\mu(\Omega)$), $f_n \rightrightarrows f,\ f_n$ – простые функции. Тогда

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu \text{ – интеграл Лебега для произвольной функции.}$$

1) Докажем, что предел всегда существует.
Покажем, что последовательность фундаментальна:

$$\int_\Omega f_n\, d\mu = \left|\int_\Omega f_n\, d\mu - \int_\Omega f_m\, d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f_n - f_m|^{(*)}\, d\mu \ \leqslant\ \sup_t |f_n(t) - f_m(t)|\, \mu(\Omega) \to 0$$

$(*)$ – Заметим, что в данном случае из определённости одного из интегралов следует определённость второго.
2) Теперь покажем, что предел не зависит от выбора последовательности.
Пусть $f_n \rightrightarrows f,\ g_n \rightrightarrows f$. Тогда рассмотрим последовательность $\{f_1,\, g_1,\, f_2,\, g_2,\, ...\}$, обозначим её члены как $\{h_1,\, h_2,\, h_3,\, h_4,\, ...\}$. Она фундаментальна $\implies$ последовательность сходится $\implies$ $\int h_n\, d\mu$ фундаментальна $\implies$

$$\int h_n\, d\mu \to I,\ \int f_n\, d\mu \to I,\ \int g_n\, d\mu \to I;\ I = \int_\Omega f\, d\mu \implies \text{не зависит от выбора последовательности.}$$

Определение:

$$\int_\mathbb{R} f(x)\, dF(x) = \int_\mathbb{R} f\, d\mu_F \text{ – интеграл Лебега-Стилтьеса.}$$

5.1 Свойства интеграла Лебега для произвольных функций

1. $$\int_\Omega cf\, d\mu = c\int_\Omega f\, d\mu \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

   Доказательство: Пусть $f_n \rightrightarrows f$, тогда $cf_n \rightrightarrows cf$.

   $$1)\ \int_\Omega cf_n\, d\mu \to \int_\Omega cf\, d\mu, \quad 2)\, c\int_\Omega f_n\, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} c\int_\Omega f\, d\mu \implies \int_\Omega cf\, d\mu = c\int_\Omega f\, d\mu$$

   □

2. $$\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu \quad \forall\, f,\, g \text{ - интегрируемых}$$

Доказательство: Пусть $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, тогда $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$.

$$1)\ \int\limits_\Omega (f_n + g_n)\,d\mu = \int\limits_\Omega f_n\,d\mu + \int\limits_\Omega g_n\,d\mu \to \int\limits_\Omega f\,d\mu + \int\limits_\Omega g\,d\mu$$

$$2)\ \int\limits_\Omega (f_n + g_n)\,d\mu \to \int\limits_\Omega (f+g)\,d\mu$$

$$\implies \int\limits_\Omega (f+g)\,d\mu = \int\limits_\Omega f\,d\mu + \int\limits_\Omega g\,d\mu$$

□

3.

$$\mu(A) = 0 \implies \int\limits_A f\,d\mu = 0$$

Доказательство: Пусть $f_n \rightrightarrows f$.

$$f_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n I_{A_n} \implies \int\limits_A f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A \cap A_n) =^{(A=0)}= 0$$ □

4. Пусть $|f| < g$, f и g измеримы, g интегрируема. Тогда f тоже интегрируема и

$$\left|\int\limits_\Omega f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_\Omega g\,d\mu$$

Доказательство: $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$. Очевидно, что можно сделать так, что $|f_n| \leqslant g_n$. Тогда

$$\begin{array}{ccc} \left|\int\limits_\Omega f_n\,d\mu\right| & \leqslant & \int\limits_\Omega g_n\,d\mu \\ \| & & \| \\ \sum\limits_n y_n \mu(A_n) & & \sum\limits_n z_n \mu(B_n) \end{array}$$

$$\implies \sum_n \sum_l y_n \mu(A_n \cap B_l) = \sum_n \sum_l z_l \mu(A_n \cap B_l)$$

Разложив в суммы имеющиеся интегралы, получаем

$$\int\limits_\Omega f_n\,d\mu \to \int\limits_\Omega f\,d\mu,\ \int\limits_\Omega g_n\,d\mu \to \int\limits_\Omega g\,d\mu \implies \left|\int\limits_\Omega f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_\Omega g\,d\mu$$ □

5. [Следствие из 4] Пусть $f \geqslant 0$ и f интегрируема, тогда

$$\int\limits_A f\,d\mu \geqslant 0$$

6. [Следствие из 4] Пусть $f \leqslant c$ и f интегрируема, тогда

$$\int\limits_A f\,d\mu \leqslant c\mu(A)$$

7. Пусть f – измеримая функция. Тогда f интегрируема $\iff$ $|f|$ интегрируема

Доказательство:

$\Leftarrow$: Очевидно.

$\Rightarrow$: $f_n = \sum_n y_n I_{A_n}$

$$\int\limits_{\Omega} f_n \, d\mu = \sum_{k(=n)} y_k \mu(A_k) \quad \text{сходится абсолютно.}$$

$$\sum_k |y_k| \mu(A_k) \xrightarrow{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} |f| \, d\mu \qquad \square$$

8. Неравенство Чебышёва:

$$\mu \{t \mid |f(t)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega} |f(t)| \, d\mu \quad \forall \varepsilon > 0$$

Доказательство:

$$\int\limits_{\Omega} |f(t)| \, d\mu \geqslant \int\limits_{\{t \mid |f(t)| \geqslant \varepsilon\}} |f(t)| \, d\mu \geqslant \varepsilon \mu \{t \mid |f(t)| \geqslant \varepsilon\} \qquad \square$$

9.

$$f \geqslant 0, \int\limits_{\Omega} f \, d\mu = 0 \implies f(t) = 0 \text{ почти всюду}$$

Доказательство:

$$\mu\{t \mid f(t) > 0\} = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ t \mid f(t) \geqslant \frac{1}{n} \right\} \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left\{ \exists n : \; f(t) \geqslant \frac{1}{n} \right\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} f \, d\mu = 0 \qquad \square$$

$$\{t \mid f(t) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ t \mid f(t) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

10.

$$\int\limits_{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f \, d\mu$$

Доказательство: 1) Докажем для простых. Пусть f – простая функция.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} y_k I_{B_k}$$

$$\int\limits_{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu \left(B_k \bigcap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_k y_k \sum_n \mu \left(B_k \bigcap A_n \right) = \sum_n \sum_k y_k \mu \left(B_k \bigcap A_n \right) = \sum_n \int\limits_{A_n} f \, d\mu$$

2) Теперь покажем, что это выполняется и для произвольных функций. Пусть f – некоторая произвольная функция, и есть последовательность простых f_m, которые равномерно к ней сходятся ($f_m \rightrightarrows f$). Оценим

$$\left| \int\limits_{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f \, d\mu \right| = \left| \int\limits_{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu - \int\limits_{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f_m \, d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{A_n} f_m \, d\mu - \int\limits_{A_n} f \, d\mu \right) \right| \leqslant$$

Заметим, что два средних слагаемых в сумме дают ноль.

$$\leqslant \overbrace{\int\limits_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} |f - f_m|\, d\mu}^{\leqslant \sup|f(t)-f_m(t)|} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_m} |f_m - f|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \underbrace{\sup_t |f(t) - f_m(t)|}_{\to 0} + \underbrace{\sup_t |f(t) - f_m(t)|}_{\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\mu(A_n)}^{\mu(\sqcup_{n=1}^{\infty} A_n)} \to 0 \qquad \square$$

Определение: Пусть $f \geqslant 0$ – интегрируемая функция, $\mathcal{V}(A)$ – сигма-аддитивная мера, заданная интегралом

$$\mathcal{V}(A) = \int\limits_A f\, d\mu$$

Говорят, что $\mathcal{V}$ *абсолютно непрерывна относительно* μ ($\mathcal{V} << \mu$), если из $\mu(A) = 0$ следует, что и $\mathcal{V}(A) = 0$.

Теорема Радона-Никодима

$$\text{Если } \mathcal{V} << \mu, \text{ то } \exists\, f \geqslant 0 : \ \mathcal{V}(A) = \int\limits_A f\, d\mu$$

Пример:

$$P\{x \in A\} = \int\limits_A f(x)\, dx \left(= \int\limits_A f\, d\mu, \ \ \mu - \text{мера Лебега}\right)$$

5.2 Некоторые теоремы без доказательств

Теорема Лебега о мажорируемой сходмости

Пусть $f_n \xrightarrow{\text{п.в}} f,\ f_n$ – измеримые функции, функция φ интегрируема, $|f_n| \leqslant \varphi \implies$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n\, d\mu = \int\limits_\Omega f\, d\mu$$

Теорема Леви

Пусть есть монотонная последовательность функций $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots$ и

$$\int\limits_\Omega f_n\, d\mu < K,\ K \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \exists\, f : \ f_n \xrightarrow{\text{п.в}} f \ \text{ и } \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n\, d\mu = \int\limits_\Omega f\, d\mu$$

Теорема Фату

$$\text{Пусть } f_n \geqslant 0,\ \int\limits_\Omega f_n\, d\mu \leqslant K,\ K \in \mathbb{R},\ f_n \xrightarrow{\text{п.в}} f \implies f \text{ интегрируема и } \int\limits_\Omega f\, d\mu \leqslant K$$

6 Лекция от 10.10.22: Интеграл Лебега. Произведение мер

6.1 Теоремы с интегралом Лебега

Теорема:

$$\text{Пусть есть } I_n := \int\limits_{[0;\,1]} \frac{|f(t)-f_n(t)|}{1+|f(t)-f_n(t)|}\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ тогда } f_n \xrightarrow{\lambda} f \text{ (сходимость по мере Лебега)}$$

Доказательство: Зафиксируем $\varepsilon > 0$:

$$I_n \geqslant \int\limits_{\{t\,|\,|f(t)-f_n(t)|\geqslant\varepsilon\}} \frac{|f(t)-f_n(t)|}{1+|f(t)-f_n(t)|}\,dt \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \geqslant \int\limits_{\{t\,|\,|f(t)-f_n(t)|\geqslant\varepsilon\}} dt = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\{t\,|\,|f(t)-f_n(t)|\geqslant\varepsilon\} \to 0 \qquad \square$$

Значит, можно задать сходимость с помощью сходимости по метрике ($\rho(f,\, f_n)$).

Определение: *Метрикой* (расстоянием) называют такую функцию $\rho(x,\, y)$, что

1. $\rho(x,\, y) \geqslant 0;\ \rho(x,\, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x,\, y) = \rho(y,\, x)\ \forall\, x,\, y$
3. $\rho(x,\, z) \leqslant \rho(x,\, y) + \rho(y,\, z)\ \forall\, x,\, y,\, z$

Определение: Пусть $\mu(\Omega) = \infty,\ \Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n,\ \mu(\Omega_n) < \infty,\ \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$ – *исчерпание* множества Ω.

$$\int\limits_{\Omega} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} f\,d\mu,$$

если предел существует, конечен и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности.

Теорема:

$$\text{Если } f \geqslant 0,\ F(x) = \int\limits_{(-\infty;\,x]} f(y)\,dy, \text{ то}$$

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx$$

Доказательство:

$$\mu_F(A) = \int\limits_{A} dF(x), \quad \mathcal{V}(A) = \int\limits_{A} f(x)\,dx$$

$$\mu_F((-\infty;\,x]) = F(x) - F(-\infty) = F(x), \quad \mathcal{V}_F((-\infty;\,x]) = \int\limits_{(-\infty;\,x]} f(y)\,dy = F(x)$$

$$\mu_F((a;\,b]) = F(b) - F(a) = \mathcal{V}((a;\,b])$$

Пусть $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n I_{A_n}$ (простая). Тогда

$$\begin{array}{l} I = \sum\limits_{n} y_n \mu_F(A_n) = \sum\limits_{n} y_n \int\limits_{A_n} f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x) I_{A_n}\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx \\ \qquad \| \\ \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,dF(x) \end{array}$$

Пусть теперь $g_n \rightrightarrows g$. Тогда

$$\begin{array}{l}\int\limits_{\mathbb{R}} g_n\, dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x) f(x)\, dx = I \\ \Big\downarrow \text{ по опр.} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} g\, dF(x)\end{array}$$

Рассмотрим два случая для g:

$$1)\ g \geqslant 0: \ gf \geqslant 0 \quad f(x)g_n(x) \xrightarrow{\text{п. в.}} f(x)g(x) \implies I \leqslant K,\ K \in \mathbb{R}$$

Применим теорему Фату $\to gf$ интегрируема. Начиная с некоторого номера n, имеем

$$|g_n(x)f(x)| \leqslant |g(x) + \varepsilon| f(x) \leqslant f(x)g(x) + \varepsilon f(x)$$

Оба слагаемых интегрируемы (первое в силу утверждения выше, второе в силу интегрируемости $f(x)$). Используем теорему Лебега

$$I \xrightarrow{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\, dx$$

Утверждение доказано для неотрицательных g. Рассмотрим другой случай.

$$2)\ g < 0: \ g(x) = g^+(x) - g^-(x), \text{ где}$$

$$\begin{cases} g^+(x) = \max\{g(x),\, 0\} \\ g^-(x) = -\min\{g(x),\, 0\} \end{cases}$$

□

Теорема: Пусть f интегрируема по Риману в собственном смысле

$$\exists\, I = \int\limits_a^b f(x)\, dx \implies \text{ существует интеграл Лебега } \int\limits_{[a;\, b]} f\, d\lambda = I = \int\limits_{[a;\, b]} f(x)\, dx$$

Доказательство: f интегрируема, значит, f ограничена. Разобьём функцию на 2^n частей, тогда

$$\overline{f_n}(x) = \sup_{x \in A_{nk}} f(x),$$

$$\underline{f_n}(x) = \inf_{x \in A_{nk}} f(x), \text{ где}$$

$$A_{nk} = \left[a + \frac{b-a}{2^n}(k-1);\, a + \frac{b-a}{2^n}k\right), \quad x \in A_{nk}$$

$$\int\limits_{[a;\, b]} \overline{f_n}\, d\lambda = \sum_{k=1}^{2^n} \overline{f_n}\left(a + \frac{b-a}{2^n}(k-1)\right) \frac{b-a}{2^n} = \overline{\mathcal{I}_n}(f)$$

$$\int\limits_{[a;\, b]} \underline{f_n}\, d\lambda = \underline{\mathcal{I}_n}(f)$$

Здесь $\overline{\mathcal{I}_n}(f)$ и $\underline{\mathcal{I}_n}(f)$ – это верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно. Отметим сходимость следующих последовательностей

$$\overline{f_n}(x) \downarrow \overline{f}(x), \qquad \underline{f_n}(x) \uparrow \underline{f}(x),$$

причём $\overline{f} \geqslant \underline{f}$. Тогда

$$\int\limits_{[a;\,b]} (\overline{f_n} - \underline{f_n})\, d\lambda \xrightarrow[\text{Лебега}]{\text{по теореме}} \int\limits_{[a;\,b]} (\overline{f} - \underline{f})\, d\lambda$$

$$\|$$

$$\overline{\mathcal{I}_n}(f) - \underline{\mathcal{I}_n}(f) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{[a;\,b]} (\overline{f} - \underline{f})\, d\lambda = 0 \Longrightarrow \text{по свойству (9): } \overline{f} = \underline{f} \text{ почти всюду.}$$

Знаем, что $f(x) \in \big[\underline{f}(x);\, \overline{f}(x)\big]$. Тогда почти всюду $f(x)$ равна $\overline{f}(x)$ ($\underline{f}(x)$), значит,

$$\int\limits_{[a;\,b]} f\, d\lambda = \int\limits_{[a;\,b]} \overline{f}\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a;\,b]} \overline{f_n}\, d\lambda = I \qquad \square$$

6.2 Произведение мер

Пусть есть два пространства: $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mu)$ и $(\Xi,\, \mathcal{G},\, \mathcal{V})$, где $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ – сигма-алгебры, а μ, $\mathcal{V}$ – меры.

