

В.П. МИНОРСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКЕ

ФИЗМАТГИЗ · 1961

В.П. МИНОРСКИЙ СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В. П. МИНОРСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

11-5-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	9
Глава I. Аналитическая геометрия на плоскости	11
§ 1. Координаты точки на прямой и на плоскости. Расстояние между двумя точками	11
§ 2. Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника и многоугольника	13
§ 3. Уравнение линии как геометрического места точек .	15
§ 4. Уравнение прямой; 1) с угловым коэффициентом, 2) общее, 3) в отрезках на осях	16
§ 5. Угол между прямыми. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Точка пересечения двух прямых	19
§ 6. Нормальное уравнение прямой. Расстояние точки от прямой. Уравнения биссектрис. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых	22
§ 7. Смешанные задачи на прямую	24
§ 8. Окружность	26
§ 9. Эллипс	28
§ 10. Гипербола	31
§ 11. Парабола	34
§ 12. Директрисы, диаметры и касательные к кривым 2-го порядка	37
§ 13. Преобразование декартовых координат. Параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $x = ay^2 + by + c$. Гипербола $xy = k$	40
§ 14. Смешанные задачи на кривые 2-го порядка	44
§ 15. Общее уравнение линии 2-го порядка	47
§ 16. Полярные координаты	51
§ 17. Алгебраические кривые 3-го и высших порядков .	54
§ 18. Трансцендентные кривые	56

Г л а в а II. Векторная алгебра	57
§ 1. Сложение векторов. Умножение вектора на скаляр	57
§ 2. Прямоугольные координаты точки и вектора в пространстве	60
§ 3. Скалярное произведение двух векторов	62
§ 4. Векторное произведение двух векторов	65
§ 5. Смешанное произведение трех векторов	67
Г л а в а III. Аналитическая геометрия в пространстве	70
§ 1. Уравнение плоскости	70
§ 2. Основные задачи на плоскость	72
§ 3. Уравнения прямой	74
§ 4. Прямая и плоскость	77
§ 5. Сферические и цилиндрические поверхности	80
§ 6. Конические поверхности и поверхности вращения	82
§ 7. Эллипсоид, гиперболоиды и параболоиды	84
Г л а в а IV. Высшая алгебра	88
§ 1. Определители	88
§ 2. Системы линейных уравнений	91
§ 3. Комплексные числа	94
§ 4. Уравнения высших степеней и приближенное решение уравнений	97
Г л а в а V. Введение в анализ	100
§ 1. Переменные величины и функции	100
§ 2. Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие. Предел переменной. Предел функции	103
§ 3. Свойства пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$	108
§ 4. Предел отношения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при $\alpha \rightarrow 0$	110
§ 5. Неопределенности вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$	111
§ 6. Смешанные примеры на вычисление пределов	112
§ 7. Сравнение бесконечно малых	112
§ 8. Непрерывность функции	114
§ 9. Асимптоты	117
§ 10. Число e	118

Г л а в а VI. Производная и дифференциал	120
§ 1. Производные алгебраических и тригонометрических функций	120
§ 2. Производная функции от функции	122
§ 3. Касательная и нормаль к плоской кривой	123
§ 4. Случаи недифференцируемости непрерывной функции	125
§ 5. Производные логарифмических и показательных функций	126
§ 6. Производные обратных круговых функций	128
§ 7. Производные гиперболических функций	129
§ 8. Смешанные примеры и задачи на дифференцирование	130
§ 9. Производные высших порядков	131
§ 10. Производная неявной функции	133
§ 11. Дифференциал функции	135
§ 12. Параметрические уравнения кривой	137
Г л а в а VII. Приложения производной	139
§ 1. Скорость и ускорение	139
§ 2. Теоремы о среднем	140
§ 3. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопитала	143
§ 4. Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум	146
§ 5. Задачи о наибольших и наименьших значениях величин	149
§ 6. Направление выпуклости и точки перегиба кривой. Построение кривых	151
Г л а в а VIII. Неопределенный интеграл	153
§ 1. Неопределенный интеграл. Интегрирование разложением	153
§ 2. Интегрирование подстановкой и непосредственное	155
§ 3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$ и к ним приводящиеся	157
§ 4. Интегрирование по частям	159
§ 5. Интегрирование тригонометрических функций	160
§ 6. Интегрирование рациональных алгебраических функций	162
§ 7. Интегрирование некоторых иррациональных алгебраических функций	164
§ 8. Интегрирование некоторых трансцендентных функций	166

§ 9. Интегрирование гиперболических функций. Гиперболические подстановки	167
§ 10. Смешанные примеры на интегрирование	168
Г л а в а IX. Определенный интеграл	171
§ 1. Вычисление спределенного интеграла	171
§ 2. Вычисление площадей	174
§ 3. Объём тела вращения	177
§ 4. Длина дуги плоской кривой	178
§ 5. Площадь поверхности вращения	180
§ 6. Задачи из физики	181
§ 7. Несобственные интегралы	184
§ 8. Среднее значение функции	187
§ 9. Формула трапеций и формула Симпсона	188
Г л а в а X. Кривизна плоской и пространственной кривой	191
§ 1. Кривизна плоской кривой. Центр и радиус кривизны. Эволюта	191
§ 2. Длина дуги кривой в пространстве	193
§ 3. Производная вектор-функции по скаляру и ее механическое и геометрическое значение. Естественный трехгранник кривой	194
§ 4. Кривизна и кручение пространственной кривой	196
Г л а в а XI. Частные производные, полные дифференциалы и их приложения	199
§ 1. Функции двух переменных и их геометрическое изображение	199
§ 2. Частные производные 1-го порядка	201
§ 3. Полный дифференциал 1-го порядка	203
§ 4. Производные сложных функций	205
§ 5. Производные неявных функций	206
§ 6. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков	208
§ 7. Интегрирование полных дифференциалов	211
§ 8. Особые точки плоской кривой	212
§ 9. Огибающая семейства плоских кривых	214
§ 10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	215
§ 11. Скалярное поле. Линии и поверхности уровней. Приводная в данном направлении. Градиент	217
§ 12. Экстремум функции двух переменных	219

Г л а в а XII. Дифференциальные уравнения	221
§ 1. Понятие о дифференциальном уравнении	221
§ 2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Ортогональные траектории	223
§ 3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: 1) однородное, 2) линейное, 3) Бернулли	225
§ 4. Дифференциальные уравнения, содержащие дифференциалы произведения и частного	227
§ 5. Дифференциальные уравнения 1-го порядка в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	228
§ 6. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не решенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро	229
§ 7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	231
§ 8. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	233
§ 9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	234
§ 10. Примеры дифференциальных уравнений разных типов	236
§ 11. Линейное дифференциальное уравнение Эйлера $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$	237
§ 12. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	238
§ 13. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка (метод характеристик) . .	238
Г л а в а XIII. Двойные, тройные и криволинейные интегралы	240
§ 1. Вычисление площади двойным интегралом	240
§ 2. Центр тяжести и момент инерции площади с равномерно распределенной массой (при плотности $\mu = 1$)	242
§ 3. Вычисление объема двойным интегралом	243
§ 4. Площади кривых поверхностей	245
§ 5. Тройной интеграл и его приложения	246
§ 6. Криволинейный интеграл. Формула Грина	248
§ 7. Интегралы по поверхности. Формулы Остроградского и Стокса	252

Г л а в а XIV. Ряды	255
§ 1. Числовые ряды	255
§ 2. Равномерная сходимость функционального ряда	259
§ 3. Степенные ряды	260
§ 4. Ряды Тейлора и Маклорена	262
§ 5. Приложения рядов к приближенным вычислениям	265
§ 6. Ряд Тейлора для функции двух переменных	267
§ 7. Ряд Фурье. Интеграл Фурье	269
О т в е т ы	273
П р и л о ж е н и я	351

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем «Сборнике» подобраны и методически распределены задачи и примеры по аналитической геометрии и математическому анализу, охватывающие всю программу курса высшей математики для вузов.

В начале каждого параграфа приведены формулы, определения и другие краткие пояснения теории, необходимые для решения последующих задач.

В конце каждого параграфа «Сборника» приведены (после чертёжей) задачи для повторения, составляющие около одной трети всего материала «Сборника». Эта особенность поможет преподавателю в подборе задач для работы в классе и для домашних заданий или для повторений перед контрольными работами. Кроме того, при таком распределении задач легко определить минимум, необходимый для усвоения курса, который можно рекомендовать заочникам или для работы на вечерних факультетах.

«Сборник» может быть использован как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса высшей математики во вузах, так как почти все задачи имеют ответы, а некоторые и решения и, кроме того, ко многим задачам в тексте или в ответах даны указания к их решению. Этому же способствуют краткие пояснения теории.

В третьем издании исправлены замеченные во втором издании опечатки и неточные формулировки задач. Кроме того, внесены небольшие исправления и дополнения в теоретический текст и добавлено несколько чертежей и несколько новых задач и примеров. Общая нумерация задач, однако, сохранена и новые задачи и примеры помещены преимущественно с дополнительной нумерацией: 2), 3) и т. п.

Таким образом, на занятиях можно пользоваться одновременно вторым и третьим изданием с учетом того, что содер-

жение задач: 144, 170, 268, 290, 380, 408—411, 430, 431, 443, 537, 665, 666, 670, 671, 817, 874—877, 913, 1003, 1050, 1070—1072, 1077, 1235, 1248—1254, 1425, 1515, 1769, 1776, 2042, 2235, 2270—2274, 2293, 2327, 2391, 2393, 2530—2532, 2537 изменено в третьем издании.

При исправлении книги автором были учтены многие замечания в рецензии доцента Л. Е. Садовского (*Успехи математических наук*, 1954 г., вып. 1), а также замечания и указания, сообщенные устно Е. Б. Ваховским, В. Б. Гуревичем, Г. И. Запорожцем, М. А. Шульман и другими преподавателями. Автор приносит глубокую благодарность всем этим товарищам, содействовавшим своим критическими замечаниями улучшению книги, а также благодарит доцента Р. Я. Шостака за тщательную подготовку ответов тех задач, которые были помещены вновь во втором издании, и редактора А. Т. Цветкова за составление и удачное расположение таблиц в приложениях книги.

В. Минорский

ГЛАВА I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Координаты точки на прямой и на плоскости. Расстояние между двумя точками

1°. Расстояние d между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ на оси:

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}. \quad (1)$$

2°. Величина AB (алгебраическая) направленного отрезка на оси:

$$AB = x_2 - x_1. \quad (2)$$

3°. Расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3)$$

4°. Проекции на оси координат направленного отрезка, или вектора \overrightarrow{AB} на плоскости с началом $A(x_1; y_1)$ и концом $B(x_2; y_2)$:

$$\text{пр}_x \overrightarrow{AB} = X = x_2 - x_1, \quad \text{пр}_y \overrightarrow{AB} = Y = y_2 - y_1. \quad (4)$$

1. Построить на числовой оси точки $A(-5)$, $B(+4)$ и $C(-2)$ и найти величины AB , BC и AC отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC = AC$.

2. Выполнить предыдущее упражнение для точек $A(+1)$, $B(-4)$ и $C(+5)$.

3. Построить треугольник с вершинами $A(-4; 2)$, $B(0; -1)$ и $C(3; 3)$ и определить его периметр и углы.

4. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-3; -2)$, $B(0; -1)$ и $C(-2; 5)$ прямоугольный.

5. Построить точки $A(-4; 0)$, $B(-1; 4)$ и точки A_1 и B_1 , симметричные с данными относительно оси Oy . Вычислить периметр трапеции ABB_1A_1 .

6. Точка B симметрична с $A(4; -1)$ относительно биссектрисы первого координатного угла. Найти длину AB .

7. Найти точку, удаленную на 5 единиц как от точки $A(2; 1)$, так и от оси Oy .

8. На оси ординат найти точку, удаленную от точки $A(4; -1)$ на 5 единиц. Пояснить построением, почему получается два решения.

9. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки $A(a; b)$ на c единиц. Исследовать решение при $c > |b|$, $c = |b|$ и $c < |b|$.

10. На оси Ox найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(8; 4)$.

11. Найти центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(4; 3)$, $B(-3; 2)$ и $C(1; -6)$.

12. Даны точки $A(2; 6)$ и $B(0; 2)$; построить вектор \overline{AB} , его компоненты на осях и вычислить $\text{пр}_x \overline{AB}$, $\text{пр}_y \overline{AB}$ и длину AB .

13. В точке $A(2; 5)$ приложена сила, проекции которой на оси координат равны: $X=3$ и $Y=3$. Определить конец вектора \overline{AB} , изображающего силу, и величину силы.

14. В точке $A(-3; -2)$ приложена сила, проекция которой $Y=-1$, а проекция X положительна. Определить конец вектора \overline{AB} , изображающего силу, если ее величина равна $5\sqrt{2}$.

15.*) На числовой оси построить точки $A(1)$, $B(-3)$ и $C(-2)$ и найти величины AB , BC и CA отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC + CA = 0$.

16. На плоскости построить точки $A(-7; 0)$ и $B(0; 1)$ и точки A_1 и B_1 , симметричные с A и B относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Вычислить периметр трапеции ABB_1A_1 .

17. На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(-2; 5)$.

18. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки $A(-2; 3)$ на $3\sqrt{5}$ единиц.

19. Определить центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(-3; -1)$, $B(5; 3)$ и $C(6; -4)$.

*) В каждом параграфе после чертежа приведены задачи, которые рекомендуются для задания на дом или для повторений.

20. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. В начале координат приложены силы, изображаемые векторами \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OB} . Построить их равнодействующую \overrightarrow{OC} и доказать, что проекция равнодействующей на координатную ось равна сумме проекций составляющих на ту же ось.

21. Даны точки $A(1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(5; 2)$ и $D(2; -2)$. В точке A приложены силы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} . Найти проекции на оси координат равнодействующей силы и ее величину.

§ 2. Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника и многоугольника

1º. **Деление отрезка в данном отношении.** Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1)$$

В частности, при делении пополам, т. е. в отношении $\lambda = 1 : 1 = 1$,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (2)$$

2º. **Площадь многоугольника с вершинами** $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, ..., $F(x_n; y_n)$ **равна**

$$S = \pm \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]. \quad (3)$$

Выражение вида $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ равно $x_1y_2 - x_2y_1$ и называется *определителем 2-го порядка* *).

22. Построить точки $A(-2; 1)$ и $B(3; 6)$ и найти точку $M(x; y)$, делящую AB в отношении $AM : MB = 3 : 2$.

23. Даны точки $A(-2; 1)$ и $B(3; 6)$. «Разделить» отрезок AB в отношении $AM : MB = -3 : 2$.

24. В точках $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси Ox помещены массы m_1 и m_2 . Найти центр масс этой системы.

25. В точках $A(x_1)$, $B(x_2)$ и $C(x_3)$ оси Ox помещены соответственно массы m_1 , m_2 и m_3 . Показать, что центр масс этой системы будет в точке $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

*). Об определителях подробнее изложено в гл. IV, стр. 88.

26. На концы однородного стержня длиной 40 см и весом 500 Г наложены шары весом 100 и 400 Г. Определить центр тяжести этой системы.

27. В точках $A(-2; 4)$, $B(3; -1)$ и $C(2; 3)$ помещены соответственно массы 60, 40 и 100 г. Определить центр масс этой системы.

28. Определить середины сторон треугольника с вершинами $A(2; -1)$, $B(4; 3)$ и $C(-2; 1)$.

29. В треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(8; 0)$ и $B(0; 6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD .

30. Найти центр тяжести треугольника с вершинами: $A(1; -1)$, $B(6; 4)$ и $C(2; 6)$.

Указание. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

31. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2; 0)$, $B(5; 3)$ и $C(2; 6)$.

32. Показать, что точки $A(1; 1)$, $B(-1; 7)$ и $C(0; 4)$ лежат на одной прямой.

33. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ и $D(5; -2)$.

34. В точках $A(-3; -1)$ и $B(4; 6)$ приложены параллельные силы, соответственно равные 30 и 40 кГ. На отрезке AB найти точку приложения равнодействующей.

35. В точках $O(0; 0)$, $A(2; -5)$ и $B(4; 2)$ помещены соответственно массы 500, 200 и 100 г. Определить центр масс этой системы.

36. В треугольнике с вершинами $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$ и $C(1; -4)$ определить длину биссектрисы AE .

37. Найти центр тяжести треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$.

38. Найти центр тяжести четырехугольной однородной доски с вершинами $A(-2; 1)$, $B(3; 6)$, $C(5; 2)$ и $D(0; -6)$.

Указание. По формулам, полученным в задаче 37, найти центры тяжести треугольников ABC и ADC и разделить расстояние между ними в отношении, обратном отношению площадей треугольников.

39. Даны точки $A(1; 2)$ и $B(4; 4)$. На оси Ox определить точку C так, чтобы площадь $\triangle ABC$ была равна 5 квадратным единицам, и построить $\triangle ABC$.

40. В треугольнике с вершинами $A(-2; 2)$, $B(1; -4)$ и $C(4; 5)$ каждая сторона продолжена в направлении обхода периметра против часовой стрелки на одну треть своей длины. Определить концы M , N и P продолжений сторон и найти отношение k площади $\triangle MNP$ к площади $\triangle ABC$.

§ 3. Уравнение линии как геометрического места точек

Уравнением линии называется уравнение с переменными x и y , которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только они.

Входящие в уравнение линии переменные x и y называются текущими координатами, а буквенные постоянные — параметрами. Например, в уравнении окружности (задача 41) $x^2 + y^2 = R^2$ переменные x и y — текущие координаты, а постоянная R — параметр.

Чтобы составить уравнение линии как геометрического места точек, обладающих одинаковым свойством, нужно:

- 1) взять произвольную (текущую) точку $M(x; y)$ линии,
- 2) записать равенство общее свойство всех точек M линии,
- 3) входящие в это равенство отрезки (и углы) выразить через текущие координаты точки $M(x; y)$ и через данные в задаче.

41. Показать, что уравнением окружности с радиусом R и с центром в начале координат будет $x^2 + y^2 = R^2$.

42. Написать уравнение окружности с центром $C(3; 4)$ и радиусом $R = 5$. Лежат ли на этой окружности точки: $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $O(0; 0)$ и $D(4; 1)$?

43. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от точек $A(0; 2)$ и $B(4; -2)$. Лежат ли на этой линии точки $C(-1; 1)$, $D(1; -1)$, $E(0; -2)$ и $F(2; 2)$?

44. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается втрое дальше от точки $A(0; 9)$, чем от точки $B(0; 1)$.

45. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1; 1)$, чем к точке $B(-4; 4)$.

46. Написать уравнения биссектрис координатных углов.

47. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний каждой из которых от точек $F(2; 0)$ и $F_1(-2; 0)$ равна $2\sqrt{5}$. Построить линию по ее уравнению.

48. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2; 2)$ и от оси Ox . Построить линию по ее уравнению.

49. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox , чем от оси Oy .

50. Построить линии: 1) $y = 2x + 5$; 2) $y = 7 - 2x$; 3) $y = 2x$; 4) $y = 4$; 5) $y = 4 - x^2$.

51. Определить точки пересечения линии $y = x^2 - 4x + 3$ с осями координат и построить ее.

52. Определить точки пересечения с осями координат линий: 1) $3x - 2y = 12$; 2) $y = x^2 + 4x$; 3) $y^2 = 2x + 4$. Построить эти линии.

53. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(4; 0)$, и построить линию по ее уравнению.

54. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4; 2)$. Лежат ли на этой линии точки $B(-2; 1)$, $C(2; 3)$, $D(1; 7)$?

55. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0; -1)$, чем к точке $B(0; -4)$. Построить траекторию движения.

56. Определить точки пересечения с осями координат линий:

1) $2x + 5y + 10 = 0$; 2) $y = 3 - 2x - x^2$; 3) $y^2 = 4 - x$. Построить линии.

57. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Ox и от точки $F(0; 2)$, и построить линию по ее уравнению.

58. Написать уравнение геометрического места точек, разность расстояний каждой из которых от точек $F_1(-2; -2)$ и $F(2; 2)$ равна 4. Построить линию по ее уравнению.

§ 4. Уравнение прямой: 1) с угловым коэффициентом, 2) общее, 3) в отрезках на осях

1º. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Параметр k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$) и называется *угловым коэффициентом*, или иногда

наклоном прямой. Параметр b — величина отрезка на оси Oy , или начальная ордината.

2°. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \quad (2)$$

Особые случаи:

- а) при $C = 0$ $y = -\frac{A}{B}x$ — прямая проходит через начало координат;
- б) при $B = 0$ $x = -\frac{C}{A} = a$ — прямая параллельна оси Oy ;
- в) при $A = 0$ $y = -\frac{C}{B} = b$ — прямая параллельна оси Ox ;
- г) при $B = C = 0$ $Ax = 0$, $x = 0$ — ось Oy ;
- д) при $A = C = 0$ $By = 0$, $y = 0$ — ось Ox .

3°. Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3)$$

где a и b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

59. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = 3$ и составляющую с осью Ox угол: 1) 45° ; 2) 135° . Написать уравнения этих прямых.

60. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = -3$ и составляющую с осью Ox угол: 1) 60° ; 2) 120° . Написать уравнения этих прямых.

61. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол: 1) 45° ; 2) 60° ; 3) 90° ; 4) 120° ; 5) 135° .

62. Построить прямую, проходящую через начало координат и через точку $(-2; 3)$, и написать ее уравнение.

63. Определить параметры k и b для каждой из прямых:
1) $2x - 3y = 6$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $y = -3$; 4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

64. Построить прямые: 1) $3x + 4y = 12$; 2) $3x - 4y = 0$;
3) $2x - 5 = 0$; 4) $2y + 5 = 0$.

65. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и составляющей с Ox угол 45° . Написать уравнение этой прямой.

66. Уравнения прямых: 1) $2x - 3y = 6$; 2) $3x - 2y + 4 = 0$ привести к виду в отрезках на осях.

67. Даны точки $O(0; 0)$ и $A(-3; 0)$. На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0; 2)$. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

68. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3 кв. единицам.

69. Прямые $y = -2$ и $y = 4$ пересекают прямую $3x - 4y - 5 = 0$ соответственно в точках A и B . Построить вектор \overrightarrow{AB} , определить его длину и его проекции на оси координат.

70. Лежат ли точки $A(3; 5)$, $B(2; 7)$, $C(-1; -3)$ и $D(-2; -6)$ на прямой $y = 2x - 1$ или же они «выше» или «ниже» этой прямой?

71. Каков геометрический смысл неравенств:

1) $y > 3x + 1$; 2) $y < 3x + 1$; 3) $2x + y - 4 \geq 0$ и
4) $2x + y - 4 < 0$?

72. Построить области *), координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

$$1) y < 2 - x, \quad x > -2, \quad y > -2;$$

$$2) y > 2 - x, \quad x < 4, \quad y < 0;$$

$$3) \frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leqslant 1, \quad y \geqslant x + 2, \quad x \geqslant -4.$$

73. Точка $M(x; y)$ движется так, что разность квадратов расстояний ее от точек $A(-a; a)$ и $B(a; -a)$ остается равной $4a^2$. Написать уравнение ее траектории.

74. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, проекция которой на ось Ox движется со скоростью m ед/сек, а на ось Oy — со скоростью n ед/сек. Начальное положение точки $M_0(a; b)$.

*) Слово «область» здесь означает часть плоскости xOy , координаты каждой точки которой удовлетворяют некоторым условиям (например, неравенствам). Область называется *замкнутой*, если в нее включены точки, лежащие на границе области. В противном случае область называется *открытой*.

75—81] § 5. УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ. УРАВНЕНИЕ ПУЧКА ПРЯМЫХ 19

75. Построить прямые, заданные параметрами: 1) $b = -2$, $\varphi = 60^\circ$ и 2) $b = -2$, $\varphi = 120^\circ$, и написать их уравнения.

76. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $(-2; 3)$ и составляющей с Ox угол 45° . Построить прямую и написать ее уравнение.

77. Равнобедренная трапеция с основаниями 8 и 2 см имеет острый угол 45° . Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание и за ось Oy — ось симметрии трапеции.

78. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10 и 6 см, приняв большую диагональ за ось Ox и меньшую — за ось Oy .

79. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-4; 6)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью 6 кв. единиц.

80. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox , чем от прямой $x = -3$.

81. Прямые $x = -1$ и $x = 3$ пересекают прямую $y = 2x + 1$ в точках A и B . Определить длину вектора \overline{AB} и его проекции на оси координат.

§ 5. Угол между прямыми. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Точка пересечения двух прямых

1°. Угол φ , отсчитанный против часовой стрелки от прямой $y = k_1x + b_1$ до прямой $y = k_2x + b_2$, определяется формулой

$$\text{tg } \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (1)$$

Для прямых, заданных уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

формула (1) примет вид

$$\text{tg } \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Условие параллельности: $k_1 = k_2$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2º. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку $A(x_1; y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (2)$$

3º. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3)$$

4º. Чтобы найти точку пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, нужно решить совместно их уравнения. Получим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

82. Определить угол между прямыми:

- 1) $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = \frac{1}{2}x + 1; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 5x - y + 7 = 0, \\ 2x - 3y + 1 = 0; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ y = 3x - 4; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 6x + 4y + 9 = 0; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 3x - 4y = 6, \\ 8x + 6y = 11; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1. \end{cases}$

83. Среди прямых $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ указать параллельные и перпендикулярные.

84. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(2; 3)$. Выбрать из этого пучка прямые, составляющие с осью Ox углы: 1) 45° , 2) 60° , 3) 135° , 4) 0° , и построить их.

85. Построить точку $A(-2; 5)$ и прямую $2x - y = 0$. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через A , и выбрать из пучка: 1) прямую, параллельную данной; 2) прямую, перпендикулярную к данной.

86. В точках пересечения прямой $2x - 5y - 10 = 0$ с осями координат восставлены перпендикуляры к этой прямой. Написать их уравнения.

87. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 3)$ и $B(4; -2)$.

88. В треугольнике с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 6)$ и $C(4; 2)$ проведены высота BD и медиана BE . Написать уравнения стороны AC , медианы BE и высоты BD .

89. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $x+2y=0$, $x+4y-6=0$, $x-4y-6=0$.

Указание. Чтобы найти внутренние углы треугольника, нужно угловые коэффициенты сторон выписать в порядке убывания $k_1 > k_2 > k_3$, затем вычислять тангенсы углов по формулам: $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, $\frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}$, $\frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}$. Убедиться в этом из чертежа, поместив одну из вершин в начале координат.

90. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом 45° к прямой $y=4-2x$.

91. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1; 1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$.

92. Из точки $A(5; 4)$ выходит луч света под углом $\varphi = \arctg 2$ к оси Ox и от нее отражается. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.

93. Определить вершины и углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $x+3y=0$, $x=3$, $x-2y+3=0$.

94. Отрезок прямой $3x+2y=6$, отсеченный осями координат, служит гипотенузой равнобедренного треугольника. Найти вершину прямого угла, если известно, что она лежит «выше» данной прямой.

95. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 0)$; $B(2; 4)$ и $C(4; 0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE , высоты AD и найти длину медианы AE .

96. Написать уравнения сторон и найти углы треугольника с вершинами $A(0; 7)$, $B(6; -1)$ и $C(2; 1)$.

97. Прямая $2x-y+8=0$ пересекает оси Ox и Oy в точках A и B . Точка M делит AB в отношении $AM:MB=3:1$. Написать уравнение перпендикуляра, восставленного в точке M к прямой AB .

98. Построить треугольник, стороны которого заданы уравнениями: $x+y=4$, $3x-y=0$, $x-3y-8=0$; найти углы и площадь треугольника.

99. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$ и $C(5; 0)$.

100. Из точки $A(-5; 6)$ выходит луч света под углом $\varphi = \arctg(-2)$ к оси Ox и отражается от оси Ox , а затем от оси Oy . Написать уравнения всех трех лучей.

§ 6. Нормальное уравнение прямой. Расстояние точки от прямой. Уравнения биссектрис. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых

1°. Нормальное уравнение прямой

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0, \quad (1)$$

где p — длина перпендикуляра (нормали), опущенного из начала координат на прямую, а β — угол наклона этого перпендикуляра к оси Ox . Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальному виду, нужно все члены его умножить на нормирующий множитель $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, взятый со знаком, противоположным знаку свободного члена C .

2°. Расстояние d точки $(x_0; y_0)$ от прямой найдем, если в левую часть нормального уравнения прямой на место текущих координат подставим координаты $(x_0; y_0)$ и полученнное число возьмем по абсолютной величине:

$$d = |x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta - p|, \quad (2)$$

или

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2')$$

3°. Уравнения биссектрис углов между прямыми $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \quad (3)$$

4°. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых:

$$\alpha(Ax + By + C) + \beta(A_1x + B_1y + C_1) = 0. \quad (4)$$

Можно положить $\alpha = 1$, исключив этим из пучка (4) вторую из данных прямых.

101. Привести к нормальному виду уравнения прямых:
1) $3x - 4y - 20 = 0$, 2) $x + y + 3 = 0$, 3) $y = kx + b$.

102. Построить прямую, если длина нормали $p = 2$, а угол β наклона ее к оси Ox равен: 1) 45° , 2) 135° , 3) 225° , 4) 315° . Написать уравнения этих прямых.

103. Найти расстояния точек $A(4; 3)$, $B(2; 1)$ и $C(1; 0)$ от прямой $3x + 4y - 10 = 0$. Построить точки и прямую.

104. Найти расстояние начала координат от прямой $12x - 5y + 39 = 0$.

105. Показать, что прямые $2x - 3y = 6$ и $4x - 6y = 25$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Указание. На одной из прямых взять произвольную точку и найти ее расстояние от другой прямой.

106. Найти k из условия, что прямая $y = kx + 5$ удалена от начала координат на расстояние $d = \sqrt{5}$.

107. Написать уравнение геометрического места точек, удаленных от прямой $4x - 3y = 0$ на 4 единицы.

108. Составить уравнение прямой, удаленной от точки $A(4; -2)$ на 4 единицы и параллельной прямой $8x - 15y = 0$.

109. Написать уравнения биссектрис углов между прямыми $2x + 3y = 12$ и $3x + 2y = 12$.

110. Написать уравнения биссектрис углов между прямыми $3x + 4y = 12$ и $y = 0$.

111. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается втрое дальше от прямой $y = 2x - 4$, чем от прямой $y = 4 - 2x$.

112. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x + y + 6 = 0$ и $3x + 5y - 15 = 0$ и через точку $N(1; -2)$ (не находя точки M).

113. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельной прямой $x + 3y = 0$ (не находя точки M).

114. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3; 0)$, $B(2; 5)$ и $C(3; 2)$.

115. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 4)$ и удаленной от начала координат на расстояние $d = 2$.

116. Проверить, что точки $A(-4; -3)$, $B(-5; 0)$, $C(5; 6)$ и $D(1; 0)$ служат вершинами трапеции, и найти ее высоту.

117. Через начало координат проведена прямая на одинаковом расстоянии от точек $A(2; 2)$ и $B(4; 0)$. Найти это расстояние.

118. Написать уравнения геометрического места точек, удаленных от прямой $x + 2y - 5 = 0$ на расстояние, равное $\sqrt{5}$.

119. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое дальше от прямой $y = x$, чем от прямой $y = -x$.

120. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ и перпендикулярной к прямой $y = 2x$ (не находя точки M).

§ 7. Смешанные задачи на прямую

121. Через начало координат провести прямую, образующую с прямыми $x + y = a$ и $x = 0$ треугольник площадью a^2 .

122. Даны точки $A(-4; 0)$ и $B(0; 6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший, чем на оси Oy .

123. Даны точки $A(-2; 0)$ и $B(2; -2)$. На отрезке OA построен параллелограмм $OACD$, диагонали которого пересекаются в точке B . Написать уравнения сторон, диагоналей параллелограмма и найти угол CAD .

124. Найти углы и площадь треугольника, образованного прямыми: $y = 2x$, $y = -2x$ и $y = x + b$.

125. Из начала координат проведены две взаимно перпендикулярные прямые, образующие с прямой $2x + y = a$ равнобедренный треугольник. Найти площадь этого треугольника.

126. Найти внутренние углы треугольника, если даны уравнения его сторон: $(AB) x - 3y + 3 = 0$ и $(AC) x + 3y + 3 = 0$ и основание $D(-1; 3)$ высоты AD .

127. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $3x + y = 0$ и $x - 3y = 0$ и точка $(5; 0)$ на его основании. Найти периметр и площадь треугольника.

128. В треугольнике ABC даны: 1) уравнение стороны $(AB) 3x + 2y = 12$, 2) уравнение высоты $(BM) x + 2y = 4$, 3) уравнение высоты $(AM) 4x + y = 6$, где M — точка пересечения высот. Написать уравнения сторон AC , BC и высоты CM .

129. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $5y = x + 6$. Диагонали его пересекаются в на-

чале координат. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

130. Дан треугольник с вершинами $A(0; -4)$, $B(3; 0)$ и $C(0; 6)$. Найти расстояние вершины C от биссектрисы угла A .

131. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, движущейся так, что сумма расстояний её от прямых $y=2x$ и $y=-\frac{x}{2}$ остается постоянной и равной $\sqrt{5}$.

132. Построить области, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

- 1) $x-2 < y < 0$ и $x > 0$;
- 2) $-2 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2$;
- 3) $2 < 2x+y < 8$, $x > 0$ и $y > 0$.

133. Стороны AB и BC параллелограмма заданы уравнениями $2x-y+5=0$ и $x-2y+4=0$, диагонали его пересекаются в точке $M(1; 4)$. Найти длины его высот.

134. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла $C(3; -1)$ и уравнение гипotenузы $3x-y+2=0$.

135. Даны две вершины треугольника $A(-4; 3)$ и $B(4; -1)$ и точка пересечения высот $M(3; 3)$. Найти третью вершину C .

136. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x+2y=4$ и $x+2y=10$, и уравнение одной из его диагоналей: $y=x+2$.

137. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0; 2)$, и уравнения высот (BM) $x+y=4$ и (CM) $y=2x$, где M — точка пересечения высот.

138. Даны прямая $x+2y-4=0$ и точка $A(5; 7)$. Найти: 1) проекцию B точки A на данную прямую; 2) отражение C точки A в данной прямой.

Указание. Написав уравнение перпендикуляра AB и решив его совместно с уравнением данной прямой, найдем точку B , которая есть середина AC .

139. Даны прямая $2x+y-6=0$ и на ней две точки A и B с ординатами $y_A=6$ и $y_B=-2$. Написать уравнение высоты AD треугольника AOB , найти ее длину и $\angle DAB$.

§ 8. Окружность

Уравнение окружности с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом, равным R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1)$$

Если в уравнении (1) раскрыть скобки, то оно примет вид

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0. \quad (2)$$

Чтобы от уравнения (2) опять перейти к уравнению вида (1), нужно в левой части уравнения (2) выделить полные квадраты:

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p. \quad (3)$$

140. Написать уравнение окружности с центром $C(-4; 3)$, радиусом $R = 5$ и построить ее. Лежат ли на этой окружности точки $A(-1; -1)$, $B(3; 2)$ $O(0; 0)$?

141. Данна точка $A(-4; 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA .

142. Построить окружности: 1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

143. Построить окружность $x^2 + y^2 + 5x = 0$, прямую $x + y = 0$ и найти точки их пересечения.

144. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(1; 2)$.

145. Найти угол между радиусами окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, проведеными в точки пересечения ее с осью Oy .

146. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$ и $C(1; -1)$.

Указание. Написать уравнение искомой окружности в виде $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, подставить в него координаты каждой точки и затем найти m , n и p .

147. Написать уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ с прямой $y = -x$ и через точку $A(4; 4)$.

148. Определить область расположения кривой $y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$. Построить кривую.

149. Написать уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$, проведенных из начала координат.

150. Даны точка $A(a; 0)$. Точка M движется так, что в $\triangle OMA$ угол OMA остается прямым. Определить траекторию движения точки M .

151. Даны точки $A(-6; 0)$ и $B(2; 0)$. Найти геометрическое место точек, из которых отрезки OA и OB видны под равными углами.

152. Определить траекторию точки $M(x; y)$, движущейся так, что сумма квадратов ее расстояний от точек $A(-a; 0)$, $B(0; a)$ и $C(a; 0)$ остается равной $3a^2$.

153. Определить траекторию точки $M(x; y)$, движущейся так, что сумма квадратов ее расстояний от биссектрис координатных углов остается равной a^2 .

154. Данна окружность $x^2 + y^2 = a^2$. Из ее точки $A(a; 0)$ проведены всевозможные хорды. Определить геометрическое место середин этих хорд.

155. Даны точки $A(-3; 0)$ и $B(3; 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB .

156. Найти центры и радиусы окружностей: 1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 2,5 = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 7y = 0$. Построить окружности.

157. Окружность касается оси Ox в начале координат и проходит через точку $A(0; -4)$. Написать уравнение окружности и найти точки пересечения ее с биссектрисами координатных углов.

158. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения прямой $x + y + a = 0$ с окружностью $x^2 + y^2 = a^2$.

159. Написать уравнения касательных, проведенных из начала координат к окружности, проходящей через точки $A(1; -2)$, $B(0; -1)$ и $C(-3; 0)$.

160. Найти угол между радиусами окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$, проведенными в точки пересечения ее с осью Ox .

161. Показать, что точка $A(3; 0)$ лежит внутри окружности $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, и написать уравнение хорды, делящейся в точке A пополам.

Указание. Искомая хорда перпендикулярна к CA , где C — центр окружности.

162. Точка $M(x; y)$ движется так, что сумма квадратов расстояний ее от начала координат и от точки $A(-a; 0)$ остается равной a^2 . Определить траекторию движения точки M .

163. Данна окружность $x^2+y^2=4$. Из точки ее $A(-2; 0)$ проведена хорда AB и продолжена на расстояние $BM=AB$. Определить геометрическое место точек M .

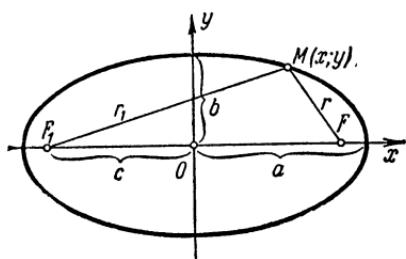
164. Отрезок $AM=a$ перемещается по плоскости xOy , оставаясь параллельным Ox , так, что левый конец его A скользит по окружности $x^2+y^2=a^2$. Определить траекторию движения точки M .

§ 9. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек F и F_1 (фокусов) есть постоянная величина $2a$, большая F_1F .

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$



Черт. 1.

Эллипс, заданный уравнением (1), симметричен относительно осей координат (черт. 1). Параметры a и b называются полуосами эллипса. Пусть $a > b$, тогда фокусы F и F_1 находятся на оси Ox на рас-

стоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра. Отношение $\frac{c}{a} = \epsilon < 1$ называется эксцентриситетом эллипса. Расстояния точки $M(x; y)$ эллипса от его фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами

$$r = a - \epsilon x, \quad r_1 = a + \epsilon x. \quad (2)$$

Если же $a < b$, то фокусы находятся на оси Oy , $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\epsilon = \frac{c}{b}$, $r = b \pm \epsilon y$.

165. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, найти его фокусы и эксцентриситет.

166. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что: 1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$; 2) большая полуось $a = 6$, а эксцентризитет $e = 0,5$.

167. Найти малую полуось b и эксцентризитет e эллипса, имеющего большую полуось $a = 5$ и параметр c , равный: 1) 4,8; 2) 4; 3) 3; 4) 1,4; 5) 0. Построить каждый из эллипсов.

168. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние Земли от Солнца равно приблизительно 147,5 миллиона километров, а наибольшее 152,5 миллиона километров. Найти большую полуось и эксцентризитет орбиты Земли.

169. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M(2; \sqrt{3})$ и $B(0; 2)$. Написать его уравнение и найти расстояния точки M от фокусов.

170. Эллипс, симметричный относительно осей координат, фокусы которого находятся на оси Ox , проходит через точку $M(-4; \sqrt{21})$ и имеет эксцентризитет $e = \frac{3}{4}$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы-векторы точки M .

171. Найти длину хорды эллипса $x^2 + 2y^2 = 18$, делящей угол между осями пополам.

172. Найти эксцентризитет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой полуосей.

173. В эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с концом большой полуоси. Определить координаты двух других вершин треугольника.

Указание. Написать уравнение одной из сторон, имеющей наклон $k = \operatorname{tg} 30^\circ$, и найти точки ее пересечения с эллипсом.

174. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

175. Ординаты всех точек окружности $x^2 + y^2 = 36$ сокращены втрое. Написать уравнение полученной новой кривой.

176. Определить траекторию точки M , которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(-1; 0)$, чем к прямой $x = -4$.

177. Отрезок AB постоянной длины $a + b$ движется так, что его конец A скользит по оси Ox , а конец B — по оси Oy . Определить траекторию движения точки M отрезка, делящей его на части $BM = a$ и $MA = b$ (эллиптический циркуль Леонардо да Винчи).

178. Даны окружности $x^2 + y^2 = b^2$ и $x^2 + y^2 = a^2$ ($b < a$). Произвольный луч OBA пересекает их соответственно в точках B и A , из которых проведены прямые, параллельные осям координат, до пересечения их в точке M . Определить геометрическое место точек M .

179. Написать простейшее уравнение эллипса, у которого расстояния одного из фокусов от концов большой оси равны 5 и 1.

180. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ и $A(6; 0)$. Написать его уравнение, найти эксцентриситет и расстояния точки M от фокусов.

181. Найти длину хорды эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, направленной по диагонали прямоугольника, построенного на осях эллипса.

182. Найти общие точки эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в его «верхней» вершине.

183. На прямой $x = -5$ найти точку, одинаково удаленную от «левого» фокуса и «верхней» вершины эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$.

184. На эллипсе $x^2 + 5y^2 = 20$ найти точку, радиусы-векторы которой перпендикулярны.

Указание. Искомые точки суть точки пересечения с эллипсом окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в начале координат.

185. Абсциссы точек окружности $x^2 + y^2 = 4$ увеличены вдвое. Определить полученную кривую.

186. Определить траекторию точки M , которая при своем движении остается втройе ближе к точке $A(1; 0)$, чем к прямой $x = 9$.

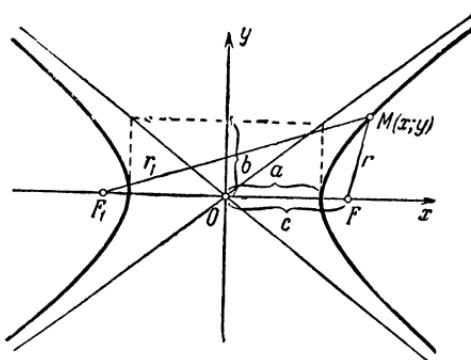
§ 10. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний каждой из которых от двух данных точек F и F_1 (фокусов) есть постоянная величина $2a$ ($0 < 2a < F_1F$).

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Гипербола, заданная уравнением (1), симметрична относительно осей координат (черт. 2). Она пересекает ось Ox в точках $A(a; 0)$



Черт. 2.

и $A_1(-a; 0)$ — вершинах гиперболы и не пересекает ось Oy . Параметр a называется вещественной полуосью, b — мнимой полуосью. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ есть расстояние фокуса от центра. Отношение $\frac{c}{a} = \epsilon > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ называются асимптотами гиперболы. Расстояния точки $M(x; y)$ гиперболы от ее фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

$$r = |\epsilon x - a|, \quad r_1 = |\epsilon x + a|. \quad (2)$$

Гипербола, у которой $a = b$, называется равносторонней, ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, а уравнения асимптот $y = \pm x$. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются сопряженными.

187. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 18$ и ее асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет и угол между асимптотами.

188. На гиперболе $x^2 - 4y^2 = 16$ взята точка M с ординатой, равной 1. Найти расстояния ее от фокусов.

189. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что: 1) расстояние между фокусами $2c = 10$, а между вершинами $2a = 8$; 2) вещественная полуось $a = 2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $e = \sqrt{1.2}$.

190. Гипербола симметрична относительно осей координат, проходит через точку $M(6; -2\sqrt{2})$ и имеет минимую полуось $b = 2$. Написать ее уравнение и найти расстояния точки M от фокусов.

191. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

192. Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $e = \sqrt{2}$, проходящей через точку $(2a; a\sqrt{3})$ и симметричной относительно осей координат.

193. Построить гиперболу $y^2 = a^2 + x^2$, найти координаты ее фокусов и угол между асимптотами.

194. Написать уравнения касательных к гиперболе $x^2 - 4y^2 = 16$, проведенных из точки $A(0; -2)$.

195. Найти расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ от ее асимптот и угол между асимптотами.

196. Найти сторону квадрата, вписанного в гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, и исследовать, в какие гиперболы можно вписать квадрат.

197. Найти эксцентриситет гиперболы, асимптота которой составляет с вещественной осью угол: 1) 60° , 2) α .

198. Определить область расположения кривой $y = -\sqrt{9+x^2}$. Построить кривую.

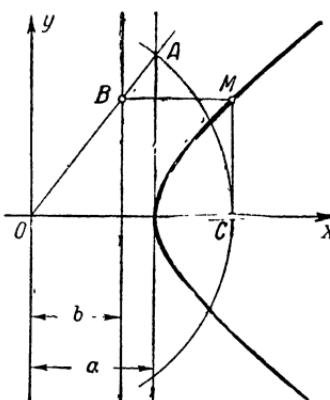
199. Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x = 1$, чем к точке $F(4; 0)$.

200. Даны точки $A(-1; 0)$ и $B(2; 0)$. Точка M движется так, что в $\triangle AMB$ угол B остается вдвое больше угла A . Определить траекторию движения.

201. Данна точка $A(a; 0)$. По оси Oy движется точка B . На прямой BE , параллельной Ox , откладываются отрезки BM и BM_1 , равные AB . Определить геометрическое место точек M и M_1 .

202. Даны прямые $x = \pm b$ и $x = \pm a$ ($b < a$). Противольный луч OA (черт. 3) пересекает прямую $x = b$ (или $x = -b$) в точке B и прямую

$x = a$ (или $x = -a$) в точке A . Радиусом OA описана дуга, пересекающая Ox в точке C . Из точек B и C проведены прямые, параллельные соответственно Ox и Oy , до пересечения в точке M . Определить геометрическое место точек M .



203. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояния одной из ее вершин от фокусов равны 9 и 1.

204. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2 - 3y^2 = 12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

205. Гипербола проходит через точку $M\left(6; \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$, симметрична относительно осей координат и имеет вещественную полуось $a = 4$. Написать уравнения перпендикуляров, опущенных из левого фокуса гиперболы на ее асимптоты.

206. На гиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$ найти точку, расстояние которой от левого фокуса вдвое меньше, чем от правого.

207. На гиперболе $x^2 - y^2 = 4$ найти точку, фокальные радиусы-векторы которой перпендикулярны (см. указание к задаче 184).

208. Точка M делит расстояние между фокусами гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ в отношении $F_1M : MF = 2 : 3$, где F_1 — левый фокус гиперболы. Через точку M проведена прямая под углом 135° к оси Ox . Найти точки пересечения этой прямой с асимптотами гиперболы.

Черт. 3.

209. Определить траекторию точки M , которая движется так, что остается вдвое дальше от точки $F(-8; 0)$, чем от прямой $x = -2$.

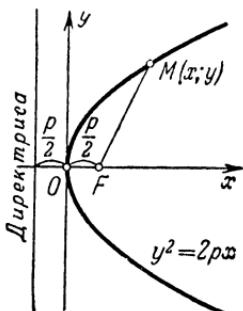
210. Даны точки $A(-a; 0)$ и $B(2a; 0)$. Точка M движется так, что угол MAB остается втрое меньше внешнего угла AMC треугольника AMB . Определить траекторию движения точки M .

§ 11. Парабола

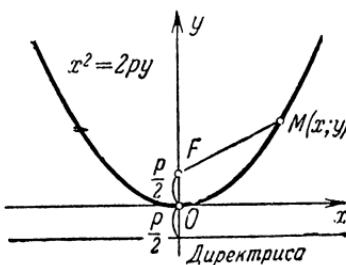
Параболой называется геометрическое место точек, однаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

- 1) $y^2 = 2px$ — парабола симметрична относительно оси Ox (черт. 4);
- 2) $x^2 = 2py$ — парабола симметрична относительно оси Oy (черт. 5).



Черт. 4.



Черт. 5.

В обоих случаях *вершина* параболы, т. е. точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат.

Парабола

$$y^2 = 2px$$

имеет фокус $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ и директрису $x = -\frac{p}{2}$; фокальный радиус-вектор точки $M(x; y)$ на ней $r = x + \frac{p}{2}$.