Определение: *Произведением* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ называется минимальная сигма-алгебра, порождённая измеримыми прямоугольниками.

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathcal{F},\, B \in \mathcal{G}\})$$

– это измеримое пространство, меру на котором зададим следующим образом:

$$(\mu \otimes \mathcal{V})(A \times B) = \mu(A) \times \mathcal{V}(B) \qquad \forall\, A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}$$

Заметим, что если обе меры сигма-аддитивны, то их произведение также будет сигма-аддитивным.

Теорема Фубини

Пусть f измерима относительно $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ и интегрируема по $\mu \otimes \mathcal{V}$, тогда

$$\int\limits_{\Omega\times\Xi} f\, d(\mu \otimes \mathcal{V}) = \int\limits_{\Omega} \mu(dx) \int\limits_{\Xi} f(x,\, y)\mathcal{V}(dy) = \int\limits_{\Xi} \mathcal{V}(dy) \int\limits_{\Omega} f(x,\, y)\mu(dx)$$

Теорема Тонелли

Если f измерима относительно $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ и существует интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \mu(dx) \int\limits_{\Xi} f(x,\, y)\mathcal{V}(dy) < \infty, \text{ то теорема Фубини применима.}$$

6.3 Об использовании теории меры в теории вероятностей

Пусть есть вероятностное пространство $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$.

1) ξ – случайная величина (измеримая функция).

$$\mu(A) = P\{\xi \in A\} = P\{\omega \mid \xi(\omega) \in A\} = P\{\xi^{-1}(A)\} = \int\limits_{\xi^{-1}(A)} dP \overset{\infty}{\cong} \int\limits_{A} dF_\xi(x) = \mathcal{V}(A)$$

Возьмём $A = (-\infty;\, x]$:

$$\mu(A) = \int\limits_{\{\omega \mid \xi(\omega) \leqslant x\}} dP = P\{\xi \leqslant x\} = F_\xi(x) = \int\limits_{(-\infty;\, x]} dF_\xi(y)$$

2) ξ – случайная величина, $M\xi = \int\limits_{\Omega} \xi \, dP$

$$M[\varphi(\xi)] = \int\limits_{\Omega} \varphi(\xi) \, dP$$

Пусть φ – простая функция, $\varphi = \sum\limits_n y_n I_{A_n}$

$$M[\varphi(\xi)] = \sum_n y_n \int\limits_{\xi^{-1}(A_n)} dP = \sum_n y_n P(\xi^{-1}(A_n)) = \sum_n y_n \int\limits_{A_n} dF(x) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x) \, dF(x)$$

Пусть $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$

$$\begin{array}{l} M[\varphi_n(\xi)] \to \int\limits_{\Omega} \varphi(\xi) \, dP \\ \quad \| \\ \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) \, dF(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dF(x) \end{array}$$

Для непрерывных:
Если задана плотность f, то

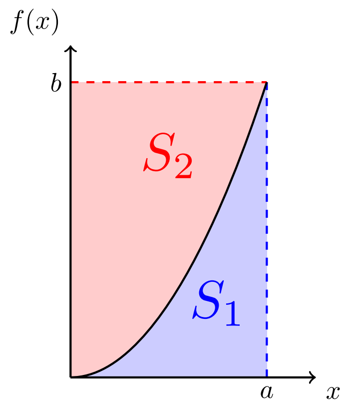
$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) \, dx \qquad M\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x f(x) \, dF(x)$$

6.4 Некоторые неравенства

Неравенство Юнга

Пусть $a, b \geqslant 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ p, q > 1 : \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \implies ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

Доказательство:



Возьмём функцию $f(x) = y = x^{p-1},\ p > 1$.

$$S_1 = \int\limits_0^a x^{p-1} \, dx = \frac{a^p}{p}$$

Найдём обратную функцию:

$$y^{\frac{1}{p-1}} = x \implies \varphi(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{1}{p(1-\frac{1}{p})}} = y^{\frac{q}{p}} = y^{q(1-\frac{1}{q})} = y^{q-1}$$

$$S_2 = \int\limits_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{b^q}{q}$$

$$ab \leqslant S_1 + S_2 = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \square$$

Неравенство Гёльдера

Пусть $p,\, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\implies \int\limits_\Omega |fg|\, d\mu \leqslant \left(\int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}$$

Доказательство:

$$\frac{|f(t)| \times |g(t)|}{\left(\int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}} = \frac{|f(t)|\, |g(t)|}{c_1\, c_2} \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p c_1^p} + \frac{|g(t)|^q}{q c_2^q}$$

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{p}\, |f(t)|^p\, c_1^{1-p}\, c_2 + \frac{1}{q}\, |g(t)|^q\, c_1\, c_2^{1-q}$$

Интегрируем:

$$\int\limits_\Omega |fg|\, d\mu \leqslant \frac{1}{p}\, c_1^{1-p}\, c_2 \int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu + \frac{1}{q}\, c_1\, c_2^{1-q} \int\limits_\Omega |g|^q\, d\mu = \frac{1}{p} c_1 c_2 + \frac{1}{q} c_1 c_2 = c_1 c_2$$

$c_1 c_2$ – это правая часть неравенства. $\square$

Неравенство Минковского

Пусть $p,\, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\left(\int\limits_\Omega |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_\Omega |g|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

Доказательство:

$$\int\limits_\Omega |f+g|^p\, d\mu = \int\limits_\Omega |f|\, |f+g|^{p-1}\, d\mu + \int\limits_\Omega |g|\, |f+g|^{p-1}\, d\mu \leqslant \text{(применяем неравенство Гёльдера)}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega |f+g|^{q(p-1)}\, d\mu\right)^{1/q} + \left(\int\limits_\Omega |g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega |f+g|^{q(p-1)}\, d\mu\right)^{1/q}$$

Поделим обе части неравенства на $\left(\int\limits_\Omega |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/q}$:

$$\left(\int\limits_\Omega |f+g|^p\, d\mu\right)^{1-1/q\,=\,1/p} \leqslant \left(\int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_\Omega |g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \qquad \square$$

7 Лекция от 17.10.22: Нормированные пространства. Открытые и замкнутые множества

7.1 Нормированные пространства

Определение: Пусть $\mathscr{L}$ – линейное пространство. Функция $||\cdot|| : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если:

1. $||x|| \geqslant 0 \;\; \forall x \in \mathscr{L}$, при этом $||x|| = 0 \iff x = 0$ – аксиома невырожденности (здесь $x = 0$ означает, что вектор x нулевой)

2. $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x|| \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \, \forall x \in \mathscr{L}$ – аксиома положительной однородности

3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \;\; \forall x, \, y \in \mathscr{L}$

Замечание: В нормированном пространстве можно ввести метрику $\rho(x, y) = ||x - y||$

Примеры:

1. $\mathbb{R}^n_p = \{x = (x_1, \dots x_n) \,|\, x_k \in \mathbb{R}\}, \; p \geqslant 1$ – пространство векторов $\qquad ||x|| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$

   Например, евклидова норма при $p = 2$ в $\mathbb{R}^n$ вычисляется привычным образом: $||x|| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$

2. $\mathbb{R}^n_\infty \quad ||x|| = \max\limits_{k=1,\,n} |x_k|$

3. $l_p, \; p \geqslant 1$ – пространство суммируемых последовательностей

   $l_p = \left\{x = (x_1, \, x_2, \, \dots) \,\Big|\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\} \qquad ||x|| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$

4. $l_\infty = \{x = (x_1, \, x_2, \, \dots) \,|\, \sup\limits_k |x_k| < \infty\} \qquad ||x|| = \sup\limits_k |x_k|$

5. $C^0 = C[a, \, b]$ – пространство непрерывных функций $\qquad ||x|| = \max\limits_{t \in [a;\, b]} |x(t)|$

6. $C^k[a, \, b]$ – пространство k раз дифференцируемых непрерывных функций

   $||x|| = \max\limits_{t \in [a;\, b]} |x(t)| + \sum\limits_{l=1}^{k} \max\limits_{t \in [a;\, b]} |x^{(l)}(t)|$

7. $L^p_\mu(\Omega)$ – пространство классов эквивалентных функций, суммируемых в степени p на Ω по мере μ

   $$||x|| = \left(\int\limits_\Omega |x|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

8. $L^p[a, \, b]$ – эквивалентные функции, интегрируемые по Лебегу на $[a; \, b]$

   $$||x + y|| = \left(\int\limits_\Omega |x + y|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant ||x|| + ||y||$$

   Элементы этого множества – это классы эквивалентных функций, но интеграл не меняется от выбора какой-либо из них.

7.2 Открытые и замкнутые множества

Определение: *Открытым шаром* в метрическом (в нормированном) пространстве $(X,\, \rho)$ называют множество

$$O_R(x) = \{y \in X \mid \rho(x,\, y) < R\} \qquad (||x - y|| < R)$$

Определение: *Замкнутым шаром* в метрическом (в нормированном) пространстве $(X,\, \rho)$ называют множество

$$B_R(x) = \{y \in X \mid \rho(x,\, y) \leqslant R\} \qquad (||x - y|| \leqslant R)$$

Пусть теперь $A \subset X$.

Определение: x – это *внутренняя точка* A, если $\exists R > 0 :\ O_R(x) \subset A$.

Определение: x – это *предельная точка* A, если $\forall\, R > 0 :\ A \cap O_R(x)$ бесконечно.

Определение: x – это *точка прикосновения* A, если $\forall\, R > 0 :\ A \cap O_R(x) \neq \varnothing$.

Определение: x – это *изолированная точка* A, если $x \in A$ и $\exists R > 0 :\ A \cap (O_R(x) \backslash \{x\}) = \varnothing$.

Определение: *Внутренностью* множества A называют множество его внутренних точек ($int\, A$).

Определение: *Открытое множество* – это множество, каждая точка которого входит со своей окрестностью (т.е. при открытом A: $A = int\, A$).

Определение: *Замкнутое множество* – это дополнение открытого множества.

Определение: *Замыкание множества* A – это $\overline{A} = A \cup \{$предельные точки $A\}$.

Утверждение: Множество A замкнуто $\iff$ $A = \overline{A}$

Доказательство:

- $\Rightarrow$: $X \backslash A$ открытое $\implies$ $\forall\, y \in (X \backslash A)\ \exists\, R :\ O_R(y) \subset X \backslash A$ $\implies$ y не является предельной точкой $\implies \overline{A} = A$
- $\Leftarrow$: Пусть $A = \overline{A},\ y \in X \backslash A,\ y$ – не предельная точка. Тогда $\exists\, R :\ O_R(y) \cap A = \{y_1,\, y_1,\, \ldots\, y_n\}$ – конечные. $\widetilde{R} = \min\limits_k \{\rho(y,\, y_k)\}$

  $O_{\widetilde{R}}(y) \cap A = \varnothing \implies O_{\widetilde{R}}(y) \subset X \backslash A \implies X \backslash A$ открытое $\implies A$ замкнуто. $\square$

Упражнение: Доказать, что $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Определение: Последовательность *сходится к* x ($x_n \to x$) в метрическом пространстве, если $\rho(x_n,\, x) \to 0,\ n \to \infty$ ($||x_n - x|| \to 0$ в нормированном пространстве).

Замечание 1: x – точка прикосновения $A \iff \exists\, x_n \in A :\ x_n \to x$.

Замечание 2: x – предельная точка $\iff \exists$ различные $x_n \in A :\ x_n \to x$.

Определение: Последовательность x_n является *фундаментальной*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, N \in \mathbb{N} :\ \forall\, n,\, m > N :$ $\rho(x_n,\, x_m) < \varepsilon \quad (\rho(x_n,\, x_m) \to 0,\ n \to \infty,\ m \to \infty)$.

Утверждение: Если $x_n \in X,\ x_n \to x$, то x_n является фундаментальной.

Доказательство: $\rho(x_n,\, x_m) \leqslant \rho(x_n,\, x) + \rho(x,\, x_m) \to 0$ $\square$

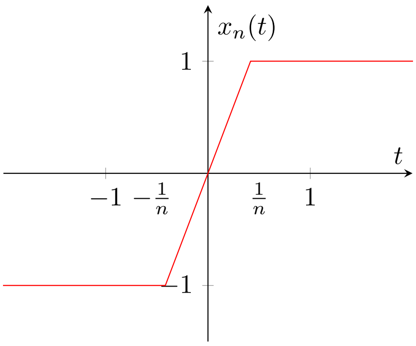
Пример: Пространство непрерывных функций

$$C_2[-1;\, 1] = \left\{ x \in C[0;\, 1] \,\middle|\, ||x|| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (x(t))^2\, dt} \right\}$$

$$m > n :\ ||x_n - x_m|| \leqslant \int\limits_{-1/n}^{1/n} 2\, dt = \frac{4}{n} \to 0 \implies \text{последовательность фундаментальна.}$$

Последовательность не сходится, так как не существует непрерывной функции $x_n(t)$ такой, что

$$\int\limits_{-1}^{1} |x_n(t) - x(t)|\, dt \to 0$$



7.2.1 Полнота и сепарабельность

Определение: Пространство $(X,\, \rho)$ *полное*, если из того, что x_n – фундаментальная, следует, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$.

Пример: $\mathbb{Q}$ не является полным.

Определение: Множество A *всюду плотно* в пространстве X, если $\overline{A} = X$.

Пример: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Пример: Канторово множество нигде не плотно.

Определение: Пространство называется *сепарабельным*, если в нём существует всюду плотное множество ($\exists A \subset X,\ A$ счётное и $\overline{A} = X$).

Замечание: Все счётные пространства сепарабельны.