Парабола

$$x^2 = 2py$$

имеет фокус $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ и директрису $y = -\frac{p}{2}$; фокальный радиус-вектор точки $M(x; y)$ на ней $r = y + \frac{p}{2}$.

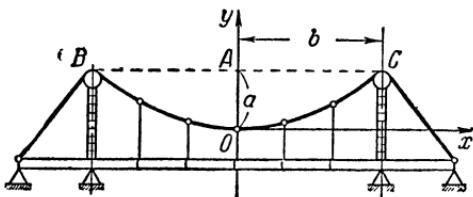
211. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0; 2)$ и от прямой $y = 4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

212. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = -4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

213. Построить параболы, заданные уравнениями: 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$, а также их фокусы и директрисы и написать уравнения директрис.

214. Написать уравнение параболы: 1) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(1; -3)$ и симметричной относительно оси Ox ; 2) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(2; -4)$ и симметричной относительно оси Oy .

215. Канат подвесного моста имеет форму параболы (черт. 6). Написать ее уравнение относительно указанных



Черт. 6.

на чертеже осей, если прогиб каната $OA = a$, а длина пролета $BC = 2b$.

216. Написать уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = 2px$ и касающейся ее директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.

217. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси Oy . Построить окружность, прямую и параболу.

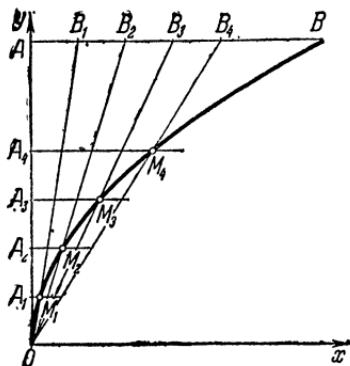
218. На параболе $y^2 = 6x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 4,5.

219. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг ее оси симметрии. Диаметр

зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?

220. Определить область расположения кривой $y = -\sqrt{-x}$. Построить кривую.

221. Из вершины параболы $y^2 = 2px$ проведены всевозможные хорды. Написать уравнение геометрического места середин этих хорд.



Черт. 7.

Построить этим приемом параболы: $y^2 = 4x$; $y^2 = 5x$; $y^2 = 3x$.

224. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = 4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

225. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(2; 0)$ и от прямой $y = 2$. Найти вершину параболы, точки пересечения ее с Ox и построить ее.

226. Написать уравнение параболы: 1) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(-1; 2)$ и симметричной относительно оси Ox ; 2) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(2; 4)$ и симметричной относительно оси Oy .

227. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой

222. Определить геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности $x^2 + y^2 = 2ax$ и оси Oy .

223. Даны точки $A(0; a)$ и $B(a; a)$. Отрезки OA и AB разделены на n равных частей точками A_1, A_2, A_3, \dots и B_1, B_2, B_3, \dots (черт. 7). Пусть M_k — точка пересечения луча OB_k с прямой $A_kM_k \parallel Ox$. Показать, что такие точки M_k лежат на параболе $y^2 = ax$.

$y = x$ и окружности $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и симметрична относительно оси Ox . Построить прямую, окружность и параболу.

228. В параболу $y^2 = 2x$ вписан правильный треугольник. Определить его вершины (см. указание к задаче 173).

229. Написать уравнения касательных к параболе $y^2 = 8x$, проведенных из точки $A(0; -2)$.

230. Через фокус параболы $y^2 = -4x$ проведена прямая под углом 120° к оси Ox . Написать уравнение прямой и найти длину образовавшейся хорды.

§ 12. Директрисы, диаметры и касательные к кривым 2-го порядка

1°. Директрисами эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (при $a > b$) и гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются прямые, параллельные оси Oy и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, где ε — эксцентриситет кривой.

Уравнения директрис:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Свойство директрис: отношение расстояний точки кривой от фокуса и соответствующей директрисы равно эксцентриситету кривой

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \quad (2)$$

2°. Диаметром кривой 2-го порядка называется геометрическое место середин параллельных хорд. Диаметрами эллипса и гиперболы оказываются отрезки и лучи прямых, проходящих через центр, а диаметрами параболы — лучи, параллельные ее оси.

Уравнение диаметра, делящего пополам хорды с наклоном $\operatorname{tg} \alpha = k$, будет:

для кривых $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 k} x; \quad (3)$$

для параболы $y^2 = 2px$:

$$y = \frac{p}{k}. \quad (4)$$

Два диаметра эллипса и гиперболы, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются взаимно сопряг-

жженными. Их угловые коэффициенты k и k_1 связаны зависимостью
 $kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}$ (у эллипса) и $kk_1 = \frac{b^2}{a^2}$ (у гиперболы).

3°. Уравнения касательной:

$$\text{к эллипсу } \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right) \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1;$$

$$\text{к гиперболе } \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right) \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1;$$

$$\text{к параболе } (y^2 = 2px) \quad yy_0 = p(x + x_0),$$

где $(x_0; y_0)$ — точка касания.

231. Построить эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, его директрисы и найти расстояния точки эллипса с абсциссой $x = -3$ от правого фокуса и правой директрисы.

232. Построить гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, ее директрисы и найти расстояния точки гиперболы с абсциссой $x = 5$ от левого фокуса и левой директрисы.

233. Написать каноническое уравнение эллипса, директрисами которого служат прямые $x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$ и большая полуось которого равна 2.

234. Написать уравнение гиперболы, асимптоты которой $y = \pm x$, а директрисы $x = \pm \sqrt{6}$.

235. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, диаметр $y = \frac{x}{2}$ и сопряженный ему диаметр и найти длины a_1 и b_1 построенных полудиаметров.

236. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 4$, диаметр $y = -x$ и сопряженный ему диаметр и найти угол между диаметрами.

237. Найти длину того диаметра эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, который равен своему сопряженному диаметру.

238. Асимптота гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ составляет с осью Ox угол 60° . Написать уравнение диаметра, сопряженного с диаметром $y = 2x$. Выбрав произвольно отрезок a , построить кривую, диаметры и хорды, параллельные данному диаметру.

239. Определить геометрическое место середин хорд параболы $y^2 = 4x$, составляющих с Ox угол 45° .

240. Дан эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Через точку $(-2; 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

241. Данна парабола $y^2 = -4x$. Через точку $(-2; -1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

242. На примере задачи 235 проверить теорему Аполлония: $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ и $a_1 b_1 \sin \varphi = ab$, где a_1 и b_1 — длины сопряженных полудиаметров, a и b — полуоси эллипса, а φ — угол между сопряженными диаметрами.

243. Написать уравнения касательных к кривым:

$$1) x^2 + 4y^2 = 16; \quad 2) 3x^2 - y^2 = 3; \quad 3) y^2 = 2x$$

в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

244. Показать, что если прямая $Ax + By + C = 0$ есть касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

Указание. Из пропорциональности коэффициентов уравнений $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ и $Ax + By + C = 0$ определить x_0 и y_0 и подставить их в уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

245. Написать уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$, параллельных биссектрисе первого координатного угла.

246. Написать уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 8$, проведенных из точки $(0; 6)$.

247. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

248. Показать, что если прямая $Ax + By + C = 0$ есть касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$ (см. указание к задаче 244).

249. Написать уравнения касательных к гиперболе $4x^2 - 9y^2 = 36$, перпендикулярных к прямой $x + 2y = 0$.

250. Доказать, что нормаль к эллипсу есть биссектриса угла между радиусами-векторами соответствующей точки эллипса.

251. Доказать, что касательная к гиперболе есть биссектриса угла между радиусами-векторами точки касания.

252. Доказать, что лучи, выходящие из фокуса параболы, отражаются от параболы по прямым, параллельным ее оси.

Указание. Нужно написать уравнение нормали MN , найти точку N пересечения ее с осью параболы и доказать, что $FM = FN$, где F — фокус параболы.

253. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ с ее директрисами.

254. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, его диаметр $y = x$ и сопряженный ему диаметр и найти угол между этими диаметрами.

255. Определить геометрическое место середин хорд гиперболы $x^2 - 4y^2 = 16$, составляющих угол 45° с осью Ox .

256. Данна гипербола $4x^2 - y^2 = 4$. Через точку $(2; 2)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

257. На эллипсе $x^2 + 2y^2 = 6$ взята точка M с ординатой 1 и отрицательной абсциссой. Найти угол касательной к эллипсу в точке M с прямой OM .

258. Показать, что если прямая $Ax + By + C = 0$ есть касательная к параболе $y^2 = 2px$, то $B^3p = 2AC$ (см. указание к задаче 244).

259. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 8x$, параллельной прямой $x + y = 0$.

§ 13. Преобразование декартовых координат. Параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $x = ay^2 + by + c$.

Гипербола $xy = k$

1°. Координаты $(x; y)$ в данной системе преобразуются к координатам $(X; Y)$ в новой системе по формулам:

1) при параллельном сдвиге осей и перенесении начала координат в точку $O_1(\alpha; \beta)$

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta; \quad (1)$$

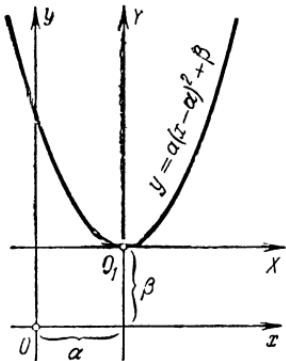
2) при повороте осей на угол φ

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi, \quad y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi. \quad (2)$$

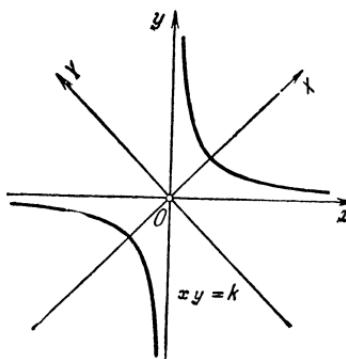
2°. Уравнение $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ перенесением начала координат в точку $O_1(\alpha; \beta)$ приводится к виду $Y = aX^2$ и, следовательно, определяет параболу с вершиной $O_1(\alpha; \beta)$ и осью симметрии,

параллельной Oy (черт. 8). Уравнение $y = ax^2 + bx + c$ выделением в правой части полного квадрата приводится к предыдущему и поэтому тоже определяет параболу. При $a > 0$ парабола от вершины направлена «вверх», при $a < 0$ — «вниз».

3°. Уравнение $xy = k$ при повороте осей координат на угол $\varphi = 45^\circ$ приводится к виду $X^2 - Y^2 = 2k$ и, следовательно,



Черт. 8.



Черт. 9.

определяет *равностороннюю гиперболу*, асимптомами которой служат оси координат (черт. 9). Уравнение $(x - a)(y - \beta) = k$ перенесением начала координат в точку $O_1(a; \beta)$ приводится к виду $XY = k$ и поэтому тоже определяет равностороннюю гиперболу.

260. 1) Точка $A(3; 1)$ при параллельном сдвиге осей координат получила новые координаты $(2; -1)$. Построить данные и смешанные оси координат и точку A .

2) Найти острый угол поворота осей координат, при котором точка $A(2; 4)$ получит новую абсциссу 4. Построить обе системы координат и точку A .

261. Перенесением начала координат упростить уравнения:

$$1) \frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1; \quad 2) \frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1;$$

$$3) (y+2)^2 = 4(x-3); \quad 4) 2y = -(x+2)^2;$$

$$5) x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3; \quad 6) y^2 - 8y = 4x;$$

$$7) x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24; \quad 8) x^2 + 6x + 5 = 2y.$$

Построить старые и новые оси координат и кривые.

262. Поворотом осей координат на 45° упростить уравнения:

$$1) \ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32; \quad 2) \ 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 32 = 0.$$

Построить старые и новые оси координат и кривые.

263. Построить по точкам кривую $xy = -4$ и поворотом осей на угол $\varphi = -45^\circ$ преобразовать уравнение.

264. Перенесением начала координат привести к виду $xy = k$ уравнения кривых: 1) $xy - 2x = 6$; 2) $xy - 2x - y + 8 = 0$; 3) $xy - x + 2y = 6$; 4) $xy + 2x = 3y$.

Указание. Уравнение $xy + Ax + By + C = 0$ можно написать в виде $(x + B)(y + A) = AB - C$.

265. Построить параболы:

$$1) \ y = (x - 2)^2; \quad 2) \ y = (x - 2)^2 + 3;$$

$$3) \ y = (x + 2)^2; \quad 4) \ y = (x + 2)^2 - 3.$$

266. Построить параболы:

$$1) \ y = x^2 - 4x + 5; \quad 3) \ y = -x^2 + 2x - 2,$$

$$2) \ y = x^2 + 2x + 3;$$

выделив в правых частях уравнений полные квадраты.

267. Построить параболы:

$$1) \ y = 4x - x^2 \text{ и } 2) \ 2y = 3 + 2x - x^2,$$

найдя их точки пересечения с осью Ox .

268. Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты 4 м на расстоянии 0,5 м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью Ox на расстоянии 0,75 м от точки O .

269. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на ней отрезок b , а на оси Ox — отрезки a и $-a$.

Указание. В уравнение параболы вида $y = Ax^2 + Bx + C$ подставить координаты данных на параболе точек $(-a; 0)$, $(a; 0)$ и $(0; b)$ и затем найти A , B и C .

270. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $O(0; 0)$, $A(-1; -3)$ и $B(-2; -4)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок оси Ox , отсеченный параболой.

271. На какой угол нужно повернуть оси координат, чтобы исчез член, содержащий xy в уравнениях:

$$1) \ x^2 - xy + y^2 - 3 = 0; \quad 2) \ 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0?$$

Построить старые и новые оси координат и кривые.

272. Определить траекторию движения пули, выброшенной под углом φ к горизонту с начальной скоростью v_0 . Определить также дальность полета пули и наивысшую точку траектории (сопротивлением воздуха пренебречь).

273. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, отношение расстояний которых от точки $F(4; 0)$ к расстоянию от прямой $x = -2$ равно 2.

274. Показать, что перенесением начала координат в левую вершину эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ или в правую вершину гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ оба уравнения приводятся к одинаковому виду: $y^2 = 2px + qx^2$, где $p = \frac{b^2}{a}$, а $q = e^2 - 1$.

275. По результатам задачи 274 определить эксцентриситет и тип кривой: 1) $y^2 = x - \frac{1}{4}x^2$; 2) $y^2 = x + \frac{1}{4}x^2$; 3) $y^2 = x$. Построить кривые, найдя для первых двух точки пересечения их с осью Ox и параметры a и b .

276. Выделением полных квадратов и перенесением начала координат упростить уравнения линий:

- 1) $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$;
- 2) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$;
- 3) $y^2 + 4y = 2x$;
- 4) $x^2 - 10x = 4y - 13$.

Построить старые и новые оси и кривые.

277. Поворотом осей координат на 45° упростить уравнение $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0$. Определить координаты фокусов в старой системе координат.

278. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси Ox параболой $y = 3 - 2x - x^2$. Построить обе кривые.

279. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 6$, отсеченный гиперболой $xy = 8$. Построить все три линии.

280. A — вершина параболы $y = x^2 + 6x + 5$, B — точка пересечения параболы с осью Oy . Написать уравнение перпендикуляра, восставленного из середины отрезка AB .

281. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и отсекающей на ней отрезок — 4, а на оси Oy — отрезки 4 и — 4.

Указание. Уравнение параболы должно иметь вид $x = ay^2 + c$ (почему?).

282. Построить по точкам пересечения с осями координат параболы:

$$\begin{array}{ll} 1) \ 3y = 9 - x^2; & 2) \ y^2 = 9 - 3x; \\ 3) \ y^2 = 4 + x; & 4) \ x^2 = 4 + 2y. \end{array}$$

283. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, отношение расстояний которых от точки $F(4; 0)$ к расстоянию от прямой $x = 10$ равно $\frac{1}{2}$.

§ 14. Смешанные задачи на кривые 2-го порядка

284. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, отсеченный осями координат.

285. Найти расстояние центра окружности $x^2 + y^2 + ay = 0$ от прямой $y = 2(a - x)$.

286. Через центр окружности $x^2 + y^2 = 2ax$ проведена прямая, параллельная прямой $x + 2y = 0$ и пересекающая окружность в точках A и B . Найти площадь $\triangle AOB$.

287. Показать, что геометрическое место точек M , которые удалены в m раз дальше от данной точки A , чем от другой данной точки B , есть прямая при $m = 1$ и окружность при $m \neq 1$.

288. Отрезок AB разделен на части $AO = a$ и $OB = b$. Показать, что геометрическое место точек, из которых отрезки AO и OB видны под равными углами, есть прямая при $a = b$ и окружность при $a \neq b$ (аполлониева окружность).

289. Определить траекторию точки $M(x; y)$, движущейся так, что сумма квадратов ее расстояний от прямых $y = kx$ и $x = -ky$ остается постоянной и равной a^2 .

290. Эллипс, симметричный относительно оси Ox и прямой $x = -5$, проходит через точки $(-1; 1,8)$ и $(-5; 3)$. Написать уравнение эллипса и построить его.

291. Найти площадь равностороннего треугольника, вписанного в гиперболу $x^2 - y^2 = a^2$.

292. Найти угол между диагоналями прямоугольника, вершины которого находятся в точках пересечения эллипса $x^2 + 3y^2 = 12l^2$ и гиперболы $x^2 - 3y^2 = 6l^2$.

293. Окружность с центром в начале координат проходит через фокусы гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$. Найти точки пересечения окружности с асимптотами гиперболы.

294. Построить гиперболы $xy = -4$ и $x^2 - y^2 = 6$ и найти площадь $\triangle ABC$, где A и B — вершины двух пересекающихся ветвей гипербол, а C — точка пересечения двух других ветвей гипербол.

295. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы от ее асимптот есть величина постоянная, равная $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

296. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы $y = -\frac{x^2}{8}$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки $a = b = 2$.

297. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ и параболу $x^2 = 6y$ и найти площадь трапеции, основаниями которой служат большая ось эллипса и общая хорда эллипса и параболы.

298. Из фокуса параболы $y^2 = 2px$, как из центра, описана окружность так, что общая хорда кривых одинаково удалена от вершины и от фокуса параболы. Написать уравнение окружности.

299. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины параболы $by = x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки a и b .

300. Построить по точкам пересечения с осями координат параболы $4y = 12 - x^2$ и $4x = 12 - y^2$ и найти длину их общей хорды.

301. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках пересечения параболы $y = 4 - x^2$ с осью Ox и с прямой $y = 3x$.

302. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения параболы $y = \frac{x^2}{a} - 2x + a$ с осями координат.

303. Дан эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$. Из его вершины $A(4; 0)$ проведены всевозможные хорды. Определить геометрическое место середин этих хорд и построить кривые.

304. Определить траекторию точки $M(x; y)$, движущейся так, что разность квадратов ее расстояний от биссектрис координатных углов остается равной 8.

305. Составить уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точку $A(3; 4)$ и касающихся оси Ox .

306. Выделением полных квадратов и перенесением начала упростить уравнение линии $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$. Построить старые и новые оси координат и кривую.

307. Найти геометрическое место середин фокальных радиусов-векторов, проведенных из правого фокуса ко всем точкам гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

308. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку $A(a; -a)$, если фокусы его находятся в точках $F(a; a)$ и $F_1(-a; -a)$.

Упростить уравнение поворотом осей координат на 45° .

309. Поворотом осей координат на угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ упростить уравнение линии $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 20$. Построить старые и новые оси координат и кривую.

310. Написать уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний которых от прямой $3x + 4y = 0$ и от оси Ox остается постоянной и равной 2,4.

311. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, отношение расстояний которых от точки $F\left(\frac{p}{e+1}; 0\right)$ к расстоянию от прямой $x = -\frac{p}{e(e+1)}$ равно e .

312. Построить области, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

$$1) R^2 < x^2 + y^2 < 4R^2 \text{ и } x^2 > \frac{R^2}{4};$$

$$2) x^2 - y^2 > a^2 \text{ и } x^2 < 4a^2;$$

$$3) xy > a^2 \text{ и } |x + y| < 4a;$$

$$4) 2x < y^2 + 4y \text{ и } x^2 + y^2 + 4x + 4y < 0.$$

§ 15. Общее уравнение линии 2-го порядка

1°. Линией 2-го порядка называется линия, определяемая уравнением 2-й степени, которое в общем виде можно написать так:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$

Составим из коэффициентов уравнения (1) два определителя:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *дискриминантом уравнения* (1), а δ — *дискриминантом старших его членов*. В зависимости от значений δ и Δ уравнение (1) определяет следующий геометрический образ:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс (действительный или мнимый)	Точка
$\delta < 0$	Гипербола	Пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	Парабола	Пара параллельных прямых (действительных или мнимых)

2°. Преобразование уравнения (1) к центру. Если $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$, то линия имеет центр, координаты которого находятся из уравнений:

$$\Phi'_x(x, y) = 0, \quad \Phi'_y(x, y) = 0, \quad (2)$$

где $\Phi(x, y)$ — левая часть уравнения (1). Перенеся начало в центр $O_1(x_0; y_0)$ (черт. 10), приведем уравнение (1) к виду

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0, \quad (3)$$

где

$$F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (4)$$

3°. Преобразование уравнения (3) к осям симметрии. Поворотом осей O_1x_1 и O_1y_1 на некоторый угол φ (черт. 10) уравнение (3) приводится к каноническому виду:

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + F_1 = 0. \quad (5)$$

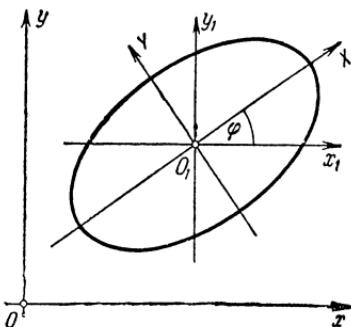
Коэффициенты A_1 и C_1 являются корнями уравнения

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \delta = 0. \quad (6)$$

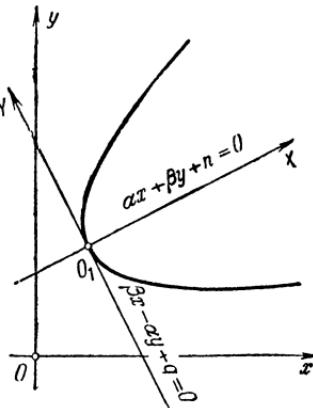
Угол поворота φ находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A_1 - C}. \quad (7)$$

4°. Преобразование уравнения линии 2-го порядка, не имеющей центра. Если $\delta = 0$, то линия не имеет



Черт. 10.



Черт. 11.

центра или не имеет определенного центра. Ее уравнение можно тогда записать в виде

$$(ax + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (8)$$

I случай. D и E пропорциональны a и β : $D = ma$, $E = m\beta$. Уравнение (8) примет вид $(ax + \beta y)^2 + 2m(ax + \beta y) + F = 0$, откуда

$$ax + \beta y = -m \pm \sqrt{m^2 - F} \text{ — пара прямых.}$$

II случай. D и E не пропорциональны a и β . Уравнение (8) можно переписать в виде

$$(ax + \beta y + n)^2 + 2m(3x - ay + q) = 0. \quad (9)$$

Параметры m , n и q найдутся сравнением коэффициентов в уравнениях (8) и (9). Далее, приняв за ось O_1X прямую $ax + \beta y + n = 0$, за ось O_1Y прямую $\beta x - ay + q = 0$ (черт. 11), найдем: $Y = \frac{ax + \beta y + n}{\pm \sqrt{a^2 + \beta^2}}$, $X = \frac{\beta x - ay + q}{\pm \sqrt{a^2 + \beta^2}}$. После этого уравнение (9) примет вид $Y^2 = 2pX$, где $p = \frac{|m|}{\sqrt{a^2 + \beta^2}}$. Ось O_1X направляется в ту полуплоскость, в которой $\beta x - ay + q$ имеет знак, противоположный знаку m , как это следует из уравнения (9).

313. Выяснить геометрический смысл уравнений:

- 1) $4x^2 - y^2 = 0$;
- 2) $4x^2 + y^2 = 0$;
- 3) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$;
- 4) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$;
- 5) $x^2 + xy = 0$;
- 6) $y^2 - 16 = 0$;
- 7) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.

314. Найти центры и преобразовать к центру уравнения линий:

- 1) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$;
- 2) $x^2 - y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$;
- 3) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y - 8 = 0$.

315. Поворотом осей координат преобразовать уравнения к каноническому виду и построить кривые:

- 1) $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 24$;
- 2) $2x^2 + 4xy - y^2 = 12$.

316. Преобразовать к каноническому виду уравнения и построить кривые:

- 1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$;
- 2) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$.

317. Преобразовать к каноническому виду уравнения линий:

- 1) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$;
- 2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$

и построить их.

318. По дискриминантам δ и Δ определить геометрический смысл уравнений:

- 1) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 14y + 15 = 0$;
- 2) $x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$;
- 3) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y + 2 = 0$.

Решив первое и третье уравнения относительно y , построить линии, определяемые этими уравнениями.

319. Привести к каноническому виду уравнение кривой $y = \frac{3x^2 - 12x + 4}{4x - 8}$ и построить ее.

320. Написать уравнение кривой 2-го порядка, имеющей центром точку $O_1(1; 2)$ и проходящей через начало координат и через точки $(0; 4)$ и $(1; -1)$.

321. Показать, что уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ определяет дугу параболы, построить параболу и найти ее вершину.

Указание. Повернуть оси координат на угол $\varphi = -45^\circ$.

322. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, отношение расстояния каждой из которых от точки $F(m; n)$ к расстоянию ее от прямой $x \cos \alpha + y \sin \alpha - q = 0$ равно ε . Обозначив коэффициенты полученного уравнения через A, B, C, \dots , определить инварианты $A + C$ и $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

323. Выяснить геометрический смысл уравнений:

- 1) $x^2 - 4y^2 = 0$;
- 2) $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$;
- 3) $x^2 + 5xy - 6y^2 = 0$.

324. Преобразовать к каноническому виду уравнения и построить кривые:

- 1) $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;
- 2) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 12y + 4 = 0$.

325. Преобразовать к каноническому виду уравнения:

- 1) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
- 2) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

и построить линии, изображаемые ими.

326. По дискриминантам δ и Δ определить геометрический смысл уравнений:

- 1) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$;
- 2) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x + 10y - 7 = 0$.

Решив каждое уравнение относительно y , построить линию, определяемую им.

327. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, отношение расстояний которых от точки $F(3; 3)$ к расстояниям от прямой $x + y = 0$ равно: 1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$; 2) $\varepsilon = 2$.

328. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, одинаково удаленных от точки $F\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ и прямой $x + y = 0$, и привести его к каноническому виду.

329. Написать уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний которых от прямой $x - 2y = 2$ и от оси Ox остается постоянной и равной 3,2. Преобразовать его к каноническому виду и построить кривую.

§ 16. Полярные координаты

Пусть на плоскости дана точка O — полюс и луч OP — полярная ось (черт. 12). Тогда положение точки M на плоскости определяется:

- 1) *полярным углом* $\varphi = \angle MOP$;
- 2) *радиусом-вектором* $r = OM$.

При изучении уравнений, связывающих r и φ , бывает полезно рассматривать полярные координаты φ и r принимающими какие угодно положительные и отрицательные значения. При этом отрицательные углы φ отсчитываются по часовой стрелке, а отрицательные r откладываются не по лучу, а по его продолжению за полюс.

Если принять полюс за начало декартовых прямоугольных координат, а полярную ось OP — за ось Ox , то декартовы координаты $(x; y)$ точки M и ее полярные координаты $(\varphi; r)$ будут связаны зависимостью:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (2)$$

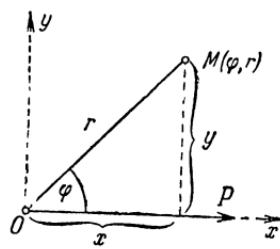
Если принять фокус эллипса, гиперболы и параболы за полюс, а фокальную ось симметрии за полярную ось, направленную в сторону, противоположную ближайшей вершине, то уравнение всех трех кривых в полярных координатах будет одинаковым:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (3)$$

где ε — эксцентриситет, а p — параметр. Для эллипса и гиперболы $p = \frac{b^2}{a}$.

330. В полярной системе координат $(\varphi; r)$ построить точки $A(0; 3)$, $B\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$, $D(\pi; 2)$, $E\left(\frac{3\pi}{2}; 3\right)$.

331. Построить точки: $A\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{2}; 3\right)$, $C\left(-\frac{\pi}{4}; -4\right)$, $D\left(\frac{2\pi}{3}; -3\right)$.



Черт. 12.

332. Построить линию $r = 2 + 2 \cos \varphi$.

Указание. Составить таблицу значений r для $\varphi = 0; \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pi$.

333. Построить линии (см. стр. 353 и 355, черт. 84, 85 и 90):

- 1) $r = a\varphi$ (архимедова спираль);
- 2) $r = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида);
- 3) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската);
- 4) $r = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболическая спираль);
- 5) $r = a(1 + 2 \cos \varphi)$ (улитка Паскаля).

334. Построить линии: 1) $r = a$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 3) $r = \frac{b}{\sin \varphi}$.

335. Написать в полярных координатах уравнения: 1) прямой, отсекающей от полярной оси отрезок a и перпендикулярной к ней; 2) прямой, проходящей через точку $A(\alpha; a)$ и параллельной полярной оси.

336. Написать в полярных координатах уравнение прямой, проходящей через точку $A(\alpha; a)$ и составляющей с полярной осью угол β .

337. Написать в полярных координатах уравнение окружности с центром в точке $C(0; a)$ и радиусом, равным a .

338. Построить кривые:

- 1) $r = 3 - 2 \sin 2\varphi$; 2) $r = 2 + \cos 3\varphi$; 3) $r = 1 - \sin 3\varphi$.

Указание. Определить сначала углы, при которых имеем r_{\max} и r_{\min} .

339. Построить линии (см. стр. 354, черт. 86 и 87):

- 1) $r = a \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);
- 2) $r = a \sin 2\varphi$ (четырехлепестковая роза).

340. Преобразовать к полярным координатам уравнения линий:

- 1) $x^3 - y^2 = a^3$;
- 2) $x^2 + y^3 = a^2$;
- 3) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$;
- 4) $y = x$;
- 5) $x^3 + y^3 = ax$;
- 6) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

341. Преобразовать к декартовым координатам уравнения линий и построить линии:

$$1) r \cos \varphi = a; \quad 2) r = 2a \sin \varphi; \quad 3) r^2 \sin 2\varphi = 2a^2;$$

$$4) r \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = a\sqrt{2}; \quad 5) r = a(1 + \cos \varphi).$$

342. Написать канонические уравнения кривых 2-го порядка:

$$1) r = \frac{9}{5 - 4 \cos \varphi}; \quad 2) r = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}; \quad 3) r = \frac{3}{1 - \cos \varphi}.$$

343. Конхоида. Через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; a\right)$ проведена прямая, параллельная полярной оси. Произвольный луч OB пересекает эту прямую в точке B . На луче от точки B по обе стороны отложены отрезки $BM = BM_1 = b$. Определить геометрическое место точек M и M_1 в полярных координатах и построить кривую.

344. Строфоида. Прямая $x = a$ пересекает ось Ox в точке A и произвольный луч OB в точке B . На луче от точки B по обе стороны отложены отрезки BM_1 и BM_2 , равные AB . Написать уравнение геометрического места точек M_1 и M_2 в полярных и декартовых координатах (черт. 88, стр. 354).

345. Овал Кассини. Точка $M(\varphi; r)$ движется так, что произведение ее расстояний от точек $F(0; a)$ и $F_1(\pi; a)$ остается равным b^2 . Написать уравнение траектории движения точки M в полярных координатах.

346. Кардиоида. На произвольном луче OA от точки A пересечения его с окружностью $r = a \cos \varphi$ откладывается по обе стороны отрезок $AM = AM_1 = a$. Составить уравнение геометрического места точек M и M_1 в полярных и декартовых координатах.

347. Кардиоида (эпциклоида). Круг диаметра a катится без скольжения по кругу такого же диаметра снаружи его. Написать уравнение кривой, описанной точкой M катящейся окружности, если за полюс и начальное положение точки M принять точку касания кругов, а полярную ось провести через центры кругов (в начальном положении).

348. Построить кривые: 1) $r = 3 + 2 \cos 2\varphi$; 2) $r = 3 - \sin 3\varphi$; 3) $r = a \cos 2\varphi$ (см. указание к задаче 338).

349. Построить: 1) $r = 4(1 + \cos \varphi)$; 2) $r = 2 - \sin \varphi$.

350. Написать в полярных координатах уравнение прямой, проходящей через данные точки $A(\alpha; a)$ и $B(\beta; b)$.

Указание. Рассмотреть зависимость между площадями треугольников AOM , BOM и AOB , где $M(\varphi; r)$ — произвольная точка прямой.

351. Написать канонические уравнения кривых 2-го порядка:

$$1) \quad r = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos \varphi}; \quad 2) \quad r = \frac{1}{2 - \sqrt{5} \cos \varphi}; \quad 3) \quad r = \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi}.$$

352. Лемниската Бернулли. Точка $M(\varphi; r)$ движется так, что произведение ее расстояний от точек $F(0; c)$ и $F_1(\pi; c)$ остается равным c^2 . Написать уравнение траектории движения в полярных и декартовых координатах.

Указание. По теореме косинусов $FM^2 = r^2 + c^2 - 2rc \cos \varphi$ и $F_1M^2 = r^2 + c^2 + 2rc \cos \varphi$, причем по условию $FM^2 \cdot F_1M^2 = c^4$.

353. Улитка Паскаля. На произвольном луче OA от точки A пересечения его с окружностью $r = a \cos \varphi$ по обе стороны отложены отрезки $AM = AM_1 = b$. Составить уравнение геометрического места точек M в полярных координатах.

354. Четырехлепестковая роза. Концы отрезка $AB = 2a$ скользят по осям декартовых координат. Из начала координат опущен на AB перпендикуляр OM . Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$ при всевозможных положениях отрезка AB .

§ 17. Алгебраические кривые 3-го и высших порядков

355. Построить кривые (см. стр. 351, черт. 70—73):

$$1) \quad y = \frac{x^3}{3} \quad (\text{кубическая парабола});$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \quad y^2 = x^3 \\ 3) \quad y^3 = x^2 \end{array} \right\} \quad (\text{полукубическая парабола});$$

$$4) \quad y^2 = x(x - 4)^2 \quad (\text{петлевая парабола}).$$

356. Построить кривые:

$$1) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (\text{астроида равносторонняя});$$

$$2) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad b \neq a \quad (\text{астроида неравносторонняя}).$$

Указание. Найти точки пересечения кривых с осями Ox и Oy и первой кривой с прямыми $y = \pm x$, а второй — с прямыми $y = \pm \frac{b}{a}x$. (черт. 82 на стр. 353).

357. Построить на отрезке $[-1; 1]$ кривые: 1) $y = x^{2n+1}$; 2) $y = x^{2n}$; 3) $x^{2n} + y^{2n} = 1$ при $n = 1, 2, 4$. К каким ломанным приближаются эти кривые, когда $n \rightarrow \infty$?

Указание. Найти точки пересечения первой кривой с прямой $y = \frac{x}{2n}$, второй кривой с прямой $y = \frac{1}{2n}$ и третьей кривой с прямой $y = x$. За единицу масштаба принять 10 клеток клетчатой бумаги.

358. Астроида. Концы отрезка $AB = a$ скользят по осям декартовых координат. Прямые AC и BC , параллельные осям координат, пересекаются в точке C . Из C опущен на AB перпендикуляр CM . Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$ при всевозможных положениях отрезка AB .

359. Построить кривые:

$$1) \quad y^2 = \frac{x^3}{a-x} \quad (\text{циссоида, черт. 89, стр. 354});$$

$$2) \quad y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \quad (\text{локон, черт. 80, стр. 353}).$$

360. Каждая точка $P(x_0; y_0)$ параболы $y^2 = 2px$ смещена параллельно оси Ox на расстояние $PM = \pm OP$. Найти геометрическое место точек M .

361. Стержень $OA = a$ вращается вокруг начала координат O . В точке A к нему прикреплен шарниром стержень $AB = 2a$, конец которого скользит по Ox . Написать уравнение линии, которую будет описывать при этом середина M отрезка AB .

362. Циссоида. Произвольный луч OA (черт. 89, стр. 354) пересекает окружность $x^2 + y^2 = ax$ в точке A и прямую $x = a$ в точке B . На луче откладывается отрезок $OM = AB$. Составить уравнение геометрического места точек M .

363. Произвольный луч OB (черт. 89) пересекает прямую $x = a$ в точке B . C — проекция точки B на ось Oy и M — проекция точки C на прямую OB . Показать, что геометрическое место точек M есть циссоида.

364. Если из вершины параболы $y^2 = -4ax$ опускать перпендикуляры на касательные к этой кривой, то геометрическим местом оснований перпендикуляров будет циссоида. Доказать.

365. Локон. Произвольный луч OA пересекает окружность $x^2 + y^2 = 2ay$ и прямую $y = 2a$ в точках A и B , из которых проведены прямые, параллельные соответственно

оси Ox и оси Oy до пересечения в точке M . Определить геометрическое место точек M .

366. Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Показать, что это уравнение поворотом осей координат на 45° приводится к виду $Y^2 = \frac{X^3(3b - X)}{3(b + X)}$, где $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Построить кривую, определив в новой системе координат область расположения кривой и ее симметрию, точки пересечения с прямой $y = x$ (т. е. с новой осью OX) и асимптоту. Показать, что уравнение асимптоты в новой системе координат будет $X = -b$, а в старой $x + y + a = 0$ (см. черт. 83, стр. 353).

§ 18. Трансцендентные кривые

367. Циклоида. Круг радиуса a катится по прямой Ox без скольжения. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M окружности, приняв за параметр t угол поворота катящегося круга и положив, что при $t = 0$ точка M находится в начале координат.

368. Развертка круга. Нить, намотанная на окружность $x^2 + y^2 = a^2$, разматывается, оставаясь натянутой. Составить параметрические уравнения кривой, описанной концом нити, если вначале конец нити находится в точке $(a; 0)$. За параметр t принять длину смотанной дуги (в радиусах).

369. Квадратриса. Произвольный луч OM , составляющий с осью Oy угол t (в радианах), пересекает прямую $x = at$ в точке M . Написать уравнение геометрического места точек M .

370. Эпициклоида. Круг радиуса r катится без скольжения по кругу радиуса R снаружи его. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M катящейся окружности. (При $r = R$ эпициклоида обращается в кардиоиду. См. задачу 347.)

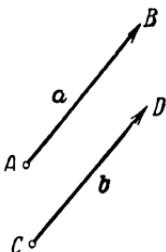
371. Гипоциклоида. Круг радиуса r катится без скольжения по кругу радиуса $R > r$ внутри него. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M катящейся окружности. (При $r = \frac{R}{4}$ гипоциклоида обращается к астроиду $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.)

ГЛАВА II

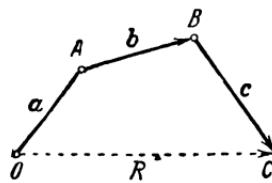
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Сложение векторов. Умножение вектора на скаляр

1°. **Определения.** Вектором называется направленный отрезок \overrightarrow{AB} (черт. 13), в котором точка A рассматривается как **начало**, а точка B — как **конец**. Вектор обозначается или указанием его начала и конца \overrightarrow{AB} с чертой наверху или одной какой-нибудь буквой, например a (в печати жирной без черты; а в письме с.чертой наверху). Модуль (длина) вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, или $|a|$,



Черт. 13.



Черт. 14.

или AB , или a . Векторы, параллельные одной прямой, называются **коллинеарными**. Векторы, параллельные одной плоскости, называются **компланарными**. Два вектора a и b (черт. 13) называются **равными**, если они 1) имеют **равные модули**, 2) **коллинеарны**, 3) направлены в **одну сторону**.

2°. **Умножение вектора на скаляр.** Произведением вектора a на число (скаляр) m называется новый вектор, имеющий длину $|a|m|$ и направленный одинаково с a (при $m > 0$) или противоположно a (при $m < 0$).

3°. **Сложение векторов.** Суммой векторов $a + b + c$ называется вектор $R = \overrightarrow{OC}$ (черт. 14), замыкающий ломаную $OABC$, построенную из данных векторов. В частности, в параллелограмме, построенном на данных векторах $\overrightarrow{OA} = a$ и $\overrightarrow{OB} = b$, одна вектор-диагональ \overrightarrow{OC} есть сумма $a + b$, а другая \overrightarrow{BA} есть разность $a - b$ данных векторов.

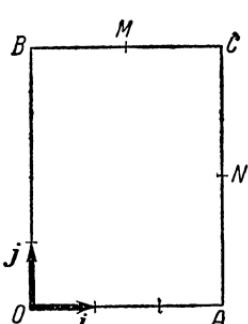
4°. Проекция вектора на ось. Пусть вектор a составляет угол φ с осью Ox . Тогда проекция вектора на эту ось определяется формулой

$$\text{пр}_x a = |a| \cos \varphi = a \cos (\widehat{a, Ox}).$$

Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось:

$$\text{пр}_x (a + b) = \text{пр}_x a + \text{пр}_x b.$$

372. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы i и j (черт. 15). Выразить через



Черт. 15.

i и j векторы \overline{OA} , \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{BO} , \overline{OC} и \overline{BA} , если длина $OA = 3$ и $OB = 4$.

373. Пусть на черт. 15 M — середина BC и N — середина AC . Определить векторы \overline{OM} , \overline{ON} и \overline{MN} при $OA = 3$ и $OB = 4$.

374. На плоскости даны точки $A(0; -2)$, $B(4; 2)$ и $C(4; -2)$. В начале координат приложены силы \overline{OA} , \overline{OB} и \overline{OC} . Построить их равнодействующую \overline{OM} , найти ее проекции на оси координат и величину. Выразить силы

\overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} и \overline{OM} через единичные векторы i и j координатных осей.

375. Даны три компланарных единичных вектора m , n и p , причем $(\widehat{m, n}) = 30^\circ$ и $(\widehat{n, p}) = 60^\circ$. Построить вектор $u = m + 2n - 3p$ и вычислить его модуль.

Указание. В ломаной, построенной из векторов m , $2n$ и $-3p$, продолжить первое звено до пересечения с третьим.

376. Проверить аналитически и геометрически векторные тождества:

$$1) \quad a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}; \quad 2) \quad a - \frac{a + b}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

377. На трех некомпланарных векторах $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ и $\overline{OC} = c$ построен параллелепипед. Указать те его вектордиагонали, которые соответственно равны $a + b - c$, $a - b + c$, $a - b - c$ и $b - a - c$.

378. С помощью чертежа задачи 377 проверить переместительное свойство векторной суммы

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{a}.$$

379. Даны векторы $\overline{OA} = \mathbf{a}$ и $\overline{OB} = \mathbf{b}$. Вектор $\overline{OC} = \mathbf{c}$ — медиана $\triangle OAB$. Разложить аналитически и геометрически 1) вектор \mathbf{c} по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} ; 2) вектор \mathbf{a} по векторам \mathbf{b} и \mathbf{c} .

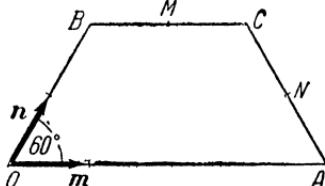
380. В прямоугольнике $OACB$ (черт. 15) M и N — середины сторон $BC = 3$ и $AC = 4$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overline{OC} = \mathbf{c}$ по векторам $\overline{OM} = \mathbf{a}$ и $\overline{ON} = \mathbf{b}$.

Указание. В условие $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ подставить выражения \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} через i и j и сравнить коэффициенты слева и справа при i и j .

381. Дан правильный шестиугольник $OABCDE$ со стороной $OA = 3$. Обозначив единичные векторы направлений \overline{OA} , \overline{AB} , \overline{BC} через \mathbf{m} , \mathbf{n} и \mathbf{p} , установить зависимость между ними (например, рассмотрением трапеции $OABC$). Выразить затем через \mathbf{m} и \mathbf{n} векторы \overline{OB} , \overline{BC} , \overline{EO} , \overline{OD} и \overline{DA} .

382. В равнобедренной трапеции $OACB$ (черт. 16) угол $BOA = 60^\circ$, $OB = BC = CA = 2$, M и N — середины сторон BC и AC . Выразить векторы \overline{AC} , \overline{OM} , \overline{ON} и \overline{MN} через \mathbf{m} и \mathbf{n} — единичные векторы направлений \overline{OA} и \overline{OB} .

383. Даны векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , угол между которыми 120° . Построить вектор $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 1,5\mathbf{b}$ и определить его модуль, если $a = 3$ и $b = 4$.



Черт. 16.

384. На плоскости даны точки $A(3; 3)$, $B(-3; 3)$ и $C(-3; 0)$. В начале координат приложены силы \overline{OA} , \overline{OB} и \overline{OC} . Построить равнодействующую \overline{OM} , найти ее проекции на оси координат и величину. Выразить силы \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} и \overline{OM} через единичные векторы i и j координатных осей.

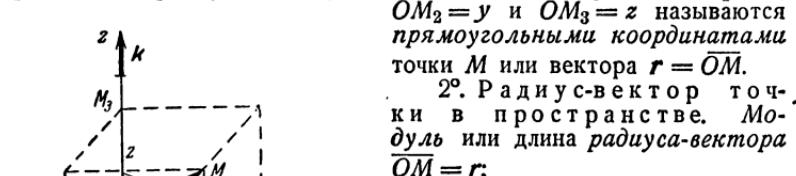
385. 1) В трапеции $OACB$: $BC = \frac{1}{3} OA$ и $BC \parallel OA$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overline{OA} = \mathbf{a}$ по векторам $\overline{OC} = \mathbf{c}$ и $\overline{OB} = \mathbf{b}$.

Указание. Из $\triangle OBC$ можно \mathbf{c} выразить через \mathbf{b} и \mathbf{a} и затем решить полученное уравнение относительно \mathbf{a} .

2) Точка B делит дугу окружности $\widehat{AC} = 90^\circ$ в отношении $1 : 2$. O — центр окружности. Разложить вектор $\overline{OC} = \mathbf{c}$ по векторам $\overline{OA} = \mathbf{a}$ и $\overline{OB} = \mathbf{b}$.

§ 2. Прямоугольные координаты точки и вектора в пространстве

1°. Определение. Пусть даны три взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом O и дана точка M (черт. 17). Проекции ее радиуса-вектора $\overline{OM} = \mathbf{r}$ на оси координат $OM_1 = x$, $OM_2 = y$ и $OM_3 = z$ называются *прямоугольными координатами* точки M или вектора $\mathbf{r} = \overline{OM}$.



Черт. 17.

2°. Радиус-вектор точки в пространстве. Модуль или длина радиуса-вектора $\overline{OM} = r$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1)$$

Единичные векторы координатных осей i , j и k называются *ортами*. Радиус-вектор выражается через орты:

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk. \quad (2)$$

3°. Вектор, заданный координатами начала и конца. Пусть даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Проекции вектора $\mathbf{u} = \overline{AB}$ на оси координат будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{пр}_x \overline{AB} = X = x_2 - x_1, \\ \text{пр}_y \overline{AB} = Y = y_2 - y_1, \\ \text{пр}_z \overline{AB} = Z = z_2 - z_1. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Можно написать формулы, аналогичные формулам (1), (2):

$$\mathbf{u} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \overline{AB} = xi + yj + zk. \quad (5)$$

Если α , β и γ — углы вектора $u = \overline{AB}$ с осями координат, то

$$\cos \alpha = \frac{X}{u}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{u}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{u}, \quad (6)$$

причем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (7)$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна 1.

Из формул (4), (5) и (6) следует, что вектор u вполне определяется тремя числами: X , Y и Z — его проекциями или его координатами. Поэтому иногда пишут или говорят: дан вектор u $\{X; Y; Z\}$.

386. Построить точку $M(5; -3; 4)$ и определить длину и направление ее радиуса-вектора.

387. Построить вектор $r = \overline{OM} = 2i + 3j + 6k$ и определить его длину и направление (проверить по формуле $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$).

388. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы 40° и 80° . Найти его угол с осью Oy .

389. Радиус-вектор точки M составляет с осью Ox угол 45° и с осью Oy — 60° . Длина его $r = 6$. Определить координаты точки M , если ее координата z отрицательна, и выразить вектор $\overline{OM} = r$ через орты i, j, k .

390. Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -4; 6)$. Построить вектор $\overline{AB} = u$, его проекции на оси координат и определить длину и направление вектора. Построить углы вектора u с осями координат.