7.2.2 Теорема о вложенных шарах

$(X,\, \rho)$ полное $\iff \forall\, B_{\varepsilon_1}(x_1) \supset B_{\varepsilon_2}(x_2) \supset B_{\varepsilon_3}(x_3) \supset \ldots :\ \varepsilon_n \to 0\ \ \exists x^* \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_{\varepsilon_k}(x_k)$.

Доказательство:

- $\Rightarrow$: $\forall\, x_n$ – фундаментальных $\exists\, x^* : x_n \to x^*$. $B_{\varepsilon_n}(x_n) \supset B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})$
  $\rho(x_{n+k},\, x_n) \leqslant \varepsilon_n \implies x_n \to x^*$ фундаментальна. Тогда x^* – предельная точка, то есть, начиная с некоторого номера, эта точка принадлежит множеству пересечения всех шаров.

- $\Leftarrow$: x_n фундаментальна, тогда

$$\rho(x_{n_1},\, x_n)^m \leqslant \frac{1}{2}\ \forall\, n > n_1 \qquad \rho(x_{n_k},\, x_n)^m \leqslant \frac{1}{2^k}\ \forall\, n > n_k$$

$$B_1(x_{n_1}) \supset B_{1/2}(x_{n_2}) \supset B_{1/4}(x_{n_3}) \supset \ldots \supset B_{1/2^{k-1}}(x_{n_k})$$

Пусть $x^* \in B_{1/2^{k-1}}(x_{n_k})$.

$$\begin{aligned} \rho(x_1,\, x_{n_k}) &\leqslant \rho(x_1,\, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}},\, x_{n_k}) \\ &\leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\implies x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{1/2^{k-1}}(x_{n_k}) \implies x_{n_k} \to x^* \implies x_n \to x^* \qquad \square$$

8 Лекция от 24.10.22: Пополнение метрического (нормированного) пространства. Принцип сжимающих отображений

8.1 Пополнение метрического пространства

Определение: Пусть (X, ρ), $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ – метрические пространства. Они *изометричны*, если существует биекция $f: X \to \widetilde{X}$ и $\forall\, x, y: \ \rho(x, y) = \widetilde{\rho}(f(x), f(y))$.

Определение: Пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ – *пополнение* пространства (X, ρ), если

1. $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ полное
2. $X \subset \widetilde{X}$
3. $\forall\, x, y \in X: \ \rho(x, y) = \widetilde{\rho}(x, y)$
4. $\overline{X} = \widetilde{X}$

Теорема: Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, тогда $\exists!$ с точностью до изометрии пополнение этого пространства.

Доказательство (идея): Рассмотрим множество фундаментальных последовательностей в X.

$$x_n \sim y_n \iff \rho(x_n, y_n) \to 0; \ n \to \infty \qquad x \in X \leftrightarrow (x, x, x, ...)$$

Введём расстояние пространства, элементами которого являются классы эквивалентвности $[x_n]$:

$$\rho([x_n, y_n]) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

Остаётся проверить аксиомы метрики, полноту полученного пространства и то, что расстояние не зависит от выбора элемента.

Пример:

$$C_2[a; b]: \ ||x|| = \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt} \qquad \widetilde{C_2[a; b]} = L_2[a; b]$$

8.2 Сжимающие отображения

Пусть в пространстве (X, ρ) есть $f: \ X \to X$.

Определение: Отображение f *сжимающее*, если $\exists\, \alpha < 1: \ \forall\, x, y \in X \ \ \rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y)$.

Замечание: Сжимающее отображение непрерывно.

Определение: x^* – *неподвижная точка* отображения f, если $f(x^*) = x^*$.

8.2.1 Принцип сжимающих отображений

Теорема: Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство, f – сжимающее отображение. Тогда

1. $\exists!$ неподвижная точка $x^* \in X$
2. Если известен $x_0 \in X$, то $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$

$$(x_0 \to f(x_0) = x_1 \to f(x_1) = x_2 \to f(x_2) = x_3 \to ...; \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x^*)$$

Доказательство:

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \alpha^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant ... \leqslant \alpha^n\rho(x_1, x_0)$$

$$\rho(x_n,\,x_{n+m}) \leqslant \rho(x_n,\,x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},\,x_{n+2}) + ... + \rho(x_{n+m-1},\,x_{n+m}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n\rho(x_1,\,x_0) + \alpha^{n+1}\rho(x_1,\,x_0) + ... + \alpha^{n+m-1}\rho(x_1,\,x_0) = \rho(x_1,\,x_0)(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{n+m-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,\,x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies \text{последовательность } x_n \text{ фундаментальна } \implies \exists\, x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Докажем единственность. От противного: пусть $\exists\, y^* \neq x^*$ – другая неподвижная точка. Тогда
$\rho(f(x^*),\,f(y^*)) \leqslant \alpha\rho(x^*,\,y^*)$
$\|$
$\rho(x^*,\,y^*)$
$\implies \rho(x^*,\,y^*) = 0 \implies x^* = y^*$ – противоречие $\implies \exists!\,x^*$ □

Пример:

$$x = \frac{\sin x - 1}{10},\ x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sin x - 1}{10}$$

Докажем, что это отображение сжимающее. Пусть $x_0 = 0$

$$x_1 = f(x_0) = -\frac{1}{10},\ x_2 = \frac{\sin(-0,1) - 1}{10},\ ...\ x_n \text{ – решение при } n \to \infty.$$

Замечание: При $m \to \infty :\ \rho(x_n,\,x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,\,x_0)$.

Пример: [Задача Коши]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),\,t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Теорема Пикара: $\exists!$ решение этой системы.

Доказательство: Предположим, что $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция и $\exists\, L :\ |f(x,\,t) - f(y,\,t)| \leqslant L|x-y|$

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x(\tau),\,\tau)\,d\tau$$

$$x = F(x) \quad F : G[0;\,a] \to G[0;\,a]$$

$$(F(x))(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x(\tau),\,\tau)\,d\tau$$

$$\rho(F(x),\,F(y)) = \max_{t\in[0;\,a]} |(F(x))(t) - (F(y))(t)| = \max_{t\in[0;\,a]} \left| \int\limits_0^t f(x(\tau),\,\tau) - f((y(\tau),\,\tau))\,d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^a |f(x(\tau),\,\tau) - f(y(\tau),\,\tau)|\;d\tau \leqslant \int\limits_0^a L|x(\tau) - y(\tau)|\,d\tau \leqslant L\int\limits_0^a \max_{\widetilde{\tau}} |x(\widetilde{\tau}) - y(\widetilde{\tau})|\,d\tau = La\rho(x,\,y)$$

Если $La < 1$, то f является сжимающим. При $a < \frac{1}{L}$ на отрезке $[0;\,a]$ $\exists!$ решение задачи Коши. □

8.3 Сходимость в нормированных пространствах

$x_n \to x$, если $\rho(x_n,\,x) = ||x_n - x|| \to 0$.

Пример:

$$C[a,\,b] : \qquad ||x||_1 = \max_{t\in[a;\,b]} |x(t)| \qquad ||x||_2 = \sqrt{\int\limits_a^b (x(\tau))^2\,d\tau}$$

$$||x_n - 0||_1 = 1 \qquad\qquad ||x_n - 0||_2 \to 0$$

Лемма: $||\cdot||$ – непрерывная функция (т.е. если $||x_n - x|| \to 0$, то $||x_n|| \to ||x||$)

Доказательство:

1. $||x|| = ||x - x_n + x_n|| \leqslant ||x - x_n|| + ||x_n|| \implies ||x|| - ||x_n|| \leqslant ||x - x_n||$

2. $||x_n|| = ||x_n - x + x|| \leqslant ||x - x_n|| + ||x|| \implies ||x_n|| - ||x|| \leqslant ||x - x_n||$

$\implies \Big| ||x|| - ||x_n|| \Big| \leqslant ||x - x_n|| \to 0 \implies ||x_n|| \to ||x||$ □

Определение: Нормы *эквивалентны* ($|| \cdot ||_1 \sim || \cdot ||_2$), если $\exists\, c,\, C > 0 :\ \forall\, x\ c||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant C||x||_1$.

Замечание: $|| \cdot ||_2 \sim || \cdot ||_1 : \quad \frac{1}{C}||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \frac{1}{c}||x||_2$.

Лемма: Если $|| \cdot ||_1 \sim || \cdot ||_2$, то $||x_n - x||_1 \to 0 \iff ||x_n - x||_2 \to 0$

Доказательство:

$$||x_n - x||_1 \leqslant C||x_n - x||_2 \to 0 \qquad ||x_x - x||_2 \leqslant \widetilde{C}||x_n - x||_1 \to 0$$ □

Теорема: В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Доказательство: $\exists$ конечный базис $e_1,\, e_2,\, ...e_n :\ x = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$

Пусть $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2}$. Докажем, что любая норма эквивалентна $|| \cdot ||_2$.

$\Rightarrow$: Возьмём произвольную норму $x :\ ||x|| = ||a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n|| \leqslant$

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|\, ||e_k|| \leqslant \Big|$ неравенство Гёльдера $\Big| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum\limits_{k=1}^{n} ||e_k||^2} = ||x||_2 \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} ||e_k||} = c||x||_2$

$\Leftarrow$: $||x|| = ||a_1x_1 + ... + a_ne_n|| = f(a_1,\, ... a_n) = f(x)$ непрерывна

Рассмотрим множество $A := \left\{ x = (a_1,\, ... a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; ||x||_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2} = 1 \right\}$

$\exists \min\limits_{x \in A} \left(\dfrac{1}{||x||_2} ||x|| \right) = \min\limits_{x \neq 0} \left|\left| \dfrac{1}{||x||} x \right|\right| = \min\limits_{x \in A} ||x|| = c$

$\left|\left| \dfrac{1}{||x||_2} x \right|\right|_2 = \dfrac{||x||_2}{||x||_2} = 1$

$||x|| \geqslant c \qquad ||x|| \geqslant c||x||_2 \implies || \cdot || \sim || \cdot ||_2$ □

8.4 Линейное многообразие и линейное подпространство

Определение: Пусть X – нормированное пространство. Подмножество $L \subset X$ – *линейное многообразие*, если $\forall\, x,\, y \in L\ \ \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} :\ \alpha x + \beta y \in L$.

Определение: Замкнутое линейное многообразие называют *линейным подпространством* ($\overline{L} = L$).

Пример: Если L – многочлен в $C[a;\, b]$, то L является линейным многообразием, но не линейным подпространством.

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{x \to \infty} P_n(x) \quad ||P_k - f|| \to 0$$

Определение: (*базис Шаудера*)

$\{e_n\}$ – *базис* линейного пространства, если $\forall\, x \in X\ \exists!\, a_n \in \mathbb{R} :\ x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_ke_k \ \left(\lim\limits_{n \to \infty} \left|\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_ke_k - x \right|\right| = 0 \right)$.

Определение: (*базис Гамеля*)

$\{e_\alpha\}$ – *базис* линейного пространства, если $\forall\, x \in X\ \exists!\ e_{\alpha_1},\, ...\, e_{\alpha_n},\ a_1,\, ...\, a_n :\ x = a_1e_{\alpha_1} + ... + a_ne_{\alpha_n}$

9 Лекция от 31.10.22: Евклидово пространство

Определение: Линейное пространство H называется *евклидовым*, если на нём задана функция $(\cdot\,,\,\cdot)$: $H^2 \to \mathbb{R}$ (скалярное произведение) и для его элементов x, y, z выполнены следующие условия:

1. $(x,\, x) \geqslant 0,\ (x,\, x) = 0 \iff x = 0$
2. $(x,\, y) = (y,\, x)$
3. $(\alpha x,\, y) = \alpha(x,\, y),\ \alpha \in \mathbb{R}$
4. $(x + y,\, z) = (x,\, z) + (y,\, z)$

9.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$|(x,\, y)| \leqslant \sqrt{(x,\, x)(y,\, y)} \qquad \big[|(x,\, y)| \leqslant ||x||\,||y||\big]$$

Доказательство:

$$(x + \alpha y,\, x + \alpha y) = (x,\, x) + 2\alpha(x,\, y) + \alpha^2(y,\, y) \geqslant 0$$

$$\mathcal{D} = 4(x,\, y)^2 - 4(x,\, x)(y,\, y) \leqslant 0$$

$$(x,\, y)^2 \leqslant (x,\, x)(y,\, y)$$

$$|(x,\, y)| \leqslant \sqrt{(x,\, x)(y,\, y)}$$ □

Равенство достигается при нулевом значении дискриминанта, т.е. при $x + \alpha y = 0$.

Замечание: В евклидовом пространстве всегда можно ввести норму $||x|| = \sqrt{(x,\, x)}$:

1. $||x|| \geqslant 0,\ ||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\alpha x|| = \sqrt{(\alpha x,\, \alpha x)} = |\alpha|\sqrt{(x,\, x)}$
3. $||x + y|| = \sqrt{(x + y,\, x + y)} = \sqrt{(x,\, x) + 2(x,\, y) + (y,\, y)} \leqslant \sqrt{(x,\, x) + (y,\, y) + 2\sqrt{(x,\, x)\,(y,\, y)}} =$
   $= \sqrt{\left(\sqrt{(x,\, x)} + \sqrt{(y,\, y)}\right)^2} = ||x|| + ||y||$

9.1.1 Критерий существования скалярного произведения, согласованного с нормой пространства

В нормированном пространстве можно ввести скалярное произведение $(\cdot,\, \cdot) \iff$ выполнено равенство параллелограмма $\forall\, x,\, y\ ||x - y||^2 + ||x + y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

Доказательство (идея):

$\Rightarrow$: $(x - y,\, x - y) + (x + y,\, x + y) = 2(x,\, x) + 2(y,\, y)$

$\Leftarrow$: $(x,\, y) = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2)$ – осталось проверить аксиомы скалярного произведения.

Пример: $C[a;\, b],\ l_p,\ p \neq 2,\ L_p[a;\, b],\ p \neq 2$ не евклидовы.

Утверждение: Скалярное произведение $(f(x,\, y) = (x,\, y))$ непрерывно.