391. Построить параллелограмм на векторах $\overline{OA} = i + j$ и $\overline{OB} = k - 3j$ и определить его диагонали.

392. В точке $A(2; 1; -1)$ приложена сила $R = 7$. Зная две координаты этой силы $X = 2$ и $Y = -3$, определить направление и конец вектора, изображающего силу.

393. На плоскости xOy даны точки $A(4; 2)$, $B(2; 3)$ и $C(0; 5)$ и построены векторы $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ и $\overline{OC} = c$. Разложить геометрически и аналитически вектор a по векторам b и c .

394. Даны точки $A(2; 2; 0)$ и $B(0; -2; 5)$. Построить вектор $\overline{AB} = u$ и определить его длину и направление.

395. Вектор $\overline{OM} = r$ составляет с осями координат равные острые углы. Определить эти углы и построить вектор r , если его длина равна $2\sqrt{3}$.

396. Вектор составляет с осями Oy и Oz углы 60° и 120° . Какой угол он составляет с осью Ox ?

397. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ и $C(6; 4; 4)$. Найти его четвертую вершину D .

Указание. Из равенства $\overline{AD} = \overline{BC}$ следует, что равны и их координаты $x - 1 = 6 - 3$ и т. д.

398. На плоскости xOy построить векторы $\overline{OA} = \mathbf{a} = 2\mathbf{i}$, $\overline{OB} = \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ и $\overline{OC} = \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Разложить геометрически и аналитически вектор \mathbf{c} по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} .

§ 3. Скалярное произведение двух векторов

1°. Определение. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними.

Скалярное произведение вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} обозначается: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Итак,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi. \quad (1)$$

Из черт. 18 видно, что $b \cos \varphi = \text{пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$. Поэтому

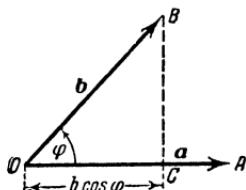
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi = a \text{пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = b \text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}. \quad (2)$$

2°. Свойства скалярного произведения:

I. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ — переместительный закон.

II. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ — распределительный закон.

III. Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \pm ab$. В частности, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = aa \cos 0^\circ = a^2$; отсюда



Черт. 18.

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}^2}. \quad (3)$$

IV. Если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos 90^\circ = 0$.

V. Скалярные произведения ортов:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

VI. Если векторы заданы координатами $\mathbf{a} \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\mathbf{b} \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4)$$

3°. Угол между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (5)$$

Условие параллельности: $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ или $\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = t$.

Условие перпендикулярности: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ или $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

399. Определить угол между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

400. Определить углы $\triangle ABC$ с вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$.

401. Даны точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; 0; 2a)$ и $C(a; 0; a)$. Построить векторы \overrightarrow{OC} и \overrightarrow{AB} и найти угол между ними.

402. На плоскости дан треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(2a; 0)$ и $B(a; -a)$. Найти угол, образованный стороной OB и медианой OM этого треугольника.

403. Найти угол между биссектрисами углов xOy и yOz .

404. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

405. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

406. Даны векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Определить прп \mathbf{a} и прп \mathbf{b} .

407. Раскрыть скобки в выражении

$$(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + (\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} + (\mathbf{i} - 2\mathbf{k})^2.$$

408. Вычислить: 1) $(\mathbf{m} + \mathbf{n})^2$, если \mathbf{m} и \mathbf{n} — единичные векторы с углом между ними 30° ; 2) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$, если $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$ и $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 135^\circ$.

409. Раскрыть скобки в выражениях:

$$1) (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2; \quad 2) (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$$

и выяснить геометрический смысл полученных формул.

410. Даны компланарные векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , причем $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 60^\circ$ и $\widehat{(\mathbf{b}, \mathbf{c})} = 60^\circ$. Построить вектор $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ и вычислить его модуль по формуле

$$u = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})^2}.$$

411. Найти величину равнодействующей четырех компланарных сил, приложенных к точке O , если величина каждой

силы равна 10 кН , а угол между двумя последовательными силами равен 45° .

412. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, где \mathbf{m} и \mathbf{n} — единичные векторы, угол между которыми 60° .

413. Дан вектор $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$, где \mathbf{m} и \mathbf{n} — единичные векторы с углом между ними 120° . Найти $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{m}})$ и $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{n}})$.

414. Определить угол между биссектрисами двух плоских углов правильного тетраэдра, проведеными из одной его вершины.

Указание. Если \mathbf{m} , \mathbf{n} и \mathbf{p} — единичные векторы ребер, то $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{m} + \mathbf{p}$ — векторы, направленные по биссектрисам.

415. На осях Ox , Oy и Oz отложить равные отрезки $a = 4$ и на них построить куб. Пусть M — центр верхней грани, а N — центр правой боковой грани куба. Определить векторы \overline{OM} и \overline{ON} и угол между ними.

416. Даны векторы $\overline{OA} = \mathbf{a}$ и $\overline{OB} = \mathbf{b}$, причем $a = 2$, $b = 4$, а $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 60^\circ$. Определить угол между медианой \overline{OM} треугольника AOB и стороной \overline{OA} .

417. Из вершины прямоугольника со сторонами 6 и 4 см проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол ϕ между ними.

418. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$ и $C(5; 0; 2)$. Найти его четвертую вершину D и угол между векторами \overline{AC} и \overline{BD} .

419. Даны точки $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(0; -3; 0)$ и $D(0; 2; -4)$. Построить векторы $\overline{AB} = \mathbf{a}$ и $\overline{CD} = \mathbf{b}$ и найти $\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$.

420. В равнобедренной трапеции $OACB$ (черт. 16, стр. 59) M и N — середины сторон $BC = 2$ и $AC = 2$. Острый угол трапеции 60° . Определить угол между векторами \overline{OM} и \overline{ON} .

421. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, где \mathbf{m} и \mathbf{n} — единичные векторы, образующие угол 120° .

422. Показать, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$), определяется формулой $\cos \varphi = \pm \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

423. Проекции перемещения движущейся точки на оси координат равны $s_x = 2$ м, $s_y = 1$ м, $s_z = -2$ м. Проекции действующей силы \mathbf{F} на оси координат равны $F_x = 5$ кГ, $F_y = 4$ кГ и $F_z = 3$ кГ. Вычислить работу A силы \mathbf{F} ($A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$) и угол между силой \mathbf{F} и перемещением \mathbf{s} .

424. К вершине правильного тетраэдра с ребром a приложены три силы, изображаемые его вектор-ребрами. Определить величину равнодействующей.

Указание. Искомая величина равна $a \sqrt{(m+n+p)^2}$, где m , n и p — единичные векторы данных сил.

425. Квадрат разделен на три полосы одинаковой ширины и затем свернут в правильную треугольную призму. Найти угол между двумя смежными звеньями ломаной, образованной при этом диагональю квадрата.

§ 4. Векторное произведение двух векторов

1°. *Определение.* Векторным произведением вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} называется такой третий вектор \mathbf{c} (черт. 19), который:

1) имеет модуль, численно равный, площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} ;

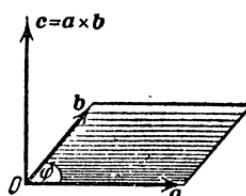
2) перпендикулярен к плоскости параллелограмма;

3) направлен в такую сторону, с которой кратчайшее вращение от \mathbf{a} к \mathbf{b} рассматривается совершающимся против часовой стрелки. Такое расположение векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} называется правой связкой.

Векторное произведение обозначается: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Итак,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

если $\left\{ \begin{array}{l} 1) \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \varphi, \\ 2) \mathbf{c} \perp \mathbf{a} \text{ и } \mathbf{c} \perp \mathbf{b}, \\ 3) \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ составляют правую связку.} \end{array} \right.$



2°. Свойства векторного произведения:

Черт. 19.

I. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

II. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ — распределительный закон.

III. Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$; в частности, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

3°. Векторные произведения ортов:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \quad (1)$$

Вообще произведение любых двух смежных векторов в последовательности

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k} \mathbf{i} \mathbf{j}} \\ \hline \end{array} +$$

дает следующий вектор со знаком $+$, а в обратной последовательности — со знаком $-$.

4°. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей $\mathbf{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\mathbf{b}\{b_x, b_y, b_z\}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

5°. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$S_{\square} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, \quad (3)$$

а площадь треугольника, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \quad (4)$$

426. Определить и построить вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, если $1) \mathbf{a} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{k}$; $2) \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; $3) \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} .

427. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ и $C(4; 5; -2)$.

428. Построить параллелограмм на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

429. Раскрыть скобки и упростить выражения:

- 1) $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$;
- 2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$;
- 3) $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$;
- 4) $2\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + 3\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 4\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$.

430. Доказать, что $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, и выяснить геометрическое значение этого тождества.

431. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} составляют угол 45° . Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 5$.

432. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$, где \mathbf{m} и \mathbf{n} — единичные векторы, образующие угол 45° .

Указание. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$, где \mathbf{a} и \mathbf{b} — векторы-стороны параллелограмма. Перемножив, найдем вектор $2\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, модуль которого и равен удвоенной искомой площади.

433. Построить векторы $\mathbf{a} = 3\mathbf{k} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Вычислить модуль вектора \mathbf{c} и площадь треугольника, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} .

434. Построить треугольник с вершинами $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$ и $C(6; 2; 0)$. Вычислить его площадь и высоту BD .

435. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{k} - \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

436. Доказать, что $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 3\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

437. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$, где \mathbf{m} и \mathbf{n} — единичные векторы, образующие угол 30° .

§ 5. Смешанное произведение трех векторов

1°. Определение. Смешанным произведением векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} называется выражение вида $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Если векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} заданы своими координатами, то

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1)$$

2°. Свойства смешанного произведения.

I. От перестановки двух любых сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}. \quad (2)$$

II. Если два из трех данных векторов равны или параллельны, то их смешанное произведение равно 0.

III. Знаки операций «точка» и «крест» можно поменять местами,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c});$$

поэтому смешанное произведение принято записывать в виде \mathbf{abc} , т. е. без знаков действий и без скобок.

3°. Объем параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} :

$$V = \pm abc \left\{ \begin{array}{l} + \text{ при правой связке,} \\ - \text{ при левой связке.} \end{array} \right.$$

Объем пирамиды, построенной на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} :

$$V_{\text{пир}} = \pm \frac{1}{6} abc.$$

4°. Условие компланарности. Если \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} компланарны, то $\mathbf{abc} = 0$, и обратно. При этом между \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} существует линейная зависимость вида $\mathbf{c} = ta + nb$.

438. Построить параллелепипед на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ и вычислить его объем. Правой или левой будет связка векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$?

439. Построить пирамиду с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ и $C(1; 2; 4)$ и вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

440. Показать, что точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$ и $D(5; 0; -6)$ лежат в одной плоскости.

441. Показать, что векторы $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ компланарны, и разложить вектор \mathbf{c} по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} .

442. Показать, что 1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b}] = -abc$; 2) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})] = 3abc$.

443. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах \overline{OA} , \overline{OB} и \overline{OC} , если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого вектора равна 2.

444. Построить пирамиду с вершинами $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$ и $D(2; 3; 8)$, вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC .

445. Построить векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ и $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, показать, что они компланарны, и найти линейную зависимость между ними.

446. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

447. Даны единичные векторы m , n и p . Угол $\widehat{(m, n)} = \widehat{[p, (m \times n)]} = \alpha$. Доказать, что тогда $(m \times n) \cdot p = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

448. При любых векторах a , b и c векторы $a - b$, $b - c$ и $c - a$ компланарны. Доказать это аналитически и геометрически (рассмотрением параллелепипеда, построенного на векторах a , b и c).

449. Вычислить объем параллелепипеда $OABC O_1 A_1 B_1 C_1$, в котором даны три вершины нижнего основания $O(0; 0; 0)$, $A(2; -3; 0)$ и $C(3; 2; 0)$ и вершина верхнего основания $B_1(3; 0; 4)$, лежащая на боковом ребре BB_1 , противоположном ребру OO_1 .

ГЛАВА III

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнение плоскости

1°. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярной к вектору $N\{A; B; C\}$.
 Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка плоскости (черт. 20). Тогда $\overrightarrow{M_1M} \perp N$ и по условию перпендикулярности векторов

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

2°. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

Вектор $N\{A; B; C\}$ называется *нормальным* вектором к плоскости (2) или (1).

3°. Особые случаи уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$:

I. $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ — плоскость проходит через начало координат.

II. $C = 0$, $Ax + By + D = 0$ — плоскость параллельна оси Oz .

III. $C = D = 0$, $Ax + By = 0$ — плоскость проходит через ось Oz .

IV. $B = C = 0$, $Ax + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости yOz .

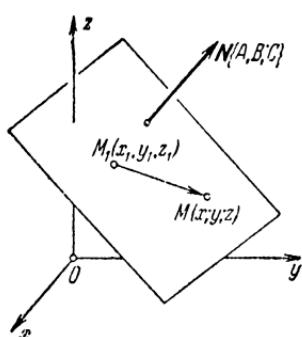
V. Уравнения координатных плоскостей: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4°. Уравнение плоскости в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3)$$

450. Построить плоскости: 1) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$; 2) $3x + 2y - z = 0$; 3) $3x + 2z = 6$; 4) $2z - 7 = 0$.

451. Построить плоскость $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ и найти углы нормали к плоскости с осями координат.



Черт. 20.

452. Даны точки $M_1(0; -1; 3)$ и $M_2(1; 3; 5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к вектору $N = \overline{M_1 M_2}$.

453. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(a; a; 0)$ и перпендикулярной к вектору \overline{OM} . Построить плоскость.

454. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точек $A\left(a; -\frac{a}{2}; a\right)$ и $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$.

455. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0; 1; 3)$ и $M_2(2; 4; 5)$, и построить ее.

456. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M_1(0; -2; 3)$. Построить плоскость.

457. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M_1(2; -4; 3)$. Построить плоскость.

458. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oy и отсекающей на осях Ox и Oz отрезки a и c . Построить плоскость.

459. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

460. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-4; 0; 4)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 4$ и $b = 3$.

461. Построить плоскости: 1) $2x + y - z + 6 = 0$; 2) $x - y - z = 0$; 3) $y - 2z + 8 = 0$; 4) $2x - 5 = 0$; 5) $x + z = 1$; 6) $y + z = 0$.

462. Построить плоскость $2x - 2y + z - 6 = 0$ и найти углы ее нормали с осями координат.

463. Через точку $M(-1; 2; 3)$ проведена плоскость, перпендикулярная к OM . Написать ее уравнение.

464. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и через точку $(4; 0; 3)$. Построить плоскость.

465. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(2; 2; 0)$ и $M_2(4; 0; 0)$. Построить плоскость.

466. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; -3; 5)$ и отсекающей на осях Oy и Oz вдвое большие отрезки, чем на оси Ox .

§ 2. Основные задачи на плоскость

1°. Угол, образованный двумя плоскостями:

$$\cos \varphi = \pm \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_1}{\mathbf{N} \mathbf{N}_1} = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{NN_1}, \quad (1)$$

где \mathbf{N} и \mathbf{N}_1 — нормальные векторы к плоскостям $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

Условие параллельности:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \quad (2)$$

Условие перпендикулярности:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \quad (3)$$

2°. Расстояние точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{N}. \quad (4)$$

3°. Уравнение пучка всех плоскостей, проходящих через линию пересечения двух данных плоскостей:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0. \quad (5)$$

Можно положить $\alpha = 1$, исключив этим из пучка (5) вторую из данных плоскостей.

467. Найти угол между плоскостями:

- 1) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$;
- 2) $x + 2z - 6 = 0$ и $x + 2y - 4 = 0$.

468. Найти плоскость, проходящую через точку $(2; 2; -2)$ и параллельную плоскости $x - 2y - 3z = 0$.

469. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям

$$x - 2y + z - 4 = 0 \text{ и } x + 2y - 2z + 4 = 0.$$

470. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(0; 0; a)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - y - z = 0$ и $2y = x$.

471. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; -2; 0)$ и $M_2(1; 1; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

472. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ и $M_3(1; 1; 4)$.

473. Через ось Oz провести плоскость, составляющую с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ угол 60° .

474. Найти расстояние точки $(5; 1; -1)$ от плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

475. Найти расстояние точки $(4; 3; 0)$ от плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 3; 0)$, $M_2(4; -1; 2)$ и $M_3(3; 0; 1)$.

476. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

Указание. Взять на первой плоскости любую точку, например $(?; 0; 0)$, и найти ее расстояние от другой плоскости.

477. 1) Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x - 2y + 2z - 5 = 0$ и удаленных от нее на 2 единицы.

2) Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранный угол, образованный плоскостями $2x + 2y = z$ и $z = 0$, и построить данные и искомые плоскости.

478. 1) Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 6 = 0$, $x + 2y - z + 3 = 0$ и через точку $(1; 2; 4)$.

2) Найти две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через прямую пересечения плоскостей $x = y$ и $z = 0$, если одна из искомых плоскостей проходит через точку $(0; 4; 2)$. Построить прямую и искомые плоскости.

479. Найти точку пересечения плоскостей: $2x - y + 3z - 9 = 0$; $x + 2y + 2z - 3 = 0$; $3x + y - 4z + 6 = 0$.

480. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(2; -1; 1)$ и перпендикулярной к плоскостям $3x + 2y - z + 4 = 0$ и $x + y + z - 3 = 0$. Построить ее.

481. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $(0; -5; 0)$ и $(0; 0; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 5y + 2z - 10 = 0$. Построить ее.

482. Найти угол плоскости, проходящей через точки $O(0; 0; 0)$, $M_1(a; -a; 0)$ и $M_2(a; a; a)$, с плоскостью xOy .

483. Найти расстояние начала координат от плоскости, проходящей через точки $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; a; 0)$ и $M_3(a; a; a)$.

484. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и составляющей угол 60° с плоскостью $y = x$.

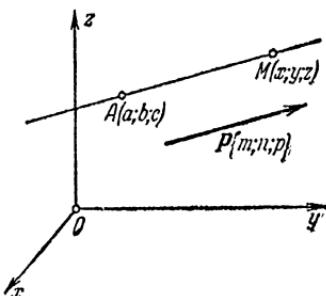
485. Найти расстояние точки (a, b, c) от плоскости, отсекающей на осях координат отрезки a, b и c .

486. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x + 2y + z - 8 = 0$ и удаленных от нее на расстояние $d = 4$.

487. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 6 = 0$ и $x + 5y - z + 10 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $2x - y + 5z - 5 = 0$.

§ 3. Уравнения прямой

1°. Уравнения прямой, проходящей через точку $A(a; b; c)$ и параллельной вектору $P\{m; n; p\}$. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка прямой (черт. 21), тогда $\overrightarrow{AM} \parallel P$ и по условию параллельности векторов



Черт. 21.

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \quad (1)$$

Уравнения (1) называются *каноническими* уравнениями прямой. Вектор $P\{m; n; p\}$ называется *направляющим* вектором прямой.

2°. Параметрические уравнения прямой получим, приравняв каждое из отношений (1) параметру t :

$$\left. \begin{array}{l} x = mt + a, \\ y = nt + b, \\ z = pt + c. \end{array} \right\} \quad (2)$$

3°. Уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3)$$

4°. Общие уравнения прямой:

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

5°. Уравнения прямой в проекциях получим, исключив из общих уравнений (4) один раз y , другой раз x :

$$\left. \begin{array}{l} x = mz + a, \\ y = nz + b. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Уравнения (5) можно записать в канонической форме:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{l}.$$

488. Найти следы прямых:

$$1) \begin{cases} x = z + 5 \\ y = 4 - 2z \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

на плоскостях xOy и xOz и построить прямые.

Указание. Положить в уравнениях прямой 1) $z = 0$; 2) $y = 0$.

489. Уравнения прямой $\begin{cases} x+2y+3z-13=0 \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$ написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме. Найти следы прямой на координатных плоскостях и построить прямую и ее проекции.

490. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4; 3; 0)$ и параллельной вектору $P\{-1; 1; 1\}$. Найти след прямой на плоскости yOz и построить прямую.

491. Построить прямую $x = 4, y = 3$ и найти ее направляющий вектор.

492. Построить прямые

$$1) \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 2 \\ z = x + 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases}$$

и определить их направляющие векторы.

493. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(2; 6; -2)$, и найти ее направляющие косинусы.

494. Построить прямую, проходящую через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(2; 3; 3)$, и написать ее уравнения.

495. Написать уравнения траектории точки $M(x; y; z)$, которая, выйдя из точки $A(4; -3; 1)$, движется со скоростью $v\{2; 3; 1\}$.

496. Написать параметрические уравнения прямой:

1) проходящей через точку $(-2; 1; -1)$ и параллельной вектору $P\{1; -2; 3\}$;

2) проходящей через точки $A(3; -1; 4)$ и $B(1; 1; 2)$.

497. Написать уравнения прямой, проходящей через точку (a, b, c) : 1) параллельно оси Oz ; 2) перпендикулярно к оси Oz .

498. Найти угол прямой $x = 2z - 1$; $y = -2z + 1$ с прямой, проходящей через начало координат и через точку $(1; -1; -1)$.

499. Найти угол между прямыми:

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$$

Указание. Направляющий вектор каждой из прямых можно определить как векторное произведение нормальных векторов плоскостей ($P = N \times N_1$).

500. Показать, что прямая $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ перпендикулярна к прямой $x = z + 1$, $y = 1 - z$.

501. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-4; 3; 0)$ и параллельной прямой $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

502. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2; -3; 4)$ на ось Oz .

Указание. Искомая прямая проходит еще через точку $(0; 0; 4)$.

503. Найти расстояние точки $M(2; -1; 3)$ от прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$.

Указание $A(-1; -2; 1)$ — точка на прямой; $P\{3; 4; 5\}$ — направляющий вектор прямой. Тогда

$$d = AM \sin \alpha = \frac{AM |P \times \overrightarrow{AM}|}{P \cdot AM} = \frac{|P \times \overrightarrow{AM}|}{P}.$$

504. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \text{ и } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

505. Найти следы прямой $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$ на координатных плоскостях и построить прямую.

506. Уравнения прямой $\begin{cases} 2x + y + 8z - 16 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме. Найти следы прямой на координатных плоскостях, построить прямую и ее проекции.

507. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(0; -4; 0)$ и параллельной вектору $\mathbf{P}\{1; 2; 3\}$, найти след прямой на плоскости xOz и построить прямую.

508. Построить прямую $x = 3, z = 6$ и найти ее направляющий вектор.

509. Найти направляющий вектор прямой $x + y - z = 0, y = x$ и найти углы прямой с осями координат (см. указание к задаче 499).

510. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2; -3; 4)$ на ось Oy .

511. Найти угол между прямыми:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{array} \right. \text{ и } \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 8 = 0 \\ z = 3x. \end{array} \right.$$

512. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-1; 2; -2)$ и параллельной прямой $x - y = 2, y = 2z + 1$.

513. Найти расстояние точки $M(3; 0; 4)$ от прямой $y = 2x + 1, z = 2x$ (см. задачу 503).

§ 4. Прямая и плоскость

1°. Угол между прямой $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin \theta = \frac{|N \cdot P|}{NP} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{NP}. \quad (1)$$

Условие их параллельности ($N \perp P$):

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (2)$$

Условие их перпендикулярности ($N \parallel P$):

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (3)$$

2°. Точка пересечения прямой и плоскости. Написав параметрические уравнения прямой $x = mt + a, y = nt + b, z = pt + c$, подставим в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вместо x, y, z их выражения через t . Найдем t_0 , а затем x_0, y_0, z_0 — координаты точки пересечения.

3°. Условие расположения двух прямых в одной плоскости:

$$\left| \begin{array}{ccc} a - a_1 & b - b_1 & c - c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{array} \right| = 0. \quad (4)$$

514. Найти угол прямой $y = 3x - 1$, $2z = -3x + 2$ с плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

515. Показать, что прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ лежит в этой плоскости.

516. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; 2; -3)$ и перпендикулярной к прямой $x = 2$, $y - z = 1$.

517. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ и точку $(3; 4; 0)$.

518. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной к плоскости $2x + 3y - z = 4$.

519. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

520. Написать уравнения прямой, проходящей через начало координат и составляющей равные углы с плоскостями $4y = 3x$, $y = 0$ и $z = 0$. Найти эти углы.

521. Найти точку пересечения прямой $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = 1 - t$ с плоскостью $3x - 2y + z = 3$.

522. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 29 = 0$.

523. Найти проекцию точки $(3; 1; -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

524. Найти проекцию точки $(2; 3; 4)$ на прямую $x = y = z$.

525. Найти кратчайшее расстояние между непараллельными прямыми:

$$1) \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1};$$

$$2) \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Указание. Предполагая прямые в общем случае скрещивающимися, нарисуем параллельные плоскости, в которых они расположены. Из точек $A(a; b; c)$ и $A_1(a_1; b_1; c_1)$ проведем векторы $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = P\{m; n; p\}$ и $\overline{AC} = \overline{A_1C_1} = P_1\{m_1; n_1; p_1\}$. Высота призмы $ABCA_1B_1C_1$ и равна искомому расстоянию.

526. Показать, что прямые

$$\begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

пересекаются, и написать уравнение плоскости, в которой они расположены.

527. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2; 1; 0)$ на прямую $x = 3z - 1$, $y = 2z$.

528. Построить плоскость $x + y - z = 0$ и прямую, проходящую через точки $A(0; 0; 4)$ и $B(2; 2; 0)$. Найти точку пересечения прямой с плоскостью и угол между ними.

529. Построить плоскость $y = z$, прямую $\begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2 \end{cases}$

и найти: 1) точку их пересечения; 2) угол между ними.

530. Найти проекцию точки $(3; 1; -1)$ на плоскость $3x + y + z - 20 = 0$.

531. Найти проекцию точки $(1; 2; 8)$ на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = z$.

532. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

533. Показать, что прямые $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$ и $\begin{cases} x = 3z - 4 \\ y = z + 2 \end{cases}$ пересекаются, найти точку их пересечения.

534. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(1; 0; -1)$ на прямую $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$.

535. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $x = -2y = z$ и $x = y = 2$.

§ 5. Сферические и цилиндрические поверхности

1° Уравнение сферической поверхности с центром $C(a, b, c)$ и радиусом R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (1)$$

2° Уравнение $F(x, y) = 0$, не содержащее z , определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz . Аналогично, каждое из уравнений 1) $F(y, z) = 0$ и 2) $F(x, z) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной 1) Ox ; 2) Oy .

3° Уравнение цилиндрической поверхности с направляющей $F(x, y) = 0, z = 0$ и с образующей, параллельной вектору $P\{m; n; p\}$. Уравнение произвольной образующей будет:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z}{p},$$

где $(x_0; y_0; 0)$ — точка на направляющей.

Определив отсюда x_0 и y_0 и подставив их в уравнение направляющей, получим уравнение цилиндрической поверхности:

$$F\left(x - \frac{m}{p}z, y - \frac{n}{p}z\right) = 0. \quad (2)$$

536. Найти центр и радиус сферы

$$1) x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0; \quad 2) x^2 + y^2 + z^2 = 2az$$

и построить изображение второй сферы.

537. Написать уравнение сферической поверхности, вписанной в тетраэдр, образованный плоскостями

$$3x - 2y + 6z - 18 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

538. Написать уравнение геометрического места точек, расположенных вдвое ближе к точке $A(2; 0; 0)$, чем к точке $B(-4; 0; 0)$.

539. Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases}$ и через точку $(a; a; a)$.

Указание. Искомое уравнение должно иметь вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \lambda(x + y + z - a) = 0.$$

540. Построить в левой системе координат поверхности

$$1) y^2 + z^2 = 4; \quad 2) y^2 = ax; \quad 3) xz = 4; \quad 4) x^2 + y^2 = ax.$$

541. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от прямой $x = a$, $y = 0$ и плоскости yOz . Построить поверхность.

542. Написать уравнения трех цилиндрических поверхностей, описанных около сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ с образующими, параллельными соответственно: 1) оси Ox ; 2) оси Oy ; 3) оси Oz .

543. Нарисовать в первом октанте левой системы координат кривую Вивиани:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 4x, \end{cases}$$

построив ее точки при $x = 0$; 2 и 4. Показать, что проекция кривой на плоскость xOz есть парабола.

544. Найти центр и радиус окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10y \\ x + 2y + 2z - 19 = 0. \end{cases}$$

Указание. Центр окружности есть проекция центра шара на плоскость (см. задачу 530).

545. Написать уравнение цилиндрической поверхности с направляющей $y^2 = 4x$, $z = 0$ и с образующей, параллельной вектору $P\{1; 2; 3\}$.

546. Построить в первом октанте поверхность $(x + y)^2 + az = a^2$ по сечениям плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = h \leq a$, и показать, что эта поверхность цилиндрическая с образующими, параллельными прямой $x + y = a$, $z = 0$.

547. Шар $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ освещен лучами, параллельными прямой $x = 0$, $y = z$. Найти форму тени шара на плоскости xOy .

Указание. Нужно написать уравнение цилиндрической поверхности, образованной лучами, касательными к шару. За ее направляющую принять линию сечения шара плоскостью, проходящей через центр шара и перпендикулярной к лучам.

548. Написать уравнение плоскости, проходящей через центр C поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z = 0$ и перпендикулярной к прямой OC .

549. Написать уравнение геометрического места точек, удаленных вдвое дальше от начала координат, чем от точки $(0; -3; 0)$.

550. Найти проекцию на плоскость $z=0$ сечения шаровой поверхности $x^2+y^2+z^2=4(x-2y-2z)$ плоскостью, проходящей через центр шара и перпендикулярной к прямой $x=0, y+z=0$.

551. В левой системе координат построить поверхности:

$$1) z = 4 - x^2; \quad 2) y^2 + z^2 = 4z; \quad 3) y^2 = x^3.$$

552. Построить в первом октанте левой системы координат кривую пересечения цилиндров $x^2+z^2=a^2$ и $x^2+y^2=a^2$.

Указание. Построив в плоскостях xOz и xOy четверти направляющих окружностей, разделить их приближенно на равные части (например, на 4) и через точки деления провести образующие цилиндров до их пересечения (см. черт. 64, стр. 340).

553. Написать уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной вектору $P\{1; 1; 1\}$, и с направляющей $x^2+y^2=4x, z=0$.

554. Построить тело, ограниченное поверхностями $y^2=x, z=0, z=4, x=4$, и написать уравнения диагоналей грани, лежащей в плоскости $x=4$.

§ 6. Конические поверхности и поверхности вращения

1°. Конические поверхности. Пусть коническая поверхность имеет вершину в начале координат, а направляющую $F(x, y)=0$ на плоскости $z=h$. Уравнение образующей будет: $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{h}$, где $(x_0; y_0; h)$ — точка направляющей. Определив отсюда x_0 и y_0 и подставив их в уравнение $F(x, y)=0$, получим уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат:

$$F\left(\frac{xh}{z}, \frac{yh}{z}\right)=0. \quad (1)$$

Если вершина конуса будет в точке $(a; b; c)$, то уравнение примет вид:

$$F\left[\frac{(x-a)(h-c)}{z-c} + a, \frac{(y-b)(h-c)}{z-c} + b\right]=0. \quad (2)$$

Уравнение (1) однородно относительно x, y, z , а уравнение (2) однородно относительно $(x-a), (y-b)$ и $(z-c)$. По однородности уравнения можно узнать уравнение конической поверхности.

2°. Поверхности вращения:

Уравнения кривой	Ось вращения	Уравнение поверхности вращения
$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	Ox Oy	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$
$\begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	Ox Oz	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$\begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$	Oy Oz	$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

555. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и направляющей $x^2 + y^2 = a^2$, $z = c$. Построить изображение поверхности.

556. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в точке $A(0; -a; 0)$ и направляющей $x^2 = 2py$, $z = h$. Построить изображение поверхности.

557. Определить вершину конуса $x^2 + (y - a)^2 - z^2 = 0$, его направляющую в плоскости $z = a$ и построить конус.

558. Определить вершину конуса $x^2 = 2yz$, его направляющую в плоскости $z = h$ и построить конус.

559. Исследовать поверхность *коноида**) или *клина* $(a^2 - x^2)y^2 = h^2z^2$ по сечениям плоскостями $z = 0$, $y = h$, $x = \pm c$ ($c \leq a$) и построить коноид в области $z \geq 0$.

560. Написать уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z = x^2$, $y = 0$: а) вокруг оси Oz ; б) вокруг оси Ox . Построить обе поверхности.

561. Написать уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz : 1) кривой $z = e^{-x^2}$, $y = 0$; 2) кривой $z = \frac{4}{x^2}$, $y = 0$. Построить обе поверхности (в левой системе координат).

*) Коноидом называется поверхность, образованная движением прямой, параллельной данной плоскости и пересекающей данную кривую и данную прямую.

562. Написать уравнение конической поверхности с вершиной $O(0; 0; 0)$, направляющей $\begin{cases} x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases}$ и нарисовать поверхность.

563. Написать уравнение конической поверхности с вершиной $C(0; -a; 0)$, направляющей $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y + z = a \end{cases}$ и нарисовать поверхность.

564. Написать уравнение поверхности, образованной вращением прямой $z = y, x = 0$: а) вокруг оси Oy ; б) вокруг Oz , и нарисовать обе поверхности.

565. Показать, что сечение конуса $z^2 = xy$ плоскостью $x + y = 2a$ есть эллипс, и найти его полуоси.

§ 7. Эллипсоид, гиперболоиды и параболоиды

1°. Канонические уравнения. Кроме цилиндрических, существуют шесть основных видов поверхностей 2-го порядка, определяемых следующими каноническими (простейшими) уравнениями:

$$\text{I. Эллипсоид } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$\text{II. Гиперболоиды: } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 & \text{однополостный,} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 & \text{двуполостный.} \end{cases}$$

$$\text{III. Конус 2-го порядка } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

$$\text{IV. Параболоиды (при } pq > 0\text{:)} \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z & \text{эллиптический,} \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z & \text{гиперболический.} \end{cases}$$

2°. Прямолинейные образующие. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две его прямолинейные образующие:

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta \left(1 + \frac{y}{b} \right) \\ \beta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha \left(1 - \frac{y}{b} \right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \delta \left(1 - \frac{y}{b} \right) \\ \delta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \gamma \left(1 + \frac{y}{b} \right). \end{cases}$$

Через каждую точку гиперболического параболоида тоже проходят две его прямолинейные образующие (при $p > 0$ и $q > 0$)

$$\alpha \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\beta \quad \gamma \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \delta z$$

и

$$\beta \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \alpha z \quad \delta \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\gamma.$$

3°. Круговые сечения. На всех поверхностях, имеющих эллиптические сечения, имеются также и круговые сечения. Наибольшие круговые сечения элипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (при $a > b > c$) находятся на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. Круговые сечения эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, проходящие через вершину, находятся на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2pz$ (при $p > q$).

566. Написать уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oz .

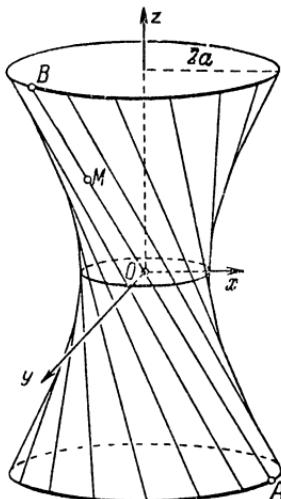
567. Построить поверхность $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ и найти площади ее сечений плоскостями: а) $z = 3$; б) $y = 1$.

568. Написать уравнение поверхности, образованной вращением кривой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$: а) вокруг оси Oz ; б) вокруг оси Ox . Построить обе поверхности (в левой системе координат).

569. Построить поверхности:
1) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; 2) $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.

570. Построить гиперболоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ и найти его образующие, проходящие через точку $(4; 1; -3)$.

571. Нитяная модель цилиндра «закрученна» поворотом верхнего круга на α° (черт. 22). Определить уравнение полученной «линейчатой» поверхности, если окружности ее оснований лежат в плоскостях $z = \pm c$, их центры — на



Черт. 22.

оси Oz , а их радиусы равны $2a$. Рассмотреть частные случаи при $\alpha = 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$.

Указание. Точка $M(x; y; z)$ делит расстояние между точками $A(2a \cos t; 2a \sin t; -c)$ и $B[2a \cos(t + \alpha); 2a \sin(t + \alpha); c]$ в отношении $AM : MB = (c + z) : (c - z)$.

572. Написать уравнение поверхности, образованной вращением параболы $az = x^2$, $y = 0$ вокруг оси Oz . Построить поверхность по сечениям плоскостями: $z = a$, $x = 0$, $y = 0$.

573. Построить поверхности:

$$1) \quad 2z = x^2 + \frac{y^2}{2}; \quad 2) \quad z = c \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

574. Построить (в левой системе координат) поверхность $x^2 - y^2 = 4z$ и найти ее образующие, проходящие через точку $(3; 1; 2)$.

575. Написать уравнение геометрического места точек, отношение расстояний каждой из которых от плоскости $x = 2a$ к расстояниям от точки $F(a; 0; 0)$ равно $\sqrt{2}$. Построить поверхность.

576. Написать уравнение геометрического места точек, отношение расстояний каждой из которых от точки $F(0; 0; 2a)$ и от плоскости $z = a$ равно $\sqrt{2}$. Построить поверхность.

577. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(-a; 0; 0)$ и от плоскости $x = a$. Построить поверхность.

578. Найти наибольшие круговые сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

579. Определить круговые сечения эллиптического параболоида $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = z$, проходящие через начало координат.

580. Назвать и построить каждую из поверхностей:

$$1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2az; \quad 6) \quad x^2 = 2az;$$

$$2) \quad x^2 + y^2 = 2az; \quad 7) \quad x^2 = 2yz;$$

$$3) \quad x^2 + z^2 = 2az; \quad 8) \quad z = 2 + x^2 + y^2;$$

$$4) \quad x^2 - y^2 = 2az; \quad 9) \quad (z - a)^2 = xy;$$

$$5) \quad x^2 - y^2 = z^2; \quad 10) \quad (z - 2x)^2 + 4(z - 2x) = y^2.$$

581. Написать уравнения прямолинейных образующих гиперболоида $x^2 - y^2 + z^2 = 4$, проходящих через точку $(2; 4; 4)$.

582. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0; 0; \frac{a}{2})$ и от плоскости $z = -\frac{a}{2}$. Построить поверхность.

583. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0; 0; \frac{a}{2})$ и от плоскости $z = \frac{3a}{2}$. Построить поверхность.

584. Найти наименьшие круговые сечения гиперболоида

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{3z^2}{25} = 1.$$

585. Написать уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$, проходящих через точку $(4; 3; 0)$.

ГЛАВА IV

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Определители

1°. *Определители.* *Определителем 2-го порядка* называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (1)$$

Определителем 3-го порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Определители 2-го порядка, входящие в правую часть равенства (2), получаются из данного определителя 3-го порядка вычеркиванием одной строки и одного столбца и называются его *минорами*. Формула (2) называется формулой разложения определителя 3-го порядка по элементам первой строки.

2°. *Свойства определителей.*

I. Величина определителя не изменится от замены строк столбцами.

II. Величина определителя от перестановки двух любых параллельных его рядов меняет знак на обратный.

Из свойств I и II следует, что определитель можно разложить по элементам любого ряда, так как этот ряд можно сделать первой строкой.

III. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

IV. Общий множитель элементов одного ряда можно вывести за знак определителя.

V. Величина определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженные на произвольное одинаковое число. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mc_1 & b_1 + nc_1 & c_1 \\ a_2 + mc_2 & b_2 + nc_2 & c_2 \\ a_3 + mc_3 & b_3 + nc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

С помощью этого свойства можно в любом ряду определителя 3-го порядка сделать два нуля, чем упростится разложение определителя по элементам этого ряда.

3°. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Вычислить определители:

$$586. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}. \quad 587. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}. \quad 588. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$589. \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}. \quad 590. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

$$591. \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители, разложив их по элементам первого столбца:

$$592. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}. \quad 593. \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители, разложив их по элементам того ряда, который содержит наибольшее число нулей:

$$594. \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}. \quad 595. \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}.$$

Упростить и вычислить определители:

$$596. \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}. \quad 597. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}.$$

$$598. \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}. \quad 599. \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$$

$$600. \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad 601. \begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

602. Найти площадь треугольника с вершинами
 $A(2; 3)$, $B(4; -1)$ и $C(6; 5)$.

603. Лежат ли на одной прямой точки:
 $A(1; 3)$, $B(2; 4)$ и $C(3; 5)$?

604. Написать с помощью определителя 3-го порядка
уравнение прямой, проходящей через точки:

- 1) $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$; 2) $(2; 3)$ и $(-1; 5)$.
-

Упростить и вычислить определители:

$$605. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}. \quad 606. \begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}.$$

$$607. \begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}. \quad 608. \begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

Указание. В примере 607 вынести a за знак определителя, затем из первой и второй строк вычесть третью и вынести $(x-z)$ и $(y-z)$ за знак определителя.

609. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

610. Найти x из уравнений:

$$1) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

и проверить подстановкой корней в определитель.

§ 2. Системы линейных уравнений

1°. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

имеет решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (2)$$

при условии, что определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

2°. Система двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

имеет решения, определяемые формулами:

$$x = k \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = -k \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad z = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где k — произвольное число.

3°. Система трех однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

имеет отличные от 0 решения, если определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ и обратно.}$$

4°. Система трех линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{array} \right\} \quad (6)$$

совместна, когда $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ и система не содержит попарно противоречивых уравнений.

5°. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array} \right\} \quad (7)$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет следующее единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \quad (8)$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6°. Несовместные и неопределенные системы. Обозначим левые части уравнений (7) через X_1 , X_2 и X_3 . Пусть определитель системы (7) $\Delta = 0$. При этом возможны два предположения.

I. Элементы двух строк определителя Δ пропорциональны, например $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = t$. Тогда $X_2 = tX_1$ и

1) если $d_2 \neq md_1$, то система несовместна (первые два уравнения противоречивы);

2) если $d_2 = md_1$, то система неопределенна (если первое и третье уравнения не противоречивы).

II. В определителе Δ нет строк с пропорциональными элементами. Тогда существуют отличные от 0 числа t и n такие, при которых $tX_1 + nX_2 = X_3$, и

- 1) если $md_1 + nd_2 \neq d_3$, то система несовместна;
- 2) если $md_1 + nd_2 = d_3$, то система неопределенна,

Числа m и n можно подобрать по соображению или же найти их из уравнений $a_1m + a_2n = a_3$, $b_1m + b_2n = b_3$, $c_1m + c_2n = c_3$.

Решить с помощью определителей системы уравнений:

$$\begin{array}{l} \text{611. } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 40. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{612. } \begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{613. } \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 4y = 8. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{614. } \begin{cases} mx - ny = (m - n)^2 \\ 2x - y = n \text{ (при } m \neq 2n). \end{cases} \end{array}$$

Решить системы уравнений:

$$\begin{array}{l} \text{615. } \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{616. } \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{617. } \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{618. } \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{619. } \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{620. } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + y - z = 1. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{621. } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{622. } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases} \end{array}$$

623. Пересекаются ли в одной точке прямые

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x + y = 9 \\ x + 4y = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \\ x - 5y = 5. \end{cases}$$

Выполнить в обоих случаях построение.

Решить системы линейных уравнений:

$$\begin{array}{l} \text{624. } \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{625. } \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{626. } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0. \end{array} \right. \quad \text{627. } \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{array} \right. \\ \text{628. } \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0. \end{array} \right. \quad \text{629. } \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11. \end{array} \right. \end{array}$$

§ 3. Комплексные числа

1°. Определения. Комплексным числом называется выражение вида $x + yi$, в котором x и y — вещественные числа, а i — некоторый символ, если при этом приняты условия:

- 1) $x + 0i = x$, $0 + yi = yi$ и $1i = i - 1i = -i$;
- 2) $x + yi = x_1 + y_1i$ тогда и только тогда, когда $x = x_1$ и $y = y_1$.
- 3) $(x + yi) + (x_1 + y_1i) = (x + x_1) + (y + y_1)i$,
- 4) $(x + yi)(x_1 + y_1i) = (xx_1 - yy_1) + (xy_1 + x_1y)i$.

Из условий 1) и 4) получаются степени числа i :

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i \text{ и т. д.} \quad (1)$$

Комплексное число $x + yi$, в котором $y \neq 0$, называется **мнимым числом**. Число i называется **мнимой единицей**.

2°. Действия над комплексными числами. Сложение, вычитание, умножение и возведение в степень комплексных чисел можно выполнять по правилам этих действий над многочленами с заменой степеней числа i по формулам (1).

Деление комплексных чисел и извлечение корня из комплексного числа определяются как действия обратные.

3°. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное число $x + yi$ определяется парой вещественных чисел (x, y) и поэтому изображается точкой $M(x, y)$ плоскости или ее радиусом-вектором $r = \overline{OM}$ (черт. 12). Длина этого вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** комплексного числа, а угол его φ с осью Ox называется **аргументом** комплексного числа. Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то

$$x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2)$$

4°. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) &= \\ &= (rr_1) [\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)} = \frac{r}{r_1} [\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1)], \quad (4)$$

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (5)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (6)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Формулы (5) и (6) называются формулами Моавра.

5°. Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. (7)

6°. Логарифм комплексного числа:

$$\ln z = \ln r + i\varphi_0 + i2k\pi, \quad (8)$$

где φ_0 — значение аргумента φ , удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \varphi \leq \pi$. Выражение $\ln r + i\varphi_0$ называется *главным значением логарифма*.

630. Выполнить действия: 1) $(2+3i)(3-2i)$; 2) $(a+bi) \times (a-bi)$; 3) $(3-2i)^2$; 4) $(1+i)^3$; 5) $\frac{1+i}{1-i}$; 6) $\frac{2i}{1+i}$.

631. Решить уравнения: 1) $x^2 + 25 = 0$; 2) $x^2 - 2x + 5 = 0$; 3) $x^2 + 4x + 13 = 0$ и проверить подстановкой корней в уравнение.

Следующие комплексные числа изобразить векторами, определить их модули и аргументы и записать в тригонометрической форме:

632. 1) $z = 3$; 2) $z = -2$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$.

633. 1) $z = 2 - 2i$; 2) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 3) $z = -\sqrt{3} - i$.

634. 1) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; 2) $\sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)$.

635. Числа, данные в задачах 632—634, записать в форме $re^{\varphi i}$ (при $-\pi < \varphi \leq \pi$).

636. Построить области точек z по условиям:

1) $|z| < 3$; 2) $|z| < 2$ и $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$;

3) $2 < |z| < 4$ и $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$.

637. Показать, что $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2 .

638. Данна точка $z_0 = -2 + 3i$. Построить область точек z , для которых $|z - z_0| < 1$.

639. Число, сопряженное с z , обозначается через \bar{z} . Доказать, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

640. Вычислить по формуле Моавра:

$$1) (1+i)^{10}; \quad 2) (1-i\sqrt{3})^6; \quad 3) (-1+i)^5;$$

$$4) \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4; \quad 5) (\sqrt{3}+i)^3.$$

641. Выразить $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$ через функции угла α , используя тождество $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$.

642. Найти все значения $z = \sqrt[6]{1}$ и изобразить их радиусами-векторами, построив круг радиуса, равного 1.

$$\text{643. Найти: } 1) \sqrt[3]{-1}; \quad 2) \sqrt[3]{i}; \quad 3) \sqrt[6]{-1}; \quad 4) \sqrt[3]{-2+2i}.$$

$$\text{644. Найти: } 1) \sqrt{i}; \quad 2) \sqrt[4]{-1+i}; \quad 3) \sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}.$$

645. Решить двучленные уравнения: 1) $x^3+8=0$;
2) $x^4+4=0$.

646. Найти главное значение логарифма: 1) $\ln(-2)$;
2) $\ln(1+i)$; 3) $\ln i$; 4) $\ln(x+yi)$; 5) $\ln(2-2i)$.

647. Найти сумму $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$.

Указание. По формуле Эйлера заменить $\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$ и т. д.

648. Найти сумму $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$.

649. Доказать тождество

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x \cos 72^\circ + 1)(x^2 - 2x \cos 144^\circ + 1).$$

650. Вычислить:

$$1) \frac{4-3i}{4+3i}; \quad 2) (a+bi)^3 - (a-bi)^3.$$

Следующие комплексные числа изобразить векторами, определить их модули и аргументы и записать в тригонометрической форме и в форме $re^{\varphi i}$ (при $-\pi < \varphi \leq \pi$):

$$\text{651. } 1) z = 4+4i; \quad 2) z = -1+i\sqrt{3}; \quad 3) z = 1-i.$$

$$\text{652. } 1) z = 5; \quad 2) z = -i; \quad 3) z = -\sqrt{2} - \sqrt{-2}.$$

653. Построить область точек z по условиям

$$1 < |z| < 3 \text{ и } \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}.$$

654. Данна точка $z_0 = 3 - 4i$. Построить область точек z , для которых $|z - z_0| < 5$.

655. Вычислить по формуле Моавра:

$$1) (1-i)^6; \quad 2) (2+i\sqrt{12})^5; \quad 3) \left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6.$$

656. Выразить $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через функции угла α , используя тождество $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 = \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha$.

657. Найти все значения корней 1) $\sqrt[4]{-1}$ и 2) $\sqrt[5]{1}$ и изобразить их радиусами-векторами.

658. Решить уравнения: 1) $x^3 - 8 = 0$; 2) $x^6 + 64 = 0$; 3) $x^4 - 81 = 0$.

659. Найти сумму

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x$$

(см. задачу 647).

§ 4. Уравнения высших степеней и приближенное решение уравнений

1°. Кубическое уравнение:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения (1), то уравнение можно записать в виде $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. Отсюда $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $c = -x_1x_2x_3$.

Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ приводится к виду $z^3 + pz + q = 0$ подстановкой $x = z - \frac{a}{3}$. Уравнение $z^3 + pz + q = 0$ решается по формуле Кардано:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u + v.$$

I. Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, то $z_1 = u + v$, $z_{2,3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm \frac{u_1 - v_1}{2}i\sqrt{-3}$, где u_1 и v_1 — вещественные значения корней u и v .

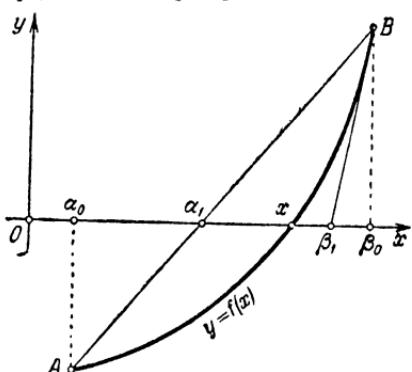
II. Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, то $z_1 = \frac{3q}{p}$, $z_2 = z_3 = -\frac{3q}{2p} = -\frac{z_1}{2}$.

III. Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то $z_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}$,

$z_{2,3} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} \pm 120^\circ\right)$, где $\cos \varphi = -\frac{q}{2} : \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$.

2°. Отделение вещественного корня уравнения $f(x) = 0$. Между a и b содержится единственный корень уравнения $f(x) = 0$, если $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, а $f(x)$ — непрерывна на отрезке $[a, b]$ и внутри него имеет производную $f'(x) \neq 0$. Будем считать еще, что на этом отрезке $f''(x) \neq 0$.

3°. Способ хорд приближенного решения уравнения $f(x) = 0$. Пусть α_0 — тот из концов отрезка $[a, b]$, отделяющего корень, на котором $f(\alpha_0) \cdot f''(\alpha_0) < 0$. Тогда приближением к корню x будет точка α_1 пересечения с Ox хорды AB (черт. 23):



Черт. 23.

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{k},$$

$$\text{где } k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4°. Способ касательных (способ Ньютона). Пусть β_0 — тот из концов отрезка $[a, b]$, на котором $f(\beta_0) \times f''(\beta_0) > 0$. Тогда приближением к корню x будет точка β_1 пересечения с Ox касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $[\beta_0, f(\beta_0)]$ (черт. 23):

$$\beta_1 = \beta_0 - \frac{f(\beta_0)}{k_1},$$

$$\text{где } k_1 = f'(\beta_0).$$

Применяя повторно способ хорд и касательных, можно составить таблицу

α	β	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	k	k_1	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$
...

где k и k_1 — наклоны хорд и касательных, а

$$\Delta\alpha = -\frac{f(\alpha)}{k} \quad \text{и} \quad \Delta\beta = -\frac{f(\beta)}{k_1}.$$

Последовательности получаемых в таблице (2) значений α и β сходятся к искомому корню.

5°. Способ итераций. Если уравнение $f(x) = 0$ можно привести к виду $x = \varphi(x)$, причем в некоторой окрестности корня $|\varphi'(x)| < 0 \leqslant 1$ и x_0 — любое число в этой окрестности, то сходящаяся последовательность приближенных решений будет:

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2), \dots$$

В уравнениях №№ 660, 661 среди целых множителей свободного члена подобрать один корень, разделить левую часть на $x - x_1$ и затем найти остальные корни.

660. 1) $x^8 - 4x^2 + x + 6 = 0$; 2) $x^8 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$. Решение проверить составлением выражений:

$$x_1 + x_2 + x_3, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \quad x_1x_2x_3.$$

- 661.** 1) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$; 2) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$;
 3) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$; 4) $4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$.

Решить по формуле Кардано следующие уравнения:

- 662.** 1) $z^3 - 6z - 9 = 0$; 2) $z^3 - 12z - 16 = 0$.

- 663.** 1) $z^3 - 12z - 8 = 0$; 2) $z^3 + 6z - 7 = 0$.

- 664.** $x^3 + 9x^2 + 18x + 9 = 0$.

665. Дано уравнение $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$. Составив таблицу знаков $f(x)$ при $x = 0, 1, 2, \dots$, определить границы положительного корня и вычислить его с точностью до 0,01 по способу хорд и касательных.

666. Построить график функций $y = \frac{x^3}{3}$, определить графически границы корней уравнения $x^3 - 6x + 3 = 0$ и вычислить корни с точностью до единицы третьего знака.

667. По способу итераций (последовательных приближений) найти вещественные корни уравнений: 1) $x^3 + 60x - 80 = 0$;
 2) $2^x = 4x$; 3) $x^3 + l^3x + l^3 = 0$; 4) $x^4 - 2x - 2 = 0$.

668. Подбором одного корня среди целых множителей свободного члена решить уравнения:

- 1) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$.

Для проверки составить выражения $\sum x_i$, $\sum x_i x_j$ и $x_1 x_2 x_3$.

669. По формуле Кардано решить уравнения:

- 1) $z^3 + 18z - 19 = 0$; 2) $z^3 - 6z - 4 = 0$;

- 3) $z^3 - 3z + 2 = 0$; 4) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$.

670. Построив график функции $y = \frac{x^4}{5}$, определить границы корней уравнения $x^4 + 3x - 15 = 0$ и вычислить корни с точностью до 0,01.

671. Найти с точностью до 0,01 положительные корни уравнений: 1) $x^3 + 50x - 60 = 0$, 2) $x^3 + x - 32 = 0$.

672. По способу итераций найти вещественный корень уравнения $x^3 + 2x - 8 = 0$, вычисляя последовательные приближения по формуле $x = \sqrt[3]{8 - 2x}$ (с помощью логарифмической линейки).

ГЛАВА V

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Переменные величины и функции

1º. И н т е р в а л ы . Множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *промежутком* и обозначается (a, b) . Множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* и обозначается $[a, b]$.

Промежуток и *отрезок* носят общее название *интервал*.

Эквивалентные неравенства (при $a > 0$):

$$x^2 < a^2 \text{ или } |x| < a, \text{ или } -a < x < a$$

определяют промежуток, симметричный относительно нуля.

2º. П е р е м ен ы в е л и ч и н ы и ф у н к ц и и . Если каждому значению переменной x поставлено в соответствие одно число, то переменная y , определяемая совокупностью этих чисел, называется однозначной *функцией* x . Переменная x называется при этом *аргументом*, а данная совокупность значений аргумента — *областью определения* функции.

То, что y есть функция x , символически записывают в виде $y = f(x)$ или $y = F(x)$, или $y = \varphi(x)$ и т. п. Символ $f(x)$ или $F(x)$ и т. п. обозначает закон соответствия переменных x и y , в частности, он может означать *совокупность действий* или операций, которые нужно выполнить над x , чтобы получить соответствующее значение y .

673. Построить интервалы изменения переменного x , удовлетворяющего неравенствам:

- 1) $|x| < 4$;
- 2) $x^2 \leq 9$;
- 3) $|x - 4| < 1$;
- 4) $-1 < x - 3 \leq 2$;
- 5) $x^2 > 9$;
- 6) $(x - 2)^2 \leq 4$.

674. Записать неравенствами и построить интервалы изменения переменных: $[-1, 3]$; $(0, 4)$; $[-2, 1]$.

675. Определить интервал изменения переменного $x = 1 - \frac{1}{t}$, где t принимает любое значение ≥ 1 .

В задачах 676—678 построить по точкам на отрезке $|x| \leq 3$ графики указанных функций.

- 676.** 1) $y = 2x$;

677. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = x^2 - 1$.

678. 1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = \frac{x^3}{3} + 1$; 3) $y = \frac{x^3}{3} - 1$.

679. Построить графики функций: 1) $y = \frac{6}{x}$; 2) $y = 2^x$;

3) $y = \lg_2 x$. Какую особенность в расположении этих кривых относительно осей координат можно заметить?

680. Построить на одном чертеже графики функций: 1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$ по точкам, в которых y имеет наибольшее, наименьшее и нулевое значения. Сложением ординат этих кривых построить на том же чертеже график функции $y = \sin x + \cos x$.

681. Найти корни x_1 и x_2 функции $y = 4x - x^2$ и построить ее график на отрезке $[x_1 - 1, x_2 + 1]$.

682. Построить графики функций:

1) $y = |x|$; 2) $y = -|x - 2|$; 3) $y = |x| - x$.

В задачах 683—686 найти области определения вещественных значений функций и построить их графики.

683. 1) $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{9-x^2}$; 3) $y = \sqrt{4x-x^2}$.

684. 1) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$; 2) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$.

685. 1) $y = \frac{x(2 \pm \sqrt{x})}{4}$; 2) $y = \pm x \sqrt{4-x}$.

686. 1) $y = -\sqrt{2 \sin x}$; 2) $y = -\frac{x \sqrt{16-x^2}}{2}$.

687. 1) $f(x) = x^3 - x + 1$; вычислить $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$; 2) $\varphi(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$; вычислить $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$.

688. $F(x) = x^2$; вычислить:

1) $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$; 2) $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$.

689. $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$; вычислить $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.

690. $F(x, y) = x^3 - 3xy - y^2$; вычислить $F(4, 3)$ и $F(3, 4)$.

691. Функция $f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. Указать, какие из

следующих функций четные и какие нечетные: 1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

- 2) $\varphi(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$;
- 3) $F(x) = a^x + \frac{1}{a^x}$;
- 4) $\Phi(x) = a^x - \frac{1}{a^x}$;
- 5) $\Psi(x) = x \sin^2 x - x^3$;
- 6) $f_1(x) = x + x^2$.

692. Середина любой хорды графика некоторой функции $f(x)$ лежит выше графика этой функции. Записать это свойство функции неравенством. Проверить, что этим свойством обладает функция $f(x) = x^2$.

693. Какая из элементарных функций обладает свойствами:

$$f(1) = 0; \quad f(a) = 1; \quad f(xy) = f(x) + f(y)?$$

694. Какая из элементарных функций обладает свойствами:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = a, \quad f(x+y) = f(x)f(y)?$$

695. Построить интервалы изменения переменного x , удовлетворяющего неравенствам:

$$1) |x| < 3; \quad 2) x^3 \leqslant 4; \quad 3) |x - 2| < 2; \quad 4) (x - 1)^3 \leqslant 4.$$

696. Определить интервал изменения переменного $x = 2 + \frac{1}{t}$, где t принимает любое значение $\geqslant 1$.

697. Построить графики функций:

$$1) y = 4 - \frac{x^3}{2} \text{ на отрезке } |x| \leqslant 2;$$

2) $y = 3,5 + 3x - \frac{x^3}{2}$ между точками пересечения с осью абсцисс.

698. Построить графики функций:

$$1) y = x - 4 + |x - 2| \text{ на отрезке } [-2, 5];$$

$$2) y = 1 - \cos x \text{ на отрезке } |x| \leqslant 2\pi.$$

699. Построить графики функций:

$$1) y = -\frac{4}{x}; \quad 2) y = 2^{-x}.$$

700. Найти области определения вещественных значений функций:

$$1) y = \sqrt{4 - x^2}; \quad 2) y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x};$$

$$3) y = 1 - \sqrt{2 \cos 2x}; \quad 4) y = \frac{4}{1 + \sqrt{x^2 - 4}}$$

и построить их графики.

- 701.** 1) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$; вычислить $f(0)$, $f(-2)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(x-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$;
 2) $\varphi(x) = x^3$; вычислить $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{h}$;
 3) $f(x) = 4x - x^2$; вычислить $f(a+1) - f(a-1)$.

§ 2. Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие. Предел переменной.
Предел функции

1°. **Числовая последовательность.** Пусть переменная x принимает последовательно значения:

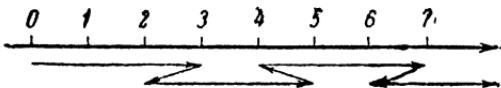
$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

Такое перенумерованное множество чисел называется *последовательностью*. Закон последовательности (1) дается формулой n -го члена.

Например: пусть $x_n = n + (-1)^n$; полагая $n = 1, 2, 3, \dots$, получим последовательность

$$0, 3, 2, 5, 4, 7, \dots \quad (2)$$

Если предположить, что переменная x принимает не только значения последовательности (2), но и все промежуточные от 0 до 3 (возрастая), затем от 3 до 2 (убывая) и т. д., то изменение x можно будет изобразить движением точки $M(x)$ по оси Ox . На черт. 24



Черт. 24.

изображено изменение x , заданное последовательностью (2).

В дальнейшем будем считать, что переменная задана последовательностью $x = f(n)$ или вообще функцией $x = f(t)$, заданной в интervale $a \leq t < b$ с условием, что $x = f(t)$ следует за $x_0 = f(t_0)$, если $t > t_0$ (в частности t может означать время).

2°. **Бесконечно малая.** Переменная a называется *бесконечно малой*, если для всякого положительного числа ϵ существует такое значение a_0 , что каждое следующее за a_0 значение a будет по абсолютной величине меньше ϵ .

Если a — бесконечно малая, то говорят, что a стремится к 0, и пишут: $a \rightarrow 0$.

3°. Бесконечно большая. Переменная x называется бесконечно большой, если для всякого положительного числа c существует такое значение x_0 , что каждое следующее за ним значение x будет по абсолютной величине больше c . Пишут: $x \rightarrow \infty$.

Если при этом все значения переменной x , следующие за некоторым x_0 , сохраняют знак, то пишут: $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$).

Величина, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая, и наоборот.

4°. Предел переменной. Постоянная a называется пределом переменной x , если разность между ними есть величина бесконечно малая, т. е. если $x = a + a$, то $\lim x = a$, и обратно.

Если a предел переменной x , то говорят также, что x стремится к a , и пишут: $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow a - 0$ (если x остается слева от a) или $x \rightarrow a + 0$ (если x остается справа от a).



Черт. 25.

найдется такое значение x_0 , что все последующие значения x будут находиться в ϵ -окрестности числа a (черт. 25).

Если $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$), то говорят, что предел переменной x равен $+\infty$ (или $-\infty$), и пишут:

$$\lim x = +\infty \quad (\text{или } \lim x = -\infty).$$

5°. Предел функции. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a , если всегда из того, что x стремится к a , не принимая значения a , следует, что $f(x)$ стремится к b . Это записывают в виде $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Приведенное определение включает и особые случаи, когда числа a или b будут заменены символами $+\infty$ или $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ и т. д.}$$

Предел $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ (или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$) будем называть пределом функции $f(x)$, при x , стремящемся к a слева (или справа).

702. Полагая $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, написать последовательности значений переменных:

$$\alpha = \frac{1}{2^n}, \quad \alpha = -\frac{1}{2^n}, \quad \alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

и изобразить графически их изменение. Начиная с какого n модуль каждой из переменной сделается и будет оставаться меньше 0,001, меньше данного положительного ϵ ?

703. Написать последовательность значений переменной $x = 1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$ и изобразить ее изменение графически. Начиная с какого n модуль разности $x - 1$ сделается и будет оставаться меньше 0,01, меньше данного положительного ϵ ?

704. Прибавляя к 3 (или вычитая из 3) сначала 1, затем 0,1, потом 0,01 и т. д., записать «десятичными» последовательностями приближения переменной к пределу: $x \rightarrow 3+0$, $x \rightarrow 3-0$.

705. Записать «десятичными» последовательностями приближения переменных к пределам: $x \rightarrow 5+0$, $x \rightarrow 5-0$, $x \rightarrow -2+0$, $x \rightarrow -2-0$, $x \rightarrow 1+0$, $x \rightarrow 1-0$, $x \rightarrow 1,2+0$, $x \rightarrow 1,2-0$.

706. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. Пояснить таблицами значений x и x^2 .

Указание. Положив $x = 2 + \alpha$, где α — бесконечно малая, составить разность $x^2 - 4$ и показать, что она равна бесконечно малой.

707. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$. По данному числу $\epsilon > 0$ найти наибольшее число $\delta > 0$ такое, чтобы при любом x из δ -окрестности числа 3 значение функции $(2x - 1)$ оказалось в ϵ -окрестности числа 5. Пояснить графически.

708. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 2x - x^2) = 4$. Из какой наибольшей δ -окрестности числа -1 нужно взять значение x , чтобы значение функции $(3 - 2x - x^2)$ отличалось от ее предела меньше, чем на $\epsilon = 0,0001$?

709. Доказать, что $\sin \alpha$ есть бесконечно малая при α бесконечно малом.

Указание. Построить чертеж и показать, что $|\sin \alpha| < |\alpha|$.

710. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.

Указание. Положив $x = a + \alpha$, составить разность $\sin x - \sin a$.

711. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{x} = 3$. Пояснить таблицами значений x и $\frac{3x+4}{x}$ при $x = 1, 10, 100, 1000, \dots$

Указание. Показать, что при $x \rightarrow \infty$ разность $\frac{3x+4}{x} - 3 =$ бесконечно малой.

712. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{2x+1} = 2$. При каких x значения функции будут отличаться от своего предела меньше чем на 0,001?

713. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{2+4x^2} = -0,5$. При каких x значения функции будут отличаться от своего предела меньше чем на 0,01?

714. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0,333\dots3}_{n \text{ знаков}} = \frac{1}{3}$, составив разности $\frac{1}{3} - 0,3; \frac{1}{3} - 0,33; \frac{1}{3} - 0,333; \dots; \frac{1}{3} - \underbrace{0,333\dots3}_{n \text{ знаков}}$.

715. Написать последовательности значений переменных:

$$1) x = \frac{n}{n+1}; \quad 2) x = -\frac{n}{n+1}; \quad 3) x = \frac{(-1)^n n}{n+1};$$

$$4) x = \frac{8 \cos n \frac{\pi}{2}}{n+4}; \quad 5) x = \frac{2n + (-1)^n}{n}; \quad 6) x = 2^{-n} a \cos n\pi$$

и изобразить их изменение графически. Существует ли $\lim_{n \rightarrow +\infty} x$ в каждом примере и чему он равен?

716. Найти $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{x-2}$ и $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{x-2}$ и пояснить таблицами.

717. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}}$ и $\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}}$ и пояснить таблицами.

718. Выяснить точный смысл «условных» записей:

$$1) \frac{2}{\infty} = 0; \quad 2) \frac{2}{0} = \pm\infty; \quad 3) 3^\infty = \infty; \quad 4) 3^{-\infty} = 0;$$

$$5) \lg_{10} 0 = -\infty; \quad 6) \operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty.$$

719. Показать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ не существует, составив последовательности значений $\sin x$:

1) при $x = n\pi$; 2) при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; 3) при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$).

720. Показать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует.

721. Применяя одну из теорем о бесконечно малых, показать, что $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ при любом способе приближения x к 0.

722. В круг радиуса R вписан правильный многоугольник с числом сторон n и стороной a_n . Описав около круга квадрат, показать, что $a_n < \varepsilon$, как только $n > \frac{8R}{\varepsilon}$, т. е. $a_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$.

723. Пусть r_n — апофема правильного, вписанного в круг n -угольника. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = R$, где R — радиус круга.

724. Вершина B треугольника ABC перемещается по прямой $BE \parallel AC$, неограниченно удаляясь вправо. Как будут при этом изменяться стороны треугольника, его площадь, внутренние углы и внешний угол BCD ?

725. Написать «десятичные» последовательности приближений переменных к пределам: $x \rightarrow 4 + 0$; $x \rightarrow 4 - 0$; $x \rightarrow -1,5 + 0$; $x \rightarrow -1,5 - 0$.

726. Доказать, что: 1) $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x) = 3$ (см. указание к задаче 706).

727. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+2}{2x} = 2,5$, показав, что разность $\frac{5x+2}{2x} - 2,5$ есть бесконечно малая при x бесконечно большом. Пояснить таблицей, полагая $x = 1, 10, 100, 1000, \dots$

728. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ (см. задачу 709).

729. Написать последовательности значений переменных:

$$1) x = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n; \quad 2) x = (-1)^n + \frac{1}{2^n};$$

$$3) x = (-1)^n (2n+1); \quad 4) x = \frac{2n \sin \frac{n\pi}{2}}{n+1}$$

и изобразить их изменение графически. Какая из переменных имеет предел при $n \rightarrow +\infty$?

- 730.** Найти: 1) $\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} 3^{\operatorname{tg} 2x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} 3^{\operatorname{tg} 2x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{2}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{2}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$; 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1 + a^x}$.

731. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0,666\dots 6}_{n \text{ знаков}} = \frac{2}{3}$, составив разности $\frac{2}{3} - 0,6$; $\frac{2}{3} - 0,66$; ...; $\frac{2}{3} - \underbrace{0,66\dots 6}_{n \text{ знаков}}$.

732. Пусть α_n — внутренний угол правильного n -угольника. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pi$.

733. На продолжении отрезка $AB = a$ справа взята точка M на расстоянии $BM = x$. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{AM}{BM}$.

§ 3. Свойства пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

- 1°. Предел постоянной равен самой постоянной.
- 2°. $\lim (u+v) = \lim u + \lim v$, если $\lim u$ и $\lim v$ существуют.
- 3°. $\lim (uv) = \lim u \cdot \lim v$, если $\lim u$ и $\lim v$ существуют.
- 4°. $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$, если $\lim u$ и $\lim v$ существуют и $\lim v \neq 0$.
- 5°. Если для всех значений x в некоторой окрестности точки a , кроме, быть может, $x = a$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны и одна из них имеет предел при $x \rightarrow a$, то и вторая имеет тот же предел.

Это свойство применяется при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Например, $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$ при любых x , кроме $x = a$.

По свойству 5°: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$.

Найти пределы:

- 734.** 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x + 1}{2x + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$.

735. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4}{x - 2}$ (пояснить таблицей).

736. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$. **737.** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$.

Указание. Решить пример 736 двумя способами: 1) полагая $x = 2 + a$; 2) разлагая знаменатель на множители.

738. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$.

739. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$.

740. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$.

741. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$.

742. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

743. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

Указание. В примере 742 положить $x = t^6$, а в примере 743 $1+mx = t^3$.

744. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

745. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

746. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-1}{3x^2-4x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.

Указание. Можно решить двумя способами: 1) разделив числитель и знаменатель на x в высшей степени; 2) положив $x = \frac{1}{a}$.

747. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$.

748. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^3+1}$.

749. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

750. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1-2n}$.

751. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$.

752. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt[4]{9n^4+1}}$.

Найти пределы:

753. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8}$.

754. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^3}{\sqrt[3]{3x}-3}$.

755. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

756. $\lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

757. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 4x + 1}.$ **758.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{3n^2 + 1}}.$

759. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right).$ **760.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}.$

761. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$ **762.** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x},$

§ 4. Предел отношения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при $\alpha \rightarrow 0$

Если угол α выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

Найти пределы:

763. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}.$

764. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x}.$

Указание. В примере 763 умножить числитель и знаменатель на 4 (или положить $4x = a$).

765. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$ **766.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}.$ **767.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}.$

768. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}.$ **769.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}.$

770. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x};$ 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}.$

Указание. Положить в примере 1) $\operatorname{arctg} x = \alpha$, а в примере 2) $\arcsin(1-2x) = \alpha.$

771. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

772. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$

Найти пределы:

773. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}.$

774. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}.$

775. $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}.$

776. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec x - 1}.$

777. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}.$

778. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}.$

779. $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} + 2^{-\frac{1}{(x-2)^2}} \right]$ (положить $x = 2 + \alpha$).

780. 1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{h}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^3+2x}.$

781. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x - \cos x}}.$

§ 5. Неопределенные виды $\infty - \infty$ и $0 : \infty$

Найти пределы:

782. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x).$

783. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$

784. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}).$

785. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right).$ 786. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \right).$

787. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right].$

788. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ (положить $x = 1 - \alpha$).

789. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}).$

790. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right).$

Найти пределы:

791. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2-x+1}).$

792. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2-a^2}).$ 793. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right).$

794. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right).$

795. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x \left(\text{положить } x = \frac{\pi}{2} + \alpha \right).$

§ 6. Смешанные примеры на вычисление пределов

Найти пределы:

796. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x};$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$

797. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1};$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}.$

798. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2-ax}).$

799. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}} + 2^{-x^2} \right);$ 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{1-5x}.$

800. 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)};$ 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x}.$

801. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)};$ 2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x-\pi}.$

802. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt[x]{x}-1};$ 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}.$

803. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3x^4}{1-2x^4} - 2^{\frac{1}{x}} \right];$ 2) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3-10^n}{2+10^{n+1}}.$

804. 1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sqrt[3]{1+\cos 2x}}{\sqrt[\pi]{\pi} - \sqrt[2]{2x}};$ 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \cos \frac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}.$

§ 7. Сравнение бесконечно малых

1°. Определения. Пусть при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда:

I. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = 0$, то β называется *бесконечно малой высшего порядка* относительно α .

II. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha^n} = A$ (конечен и отличен от 0), то β называется бесконечно малой n -го порядка относительно α .

III. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, то β и α называются эквивалентными бесконечно малыми. Эквивалентность записывается так: $\beta \approx \alpha$.

2°. Свойства эквивалентных бесконечно малых:

а) Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка относительно каждой из них.

б) Если из суммы нескольких бесконечно малых разных порядков отбросить бесконечно малые высших порядков, то оставшаяся часть, называемая главной, эквивалентна всей сумме.

Из первого свойства следует, что эквивалентные бесконечно малые могут сделаться приближенно равными со сколь угодно малой относительной погрешностью. Поэтому знак \approx мы применяем как для обозначения эквивалентности бесконечно малых, так и для записи приближенного равенства их достаточно малых значений.

805. Определить порядки бесконечно малых: 1) $1 - \cos x$; 2) $\operatorname{tg} x - \sin x$ относительно бесконечно малой x .

Показать на чертеже, что при уменьшении угла x вдвое величина $1 - \cos x$ уменьшается приблизительно в четыре раза, а величина $\operatorname{tg} x - \sin x$ — приблизительно в восемь раз.

806. Определить порядки бесконечно малых:

$$1) 2 \sin^4 x - x^6; \quad 2) \sqrt[4]{\sin^2 x + x^4}; \quad 3) \sqrt[4]{1+x^3} - 1$$

относительно бесконечно малой x .

807. Определить порядок малости «стрелы» кругового сегмента относительно бесконечно малой дуги сегмента.

808. Доказать, что при $x \rightarrow 0$:

$$1) \sin mx \approx mx; \quad 2) \operatorname{tg} mx \approx mx; \quad 3) \sqrt[3]{1+x} - 1 \approx \frac{1}{3}x.$$

809. Коэффициент объемного расширения тела принимается приближенно равным утроенному коэффициенту линейного расширения. На эквивалентности каких бесконечно малых это основано?

810. По теореме $\lim_{\alpha \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow a_1} \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, если $\alpha \approx a_1$, $\beta \approx \beta_1$ и один из пределов существует, найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + x^2}{\operatorname{tg} bx}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}.$$

811. Капля воды испаряется так, что ее радиус стремится к 0. Определить порядки бесконечно малых поверхности и объема капли относительно ее радиуса.

812. Определить порядки бесконечно малых:

- 1) $\sqrt{1+x^3} - 1$; 2) $\sin 2x - 2 \sin x$; 3) $1 - 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ относительно бесконечно малой x .

813. Доказать, что при $x \rightarrow 0$:

- 2) $\sqrt{1+x} - 1 \approx \frac{1}{2}x$; 3) $1 - \cos^3 x \approx 1,5 \sin^2 x$.

§ 8. Непрерывность функции

1°. Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x = a$, если она определена в некоторой окрестности a и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Это определение содержит такие четыре условия непрерывности:

- 1) $f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности a ;
- 2) должны существовать конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$;
- 3) эти пределы (слева и справа) должны быть одинаковыми;
- 4) эти пределы должны быть равны $f(a)$.

Функция называется *непрерывной на отрезке* $[x_1, x_2]$, если она непрерывна в каждой точке внутри отрезка, а на его границах

$$\lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x) = f(x_1) \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_2-0} f(x) = f(x_2).$$

Элементарные функции: степенная x^n , показательная a^x , логарифмическая, тригонометрические и их обратные, а также их сумма, произведение, частное непрерывны при всяком x , при котором они имеют определенное значение.

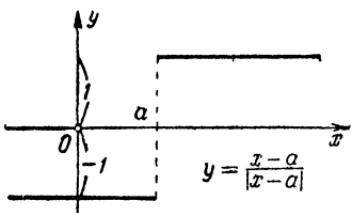
2°. Разрывы функции. Функция имеет *разрыв* при $x = a$, если она определена слева и справа от a , но в точке a не соблюдено хотя бы одно из условий непрерывности. Различают два основных вида разрыва.

1) *Разрыв I рода*, — когда существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, т. е. когда выполнено второе условие непрерывности и не выполнены остальные (или хотя бы одно из них).

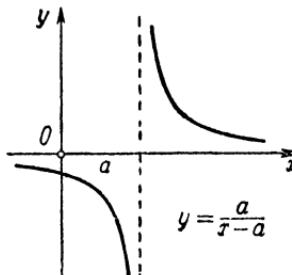
Например, функция $y = \frac{x-a}{|x-a|}$, равная -1 при $x < a$ и $+1$ при $x > a$, имеет при $x = a$ разрыв I. рода (черт. 26), ибо существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a-0} y = -1$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} y = +1$, но эти пределы не равны,

2) *Разрыв II рода* — когда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ слева или справа равен $\pm\infty$.

Например, функция $y = f(x) = \frac{a}{x-a}$ (черт. 27) имеет при $x = a$ разрыв II рода. Все дробные функции, знаменатель которых при $x = a$ равен 0, а числитель не равен 0, имеют при $x = a$ разрыв II рода. Функция $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ (задача 819, черт. 42 на стр. 290) также



Черт. 26.



Черт. 27.

имеет при $x = 0$ разрыв II рода, так как $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$, но $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$.

814. Указать точку разрыва функции $y = \frac{4}{x-2}$, найти $\lim_{x \rightarrow 2^-} y$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} y$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ и построить кривую по точкам $x = -2, 0, 1, 3, 4$ и 6 .

815. Найти точки разрыва и построить графики функций:

$$1) y = -\frac{6}{x}; \quad 2) y = \operatorname{tg} x; \quad 3) y = \frac{4}{4-x^2}.$$

816. Построить график функции

$$y = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{при } x \neq 2 \\ 0 & \text{при } x = 2 \end{cases}$$

и указать точку ее разрыва. Какие из четырех условий непрерывности в этой точке выполнены и какие не выполнены?

817. Построить графики функций: 1) $y = \frac{x+1}{|x+1|}$ и 2) $y = x + \frac{x+1}{|x+1|}$. Какие из условий непрерывности в точках разрыва этих функций выполнены и какие невыполнены?

818. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и указать точку ее разрыва. Какие из условий непрерывности в ней выполнены и какие нет?

819. Указать точку разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$, найти $\lim_{x \rightarrow -0} y$, $\lim_{x \rightarrow +0} y$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ и построить график функции. Какие условия непрерывности в точке разрыва не выполнены?

820. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} 0,5 x^2 & \text{при } |x| < 2 \\ 2,5 & \text{при } |x| = 2 \\ 3 & \text{при } |x| > 2 \end{cases}$$

и указать точки ее разрыва.

821. Найти точки разрыва и построить графики функций

$$1) y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}; \quad 2) y = \arctg \frac{a}{x-a}; \quad 3) y = \frac{x^3-x^2}{2|x-1|}.$$

822. Сколько однозначных функций задано уравнением $x^2 - y^2 = 0$? Определить из них: 1) четную функцию; 2) нечетную функцию так, чтобы они имели конечные разрывы (I рода) при $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, и построить их графики.

823. Указать точку разрыва функции $y = \frac{x}{x+2}$, найти $\lim_{x \rightarrow -2-0} y$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} y$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ и построить график по точкам $x = -6, -4, -3, -1, 0, 2$.

824. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x = 0 \text{ и } x = \pm 2 \\ 4 - x^2 & \text{при } 0 < |x| < 2 \\ 4 & \text{при } |x| > 2 \end{cases}$$

и указать точки разрыва. Какие условия непрерывности выполнены в точках разрыва и какие нет?

825. Найти точки разрыва и построить графики функций

$$1) \quad y = 2 - \frac{|x|}{x}; \quad 2) \quad y = 2^{\frac{1}{x-2}}; \quad 3) \quad y = 1 - 2^{\frac{1}{x}};$$

$$4) \quad y = \frac{x^3 + x}{2|x|}; \quad 5) \quad y = \frac{4 - x^2}{|4x - x^3|}.$$

826. Сколько однозначных функций задано уравнением $x^3 + y^3 = 4$? Определить из них 1) две непрерывные на отрезке $|x| \leq 2$, 2) ту из них, которая отрицательна на отрезке $|x| \leq 1$ и положительна для всех остальных допустимых значений x . Построить график и указать разрывы последней функции.

§ 9. Асимптоты

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при ее удалении по кривой в бесконечность.

I. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ есть асимптота кривой

$y = f(x)$. Например, кривая $y = \frac{a}{x-a}$ имеет асимптоту $x = a$ (черт. 27).

II. Если в правой части уравнения кривой $y = f(x)$ можно выделить линейную часть $y = f(x) = kx + b + \alpha(x)$ так, что оставшаяся часть $\alpha(x) \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow \pm\infty$, то прямая $y = kx + b$ есть асимптота кривой. Примеры: 1) кривая $y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = x + 1 + \frac{1}{x^2}$ имеет асимптоту $y = x + 1$ (и асимптоту $x = 0$); 2) кривая

$y = \frac{a}{x-a} = 0 + \frac{a}{x-a}$ имеет асимптоту $y = 0$ (черт. 27).

III. Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ или } -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ или } -\infty} [f(x) - kx] = b$, то прямая $y = kx + b$ есть асимптота.

827. Определить асимптоты кривой $y = 1 - \frac{4}{x^2}$ и построить кривую по точкам $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

В примерах 828—830 найти асимптоты кривых, выделив из дроби линейную целую часть; построить асимптоты и кривые.

$$828. \quad 1) \quad y = \frac{x^2 + 1}{x}; \quad 2) \quad y = \frac{x^2}{x+1}; \quad 3) \quad y = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

829. 1) $y = \frac{2}{|x|} - 1$; 2) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x}$; 3) $y = \frac{ax + b}{mx + n}$.

830. 1) $y = \frac{1 - 4x}{1 + 2x}$; 2) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$; 3) $y = \frac{4x - x^3}{x^2 + 4}$.

Найти асимптоты кривых и построить кривые:

831. 1) $x^2 - y^2 = a^2$; 2) $x^3 + y^3 = 3axy$;

3) $y = x - 2 \operatorname{arc tg} x$; 4) $y = \operatorname{arc tg} \frac{x}{a-x}$.

832. 1) $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$; 3) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$;

833. Построить кривые: 1) $y = \frac{x^4 + 1}{3x}$; 2) $y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x + 1}$

и параболы, к которым эти кривые асимптотически приближаются.

834. Найти асимптоты кривых: 1) $y = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^3$;

2) $y = -x + \frac{1}{x^2}$ и построить кривые по точкам $x = \pm \frac{1}{2}$, ± 1 , ± 2 .

835. Найти асимптоты кривых и построить кривые:

1) $y = \frac{x - 4}{2x + 4}$; 2) $y = \frac{x^3}{2 - 2x}$; 3) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$; 4) $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$.

§ 10. Число e

Числом e называется предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Это число иррациональное и приближенно равно $e = 2,71828\dots$. Логарифмы с основанием e называются *натуральными* и обозначаются $\log_e x = \ln x$.

Десятичный логарифм: $\lg_{10} x = M \ln x$, где $M = 0,43429\dots$

Найти пределы:

836. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$ (положить $-\frac{5}{n} = \alpha$).

837. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$; 2) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}$.

838. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

839. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

840. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n [\ln(n+3) - \ln n]$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

841. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ (положить $\sin^2 x = a$).

842. 1) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x}-1}{x}$.

Указание. В примере 2) положить $e^{-x} - 1 = \alpha$.

843. Найти последовательные целые числа, между которыми содержится выражение $6(1 - 1,01^{-100})$.

Найти пределы:

844. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{8n}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

845. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-8x}-1}{x}$.

846. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$ (положить $\cos^2 2x = a$).

847. 1) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+xt)}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n [\ln n - \ln(n+2)]$.

ГЛАВА VI

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Производные алгебраических и тригонометрических функций

1°. Определения. Производной от функции $y = f(x)$ в точке x называется предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$

Если этот предел *конечный*, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x ; при этом она оказывается обязательно и *непрерывной* в этой точке.

Если же предел (1) равен $+\infty$ (или $-\infty$), то будем говорить, что функция $f(x)$ имеет в точке x *бесконечную производную*, однако при дополнительном условии, что функция в этой точке *непрерывна*.

Производная обозначается y' или $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$, или $\frac{df(x)}{dx}$.

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

2°. Основные формулы дифференцирования:

$$1) (c)' = 0; \quad 2) (x^n)' = nx^{n-1}; \quad 3) (cu)' = cu';$$

$$4) (u+v)' = u'+v'; \quad 5) (uv)' = u'v+uv';$$

$$6) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}; \quad 7) (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}};$$

$$8) (\sin x)' = \cos x; \quad 9) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$10) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 11) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

848. Вычислением $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ найти производные от функций:

$$1) y = x^8; \quad 2) y = x^4; \quad 3) y = \sqrt{x}; \quad 4) y = \sin x; \quad 5) y = \frac{1}{x};$$

$$6) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}; \quad 7) y = \frac{1}{x^2}; \quad 8) y = \operatorname{tg} x; \quad 9) y = \frac{1}{x^3};$$

$$10) y = \sqrt{1+2x}; \quad 11) y = \frac{1}{3x+2}; \quad 12) y = \sqrt{1+x^2}.$$

Найти по формулам производные от функций:

849. 1) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^3 + 4x - 5$; 2) $y = \frac{bx + c}{a}$.

850. 1) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$; 2) $y = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2$.

851. 1) $y = x + 2\sqrt{x}$; 2) $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$.

852. 1) $y = \frac{10}{x^3}$; 2) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

853. 1) $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^3}$; 2) $y = 3x - 6\sqrt{x}$.

854. 1) $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$; 2) $y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

855. 1) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$; 2) $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

856. 1) $y = x - \sin x$; 2) $y = x - \operatorname{tg} x$.

857. 1) $y = x^2 \cos x$; 2) $y = x^2 \operatorname{ctg} x$.

858. 1) $y = \frac{\cos x}{x^2}$; 2) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

859. 1) $y = \frac{x}{1 - 4x}$; 2) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

860. 1) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$; 2) $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.

861. 1) $s = \frac{gt^2}{2}$; 2) $x = a(t - \sin t)$.

862. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$; вычислить $f'(0), f'(1), f'(-1)$.

863. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$; вычислить $f'(2) - f'(-2)$.

864. $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x}$; вычислить $0,01 \cdot f'(0,01)$.

Найти производные от функций:

865. 1) $y = (a - bx^2)^3$; 2) $y = (1 + \sqrt[8]{x})^2$.

866. 1) $y = \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{4x^4}$; 2) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

867. 1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x + \operatorname{ctg} x$.

868. 1) $y = x^2 \sin x$; 2) $y = x^2 \operatorname{tg} x$.

869. 1) $y = \sqrt{x} \cos x$; 2) $s = \frac{t}{2} - \frac{2}{t}$.

870. 1) $y = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3}$; 2) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

871. 1) $y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$; 2) $y = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$.

872. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; найти $f'(-8)$.

873. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$; найти $f'(0)$, $f'(2)$ и $f'(-2)$.

§ 2. Производная функции от функции

Если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то y называется *функцией от функции* или *сложной функцией* от x . Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y' = f'(u) \cdot u'. \quad (1)$$

Формулы предыдущего параграфа примут теперь общий вид

1) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$; 2) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 3) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

4) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; 5) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; 6) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

Найти производные от функций:

874. 1) $y = \sin 6x$; 2) $y = \cos(a - bx)$.

875. 1) $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$; 2) $y = 6 \cos \frac{x}{3}$.

876. 1) $y = (1 - 5x)^4$; 2) $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$.

877. 1) $y = \frac{1}{(1-x^2)^5}$; 2) $y = \sqrt{1-x^2}$; 3) $y = \sqrt{\cos 4x}$.

878. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$. **879.** $y = \sin^4 x = (\sin x)^4$.

880. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos^2 x$; 3) $y = \sec^2 x$.

881. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$. **882.** $y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x$.

883. $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$. **884.** $y = \sin \sqrt{x}$.

885. $y = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}$.

886. $y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^6}$. **887.** $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}$.

888. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$

889. $y = x \sqrt{x^2 - 1}.$

890. $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}.$

891. $s = a \cos^3 \frac{t}{a}.$

892. 1) $r = a \sqrt{\cos 2\varphi}$; 2) $r = \sqrt{2\varphi + \cos^2(2\varphi + \frac{\pi}{4})}.$

893. $f(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos t}$; вычислить $f'(\frac{\pi}{2})$,

$f'(\pi)$, $f'(\frac{3\pi}{2})$. **894.** $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$; найти $f'(1)$.

Найти производные от функций:

895. $y = \sqrt{4x + \sin 4x}$. **896.** $y = x^2 \sqrt{1 - x^2}$.

897. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. **898.** $y = \sqrt[3]{1 + \cos 6x}$.

899. 1) $y = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$; 2) $y = \sin^2 x^3$.

900. $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$. **901.** $s = \sqrt{\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}$.

902. $r = \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$. **903.** $y = \frac{\sqrt{4x + 1}}{x^2}$.

904. $f(t) = \sqrt{1 + \cos^2 t^2}$; найти $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$.

§ 3. Касательная и нормаль к плоской кривой

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке кривой $(x_0; y_0)$ равен значению производной от $f(x)$ в точке x_0 .

$$k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0) = [y']_{x=x_0}. \quad (1)$$

Это число k называют иногда наклоном кривой в точке $(x_0; y_0)$. Уравнение касательной в точке $M(x_0; y_0)$ на кривой (черт. 28):

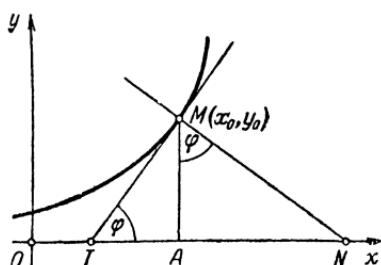
$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2)$$

Уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0), \quad (3)$$

где k определяется формулой (1).

Отрезки $TA = y_0 \operatorname{ctg} \varphi$, $AN = y_0 \operatorname{tg} \varphi$ (черт. 28) называются соответственно подкасательной и поднормалью, а длины отрезков MT и MN — длинами касательной и нормали.



Черт. 28.

905. Найти наклоны параболы $y = x^2$ в точках $x = \pm 2$.

906. Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y = 4 - x^2$ в точке пересечения ее с осью Ox (при $x > 0$) и построить параболу, касательную и нормаль.

В задачах 907—910 написать уравнения касательных к кривым и построить кривые и касательные.

907. К кривой $y = \frac{x^8}{3}$ в точке $x = -1$.

908. К кривой $y^2 = x^3$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

909. К локону $y = \frac{8}{4+x^2}$ в точке $x = 2$.

910. К синусоиде $y = \sin x$ в точке $x = \pi$.

911. Под каким углом кривая $y = \sin x$ пересекает ось Ox ?

912. Под каким углом пересекаются кривые

$$2y = x^2 \text{ и } 2y = 8 - x^2?$$

913. Найти длину подкасательной, поднормали, касательной и нормали кривой: 1) $y = x^2$; 2) $y^2 = x^3$ в точке $x = 1$.

914. Доказать, что подкасательная параболы $y^2 = 2px$ равна удвоенной абсциссе точки касания, а поднормаль равна p .

915. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c , если парабола касается прямой $y = x$ в точке $x = 2$.

916. Написать уравнения касательных к гиперболе $xy = 4$ в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$ и найти угол между касательными. Построить кривую и касательные.

Написать уравнения касательных к кривым и построить кривые и касательные к ним:

917. $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox .

918. $y^2 = 4 - x$ в точках пересечения с осью Oy .

919. $y^2 = (4 + x)^3$ в точках пересечения с осями Ox и Oy .

920. Найти расстояние вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ от касательной к ней в точке пересечения параболы с осью Oy .

921. Под каким углом прямая $y = 0,5$ пересекает кривую $y = \cos x$?

922. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 4x$ параллельна оси Ox ?

923. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

924. Найти длину подкасательной, поднормали, касательной и нормали кривой $y = \frac{2}{1+x^2}$ в точке $x = 1$.

925. Какие углы образует парабола $y = \frac{x^2}{4}$ с ее хордой, абсциссы концов которой равны 2 и 4?

§ 4. Случаи недифференцируемости непрерывной функции

1°. Угловая точка. Точка $A(x_1; y_1)$ кривой $y = f(x)$ (черт. 29) называется угловой, если в этой точке производная y' не существует, но существуют левая и правая различные производные:

$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_1$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_2$. Из угловой точки выходят два касательных луча с наклонами k_1 и k_2 .

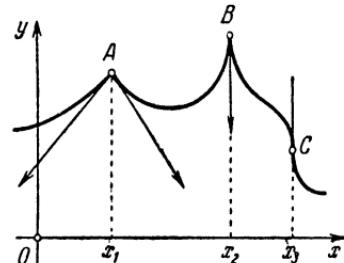
2°. Точка возврата с вертикальной касательной. Точка $B(x_2; y_2)$ (черт. 29) называется точкой возврата с вертикальной касательной, если в этой точке производная y' не существует, но существуют левые и правые бесконечные производные разного знака ($+\infty$ и $-\infty$). Такая точка является частным случаем угловой. Из нее

выходит один вертикальный касательный луч или, можно считать, что из нее выходят два слившимся касательных луча.

3°. Точка перегиба с вертикальной касательной. Точка $C(x_3; y_3)$ (черт. 29) называется точкой перегиба с вертикальной касательной, если в ней существует бесконечная производная $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ (или $-\infty$). В такой точке существует вертикальная касательная.

В точках A и B функция $y = f(x)$ не имеет производной; в точке C она имеет бесконечную производную. Во всех трех точках функция непрерывна, но недифференцируема.

926. Построить график функции $y = \sqrt{x^2}$ (или $y = |x|$) и найти левую y'_- и правую y'_+ производные в угловой точке графика.



Черт. 29.

927. На отрезке $[0, 4]$ построить график функции $y = 0,5 \sqrt[3]{(x-2)^3}$ и найти левую y'_- и правую y'_+ производные в угловой точке графика функции.

928. На отрезке $[-\pi, \pi]$ построить график функции $y = \sqrt{\sin^2 x}$ и написать уравнения касательных в угловой точке кривой.

929. На отрезке $[0, 2\pi]$ построить график функции $y = \sqrt{1 + \cos x}$ и написать уравнения касательных в угловой точке кривой и найти угол между ними.

930. На отрезке $[-2, 2]$ построить график функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ и написать уравнение касательной в точке $x = 0$.

931. На отрезке $[0, 4]$ построить график функции $y = -1 - \sqrt[3]{(x-2)^2}$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x = 2$.

932. На отрезке $[-2, 2]$ построить кривую $y^3 = 4x$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x = 0$.

933. На отрезке $[0, 4]$ построить кривую $y^3 = 4(2-x)$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x = 2$.

934. На отрезке $[0, \pi]$ построить график функции $y = -1 - \sqrt{\cos^2 x}$ и написать уравнения касательных к кривой в угловой точке.

935. На отрезке $[-2, 0]$ построить график функции $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - 1$ и написать уравнение касательной к кривой в точке $x = -1$.