Доказательство: Пусть $x_n \to x,\ y_n \to y$.

$$|(x_n,\, y_n) - (x,\, y)| = |(x_n,\, y_n) - (x_n,\, y) + (x_n,\, y) - (x,\, y)| \leqslant |(x_n,\, y_n - y)| + |(x_n - x,\, y)| \leqslant$$

(применяем неравенство Коши-Буняковского)

$$\leqslant ||x_n||\,||y_n - y|| + ||x_n - x||\,||y||$$

Здесь $||x_n||$ ограничена в силу сходимости к x, а $||y_n - y||$ и $||x_n - x||$ стремятся к нулю, значит, к нулю стремится всё выражение. Таким образом, функция непрерывна. □

9.1.2 Теорема о проекции и перпендикуляре

Пусть H – полное евклидово пространство, L – линейное подпространство H, $x \in H$. Тогда

1. $\exists!$ проекция $y^* \in L:\ \rho(x,\, y^*) = \min\limits_{y\in L} \rho(x,\, y)$
2. $h := x - y^* \perp L \quad (\forall\, z \in L:\ (h,\, z) = 0)$

Доказательство:

1. $\inf\limits_{y\in L} \rho(x,\, y) = d \quad \left(\inf\limits_{y\in L} ||x-y|| = d\right)$

$$\implies \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in L\ \rho(x,\, y_n)(= ||x-y_n||) < d + \frac{1}{n}$$

Запишем равенство параллелограмма:

$$2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2) = ||2x - y_n - y_m||^2 + ||y_m - y_n||^2$$

$$||y_m - y_n||^2 = 2(\underbrace{||x-y_n||^2}_{\to d^2} + \underbrace{||x-y_m||^2}_{\to d^2}) - 4\underbrace{\left|\left|x - \frac{1}{2}(y_n+y_m)\right|\right|^2}_{\in L,\, \geqslant d^2}$$

Тогда при $n,\, m \to \infty$

$$\lim_{n,\, m\to\infty} ||y_n - y_m||^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0 \implies y_n \text{ фундаментальна } \implies y_n \to y^* \in L \text{ (в силу замкнутости).}$$

Докажем единственность от противного.

Пусть $\exists\, \widetilde{y} \neq y^*,\ \widetilde{y} \in L:\ ||x - \widetilde{y}|| = d$

$$||y^* - \widetilde{y}||^2 = 2(||x-\widetilde{y}||^2 + ||x-y^*||^2) - 4\left|\left|x - \frac{1}{2}(y^* + \widetilde{y})\right|\right|^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0 \implies y^* - \widetilde{y} = 0 \implies y^* = \widetilde{y}$$

Получили противоречие, значит, проекция единственна.

2. Пусть $z \in L,\ y^* + \alpha z \in L$

$$\rho(x,\, y^*) \leqslant \rho(x,\, y^* + \alpha z)\ \forall\, \alpha$$
$$(x - y^*,\, x - y^*) \leqslant (x - y^* - \alpha z,\, x - y^* - \alpha z)$$
$$(h,\, h) \leqslant (h - \alpha z,\, h - \alpha z)$$
$$(h,\, h) \leqslant (h,\, h) - 2\alpha(h,\, z) + \alpha^2(z,\, z)$$
$$2\alpha(h,\, z) \leqslant \alpha^2(z,\, z)$$
$$\alpha = \frac{(h,\, z)}{(z,\, z)}: \quad \frac{2(h,\, z)^2}{(z,\, z)} \leqslant \frac{(h,\, z)^2}{(z,\, z)}, \quad z \neq 0 \implies (h,\, z) = 0 \implies h \perp L$$

□

9.2 Ортогональное дополнение

Определение: *Ортогональным дополнением* называют $L^T := \{x \,|\, \forall\, z \in L:\ (x,\, z) = 0\}$.

Замечание 1: L^T – линейное подпространство

$$x_n \in L^T,\ x_n \to x,\ (x_n,\, z) \to (x,\, z) = 0 \implies \text{оно замкнуто.}$$

Замечание 2: $(L^T)^T = L$.

Утверждение: $\exists!\, y \in L,\ \exists!\, h \in L^T:\ x = y + h$, где h – проекция x на L^T, а $y \perp L^T$.

Доказательство: Пусть $x = y' + h'$, $y' \in L,\ h' \in L^T$. Тогда

$$y + h = y' + h'$$
$$\underbrace{y - y'}_{\in L} = \underbrace{h' - h}_{\in L^T}$$
$$(y - y',\, h' - h) = 0$$
$$||y - y'|| = 0 \implies y = y',\ h = h'$$

□

Следствие: H можно представить в виде прямой суммы $H = L \oplus L^T$.

Определение: Систему векторов $\{x_n\}$ называют *ортогональной*, если $\forall\, x_i,\, x_j,\, i \neq j:\ (x_i,\, x_j) = 0$.

Определение: Систему векторов $\{x_n\}$ называют *ортонормированной*, если она ортогональна и $\forall\, i$: $(x_i,\, x_i) = 1$.

9.2.1 Ортогонализация Грама-Шмидта

Пусть $x_i \in H\ \forall\, x_i \in \{x_n\}$ – линейная независимая система, $\exists\, \{y_n\}$, $\{z_n\}$ – ортогональная и ортонормированная системы соответственно.

$$\mathrm{Lin}\{x_n\} = \mathrm{Lin}\{y_n\} = \mathrm{Lin}\{z_n\} \text{ – линейные оболочки}$$
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - \lambda_1 y_1, \quad 0 = (y_1,\, y_2) = (x_2,\, y_1) - \lambda_1(y_1,\, y_1) \implies \lambda_1 = \frac{(y_1,\, x_2)}{(y_1,\, y_1)}$$
$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{nk} y_k, \quad \lambda_{nk} = \frac{(x_n,\, y_k)}{(y_k,\, y_k)}$$
$$z_n = \frac{1}{||y_n||} y_n = \frac{1}{\sqrt{(y_n,\, y_n)}} y_n$$

9.2.2 Задача проецирования на линейную оболочку векторов

$$\text{Пусть } L = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \,|\, a_k \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Lin}\{\varphi_n\}, \text{ где } \{\varphi_n\} \text{ – ортогональная система.}$$

Найдём проекцию x на $L =: l$.

$$l = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$
$$\left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right|\right|^2 \to \min$$
$$(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k) = (x,\, x) - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x,\, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 (\varphi_k,\, \varphi_k) \to \min_{\alpha_1,\, \dots\, \alpha_n}$$
$$-2(x,\, \varphi_k) + 2\alpha_k(\varphi_k,\, \varphi_k) = 0$$
$$\alpha_k = \frac{(x,\, \varphi_k)}{(\varphi_k,\, \varphi_k)} \text{ – коэффициенты Фурье.}$$

10 Лекция от 07.11.22: Гильбертово пространство. Линейные функционалы и операторы

10.1 Гильбертово пространство. Ряды Фурье

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \text{ – ряд Фурье}$$

Определение: Бесконечномерное полное евклидово пространство называют *гильбертовым.*

Примеры:

1. $\mathbb{R}^n$ $(x,\, y) = x^T A y,\ A > 0$
2. $l_2,\ \alpha \leqslant c$ – ограниченные последовательности, $\alpha_k > 0\ \forall\, k$

$$(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k y_k \leqslant c \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leqslant c \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} < \infty \text{ (получили из неравенства Гёльдера)}$$

3. $L_2[a,\, b]$

$$(x,\, y) = \int\limits_{[a;\, b]} x(t) y(t)\, dt$$

4. $L^2_\mu(\Omega)$

$$(x,\, y) = \int\limits_{\Omega} xy\, d\mu$$

5. Пространство случайных величин с нулевым матожиданием и конечной дисперсией $(\mathbb{M}[\xi] = 0,\ \mathbb{D}[\xi] < \infty)$ $\quad (\xi,\, \eta) = cov(\xi,\, \eta)$

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $\{\varphi_k\}$ – ортонормированная система векторов из него.

Определение: Система векторов $\{\varphi_k\}$ является *тотальной*, если $\overline{\mathrm{Lin}}\{\varphi_k\} = H$.

Утверждение: В сепарабельном бесконечномерном пространстве существует тотальная система.

Доказательство: Пусть A – счётное всюду плотное множество, применяем метод ортогонализации Г-Ш $\to$ получаем ортонормированную систему, она тотальна. $\square$

Замечание: Не всякая счётная тотальная система образует базис. Например, многочлены в $C_2[a;\, b]$:

$$||x|| = \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)\, dt}, \quad \text{пусть } a = 0,\, b = 1.$$

$$\{1,\, t,\, t^2,\, ...\} \text{ – тотальная система, } f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k \text{ сходится } \implies ||\alpha_k t^k|| \to 0$$

$$\implies ||\alpha_k t^k|| = |\alpha_k| \sqrt{\int\limits_0^1 t^{2k}\, dt} = \alpha_k \sqrt{\frac{1}{2k+1}} \to 0$$

$$\text{Найдём радиус сходимости } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k :\ \sqrt[k]{|\alpha_k|} \leqslant \sqrt{2k+1} \implies \sqrt[k]{|\alpha_k|} \sim k^{\frac{1}{2k}} \to 1 \implies R = 1$$

На отрезке $[0;\, 1 - a]$ ряд сходится $\implies f$ – бесконечно дифференцируемая функция. Но $f(t) = |t - \frac{1}{2}|$ не является бесконечно дифференцируемой $\implies$ система не является базисом.

Теорема: Пусть $\{\varphi_k\}$ – ортогональная (ортонормированная) система в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\{\varphi_k\}$ – базис
2. $\{\varphi_k\}$ – тотальная система
3. (Равенство Парсеваля)

$$\forall x \in H: \ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 ||\varphi_k||^2, \text{ где } \alpha_k = \frac{(\varphi_k,\, x)}{(\varphi_k,\, \varphi_k)}$$

Доказательство:

1 $\implies$ 2: Всякий вектор раскладывается по базису $\implies$ он всюду плотен $\implies$ система тотальна.

2 $\implies$ 3: $\forall x\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \beta_1, \dots \beta_n : \left|\left| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right|\right| < \varepsilon$

$\Pr\limits_{\mathrm{Lin}\{\varphi_1, \dots \varphi_n\}}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$

$\left|\left| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right|\right| \leqslant \left|\left| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right|\right| < \varepsilon \implies$

$\left|\left| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right|\right|^2 = (x,\, x) - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k (x,\, \varphi_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_k. \varphi_k) = (x,\, x) - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x,\, \varphi_k)^2}{(\varphi_k,\, \varphi_k)} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x,\, \varphi_k)^2}{(\varphi_k,\, \varphi_k)} =$

$= (x,\, x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x,\, \varphi_k)^2}{(\varphi_k,\, \varphi_k)} = (x,\, x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2\, (\varphi_k,\, \varphi_k)$

$\left|\left| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right|\right|^2 \to 0$ в силу тотальности $\implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 ||\varphi_k||^2 = ||x||^2$

3 $\implies$ 1: $\left|\left| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right|\right|^2 = (x,\, x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2\, (\varphi_k,\, \varphi_k) \to 0 \implies x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$. Проверим единственность.

Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k$.

$$(x,\, \varphi) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k,\, \varphi_n\right) = \alpha_n \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k,\, \varphi_n\right) = \beta_n \end{cases} \implies \alpha_n = \beta_n \qquad \square$$

Замечание: $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 ||\varphi_k||^2 \leqslant ||x||^2 \implies n \to \infty : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 ||\varphi_k||^2 \leqslant ||x||^2$ – неравенство Бесселя.

Примеры:

1. $L_2\,[-\pi;\, \pi] : \ \{1,\, \cos(t),\, \sin(t),\, \cos(2t),\, \sin(2t),\, \dots\, \cos(nt),\, \sin(nt)\}$ – ортогональная система.
2. $L_2\,[a;\, b] : \ \{1,\, t,\, t^2,\, t^3,\, \dots\} \to$ применяем ортогонализацию. При $[a;\, b] = [-1;\, 1]$ получаем полиномы Лежандра, что является базисом в данном пространстве.

10.1.1 Теорема Фишера

Любое сепарабельное гильбертово пространство H изоморфно и изометрично l_2 ($H \cong l_2$).

Доказательство: Пусть $\{l_n\}$ – ортонормированный базис в пространстве H.

$$\forall x: \ x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \qquad ||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$$

1) Отображение инъективно

2) $\alpha \in l_2 \implies x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ – докажем, что последовательность фундаментальна.

$$\left|\left| \sum_{k=n}^{m} \alpha_k \varphi_k \right|\right|^2 = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \implies \text{ряд сходится.}$$

$||x||^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = ||\alpha||_l$
Пусть $x = (\alpha_1,\, \alpha_2,\, ...),\; y = (\beta_1,\, \beta_2,\, ...)$

$ax + by \leftrightarrow a\alpha + b\beta$
$ax + by = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a\alpha_k + b\beta_k)\varphi_k$ $\square$
Следствие: $L_2\,[a;\, b] \cong l_2$

10.2 Линейные функционалы и операторы

Определение: Полное нормированное пространство называется *банаховым.*

Пример: $C[a,\, b]$ – банахово пространство.

Определение: *Линейный оператор* из нормированного пространства X в нормированное пространство Y – это такое отображение $A:\; X \to Y$, что $\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R},\; \forall\, x,\, y \in X:\;\; A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay\;\; [Ax = A(x)]$.

Определение: *Линейный функционал* – это линейный оператор $X \to \mathbb{R}$.

Примеры:

1. Оператор: $A:\; C[0;\, 1] \to C[0;\, 1]$
$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau$$
2. Функционал: $f:\; C[0;\, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = x(0)$

Определение: $\mathscr{L}(X,\, Y)$ – пространство *ограниченных линейных операторов* из X в Y.
$A,\, B \in \mathscr{L}(X,\, Y) \qquad (\alpha A + \beta B)(x) = \alpha Ax + \beta Bx$

Определение: *Норма линейного оператора* – это $||A|| = \sup\limits_{||x|| \leqslant 1} ||Ax||$.

Проверим, что норма линейного оператора действительно является нормой.

1. $||A|| = 0 \iff A = 0$
2. $||\alpha A|| = |\alpha|\, ||A||$
3. $||A + B|| \leqslant ||A|| + ||B||$, так как
$||(A + B)(x)|| = ||Ax + Bx|| \leqslant ||Ax|| + ||Bx|| \leqslant \sup\limits_{||x|| \leqslant 1} ||Ax|| + \sup\limits_{||x|| \leqslant 1} ||Bx|| = ||A|| + ||B||$

Определение: Оператор *ограничен*, если $\sup\limits_{||x|| \leqslant 1} ||Ax|| < \infty$.
Замечание: Линейный оператор ограничен $\iff$ он ограничен на любом шаре.
$$||x|| \leqslant a \qquad ||Ax|| = ||x|| \left|\left| A \frac{1}{||x||} x \right|\right| \leqslant a \sup_{||x|| \leqslant 1} ||Ax|| < \infty$$
$$\left|\left| \frac{x}{||x||} \right|\right| = 1 = \frac{||x||}{||x||}$$

Определение: Пространство ограниченных функционалов на L – *сопряжённое пространство* к L. [Обозначение: L^*]

$||f|| = \sup\limits_{||x|| \leqslant 1} |f(x)|$

Утверждение: $||f|| = \sup\limits_{||x|| = 1} |f(x)| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||}$
$$\text{Пусть } ||x|| < 1 \implies |f(x)| = ||x|| \left| f\left(\frac{x}{||x||}\right) \right|;\;\; y = \frac{x}{||x||},\; ||y|| = 1$$

$$|f(y)| = \frac{|f(x)|}{||x||} > |f(x)|$$

$$||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)| = \sup_{||x||=1} \frac{|f(x)|}{||x||} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{x\neq 0} \left| f\underbrace{\left(\frac{x}{||x||}\right)}_{=1} \right| \leqslant \sup_{||y||=1} |f(y)| = ||f||$$

Правая и левая части равны, значит, везде равенство. □

Замечание: $|f(x)| \leqslant ||f||\,||x||$

Теорема: Ограниченность функционала $\iff$ его непрерывность.