936. На отрезке $[-1, 5]$ построить график функции $y = |4x - x^2|$ и написать уравнения касательных в угловой точке $x = 0$ и найти угол между ними.

§ 5. Производные логарифмических и показательных функций

Основные формулы:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'; \quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$$

Найти производные от функций:

$$\mathbf{937.} \quad 1) \quad y = x \ln x; \quad 2) \quad y = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad y = \lg(5x).$$

938. 1) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$; 2) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

939. 1) $y = \ln(1 + \cos x)$; 2) $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$.

940. $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$.

941. $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$. **942.** $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$.

943. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. **944.** $y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

945. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

946. $y = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x})$.

947. 1) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 2) $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.

948. Написать уравнение касательной к кривой $y = \ln x$ в точке пересечения ее с осью Ox . Построить кривую и касательную.

949. Показать, что парабола $y = \frac{x^2}{2e}$ касается кривой $y = \ln x$, и найти точку касания. Построить кривые.

Найти производные от функций:

950. 1) $y = x^2 + 3^x$; 2) $y = x^2 \cdot 2^x$; 3) $y = x^2 e^x$.

951. 1) $y = a^{\sin x}$; 2) $y = e^{-x^2}$; 3) $y = x^2 e^{-2x}$.

952. $y = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})$. **953.** $y = \sqrt{x} e^{Vx}$.

954. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. **955.** $y = e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a}$.

956. 1) $y = e^{-x} (\sin x + \cos x)$; 2) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$.

957. $y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}$. **958.** $y = (e^{ax} - e^{-ax})^2$.

959. $f(t) = \ln(1 + a^{-2t})$; найти $f'(0)$.

960. Под каким углом кривая $y = e^{2x}$ пересекает ось Oy ?

961. Доказать, что длина подкасательной в любой точке кривой $y = e^{\frac{x}{a}}$ равна a .

962. Предварительным логарифмированием найти производные от функций: 1) $y = x^x$; 2) $y = x^{\sin x}$.

Найти производные от функций:

963. $y = \ln \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x.$

964. $y = \ln (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}).$ **965.** $y = \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$

966. $y = \ln (\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}).$

967. $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$ **968.** $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x + \ln \cos x.$

969. $y = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}.$ **970.** $y = \ln (1 + \sec x).$

971. $y = a \ln (\sqrt{x+a} + \sqrt{x}) - \sqrt{x^2+ax}.$

972. $y = ae^{-\frac{x}{a}} + xe^{-\frac{x}{a}}.$ **973.** $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$

974. $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}.$ **975.** $y = \ln (e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}).$

976. $y = \ln \sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x} + 1}}.$ **977.** $y = x^{\frac{1}{x}}.$

978. $f(t) = \ln \frac{2 + \operatorname{tg} t}{2 - \operatorname{tg} t};$ найти $f' \left(\frac{\pi}{3} \right).$

979. Написать уравнение касательной к кривой $y = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ в точке пересечения ее с осью $Oy.$ Построить кривую, касательную и асимптоту кривой.

§ 6. Производные обратных круговых функций

$$(\operatorname{arc} \sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\operatorname{arc} \cos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Найти производные от функций:

980. $y = \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc} \sin x.$

981. $y = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$ **982.** $y = \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-4x}.$

983. $y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a}.$

984. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}.$

985. $y = \operatorname{arc} \cos (1-2x).$ **986.** $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1+x}{1-x}.$

987. 1) $y = x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$; 2) $y = \arcsin(e^{3x})$.

988. $y = \arctg x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **989.** $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$.

990. $y = x \arctg \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$.

Найти производные от функций:

991. $y = \arcsin \sqrt{x}$. **992.** $y = \arctg \sqrt{6x-1}$.

993. 1) $y = \arccos(1-x^2)$; 2) $y = \arcctg x - \frac{1}{x}$.

994. $y = e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$.

995. $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

996. $y = \arctg e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$.

997. $s = \sqrt{4t-t^2} + 4 \arcsin \frac{\sqrt{t}}{2}$.

998. $y = \arccos \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x-4x^2}$.

999. $f(z) = (z+1) \arctg e^{-2z}$; найти $f'(0)$.

§ 7. Производные гиперболических функций

1°. Определения. Выражения $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и их отношения называются соответственно *гиперболическим синусом*, *косинусом*, *тангенсом* и *котангенсом* и обозначаются:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

2°. Свойства гиперболических функций:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 4) $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$;

2) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$; 5) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

3) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; 6) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Найти производные от функций:

1000. 1) $y = \operatorname{sh}^2 x$; 2) $y = x - \operatorname{th} x$; 3) $y = 2 \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$.

1001. $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{2} + \operatorname{ch} \frac{x}{2}$; найти $f'(0) + f(0)$.

1002. 1) $y = \ln [\operatorname{ch} x]$; 2) $y = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x$.

1003. 1) $y = x - \operatorname{cth} x$; 2) $y = \ln [\operatorname{th} x]$.

1004. 1) $y = \arcsin [\operatorname{th} x]$; 2) $y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$.

1005. Линия $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ называется *цепной*. Написать уравнение нормали к этой линии в точке $x = a$ (см. таблицы гиперболических функций на стр. 357). Построить кривую и нормаль.

1006. Написать уравнение касательной к кривой $y = \operatorname{sh} x$ в точке $x = -2$. Построить кривую и касательную к ней.

1007. Доказать, что проекция ординаты любой точки цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ на ее нормаль есть величина постоянная, равная a .

§ 8. Смешанные примеры и задачи на дифференцирование

Найти производные от функций:

1008. 1) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \arcsin \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln \cos x$.

1009. $y = \sqrt{4x - 1} + \arccot \sqrt{4x - 1}$.

1010. $x = \ln(e^{2t} + 1) - 2\arctg(e^t)$.

1011. $y = 4 \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{x}) + \sqrt{x^2 - 4x}$.

1012. $s = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 t - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 t - \ln(\cos t)$.

1013. $f(x) = (x^2 + a^2) \arctg \frac{x}{a} - ax$; найти $f'(a)$.

1014. 1) $y = \ln \left[x - \frac{a^2}{x} \right]$; 2) $y = x (\cos \ln x + \sin \ln x)$.

1015. $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{x}$; найти $f'(5)$.

1016. $\varphi(u) = e^{-\frac{u}{a}} \cos \frac{u}{a}$; показать, что $\varphi(0) + a\varphi'(0) = 0$.

1017. $f(y) = \arctg \frac{y}{a} - \ln \sqrt[4]{y^4 - a^4}$; найти $f'(2a)$.

1018. $F(z) = \frac{\cos^2 z}{1 + \sin^2 z}$; показать, что $F\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$.

1019. Показать, что функция $s = \frac{1}{t \ln ct}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $t \frac{ds}{dt} + s = -ts^2$.

1020. Показать, что функция $x = \frac{t - e^{-t^2}}{2t^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $t \frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t^2}$.

§ 9. Производные высших порядков

Пусть мы нашли от функции $y = f(x)$ ее производную $y' = f'(x)$. Производная от этой производной называется *производной 2-го порядка* от функции $f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично определяются и обозначаются:

производная 3-го порядка $y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$,

производная 4-го порядка $y^{IV} = f^{IV}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}$,

и вообще

производная n-го порядка $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$.

1021. Найти производную 2-го порядка от функции:

$$1) \ y = \sin^2 x; \quad 2) \ y = \operatorname{tg} x; \quad 3) \ y = \sqrt{1+x^2}.$$

1022. Найти производную 3-го порядка от функции:

$$1) \ y = \cos^2 x; \quad 2) \ y = \frac{1}{x^2}; \quad 3) \ y = x \sin x.$$

1023. Найти производную 3-го порядка от функции:

$$1) \ y = x \ln x; \quad 2) \ s = te^{-t}; \quad 3) \ y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}.$$

1024. $s = \frac{t}{2} \sqrt{2-t^2} + \operatorname{arc} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}$; найти $\frac{d^3s}{dt^3}$.

Найти производную n-го порядка от функции:

1025. 1) $e^{-\frac{x}{a}}$; 2) $\ln x$; 3) \sqrt{x} .

1026. 1) x^n ; 2) $\sin x$; 3) $\cos^2 x$.

1027. Последовательным дифференцированием вывести формулы Лейбница:

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''';$$

$$(uv)^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV} \text{ и т. д.}$$

1028. По формуле Лейбница найти производную 2-го порядка от функции:

$$1) y = e^x \cos x; \quad 2) y = a^x x^3; \quad 3) y = x^3 \sin x.$$

1029. По формуле Лейбница найти производную 3-го порядка от функции:

$$1) y = e^{-x} \sin x; \quad 2) y = x^3 \ln x; \quad 3) y = x \cos x.$$

$$\mathbf{1030.} f(x) = xe^{\frac{x}{a}}; \text{ найти } f'''(x), f^{(n)}(x), f^{(n)}(0).$$

1031. $f(x) = (1+x)^m$; найти $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots, f^{(n)}(0)$.

$$\mathbf{1032.} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}; \text{ показать, что}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^{n-1}} n \text{ при } n \geq 2.$$

$$\mathbf{1033.} f(x) = \frac{1}{1-x^2}; \text{ показать, что}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & \text{при } n = 2m, \\ 0 & \text{при } n = 2m - 1. \end{cases}$$

Указание. Применить тождество

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right).$$

1034. Продифференцировав тождество $(x-1)(x^2 + x^3 + \dots + x^n) = x^{n+1} - x^2$ три раза по x и положив

затем $x = 1$, найти сумму $\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$ и

затем сумму квадратов чисел натурального ряда

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1035. Найти производную 2-го порядка от функции:

$$1) \ y = e^{-x^2}; \quad 2) \ y = \operatorname{ctg} x; \quad 3) \ y = \arcsin \frac{x}{2}.$$

1036. Найти производную n -го порядка от функции:

$$1) \ y = a^v; \quad 2) \ y = \frac{1}{1+2x}; \quad 3) \ y = \sin^2 x.$$

1037. $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$; найти $f(2)$, $f'(2)$ и $f''(2)$.

1038. По формуле Лейбница найти производную 3-го порядка от функции:

$$1) \ y = x^3 e^x; \quad 2) \ y = x^2 \sin \frac{x}{a};$$

$$3) \ y = x f'(a-x) + 3f(a-x).$$

1039. Показать, что функция $y = e^x \cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{IV} + 4y = 0$.

1040. Показать, что функция $y = x e^{-\frac{1}{x}}$ удовлетворяет уравнению $x^8 y'' - xy' + y = 0$.

1041. $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$; показать, что $f^{(n)}(0) = \frac{n(n-1)(-1)^n}{a^{n-2}}$.

1042. $f(x) = e^{-x^2}$; показать, что

$$f^{(n)}(0) = -2(n-1)f^{(n-2)}(0), \quad f^{(2m-1)}(0) = 0,$$

$$f^{2m}(0) = (-2)^m (2m-1)(2m-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

1043. $f(x) = x^n$; показать, что

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

§ 10. Производная неявной функции

Если уравнение $F(x, y) = 0$, неразрешенное относительно y , определяет y как однозначную функцию x , то y называется *неявной* функцией x . Чтобы найти производную y' от этой неявной функции, нужно обе части уравнения $F(x, y) = 0$ продифференцировать по x , рассматривая y как функцию от x . Из полученного уравнения найдем исковую производную y' . Чтобы найти y'' , нужно уравнение $F(x, y) = 0$ дважды продифференцировать по x и т. д.

Найти y' из уравнений:

$$\mathbf{1044.} \quad 1) \ x^3 + y^3 = a^3; \quad 2) \ y^3 = 2px; \quad 3) \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1045. 1) $x^2 + xy + y^2 = 6$; 2) $x^3 + y^3 - xy = 0$.

1046. 1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = a^{\frac{2}{3}}$; 2) $e^y - e^{-x} + xy = 0$.

1047. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

1048. $x = y + \operatorname{arc ctg} y$.

1049. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$; найти $\frac{dy}{dx}$ при $x = 0$.

1050. Найти y'' из уравнений:

1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $ax + by - xy = c$; 3) $x^m y^n = 1$.

1051. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; найти y'' в точке $(0; b)$.

1052. Написать уравнения касательных к кривой $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Oy .

1053. Найти точки пересечения нормали гиперболы $x^2 - y^2 = 9$, проведенной из точки $(5; 4)$, с асимптотами.

1054. Написать уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ к кривой:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $y^2 = 2px$.

1055. Написать уравнения касательных к астроиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a^{\frac{2}{3}}$ в точках пересечения ее с прямой $y = x$.

1056. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \text{и} \quad y^2 = 4x?$$

1057. Найти y' из уравнений:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $x^3 + y^8 - 3axy = 0$.

1058. Найти y'' из уравнений:

1) $x^2 - y^2 = a^2$; 2) $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$;
3) $\operatorname{arc tg} y = x + y$; 4) $x^3 + xy + y^2 = a^2$.

1059. Написать уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Ox . Построить окружность и касательные.

1060. Написать уравнение касательной к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 16$ в точке, в которой делится пополам отрезок касательной, отсеченный осями координат, и которая лежит в первой четверти.

1061. $te^{-\frac{s}{2}} + se^{-\frac{t}{2}} = 2$; найти $\frac{ds}{dt}$ при $t = 0$.

1062. $t \ln x - x \ln t = 1$; найти $\frac{dx}{dt}$ при $t = 1$.

1063. $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$; найти y' при $y = \frac{\pi}{2}$.

§ 11. Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , т. е. имеет в этой точке конечную производную y' , то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$; отсюда

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x. \quad (1)$$

Главная часть $y' \Delta x$ приращения Δy функции, линейная относительно Δx , называется *дифференциалом* функции и обозначается dy :

$$dy = y' \Delta x. \quad (2)$$

Положив в формуле (2) $y = x$, получим $dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, и поэтому

$$dy = y' dx. \quad (3)$$

Формула (3) верна и в случае, если x есть функция новой переменной t .

Из (1) следует, что $\Delta y \approx dy$, т. е. при достаточно малом $dx = \Delta x$ приращение функции приближенно равно ее дифференциалу.

В частности, для линейной функции $y = ax + b$ имеем: $\Delta y = dy$.

Найти дифференциалы функций:

1064. 1) $y = x^n$; 1) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1065. 1) $y = \sqrt{1+x^2}$; 2) $s = \frac{gt^2}{2}$.

1066. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; 2) $x = \frac{1}{t^2}$.

1067. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1 - \cos u)$.

1068. 1) $d\left(\frac{a}{x} + \operatorname{arc tg} \frac{x}{a}\right)$; 2) $d(a + \ln a)$.

3) $d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)$; 4) $d\left(\operatorname{arc sin} \frac{1}{x}\right)$.

1069. Нахождением дифференциала от каждого члена уравнения найти $\frac{dy}{dx}$ из уравнений:

$$1) x^2 + y^2 = a^2; \quad 2) xy = a^2; \quad 3) x^2 - xy - y^2 = 0.$$

1070. 1) $y = x^2$; найти приближенно изменение y ($\Delta y \approx dy$), когда x изменяется от 2 до 2,01; 2) $y = \sqrt{x}$; найти приближенно изменение y , когда x изменяется от 100 до 101.

1071. 1) Сторона куба $x = 5 \text{ м} \pm 0,01 \text{ м}$. Определить абсолютную и относительную погрешность при вычислении объема куба.

2) Длина телеграфного провода $s = 2b \left(1 + \frac{2f^2}{3b^2}\right)$, где $2b$ — расстояние между точками подвеса, а f — наибольший прогиб. На сколько увеличится прогиб f , когда провод от нагревания удлинится на ds ?

1072. 1) С какой точностью нужно измерить абсциссу кривой $y = x^2 \sqrt{x}$ при $x \leq 4$, чтобы при вычислении ее ординаты допустить погрешность не более 0,1?

2) С какой относительной точностью нужно измерить радиус шара, чтобы при вычислении объема шара допустить погрешность не более 1%?

1073. Определить приближенно: 1) площадь кругового кольца; 2) объем сферической оболочки. Сравнить с их точными значениями.

Найти дифференциалы функций:

1074. 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 2) $r = \cos(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1 - t^2}$.

1075. 1) $y = \ln \cos x$; 2) $z = \operatorname{arc tg} \sqrt{4u - 1}$; 3) $s = e^{-2t}$.

1076. 1) $d(\sqrt{x} + 1)$; 2) $d(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

1077. 1) $y = x^3$; определить Δy и dy и вычислить их при изменении x от 2 до 1,98.

2) Период колебания маятника $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{980}}$ сек., где l — длина маятника в сантиметрах. Как нужно изменить длину маятника $l = 20 \text{ см}$, чтобы период колебания уменьшился на 0,1 сек.?

3) С какой точностью нужно измерить абсциссу кривой $xy = 4$ при $x \geq 0,5$, чтобы при вычислении ее ординаты допустить погрешность не более 0,1?

§ 12. Параметрические уравнения кривой

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = f(t)$ и $y = \varphi(t)$. Обозначая точками производные по параметру, найдем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{dx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

1078. Построить кривые по параметрическим уравнениям:

$$1) \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{2}t^3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t. \end{cases}$$

Исключив из уравнений t , написать уравнение каждой кривой в обычном виде: $F(x, y) = 0$.

Привести к виду $F(x, y) = 0$ (или $y = f(x)$) уравнения кривых, заданных параметрически:

$$1079. \quad 1) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

$$1080. \quad 1) \begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

1081. Построить «развертку», или «эвольвенту», круга (см. задачу 368)

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

давая t значения: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

1082. Положив $y = xt$, получить параметрические уравнения «декартова листа» $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (см. задачу 366) и исследовать движение точки по кривой при монотонном изменении t : 1) от 0 до $+\infty$; 2) от 0 до -1 ; 3) от $-\infty$ до -1 .

1083. Написать уравнение касательной к циклоиде (см. задачу 367) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$. Построить кривую и касательную.

1084. Написать уравнение касательной к гипоциклоиде (астроиде) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$. Построить кривую и касательную.

Указание. Для построения кривой составить таблицу значений x и y при $t = 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}$ и т. д.

1085. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ из уравнений:

$$1) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

1086. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

1) $x = 2t - 1$, $y = 1 - 4t^2$; 2) $x = t^3$, $y = t^2 - 2$, найдя точки пересечения их с осями координат и заметив, что для второй кривой $\frac{dy}{dx} = \infty$ при $t = 0$. Написать уравнения кривых в виде $F(x, y) = 0$.

1087. Написать уравнение касательной к циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в точке $t = \frac{3\pi}{2}$. Построить кривую и касательную.

1088. Написать уравнение касательной к развертке круга $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

1089. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ из уравнений:

$$1) \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t^2 \\ y = t + t^3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t}. \end{cases}$$

ГЛАВА VII

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. Скорость и ускорение

Пусть точка движется по оси Ox и в момент t имеет координату $x = f(t)$. Тогда в момент t :

$$\text{скорость } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

$$\text{ускорение } w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

1090. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью a м/сек. На какой высоте x он будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения снаряда. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

1091. Тело движется по прямой Ox по закону $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

1092. Колебательное движение материальной точки совершается по закону $x = a \cos \omega t$. Определить скорость и ускорение движения в точках $x = \pm a$ и $x = 0$. Показать, что ускорение $\frac{d^2x}{dt^2}$ и отклонение x связаны «дифференциальным» уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$.

1093. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$, где a , b и c — положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения. Когда колесо остановится?

1094. Колесо радиуса a катится по прямой. Угол φ поворота колеса за t секунд определяется уравнением $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$. Определить скорость и ускорение движения центра колеса.

1095. Пусть v — скорость и w — ускорение точки, движущейся по оси Ox . Показать, что $w dx = v dv$.

1096. Точка движется прямолинейно так, что $v^2 = 2ax$, где v — скорость, x — пройденный путь и a — постоянная. Определить ускорение движения.

1097. Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/сек. На какой высоте x оно будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте?

1098. Сосуд в форме полушара радиуса R см наполняется водой с постоянной скоростью a л/сек. Определить скорость повышения уровня на высоте уровня h см и показать, что она обратно пропорциональна площади свободной поверхности жидкости.

Указание. Объем шарового сегмента $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$. Обе части этого равенства нужно проинтегрировать по t , причем $\frac{dV}{dt} = a$ (по условию).

1099. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A(1 - e^{-kt})$. Определить скорость реакции.

1100. Пусть угловая скорость $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$. Показать, что $\frac{d(\omega^2)}{d\varphi} = 2\varepsilon$.

§ 2. Теоремы о среднем

1º. **Теорема Ролля.** Если $f(x)$: 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$, 2) имеет производную внутри него, 3) $f(a) = f(b)$, то между a и b найдется такое $x = c$, при котором

$$f'(c) = 0. \quad (1)$$

2º. Теорема Лагранжа. Если $f(x)$: 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$, 2) имеет производную внутри него, то между a и b найдется такое $x = c$, при котором

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \quad (2)$$

3º. Теорема Коши. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$: 1) непрерывны на отрезке $[a, b]$, 2) имеют производные внутри него, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то между a и b найдется такое $x = c$, при котором

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (3)$$

Эти теоремы носят название теорем о среднем потому, что в них говорится о некотором значении $x = c$, среднем между a и b .

Геометрически теоремы Ролля и Лагранжа утверждают, что на AB непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в каждой точке определенную касательную и не имеющей точек возврата, найдется внутренняя точка, касательная в которой параллельна хорде AB .

На дугах, содержащих угловые точки или точки возврата, условия теорем о среднем, очевидно, не выполнены.

Теорему Ролля в частном случае при $f(b) = f(a) = 0$ формулируют так: между двумя корнями a и b функции $f(x)$ найдется по крайней мере один корень ее производной $f'(x)$, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную внутри него.

1101. Проверить, что между корнями функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ находится корень ее производной. Пояснить графически.

1102. Применима ли теорема Ролля к функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$? Пояснить графически.

1103. Построить дугу AB кривой $y = |\sin x|$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Почему на дуге нет касательной, параллельной хорде AB ? Какое из условий теоремы Ролля здесь не выполнено?

1104. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1; 1)$ и $B(3; 9)$? Пояснить графически.

1105. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[a, b]$ и найти c . Пояснить графически.

1106. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[1, 4]$ и найти c .

III7. Показать, что на отрезке $[-1, 2]$ теорема Лагранжа неприменима к функциям $\frac{4}{x}$ и $1 - \sqrt[3]{x^2}$. Пояснить графически..

III8. Построить \overrightarrow{AB} кривой $y = |\cos x|$ на отрезке $[0, \frac{2\pi}{3}]$. Почему на дуге нет касательной, параллельной хорде AB ? Какое из условий теоремы Лагранжа здесь не выполнено?

III9. Построить график функции $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| < 2 \\ 1 & \text{при } |x| \geq 2. \end{cases}$. Взяв на нем точки $O(0; 0)$ и $B(2; 1)$, показать, что между O и B на графике функции нет точки, касательная в которой была бы параллельна OB . Какие условия теоремы Лагранжа для этой функции на отрезке $[0, 2]$ выполнены и какие нет?

III10. Поезд прошел расстояние между станциями со средней скоростью $v_0 = 40 \text{ км/час}$. Теорема Лагранжа утверждает, что был момент движения, в который истинная (а не средняя) скорость движения $\frac{ds}{dt}$ была равна 40 км/час . Показать это.

III11. Дано, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную в каждой точке внутри него. Применив теорему Ролля к функции

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix},$$

получить теорему Лагранжа. Выяснить геометрическое значение функции $\Phi(x)$.

III12. Написать формулу Коши $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ для функций $f(x) = x^8$ и $\varphi(x) = x^3$ и найти c .

III13. Геометрически теорема Коши утверждает, что на дуге кривой $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$ для значений t на отрезке $a \leq t \leq b$ найдется внутренняя точка, в которой касательная параллельна хорде, если функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши. Доказать это.

III14. Написать формулу Лагранжа в виде $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$, где $0 < \theta < 1$, для функций: 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^3$, и показать, что для первой функции θ не зависит от x , а для второй — зависит от x и Δx .

III5. Показать, что $\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{100+0}} \approx 10,05$.

III6. С помощью формулы Коши доказать, что если $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$,

то

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(0x)}{n!},$$

где

$$0 < \theta < 1.$$

III7. Написать формулу Лагранжа

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

для функции $f(x) = x^3$ и найти c .

III8. Написать формулу Лагранжа и найти c для функций:

1) $f(x) = \operatorname{arc tg} x$ на отрезке $[0, 1]$;

2) $f(x) = \operatorname{arc sin} x$ на отрезке $[0, 1]$;

3) $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1, 2]$.

III9. Написать формулу Коши и найти c для функций:

1) $\sin x$ и $\cos x$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$;

2) x^3 и \sqrt{x} на отрезке $[1, 4]$.

III20. Построить график функции $y = |x - 1|$ на отрезке $[0, 3]$. Почему здесь нельзя провести касательную, параллельную хорде? Какое из условий теоремы Лагранжа здесь не выполнено?

III21. В какой точке касательная к кривой $y = 4 - x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-2; 0)$ и $B(1; 3)$? Пояснить графически.

§ 3. Раскрытие неопределенностей.

Правило Лопитали

1. Неопределенность $\frac{0}{0}$. Первое правило Лопитали. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, когда последний существует.

2°. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Второе правило Лопиталя. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, когда последний существует:

3°. Неопределенностии $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ и 0^0 сводятся к неопределенностям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований.

Найти пределы:

$$1122. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$1123. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}.$$

$$1124. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x^n - a^n}.$$

$$1125. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}.$$

$$1126. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}.$$

$$1127. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$1128. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

$$1129. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}.$$

$$1130. 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}; 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

$$1131. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

$$1132. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$1133. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$1134. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$1135. \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x.$$

$$1136. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot e^{-x}.$$

$$1137. \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

$$1138. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$1139. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x.$$

1140. Определить порядок бесконечно малой $x e^x - \sin x$ относительно $x \rightarrow 0$.

1141. Доказать, что при $x \rightarrow 0$:

$$1) x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \approx \frac{x^3}{3};$$

$$2) a^x - b^x \approx x \ln \frac{a}{b};$$

$$3) e^{2x} - 1 - 2x \approx 2x^2;$$

$$4) 2x - \ln(1 + 2x) \approx 2x^2.$$

1142. Доказать, что (при $x \rightarrow 0$) $x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$ и отсюда $\sin x \approx x$ с погрешностью, приближенно равной $\frac{x^3}{6}$. Вычислить $\sin 1^\circ$ и $\sin 6^\circ$ и оценить погрешность.

1143. Доказать, что (при $a \rightarrow 0$) $\sqrt[3]{1+a} - 1 - \frac{1}{3}a \approx -\frac{a^2}{9}$ и отсюда $\sqrt[3]{1+a} \approx 1 + \frac{1}{3}a$ с погрешностью $\approx \frac{a^2}{9}$. Вычислить $\sqrt[3]{1,006}$, $\sqrt[3]{0,991}$, $\sqrt[3]{65}$, $\sqrt[3]{210}$ и оценить погрешность.

Найти пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arc tg} x}{x^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2a}} \frac{1 - \sin ax}{(2ax - \pi)^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - bx}{\operatorname{tg} x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}.$$

1156. Доказать, что при $x \rightarrow 0$ $\operatorname{arc sin} x - x \approx \frac{x^3}{6}$.

1157. Доказать, что (при $a \rightarrow 0$) $\sqrt[3]{1+a} - 1 - \frac{a}{2} \approx -\frac{a^2}{8}$ и отсюда $\sqrt[3]{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$ с погрешностью, приближенно равной $\frac{a^2}{8}$. Вычислить $\sqrt[3]{1,006}$, $\sqrt[3]{1,004}$, $\sqrt[3]{0,998}$, $\sqrt[3]{0,994}$, $\sqrt[3]{65}$, $\sqrt[3]{85}$ и оценить погрешность.

§ 4. Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум

1°. Определения. I. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке x_0* , если в некоторой ϵ -окрестности этой точки

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

при любом положительном $h < \epsilon$.

II. Функция $f(x)$ называется *возрастающей на отрезке $[a, b]$* , если для любых x_1 и x_2 на этом отрезке $f(x_1) < f(x_2)$, когда $x_1 < x_2$.

Аналогично определяется убывание функции в точке и на отрезке.

III. Функция $f(x)$ называется имеющей *экстремум (максимум или минимум)* в точке x_0 , если $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой двусторонней окрестности этой точки.

2°. Достаточные признаки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ (в точке и на отрезке):

если $y' > 0$, то функция *возрастает*;

если $y' < 0$, то функция *убывает*.

3°. Необходимое условие экстремума. Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в точках, где $y' = 0$ или не существует. Такие точки называются *критическими*. В них касательная или горизонтальна ($y' = 0$), или вертикальна (в точке возврата), или нет определенной касательной (например, в угловой точке). В двух последних случаях y' не существует.

4°. Достаточные условия экстремума. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в некоторой окрестности x_0 , кроме, быть может, точки x_0 , конечную производную и если при переходе x через x_0 :

y' меняет знак с + на —, то $f(x_0) = y_{\max}$,

y' меняет знак с — на +, то $f(x_0) = y_{\min}$,

y' не меняет знака, то экстремума нет.

Третий случай имеет место в обыкновенной точке (при $y' > 0$ или $y' < 0$), а также в точке перегиба и в угловой точке.

Итак, чтобы найти экстремум функции, нужно:

1) Найти y' и критические точки, в которых $y' = 0$ или не существует.

2) Определить знак y' слева и справа от каждой критической точки, составив таблицу, например, вида

x		x_1		x_2		x_3		x_4	
y'	—	0	+	не существует	—	0	—	$-\infty$	—
y	убывает		возрастает		убывает		убывает		убывает

Далее можно найти y_{\max} и y_{\min} и построить кривую. На черт. 30 построена кривая, соответствующая приведенной выше таблице.

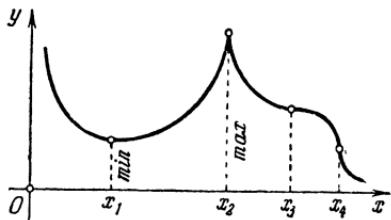
5°. Достаточные условия экстремума (второй способ исследования).

Если в некоторой точке $x = x_0$:

1) $y' = 0$, а $y'' < 0$,
то $f(x_0) = y_{\max}$;

2) $y' = 0$, а $y'' > 0$,
то $f(x_0) = y_{\min}$;

3) $y' = 0$ и $y'' = 0$, то вопрос остается нерешенным и нужно обратиться к первому способу исследования.



Черт. 30.

Исследовать возрастание и убывание функций:

1158. 1) $y = x^3$; 2) $y = x^8$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \ln x$.

1159. 1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = e^x$; 3) $y = 4x - x^2$.

Найти экстремум функции и построить ее график *):

1160. $y = x^2 + 4x + 5$. **1161.** $y = 4x - \frac{x^3}{3}$.

1162. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$. **1163.** $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$.

1164. $y = \frac{x^4}{4} - x^3$. **1165.** $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

1166. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$. **1167.** $y = \frac{1}{1+x^2}$.

1168. $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$. **1169.** $y = x^2(1 - x)$.

1170. $y = 1 - \sqrt[3]{(x - 4)^2}$. **1171.** $y = e^{-x^2}$.

1172. $y = x + \cos 2x$ в интервале $(0, \pi)$.

1173. $y = 4x - \operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1174. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$. **1175.** $y = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x$.

1176. 1) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y = x \ln x$.

1177. 1) $y = \sqrt{\sin x^2}$; 2) $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

*) В задачах 1165, 1168, 1173 и некоторых других для построения кривой нужно найти ее асимптоты (см. гл. V, § 9, стр. 117).

1178. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$ **1179.** $y = x\sqrt{1-x}.$

1180. $y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2}.$ **1181.** $y = \frac{x}{(x-1)(x-4)}.$

1182. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}.$ **1183.** $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}.$

1184. $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3.$ **1185.** $y = x^3(x+2)^3.$

1186. $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$ **1187.** $y = \frac{x^3}{x^2-3}.$

1188. $y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x.$ **1189.** $y = x + \ln(\cos x).$

1190. 1) $y = \ln\sqrt{1+x^3} - \arctg x;$ 2) $y = |x|(x+2).$

1191. $y = x^3 e^{-x}.$ **1192.** $y = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x.$

Найти экстремум функции и построить ее график:

1193. $y = 4x - x^3.$ **1194.** $y = x^3 + 2x - 3.$

1195. $y = \frac{x^3}{3} + x^2.$ **1196.** $y = x^3 + 6x^2 + 9x.$

1197. $y = \frac{x^2}{x-2}.$ **1198.** $y = x^3 + \frac{x^4}{4}.$

1199. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3.$ **1200.** $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}.$

1201. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$ **1202.** $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$

1203. $y = x - 2 \ln x.$ **1204.** $y = x^{\frac{2}{3}}(x-5).$

1205. $y = \sin 2x - x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

1206. $y = 2x + \operatorname{ctg} x$ в интервале $(0, \pi).$

1207. $y = x + \operatorname{arc ctg} 2x.$ **1208.** $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$

1209. $y = 2 \sin x + \cos 2x$ в интервале $(0, \pi).$

1210. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2.$ **1211.** $y = \frac{\ln x}{x}.$

1212. $y = \frac{3-x^2}{x+2}.$ **1213.** $y = x + \frac{1}{x}.$

1214. 1) $y = ae^{-x} \cos x$ (при $x > 0$); 2) $y = 3x^5 - 5x^3.$

1215. $y = \frac{(4-x)^3}{9(2-x)}.$

1217. $y = \frac{2x^2-1}{x^4}.$

1219. $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}.$

1221. 1) $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2};$ 2) $y = \sqrt{1-\cos x}.$

1216. $y = \frac{12\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x^2+8}.$

1218. $y = (1-x^2)(1-x^3).$

1220. $y = x + 2\sqrt{-x}.$

§ 5. Задачи о наибольших и наименьших значениях величин

1222. Решеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

1223. Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

1224. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить площадь прямоугольника.

1225. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

1226. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м³ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

1227. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

1228. В полукруг вписана трапеция, основание которой есть диаметр полукруга. Определить угол трапеции при основании так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

1229. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

1230. Вблизи завода A проводится по намеченной прямой к городу B железная дорога. Под каким углом α к проектируемой железной дороге нужно провести шоссе с завода A , чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешевой,

если стоимость перевозки 1 тонны-километра по шоссе в m раз дороже, чем по железной дороге.

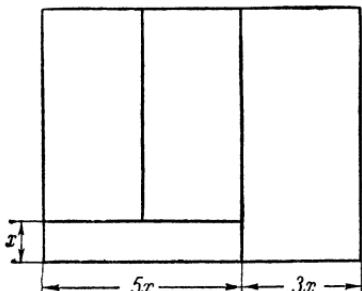
1231. Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещенную точку, если силы света источников относятся, как 27 : 8.

1232. Два самолета летят в одной плоскости и прямо-линейно под углом 120° с одинаковой скоростью v км/час. В некоторый момент один самолет пришел в точку пересечения линий движения, а второй не дошел до нее на a км. Через сколько времени расстояние между самолетами будет наименьшим и чему равно это расстояние?

1233. Балка прямоугольного сечения со свободно опертыми концами равномерно нагружена по всей длине. Стрела ее прогиба обратно пропорциональна моменту инерции сечения балки $I = \frac{xy^3}{12}$, где x и y — размеры балки. Определить размеры балки при наименьшей стреле прогиба, если балка вырезана из круглого бревна с диаметром D .

1234. Во сколько раз объем шара больше объема наибольшего цилиндра, вписанного в этот шар?

1235. Два коридора шириной 2,4 и 1,6 м пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно перенести (горизонтально) из одного коридора в другой.



Черт. 31.

1236. В конус с радиусом 4 дм и высотой 6 дм вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

1237. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить его размеры.

1238. На параболе $y = x^2$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

1239. Картина повешена на стене. Нижний ее конец на b см, а верхний — на a см выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

1240. Общая длина стен изображенного на плане дома (черт. 31) должна быть равна 90 м. При какой ширине x коридора площадь трех остальных комнат будет наибольшей?

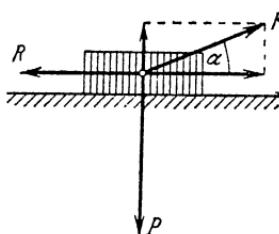
1241. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

1242. Даны точки $A(0; 3)$ и $B(4; 5)$. На оси Ox найти точку M так, чтобы расстояние $S = AM + MB$ было наименьшим.

1243. Сопротивление балки продольному сжатию пропорционально площади поперечного сечения. Определить размеры балки, вырезанной из круглого бревна с диаметром D , так, чтобы сопротивление ее сжатию было наибольшим.

1244. Из круга вырезается сектор, содержащий угол α , а затем сектор свертывается в конус. При каком значении угла α объем конуса будет наибольшим?

1245. Груз весом P , лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему силой F (черт. 32). Под каким углом α к горизонту нужно направить силу F , чтобы она была наименьшей. Коэффициент трения $\mu = 0,25$.



Черт. 32.

§ 6. Направление выпуклости и точки перегиба кривой. Построение кривых

1°. Выпуклость. Кривая называется *выпуклой «вверх»* («вниз») в точке $x = x_0$, если в некоторой окрестности этой точки (слева и справа) кривая расположена «ниже» («выше») касательной в этой точке. Если в точке $x = x_0$:

- 1) $y'' > 0$, то кривая выпукла «вниз»;
- 2) $y'' < 0$, то кривая выпукла «вверх».

2°. Точкой перегиба называется точка, в которой кривая переходит с одной стороны касательной на другую (и, следовательно, меняет направление выпуклости). Необходимым условием точки перегиба является то, что в ней $y'' = 0$ или не существует, а достаточным — то, что y'' при этом меняет знак.

3°. Для построения кривой рекомендуется определить: 1) симметрию; 2) область расположения; 3) точки пересечения с осями

Ox и *Oy*; 4) точки разрыва функции $y = \varphi(x)$ или $x = f(y)$ и асимптоты; 5) возрастание или убывание y или x и экстремальные точки; 6) направление выпуклости и точки перегиба.

1246. Исследовать направление выпуклости и построить кривые:

$$1) y = x^2; 2) y = x^3; 3) y = e^x; 4) y = \ln x; 5) y = x^{5/3}.$$

1247. Определить экстремальные точки и точки перегиба кривых и построить кривые:

$$1) y = \frac{x^3}{6} - x^2; 2) y = e^{-x^2}; 3) y = \frac{2x}{1+x^2}; 4) y = 2^{\frac{1}{x}}.$$

Применяя некоторые из правил п. 3°, построить кривые, заданные в задачах 1248—1262 уравнениями:

$$\mathbf{1248. } y^2 = 2x + 9. \quad \mathbf{1249. } y = -x^2 - 4x.$$

Указание. В № 1248 определить симметрию, область расположения и точки пересечения с осями, а в № 1249 — точку экстремума и точки пересечения с *Ox*.

$$\mathbf{1250. } y = \sin x, y = \cos x. \quad \mathbf{1251. } y = \operatorname{sh} x, y = \operatorname{ch} x.$$

Указание. В №№ 1250, 1251 определить точки экстремума и перегиба.

$$\mathbf{1252. } y = \ln(x+2). \quad \mathbf{1253. } y = e^{-x}.$$

Указание. В №№ 1252, 1253 определить область расположения, точки пересечения с осями, асимптоту и направление выпуклости,

$$\mathbf{1254. } 1) y^2 = x^3; \quad 2) y^2 = (x+3)^3.$$

$$\mathbf{1255. } 1) y = 2 + \frac{12}{x^2-4}; \quad 2) y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}.$$

$$\mathbf{1256. } 1) y = \frac{e \ln x}{x}; \quad 2) y = ex e^{-x}.$$

$$\mathbf{1257. } 1) y = x + \frac{4}{x+2}; \quad 2) y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}.$$

$$\mathbf{1258. } 1) y = x - \ln x; \quad 2) y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$$

$$\mathbf{1259. } 1) y = \frac{x^4}{x^3-1}; \quad 2) y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}.$$

$$\mathbf{1260. } 1) y^2 = 2x^3 - x^4; \quad 2) x(y-x)^2 = 4.$$

$$\mathbf{1261. } y = (x+2)^{5/3} - (x-2)^{5/3}. \quad \mathbf{1262. } y^2 = xe^{-x}.$$

ГЛАВА VIII

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Неопределенный интеграл. Интегрирование разложением

1°. Неопределенным интегралом $\int f(x) dx$ называется функция $F(x) + C$, содержащая произвольное постоянное C , дифференциал которой равен подинтегральному выражению $f(x) dx$, т. е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

если

$$d[F(x) + C] = f(x) dx.$$

2°. Таблица основных интегралов:

- | | |
|--|--|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$(n \neq -1).$ | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ |
| 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$ | 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ |
| 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ | 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$ |
| 4. $\int e^x dx = e^x + C.$ | 9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc tg} x + C \\ \text{или} \\ -\operatorname{arc ctg} x + C_1 \end{cases}$ |
| 5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$ | 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arc sin} x + C \\ \text{или} \\ -\operatorname{arc cos} x + C_2 \end{cases}$ |

3°. Свойства неопределенного интеграла:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| I. $d \int u dx = u dx.$ | II. $\int du = u + C.$ |
| III. $\int A u dx = A \int u dx.$ | IV. $\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx.$ |

Интегрирование *разложением* есть приведение данного интеграла (по свойству IV) к сумме более простых интегралов.

I263. В следующих равенствах заполнить пропущенные места по соображению:

$$\begin{array}{ll} 1) d(\quad) = 2x \, dx; & 2) d(\quad) = x^3 \, dx; \\ 3) d(\quad) = \cos x \, dx; & 4) d(\quad) = \frac{dx}{x}; \\ 5) d(\quad) = \frac{dx}{\cos^2 x}; & 6) d(\quad) = \frac{dx}{1+x^2}. \end{array}$$

Найти затем интегралы: $\int 2x \, dx$, $\int x^3 \, dx$ и т. д.

Найти интегралы:

I264. 1) $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$; 2) $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$.

I265. 1) $\int \frac{x-2}{x^3} dx$; 2) $\int \frac{(x^2+1)^3}{x^3} dx$.

I266. 1) $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}) dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$.

I267. 1) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{x} dx$; 2) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

I268. 1) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$; 2) $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt[3]{x^3}} \right) dx$.

I269. 1) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$. 2) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

I270. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 2) $\int \frac{3-2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$.

I271. 1) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$; 2) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

I272. 1) $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt[3]{1-x^2}} \right) dx$; 2) $\int \frac{x^4}{1+x^3} dx$.

Найти интегралы:

I273. 1) $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^3} dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{x \sqrt[3]{x}} \right) dx$.

I274. 1) $\int \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^8}} dx$; 2) $\int \frac{(2\sqrt[3]{x}+1)^2}{x^2} dx$.

1275. 1) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$; 2) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$.

1276. 1) $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$; 2) $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{x^5} \right) dx$.

1277. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$. **1278.** $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

§ 2. Интегрирование подстановкой и непосредственное

Положив $x = \varphi(u)$, $dx = \varphi'(u) du$, получим:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du. \quad (1)$$

Такое преобразование интеграла называется *интегрированием подстановкой*.

В простых случаях введение нового переменного u рекомендуется выполнять в уме, применяя следующие преобразования дифференциала dx :

$$dx = \frac{1}{a} d(ax + b); \quad 2x dx = d(x^2);$$

$$\cos x dx = d(\sin x); \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x) \text{ и т. п.,}$$

и обозначая мысленно выражение в скобках через u . Такой прием интегрирования называют *непосредственным*.

Найти интегралы:

1279. $\int \cos 3x dx$.

1280. $\int \sin \frac{x}{2} dx$.

Указание. Пример 1279 можно решить двумя способами: 1) положив $3x = u$, $x = \frac{u}{3}$, $dx = \frac{du}{3}$; 2) приведя интеграл к виду $\frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x)$.

1281. $\int e^{-3x} dx$.

1282. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$.

1283. $\int (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx$.

1284. $\int \sqrt[4]{4x-1} dx$.

1285. $\int (3 - 2x)^4 dx$.

1286. $\int \sqrt[5]{5-6x} dx$.

1287. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$.

1288. $\int \sin(a - bx) dx$.

1289. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx.$ **1290.** $\int \frac{x dx}{x^2+1}.$

Указание. Примеры 1289—1298 решаются по формуле

$$\int \frac{u' dx}{u} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C,$$

т. е. если числитель подинтегральной дроби есть производная от знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя.

1291. $\int \frac{dx}{1-10x}.$

1292. $\int \frac{e^{2x} dx}{1-3e^{2x}}.$

1293. $\int \operatorname{ctg} x dx.$

1294. $\int \operatorname{tg} x dx.$

1295. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx.$

1296. $\int \frac{\sin x dx}{1+3 \cos x}.$

1297. $\int \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx.$

1298. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$

1299. $\int \sin^2 x \cos x dx.$

1300. $\int \cos^3 x \sin x dx.$

Указание. Пример 1299 можно решить подстановкой $\sin x = u$ или непосредственно, заменив $\cos x dx$ через $d(\sin x)$.

1301. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}.$

1302. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}.$

1303. $\int \frac{1-2 \cos x}{\sin^2 x} dx.$

1304. $\int \sin x \cos x dx.$

1305. $\int e^{\cos x} \sin x dx.$

1306. $\int e^{x^3} x^2 dx.$

Указание. Пример 1306 можно решить подстановкой $x^3 = u$ или непосредственно, заменив $x^2 dx$ через $\frac{1}{3} d(x^3)$.

1307. $\int e^{-x^2} x dx.$

1308. $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}} dx}{\sqrt[3]{x}}.$

1309. $\int \sqrt{x^2+1} x dx.$

1310. $\int \sqrt[3]{x^3-8} x^2 dx.$

Указание. Пример 1309 можно решить подстановкой $x^2 + 1 = u$ или непосредственно, записав интеграл в виде $\frac{1}{2} \int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} d(x^2+1)$.

1311—1329] § 3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$ 157

$$\mathbf{1311.} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$\mathbf{1312.} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\mathbf{1313.} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2 \cos x}}.$$

$$\mathbf{1314.} \int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}.$$

$$\mathbf{1315.} \int \sqrt{1+4 \sin x} \cos x dx. \quad \mathbf{1316.} \int \sqrt[3]{1-6x^5} x^4 dx.$$

Найти интегралы:

$$\mathbf{1317.} \int (e^x + e^{-x})^2 dx.$$

$$\mathbf{1318.} \int \sin^3 x \cos x dx.$$

$$\mathbf{1319.} \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}.$$

$$\mathbf{1320.} \int \cos(a-bx) dx.$$

$$\mathbf{1321.} \int \sqrt[3]{1+3x} dx.$$

$$\mathbf{1322.} \int \sqrt[6]{1-2x^3} x^2 dx.$$

$$\mathbf{1323.} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\mathbf{1324.} \int \frac{1-2 \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\mathbf{1325.} \int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\mathbf{1326.} \int e^{\sin x} \cos x dx.$$

$$\mathbf{1327.} \int \frac{x^2 dx}{1-x^3}.$$

$$\mathbf{1328.} \int \frac{dx}{(a-bx)^3}.$$

§ 3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$
и к ним приводящиеся

1329. Показать, что

$$1) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + C, \text{ положив } x = a \operatorname{tg} t;$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc sin} \frac{x}{a} + C, \text{ положив } x = a \sin t;$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \text{ разложив}$$

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \frac{a+x+a-x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right);$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C,$$

положив $\sqrt{x^2 + k} = t - x$.

1330. 1) $\int \frac{dx}{x^2 - 25}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$.

1331. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

1332. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$.

1333. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$; 2) $\int \frac{x^2 dx}{4 + x^6}$.

1334. 1) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3 - x^4}}$; 2) $\int \frac{dx}{b^2 x^2 - a^2}$.

1335. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$; 2) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8 - 1}}$.

1336. 1) $\int \frac{5x - 2}{x^2 + 4} dx$; 2) $\int \frac{3x - 4}{x^2 - 4} dx$.

1337. 1) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$; 2) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

1338. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$. **1339.** $\int \frac{x^4 dx}{x^2 - 3}$.

Указание. В примерах 1338, 1339 нужно из подинтегральной *неправильной* дроби исключить целое выражение.

1340. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$. **1341.** $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$.

Указание. В примерах 1340—1347 нужно из квадратного трехчлена выделить полный квадрат.

1342. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$. **1343.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

1344. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$. **1345.** $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3}$.

1346. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$. **1347.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}$.

Найти интегралы:

1348. $\int \left(\frac{3}{x^2 + 3} + \frac{6}{x^2 - 3} \right) dx$.