Доказательство:

1 $\implies$ 2: $|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leqslant \underbrace{||f||}_{<\infty}\,\underbrace{||x-y||}_{\to 0} \implies f(x) \to f(y)$

2 $\implies$ 1: От противного: пусть функционал не ограничен, тогда ограничения нет и в шаре.

$$\exists\, x_k : \; ||x_k|| \leqslant 1 \quad |f(x_k)| > k$$

$$f\left(\frac{x_k}{k}\right) = \frac{f(x_k)}{k} > 1$$

$\left|\left|\frac{x_k}{k}\right|\right| \leqslant \frac{1}{k} \to 0 \implies f\left(\frac{x_k}{k}\right) \to f(0) = 0 \implies$ противоречие $\implies$ функционал ограничен. □

Пример *(неограниченного функционала)***:** Пусть L – бесконечное пространство $\implies \exists$ бесконечный базис Гамеля $\{\varphi_\alpha\}$, а $\{\varphi_k\}$ – счётное множество нормированных базисных векторов ($||\varphi_i|| = 1\ \forall\, \varphi_i \in \{\varphi_k\}$). Определим функционал следующим образом:

1. $f(\varphi_i) = i$
2. $f(\alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_k\varphi_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \qquad \sup\limits_{||x||=1} |f(x)| \geqslant |i|$

11 Лекция от 14.11.22: Теорема Хана-Банаха

11.1 Теорема Хана-Банаха

Пусть X – нормированное пространство, $L \subset X$ – линейное многообразие, f – линейный ограниченный функционал на L. Тогда $\exists$ функционал $F \in X^*$:

1. $\forall\, x \in L:\ F(x) = f(x)$ – продолжение функционала
2. $||F|| = ||f||$

Проще говоря, можно продолжить f на всё пространство X таким образом, что норма не увеличится (например, при переносе функционала с прямой на плоскость).

Доказательство: Пусть $x \in L,\ \alpha \in \mathbb{R},\ y \notin L$. Определим F:
$F(x+\alpha y) = F(x) + \alpha F(y) = f(x) + \alpha c,\ c = F(y)$.
Теперь рассмотрим F на прямой сумме $L \oplus L_0$, где $L_0 = \mathrm{Lin}\{y\}$:

$$||F||_{L\oplus L_0} = \sup_{x\in L\oplus L_0,\, ||x||\leqslant 1} |F(x)| = \sup_{x\in L,\, \alpha\in\mathbb{R},\, ||x+\alpha y||\leqslant 1} |f(x)+\alpha c|$$

$$\sup_{x\in L,\, \alpha\in\mathbb{R},\, ||x+\alpha y||\leqslant 1} |f(x)+\alpha c| = \sup_{x+\alpha y\neq 0} \frac{|f(x)+\alpha c|}{||x+\alpha y||}$$

Итак, требуется доказать, что полученный супремум ограничен нормой $||f||$.

$$\sup_{x\in L,\, \alpha\in\mathbb{R},\, ||x+\alpha y||\leqslant 1} |f(x)+\alpha c| \leqslant ||f|| \iff |f(x)+\alpha c| \leqslant ||f||\,||x+\alpha y||$$

$$-||f||\,||x+\alpha y|| \leqslant f(x)+\alpha c \leqslant ||f||\,||x+\alpha y||$$

Разделим на $\alpha \neq 0$ и рассмотрим вторую часть неравенства:

1. $\alpha > 0:\ f(\frac{1}{\alpha}x) + c \leqslant ||f||\,||\frac{1}{\alpha}x + y \qquad x' := \frac{1}{\alpha}x$
2. $\alpha < 0:\ f(\frac{1}{\alpha}x) + c \geqslant ||f||\,\frac{1}{\alpha}||x+\alpha y|| = ||f||\,\frac{1}{\alpha}(-\alpha)||\frac{1}{\alpha}x + y|| = -||f||\,||\frac{1}{\alpha}x+y|| \qquad x'' := \frac{1}{\alpha}x$

   Тогда $\begin{cases} f(x') + c \leqslant ||f||\,||x'+y||, \\ f(x'') + c \geqslant -||f||\,||x''+y||; \end{cases} \implies -f(x'') - ||f||\,||x''+y|| \leqslant c \leqslant -f(x') + ||f||\,||x'+y||$

Рассмотрим разность $f(x') - f(x'') = f(x'-x'')$:

$$f(x') - f(x'') = f(x'-x'') \leqslant ||f||\,||x'-x''|| = ||f||\,||x'+y-(y+x'')|| \leqslant ||f||\,||x'+y|| + ||f||\,||x''+y||$$

Вычтем из обеих частей неравенства $f(x')$:

$$-f(x'') - ||f||\,||x''+y|| \leqslant -f(x') + ||f||\,||x'+y|| \implies \exists\, c \in \big[-f(x'') - ||f||\,||x''+y||;\ -f(x') + ||f||\,||x'+y||\big]$$

F продолжим на $L_1 = L \oplus L_0$. Если $L_1 \neq X,\ L_2 = L_1 \oplus \mathrm{Lin}\{y_1\},\ y \notin L_1 \implies F$ продолжим на L_2 без увеличения нормы.
Предположим, что X сепарабельно $\implies \exists\{y_1, y_2, ...\}$ – счётное всюду плотное множество.

$$L_3 = L_2 \oplus \mathrm{Lin}\{y_2\},\ L_4 = L_3 \oplus \mathrm{Lin}\{y_3\},\ ...\ L_k = L_{k-1} \oplus \mathrm{Lin}\{y_{k-1}\}$$

$$X_0 = L_1 \oplus L_2 \oplus ... = \mathrm{Lin}\{L, y_1, y_2, y_3, ...\}$$

f продолжим с сохранением нормы на X_0 – всюду плотное множество в X.

$$x \in X:\ F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n),\ x_n \to x$$

$F(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} F(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha F(x) + \beta F(y)$ при $x_n \to x,\ y_n \to y$. Если $x_n \to x,\ y_m \to x$, то последовательность фундаментальна $\implies |F(x_n) - F(y_m)| \leqslant ||F||\,||x_n - y_m|| \to 0$
Докажем, что норма не увеличится. От противного: предположим, что $||F|| > ||f|| \implies \exists\, x : ||x|| \leqslant 1,\ |F(x)| > ||f||$.
X_0 всюду плотно $\implies \exists\, x_n \in X_0:\ x_n \to x,\ ||x_n|| \leqslant 1$. Тогда $F(x_n) \to F(x) > ||f|| \implies |F(x_n)| \leqslant ||f||$ – получили противоречие. $\square$

11.1.1 Следствия

1. Пусть $x_0 \neq 0$. Тогда существует линейный ограниченный функционал ($f \in X^*$) такой, что $f(x_0) = ||x_0||,\ ||f|| = 1$.

   Доказательство: Пусть $L = \mathrm{Lin}\{x_0\}$. Построим функционал на $L:\ f(\alpha x_0) = \alpha ||x_0||$.

   $$||f||_L = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{\alpha} \frac{|f(\alpha x_0)|}{||\alpha x_0||} = \frac{|\alpha|\,||x_0||}{|\alpha|\,||x_0||} = 1$$

   Применим теорему Хана-Банаха и получим продолжение на всё $X:\ ||f||_X = 1$. $\square$

2. Если $\forall\, f \in X^*:\ f(x) = 0 \implies x = 0$.

   Доказательство: От противного: $\forall\, f \in X^*:\ f(x) = 0,\ x \neq 0 \implies \exists\, f : ||f|| = 1,\ f(x) = ||x|| > 0$ – получили противоречие. $\square$

3. Пусть L – линейное многообразие в X, $y \notin \overline{L},\ \rho(L, y) = d = \inf\limits_{x\in L} ||x - y||$. Тогда $\exists\, f \in X^*:\ f(x) = 0$ при $x \in L,\ f(y) = 1,\ ||f|| = \frac{1}{d}$.

   Доказательство: $x \in L,\ \alpha \in \mathbb{R}:\ f(x + \alpha y) = \alpha$

   $$||f|| = \sup_{x\in L,\, \alpha\in\mathbb{R},\, ||x+\alpha y||\neq 0} \frac{|f(x+\alpha y)|}{||x+\alpha y||} = \sup_{x\in L,\, \alpha\in\mathbb{R},\, ||x+\alpha y||\neq 0} \frac{|\alpha|}{|\alpha|\,||y + \frac{1}{\alpha}x||} = \sup_{x\in L,\, \alpha\in\mathbb{R},\, ||x+\alpha y||\neq 0} \frac{1}{||y + \frac{1}{\alpha}x||} =$$

   $$= \sup_{x\in L,\, \alpha\in\mathbb{R},\, ||x+\alpha y||\neq 0} \frac{1}{\underbrace{\Big|\Big|y - \underbrace{(-\frac{1}{\alpha}x)}_{\in L}\Big|\Big|}_{\geqslant d}} = \frac{1}{d}$$ $\square$

4. Пусть L – линейное подпространство в X и $L \neq X \implies \exists\, f:\ f(x) = 0$ при $x \in L$ и $||f|| = 1$.

   Доказательство: $\exists\, x_0 \notin L,\ \exists f \in X^*:\ ||f|| = \frac{1}{d}$, d – расстояние от x_0 до L. $F = df \implies ||F|| = \frac{d}{d} = 1$ – нормаль линейного подпространства F. $\square$

Определение: $L^{\perp} = \{f \in X^* \mid f(x) = 0$ при $x \in L\}$ – *аннулятор* L.
[Обозначение: $\langle f,\, x\rangle = f(x)$]

11.2 Сопряжённое пространство к нормированному пространству X

Определение: X^* – пространство линейных ограниченных функционалов – называется *сопряжённым*.

$$||f|| = \sup_{x\neq 0} \frac{f(x)}{||x||}$$

Утверждение: Сопряжённое пространство всегда полное.

Доказательство:

1. Пусть f_n – фундаментальная последовательность в $X^* \implies ||f_n - f_m|| \to 0$ $n,\, m \to \infty$

   $$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |(f_n - f_m)x| \leqslant ||f_n - f_m||\,||x|| \to 0 \implies f_n(x) \text{ фундаментальна}$$

   $$\exists\, y = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \implies f_n \to f$$

   $$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon ||x||$$

   $$n,\, m > N:\ \sup_{x\neq 0} \frac{|f_n(x) - f_m(x)|}{||x||} \leqslant \varepsilon$$

   При $m \to \infty:\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon ||x|| \implies ||f_n - f|| \to 0$

2. $||f|| = ||f - f_n + f_n|| < \underbrace{||f - f_n||}_{\to 0} + \underbrace{||f_n||}_{<c\in\mathbb{R}}$ $\square$

12 Лекция от 21.11.22: Теоремы Рисса

Определение: $L_\mu^\infty[a;\,b]$ – пространство существенно ограниченных функций,
$L_\mu^\infty[a;\,b] = \{x : [a;\,b] \to \mathbb{R} \,\big|\, \exists c \in \mathbb{R} : \mu\{t \,\big|\, |x(t)| > c\} = 0\},\ x$ – классы эквивалентных функций.
(т.е. функции, ограниченные константой везде, кроме точек меры 0)

$$||x||_{L_\mu^\infty[a;\,b]} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \inf_{c\in\mathbb{R}}\{c \,|\, \mu\{t \,\big|\, |x(t)| > c\} = 0\} \text{ (существенный супремум)}$$

Утверждение: Пространство, сопряжённое к несепарабельному пространству, несепарабельно.

Доказательство: От противного: пусть X несепарабельное, X^* сепарабельное. $\{f_i\}$ – всюду плотное множество в X^*, $i \in \mathbb{N}$.

$$|f_i(x_i)| \geqslant \frac{1}{2}||f_i||, \quad ||x_i|| = 1$$

$$\sup_{||x||=1} |f_i(x)| = ||f_i||$$

$$L = \mathrm{Lin}\{x_i\} \qquad x_i \text{ счётное } \implies \exists\, x_0 \notin L,\ x_0 \in X$$

Из теоремы Хана-Банаха: $\exists\, \psi \in X^* : \psi(x_0) = ||x_i||,\ ||\psi|| = 1,\ \psi(x) = 0,\ x \in L$

$$\exists\, f_{i_n} \to \psi : 1 = ||f_{i_n} - \psi||\,||x_{i_n}|| \geqslant \underbrace{|f_{i_n}(x_{i_n}) - \overbrace{\psi(x_{i_n})}^{=0}|}_{\text{в силу сходимости}\to 0} \geqslant \frac{1}{2}||f_{i_n}|| \implies ||f_{i_n}|| \to 0$$

$$|\psi(x_0) - f_{i_n}(x_0)| \leqslant \underbrace{||\psi - f_{i_n}||}_{\to 0}\,||x_0||$$

$$\implies f_{i_n}(x_0) \to \psi(x_0) = 1, \quad f_{i_n}(x_0) \to 0 \implies \text{противоречие.}$$

□

12.1 Теоремы Рисса

1. $l_p,\ p \in [1;\,\infty)$. Пусть $f \in l_p^*,\ x \in l_p,\ x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, где e_k – последовательности нулей с единицей на k-м месте, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Тогда $l_p^* \cong l_q$.