1349. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2-x^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2+x^2}} \right) dx.$

1350. $\int \frac{4x-5}{x^2+5} dx.$

1351. $\int \frac{x^2 dx}{x^3-2}.$

1352. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+2}.$

1353. $\int \frac{e^v dx}{\sqrt[3]{1-e^{2v}}}.$

1354. $\int \frac{x dx}{x^4+0,25}.$

1355. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}.$

1356. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}.$

1357. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-4x-x^2}}.$

1358. $\int \frac{x dx}{x^2+x+1}.$

1359. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+3}}.$

§ 4. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(uv) = u dv + v du$ получается формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Эта формула чаще всего применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функций, например $\int x^2 e^x dx$ или $\int x^2 \ln x dx$. При этом за u принимается функция, которая дифференцированием упрощается, а за dv — та часть подинтегрального выражения, содержащая dx , интеграл от которой известен или может быть найден.

Из трансцендентных функций за u обычно принимаются $\ln x$, $\operatorname{arc tg} x$ и $\operatorname{arc sin} x$.

Например, в интеграле $\int x^2 \ln x dx$ за u нужно принять $\ln x$ (а не x^2), а в интеграле $\int x^2 e^x dx$ за u нужно принять x^2 (а не e^x).

Найти интегралы:

1360. $\int \ln x dx.$

1361. $\int x \ln(x-1) dx.$

1362. $\int x e^{2x} dx.$

1363. $\int x \operatorname{arc tg} x dx.$

1364. $\int x^2 \cos x dx.$

1365. $\int e^x \sin x dx.$

1366. Показать, что

$$\int \sqrt{x^2+k} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2+k} + k \ln(x + \sqrt{x^2+k})] + C.$$

1367. $\int (\ln x)^2 dx.$

1368. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

1369. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}.$

1370. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}.$

1371. $\int \arcsin x dx.$

1372. $\int x^3 e^{-x} dx.$

1373. $\int \ln(x^2+1) dx.$

1374. $\int \cos(\ln x) dx.$

Найти интегралы:

1375. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

1376. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$

1377. $\int \arctg x dx.$

1378. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

1379. $\int e^x \cos x dx.$

1380. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx.$

1381. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$

1382. $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx.$

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

1°. Интегралы от квадратов и других четных степеней синуса и косинуса находят, применяя следующие формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

2°. Интегралы от кубов и других нечетных степеней синуса и косинуса находят, отделяя от нечетной степени один множитель и полагая кофункцию равной новому переменному u .

Интеграл $\int \cos^m x \sin^n x dx$ находится по правилу 1°, если m и n оба четные, и по правилу 2°, если m или n нечетно.

1383. $\int \sin^2 3x dx.$

1384. $\int (1 + 2 \cos x)^2 dx.$

1385. $\int (1 - \sin 2x)^2 dx.$

1386. $\int \cos^4 x dx.$

1387. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

1388. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx.$

1389. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

1390. $\int \sin^5 x dx.$

1391. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

1392. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$

1393. $\int \cos^7 x dx.$

1394. $\int (1 + 2 \cos x)^3 dx.$

1395. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}.$

1396. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}.$

1397. $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} dx = ?$

1398. 1) $\int \frac{dx}{\sin x};$ 2) $\int \frac{dx}{\cos x}.$

1399. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx.$

1400. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}.$

1401. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

1402. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$

Указание. В примере 1401 положить $\operatorname{tg} x = t,$ $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t.$

1403. $\int \sin 3x \cos x dx.$

1404. $\int \cos mx \cos nx dx.$

Указание. В примерах 1403—1406 применить формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)], \quad \cos \alpha \cos \beta =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)].$$

1405. 1) $\int \sin 3x \sin 5x dx;$ 2) $\int \sin mx \sin nx dx.$

1406. $\int \sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx.$

1407. Интегрируя по частям, вывести формулы «понижения степени»:

$$1) \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx;$$

$$2) \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

и по этим формулам найти: 1) $\int \sin^6 x dx;$ 2) $\int \cos^6 x dx.$

1408. Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, 2) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Указание. Применить формулы задачи 1407 к интегралам

$$\int \frac{dx}{\sin x} \text{ и } \int \frac{dx}{\cos x}.$$

1409. $\int (1 + 3 \cos 2x)^3 dx$. **1410.** $\int \sin^4 x dx$.

1411. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$. **1412.** $\int \cos^5 x dx$.

1413. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$. **1414.** $\int (1 + 2 \sin x)^3 dx$.

1415. $\int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x} dx$. **1416.** $\int \sin 3x \sin x dx$.

1417. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$. **1418.** $\int \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x dx$.

§ 6. Интегрирование рациональных алгебраических функций

1°. Если подинтегральная дробь *неправильная*, то нужно исключить из нее целое выражение.

2°. Знаменатель правильной дроби разлагается на множители вида $(x - a)^\alpha$ и $(x^2 + px + q)^\beta$, а правильная дробь разлагается на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{(x - a)^\alpha (x^2 + px + q)^\beta \dots} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha} + \\ + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta} + \dots,$$

где $P(x)$ — полином степени ниже степени знаменателя.

Найти интегралы:

1419. 1) $\int \frac{x^8}{x - 2} dx$; 2) $\int \frac{x^4}{x^2 + a^2} dx$; 3) $\int \frac{x^5}{x^3 - a^3} dx$.

1420. $\int \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 3)} dx$. **1421.** $\int \frac{2x + 7}{x^3 + x - 2} dx$.

1422. $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^8 - x} dx$. **1423.** $\int \frac{(x + 1)^3}{x^2 - x} dx$.

1424. $\int \frac{x+2}{x^8-2x^2} dx.$

1426. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx.$

1428. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx.$

1425. $\int \frac{3x-2a}{x^4-ax^3} dx.$

1427. $\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2} dx.$

1429. $\int \frac{4x-2,4}{x^2-0,2x+0,17} dx.$

Указание. В примере 1428 выделить в знаменателе полный квадрат и затем положить $x+1=t$.

1430. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx.$ **1431.** $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} dx.$

1432. $\int \frac{dx}{x^3+8}.$ **1433.** $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$

1434. 1) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^2};$ 2) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^3}.$

Указание. Положить $x = b \operatorname{tg} t$ и затем (во втором примере) использовать формулу 2) задачи 1407.

1435. 1) $\int \frac{(2x+1) dx}{(x^2+2x+5)^2};$ 2) $\int \frac{dx}{(x^2-6x+10)^3}.$

1436. $\int \frac{4x dx}{(1+x)(1+x^2)^2}.$ **1437.** $\int \frac{x+1}{x^4+4x^2+4} dx.$

Найти интегралы, не применяя общего метода неопределенных коэффициентов:

1438. $\int \frac{dx}{x(x+a)}.$

1439. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

Указание к №№ 1438—1442. В числителе подинтегральной дроби написать разность множителей знаменателя, разделив интеграл на соответствующее число.

1440. $\int \frac{dx}{x^2-2x}.$

1442. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$

1441. $\int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)}.$

1443. $\int \frac{dx}{x^3+4x}.$

Найти интегралы:

1444. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx.$ **1445.** $\int \frac{3x+2}{2x^2+x-3} dx.$

1446. $\int \frac{5x - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx.$ **1447.** $\int \frac{11x + 16}{(x-1)(x+2)^3} dx.$

1448. $\int \frac{5x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx.$ **1449.** $\int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx.$

1450. $\int \frac{x - a}{x^3 + a^2x} dx.$ **1451.** $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}.$

1452. $\int \frac{dx}{x^3 - 8}.$ **1453.** $\int \frac{x dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}.$

В примерах 1454—1457 выполнить интегрирование, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов.

1454. $\int \frac{dx}{x^2 + 5x}.$ **1455.** $\int \frac{dx}{x^4 + 3x^2}.$

1456. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$ **1457.** $\int \frac{dx}{x^4 - x^2 - 2}.$

§ 7. Интегрирование некоторых иррациональных алгебраических функций

1°. Интеграл $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$, где $R(x, y)$ — рациональная функция, находится подстановкой $ax+b=t^n$, а интеграл более общего вида $\int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}) x^{m-1} dx$ — подстановкой $ax^m+b=t^n$.

2° Интеграл $\int \frac{Mx+N}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ находится подстановкой $x-a=\frac{1}{t}$.

3° Тригонометрические подстановки. К рациональному тригонометрическому виду приводятся интегралы:

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx \text{ — подстановкой } x = a \sin t,$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx \text{ — подстановкой } x = a \operatorname{tg} t.$$

4°. Из интеграла $\int \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ можно выделить алгебраическую часть по формуле

$$\int \frac{a_0x^m + \dots + a_m}{W} dx = (A_0x^{m-1} + \dots + A_{m-1}) W + A_m \int \frac{dx}{W},$$

где $W = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Коэффициенты A находятся после дифференцирования равенства и освобождения его от знаменателя сравнением коэффициентов слева и справа при одинаковых степенях x .

5°. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ берется в конечном виде в трех случаях: 1) когда p — целое число, разложением; 2) когда $\frac{m+1}{n}$ — целое число, подстановкой $a+bx^n=t^s$; 3) когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, подстановкой $ax^{-n}+b=t^s$, где s — знаменатель дроби p .

Используя подстановки 1°, найти интегралы:

$$1458. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$$

$$1459. \int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}+1}.$$

$$1460. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$$

$$1461. \int x \sqrt{a-x} dx.$$

$$1462. \int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}.$$

$$1463. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Используя подстановку 2°, найти интегралы:

$$1464. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

$$1465. \int \frac{dx}{x \sqrt{2x^2+2x+1}}.$$

$$1466. \int \frac{dx}{x \sqrt{2ax-x^2}}.$$

$$1467. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Найти интегралы, используя подстановки 3°:

$$1468. \int \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

$$1469. \int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$$

$$1470. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$1471. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}.$$

$$1472. \int \sqrt{3+2x-x^2} dx.$$

$$1473. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}.$$

Найти интегралы, применяя правило 4°:

$$1474. \int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx.$$

$$1475. \int \frac{x dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$$

$$1476. \int \sqrt{x^2+k} dx.$$

$$1477. \int \sqrt{2ax-x^2} dx.$$

Найти интегралы от дифференциальных биномов:

$$1478. \int \frac{dx}{x \sqrt[4]{1+x^3}}.$$

$$1479. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}.$$

1480. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1+x^2)^3}}.$

1481. $\int \frac{x^3 dx}{(a-bx^2)^{3/2}}.$

Найти интегралы:

1482. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{2x-1}} dx.$

1483. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$

1484. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x+1}}.$

1485. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{a-x}} dx.$

1486. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$

1487. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}.$

1488. $\int \frac{x dx}{x^2+2+2\sqrt{1+x^2}}.$ **1489.** $\int \frac{x^3 dx}{2+\sqrt{4-x^2}}.$

1490. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}.$

1491. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}.$

1492. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{4-x^2}}.$

1493. $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx.$

Указание. В примере 1493 положить $x = 2 \sin^2 t.$

1494. $\int \sqrt{4x+x^2} dx.$

1495. $\int \frac{x^2}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx.$

1496. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}.$

1497. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$

1498. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}.$

1499. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$

§ 8. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

К рациональному алгебраическому виду приводятся интегралы:

$$\int R(e^x) dx \text{ — подстановкой } e^x = t, x = \ln t, dx = \frac{dt}{t};$$

$$\int R(\lg x) dx \text{ — подстановкой } \lg x = t, x = 10^t, dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \text{ — подстановкой } \lg \frac{x}{2} = t,$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Найти интегралы:

$$1500. \int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1} dx.$$

$$1502. \int \frac{e^{3x} dx}{e^x + 2}.$$

$$1504. \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}.$$

$$1506. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

$$1501. \int \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$1503. \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$1505. \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}.$$

$$1507. \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}.$$

Указание. В примерах 1506, 1507, 1512, 1513, где под интегралом $\sin x$ и $\cos x$ содержатся только в четной степени, лучше применять подстановку

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Найти интегралы:

$$1508. \int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}.$$

$$1510. \int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} - 1}.$$

$$1512. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$1514. \int \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x}.$$

$$1516. \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx.$$

$$1509. \int \operatorname{tg}^5 x dx.$$

$$1511. \int \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

$$1513. \int \frac{dx}{1 + 3 \sin^2 x}.$$

$$1515. \int \frac{1 + \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

$$1517. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$$

§ 9. Интегрирование гиперболических функций. Гиперболические подстановки

$$1. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$2. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Интегралы от квадратов и других четных степеней $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ находятся применением формул:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}.$$

Интегралы от нечетных степеней $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ находятся тем же способом, что и интегралы от нечетных степеней $\sin x$ и $\cos x$.

Гиперболические подстановки иногда применяются при нахождении интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \text{ — подстановкой } x = a \operatorname{ch} t;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx \text{ — подстановкой } x = a \operatorname{sh} t.$$

При этом, если $x = a \operatorname{ch} t$, то $t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right|$.

если $x = a \operatorname{sh} t$, то $t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$.

Найти интегралы:

1518. 1) $\int \operatorname{sh}^2 3x dx$; 2) $\int (1 + \operatorname{sh} 2x)^2 dx$.

1519. $\int \operatorname{ch}^3 x dx$. **1520.** $\int \operatorname{th} x dx$.

1521. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1}$.

1522. $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}$.

1523. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$. **1524.** $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$.

1525. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$. **1526.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 5)^3}}$.

Найти интегралы:

1527. $\int \operatorname{sh}^3 3x dx$. **1528.** $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx$.

1529. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x dx$. **1530.** $\int \operatorname{cth}^3 x dx$.

1531. $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} dx$. **1532.** $\int \frac{1 + 2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} dx$.

1533. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$. **1534.** $\int \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x^2} dx$.

§ 10. Смешанные примеры на интегрирование

Найти интегралы:

1535. $\int \frac{\sqrt{1+x} dx}{x}$. **1536.** $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx}{1+x^2}$.

$$1537. \int \frac{dx}{x^3 + ax^2}.$$

$$1539. \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$1541. \int x \cos^2 x dx.$$

$$1543. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

$$1545. \int x \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$1547. \int \frac{\sin x dx}{b^2 + \cos^2 x}.$$

$$1549. \int \frac{ax - b}{(ax + b)^4} dx.$$

$$1551. \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

$$1553. \int \frac{x^2 dx}{(a - bx^3)^n}.$$

$$1555. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^3}.$$

$$1557. \int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4} dx.$$

$$1559. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$1561. 1) \int \frac{\cos x}{\cos 3x} dx;$$

$$1538. \int \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

$$1540. \int \frac{dx}{\frac{\sin^2 x}{a^2} + \frac{\cos^2 x}{b^2}}.$$

$$1542. \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x}.$$

$$1544. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}.$$

$$1546. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x}.$$

$$1548. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + 2 \sqrt{x}}.$$

$$1550. \int \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

$$1552. \int \frac{dx}{x \sqrt{a + b \ln x}}.$$

$$1554. \int \sqrt{1 - 2x - x^2} dx.$$

$$1556. \int \frac{\operatorname{arc tg} x dx}{x^2}.$$

$$1558. \int \frac{dx}{(2x+1)(1+\sqrt{2x+1})}.$$

$$1560. \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx.$$

$$2) \int \frac{\sin x}{\sin 3x} dx.$$

$$1562. 1) \int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}; 2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

$$1563. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$1564. \int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^3} dx.$$

$$1565. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^3 - 1}}.$$

$$1566. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$1567. \int \frac{\operatorname{arc sin} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1568. \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx.$$

$$1569. \int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx.$$

$$1570. \int \frac{\ln(\cos x) dx}{\sin^2 x}.$$

$$1571. \int \frac{dx}{e^{5x} - e^x}.$$

$$1573. \int \frac{\ln(x+1) dx}{x^2}.$$

$$1575. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$

$$1577. \int e^{-Vx} dx.$$

$$1579. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\sin 2x}$$

$$1581. \int \frac{a^x dx}{a^{2x} + 1}.$$

$$1583. \int \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}} dx.$$

$$1585. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$1587. \int \frac{x-a}{\sqrt{2ax+x^2}} dx.$$

$$1589. \int \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^2 x} dx.$$

$$1572. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^5 x}.$$

$$1574. \int \sqrt{1 - \sin x} dx.$$

$$1576. \int \frac{x dx}{x^4 - x^2 - 2}.$$

$$1578. \int \frac{\operatorname{arc tg} \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$1580. \int \frac{\ln(x^2 + 1) dx}{x^3}.$$

$$1582. \int \frac{1 - \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1584. \int \frac{x \operatorname{arc sin} x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1586. \int \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}.$$

$$1588. \int \frac{4x+1}{2x^3+x^2-x} dx.$$

$$1590. \int \frac{dx}{x^4 + 4}.$$

ГЛАВА IX

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Вычисление определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Из каждого отрезка (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

Для *интегрируемости* достаточно, чтобы на отрезке $[a, b]$ функция была *непрерывна* или же имела бы конечное число конечных разрывов.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (2)$$

и имеет место формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[\int f(x) dx \right]_a^b, \quad (3)$$

т. е. *определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений первообразной функции* (или неопределенного интеграла) при верхнем и нижнем пределах. Формула (3) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

1591. Составлением интегральных сумм и переходом к пределу найти интегралы:

$$1) \int_0^a x \, dx; \quad 2) \int_0^a x^2 \, dx; \quad 3) \int_0^a e^x \, dx; \quad 4) \int_0^\pi \sin x \, dx.$$

Указание. При решении второго и четвертого примеров воспользоваться результатами задач 1034 и 647.

1592. Вычислить «нижнюю» и «верхнюю» интегральные суммы s_5 и S_5 для интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, разбив отрезок $[1, 2]$ на пять равных частей. Сравнить с точным значением интеграла.

Указание. $s_5 = \sum_{i=1}^5 m_i \Delta x$, $S_5 = \sum_{i=1}^5 M_i \Delta x$, где m_i — наименьшее, а M_i — наибольшее значение подинтегральной функции в i -м частичном промежутке.

Вычислить:

1593. $\int_1^3 x^3 \, dx.$

1594. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx.$

1595. $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx.$

1596. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{4-x^2}}.$

1597. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}.$

1598. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} \, dx.$

1599. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

1600. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \, dx.$

1601. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$

1602. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2} \, dx.$

Указание. В примере 1601 нужно применить подстановку $x = t^2$; при этом пределы интеграла изменяются, что записывается в виде

таблицы $\frac{x}{t} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 9 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$. Аналогично в примере 1602 при интегрировании подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ нужно соответственно изменить пределы.

$$1603. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$1604. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1605. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}.$$

$$1606. \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx.$$

$$1607. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$1608. \int_0^{\sqrt{a}} x^2 \sqrt{a-x^2} dx.$$

$$1609. \int_0^1 \ln(x+1) dx.$$

$$1610. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$1611. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$1612. \int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}.$$

1613. Из формулы задачи 1407 получить, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx,$$

и вычислить:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx; \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx.$$

Вычислить:

$$1614. \int_0^a (x^2 - ax) dx.$$

$$1615. \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{dx}{x^2}.$$

$$1616. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \, dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1618. \int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}.$$

$$1620. \int_1^5 \frac{x \, dx}{\sqrt{4x+5}}.$$

$$1622. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx.$$

1624. Из формулы задачи 1407 получить, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \, dx,$$

и вычислить:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx; \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \, dx.$$

§ 2. Вычисление площадей

1°. Площадь криволинейной трапеции $A_1 ABB_1$, прилежащей к оси Ox (черт. 33):

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum y \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx. \quad (1)$$

Дифференциал переменной площади $A_1 A M M_1$ равен $dS = y \, dx$.
Если кривая задана уравнениями $x = f(t)$ и $y = \varphi(t)$, то
 $dS = \varphi(t) \cdot f'(t) \, dt$.

2°. Площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy :

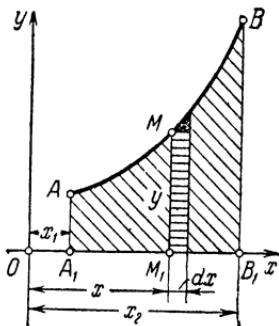
$$S = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum x \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} x \, dy. \quad (2)$$

Дифференциал переменной площади $dS = x \, dy$.

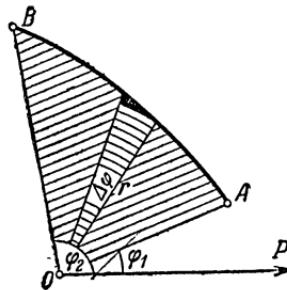
3°. Площадь сектора OAB (черт. 34) кривой, заданной в полярных координатах:

$$S = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \sum \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \quad (3)$$

Дифференциал переменной площади $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$.



Черт. 33.



Черт. 34.

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

1625. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. **1626.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1627. $y^2 = 2px$, $x = h$. **1628.** $y = 3 - 2x - x^2$,
 $y = 0$.

1629. $xy = 4$, $x = 1$, **1630.** $y = \ln x$, $x = e$,
 $x = 4$, $y = 0$. $y = 0$.

1631. $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$. **1632.** $y^2 = x^3$, $y = 8$,
 $x = 0$.

1633. $y^2 = (4-x)^3$, $x = 0$. **1634.** Петлей кривой
 $4(y^2-x^2)+x^3 = 0$.

1635. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. **1636.** $y = x^2 + 4x$,
 $y = x + 4$.

1637. $a^2y^2 = x^3(2a-x)$. **1638.** $(y-x)^2 = x^3$, $x = 1$.

1639. Петлей строфиоиды $y^2(2a-x) = x(x-a)^2$.

1640. Цепной линией $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, $x = \pm a$ и $y = 0$.

1641. Одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox .

1642. Астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

1643. Лемнискатой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

1644. Кардиоидой $r = a(1 - \cos \varphi)$.

1645. $r = 3 + \sin 2\varphi$ } между смежными наибольшим и

1646. $r = 2 - \cos 3\varphi$ } наименьшим радиусами-векторами каждой кривой.

1647. $r = a \cos 2\varphi$. **1648.** $r = a \sin 3\varphi$.

1649. $r = a(\sin \varphi + \cos \varphi)$. **1650.** $r = \frac{a}{\varphi}$, $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

1651. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, лежащей ниже полярной оси.

1652. Петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (см. черт. 83 на стр. 353) (перейти к полярным координатам).

Указание. В интеграле $\int \frac{\sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi}{(\sin^8 \varphi + \cos^3 \varphi)^3}$ положить $\operatorname{tg} \varphi = u$, разделив сначала числитель и знаменатель на $\cos^6 \varphi$.

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

1653. $y = 6x - x^2$, $y = 0$. **1654.** $y = x^3$, $y = 8$,
 $x = 0$.

1655. $y^2 = 1 - x$ и $x = -3$. **1656.** $y^3 + x^4 = x^3$.

1657. $y = x^3 + 4x + 5$, $x = 0$, $y = 0$ и минимальной ординатой.

1658. Одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и $y = 0$.

1659. $4y = x^3$ и $y^2 = 4x$. **1660.** $xy = 6$ и
 $x + y - 7 = 0$.

1661. Петлей кривой $x^3 + x^2 - y^3 = 0$.

1662. $r = 3 - \cos 2\varphi$ } между смежными наибольшим и

1663. $r = 2 + \sin 3\varphi$ } наименьшим радиусами-векторами каждой кривой.

1664. $r = a \sin 2\varphi$. **1665.** $r = a \cos 3\varphi$.

1666. $r = ae^{\varphi}$ от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = \pi$.

1667. Общей части эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (перейти к полярным координатам).

1668. $r = a(1 + \sin^2 2\varphi)$ и $r = a$.

§ 3. Объем тела вращения

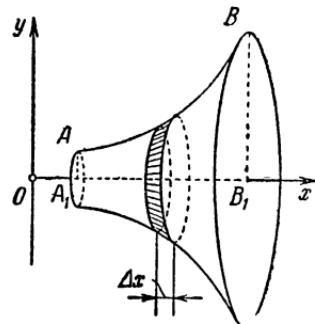
1°. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции A_1ABB_1 (черт. 35), где AB — дуга кривой $y = f(x)$, определяется формулой

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \pi y^2 \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx. \quad (1)$$

Дифференциал переменного объема $dV = \pi y^2 dx$.

2°. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy , определяется формулой

$$V = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum \pi x^2 \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 dy. \quad (2)$$



Черт. 35.

Дифференциал переменного объема $dV = \pi x^2 dy$.

Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1669. $y^2 = 2px$ и $x = h$ вокруг оси Ox .

1670. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $y = \pm b$ вокруг оси Oy .

1671. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси Ox .

1672. $y^2 = (x + 4)^3$ и $x = 0$ вокруг оси Oy .

1673. $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $x = b > a$.

Указание. $dV = \pi(b + x)^2 dy - \pi(b - x)^2 dy = 4\pi bx dy$.

1674. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x = \pm a$, $y = 0$ вокруг оси Ox .

1675. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ вокруг оси Oy .

1676. $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$ вокруг оси Ox .

1677. $y = \cos x$ и $y = -1$ вокруг прямой $y = -1$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

1678. $y = x \sqrt{-x}$, $x = -4$ и $y = 0$ вокруг оси Oy .

1679. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x = 0$, $y = 0$ (при $x > 0$) вокруг оси Ox .

1680. $y = a - \frac{x^2}{a}$ и $x + y = a$ вокруг оси Oy .

Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1681. $y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0$ вокруг оси Ox .

1682. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ вокруг оси Oy .

1683. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = \pm 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox .

1684. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy .

1685. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox .

1686. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ вокруг оси Oy .

1687. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$ вокруг оси Ox .

1688. $y = x^3$, $y = 4$ вокруг прямой $x = 2$.

Указание. $dV = \pi (2+x)^2 dy - \pi (2-x)^2 dy$.

1689. Одной арки циклоиды

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox .

1690. $(y - 3)^2 + 3x = 0$, $x = -3$ вокруг оси Ox .

§ 4. Длина дуги плоской кривой

1º. Длина дуги \overline{AB} кривой $y = f(x)$:

$$s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (1)$$

Дифференциал дуги: $ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{dx^2+dy^2}$.

2º. Длина дуги \overline{AB} кривой $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$:

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} dt. \quad (2)$$

3°. Длина дуги \overline{AB} кривой $r = f(\varphi)$:

$$s = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (3)$$

Определить длину дуги кривой:

1691. $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = \frac{4}{3}$.

1692. Всей кривой $x^3 + y^2 = a^2$.

1693. Всей кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1694. $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.

1695. Одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

1696. $x = \frac{t^6}{6}, \quad y = 2 - \frac{t^4}{4}$ между точками пересечения с осями координат.

1697. $y = \frac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью Ox .

Указание. $\int \sqrt{1+x^2} dx$ можно или найти по частям или написать по формуле задачи 1366.

1698. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ между прямыми $x = \pm a$.

1699. $y = \ln x$ от $x = \frac{3}{4}$ до $x = \frac{12}{5}$.

Указание. Интеграл $\int \frac{\sqrt{1+x^2} dx}{x}$ находится подстановкой $1+x^2=t^2$.

1700. $y = \ln(2 \cos x)$ между смежными точками пересечения с осями координат Oy и Ox .

1701. 1) $9y^2 = x(x-3)^2$ между точками пересечения с осью Ox ,

2) $e^{2y} \operatorname{th} x = 1$ от $x = 1$ до $x = 2$.

1702. 1) Кардиоиды $r = a(1 - \cos \varphi)$.

2) Первого завитка спирали $r = a\varphi$.

1703. Всей кривой $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

1704. Гибкая нить подвешена в точках A и B , находящихся на одной высоте на расстоянии $AB = 2b$, и имеет стрелу прогиба f . Считая форму нити параболой, показать, что длина нити $s \approx 2b \left(1 + \frac{12}{3} \frac{f^2}{b^2}\right)$, при достаточно малом $\frac{f}{b}$.

Указание. Применить приближенную формулу $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$ задачи 1157.

1705. $y^3 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

1706. $y = \ln(\sin x)$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

1707. $y = \ln(1-x^2)$ от $x = -\frac{1}{2}$ до $x = \frac{1}{2}$.

1708. $y^2 = 2px$, отсеченной прямой $x = \frac{p}{2}$.

1709. $x = t^2$,
 $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ } между точками пересечения с осью Ox .

§ 5. Площадь поверхности вращения

1°. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги \overarc{AB} кривой $y = f(x)$:

$$P_x = 2\pi \int_{\overarc{AB}} y \, ds, \text{ где } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

2°. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги \overarc{AB} кривой $x = \varphi(y)$:

$$P_y = 2\pi \int_{\overarc{AB}} x \, ds, \text{ где } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Определить площадь поверхности, образованной вращением кривой:

1710. $x^3 + y^3 = R^3$ вокруг оси Ox .

1711. $y = \frac{x^2}{2}$, отсеченной прямой $y = 1,5$, вокруг оси Oy .

1712. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ между $x = \pm a$ вокруг оси Ox .

1713. $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси Oy .

Указание. Приняв за независимое переменное y , получим, что искомая площадь $P = \pi \int_0^2 \sqrt{16 - 3y^2} dy$. Далее применяем подстановку $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin t$.

1714. Одной полуволны кривой $y = \sin x$ вокруг оси Ox .

1715. Одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси Ox .

1716. Петли кривой $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ вокруг оси Ox .

1717. $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $x = b > a$.

Указание. $dP = 2\pi(b + x)ds + 2\pi(b - x)ds$.

Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг Ox :

1718. Дуги кривой $y = \frac{x^3}{3}$ от $x = -2$ до $x = 2$.

1719. Дуги кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$.

1720. Всей кривой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

1721. Дуги кривой $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$ между точками пересечения с осями координат.

§ 6. Задачи из физики

1722. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 8 м и высотой 6 м. Определить также давление на нижнюю половину шлюза.

1723. Определить давление воды на вертикальную треугольную площадку, основание которой a расположено на поверхности воды, а высота равна h .

1724. Определить давление воды на вертикальный полукруг, диаметр которого $2R$ расположен на поверхности воды.

1725. Плотина имеет форму трапеции с верхним основанием 20 м, нижним 10 м и высотой 6 м. Определить давление воды на плотину.

1726. Найти моменты инерции относительно осей Ox и Oy площади прямоугольника, ограниченного линиями $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $y = b$.

Указание. Разбив прямоугольник на горизонтальные площадки, умножим каждую площадку на квадрат ее расстояния от оси Ox , т. е. на y^2 . Суммируя и перейдя к пределу, получим:

$$J_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum a \Delta y y^2 = \int_0^b ay^2 dy.$$

Аналогично $J_y = \int_0^a bx^2 dx$.

1727. Найти момент инерции относительно осей Ox и Oy площади треугольника, ограниченного линиями $x = 0$, $y = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

1728. Найти момент инерции относительно оси Oy площади, ограниченной линиями $x = 2$, $y = x^2$ и $y = 0$.

1729. Найти статические моменты относительно Ox и Oy и координаты центра тяжести треугольника, образованного линиями $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = a$.

Указание. Статические моменты $M_x = \int_0^a xy dy$, $M_y = \int_0^a xy dx$.

Координаты центра тяжести: $x_c = \frac{M_y}{S}$, $y_c = \frac{M_x}{S}$, где S —площадь фигуры.

1730. Найти центр тяжести площади, ограниченной линиями $a^2y = bx^3$, $x = a$ и $y = 0$.

1731. Найти центр тяжести полукруга $x^2 + y^2 = a^2$, отсеченного осью Ox .

1732. 1) Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из цилиндрического бассейна с радиусом основания 0,5 м, если в начальный момент уровень воды в бассейне равен 2,8 м и на 0,2 м ниже выпускающего воду отверстия в цилиндре.

2) Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара с радиусом R м.

1733. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы поднять массу m с поверхности земли на высоту h .

Указание. Сила F земного притяжения на расстоянии x от центра земли определяется из пропорции $F:mg = R^2:x^2$, где R — радиус земного шара.

1734. Котел имеет форму параболоида вращения глубиной $H = 0,5$ м и радиусом основания $R = 0,4$ м. Определить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из такого наполненного котла.

1735. В цилиндре под поршнем находится воздух объемом $V_0 = 0,1$ м³ с упругостью $p_0 = 10\ 330$ кГ/м². Определить работу изотермического сжатия воздуха до объема $V_1 = 0,03$ м³. (По закону Бойля-Мариотта $pV = p_0V_0$.)

1736. Вычислить работу растяжения на 0,001 м медной проволоки длиной 1 м с радиусом сечения 2 мм.

Указание. Сила F кГ натяжения проволоки длиной l м и площадью сечения s мм² при удлинении ее на x м определяется формулой $F = E \frac{sx}{l}$, где E — модуль упругости. Для меди можно принять $E \approx 12\ 000$ кГ/мм².

1737. За какое время вода, наполняющая цилиндрический сосуд с площадью основания $S = 420$ см² и высотой $H = 40$ см, вытечет через отверстие на дне площадью $s = 2$ см²?

Указание. Скорость истечения жидкости при уровне ее на высоте x см определяется по формуле $v = \mu \sqrt{2gx}$, где μ — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости, формы сосуда и отверстия. Мы примем здесь, как и в задаче 1738, $\mu = 0,6$.

1738. За какое время вода вытечет из конической воронки высотой $H = 40$ см, радиусом нижнего основания $r = 0,3$ см и верхнего $R = 6$ см (см. указание к задаче 1737)?

1739. Определить давление воды на вертикальную треугольную площадку с высотой h , основание которой a параллельно поверхности воды, а противоположная вершина находится на поверхности воды.

1740. Определить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

1741. Найти глубину x , на которой прямоугольный шлюз высотой h разделится горизонтально на такие две части, на которые вода производит одинаковое давление.

1742. Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью наполовину наполнена маслом (удельный вес 0,9). Определить давление масла на каждую из плоских стенок цилиндра, если радиус ее равен 2 м.

1743. Определить момент инерции относительно Ox площади четверти круга $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.

1744. Найти координаты центра тяжести площади, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$.

1745. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из ямы, имеющей форму конуса (с вершиной на дне), высота которого $H = 2$ м, а радиус основания $R = 0,3$ м.

1746. Определить работу адиабатического сжатия воздуха объемом $V_0 = 0,1$ м³ и с упругостью $p_0 = 10,330$ кГ/м² до объема $V_1 = 0,03$ м³. (Адиабатическое сжатие происходит по закону Пуассона: $pV^k = p_0V_0^k$, где $k \approx 1,4$.)

1747. За какое время вода, наполняющая чашу формы полушара с радиусом 40 см, вытечет из отверстия на дне площадью 2 см²? (См. указание к задаче 1737; положим коэффициент вязкости $\mu = 0,8$.)

§ 7. Несобственные интегралы

1°. Определения.

I. Интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ называется $\lim\limits_{b \rightarrow +\infty} \int\limits_a^b f(x) dx$, если этот предел существует и конечен. Аналогично определяются интегралы $\int\limits_b^{-\infty} f(x) dx$ и $\int\limits_{-\infty}^a f(x) dx$.

II. Если $f(x)$ непрерывна для всех значений x отрезка $[a, b]$, кроме точки c , в которой $f(x)$ имеет разрыв II рода, то интегралом от $f(x)$ в пределах от a до b называется сумма

$$\lim\limits_{\epsilon \rightarrow 0} \int\limits_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim\limits_{\delta \rightarrow 0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

если эти пределы существуют и конечны.

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных (неограниченных) функций называются несобственными.

Если приведенные выше пределы конечны, то говорят, что несобственные интегралы *сходятся*, если нет, — то *расходятся*.

2°. Сходимость несобственного интеграла часто устанавливается методом сравнения: если при $x > a$ $|f(x)| \leq \varphi(x)$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Аналогичный признак

сходимости можно указать и для интеграла от разрывной функции.

Вычислить интегралы:

$$1748. \quad 1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}; \quad 2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad 4) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}.$$

$$1749. \quad 1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx; \quad 2) \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2};$$

$$4) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}; \quad 5) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}; \quad 6) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$1750. \quad 1) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}; \quad 2) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arc tg} x dx}{x^2}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$1751. \quad 1) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}; \quad 2) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad 3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

1752. Исследовать сходимость интегралов:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}; \quad 2) \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x};$$

$$4) \int_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}; \quad 5) \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}; \quad 6) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$1753. \quad 1) \int_0^1 \frac{dx}{x^n}; \quad 2) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \text{ (при } b > a).$$

Указание. Рассмотреть три случая: $n = 1 - \alpha < 1$, $n = 1$ и $n = 1 + \alpha > 1$.

1754. Вычислить площадь, заключенную между локоном $y = \frac{1}{1+x^3}$ и асимптотой этой кривой.

1755. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее асимптотой (при $x > 0$).

1756. Вычислить площадь, заключенную между циссоидой $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ и ее асимптотой.

Указание. Положив $x = 2a \sin^2 t$, перейти к параметрическим уравнениям.

1757. Найти объем тела, образованного вращением циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ вокруг ее асимптоты (см. задачу 1756).

1758. Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox бесконечной дуги кривой $y = e^{-x}$ при положительных x .

1759. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox бесконечной ветви кривой $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ при $x \geq 1$.

1760. Показать, что

$$\left. \begin{aligned} 1) \int_0^\infty e^{-x} x^m dx &= m!; \\ 2) \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2m+1} dx &= \frac{m!}{2} \end{aligned} \right\} \text{при } m \text{ целом и положительном *).}$$

1761. Вычислить интегралы:

$$1) \int_2^\infty \frac{dx}{x^2}; \quad 2) \int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx; \quad 3) \int_1^\infty \frac{\ln x \, dx}{x^2}; \quad 4) \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}.$$

Указание. В примере 3) при нахождении $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ применить правило Лопитала.

*) Функция $\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx = \Gamma(t)$ называется гамма-функцией от t .

При целом $t > 1$, как это следует из задачи 1760, пример 1), $\Gamma(t) = (t-1)!$

Полагая здесь $t = 1$, получим условно $0! = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} x^0 dx = 1$.

Поэтому принято считать $0! = 1$.

1762. 1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^3}}$; 3) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}$.

1763. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = e^{-2x}$ и осями координат (при $x > 0$).

1764. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy площади бесконечной длины, заключенной между линиями:

$$xy = 4, \quad y = 1, \quad x = 0.$$

1765. Определить объем тела, образованного вращением кривой $y = xe^{-\frac{x}{2}}$ (при $x > 0$) вокруг ее асимптоты.

§ 8. Среднее значение функции

Теорема о среднем. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, то между пределами интеграла $\int_a^b f(x) dx$ найдется такое $x = c$, при котором

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c). \quad (1)$$

Значение функции

$$y_m = f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \quad (2)$$

называется *средним* значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

1766. Определить среднее значение функции:

1) $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$;

2) $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$;

3) $y = \ln x$ на отрезке $[1, e]$;

4) $y = x^2$ на отрезке $[a, b]$;

5) $y = \frac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Указать на чертеже среднее значение функции в каждом примере.

§ 9. Формула трапеций и формула Симпсона

1°. Ф о р м у л а т р а п е ц и и:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right], \quad (I)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, а $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ — равноотстоящие ординаты кривой $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Погрешность формулы (I):

$$\epsilon(h) \leq \frac{(b-a)h^2}{12} |y''|_{\max}, \quad (1)$$

2°. Параболическая формула Симпсона для двух полос:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (II)$$

где $h = \frac{b-a}{2}$.

3°. Ф о р м у л а С импсона для $2n$ полос:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right], \quad (III)$$

где $h = \frac{b-a}{2n}$. Погрешность формул II и III:

$$\epsilon(h) \leq \frac{(b-a)h^4}{180} |y^{IV}|_{\max}, \quad (2)$$

т. е. формула (II) точно верна для парабол второй и третьей степеней:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

1767. Вычислить по формуле трапеций $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ и оценить погрешность по формуле (1).

1768. По формуле Симпсона (II) вычислить интеграл $\int_1^5 x^3 dx$ и $\int_0^2 x^4 dx$, оценить погрешность по формуле (2) и результаты сравнить с точным значением интеграла.

1769. По формуле Симпсона III вычислить интегралы:

$$1) \int_0^3 \sqrt{1+x^3} dx \quad (2n=4); \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3-\cos 2x} dx \quad (2n=6);$$

$$3) \int_0^4 \frac{dx}{1+x^4} \quad (2n=4), \quad \text{и оценить погрешность, полагая}$$

в формуле (2) приближенно $h^4 |y^{IV}|_{\max} \approx |\Delta^4 y|_{\max}$.

1770. Найти по формуле Симпсона (II) объем бочки высотой 50 см с диаметром каждого дна 20 см и с диаметром среднего сечения 30 см.

1771. Вывести формулы объема пирамиды и шара из формулы Симпсона (II).

1772. Вычислить $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ по общей формуле Симпсона (III) (при $2n=10$) и оценить погрешность по формуле (2).

1773. Найти длину дуги эллипса $x = 5 \cos t$, $y = 3 \sin t$, применив к интегралу, определяющему первую четверть всей дуги, формулу Симпсона (II).

1774. Вычислить приближенно $\pi = 6 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, применяя к интегралу формулу Симпсона (II).

1775. Вычислить $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по общей формуле Симпсона III (при $2n=10$) и оценить погрешность, полагая в формуле (2) приближенно $h^4 |y^{IV}|_{\max} \approx |\Delta^4 y|_{\max}$.

1776. Рассматривая площадь части круга, ограниченного кривой $x^2 + y^2 = 32$, показать, что $\int_0^4 \sqrt{32 - x^2} dx = 4\pi + 8$, и найти отсюда π , вычисля интеграл по формуле Симпсона (при $2n = 4$).

1777. Вычислить по формуле Симпсона (III) длину дуги полуволны синусоиды $y = \sin x$, разбив отрезок $[0, \pi]$ на шесть равных частей.

ГЛАВА X

КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

§ 1. Кривизна плоской кривой. Центр и радиус кривизны. Эволюта

1°. Кривизна:

$$k = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

2°. Радиус кривизны:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}. \quad (2)$$

3°. Координаты центра кривизны:

$$\left. \begin{aligned} X &= x - \frac{1+y'^2}{y''} y' = x + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}} \dot{y}, \\ Y &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Геометрическое место центров кривизны $C(X, Y)$ называется **еволютой**. Уравнения (3) и будут *параметрическими уравнениями эволюты*.

4°. Радиус кривизны кривой $r = f(\varphi)$, где r и φ — полярные координаты:

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}. \quad (4)$$

Определить радиус кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой в ее вершине:

1778. $y = 4x - x^2$.

1779. $y = e^{-x^2}$.

1780. $x^2 + 4y^2 = 4$.

1781. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

1782. $y = xe^{-x}$.

Определить координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

1783. $xy = 4$ в точке $x = 2$.

1784. $y = \ln x$ в точке пересечения с Ox .

1785. $y = -\frac{x^3 + 1}{3}$ в точке пересечения с Ox .

Написать уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

1786. $y = 1 - \frac{x^2}{2}$.

1787. $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

1788. $x^2 - y^2 = a^2$ (или $x = a \cosh t$ и $y = a \sinh t$).

1789. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$

1790. Найти максимальную кривизну кривой $y = e^x$.

1791. Доказать, что радиус кривизны цепной линии $y = a \cosh \frac{x}{a}$ в любой точке равен $\frac{y^2}{a}$ и равен отрезку нормали между кривой и осью Ox .

1792. Определить радиус кривизны в произвольной точке кривой: 1) $r = a(1 - \cos \varphi)$; 2) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; 3) $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$.

Определить радиус кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой в ее вершине:

1793. $y = \frac{1}{1+x^2}$.

1794. $x^2 - y^2 = 4$.

1795. $y = \sin x$.

1796. $2y = x^2 + 4x$.

Определить координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

1797. $y = e^x$ в точке пересечения ее с Oy .

1798. $y = \frac{x^3}{3}$ в точке $(-1; -\frac{1}{3})$.

1799. $y^2 = x^3$ в точке $(1; 1)$.

1800. $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

Написать уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

1801. $y^2 = 2(x+1)$. **1802.** $x = t^2$, $y = \frac{t^3}{3}$.

1803. $xy = 4$. **1804.** $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

1805. Показать, что в любой точке астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ радиус кривизны равен $3\sqrt[3]{a|xy|}$.

§ 2. Длина дуги кривой в пространстве

Дифференциал дуги: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, или

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Длина дуги: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$.

Найти длину дуги кривой:

1806. $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ от $t = 0$ до $t = 3$.

1807. $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$ от $t = 0$ до произвольного t .

1808. $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$ от $x = 0$ до $x = 3$.

Найти длину дуги кривой:

1809. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$ от $t = 0$ до $t = \pi$.

1810. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ от $t = 0$ до $t = 1$.

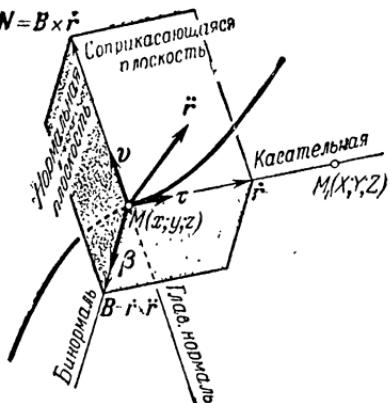
1811. $y = \frac{1}{2} \ln x$, $z = \frac{x^2}{2}$ от $x = 1$ до $x = 2$.

§ 3. Производная вектор-функции по скаляру и ее механическое и геометрическое значение.

Естественный трехгранник кривой

Радиус-вектор $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ точки кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ есть вектор-функция скаляра t . Производная $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ есть тангенциальный вектор и имеет модуль $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} =$

$N = B \times \dot{\mathbf{r}}$



Черт. 36.

В пересечении плоскостей имеем три прямые: *касательную*, *бинормаль* и *главную нормаль*, определяемые векторами:

- 1) $\dot{\mathbf{r}}$ — тангенциальный,
- 2) $B = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ — бинормальный,
- 3) $N = B \times \dot{\mathbf{r}}$ — главный нормальный.

Единичные векторы этих направлений обозначим τ , β , ν ; они связаны зависимостью $\frac{d\tau}{ds} = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| \nu$ и $\beta = \tau \times \nu$.

Пусть $M_1(X; Y; Z)$ — точка касательной (черт. 36). Тогда $\overline{MM_1} \parallel \dot{\mathbf{r}}$ и из условия параллельности векторов получим уравнения касательной

$$\frac{X-x}{\dot{x}} = \frac{Y-y}{\dot{y}} = \frac{Z-z}{\dot{z}}. \quad (\text{I})$$

Пусть $M_2(X; Y; Z)$ — точка на нормальной плоскости.

Тогда $\overline{MM_2} \perp \dot{\mathbf{r}}$ и из условия перпендикулярности векторов получим уравнение нормальной плоскости:

$$\dot{x}(X-x) + \dot{y}(Y-y) + \dot{z}(Z-z) = 0. \quad (\text{II})$$

Следовательно, $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$. Поэтому, если t — время, а кривая — траектория движения, то $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ есть вектор скорости, $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{w}$ — вектор ускорения.

Через точку $M(x; y; z)$ кривой (черт. 36) проведем три плоскости:

- 1) перпендикулярную к $\dot{\mathbf{r}}$; она называется *нормальной*;
- 2) содержащую $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$; она называется *соприкасающейся*;
- 3) перпендикулярную к первым двум.

Они образуют *естественный трехгранник* (триэдр) кривой.

Уравнения бинормали и главной нормали получим, заменив в уравнениях (I) $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ соответственно через B_x, B_y, B_z или через N_x, N_y, N_z . Уравнение соприкасающейся плоскости получим, заменив в уравнении (II) $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ через B_x, B_y, B_z .

1812. Радиус-вектор движущейся точки в момент t задан уравнением $r = 4ti - 3tj$. Определить траекторию, скорость и ускорение движения.

1813. Уравнение движения $r = 3ti + (4t - t^2)j$. Определить траекторию и скорость движения. Построить траекторию и векторы скорости в моменты $t = 0, 1, 2$ и 3 сек.

1814. В задаче 1813 определить ускорение w движения и его тангенциальную $w_t = \frac{dv}{dt}$ и нормальную $w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2}$, составляющие в любой момент t и при $t = 0$.

1815. Уравнение движения $r = a \cos t \cdot i + b \sin t \cdot j$. Определить траекторию, скорость и ускорение движения и построить векторы скорости и ускорения в точках $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

В задачах 1816—1818 написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости кривой:

1816. $x = t, y = t^2, z = t^3$ в любой точке и при $t = 1$.

1817. $y = x^2, z^2 = x$ в любой точке ($x \geq 0$) и при $x = 4$.

1818. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ в точке (1; 3; 4).

Указание. Взяв дифференциал от левой и правой частей каждого уравнения, найти затем отношения $dx : dy : dz$.