   Доказательство:

$$\left|\left|\sum_{k=n}^{m} x_k e_k\right|\right|^p \leqslant \sum_{k=n}^{m} |x_k|^p \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k x_k,\ \widetilde{f}_k = f(e_k)$$

$$||f|| - \sup_{||x||\leqslant 1} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k x_k\right| \leqslant \sup_{||x||\leqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{f}_k|^q\right)^{1/q} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}}_{||x||} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{f}_k|^q\right)^{1/q} = ||\widetilde{f}||_q$$

   Докажем, что $f \in l_q$ (считаем, что $\widetilde{f} \in l_\infty$ при $p = 1,\ q = \infty$):

$p \neq 1:$

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k x_k\right| \leqslant \Big|\ \text{неравенство Гёльдера}\ \Big| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{f}_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = ||\widetilde{f}||_q\, ||x||_p$$

$$\frac{|f(x)|}{||x||} \leqslant ||\widetilde{f}||_q$$

$$x^{(n)} = (\operatorname{sgn}\widetilde{f}_1|\widetilde{f}_1|^{q-1},\ \operatorname{sgn}\widetilde{f}_2|\widetilde{f}_2|^{q-1},\ \dots,\ \operatorname{sgn}\widetilde{f}_n|\widetilde{f}_n|^{q-1},\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots)$$

$$\frac{|f(x^{(n)})|}{||x^{(n)}||} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|\widetilde{f}_k|^q}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|\widetilde{f}_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p}} \ominus$$

$$(q-1)p = qp(1-\frac{1}{q}) = qp\frac{1}{p} = q$$

$$\ominus\ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|\widetilde{f}_k|^q}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|\widetilde{f}_k|^{q}\right)^{1/p}} = \left(\sum_{k=1}^{n}|\widetilde{f}_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}} = ||\widetilde{f}||_q \implies \text{верхняя оценка достигается и } ||f|| = ||\widetilde{f}||_q$$

$$\text{функционал ограничен} \implies \frac{|f(x^{(n)})|}{||x^{(n)}||} < c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\widetilde{f}_k|^q\right)^{1/q} < c \implies \text{ряд сходится} \implies \widetilde{f}\in l_q \qquad l_p^* \cong l_q$$

$p = 1:$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k x_k$$

$$|f(x)| \leqslant \sup_k|\widetilde{f}_k|\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| = ||\widetilde{f}||_\infty ||x||_1 \implies ||f|| \leqslant ||\widetilde{f}||_\infty$$

$$x^{(n)} = (0,\ 0,\ 0,\ \dots 0,\ \operatorname{sgn}(\widetilde{f}_n),\ 0,\ 0\dots) \quad ||x^{(n)}|| \leqslant 1$$

$$f(x^{(n)}) = |\widetilde{f}_n| < c \implies \widetilde{f}\in l_\infty$$

$$\sup_{x^{(n)}} f(x^{(n)}) = \sup_n|\widetilde{f}_n| = ||\widetilde{f}||_\infty$$

□

2. $\forall\, f\in L_p^*[a;\,b],\ p\in(1;\,\infty)\ \exists!\,\widetilde{f}\in L_q:$

$$f(x) = \int\limits_{[a;\,b]}\widetilde{f}(t)x(t)\,dt,\ ||f|| = ||\widetilde{f}||_{L_q[a;\,b]}$$

3. $(L_1[a;\,b])^* \cong L_\infty[a;\,b]\ (= L_\lambda^\infty[a;\,b])$

$$\forall\, f\in L_1^*[a;\,b] \quad ||f|| = ||\widetilde{f}||_{L_\infty[a;\,b]}$$

$$f(x) = \int\limits_{[a;\,b]}\widetilde{f}(t)x(t)\,dt$$

Пример: $L_\infty[-1;\,1]$, непрерывные функции $(C[a;\,b])$ образуют в этом пространстве линейное многообразие. Покажем, что существует функционал, для которого не существует таких $\widetilde{f}$, что $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \int\limits_{[a;\,b]}\widetilde{f}(t)x(t)\,dt$$

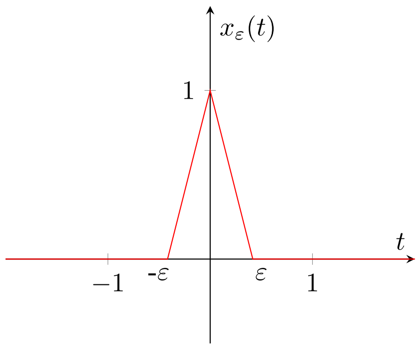
Пусть

$$f(x) = x(0),\ x\in C[-1;\,1] \quad ||f|| = 1$$

По следствию из теоремы Хана-Банаха: существует продолжение f на $L_\infty[-1;\,1]$, $||f||_{L_\infty} = 1$. Предположим, что $f(x)$ можно представить в следующем виде:

$$f(x) = \int\limits_{[-1;\,1]} x(t)\widetilde{f}(t)\,dt,\ \ \widetilde{f} \in L_1[-1;\,1]$$

Возьмём функцию $x_\varepsilon(t)$:



Заметим, что $x_\varepsilon \xrightarrow{\text{п.в.}} 0 \quad |x_\varepsilon| \leqslant 1$

$$1 = f(x_\varepsilon) = \int\limits_{[-1;\,1]} x_\varepsilon(t)\widetilde{f}(t)\,dt \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \text{ -- противоречие.}$$

Упражнение: Показать, что

$$\exists\, f \in l_\infty^* :\ \nexists\, \widetilde{f} \in l_1 :\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k x_k$$

Решение: Возьмём пространство сходящихся последовательностей $c \subset l_\infty$. Определим функционал.

Пусть $\forall\, x \in c:\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Заметим, что этот функционал является линейным. Кроме того, он ограничен:

$$\sup_{||x||\leqslant 1} |f(x)| = 1, \quad ||f|| = 1$$

По следствию из теоремы Хана-Банаха: f можно продолжить на l_∞ : $||f||_{l_\infty} = 1$. Возьмём последовательность x^1:

$$x^1 = (1,\,1,\,1,\,...)$$

$$f(x^1) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k\, 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k, \quad f(x^1) = \lim_{n\to\infty} x_n^1 = 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k = 1 \implies \text{ряд сходится}$$

$$x^2 = (0,\,1,\,1,\,...) \quad ... \quad x^n = (\underbrace{0,\,...\,,\,0,}_{n-1}\,1,\,1,\,...)$$

$$1 = f(x^n) = \sum_{k=1}^{n-1} 0\widetilde{f}_k + \sum_{k=n}^{\infty} 1\widetilde{f}_k = \sum_{k=n}^{\infty} \widetilde{f}_k \xrightarrow{\text{остаток ряда}} 0 \text{ -- противоречие.}$$

4. $\forall\, f \in (C[a;\,b])^*\ \exists$ монотонные неубывающие ограниченные на $(a-\varepsilon;\,b]$, $\varepsilon > 0$ непрерывные справа функции $F_1,\ F_2$:

$$f(x) = \int\limits_{[a;\,b]} x(t)\,dF_1(t) - \int\limits_{[a;\,b]} x(t)\,dF_2(t) =: \int\limits_{[a;\,b]} x(t)\,d(F_1(t) - F_2(t)) \qquad F(t) := F_1(t) - F_2(t)$$

$$||x|| = \sup_{a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant b,\ n\in\mathbb{N}} \sum_{k=2}^{n} |F(t_k) - F(t_{k-1})|$$

– полная вариация F (сумма приращений по каждому участку монотонности)

Упражнение: c_0^* – пространство сходящихся к 0 последовательностей. Доказать, что $c_0^* \cong l_1$.

Решение: Определим норму в c_0: $||x|| = \sup\limits_k |x_k|$.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \underbrace{f(e_k)}_{\widetilde{f}} \text{ – в силу линейности}$$

$$||f|| = \sup_{||x||\leqslant 1} \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k \underbrace{x_k}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{f}_k| = ||\widetilde{f}||_1$$

Покажем, что норма достигается с помощью примера последовательности x_k:

$$x_k = (1, \ldots 1, 0, \ldots 0) \qquad ||x^2|| = 1$$

□

12.1.1 Теорема Рисса для гильбертовых пространств

Пусть H – гильбертово пространство, тогда $\forall\, f \in H^*\ \exists!\, \widetilde{f} \in H:\ f(x) = (\widetilde{f}, x),\ ||f|| = ||\widetilde{f}||$

Доказательство:

0) $f \equiv 0 \gg \widetilde{f} = 0$

1) $f \neq 0 \quad L = \{x \in H \mid f(x) = 0\} \implies \exists\, x_0 \notin L\ (x_0 \neq 0):\ x_0 \perp L,\ f(x_0) = 1$

$$y \in L:\ y := x - f(x)x_0 \quad f(y) = f(x) - f(x)f(x_0) = f(x) - f(x) = 0$$

$$y \perp x_0 \implies (y, x_0) = 0 \implies (x, x_0) - f(x)(x_0, x_0) = 0$$

$$f(x) = \frac{(x_0, x)}{(x_0, x_0)} = (\widetilde{f}, x), \quad \widetilde{f} = \frac{1}{(x_0, x_0)} x_0 = \frac{1}{||x_0||^2} x_0$$

Докажем, что $||f|| = ||\widetilde{f}||$:

$$||f|| = \sup_{||x||\leqslant 1} (\widetilde{f}, x) \leqslant \sup_{||x||\leqslant 1} ||\widetilde{f}||\,||x|| = ||\widetilde{f}||$$

Осталось показать, что эта оценка достигается:

$$\frac{|f(\widetilde{f})|}{||\widetilde{f}||} = \frac{(\widetilde{f}, \widetilde{f})}{||\widetilde{f}||} = \frac{||\widetilde{f}||^2}{||\widetilde{f}||} = ||\widetilde{f}||$$

□

13 Лекция от 28.11.22: Сходимость

13.1 Каноническое вложение

Пусть X – нормированное пространство, X^* к нему сопряжённое, $\psi_x: X^* \to \mathbb{R},\ x \in X,\ \psi_x(f) = f(x)$ – пример линейного ограниченного функционала на сопряжённом пространстве.

$$||\psi_x|| = \sup_{||f|| \leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sup_{||f|| \leqslant 1} ||f||\,||x|| = ||x||$$

Из следствия теоремы Хана-Банаха:

$$\exists\, \overline{f} \in X^*: \ \overline{f}(x) = ||x||,\ ||\overline{f}|| = 1$$

$$\psi_x(\overline{f}) = \overline{f}(x) = ||x|| \implies ||\psi_x|| = x$$

Определение: Введём функцию $\Pi(x) = \psi_x$. $\Pi: X \to X^{**}$ называется *каноническим вложением.*

Заметим, что функция Π непрерывна, так как

$$||\Pi(x) - \Pi(y)|| = ||\psi_x - \psi_y|| = \sup_{||f|| \leqslant 1} |f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{||f|| \leqslant 1} ||f||\,||x - y|| = ||x - y||$$

Определение: Если каноническое вложение является биекцией, то оно *рефлексивно.*

Так как отображение непрерывно $\implies$ свойства полноты и сепарабельности сохраняются $\implies$ рефлексивное отображение всегда полно.

Пример (сепарабельного пр-ва)**:**

$$l_p,\ p \neq 1,\ p \neq \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1: \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k x_k,\ f = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k e_k \quad e_k(x) = x_k,\ e_k \in X^*,\ \widetilde{f} \in l_q$$

$$\psi_x(f) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k x_k,\ \psi \in X^{**} \qquad \psi(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k \underbrace{\psi(e_k)}_{\widetilde{x}_k} \underbrace{\implies}_{\text{упражнение}} \widetilde{x} \in l_p$$

13.2 Сходимость

Пусть x_n – некоторая последовательность.

Определение: $x_n \xrightarrow{s} x$ (*x_n сходится сильно к x*), если $||x_n - x|| \to 0$.

Определение: $x_n \xrightarrow{w} x$ (*x_n сходится слабо к x*), если $\forall\, f \in X^*: \ f(x_n) \to f(x)$ $[f(x_n - x) \to 0]$.

Пусть $x_n \xrightarrow{w} x,\ x_n \xrightarrow{w} y$.

$$\begin{array}{r} -\, f(x_n - x) \to 0 \\ f(x_n - y) \to 0 \\ \hline f(x_n - x) - f(x_n - y) \to 0 \end{array}$$

$f(y - x) \to 0 \implies f(y - x) = 0 \implies y = x \implies$ предел единственен.

Замечание: Если $\exists$ сильный предел, то он совпадает со слабым.

Пример: В $l_p,\ p \in (1; \infty) \quad e_n = (0, 0, 0, \ldots 0, 1_n, 0, \ldots)$

$$||e_n - e_m|| = 2^{1/p},\ n \neq m$$

$f(e_n) = \widetilde{f}_n \to 0 \implies \widetilde{f} \in l_q$ – есть слабая сходимость, но нет сильной сходимости.

Сходимость операторов

Пусть теперь A_n – последовательность операторов из X в Y.

Определение: $A_n \xrightarrow{u} A$ (сходится *равномерно*), если $||A_n - A|| \to 0$.

Определение: $A_n \xrightarrow{s} A$ (сходится *сильно*), если $\forall\, x \in X: \; A_n x \to Ax$.

Определение: $A_n \xrightarrow{w} A$ (сходится *слабо*), если $\forall\, f \in Y^* \; \forall\, x \in X: \; f(A_n x) \to f(Ax)$ $[A_n \in \mathscr{L}(X, Y)]$.

$u \implies s \implies w$

Утверждение: $A \in \mathscr{L}(X, Y) \iff A$ непрерывен, т.е.

$$x \to y \implies ||Ax - Ay||_Y \to 0 \quad x,\; y \in X \quad ||x - y||_X \to 0$$

$$||Ax - Ay|| \leqslant ||A||\,||x - y|| \to 0$$

13.3 Принцип равномерной ограниченности

Для доказательства теоремы воспользуемся нижеприведённой леммой.

Лемма: Пусть $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$, X банахово и $\exists\, x_0 \in X$, $r > 0$, $\exists\, c \in \mathbb{R}: \; \forall\, x \in B_r(x_0)$ (B_r – шар), $||A_n x|| < c$. Тогда $||A_n||$ ограничена.

Доказательство:

$$x_0 + \frac{r}{||x||} x \in B_r(x_0)$$

$$\left|\left| x_0 - \left(x_0 + \frac{r}{||x||} x \right) \right|\right| = \left|\left| \frac{r}{||x||} x \right|\right| = r \frac{||x||}{||x||} = r$$

$$\left|\left| A_n \frac{r}{||x||} x \right|\right| = \left|\left| A_n \frac{r}{||x||} x + A_n x_0 - A_n x_0 \right|\right| \leqslant \underbrace{\left|\left| A_n \left(\frac{r}{||x||} x + x_0 \right) \right|\right|}_{\in B_r(x_0)} + \underbrace{||A_n x_0||}_{\in B_r(x_0)} < 2c$$

$$\left|\left| A_n \frac{r}{||x||} x \right|\right| = \frac{r}{||x||} ||A_n x|| \implies \frac{||A_n x||}{||x||} \leqslant \frac{2c}{r}$$

$$\implies ||A_n|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||A_n x||}{||x||} \leqslant \frac{2c}{r} \implies ||A_n|| \text{ ограничена.}$$ □

Теорема [ПРО]: Пусть $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$, X – банахово пространство, $\forall\, x \in X: \; \{A_n x\}$ – ограниченная последовательность. Тогда $||A_n||$ тоже ограничена.

Доказательство:

От противного: пусть последовательность норм не является ограниченной. Тогда $\exists\, n_1,\; x_1 : \; A_{n_1} x_1 > 1$.