1819. Найти тангенциальный \dot{r} , бинormalный B и главный нормальный N векторы кривой $x = 1 - \sin t, y = \cos t; z = t$ в точке $t = 0$. Найти также τ, β и γ в той же точке.

1820. Написать уравнения главной нормали, бинормали и соприкасающейся плоскости к кривой $x = t, y = t^3, z = t^3$ в точке $t = 1$.

1821. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой $x = e^t, y = e^{-t}, z = t$ в точке $t = 0$.

1822. Показать, что уравнения $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ определяют коническую винтовую линию, и написать уравнения главной нормали, бинормали и касательной к ней в начале координат.

1823. Написать уравнения касательной к винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ в любой точке и при $t = \frac{\pi}{2}$. Показать, что винтовая линия пересекает образующие цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ под одинаковым углом $\gamma = \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1824. Найти углы с осями координат тангенциального вектора кривой $x^2 = 2az$ и $y^2 = 2bz$ в точке $z = \sqrt{ab}$.

1825. Плоскость $y = 0$, на которой дана кривая $2z = x^2$, $y = 0$, накручивается на цилиндр $x^2 + y^2 = 2y$. Написать параметрические уравнения образованного кривой винта и определить бинормальный вектор кривой в любой точке и в точке $t = \frac{\pi}{2}$, где t — угол поворота плоскости.

1826. Радиус-вектор движущейся точки в момент t задан уравнением $\mathbf{r} = a(t - \sin t) \mathbf{i} + a(1 - \cos t) \mathbf{j}$. Определить и построить векторы скорости и ускорения при $t = \frac{\pi}{2}$ и $t = \pi$.

В задачах 1827—1829 написать уравнения касательной к кривой:

1827. $y = x$, $z = 2x^2$ в точке $x = 2$.

1828. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ в точке $(1; 2; 3)$ (см. задачу 1818).

1829. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ в точке $t = 1$.

1830. $\mathbf{r} = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + t\sqrt{2} \mathbf{k}$. Найти углы с осями координат бинормального вектора \mathbf{b} в точке $t = 0$.

1831. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой $y = x^3$, $z = y^2$ в точке $x = 1$.

1832. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$ в точке $t = \pi$.

§ 4. Кривизна и кручение пространственной кривой

Кривизна $\frac{1}{R}$ есть предел отношения угла φ поворота касательной к длине дуги Δs , когда $\Delta s \rightarrow 0$. Кручение $\frac{1}{p}$ есть предел отношения угла θ поворота бинормали к Δs , когда $\Delta s \rightarrow 0$. Так как

$\varphi \approx |\Delta\tau|$ и $\theta \approx \pm |\Delta\beta|$, то $\frac{1}{R}$ и $\frac{1}{\rho}$ численно оказываются модулями векторов:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R} \mathbf{v}, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v}. \quad (1)$$

Если кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то

$$\frac{1}{R} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}. \quad (2)$$

1833. Продифференцировав равенство $\mathbf{v} = v\mathbf{v}$ по t , с помощью первой формулы (1) получить разложение ускорения \mathbf{w} на тангенциальное и нормальное:

$$\mathbf{w} = \dot{v}\mathbf{v} + \frac{v^2}{R} \mathbf{v}.$$

1834. Точка движется по параболе $x = t$, $y = t - t^2$, где t — время движения. Определить кривизну $\frac{1}{R}$ траектории и тангенциальное и нормальное ускорения в момент t и при $t = 0$.

1835. Точка движется по эллипсу $x = 4 \cos t$, $y = 3 \sin t$, где t — время движения. Определить кривизну $\frac{1}{R}$ траектории и тангенциальное и нормальное ускорения в момент $t = \frac{\pi}{4}$.

1836. Определить кривизну $\frac{1}{R}$ траектории и тангенциальное и нормальное ускорения движения, если уравнение движения $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$, в любой момент t и при $t = 1$.

Определить кривизну $\frac{1}{R}$ и кручение $\frac{1}{\rho}$ кривой:

1837. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ в любой точке и при $t = 0$.

1838. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ в любой точке и при $t = 0$.

1839. $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{3}$ в любой точке и при $x = 1$.

1840. Показать, что на правом винте ($x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$) кручение положительно, а на левом ($x = a \cos t$, $y = -a \sin t$, $z = bt$) — отрицательно.

Определить кривизну $\frac{1}{R}$ и кручение $\frac{1}{\rho}$ кривой:

1841. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ в любой точке и при $t = 1$.

1842. $x = \frac{y^2}{2}$, $z = x^2$ в любой точке и при $y = 1$.

1843. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = e^t$ в точке $t = 0$.

ГЛАВА XI

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, ПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Функции двух переменных и их геометрическое изображение

1°. Определение. Переменная z называется однозначной функцией переменных x и y , если каждой паре значений x и y в некоторой области их изменения поставлено в соответствие одно значение z . Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде

$$z = F(x, y). \quad (1)$$

2°. Геометрическое изображение. Уравнение (1) геометрически определяет некоторую поверхность. Пара значений x и y определяет на плоскости xOy точку $P(x; y)$, а $z = F(x, y)$ — аппликату соответствующей точки $M(x; y; z)$ на поверхности. Поэтому говорят, что z есть функция точки $P(x; y)$, и пишут $z = F(P)$.

3°. Предел функции. $\lim_{P \rightarrow P_0} F(P) = A$, если разность $F(P) - A$ есть бесконечно малая, когда $\rho = P_0P \rightarrow 0$ при любом способе приближения P к P_0 (например, по любой линии).

4°. Непрерывность функции. Функция $F(x, y)$ называется непрерывной в точке P_0 , если $\lim_{P \rightarrow P_0} F(P) = F(P_0)$. Иначе, функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой точке $(x; y)$, если

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} F(x + \Delta x, y + \Delta y) = F(x, y).$$

1844. Указать области изменений x и y , для которых следующие функции имеют вещественные значения:

$$1) z = x^2 + y^2; \quad 2) az = a^2 - x^2 - y^2; \quad 3) z = \frac{4}{x^2 + y^2};$$

$$4) z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; \quad 5) z = \sqrt{xy}; \quad 6) z = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2 - y^2}};$$

$$7) z = \frac{xy}{y - x},$$

и построить геометрические изображения функций по сечениям поверхностей плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = h$.

1845. Дан периметр $2p$ треугольника. Определить площадь S треугольника как функцию двух его сторон x и y . Определить и построить область возможных значений x и y .

1846. $F(x, y) = \frac{x - 2y}{2x - y}$; вычислить $F(3, 1)$, $F(1, 3)$, $F(1, 2)$, $F(2, 1)$, $F(a, a)$, $F(a, -a)$.

1847. $F(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4 - 2xy}$; доказать, что $F(tx, ty) = t^2 F(x, y)$.

1848. $z = x^3 - xy + y^2$; определить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и Δz . Вычислить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz , если x изменяется от 2 до 2,1, а y изменяется от 2 до 1,9.

1849. Показать, что уравнение $x^3 - y^3 - z^3 = 0$ определяет z как бесчисленное множество однозначных функций x и y , из которых две непрерывны. Указать область определения всех этих функций и построить геометрическое изображение положительной непрерывной функции. Привести пример однозначной, но разрывной функции $z = F(x, y)$, определяемой тем же уравнением $x^3 - y^3 = z^3$.

1850. Построить линии уровней (при $z = 0, 1, 2$ и т. д.) функций:

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}; \quad 2) \quad z = x^2 - y; \\ 3) \quad z &= x^3 - y^3; \quad 4) \quad z = xy. \end{aligned}$$

1851. Показать, что при $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ выражение $u = \frac{y}{x-y}$ может стремиться к любому пределу. Привести примеры такого приближения точки $(x; y)$ к точке $(0; 0)$, при котором $\lim u = 3$, $\lim u = 2$, $\lim u = 1$, $\lim u = 0$, $\lim u = -2$.

Указание. Рассмотреть изменение x и y вдоль прямых $y = kx$.

1852. Показать, что:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy} = -\frac{1}{4}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1;$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x} = 0$$

при любом способе приближения точки $(x; y)$ к точке $(0; 0)$.

Указание. Положить $xy = a$.

1853. Изобразить геометрически функцию:

$$z = F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } xy > 0 \\ 0 & \text{при } xy = 0 \\ -1 & \text{при } xy < 0 \end{cases}$$

и указать линии ее разрыва.

1854. Указать области определения функций:

- 1) $z = x + y$;
- 2) $z = \frac{4}{x+y}$;
- 3) $\frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$;
- 4) $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$;
- 5) $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$;
- 6) $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

и построить геометрические изображения этих функций.

1855. $F(x, y) = \frac{x}{x-y}$; показать, что

$$F(a, b) + F(b, a) = 1.$$

1856. Показать, что уравнение $z^2 = \frac{4}{4 - x^2 - y^2}$ определяет z как бесчисленное множество однозначных функций x и y , из которых две непрерывны. Указать область определения всех этих функций и построить геометрическое изображение функции, положительной в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и отрицательной вне ее.

1857. Построить геометрическое изображение однозначной функции $z = F(x, y)$, определяемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, положительной в области $x^2 + y^2 \leqslant \frac{a^2}{4}$ и отрицательной вне ее. Указать линию ее разрыва.

§ 2. Частные производные 1-го порядка

Производная от функции $z = F(x, y)$ по x , найденная в предположении, что y остается постоянным, называется *частной производной* от z по x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $F'_x(x, y)$. Аналогично определяется и обозначается *частная производная* от z по y : $\frac{\partial z}{\partial y} = F'_y(x, y)$.

Найти частные производные от функций:

1858. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. **1859.** $z = \ln(x^2 + y^2)$.

1860. $z = \frac{y}{x}$. **1861.** $z = \arctg \frac{y}{x}$.

1862. $z = \frac{xy}{x-y}$. **1863.** $u = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$.

1864. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$.

1865. $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$. **1866.** $u = xe^{-y/x}$.

1867. $u = \frac{2x-t}{x+2t}$. **1868.** $\alpha = \arcsin(t\sqrt{x})$.

1869. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; доказать, что

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

1870. $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$; доказать, что $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.

1871. $u = e^{\frac{x}{t}}$; доказать, что $2x \frac{\partial u}{\partial x} + t \frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

1872. $u = x^y$; доказать, что $\frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

1873. Ниже, в задаче 1898, будет доказана следующая теорема Эйлера:

«Если $z = F(x, y)$ — однородная функция n -го измерения, то $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$ ».

Проверить эту теорему Эйлера для функций:

1) $z = x^3 + xy^2 - 2y^3$; 2) $z = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$;

3) $z = \frac{1}{x^3 - y^3}$; 4) $z = e^{\frac{x}{y}}$.

Найти частные производные от функций:

1874. $z = \cos(ax - by)$. **1875.** $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

1876. $z = \frac{x}{3y - 2x}$. **1877.** $u = \ln \sin(x - 2t)$.

1878. $u = \sin^2(x+y) - \sin^2 x - \sin^2 y$.

1879. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; доказать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

1880. $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$; доказать, что $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$.

1881. $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; доказать, что $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$.

1882. $z = e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)$; доказать, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2} e^x \sin^2 \frac{y}{2}.$$

1883. Проверить теорему Эйлера об однородных функциях (см. задачу 1873) для функций:

$$1) \ z = \frac{x^3}{x-y}; \quad 2) \ z = \frac{1}{x^2+y^2}; \quad 3) \ z = \operatorname{arc tg} \frac{y}{x}.$$

§ 3. Полный дифференциал 1-го порядка

Если функция $z = F(x, y)$ имеет в точке (x, y) непрерывные частные производные, то ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon \cdot \rho, \quad (1)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\rho = \sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2} \rightarrow 0$. Тогда выражение $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ есть главная часть полного приращения Δz ; она называется *полным дифференциалом* функции и обозначается dz :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (2)$$

Полагая в формуле (2) z равным: 1) x ; 2) y , найдем: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Поэтому

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (3)$$

Из (1) следует, что

$$\Delta z \approx dz, \quad (4)$$

т. е. при достаточно малых Δx и Δy полное приращение функции приближенно равно ее полному дифференциальному (гл. V, § 7).

Функция $F(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y) , если она имеет в этой точке полный дифференциал.

1884. Найти полные дифференциалы функций:

$$1) z = x^2y; \quad 2) z = \frac{xy}{x-y}; \quad 3) u = e^{\frac{y}{t}}; \quad 4) z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

1885. Найти значение полного дифференциала функции:

$$1) z = \frac{y}{x} \text{ при } x=2, y=1, dx=0,1, dy=0,2; \\ 2) u = e^{xy} \text{ при } x=1, y=2, dx=-0,1, dy=0,1.$$

1886. Вычислить dz и Δz для функции $z = xy$ при $x=5, y=4, \Delta x=0,1, \Delta y=-0,2$.

1887. Подсчитать приближенно изменение функции $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, когда x изменяется от 2 до 2,1, а y — от 3 до 2,5.

1888. При деформации цилиндра его радиус R увеличился с 2 до 2,05 дм, а высота H уменьшилась с 10 до 9,8 дм. Найти приближенно изменение объема V по формуле $\Delta V \approx dV$.

1889. Катеты прямоугольного треугольника, измеренные с точностью до 0,1 см, оказались равными 7,5 и 18 см. Определить абсолютную погрешность при вычислении гипotenузы.

1890. Найти полные дифференциалы функций:

$$1) z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}; \quad 2) s = x \ln t; \quad 3) u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

1891. Найти значение dz и Δz для функции $z = \ln(x^2+y^2)$, когда x изменяется от 2 до 2,1, а y — от 1 до 0,9.

1892. Подсчитать приближенно изменение функции $z = \arcsin \frac{y}{x}$, когда x изменяется от 5 до 4,5, а y — от 3 до 3,3.

1893. При деформации конуса его радиус R увеличился с 30 до 30,1 см, а высота H уменьшилась с 60 до 59,5 см. Найти приближенно изменение объема по формуле $\Delta V \approx dV$.

§ 4. Производные сложных функций

1°. Если $z = F(x, y)$, $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, то z называется *сложной функцией* от t . При этом

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \quad (1)$$

если функции F , f и φ дифференцируемы.

2°. Если $z = F(x, y)$, где $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, и если функции F , f и φ дифференцируемы, то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2)$$

1894. Найти по формуле (1) $\frac{dz}{dt}$ из уравнений:

$$1) z = x^2 + xy + y^2, \quad x = t^2, \quad y = t;$$

$$2) z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t.$$

Проверить предварительной подстановкой значений x и y в выражение для функции z .

1895. $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$; найти $\frac{dz}{dt}$.

1896. $z = u^v$, где u и v — функции от x . Написать $\frac{dz}{dx}$.

1897. $z = xe^y$, где y — функция x . Написать $\frac{dz}{dx}$.

1898. Функция $z = F(x, y)$ называется *однородной*, если $F(xt, yt) = t^n \cdot F(x, y)$. Дифференцируя обе части этого равенства по t и полагая в результате $t = 1$, доказать теорему Эйлера об однородных функциях: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

1899. $z = \frac{x^2}{y}$, где $x = u - 2v$, $y = v + 2u$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

1900. $z = F(x, y)$. Выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если:

$$1) u = mx + ny, \quad v = px + qy;$$

$$2) u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$$

1901. $u = F(x, y)$; $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Выразить $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ через $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ и показать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

1902. $z = y + F(u)$, где $u = x^2 - y^2$. Доказать, что $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x$ при любой дифференцируемой функции $F(u)$.

1903. Найти $\frac{dz}{dt}$ из уравнений:

$$1) z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t;$$

$$2) z = \operatorname{arc tg} \frac{y}{x}, \quad x = e^{2t} + 1, \quad y = e^{2t} - 1.$$

1904. $z = xy + xF(u)$, где $u = \frac{y}{x}$. Доказать, что

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

1905. $z = y\varphi(u)$, где $u = x^2 - y^2$. Доказать, что

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

1906. $z = F(x, y)$. Выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если:

$$1) u = x + 2y, \quad v = x - y;$$

$$2) u = \sqrt{xy}, \quad v = x + y.$$

§ 5. Производные неявных функций

1°. Уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее решение (x_0, y_0) , определяет в окрестности x_0 переменную y как непрерывную функцию x при условии, что производная $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) .

Если, сверх того, в окрестности точки (x_0, y_0) существует и непрерывная производная $\frac{\partial F}{\partial x}$, то неявная функция имеет производную $\frac{dy}{dx}$, определяемую формулой

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (1)$$

2°. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ при аналогичных условиях определяет z как неявную функцию x и y , имеющую частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (2)$$

Найти $\frac{dy}{dx}$ из уравнений:

1907. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0.$

1908. 1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; 2) $xe^{2y} - ye^{2x} = 0.$

1909. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$

Найти угловой коэффициент касательной к кривой:

1910. $x^2 + y^2 = 10y$ в точке пересечения ее с прямой $x = 3$.

1911. $x^3 + y^3 - 2axy = 0$ в точке $x = y = a$.

1912. Найти точки, в которых касательная к кривой $x^3 + y^3 + 2x - 2y = 2$ параллельна: 1) Ox ; 2) Oy .

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из уравнений:

1913. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0. \quad \text{1914. } z^2 = xy.$

1915. $\cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz).$

1916. $xyz = a^3$; доказать, что $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2z$.

1917. Показать, что дифференциальному уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ удовлетворяет неявная функция z , определяемая уравнением (конических поверхностей) $\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Найти $\frac{dy}{dx}$ из уравнений:

1918. $x^2 - 4y^2 = 4. \quad \text{1919. } xy + \ln y + \ln x = 0.$

1920. $y + x = e^x. \quad \text{1921. } 2 \cos(x - 2y) = 2y - x.$

1922. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y^3 - xy = 4$ в точках пересечения ее с прямой $x = 3$.

1923. $x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = a^2$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1924. $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

1925. Показать, что дифференциальному уравнению $m \frac{\partial z}{\partial x} + n \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ удовлетворяет неявная функция z , определяемая уравнением (цилиндрических поверхностей):

$$x - mz = \varphi(y - nz).$$

§ 6. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков

Пусть дана функция $z = F(x, y)$, имеющая частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$. Частные производные от этих производных называются частными производными 2-го порядка. Они обозначаются:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial x})}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; & \frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial x})}{\partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial y})}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; & \frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial y})}{\partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные 3-го порядка и других высших порядков.

Смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны, если они непрерывны:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2} \text{ и т. д.}$$

Получим следующую таблицу производных высших порядков:

$$\begin{array}{l} \text{2-го порядка } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{3-го порядка } \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}; \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}; \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Полные дифференциалы высших порядков определяются так: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$. Символически это равенство можно записать так: $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$. Аналогично $d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z$ и т. д.

1926. $z = x^3 + x^2y + y^3$. Найти частные производные 3-го порядка.

1927. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функций:

$$1) z = \sin(ax - by); \quad 2) z = \frac{x^2}{y^2}; \quad 3) z = \ln(x - 2y).$$

1928. $u = x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4$. Найти частные производные 4-го порядка.

1929. $u = \frac{y}{x}$. Найти частные производные 3-го порядка.

1930. $s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$; проверить, что $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$.

1931. $z = \operatorname{arc tg} \frac{y}{x}$. Найти производные 2-го порядка.

1932. $z = \sin\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$; доказать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 z.$$

1933. $u = \operatorname{arc tg}(2x - t)$; доказать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$.

1934. $s = \sqrt[3]{ax + bt}$; доказать, что

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 s = -\frac{2s}{9}.$$

1935. Показать, что функция $u = xe^{-\frac{y}{x}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

1936. Доказать, что если $z = F(x, y)$ — однородная функция n -го измерения, то

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)z,$$

или символически

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = n(n-1)z.$$

Указание. Равенство $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$ (см. задачу 1898) про-
дифференцировать: 1) по x ; 2) по y и результаты, умноженные соот-
ветственно на x и на y , сложить почленно.

1937. Проверить равенство $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n z = n(n-1)z$ для однородных функций: 1) $z = x^2 + xy + y^2$; 2) $z = \frac{y}{x^2}$; 3) $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$; 4) $z = \ln\left(\frac{y}{x} - 1\right)$.

1938. Найти d^3u , если 1) $u = \frac{y^2}{x^2}$; 2) $u = x \ln \frac{y}{x}$.

1939. $z = \cos(mx + ny)$. Доказать, что

$$d^2z = -z(m dx + n dy)^2.$$

1940. $z = \ln(ax + by)$. Доказать, что: 1) $d^3z = 2dz^3$; 2) $d^n z = (-1)^{n-1}(n-1)! dz^n$.

1941. Доказать, что если $z = F(u, v)$, где $u = mx + ny$ и $v = px + qy$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(m \frac{\partial}{\partial u} + p \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(m \frac{\partial}{\partial u} + p \frac{\partial}{\partial v}\right) \left(n \frac{\partial}{\partial u} + q \frac{\partial}{\partial v}\right) z$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(n \frac{\partial}{\partial u} + q \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$.

1942. Преобразовать выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ к новым переменным $u = 3x + y$ и $v = x + y$ (см. задачу 1941).

1943. Преобразовать выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ к новым переменным $u = 2x + y$ и $v = y$ (см. задачу 1941).

1944. Доказать, что если $z = F(u, v)$, где u и v — функции от x и y , то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z + u''_{xx} \frac{\partial z}{\partial u} + v''_{xx} \frac{\partial z}{\partial v}$. Определить аналогично $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1945. Преобразовать выражение $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ к новым переменным $u = xy$ и $v = \frac{y}{x}$ (см. задачу 1944).

1946. Преобразовать выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$ к новым переменным $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$ (см. задачу 1944).

1947. $z = \frac{x^3}{1-2y}$. Найти частные производные 2-го порядка.

1948. $u = \frac{x}{\sqrt[3]{t}}$. Найти частные производные 3-го порядка.

1949. $z = \frac{xy}{x-y}$. Доказать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}.$$

1950. $s = \ln(ax - bt)$; доказать, что $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}\right)^3 s = 2$.

1951. $z = 2 \cos^2\left(x - \frac{t}{2}\right)$; доказать, что $2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0$.

1952. $z = e^{\frac{x}{y}}$; доказать, что $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$.

1953. $u = y \ln x$. Найти $d^2 u$ и $d^3 u$.

1954. Преобразовать выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ к новым переменным $u = ax + y$ и $v = ax - y$ (см. задачу 1941).

1955. Преобразовать выражение $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ к новым переменным $u = y$ и $v = \frac{y}{x}$ (см. задачу 1944).

1956. Показать, что функция $u = \frac{xf(x)}{y} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ при любых дважды дифференцируемых функциях f и φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

§ 7. Интегрирование полных дифференциалов

1°. Чтобы выражение $P dx + Q dy$, где P и Q — дифференцируемые функции x и y , было полным дифференциалом du , необходимо и достаточно выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Для нахождения u из условий $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ получим $u = \int P dx + \varphi_1(y)$, $u = \int Q dy + \varphi_2(x)$. Выписав из первого выражения все известные члены, а из второго — члены с y , недостающие в первом, получим функцию u .

2°. Чтобы выражение $P dx + Q dy + R dz$, где P , Q и R — дифференцируемые функции от x , y и z , было полным дифференциалом du , необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Для нахождения u имеем:

$$u = \int P dx + \varphi_1(y, z), \quad u = \int Q dy + \varphi_2(x, z), \quad u = \int R dz + \varphi_3(x, y).$$

Выписав из первого выражения все известные члены, а из второго и третьего — недостающие члены с y и z , получим функцию u .

Нахождение функции по ее полному дифференциалу называется *интегрированием полного дифференциала*.

Проверить, что следующее выражение является полным дифференциалом du , и найти u :

1957. $(2x+y)dx + (x-2y-3)dy.$

1958. $x \sin 2y dx + x^2 \cos 2y dy.$

1959. $(x + \ln y)dx + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right)dy.$

1960. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$

1961. $(yz-2x)dx + (xz+y)dy + (xy-z)dz.$

1962. $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2}\right)dx + \frac{dy}{y} - \left(\frac{x}{z^3} + \frac{1}{1+z^2}\right)dz.$

Проверить, что следующее выражение является полным дифференциалом du , и найти u :

1963. $(y^2-1)dx + (2xy+3y)dy.$

1964. $(\sin 2y-y \operatorname{tg} x)dx + (2x \cos 2y + \ln \cos x + 2y)dy.$

1965. $\left(y - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \left(x + \frac{\sin 2y}{x} + 1\right)dy.$

1966. $t \sqrt{\frac{x}{t^2+1}} dt + \frac{1+\sqrt{t^2+1}}{2\sqrt{x}} dx.$

1967. $(\ln y - \cos 2z)dx + \left(\frac{x}{y} + z\right)dy + (y + 2x \sin 2z)dz.$

1968. $\frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x}{z^2} dz.$

§ 8. Особые точки плоской кривой

Точка кривой $F(x, y) = 0$ называется *особой*, если в этой точке $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Угловой коэффициент $k = y'$ касательной в такой точке находится из уравнения $A + 2Bk + Ck^2 = 0$, где A, B и C — значения

производных $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ в этой особой точке. При этом возможны три случая:

1) $B^2 - AC > 0$ — две касательных; точка называется *узлом*.

2) $B^2 - AC < 0$ — нет касательной; точка *изолированная*.

3) $B^2 - AC = 0$ — или *изолированная* точка, или точка *возврата*, или точка *самосоприкосновения*; в точках возврата и самосоприкосновения существует одна общая касательная к двум ветвям кривой.

Чтобы в третьем, сомнительном, случае решить вопрос окончательно, нужно узнать, имеются ли точки кривой в сколь угодно малой окрестности исследуемой точки.

Определить области расположения, точки пересечения с осями координат, особые точки кривых и построить кривые.

1969. $x^3 + x^2 - y^2 = 0.$

1970. $y^2 = (x + 2)^3.$

1971. $x^3 - x^2 - y^2 = 0.$

1972. $y^2 + x^4 - x^2 = 0.$

1973. $(y - x)^2 = x^3.$

1974. $y^2 = x(x - 2)^2.$

Определить области расположения, особые точки и асимптоты кривых и построить кривые:

1975. $(x + 2a)^3 + xy^2 = 0.$ **1976.** $x^3 - y^3 - 3y^2 = 0.$

1977. $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$ **1978.** $y^2(x^2 - a^2) = x^4.$

Определить области расположения, точки пересечения с осями координат, особые точки кривых и построить кривые:

1979. $y^3 + x^3 - 2x^2 = 0.$ **1980.** $a^2y^2 = x^2(2ax - x^3).$

1981. $y^2 = x(x + 2)^2.$ **1982.** $xy^2 = (x + a)^3.$

1983. $4y^2 = x^5 + 5x^4.$ **1984.** $y^2 - x^4 + x^2 = 0.$

1985. Найти точки пересечения с осями координат, y_{\max} , особую точку и асимптоту кривой $4x^3 - y^3 + x^3 - y^3 = 0$ и построить кривую.

Определить области расположения, особые точки и асимптоты кривых:

1986. 1) $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$ (строфоида);

2) $a^2(x^2 + y^2) = x^2y^2.$

1987. 1) $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2);$

2) $a(x^2 + y^2) = x(x^2 - y^2).$

§ 9. Огибающая семейства плоских кривых

Кривая называется *огибающей* семейства кривых $F(x, y, a) = 0$, если: 1) она касается каждой кривой семейства; 2) каждая ее точка является точкой ее касания с кривой семейства, отличной от ее самой.

Огибающая семейства кривых $F(x, y, a) = 0$, если она существует, находится исключением параметра a из уравнений

$$F(x, y, a) = 0 \text{ и } F'_a(x, y, a) = 0.$$

Может, однако, случиться, что полученная этим способом кривая будет не огибающей, а геометрическим местом особых точек кривых семейства [см. ответ к задаче 1990, 2)].

Найти огибающую семейства кривых и построить огибающую и кривые семейства:

1988. 1) $y = ax + a^2$; 2) $y = ax^2 + \frac{1}{a}$.

1989. 1) $(x - a)^2 + y^2 = R^2$; 2) $4ay = (x - a)^2$.

1990. 1) $y - 1 = (x - a)^2$; 2) $(y - 1)^3 = (x - a)^2$;
3) $(y - 1)^2 = (x - a)^3$. 4) $9(y - a)^2 = (x - a)^3$.

1991. Отрезок постоянной длины a скользит своими концами по координатным осям. Найти огибающую семейства таких отрезков.

1992. Найти огибающую семейства окружностей, проходящих через начало координат и имеющих центр на параболе $y^2 = 4x$.

1993. Найти огибающую семейства окружностей, имеющих диаметрами радиусы-векторы точек гиперболы $xy = a^2$.

1994. Из начала координат выпускается снаряд с начальной скоростью b под углом α к оси Ox . Найти огибающую семейства траекторий при различных α .

1995. Найти огибающую: 1) семейства прямых $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ при постоянном p ; 2) семейства прямых $y = ax + \frac{1}{a}$; 3) семейства кубических парабол $y - 1 = (x - a)^3$.

1996. Найти огибающую семейства окружностей с центрами на оси Ox , радиусами которых служат соответствующие ординаты параболы $y^2 = 4x$.

1997. Найти огибающую семейства эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при условии, что сумма полуосей имеет постоянную длину l .

1998. Найти огибающую семейства парабол, имеющих ось симметрии, параллельную оси Oy , и проходящих через точки $(-a; 0); (3a; 0)$ и $(0; 3a^2)$ при различных a .

§ 10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$; возьмем на ней точку $M(x; y; z)$.

Уравнения нормали к поверхности в этой точке будут:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (1)$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) X, Y, Z — текущие координаты нормали или касательной плоскости.

Вектор $N \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$ назовем *нормальным* вектором поверхности.

Если на поверхности есть точка, в которой $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 0$, то она называется *особой*. В такой точке нет ни касательной плоскости, ни нормали к поверхности.

Написать уравнения касательной плоскости к поверхности:

1999. $z = x^2 + 2y^2$ в точке $(1; 1; ?)$.

2000. $xy = z^2$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

2001. $xyz = a^3$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

2002. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$ и в точке $(a; b; c)$.

2003. Определить плоскость, касательную к поверхности $x^3 + 4y^2 + z^2 = 36$ и параллельную плоскости $x + y - z = 0$.

2004. Написать уравнения нормали в точке $(3; 4; 5)$ к поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$. В какой точке конуса нормаль неопределена?

2005. Найти углы с осями координат нормали к поверхности $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$ в точке $(0; 2; ?)$.

2006. Написать уравнения нормали к поверхности $x^3z + y^3z = 4$ в точке $(-2; 0; ?)$. Построить нормаль и поверхность.

2007. Показать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ образуют с плоскостями координат пирамиды постоянного объема.

2008. Показать, что сумма квадратов отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, касательной к поверхности $\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{a^3} + \frac{z^2}{a^3} = 1$, равна постоянной величине a^3 .

2009. Найти расстояние начала координат от касательной плоскости к геликоиду $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$ в точке $\left(a; a; \frac{\pi a}{4}\right)$. Построить поверхность по сечениям: $z = 0; \frac{\pi a}{4}; \frac{\pi a}{2}; \pi a$.

2010. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $az = x^2 + y^2$ в точках пересечения ее с прямой $x = y = z$.

2011. Показать, что касательная плоскость к поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке на ней (x_0, y_0, z_0) определяется уравнением

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

2012. Написать уравнения нормали к поверхности $x^2 + y^2 - (z - 5)^2 = 0$ в точке $x_0 = 4, z_0 = 0$ и $y_0 > 0$. Построить в первом октанте поверхность и нормаль.

2013. Найти углы с осями координат нормали к поверхности $2z = x^2 - y^2$ в точке $(2; 2; 0)$.

2014. Найти расстояние начала координат от касательной плоскости к коноиду $(2a^2 - z^2)x^2 - a^2y^2 = 0$ в точке $(a; a; a)$.

2015. Показать, что сумма отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, касательной к поверхности $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = a^2$, равна постоянной величине a .

2016. В какой точке касательная плоскость к поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ параллельна: 1) плоскости xOy ; 2) плоскости $2x + 2y + z = 0$? Написать уравнения этих касательных плоскостей.

§ 11. Скалярное поле. Линии и поверхности уровней.

Производная в данном направлении. Градиент

Уравнение $u = F(x, y)$ определяет u в каждой точке $(x; y)$ некоторой области, которая называется *полем скаляра u* . Вдоль каждой из линий $F(x, y) = u_1, F(x, y) = u_2, \dots$, где u_1, u_2, \dots — постоянные, скаляр u остается постоянным и меняется только при переходе точки $(x; y)$ с одной линии на другую. Эти линии называются *изолиниями* (изотермами, изобарами и т. п.) или *линиями уровней*.

Уравнение $u = F(x, y, z)$ определяет *поле скаляра u* в некоторой части трехмерного пространства. *Изоповерхностями*, или *поверхностями уровней* будут:

$$F(x, y, z) = u_1, \quad F(x, y, z) = u_2, \dots$$

Пусть точка $(x; y; z)$ перемещается по прямой $x = x_0 + l \cos \alpha, y = y_0 + l \cos \beta, z = z_0 + l \cos \gamma$ со скоростью $\frac{dl}{dt} = 1$. Тогда скаляр $u = F(x, y, z)$ будет изменяться со скоростью

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dl} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma = N \cdot l_0,$$

где $N \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$ — *нормальный вектор изоповерхности*, а $l_0 \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ — единичный вектор направления l .

Производная

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma = N \cdot l_0$$

называется *производной от функции $u = F(x, y, z)$ в данном направлении $l_0 \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$* .

Градиентом скаляра $u = F(x, y, z)$ называется вектор $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$. Градиент есть вектор скорости *наибыстейшего изменения* скаляра u .

2017. $z = 4 - x^2 - y^2$. Построить линии уровней и $\text{rad } z$ в точке $A(1; 2)$.

2018. $z = \operatorname{arc tg} \frac{y}{x}$. Построить линии уровней и $\operatorname{grad} z$:

1) в любой точке прямой $y = x$; 2) в любой точке прямой $y = -x$, в частности в точках $(\frac{1}{2}; \pm \frac{1}{2})$, $(1; \pm 1)$, ...

2019. Горизонтали возвышенности определяются уравнением $h = 20 - \frac{x^2}{4} - y^2$. Построить горизонтали, соответствующие отметкам $h = 20, 19, 18, 16$ и 11 м . Направление $\operatorname{grad} h$ определяет здесь направление линии наиболее крутого ската, а величина — крутизну этого ската возвышенности. Построить $\operatorname{grad} h$ в точке $x = 2$ и $y = 1$.

2020. Найти наибольшую крутизну поверхности $z^2 = xy$ в точке $(4; 2)$.

2021. Найти производную функции $u = \ln(e^x + e^y)$ в направлении, параллельном биссектрисе координатного угла.

2022. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $(1; 1; 1)$ в направлении $\mathbf{l}\{\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ\}$, и найти $\operatorname{grad} u$ в той же точке и его длину. Построить поверхности уровней.

2023. Построить поверхности уровней скаляра $u = x^2 + y^2 - 2z$ и найти и построить $\operatorname{grad} u$ в точках пересечения оси Ox с поверхностью $u = 4$.

2024. Найти производную функции $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в точке $(a; b; c)$ в направлении радиуса-вектора этой точки.

2025. $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$. Построить линии уровней и $\operatorname{grad} z$ в точке $(-1; 2)$ и найти $|\operatorname{grad} z|$.

2026. $u = xyz$. Найти производную $\frac{du}{dt}$ в направлении, составляющем с осями координат равные углы, в любой точке и в точке $(1; 2; 1)$.

2027. Построить поверхности уровней скаляра $u = x^2 + y^2 - z^2$, определить $\operatorname{grad} u$ на поверхности, проходящей через начало координат, и построить его в тех точках этой поверхности, в которых $y = 0$ и $z = 2$.

2028. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти $\operatorname{grad} u$ и его длину.

2029. Построить изоповерхности поля функции $u = \frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ и найти производную от u в точке $(a; b; c)$ в направлении радиуса-вектора этой точки.

§ 12. Экстремум функции двух переменных

1°. Необходимые условия. Функция $z = F(x, y)$ может иметь **экстремум** только в точках, в которых $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Эти точки называются *критическими*.

2°. Достаточные условия. Обозначим через A , B и C значения производных $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ в критической точке $(x_0; y_0)$.

Тогда, если:

1) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, то $\begin{cases} F(x_0, y_0) = z_{\max} & \text{при } A < 0 \\ F(x_0, y_0) = z_{\min} & \text{при } A > 0 \end{cases}$

2) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$, то экстремума нет;

3) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (сомнительный случай).

3°. Условный экстремум. Чтобы найти экстремум функции $z = F(x, y)$ при условии, что x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$, составим вспомогательную функцию $u = F(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$.

Координаты экстремальной точки $(x; y)$ должны удовлетворять трем уравнениям: $\varphi(x, y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, из которых и находятся λ , x и y .

Найти экстремум функции:

2030. $z = x^3 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

2031. $z = y \sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

2032. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

2033. $z = 2xy - 4x - 2y$. **2034.** $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

2035. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

2036. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

2037. $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

2038. Определить размеры прямоугольного открытого бассейна, имеющего наименьшую поверхность, при условии, что его объем равен V .

2039. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ и прямую $2x + 3y - 6 = 0$ и на эллипсе найти точки, наиболее и наименее удаленные от прямой.

2040. На гиперболе $x^2 - y^2 = 4$ найти точку, наименее удаленную от точки $(0; 2)$.

2041. Определить размеры цилиндра наибольшего объема при условии, что его полная поверхность равна $S = 6\pi \text{ дм}^2$.

2042. 1) В эллипс $x^2 + 3y^2 = 12$ вписать равнобедренный треугольник с основанием, параллельным большой оси, так, чтобы площадь треугольника была наибольшей.

2) Ось Ox расположена на границе двух сред. По какому пути должен пройти луч света из точки $A(0; a)$ в точку $B(c; -b)$, чтобы затратить на прохождение этого расстояния наименьшее время ($a > 0, b > 0, c > 0$)?

Указание. Нужно найти минимум функции $T = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta}$ при условии $a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = c$, где v_1 и v_2 — скорости света в двух средах, а α и β — углы падения и преломления.

Найти экстремумы функций:

2043. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

2044. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$.

2045. $z = 2x^3 - xy^3 + 5x^2 + y^2$.

2046. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

2047. $z = xy$ при условии, что $x^2 + y^2 = 2$.

2048. Найти наибольший объем прямоугольного параллелепипеда при условии, что длина его диагонали равна $2\sqrt{3}$.

2049. 1) На параболе $y^2 = 4x$ найти точку, наименее удаленную от прямой $x - y + 4 = 0$.

2) В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти эту площадь.

2050. Определить размеры конуса наибольшего объема при условии, что его боковая поверхность равна S .

ГЛАВА XII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Понятие о дифференциальном уравнении

1°. О *обыкновенным дифференциальным уравнением* *n*-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Функция $\varphi(x)$, подстановка которой вместо y обращает уравнение (1) в тождество, называется *его решением*. Определяющее эту функцию уравнение $y = \varphi(x)$ или $\Phi(x, y) = 0$ называется *интегралом* дифференциального уравнения. Каждый интеграл определит на плоскости xOy кривую, которая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (2)$$

содержащее x, y и n произвольных постоянных, называется *общим интегралом* уравнения (1) в области существования и единственности решения, если, давая в уравнении (2) произвольным постоянным различные значения, получим все проходящие внутри этой области интегральные кривые, и только эти кривые.

Интеграл, полученный из общего при некоторых значениях произвольных постоянных, называется *частным*.

Продифференцировав общий интеграл (2) по x n раз и исключив из полученных n уравнений и уравнения (2) n произвольных постоянных, мы получим данное дифференциальное уравнение (1).

2°. Дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (3)$$

Решив уравнение (3) относительно $\frac{dy}{dx}$, если это возможно, получим:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет *наклон* $k = \operatorname{tg} a = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ интегральной кривой в точке $(x; y)$, т. е. определяет *поле направлений* интегральных кривых.

Если в некоторой области функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$, то оказывается, что через каждую внутреннюю точку $(x_0; y_0)$ этой области пройдет *единственная* интегральная кривая.

В такой области уравнение (4) имеет общий интеграл $y = \varphi(x, c)$ или $\Phi(x, y, c) = 0$, из которого можно найти единственный частный интеграл, удовлетворяющий *начальным условиям*: $y = y_0$ при $x = x_0$.

2051. Проверить подстановкой, что функция $y = cx^3$ является решением дифференциального уравнения $3y - xy' = 0$. Построить интегральные кривые, проходящие через точки:

$$1) \left(1; \frac{1}{3}\right); \quad 2) (1; 1); \quad 3) \left(1; -\frac{1}{3}\right).$$

2052. Проверить подстановкой, что дифференциальные уравнения 1) $y'' + 4y = 0$ и 2) $y''' - 9y' = 0$ имеют соответственно общие интегралы 1) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ и 2) $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}$.

2053. Построить параболы $y = cx^2$ при $c = 0; \pm 1; \pm 2$ и составить дифференциальное уравнение семейства таких парабол.

2054. Построить изображения семейства 1) окружностей $x^2 + y^2 = 2cx$, 2) парабол $y = x^2 + 2cx$ и составить их дифференциальные уравнения.

2055. Построить изображения полей направлений, определяемых каждым из уравнений:

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \quad 2) \frac{dy}{dx} = y - x; \quad 3) \frac{dy}{dx} = y + x^2.$$

2056. Построить изображение поля направлений, определяемого уравнением $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$ с помощью окружностей, вдоль которых $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}; 1; 2; 3; \dots$ Нарисовать приближенно интегральную кривую, проходящую через начало координат.

§ 2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными.
Ортогональные траектории

1°. Дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$Pdx + Qdy = 0, \quad (1)$$

где P и Q — функции x и y , называется уравнением с разделяющимися переменными, если коэффициенты P и Q при дифференциалах разлагаются на множители, зависящие только от x или только от y , т. е. если оно имеет вид

$$f(x)\varphi(y)dx + f_1(x)\varphi_1(y)dy = 0. \quad (2)$$

Разделив оба члена уравнения (2) на $\varphi(y)f_1(x)$, получим:

$$\frac{f(x)dx}{f_1(x)} + \frac{\varphi_1(y)dy}{\varphi(y)} = 0. \quad (3)$$

Общим интегралом уравнения (3), а следовательно и (2), будет:

$$\int \frac{f(x)dx}{f_1(x)} + \int \frac{\varphi_1(y)dy}{\varphi(y)} = C. \quad (4)$$

2°. Ортогональными траекториями семейства линий $F(x, y, a) = 0$ называются линии, пересекающие линии данного семейства под прямым углом. Продифференцировав уравнение $F(x, y, a) = 0$ по x и исключив a из полученного и данного уравнений, получим дифференциальное уравнение линий данного семейства $y' = f(x, y)$. Тогда дифференциальным уравнением ортогональных траекторий будет $y' = -\frac{1}{f(x, y)}$.

В следующих дифференциальных уравнениях: 1) найти общий интеграл; 2) построить несколько интегральных кривых; 3) найти частный интеграл по начальным условиям: при $x = -2$, $y = 4$.

2057. $xy' - y = 0.$

2058. $xy' + y = 0.$

2059. $yy' + x = 0.$

2060. $y' = y.$

Найти общие интегралы уравнений:

2061. $x^2y' + y = 0.$ **2062.** $x + xy + y'(y + xy) = 0.$

2063. $\varphi^2 dr + (r - a)d\varphi = 0.$ **2064.** $2st^2 ds = (1 + t^2)dt.$

В следующих уравнениях найти общий и частный интегралы по начальным условиям:

2065. $2y'\sqrt{x} = y, y = 1 \text{ при } x = 4.$

2066. $y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x$, $y = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

2067. $x^2y' + y^2 = 0$, $y = 1$ при $x = -1$.

2068. Построить интегральные кривые каждого из уравнений 1) $y'(x^2 - 4) = 2xy$, 2) $y' + y \operatorname{tg} x = 0$, проходящие через точки:

1) $(0; 1)$; 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$; 4) $(0; -1)$.

2069. Найти кривую, проходящую через точку $\left(1; \frac{1}{3}\right)$, если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке кривой втрое больше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

2070. Кривая проходит через точку $A(0; a)$, MN — произвольная ордината кривой. Определить кривую из условия, что площадь $OAMN = as$, где s — длина дуги AM .

2071. Найти кривую, проходящую через точку $(a; a)$, если подкасательная в любой точке ее равна удвоенной абсолютной величине касательной.

2072. Найти кривую, проходящую через точку $(-1; -2)$, если поднормаль ее в каждой точке равна 2.

2073. Во сколько времени тело, нагретое до 100° , охладится до 25° в комнате с температурой 20° , если до 60° оно охлаждается за 10 мин.? (По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур.)

2074. Нагрузка на канат висячего моста (стр. 35, черт. 6) от каждой единицы длины горизонтальной балки равна $r \text{ кг}$. Пренебрегая весом каната, найти его форму, если натяжение каната в низшей точке принять за $H \text{ кг}$.

Указание. Возьмем на дуге OC (стр. 35, черт. 6) произвольную точку M . На часть каната OM будут действовать три силы: горизонтальная H (влево от точки M), вертикальная — вес rx и тангенциальная сила натяжения T (вправо от точки M). Для равновесия сумма проекций сил на Ox и Oy должна равняться 0.

2075. Определить и построить кривую, проходящую через точку $P(-a; a)$, если отрезок AB любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится точкой касания M пополам.

2076. Найти ортогональные траектории семейства парабол $ay = x^2$. Построить их.

2077. Найти ортогональные траектории семейства гипербол $xy = c$.

2078. Найти ортогональные траектории семейства полукубических парабол $ay^3 = x^3$.

2079. Найти ортогональные траектории семейства эллипсов $x^2 + 4y^2 = a^2$.

Решить уравнения:

2080. $y'x^8 = 2y$. **2081.** $(x^2 + x)y' = 2y + 1$.

2082. $y'\sqrt{a^2+x^2} = y$. **2083.** $(1+x^2)y' + 1 + y^2 = 0$.

2084. $dr + r \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0$; $r = 2$ при $\varphi = \pi$.

2085. $y' = 2\sqrt{y \ln x}$; $y = 1$ при $x = e$.

2086. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$; $y = 1$ при $x = 0$.

2087. Определить кривую, проходящую через точку $A(-1; 1)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

2088. Кривая проходит через точку $A(0; a)$, MN —произвольная ордината кривой. Определить кривую из условия, что площадь $OAMN = a(MN - a)$.

2089. Определить и построить кривую, проходящую через точку $(-1; -1)$, для которой отрезок OT , отсекаемый на оси Ox касательной к кривой в любой ее точке, равен квадрату абсциссы точки касания.

2090. Найти ортогональные траектории семейства гипербол $x^2 - 2y^2 = a^2$.

2091. Определить кривую, радиус-вектор любой точки которой равен отрезку нормали между кривой и осью Ox .

2092. Определить линию, если площадь, ограниченная осями координат, этой линией и произвольной ее ординатой, равна $\frac{1}{3}$ площади прямоугольника, построенного на координатах конечной точки кривой.

§ 3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка:

1) однородное, 2) линейное, 3) Бернулли

1°. Однородное. Уравнение $P dx + Q dy = 0$ называется однородным, если P и Q —однородные функции от x и y одинакового измерения. Оно приводится к виду $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и решается

подстановкой $\frac{y}{x} = u$ или $y = ux$.

2°. Л и н е й н о е . Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно первой степени относительно искомой функции y и всех ее производных. Линейное уравнение 1-го порядка имеет вид $y' + Py = Q$. Оно сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными подстановкой $u = uv$. Другой способ решения (*вариация произвольного постоянного*) состоит в том, что сначала решаем уравнение $y' + Py = 0$; получаем $y = -Ae^{-\int P dx}$. Подставляем это решение в данное уравнение, считая A функцией x , и затем находим A' и A .

3°. Уравнение Бернулли $y' + Py = Qy^n$ решается так же, как и линейное, подстановкой $u = uv$ или вариацией произвольного постоянного. Уравнение Бернулли приводится к линейному подстановкой $z = y^{1-n}$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

$$\mathbf{2093.} \quad yy' = 2y - x. \quad \mathbf{2094.} \quad x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$$

$$\mathbf{2095.} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}. \quad \mathbf{2096.} \quad y' - \frac{3y}{x} = x.$$

$$\mathbf{2097.} \quad y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}. \quad \mathbf{2098.} \quad y' \cos x - y \sin x = \sin 2x.$$

$$\mathbf{2099.} \quad y'x + y = -xy^3. \quad \mathbf{2100.} \quad y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

$$\mathbf{2101.} \quad xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x.$$

$$\mathbf{2102.} \quad x^2y' = y^2 + xy. \quad \mathbf{2103.} \quad xy' + y = \ln x + 1.$$

$$\mathbf{2104.} \quad x^2y^2y' + yx^3 = 1.$$

В задачах 2105—2107 найти частные интегралы по данным начальным условиям:

$$\mathbf{2105.} \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$\mathbf{2106.} \quad t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3; \quad s = 1 \text{ при } t = -1.$$

$$\mathbf{2107.} \quad xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ при } x = 1.$$

2108. Найти семейство кривых, подкасательная в любой точке которых есть среднее арифметическое координат точки касания.