Функционал A_{n_1} ограничен, следовательно, он непрерывен $\implies \exists\, B_{r_1}(x_1) : \; \forall\, x \in B_{r_1}(x_1) : \; A_{n_2} x > 1$

$\implies ||A_n x||$ не ограничена на $B_{r_1}(x_1) \implies \exists\, x_2 \in B_{r_1}(x_1) : \; A_{n_2} x_2 > 2$

Из непрерывности получаем, что $\exists\, B_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1} : \; \forall\, x \in B_{r_2}(x_2) : \; A_{n_2} x > 2$

Тогда $\exists\, B_{r_k}(x_k) \subset B_{r_{k-1}}(x_{k-1})$, на котором $A_{r_k} x > k$. Пусть $r_k \to 0$

$$B_{r_k}(x_k) \subset B_{r_{k-1}}(x_{k-1}) \xRightarrow[\text{вложенных шарах}]{\text{теорема о}} \exists\, \overline{x} \in \bigcap_k B_{r_k}(x_k) \text{ – принадлежащая всем шарам точка.}$$

$A_{n_k}(\overline{x}) > k \implies$ получили противоречие. □

13.4 Теорема Банаха-Штейнгауза

Пусть $A_n \in \mathscr{L}(X, Y),\ X$ – банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Тогда

$$A_n \xrightarrow{s} A \iff \begin{array}{l} 1)\ ||A_n|| \text{ ограничена} \\ 2)\ A_n x \to Ax \text{ при } x \in L,\ \overline{L} = X,\ L \text{ – ЛМ в } X \end{array}$$

Доказательство:

$\Rightarrow$: $A_n x$ ограниченная $\xRightarrow{\text{ПРО}}$ $||A_n||$ ограничена.

$\Leftarrow$: $x' \in L:\ ||x - x'|| < \varepsilon$

$$||A_n x - Ax|| = ||A_n x - A_n x' + A_n x' - Ax' + Ax' - Ax|| \leqslant \underbrace{||A_n||}_{<c\in\mathbb{R}}\ \underbrace{||x - x'||}_{<\varepsilon} + \underbrace{||A_n x' - Ax'||}_{\to 0} + ||A||\ \underbrace{||x' - x||}_{<\varepsilon} < k(c)\varepsilon$$

$$\Longrightarrow A_n x \to Ax \Longrightarrow A_n \xrightarrow{s} A$$ □

13.4.1 Следствия

1. Если $x_n \xrightarrow{w} x$, то $||x_n||$ ограничена.

   Доказательство: $\forall\, f \in X^* :\ f(x_n) \to f(x) \iff \forall\, f\ \psi_{x_n}(f) \to \psi_x(f) \iff \psi_{x_n} \xrightarrow{s} \psi_x$
   $||\psi_{x_n}|| = ||x_n||$ ограниченная. □

2. *Критерий слабой сходимости в* l_p :

$$x^{(n)} \xrightarrow{w} x \text{ в } l_p,\ p \in (1; \infty) \iff \begin{array}{l} 1)\ ||x^{(n)}|| < c \\ 2)\ x_k^{(n)} \to x_k,\ n \to \infty \text{ (покоординатная сходимость)} \end{array}$$

   Доказательство:

   $\Rightarrow$: 1) Из следствия 1.
   2) $f(x) = x_k,\ f \in X \quad f(x^{(n)}) = x_k^{(n)} \to x_k = f(x)$

   $\Leftarrow$: $f(x_n) \to f(x) \iff \psi_{x_n} \xrightarrow{s} \psi_x$ – функционалы на X^*.

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \widetilde{f}_k e_k \;\middle|\; e_k(x) = x_k \right\} \qquad f \in L$$

$$\psi_{x^{(n)}}(f) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{f}_k x_k^{(n)} \to \sum_{k=1}^{n} \widetilde{f}_k x_k = \psi_x(f)$$

   Полученное множество всюду плотно в $X^* \Longrightarrow x^{(n)} \xrightarrow{w} x$. □

Упражнение: Доказать, что в конечномерных пространствах сильная и слабая сходимости совпадают.

Упражнение: *(Теорема Шура)* В l_1 сильная и слабая сходимости равносильны.

Упражнение: Доказать, что в $C[a; b]$:

$$x_n \xrightarrow{w} x \iff \begin{array}{l} 1)\ ||x_n|| \text{ ограничена} \\ 2)\ \forall\, t \in [a; b]\ x_n(t) \to x(t) \end{array}$$

14 Лекция от 05.12.22: Обратный оператор. Сопряжённый оператор

$\mathscr{L}(X, Y)$ – линейные ограниченные операторы из X в Y.

$$||A|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} ||Ax|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Упражнение: Доказать, что $A \in \mathscr{L}(X, Y) \iff A$ линеен и непрерывен (ограниченность эквивалентна непрерывности).

Утверждение: Если Y – полное (банахово) пространство $\implies \mathscr{L}(X, Y)$ полное.

Доказательство:

Пусть A_n – фундаментальная последовательность: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n, p > N\ ||A_n - A_p|| \leqslant \varepsilon$

$$||A_n x - A_p x|| \leqslant \underbrace{||A_n - A_p||}_{\leqslant \varepsilon} \underbrace{||x||}_{=c \in \mathbb{R}} \implies A_n x \text{ фундаментальна в } Y \implies A_n x \to y$$

Оператор $Ax = \lim\limits_{n \to \infty} A_n x$ линеен:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n \to \infty} A_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \lim_{n \to \infty} A_n x_1 + \beta \lim_{n \to \infty} A_n x_2 = \alpha A x_1 + \beta A x_2$$

$$||A_n x - A_p x|| \leqslant \varepsilon ||x|| \quad \forall n, p > N$$

При $p \to \infty$ получаем

$$||A_n x - Ax|| \leqslant \varepsilon ||x||$$

$$\frac{||A_n x - Ax||}{||x||} \leqslant \varepsilon \implies ||A_n - A|| \leqslant \varepsilon$$

Осталось проверить ограниченность.

$$||A|| \leqslant \underbrace{||A_n - A||}_{\leqslant \varepsilon} + ||A_n|| \qquad \square$$

Утверждение: Если X, Y – банаховы пространства, $\forall x \in X\ A_n x$ фундаментальна ($A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$), то $\exists A \in \mathscr{L}(X, Y):\ A_n x \to Ax$ ($A_n \xrightarrow{s} A$).

Доказательство: Y банахово $\implies A_n x$ фундаментальна $\implies A_n x \to Ax,\ A$ линейный.

$$\forall x \in X\ A_n x \text{ ограничен } \xRightarrow[X \text{ банахово}]{\text{ПРО}} ||A_n|| < c,\ c \in \mathbb{R}$$

Осталось проверить, что A ограничен.

$$\frac{||A_n x||}{||x||} < c \qquad n \to \infty: \frac{||Ax||}{||x||} \leqslant c \implies A \in \mathscr{L}(X, Y) \qquad \square$$

Определение: Пусть $A: X \to Y,\ B: Y \to Z \implies BA: X \to Z \quad (BA)(x) = B(Ax)$ – *умножение операторов.*

Утверждение: $||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$.

Доказательство:

$$||ABx|| \leqslant ||A||\,||Bx|| \leqslant ||A||\,||B||\,||x|| \qquad \frac{||ABx||}{||x||} \leqslant ||A||\,||B|| \implies ||AB|| \leqslant ||A||\,||B|| \qquad \square$$

14.1 Обратный оператор

Определение: Пусть $A: X \to Y$ – биективный ограниченный оператор.
$A^{-1}: Y \to X: \; Axy \iff x = A^{-1}y$ – *обратный оператор.*

Лемма:

$$B = A^{-1} \iff \begin{array}{l} 1)\; AB = I: Y \to Y \; (Iy = y) \\ 2)\; BA = I: X \to X \; (Ix = x) \end{array}$$

Доказательство: $ABy = y \quad BAx = x$
Пусть $Ax = y \qquad x = By$
Пусть $x = By \qquad y = Ax$ $\square$

Утверждение: Если $A\ (X, Y)$ – линейный оператор, то A^{-1} тоже линейный.

Доказательство: Пусть $x, z \in Y$.
$A^{-1}x = u \qquad A^{-1}z = v$
$x = Au \qquad z = Av$
$\alpha x + \beta z = A(\alpha u + \beta v) \implies \alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}z = \alpha u + \beta v = A^{-1}(\alpha x + \beta z)$ $\square$

14.1.1 Теорема Банаха

$A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и X, Y полные $\implies A^{-1} \in \mathscr{L}(X, Y)$.

Доказательство:

Определение: Пусть $A: X \to X$. Тогда

$$A^2 = AA \qquad A^n = A^{n-1}A \qquad A^0 = I$$

При этом $||A^n|| \leqslant ||A||^n$.

Теорема: Пусть $A \in \mathscr{L}(X, X)$, X банахово, $||A|| < 1$. Тогда

$$\exists\, (I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X, X): \; (I - A)^{-1} := \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + A + A^2 + \ldots$$

Доказательство: Для начала докажем, что ряд сходится.

$$\left|\left|\sum_{k=n}^{n+m} A^k\right|\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} ||A||^k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} ||A||^k = \frac{||A||^n}{1 - ||A||} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\text{Пусть } B := \sum_{n=0}^{\infty} A^n \in \mathscr{L}(X, X)$$

Осталось доказать, что $B(I - A) = I$:

$$B = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} A^k}_{B_n} \qquad B_n \to B \implies B_nA \to BA \qquad ||B_nA - BA|| \leqslant ||A||\,||B_n - B|| \to 0$$

$$B(I-A) = \lim_{n\to\infty}(I+A+A^2+\ldots+A^n)(I-A) = \lim_{n\to\infty}(I-A+A-A^2+A^2-\ldots-A^{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(I-A^{n+1}) = I\square$$

14.1.2 Теорема об устойчивости обратного оператора

Пусть $A \in \mathscr{L}(X,\, X)$, X банахово, $||B|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$. Тогда $\exists\,(A+B)^{-1} \in \mathscr{L}(X,\, X)$.

Доказательство: $\exists\,(A+B)^{-1} \iff \exists\,(A^{-1}(A+B))^{-1}$

1. Если $A+B$ – биекция, A – биекция $\implies A^{-1}(A+B)$ – тоже биекция.
2. $A+B = AA^{-1}(A+B)$

   $$A^{-1}(A+B) = I + A^{-1}B \quad ||A^{-1}B|| \leqslant ||A^{-1}||\,||B|| < 1 \text{ при } ||B|| < \frac{1}{||A^{-1}||} \qquad \square$$

14.2 Сопряжённый оператор

$A \in \mathscr{L}(X,\, Y)$. Пусть $f \in Y^*$, $f(Ax) = g(x)$, $g \in X^*$.

Определение: $A^* : Y^* \to X^* \quad A^*f = g : \; f(Ax) = g(x)\; \forall\, x \in X$ – *сопряжённый* A *оператор.*

14.2.1 Свойства сопряжённого оператора

1. A^* линейный:

   $$A^*(\alpha f_1+\beta f_2)(x) = (\alpha f_1+\beta f_2)(Ax) = \alpha f_1(Ax)+\beta f_2(Ax) = \alpha(A^* f_1)(x)+\beta(A^* f_2)(x) = \alpha A^* f_1+\beta A^* f_2$$

2. $(A+B)^* = A^* + B^*$

   $$((A+B)^*f)(x) = f((A+B)x) = f(Ax) + f(Bx) = (A^*f)(x) + (B^*f)(x)$$

Утверждение: $||A|| = ||A^*||$.

Доказательство:

1. $|(A^*f)(x)| = |f(Ax)| \leqslant ||f||\,||Ax|| \leqslant ||f||\,||A||\,||x||$

   $$||A^*f|| = \sup_{||x||\leqslant 1} |(A^*f)x| \leqslant ||A||\,||f|| \qquad \frac{||A^*f||}{||f||} \leqslant ||A|| \implies ||A^*|| = \sup_{f\neq 0}\frac{||A^*f||}{||f||} \leqslant ||A||$$

2. По следствию из теоремы Хана-Банаха: $\forall\, y \in Y\; \exists\, f \in Y^* : \; ||f|| = 1 \;\; f(y) = ||y||$

   $$\implies ||Ax|| = f(Ax) = (A^*f)x \leqslant ||A^*||\,||f||\,||x|| = ||A^*||\,||x||$$

   $$\implies \frac{||Ax||}{||x||} \leqslant ||A^*|| \implies ||A|| \leqslant ||A^*||$$

1., 2. $\implies ||A|| = ||A^*||$ $\square$

Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$. По теореме Рисса $f(x) = (\widetilde{f},\, x)$, $\widetilde{f} \in H$.

$$f(Ax) = (\widetilde{f},\, Ax) = g(x) = (\widetilde{g},\, x) \implies \widetilde{g} = A^*\widetilde{f}$$

Определение: В гильбертовых пространствах оператор A^*, сопряжённый оператору $A : H \to H$:

$$A^* : H \to H \quad \forall\, x,\, y \in H : \; (y,\, Ax) = (A^*y,\, x)$$

Пример: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$(y,\, Ax) = y^T Ax = (A^Ty)^T x = (A^Ty,\, x) \implies A^* = A^T$$

Пример: $A : l_2 \to l_2 \qquad Ax = (x_1 - x_2,\, x_3 - x_4,\, x_5 - x_6,\, \ldots)$

$$f(Ax) = \widetilde{f}_1(x_1-x_2)+\widetilde{f}_2(x_3-x_4)+\widetilde{f}_3(x_5-x_6)+\ldots = \widetilde{f}_1x_1-\widetilde{f}_1x_2+\widetilde{f}_2x_3-\widetilde{f}_2x_4+\widetilde{f}_3x_5-\widetilde{f}_3x_6+\ldots = g(x) = (A^*f)(x)$$

$$\implies A^*f = (\widetilde{f}_1,\, -\widetilde{f}_1,\, \widetilde{f}_2,\, -\widetilde{f}_2,\, \widetilde{f}_3,\, -\widetilde{f}_3,\, \ldots) \qquad ||A^*f||^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k^2 = 2||f||^2 \qquad ||A^*f|| = \sqrt{2}||f||$$

$$\frac{||A^*f||}{||f||} = \sqrt{2} \implies ||A^*|| = \sqrt{2} \implies ||A|| = ||A^*|| = \sqrt{2}$$

15 Лекция от 12.12.22: Комплексификация нормированного пространства

Определение: *Комплексификация* – переход от вещественного пространства к приближенному к нему комплексному.

Пусть X – линейное пространство, определим операторы в комплексном виде:

1. $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2. $(x_1 + iy_2)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$
3. $||x + iy|| = \sqrt{||x||^2 + ||y||^2}$
4. $A \in \mathscr{L}(X, Y), \ A(x + iy) = Ax + i(Ay)$

$$||A||_{\mathbb{C}} = \sup_{x,\ y,\ ||x||^2+||y||^2 \leqslant 1} ||A(x + iy)|| = ||A||$$

Определение: Комплексные евклидовы пространства называют *унитарными.*

Определение: Функция $(\cdot, \cdot): \ H \to \mathbb{C}$ называется *скалярным произведением*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $(x, x) \geqslant 0, \ (x, x) = 0 \iff x = 0$, скалярный квадрат вещественен
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ – сопряжённое
3. $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$ – линейность по первому аргументу

Примеры:

1. $\mathbb{C}^n \qquad (x, y) = x^T\overline{y} \qquad (y_k = a + ib, \ \overline{y_k} = a - ib)$
2. $l_2 \qquad (x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}$
3. $L_2[a; b]$

$$(x, y) = \int\limits_{[a;\, b]} x(t)\overline{y(t)}\, dt$$

Замечание: $(x, ay) = \overline{(ay, x)} = \overline{a(y, x)} = \overline{a}\overline{(y, x)} = \overline{a}(x, y)$.

15.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant ||x||\, ||y||$$

Доказательство:

$$0 \leqslant (x + ty, x + ty) = (x, x) + t(y, x) + \overline{t}(x, y) + t\overline{t}(y, y) = \left| t = -\frac{(x, y)}{(y, y)} \right| =$$

$$= (x, x) - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} - \frac{(y, x)(x, y)}{(y, y)} + \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)^2}(y, y) = (x, x) - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} = (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}$$

$$\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \leqslant (x, x) \implies |(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

□

15.2 Сопряжённые операторы в комплексном гильбертовом пространстве

Определение: $A^* : \ H \to H : \ \forall\, x,\, y \in H \ (Ax,\, y) = (x,\, A^* y), \ ||A|| = ||A^*||.$

Свойства:

1. $A^{**} = A$
   $(Ax,\, y) = (x,\, A^* y), = \overline{(A^* y,\, x)} = \overline{(y,\, A^{**}x)} = (A^{**}x,\, y) \implies (Ax - A^{**}x,\, y) = 0 \ \forall\, y$
   $\implies Ax - A^{**}x = 0 \ \forall\, x \implies A = A^{**}$

2. $(AB)^* = B^* A^*$
   $(ABx,\, y) = (Bx,\, A^* y) = (x,\, B^* A^* y)$

3. $(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A;$ A – *самосопряжённый оператор*, если справедливо равенство $A = A^*$

4. $A = A^* \implies ||A^2|| = ||A||^2$
   $(Ax,\, Ax) = (x,\, A^* Ax) \leqslant ||x||\, ||A^* A||\, ||x|| = ||A^2||\, ||x||^2 \qquad ||A||^2 \leqslant ||A^2|| \leqslant ||A||^2 \implies ||A^2|| = ||A||^2$

5. $Q_A(x) = (Ax,\, x)$ – квадратичная форма оператора A
   $A = A^* \iff (Ax,\, x) \in \mathbb{R} \ \forall\, x$

   $\Rightarrow$: В силу равенства A и A^*: $(Ax,\, x) = (x,\, Ax) = \overline{(Ax,\, x)} \implies (Ax,\, x) \in \mathbb{R}$

   $\Leftarrow$: $P_A(x,\, y) = (Ax,\, y)$ – билинейная форма.
   Пусть $P_A(x,\, y) = P_B(x,\, y) \implies (Ax,\, y) = (Bx,\, y) = 0 \implies Ax - Bx = 0 \implies Ax = Bx \ \forall\, x.$
   Билинейная форма однозначно определяет оператор и выражается через квадратичную форму следующим образом:

   $$4P_A(x,\, y) = Q_A(x+y) - Q_A(x-y) + iQ_A(x+iy) - iQ_A(x-iy)$$

   $$(Ax,\, x) \in \mathbb{R} : \ Q_A(x) = (Ax,\, x) = (x,\, A^* x) = \overline{(A^* x,\, x)}\, [\in \mathbb{R}] = (A^* x,\, x) = Q_{A^*}(x) \implies A = A^*$$

   Замечание: В евклидовых пространствах в $\mathbb{R}$ квадратичная форма не определяет оператор однозначно.

   Пример:

   $$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad x,\ y \in \mathbb{R}$$

15.3 Введение в спектральную теорию

Пусть X – банахово пространство, $A : \ \mathscr{L}(X,\, X)$
$Ax = \lambda x \qquad (A - \lambda I)x = 0$

Определение: $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ – *резольвента* A.

Определение: *Спектр оператора* A – это множество $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых резольвента не определена. Остальные значения λ называются *регулярными*.
[Обозначение: $\sigma(A)$]

15.3.1 Теорема о спектре

1. $\sigma(A)$ – компакт (замкнут и ограничен)
2. $\lambda \in \sigma(A) \implies |\lambda| \leqslant ||A||$
3. $\lambda \in \sigma(A) \implies |\lambda| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}$
4. Если $A = A^*$, то $\lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} = ||A||$

Доказательство:

1. Пусть существует обратный оператор $A-\lambda I \xRightarrow{\text{th Банаха}} A-\lambda I$ ограничен. Тогда $A-\lambda I+\varepsilon I$ ограничен при малых ε (из теоремы об устойчивости обратного оператора) $\implies$ $\lambda+\varepsilon$ тоже регулярно $\implies$ множество регулярных λ открыто $\implies$ его дополнение замкнуто $\implies$ спектр является компактом.
2. $$R_\lambda = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1} = -\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}A^k$$

   Сходится при $\left|\left|\frac{1}{\lambda}A\right|\right| < 1 \iff |\lambda| > ||A||$ (λ регулярно). Тогда ряд сходится, если $\lambda > \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}||A^k||^{1/k}$.

   Лемма Фекете: Если $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \inf\limits_n \frac{a_n}{n}$.

   Доказательство:

   $$\varepsilon > 0 \qquad \frac{a_{n\varepsilon}}{n_\varepsilon} - A < \varepsilon \qquad n = kn_\varepsilon + r \qquad a_{rn_\varepsilon} \leqslant a_{kn_\varepsilon} + a_{n_\varepsilon}$$

   $$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{kn_\varepsilon} + r}{kn_\varepsilon + r} \leqslant \frac{ka_{n_\varepsilon} + a_r}{kn_\varepsilon + r} = \frac{a_{n_\varepsilon} + \frac{a_r}{k}}{n_\varepsilon + \frac{r}{k}} \to \frac{a_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} < A + \varepsilon$$

   $$\implies \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n} \leqslant A, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n} \geqslant A = \inf_n\frac{a_n}{n} \implies \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = A \qquad \square$$
3. $a_n = \ln||A^n||,\ a_{n+m} = \ln||A^{n+m}|| = \ln||A^nA^m|| \leqslant \ln||A^n|| + \ln||A^m||$. Применим лемму:

   $$\exists \lim_{n\to\infty}\frac{\ln||A^n||}{n} = \lim_{n\to\infty}||A^n||^{1/n} = B \implies ||A^n||^{1/n} \to e^B$$
4. Пусть $A = A^*$.

   $$||A^2|| = ||A||^2 \implies ||A^{2^n}|| = ||A||^{2^n} \implies \lim_{n\to\infty}||A^n||^{1/n} = \lim_{n\to\infty}||A^{2^n}||^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty}||A|| = ||A|| \qquad \square$$

Замечание 1: Если λ – собственное значение, то $A-\lambda I$ не инъективно.

$$\begin{cases} Ax - \lambda x = 0, \\ A0 - \lambda 0 = 0; \end{cases} \iff \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\}$$

Замечание 2: Если $A-\lambda I$ инъективно, но не сюръективно, то $\lambda \in \sigma(A),\ \operatorname{Im}(A-\lambda I) \neq X$.

16 Лекция от 19.12.22: Компактный оператор

Теорема *(критерий Вейля)***:** Пусть $A = A^*$ – линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \exists\, x_n \in H:\ ||x_n|| = 1,\ Ax_n - \lambda x_n \to 0.$$

Доказательство:

$\Leftarrow$: Пусть $\exists\, x_n$. Предположим, что $\lambda \notin \sigma(A)$ $(\exists\,(A-\lambda I)^{-1})$.

$$(A-\lambda I)x_n \to 0 \implies (A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)x_n \to 0 \implies x_n \to 0,\ \text{но } ||x_n|| = 1 \implies \text{противоречие.}$$

Значит, предположение неверно и $\lambda \in \sigma(A)$.

$\Rightarrow$: Докажем, что если $\nexists\, x_n$, то $\lambda \notin \sigma(A)$.

$$\inf_{||x||=1} ||Ax - \lambda x|| = \alpha > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left|\left|A\frac{1}{||x||}x - \frac{\lambda}{||x||}x\right|\right| \geqslant \alpha$$

$$||Ax - \lambda x|| \geqslant \alpha ||x||\ \forall\, x \in H \implies \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = \{0\} \iff A - \lambda I \text{ инъективный.}$$

Проверим, что $\operatorname{Im}(A-\lambda I) = H$, т.е. сюръективность этого оператора. Обозначм $A - \lambda I = Y$. Сначала докажем, что его замыкание совпадает с H.
Пусть $a \perp Y,\ a \neq 0$.

$$Y:\ (Ax - \lambda x,\, a) = 0\ \forall x \in H$$

$$(Ax - \lambda x,\, a) = ((A-\lambda I)x,\, a) = (x,\, (A-\lambda I)^* a) = (x,\, (A - \overline{\lambda} I)a) = (x,\, Aa - \overline{\lambda} a) = 0 \implies Aa = \overline{\lambda} a$$

$$(Aa,\, a) \in \mathbb{R},\ (Aa,\, a) = (\overline{\lambda} a,\, a) = \overline{\lambda}\underbrace{(a,\, a)}_{>0,\ \in \mathbb{R}} \implies \overline{\lambda} \in \mathbb{R} \implies \lambda = \overline{\lambda} \quad (Aa = \lambda a,\ (A-\lambda I)a = 0)$$

Так как $A - \lambda I$ инъективен, $(A-\lambda I)0 = 0 \implies a = 0$. Получили противоречие, значит, $\overline{Y} = H$.
Осталось проверить, что $Y = H$.
Пусть $y \in H,\ \exists\, x_n:\ y_n = (A-\lambda I)x_n \to y$.

$$0 \leftarrow ||y_n - y_m|| = ||(A-\lambda I)(x_n - x_m)|| \geqslant \alpha ||x_n - x_m||,\ x_n \text{ фундаментальна} \implies x_n \to x$$

$$y \leftarrow y_n = (A-\lambda I)x_n \to (A-\lambda I)x \implies y = (A-\lambda I)x \implies A - \lambda I \text{ сюръективный.}$$

Тогда существует и обратный оператор $\implies \exists\, R_\lambda,\ \lambda \notin \sigma(A)$. ☐

Следствия:

1. При $A = A^*$: $\inf\limits_{||x||=1} ||Ax - \lambda x|| > 0 \implies \lambda \notin \sigma(A)$ (λ регулярно).
2. Если в гильбертовом пространстве H оператор $A = A^*$, то $\sigma(A) \in \mathbb{R}$ $\quad (\sigma(A) \subset [-||A||;\, ||A||])$.

   Доказательство: Пусть $\lambda = a + ib,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ ||x|| = 1$.

$$||Ax - (a+ib)x|| = (Ax - ax - ibx,\, Ax - ax - ibx) = (Ax - ax,\, Ax - ax) - ib(x,\, Ax - ax) - (Ax - ax,\, ibx) + i(bx,\, ibx)$$

$$\geqslant -ib(x,\, Ax - ax) + ib(Ax - ax,\, x) + (bx,\, bx) = ||b||^2 ||x||^2 = ||b||^2$$

$$((A - aI)x,\, x) = (x,\, (A - aI)^* x) = (x,\, (A - aI)x)$$

$$\inf_{||x||=1} ||Ax - \lambda x|| \geqslant ||b||^2 \implies \text{Если } b \neq 0, \text{ то } \lambda \notin \sigma(A) \implies \sigma(A) \in \mathbb{R}$$ ☐

Утверждение: Если $A = A^*$, то $\sigma(A) \subset [m_A;\, M_A]$, где $m_A = \inf\limits_{||x||=1} Q_A(x),\ M_A = \sup\limits_{||x||=1} Q_A(x)$.

Доказательство: Пусть $Ax_n - \lambda x_n \to 0,\ ||x_n|| = 1$. Умножим скалярно на x_n:

$$\underbrace{(Ax_n,\, x_n)}_{Q_A(x_n)} - \lambda \underbrace{(x_n,\, x_n)}_{=1} \to 0 \implies Q_A(x_n) \to \lambda$$ ☐

Замечание: Можно доказать, что $m_A,\ M_A \in \sigma(A)$.

16.1 Компактный оператор

Определение: Линейный оператор $A: X \to Y$ (X, Y банаховы) называется *компактным*, если $\forall (x_n)$ ограниченных последовательностей в X из последовательности (Ax_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Примеры:

0. $I: l_2 \to l_2$ не компактный

$$e_n = (0,\, 0,\, 0,\, ...\, 0,\, 1_n,\, 0,\, ...) \qquad Ie_n = e_n, \quad ||e_n - e_m|| = \sqrt{2},\; n \neq m \implies e_n \text{ не фундаментальна}$$

1. $A: l_2 \to l_2$ компактный

$$y = Ax, \quad y_n = \alpha_n x_n, \quad \alpha_n \to 0$$

2. $A: L_2[0;\,1] \to L_2[0;\,1]$ компактный

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0;\,1]} K(t,\,s)x(s)\,ds, \quad \text{где } K \in L_2([0;\,1]^2)$$

3. $V: L_1[0;\,1] \to L_1[0;\,1]$ компактный

$$(Vx)(t) = \int\limits_{[0;\,t]} x(s)\,ds$$

16.1.1 Альтернатива Фредгольма

Пусть $A: X \to X$ – компактный оператор в банаховом пространстве X
$\implies \operatorname{Ker}(A - I) = \{0\} \iff \operatorname{Im}(A - I) = X$.

[Либо уравнение $Ax = x + y$ имеет единственное решение для любых y, либо однородное уравнение $Ax = x$ имеет ненулевое решение.]

16.1.2 Теорема Гильберта-Шмидта

Пусть $A: H \to H$ компактный, $A = A^*$, H – сепарабельное гильбертово пространство. Тогда в H $\exists$ базис e_n из собственных векторов оператора A, т.е. $Ae_n = \lambda_n e_n,\; \lambda_n \in \mathbb{R},\; \lambda_n \to 0$.

Пример: $Ax - x = y,\; A$ компактный, $A = A^*$.

$$x = \sum_k a_k e_k \quad y = \sum_k b_k e_k$$
$$A\sum_k a_k e_k - \sum_k a_k e_k = \sum_k b_k e_k$$
$$\sum_k a_k A e_k - \sum_k a_k e_k = \sum_k a_k e_k = \sum_k b_k e_k$$
$$\sum_k a_k \lambda_k e_k - \sum_k a_k e_k = \sum_k b_k e_k$$
$$\sum_k (a_k(\lambda_k - 1) - b_k)e_k = 0 \implies a_k = \frac{b_k}{\lambda_k - 1}$$