2109. Найти ортогональные траектории семейства окружностей $x^2 + y^2 = 2ax$.

2110. Сила тока i в цепи с сопротивлением R , самоиндукцией L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Решить это уравнение, считая R и L постоянными, а электродвижущую силу E линейно нарастающей: $E = kt$. Начальные условия: $i = 0$ при $t = 0$.

2111. Найти форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из данной точки, параллельно данному направлению.

Указание. Рассматривая плоское сечение зеркала, примем в нем данную точку за начало координат, а данное направление — за ось Oy . Касательная к искомой кривой в точке M образует равные углы с OM и осью Oy , т. е. отсекает на оси Oy отрезок $ON = OM$.

Решить дифференциальные уравнения:

$$\mathbf{2112.} \ xy + y^2 = (2x^2 + xy) y'.$$

$$\mathbf{2113.} \ (a^3 + x^2) y' + xy = 1.$$

$$\mathbf{2114.} \ xy' + 2\sqrt{xy} = y. \quad \mathbf{2115.} \ (2x + 1)y' + y = x.$$

$$\mathbf{2116.} \ y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x. \quad \mathbf{2117.} \ t ds - 2s dt = t^3 \ln t dt.$$

$$\mathbf{2118.} \ y' + xy = xy^3. \quad \mathbf{2119.} \ y' + y \cos x = \sin 2x.$$

$$\mathbf{2120.} \ y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}; \text{ при } x = -1 \ y = 1.$$

$$\mathbf{2121.} \ 3y^2y' + y^3 = x + 1; \text{ при } x = 1 \ y = -1.$$

$$\mathbf{2122.} \ (1 - x^2)y' - xy = xy^2; \text{ при } x = 0 \ y = 0,5.$$

2123. Определить кривую, проходящую через точку $A(a; a)$, если расстояние начала координат от касательной в любой точке кривой равно абсциссе этой точки.

§ 4. Дифференциальные уравнения, содержащие дифференциалы произведения и частного

$$d(xy) = x dy + y dx; \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2};$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}.$$

Такие уравнения иногда легко решаются, если соответственно положить $xy = u$, $y = \frac{u}{x}$ или $\frac{y}{x} = u$, $y = ux$.

$$\mathbf{2124.} \ x^2 dy + xy dx = dx. \quad \mathbf{2125.} \ y^2 x dy - y^3 dx = x^2 dy.$$

Указание. В примере 2125 уравнение приводится к виду

$$y^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = dy \text{ или } y^2 du = dy.$$

2126. $y dx + (x - y^3) dy = 0.$ **2127.** $y dx - (x - y^3) dy = 0.$

2128. $y \cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx.$

2129. $t \frac{ds}{dt} - s = s^2 \ln t.$ **2130.** $x^2 y^2 + 1 + x^3 y y' = 0.$

2131. $t^2 s dt + t^3 ds = dt.$ **2132.** $x dy - y dx = x^2 dx.$

2133. $xy' + \operatorname{tg} y = 2x \sec y.$ **2134.** $y(ye^{-\frac{x}{2}} + 1) = xy'.$

§ 5. Дифференциальные уравнения 1-го порядка в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

1°. Если в дифференциальном уравнении

$$P dx + Q dy = 0,$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то оно имеет вид $du = 0$ и его общий интеграл будет $u = C.$

2°. Если $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, то при некоторых условиях существует функция $\mu(x, y)$ такая, что $\mu P dx + \mu Q dy = du.$ Эта функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*.

Интегрирующий множитель легко найти в случаях:

1) когда $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \Phi(x)$, тогда $\ln \mu = \int \Phi(x) dx.$

2) когда $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \Phi_1(y)$, тогда $\ln \mu = \int \Phi_1(y) dy.$

Дифференциальные уравнения § 4 являются частными случаями уравнений, рассматриваемых в настоящем параграфе.

Решить следующие дифференциальные уравнения «в полных дифференциалах»:

2135. $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0.$

2136. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$

2137. $e^{-v} dx + (1 - xe^{-v}) dy = 0.$

2138. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0.$

Найти интегрирующие множители и решить дифференциальные уравнения:

2139. $(x^2 - y) dx + x dy = 0.$

2140. $2x \operatorname{tg} y dx + (x^2 - 2 \sin y) dy = 0.$

2141. $(e^{2x} - y^2) dx + y dy = 0.$

2142. $(1 + 3x^2 \sin y) dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0.$

Показать, что левые части следующих дифференциальных уравнений суть полные дифференциалы, и решить уравнения:

2143. $(3x^2 + 2y) dx + (2x - 3) dy = 0.$

2144. $(3x^2 y - 4xy^2) dx + (x^3 - 4x^2 y + 12y^3) dy = 0.$

2145. $(x \cos 2y + 1) dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$

Найти интегрирующие множители и решить уравнения:

2146. $y^2 dx + (yx - 1) dy = 0.$

2147. $(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0.$

2148. $(\sin x + ey) dx + \cos x dy = 0.$

2149. $(x \sin y + y) dx + (x^2 \cos y + x \ln x) dy = 0.$

§ 6. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не решенные относительно производной.

Уравнения Лагранжа и Клеро

1°. Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ второй степени относительно y' , то оно имеет два решения относительно y' : $y' = f_1(x, y)$ и $y' = f_2(x, y)$, непрерывных относительно x и y в некоторой области, а геометрически определяет в любой точке (x_0, y_0) этой области два направления интегральных кривых.

Такие дифференциальные уравнения $F(x, y, y') = 0$, кроме общего интеграла $\Phi(x, y, C) = 0$ и частных интегралов, иногда имеют еще *особый интеграл*, не содержащий произвольного постоянного и в то же время не получающийся из общего ни при каком значении постоянного.

Особый интеграл, если он существует, можно получить, исключив $p = y'$ из уравнений $F(x, y, p) = 0$ и $F'_p(x, y, p) = 0$ или же исключив C из общего интеграла $\Phi(x, y, C) = 0$ и $\Phi'_C = 0$. Геометрически *особый интеграл* определяет *огибающую семейства интегральных кривых**).

2°. Уравнение Лагранжа

$$y = xf(p) + \varphi(p), \quad (1)$$

где $p = y'$, интегрируется следующим образом.

*) См. определение огибающей на стр. 214.

Продифференцировав (1) по x , найдем:

$$p = f(p) + [xf'(p) + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx}.$$

Это уравнение — линейное относительно x и $\frac{dx}{dp}$. Решив его, получим:

$$x = CA(p) + B(p). \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) будут параметрически определять общий интеграл. Исключив из них параметр p (если это возможно), получим общий интеграл в форме $\Phi(x, y, C) = 0$.

3°. Уравнение Клеро

$$y = px + \varphi(p) \quad (3)$$

является частным случаем уравнения Лагранжа. Оно имеет общий интеграл $y = Cx + \varphi(C)$ и особый, получающийся исключением параметра p из уравнений $y = px + \varphi(p)$ и $x = -\varphi'(p)$.

2150. Построить несколько интегральных кривых уравнения $y'^2 = 4y$. Какие две интегральные кривые проходят через точку $M(1; 4)$?

2151. Построить интегральные кривые уравнения $y'^2 + y^3 - 1 = 0$. Какие две интегральные кривые проходят через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

2152. Показать, что интегральные кривые уравнения $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ содержатся внутри острого угла между прямыми $y = \pm 2x$. Построить интегральные кривые, полагая в общем интеграле постоянное $C = \pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm 2$ и т. д.

2153. Решить уравнения:

$$1) yy'^2 + y'(x - y) - x = 0; \quad 2) xy'^2 + 2xy' - y = 0$$

и построить интегральные кривые.

2154. Решить уравнения, не содержащие явно одного из переменных:

$$1) y = 1 + y'^2; \quad 2) x = 2y' - \frac{1}{y'^2}.$$

Указание. Обозначив y' через p , продифференцировать первое уравнение по x , а второе — по y .

2155. Найти общие и особые интегралы уравнений Лагранжа:

$$1) y = xy'^2 + y'^3; \quad 2) y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}; \quad 3) 2y = \frac{xy'^2}{y'^2 + 2}.$$

2156. Найти общий и особый интегралы уравнения Клеро и построить интегральные кривые:

$$1) y = xy' - y'^2; \quad 2) y = xy' - a\sqrt{1+y'^2}; \quad 3) y = xy' + \frac{1}{2y'^2}.$$

2157. Построить интегральные кривые уравнения $y'^2 + y = 1$. Какие две интегральные кривые проходят через точку $M(1; \frac{3}{4})$?

2158. Решить уравнения, не содержащие явно одного из переменных: 1) $y = y'^2 + y'^3$; 2) $x = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

$$2159. y = 2y'x + \frac{x^3}{2} + y'^2.$$

2160. Найти общий и особый интегралы уравнения Клеро и построить интегральные кривые:

$$1) y = y'x + \frac{1}{y'}; \quad 2) y = xy' + y' + y'^2.$$

2161. Найти кривую, касательные к которой образуют с осями координат треугольник постоянной площади, равной $2a^2$.

2162. Найти кривую, касательная к которой отсекает на осях координат отрезки, сумма которых равна a .

§ 7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1°. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n -кратным интегрированием правой части. При каждом интегрировании получается одно произвольное постоянное, а в окончательном результате — n произвольных постоянных.

2°. Уравнение $F(x, y', y'') = 0$, не содержащие y в явной форме, подстановкой $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$ приводится к виду

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

3°. Уравнение $F(y, y', y'') = 0$, не содержащее x в явной форме, подстановкой $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ приводится к виду

$$F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Решить уравнения:

- 2163.** 1) $y''' = \frac{6}{x^3}$; начальные условия: при $x = 1$ $y = 2$, $y' = 1$, $y'' = 1$; 2) $y'' = 4 \cos 2x$, при $x = 0$ $y = 0$, $y' = 0$; 3) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$.

2164. $x^3y'' + x^2y' = 1$.

2165. $yy'' + y'^2 = 0$.

2166. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

2167. $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

2168. $y''x \ln x = y'$.

2169. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

2170. 1) $xy'' - y' = e^x x^2$; 2) $y'' + 2xy'^2 = 0$.

2171. Определить кривую изгиба горизонтальной балки, один конец которой наглухо заделан, а на другой действует сосредоточенная сила P (весом балки пренебречь и считать изгиб настолько малым, что $1+y'^2 \approx 1$).

2172. Определить кривые, у которых радиус кривизны вдвое больше длины нормали.

2173. Определить кривые, у которых радиус кривизны равен длине нормали.

2174. На отрезке $[0, 1]$ определить кривую, касающуюся оси Ox в начале координат, если кривизна ее $k = x$, т. е. равномерно нарастает вдоль оси Ox (переходная кривая). Принять приближенно, что $1+y'^2 \approx 1$.

Решить уравнения:

2175. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$; при $x = \frac{\pi}{4}$ $y = \frac{\ln 2}{2}$, $y' = 1$.

2176. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$. **2177.** $y''y^3 = 1$.

2178. $2yy'' = (y')^2$.

2179. $t \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0$.

2180. $2yy'' = 1+y'^2$.

2181. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.

2182. Определить кривые, у которых радиус кривизны равен кубу длины нормали.

2183. В промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ определить кривую, касающуюся оси Ox в начале координат, если кривизна ее в любой точке $k = \cos x$.

§ 8. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Однородное линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0, \quad (1)$$

где p_i — функции x , имеет общее решение вида

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (2)$$

где y_1, y_2, \dots, y_n — линейно независимые частные решения уравнения (1), а C_1, C_2, \dots, C_n — произвольные постоянные.

Если коэффициенты p_1, p_2, \dots, p_n уравнения (1) постоянны, то частные решения y_1, y_2, \dots, y_n находятся с помощью характеристического уравнения

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_n = 0. \quad (3)$$

1) Каждому вещественному корню $r = a$ уравнения (3) кратности m соответствуют m частных решений $e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^{m-1}e^{ax}$.

2) Каждой паре мнимых корней $r = a \pm bi$ кратности m соответствуют m пар частных решений:

$$\begin{cases} e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, \dots, x^{m-1}e^{ax} \cos bx, \\ e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, \dots, x^{m-1}e^{ax} \sin bx. \end{cases}$$

Решить уравнения:

2184. $y'' - 4y' + 3y = 0.$

2185. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

2186. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

2187. $y'' - 4y = 0.$

2188. $y'' + 4y = 0.$

2189. $y'' + 4y' = 0.$

2190. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} - 4x = 0.$

2191. $4 \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0.$

2192. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + 2s = 0;$ при $t = 0$ $s = 1$, $s' = 1.$

2193. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$

2194. $y^{IV} - 16y = 0.$

2195. $y''' - 8y = 0.$

2196. $y''' + 3ay'' + 3a^2y' + a^3y = 0.$

2197. $y^{IV} + 4y = 0.$

2198. $4y^{IV} - 3y'' - y = 0.$

2199. Определить уравнение колебаний маятника, состоящего из массы m , подвешенной на нити длиной l (сопротивлением пренебречь и положить, что при малом угле α отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$). Определить период колебания.

2200. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Под действием одного груза пружина удлиняется на a см. Определить движение первого груза, если второй

оборвется (сопротивлением пренебречь). Определить период колебания.

2201. Решить задачу 2200 с учетом сопротивления, пропорционального скорости движение.

Решить уравнения:

2202. $y'' + 3y' + 2y = 0$. **2203.** $y'' + 2ay' + a^2y = 0$.

2204. $y'' + 2y' + 5y = 0$. **2205.** $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$.

2206. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$. **2207.** $\frac{d^2s}{dt^2} + a\frac{ds}{dt} = 0$.

2208. $\ddot{x}_t + 2\dot{x}_t + 3x = 0$. **2209.** $y''' - 3y'' + 4y = 0$.

2210. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$. **2211.** $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

2212. Найти интегральную кривую уравнения $y'' - y = 0$, касающуюся в точке $(0; 0)$ прямой $y = x$.

§ 9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1°. Основное свойство. Пусть даны уравнения:

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_ny = f(x) \text{ — неоднородное,} \quad (1)$$

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_ny = 0 \text{ — однородное} \quad (2)$$

и пусть u — общее решение уравнения (2), а y_1 — частное решение уравнения (1). Тогда общее решение u уравнения (1) будет:

$$u = u + y_1. \quad (3)$$

2°. Метод неопределенных коэффициентов. При постоянных p_1, p_2, \dots, p_n частное решение y_1 находится методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях:

2) $f(x)$ — многочлен,

2) $f(x) = e^{mx}(a \cos nx + b \sin nx)$,

3) $f(x)$ есть сумма или произведение предыдущих функций.

В этих случаях частное решение y_1 имеет тот же вид, что и $f(x)$, отличаясь от нее только коэффициентами.

Исключения составляют особые случаи, когда: 1) $f(x)$ — многочлен, но $r = 0$ — корень характеристического уравнения кратности k ; 2) $f(x) = e^{mx}(a \cos nx + b \sin nx)$, но $r = m \pm ni$ есть корень характеристического уравнения кратности k . В этих особых случаях y_1 отличается от $f(x)$ не только коэффициентами, но еще и множителем x^k .

3°. Метод вариации произвольных постоянных. Более общим приемом решения неоднородного линейного уравнения является метод Лагранжа, или метод вариации произвольных постоянных.

Если y_1 и y_2 — независимые частные решения уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ по методу Лагранжа находится в виде $y = Ay_1 + By_2$, где A и B — функции x , удовлетворяющие системе уравнений

$$\left. \begin{array}{l} A'y_1 + B'y_2 = 0, \\ A'y'_1 + B'y'_2 = f(x). \end{array} \right\}$$

Отсюда

$$A' = -\frac{y_2 f(x)}{w}, \quad B' = \frac{y_1 f(x)}{w}, \quad \text{а } w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}.$$

Решить уравнения:

2213. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$. **2214.** $y'' - 4y = 8x^3$.

2215. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2 \cos 2x$.

2216. $y'' + y = x + 2e^x$. **2217.** $y'' + 3y' = 9x$.

2218. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

2219. $y'' - 3y' + 2y = e^x$. **2220.** $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 2k \sin kt$.

2221. $y'' - 2y = xe^{-x}$. **2222.** $y'' - 2y' = x^2 - x$.

2223. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

2224. $\ddot{x} + 2k\dot{x} + 2k^2x = 5k^2 \sin kt$.

2225. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$. **2226.** $y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}$.

2227. $\ddot{x} + \dot{x} = 3t^2$. **2228.** $y''' + 8y = e^{-2x}$.

2229. 1) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}$; 2) $a^3\ddot{x} + ax = 1$.

2230. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$. **2231.** $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

2232. $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$. **2233.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

2234. 1) $y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}$; 2) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$.

2235. Единица массы движется по оси Ox под действием постоянной силы a , направленной по оси, при сопротивлении движению, численно равном скорости движения. Найти закон движения, если при $t=0 x=0$ и скорость $v=0$.

Решить уравнения:

2236. $y'' + y' - 2y = 6x^2$. **2237.** $y'' - 5y' + 6y =$
 $= 13 \sin 3x$.

2238. $y'' + 2y' + y = e^x$. **2239.** $y'' + y' + 2,5y =$
 $= 25 \cos 2x$.

2240. $4y'' - y = x^3 - 24x.$ **2241.** $y'' - y = e^{-x}.$

2242. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 2t^3 - 2.$

2243. 1) $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx;$ 2) $n^3y'' - 4ny = 8.$

2244. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3 \sin x.$

2245. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x.$

Следующие уравнения решить методом вариации произвольных постоянных:

2246. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$

2247. 1) $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x};$ 2) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$

2248. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$

§ 10. Примеры дифференциальных уравнений разных типов

Определить тип дифференциального уравнения и решить его:

2249. $y' + \frac{y}{1+x} = e^{-x}.$ **2250.** $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x.$

2251. $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y = x^3.$

2252. $(1+x^2)y' + y(x - \sqrt{1+x^2}) = 0.$

2253. $t^2 ds + 2ts dt = e^t dt.$ **2254.** $xy' = 4(y + \sqrt{y}).$

2255. $2xyy' = 2y^3 + \sqrt{y^4 + x^4}.$

2256. $xy'' + y' = \ln x.$ **2257.** $yy'' - 2y'^2 = 0.$

2258. $y'' - m^2y = e^{-mx}.$ **2259.** $y'x \ln x + y = 2 \ln x.$

2260. $xy' + y \ln \frac{y}{x} = 0.$ **2261.** $2y' + y = y^3(x - 1).$

2262. $y''' - 2y'' + y' = x^2.$ **2263.** $y'' = y' + y'^2.$

2264. $\frac{d^3s}{dt^3} - 3\frac{ds}{dt} - 2s = \sin t + 2 \cos t.$

2265. 1) $\sin t ds = \left(4t \sin^2 \frac{t}{2} + s\right) dt;$ 2) $yy'x - y^3 = 1.$

2266. 1) $xy' + y(x \operatorname{tg} x + 1) = \sec x$; 2) $y''' + y = e^{-x}$.

2267. 1) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$; 2) $y'''y = y''y'$.

2268. Цилиндр радиуса a дециметров и весом $P = a^3 \kappa G$ плавает в воде при вертикальном положении оси. Найти период колебания, которое получится, если цилиндр немного погрузить в воду и затем отпустить. Сопротивление движению принять приближенно равным нулю.

2269. Полый железный шар с радиусами поверхностей a и $2a$ имеет постоянную температуру внутренней поверхности 100° и наружной 20° . Определить температуру внутри стенки на любом расстоянии r от центра ($a \ll r \ll 2a$) и при $r = 1,6a$.

Указание. Скорость падения температуры $\frac{dT}{dr}$ в проводнике со стационарным распределением температуры обратно пропорциональна площади поперечного сечения.

§ 11. Линейное дифференциальное уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

Частное решение однородного уравнения [при $f(x) = 0$] можно найти в виде $y = x^r$, где r — постоянное число. Для нахождения r нужно подставить $y = x^r$ в однородное дифференциальное уравнение и решить полученное *характеристическое* уравнение относительно r . При этом:

1) Каждому вещественному корню $r = a$ кратности m соответствует m частных решений $x^a, x^a \ln x, x^a (\ln x)^2, \dots$

2) Каждой паре мнимых корней $r = a \pm bi$ кратности m соответствует m пар частных решений:

$$x^a \cos(\beta \ln x), \quad x^a \cos(\beta \ln x) \ln x, \quad \dots$$

$$x^a \sin(\beta \ln x), \quad x^a \sin(\beta \ln x) \ln x, \quad \dots$$

Неоднородное дифференциальное уравнение Эйлера решается методом вариации постоянных.

Решить уравнения:

2270. 1) $x^3 y''' - 3x y' + 3y = 0$; 2) $x^2 y'' - 2y = 0$;

$$3) \quad x^3 y'' + 2x y' - n(n+1)y = 0.$$

2271. 1) $x^2 y'' + 5x y' + 4y = 0$; 2) $x^2 y'' + x y' + y = 0$.

2272. 1) $x y'' + 2y' = 10x$; 2) $x^2 y'' - 6y = 12 \ln x$.

2273. 1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x;$
 2) $x^3y'' + 3x^2y' + xy = 6 \ln x.$

2274. 1) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^5; 2) x^2y'' + xy' + y = x.$

§ 12. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решить уравнения:

2275. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$ **2276.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y = e^t \\ \frac{dy}{dt} - x + y = e^t. \end{cases}$

Указание к задаче 2275. Продифференцировав первое из уравнений по t , исключаем из трех уравнений y и $\frac{dy}{dt}$.

2277. $\begin{cases} 5 \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} + 4x - y = e^{-t} \\ \frac{dx}{dt} + 8x - 3y = 5e^{-t}. \end{cases}$

2278. $\begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x - y = 0 \\ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y - 25x = 16e^t. \end{cases}$

Решить уравнения:

2279. $\begin{cases} \dot{x} + 3x + y = 0 \\ \dot{y} - x + y = 0, \end{cases}$ при $t = 0 \ x = 1, y = 1.$

2280. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 2 \sin t. \end{cases}$

§ 13. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка (метод характеристик)

2281. Найти общее решение (содержащее две произвольные функции) уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad 2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad 3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \\ 4) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2a \frac{x}{y} + b. \end{aligned}$$

Указание. Положить $\frac{\partial u}{\partial y} = z.$

2282. Найти частное решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ по начальным условиям: при $x = 1$ $z = y^8$, $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$.

2283. Преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ к канонической форме и найти его общее решение.

2284. Преобразовать уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

к канонической форме и найти его общее решение.

В следующих дифференциальных уравнениях найти общие решения, а если даны начальные условия, то и частные решения:

2285. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

2286. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; при $x = 0$ $u = \sin y$, $\frac{\partial u}{\partial x} = y$.

2287. $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$;

при $x = 1$ $u = 2y + 1$, $\frac{\partial u}{\partial x} = y$.

2288. $t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; при $t = 1$ $u = 2x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t} = x^2$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

2289. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$;

при $t = 0$ $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = -x - 1$.

2290. $4a^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

при $t = 0$ $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = ax$.

2291. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; при $t = 0$ $u = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)$.

ГЛАВА XIII

**ДВОЙНЫЕ, ТРОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ**

§ 1. Вычисление площади двойным интегралом

1°. Если область (S) определена неравенствами

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

то площадь S этой области

$$S = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum \Delta x \Delta y = \iint_{(S)} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

2°. Если область (S) определена неравенствами

$$h \leq y \leq l, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y),$$

то

$$S = \iint_{(S)} dx dy = \int_h^l dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

3°. Если область (S) определена в полярных координатах неравенствами $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$, то площадь S этой области

$$S = \iint_{(S)} r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

Записать двойными интегралами и вычислить площади, ограниченные линиями:

2292. $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$.

2293. 1) $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 4$.

2) $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$;

2294. $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$.

2295. $ay = x^2 - 2ax$, $y = x$.

2296. $y = \ln x$, $x - y = 1$ и $y = -1$.

2297. Построить области, площади которых выражаются интегралами:

$$1) \int_0^a dx \int_0^x dy; \quad 2) \int_0^a dy \int_{a-y}^{a^2-y^2} dx; \quad 3) \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy.$$

Изменить порядок интегрирования.

Указание. Чтобы получить уравнения линий, ограничивающих область, нужно пределы интеграла по dx приравнять x , а пределы интеграла по dy приравнять y .

2298. Построить области, площади которых выражаются

$$\text{интегралами: } 1) \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy; \quad 2) \int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 dx. \text{ Изменить}$$

порядок интегрирования и вычислить площади.

2299. Вычислить площадь, ограниченную линиями $r = a(1 - \cos \varphi)$ и $r = a$ и расположенную вне круга.

2300. Вычислить площадь, ограниченную прямой $r \cos \varphi = a$ и окружностью $r = 2a$.

Вычислить площади, ограниченные линиями:

$$\mathbf{2301.} xy = \frac{a^2}{2}, \quad xy = 2a^2, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x.$$

Указание. В этой задаче выгодно перейти к новым координатам $xy = u$ и $y = vx$, после чего площадь определяется по формуле

$$\int \int |J| du dv, \text{ где } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} & \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} & \end{vmatrix} \text{ и называется якобианом. В зада-}$$

че 2302 положить $y^2 = ux$, $vy^2 = x^3$, а в задаче 2303 перейти к обобщенным полярным координатам $x = r \cos^3 \varphi$ и $y = r \sin^3 \varphi$.

2302. $y^2 = ax$, $vy^2 = x^3$, $ay^2 = x^3$, $16ay^2 = x^3$.

$$\mathbf{2303.} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Вычислить площади, ограниченные линиями:

2304. $y = x^2$, $y = x + 2$.

2305. $ax = y^3 - 2ay$ и $y + x = 0$.

2306. $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $x = 0$.

2307. $y^2 = a^2 - ax$, $y = a + x$.

2308. $r = 4(1 + \cos \varphi)$, $r \cos \varphi = 3$ (справа от прямой).

2309. $r = a(1 - \cos \varphi)$, $r = a$ и расположенную вне кардиоиды.

2310. $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.

2311. Построить области, площади которых выражаются

$$1) \int_a^b dx \int_{\frac{a}{x}}^{\frac{x}{a}} dy; \quad 2) \int_0^a dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx; \quad 3) \int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy.$$

Изменить порядок интегрирования и вычислить площади.

§ 2. Центр тяжести и момент инерции площади с равномерно распределенной массой (при плотности $\mu = 1$)

Координаты центра тяжести площади S с равномерно распределенной на ней массой:

$$x_c = \frac{\iint_S x \, dx \, dy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint_S y \, dx \, dy}{S}. \quad (1)$$

Моменты инерции площади S

$$J_x = \iint_S y^2 \, dx \, dy, \quad J_y = \iint_S x^2 \, dx \, dy, \quad J_0 = \iint_S r^2 \, dx \, dy. \quad (2)$$

Определить центр тяжести площади, ограниченной линиями:

2312. $y = 0$ и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$.

2313. $y = x^2$, $x = 4$, $y = 0$. **2314.** $y^2 = ax$ и $y = x$.

2315. $x^2 + y^2 = a^2$ и $y = 0$.

2316. Площади, ограниченной астроидой $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ и осью Ox .

Указание. Перейти к обобщенным полярным координатам

$$x = r \cos^3 \varphi \quad \text{и} \quad y = r \sin^3 \varphi.$$

2317. Определить моменты инерции J_x , J_y и J_0 площади прямоугольника, ограниченного линиями $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $y = b$.

2318. Определить момент инерции относительно оси Ox площади, ограниченной линиями $y = \frac{x}{2}$, $x = a$, $y = a$.

2319. Определить момент инерции относительно оси Oy площади треугольника с вершинами $A(0; 2a)$, $B(a; 0)$ и $C(a; a)$.

В задачах 2320—2323 определить полярный момент инерции площади, ограниченной линиями:

2320. $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$. **2321.** $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2322. Окружностью $r = a$.

2323. $y^2 = ax$, $x = a$.

Определить центр тяжести:

2324. Полусегмента параболы $y^2 = ax$, $x = a$, $y = 0$ (при $y > 0$).

2325. Полуэллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, отсеченного осью Ox .

2326. Определить момент инерции относительно оси Oy площади, ограниченной линиями $y = a + \frac{x^2}{a}$, $y = 2x$ и $x = 0$.

2327. Определить момент инерции относительно оси Ox площади треугольника с вершинами $A(1; 1)$, $B(2; 1)$, $C(3; 3)$.

Определить полярный момент инерции площади, ограниченной линиями:

2328. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

2329. $y = 4 - x^2$ и $y = 0$. **2330.** $r = a(1 - \cos \varphi)$.

§ 3. Вычисление объема двойным интегралом

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = F(x, y)$, снизу — плоскостью $z = 0$ и с боков — цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область (S) , равен

$$V = \iint_{(S)} z \, dx \, dy = \iint_{(S)} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

2331. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2332. $z = x + y + a$, $y^2 = ax$, $x = a$, $z = 0$, $y = 0$
(при $y > 0$).

2333. $(x + y)^2 + az = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (поверхность построить по сечениям: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = h \leq a$; см. задачу 546).

2334. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ (см. задачу 552).

2335. $z^3 = xy$, $x = a$, $x = 0$, $y = a$, $y = 0$.

2336. $az = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = a$.

2337. $z^2 = xy$, $x + y = a$.

2338. $x + y + z = 3a$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Указание. В задачах 2338—2344 перейти к полярным координатам.

2339. $z = mx$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

2340. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

2341. $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ (вне цилиндра).

2342. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (внутри цилиндров).

2343. Первым завитком геликоида $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$ внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ и плоскостью $z = 0$.

2344. $z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = ax$.

2345. $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, $z = 0$.

Указание. В задачах 2345 и 2346 перейти к обобщенным (эллиптическим) полярным координатам: $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$.

2346. $z = ce^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2347. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (положить $x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$).

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

2348. $z = a - x$, $y^2 = ax$ и $z = 0$.

2349. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

2350. $y^2 + z^2 = 4ax$, $y^2 = ax$, $x = 3a$ (вне цилиндра).

2351. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2352. Коноида $x^2y^2 + h^2z^2 = a^2y^2$ при $0 \leq y \leq h$ (см. задачу 559).

2353. $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

2354. $4z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ (вне цилиндра).

Указание. В задачах 2354—2358 перейти к полярным координатам.

2355. $z^2 = (x + a)^2$, $x^2 + y^2 = a^2$.

2356. $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

2357. $az = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$.

2358. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (внутри цилиндров).

2359. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Указание. Положить $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$.

§ 4. Площади кривых поверхностей

Площадь σ части поверхности $F(x, y, z) = 0$, проекция которой на плоскость $z = 0$ определяет область (σ_z) , равна:

$$\sigma = \int_{(\sigma_z)} \int \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy = \int_{(\sigma_z)} \int \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy.$$

Аналогично при проектировании на две другие координатные плоскости получим:

$$\sigma = \int_{(\sigma_y)} \int \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|} dx dz, \quad \sigma = \int_{(\sigma_x)} \int \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dy dz.$$

Вычислить площадь:

2360. Поверхности цилиндра $2z = x^2$, отсеченной плоскостями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

2361. Поверхности конуса $z^2 = 2xy$, отсеченной плоскостями $x = a$ и $y = a$, при $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

2362. Поверхности конуса $y^2 + z^2 = x^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

2363. Поверхности $az = xy$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

2364. Поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, расположенной внутри цилиндра $z^2 = 2px$.

Вычислить площадь:

2365. Поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = a^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

2366. Поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной внутри цилиндров $x^2 + y^2 \pm ax = 0$.

2367. Поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2az$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 3a^2$.

2368. Определить двойным интегралом площадь части земной поверхности, ограниченной меридианами 0° и β° , экватором и параллельно α° . Рассмотреть частный случай при $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

§ 5. Тройной интеграл и его приложения

Если область (V) определена неравенствами

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

то

$$\iint_{(V)} F(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} F(x, y, z) dz.$$

При $F(x, y, z) = 1$ получаем объем V . Координаты центра тяжести однородного тела объемом V вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dx dy dz \text{ и т. д.}$$

2369. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $az = x^2 + y^2$, $2az = a^2 - x^2 - y^2$.

2370. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, внутри конуса.

2371. Показать, что поверхность конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ делит объем шара $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ в отношении 3 : 1.

2372. Определить массу пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, если плотность в каждой ее точке равна аппликате z этой точки.

Определить центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями:

$$\mathbf{2373.} \quad x + y + z = a, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$\mathbf{2374.} \quad az = a^2 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$

Определить момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного поверхностями (плотность $\mu = 1$):

$$\mathbf{2375.} \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \text{ и } x + z = a.$$

$$\mathbf{2376.} \quad x + y + z = a\sqrt{2}, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

2377. Определить объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью:

$$1) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x; \quad 2) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2).$$

Указание. Перейти к сферическим координатам по формулам: $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$; элемент объема $dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$.

Определить объемы тел, ограниченных поверхностями:

$$\mathbf{2378.} \quad az = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2.$$

$$\mathbf{2379.} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z = 6 - x^2 - y^2.$$

$$\mathbf{2380.} \quad az = x^2 + y^2, \quad z^2 = x^2 + y^2.$$

2381. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и $z = h$, если плотность в каждой точке его равна аппликате этой точки.

2382. Определить массу тела, ограниченного поверхностями

$$2x + z = 2a, \quad x + z = a, \quad y^2 = ax, \quad y = 0$$

(при $y > 0$), если плотность в каждой его точке равна ординате y этой точки.

2383. Определить центр тяжести однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$.

2384. Определить момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного поверхностью $z^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$.

2385. Определить объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$ (перейти к сферическим координатам) (см. задачу 2377).

2386. Определить массу сферического слоя между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат (перейти к сферическим координатам).

§ 6. Криволинейный интеграл. Формула Грина

1°. Определение криволинейного интеграла.

Пусть на дуге \overrightarrow{AB} спрямляемой кривой определена непрерывная функция $P(x, y, z)$. Разобьем дугу на части точками $A(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1) \dots M_{n-1}(x_{n-1}; y_{n-1}; z_{n-1})$ и $B(x_n; y_n; z_n)$ и пусть

$x_t - x_{t-1} = \Delta x_t$. Тогда $\lim_{\Delta x_t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i$ называется криволинейным интегралом,

взятым по дуге \overrightarrow{AB} , и обозначается $\int_{\overrightarrow{AB}} P(x, y, z) dx$. Аналогично определяются интегралы $\int_{\overrightarrow{AB}} Q(x, y, z) dy$,

$\int_{\overrightarrow{AB}} R(x, y, z) dz$ и $\int_{\overrightarrow{AB}} (P dx + Q dy + R dz)$ как сумма предыдущих

интегралов. Наконец, встречается еще криволинейный интеграл вида:

$\int_{\overrightarrow{AB}} P(x, y, z) ds = \lim_{\Delta s_t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$, где $\Delta s_i = \overline{M_{i-1} M_i}$.

2°. Вычисление криволинейного интеграла. Пусть кривая \overrightarrow{AB} задана уравнениями $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, а параметр t при перемещении точки $M(t)$ по дуге \overrightarrow{AB} в одном направлении изменяется монотонно; тогда

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P(x, y, z) dx = \int_{t_A}^{t_B} P[f(t), \varphi(t), \psi(t)] f'(t) dt,$$

т. е. все переменные и дифференциалы под знаком криволинейного интеграла нужно выразить через одно переменное (t) и его дифференциал (dt) из уравнений кривой.

3°. Механическое значение криволинейного интеграла. Интеграл вида $\int_{AB} (P dk + Q dy + R dz)$ определяет работу при перемещении единицы массы по дуге AB в поле, образованном силой $F\{P, Q, R\}$.

4°. Случай полного дифференциала. Если в некоторой области (V) $P dx + Q dy + R dz = du$, то $\int_{AB} (P dx + Q dy + R dz) = u_B - u_A$, т. е. равен разности значений функции $u(x, y, z)$ в точках B и A и не зависит от пути интегрирования AB , взятого в области (V).

5°. Формула Грина

$$\oint_{(C)} (P dx + Q dy) = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

преобразует криволинейный интеграл от $P dx + Q dy$, взятый (против часовой стрелки) по замкнутому контуру (C), в двойной интеграл по области (S), ограниченной этим контуром.

6°. Площадь, ограниченная контуром (C):

$$S = \frac{1}{2} \oint_{(C)} (x dy - y dx).$$

2387. Даны точки $A(2; 2)$ и $B(2; 0)$. Вычислить $\int_{(O)} (x+y) dx$: 1) по прямой OA ; 2) по дуге OA параболы $y = \frac{x^2}{2}$; 3) по ломаной OBA .

2388. Даны точки $A(4; 2)$ и $B(2; 0)$. Вычислить $\int_{(O)} [(x+y) dx - x dy]$: 1) по прямой OA ; 2) по ломаной OBA .

2389. Решить задачу 2388 для интеграла $\int_{(G)} (y dx - x dy)$.

Почему здесь величина интеграла не зависит от пути интегрирования?

2390. Даны точки $A(a; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$ и $C(a; a; a)$. Вычислить интеграл $\int (y dx + z dy + x dz)$ по прямой OC и по ломаной $OABC$.

2391. Поле образовано силой $\mathbf{F}\{P, Q\}$, где $P = x - y$, $Q = x$. Построить силу \mathbf{F} в каждой вершине квадрата со сторонами $x = \pm a$ и $y = \pm a$ и вычислить работу при перемещении единицы массы по контуру квадрата.

2392. Поле образовано силой $\mathbf{F}\{P, Q\}$, где $P = x + y$, $Q = 2x$. Построить силу \mathbf{F} в начале каждой четверти окружности $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ и вычислить работу при перемещении единицы массы по окружности.

Решить эту же задачу при условии $P = x + y$, $Q = x$. Почему здесь работа равна 0?

2393. Поле образовано силой $\mathbf{F}\{y; a\}$. Определить работу при перемещении массы m по контуру, образованному полуосами координат и первой четвертью эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

2394. Поле образовано силой $\mathbf{F}\{x, y, z\}$. Вычислить работу при перемещении единицы массы по ломаной $OABC$, соединяющей точки $O(0; 0; 0)$, $A(0; a; 0)$, $B(a; a; 0)$, $C(a; a; a)$.

2395. Написать и проверить формулу Грина для $\oint_{(C)} [(x+y)dx - 2x dy]$ по контуру треугольника со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

2396. Вычислить интегралы: 1) $\int_{\overrightarrow{AB}} [2xy dx + x^2 dy]$,
 2) $\int_{\overrightarrow{AB}} [\cos 2y dx - 2x \sin 2y dy]$; 3) $\int_{\overrightarrow{AB}} [\operatorname{tg} y dx + x \sec^2 y dy]$
 по любой линии от точки $A\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$ до $B\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$.

2397. Применив формулу Грина, вычислить интеграл $\oint_{(C)} [y^2 dx + (x+y)^2 dy]$ по контуру $\triangle ABC$ с вершинами $A(a; 0)$, $B(a; a)$ и $C(0; a)$.

2398. Определить криволинейным интегралом площадь эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

2399. Определить криволинейным интегралом площадь петли кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ (см. черт. 53 на стр. 326).

Указание. Перейти к параметрическим уравнениям, положив $y = xt$.

2400. Определить криволинейным интегралом площадь петли декартова листа $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (см. указание к задаче 2399 и черт. 83 на стр. 353).

2401. С какой силой притягивает масса M , равномерно распределенная по верхней полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, массу m , сосредоточенную в начале координат?

Указание. Пусть μ — линейная плотность, ds — элемент длины полуокружности, θ — угол с осью Ox радиуса-вектора и X и Y — проекции силы притяжения. Тогда $X = \int\limits_{(C)} \frac{km\mu \cos \theta \, ds}{r^3}$,
 $Y = \int\limits_{(C)} \frac{km\mu \sin \theta \, ds}{r^3}$, где k — постоянная тяготения.

2402. Даны точки $A(-a; a)$ и $B(a; a)$. С какой силой притягивает масса M , равномерно распределенная по отрезку AB , массу m , сосредоточенную в точке $(0; 0)$.

2403. Даны точки $A(a; 0)$, $B(0; a)$ и $C(-a; 0)$. С какой силой притягивает масса M , равномерно распределенная по ломаной ABC , массу m , сосредоточенную в начале координат.

2404. Даны точки $A(0; 1)$, $B(2; 5)$ и $C(0; 5)$. Вычислить $\int\limits_{(O)} [(x+y)dx - 2ydy]$: 1) по прямой AB ; 2) по дуге AB параболы $y = x^2 + 1$; 3) по ломаной ACB .

2405. Даны точки $A(-a; 0)$ и $B(0; a)$. Вычислить работу силы $\mathbf{F}\{P, Q\}$, где $P = y$ и $Q = y - x$ при перемещении единицы массы: 1) по прямой AB ; 2) по ломаной AOB ; 3) по дуге AB параболы $y = a - \frac{x^2}{a}$.

2406. Показать, что $\oint\limits_{(C)} [y \, dx + (x+y) \, dy]$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить, вычислив интеграл по контуру фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$.

2407. Написать и проверить формулу Грина для интеграла $\oint\limits_{(C)} \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right)$, взятого по контуру $\triangle ABC$ с вершинами $A(1; 1)$, $B(2; 1)$ и $C(2; 2)$.

2408. Определить криволинейным интегралом площадь астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

2409. Определить криволинейным интегралом площадь, ограниченную кривой $y^2 + x^4 - x^2 = 0$. (Перейти к параметрическим уравнениям, положив $y = xt$.)

§ 7. Интегралы по поверхности. Формулы Остроградского и Стокса

1°. Ф о р м у л а О строград ск о г о:

$$\int \int_{(S)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \int \int_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где α , β и γ — углы внешней нормали замкнутой поверхности S , а V — объем, ограниченный этой поверхностью. Первый интеграл можно написать в виде $\pm \int \int_{(S_z)} \left[P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} + R \frac{\partial F}{\partial z} \right] \frac{dx dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, где

$F(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности, а S_z — проекция S на плоскость $z = 0$.

2°. Ф о р м у л а С т о к с а:

$$\oint_{(C)} (P dx + Q dy + R dz) = \int \int_{(S)} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds,$$

где α , β и γ — углы нормали к поверхности S , направленной в ту ее сторону, с которой обход контура C рассматривается происходящим против часовой стрелки.

2410. Вычислить $\int \int_{(S)} [x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma] ds$ по верхней поверхности плоскости $x + y + z = a$, расположенной в первом октанте.

2411. Вычислить

$$\int \int_{(S)} [x^2 \cos(n, i) + y^2 \cos(n, j) + z^2 \cos(n, k)] ds$$

по верхней поверхности параболоида $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, расположенной во втором октанте (где $x < 0, y > 0, z > 0$).

Указание. Приведя интеграл к виду $\int \int_{(S_z)} (-x^2 + y^2 + az^2) \frac{dx dy}{a}$,

перейдем к полярным координатам. Угол φ будет изменяться от $\frac{\pi}{2}$ до π . Результат не изменится, если вычислять интеграл по поверхности, расположенной в первом октанте, ибо хотя там $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, но и вместо $-\cos^3 \varphi$ под интегралом будет $+\cos^3 \varphi$.

2412. Написать и проверить формулу Остроградского для интеграла $\int \int_{(S)} [x \cos(n, i) + y \cos(n, j) + z \cos(n, k)] ds$, взятого по поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2413. Написать и проверить формулу Остроградского для интеграла $\int \int_{(S)} [x^2 \cos(n, i) + y^2 \cos(n, j) + z^2 \cos(n, k)] ds$, взятого по наружной поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + 2az = a^2, x = 0, y = 0, z = 0$, внутри первого октанта.

Указание. Двойной интеграл по плоским граням тела равен 0, ибо, например, на плоскости $z = 0$ и $\cos(n, i) = 0$ и $\cos(n, j) = 0$.

2414. Полагая в формуле Остроградского $P = x, Q = y, R = z$, получить формулу для объема:

$$V = \frac{1}{3} \int \int_{(S)} [x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma] ds.$$

Вычислить по этой формуле объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2415. Полагая в формуле Остроградского $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$ и $R = \frac{\partial u}{\partial z}$ (т. е. полагая вектор $\{P, Q, R\}$ равным $\operatorname{grad} u$), доказать, что $\int \int \int_{(V)} \Delta u dx dy dz = \int \int \int_{(S)} \frac{du}{dn} ds$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

2416. Проверить полученную в предыдущей задаче формулу для функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2417. Показать с помощью формулы Стокса, что $\int \limits_{(S)} (yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz)$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить это вычислением интеграла по контуру $\triangle OAB$ с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(1; 1; 0)$ и $B(1; 1; 1)$.

2418. Написать и проверить формулу Стокса для интеграла $\oint \limits_{(C)} [(z - y) \, dx + (x - z) \, dy + (y - x) \, dz]$, взятого по контуру $\triangle ABC$ с вершинами $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$ и $C(0; 0; a)$.

Указание. Двойной интеграл можно взять по любой поверхности, проходящей через периметр треугольника ABC , например по плоскости $x + y + z = a$.

2419. Написать и проверить формулу Остроградского для интеграла $\int \limits_{(S)} \int [x^3 \cos(n, i) + y^3 \cos(n, j) + z^3 \cos(n, k)] \, ds$, взятого на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Указание. Тройной интеграл преобразовать к сферическим координатам.

2420. Написать и проверить формулу Стокса для интеграла $\oint \limits_{(C)} [x(z - y) \, dx + y(x - z) \, dy + z(y - x) \, dz]$ по контуру треугольника с вершинами $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$ и $C(0; 0; a)$ (см. указание к задаче 2418).

2421. С помощью формулы Остроградского вычислить $\int \limits_{(S)} \int (x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dx \, dz + z^3 \, dx \, dy)$, взятый по наружной поверхности пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

ГЛАВА XIV

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды

1°. Ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ называется *сходящимся*, если сумма S_n его n первых членов при $n \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу S : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Число S называется *суммой* сходящегося ряда. Ряд несходящийся называется *расходящимся*.

Для сходимости ряда *необходимо* (но не достаточно), чтобы $u_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

2°. Интегральный признак сходимости ряда с положительными убывающими членами:

Если $u_n = f(n)$, где $f(x)$ — убывающая функция, и

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \begin{cases} A, & \text{то ряд сходится,} \\ \infty, & \text{то ряд расходится.} \end{cases}$$

3°. Признак Даламбера сходимости ряда с положительными членами:

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r \begin{cases} < 1, & \text{то ряд сходится,} \\ > 1, & \text{то ряд расходится,} \\ = 1, & \text{вопрос остается нерешенным.} \end{cases}$$

4°. Сравнение рядов с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

1) Если $u_n \leq v_n$ и ряд (2) *сходится*, то *сходится* и ряд (1).

2) Если $u_n \geq v_n$ и ряд (2) *расходится*, то *расходится* и ряд (1).

5°. Ряд с чередующимися знаками $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ сходится, если $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

6°. Абсолютная сходимость. Ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (3)$$

сходится, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4)$$

В этом случае ряд (3) называется *абсолютно сходящимся*. Если же ряд (3) сходится, а ряд (4) расходится, то ряд (3) называется *условно (неабсолютно) сходящимся*.

Выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда:

$$\mathbf{2422.} \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$$

$$\mathbf{2423.} \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\mathbf{2424.} \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

Исследовать по интегральному признаку сходимость ряда:

$$\mathbf{2425.} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\mathbf{2426.} 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

$$\mathbf{2427.} \frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$$

$$\mathbf{2428.} \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$$

$$\mathbf{2429.} \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$$

$$\mathbf{2430.} \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots$$

$$\mathbf{2431.} \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots$$

Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

$$\mathbf{2432.} \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

$$\mathbf{2433.} 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$$

$$\mathbf{2434.} 1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$\mathbf{2435.} 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$$

2436. $\frac{1}{2} + \frac{3!}{2 \cdot 4} + \frac{5!}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{7!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$

2437. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{5}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt[3]{3 \cdot 3^3}} + \frac{13}{\sqrt[3]{4 \cdot 3^4}} + \dots$

Сравнением с гармоническим рядом или с убывающей прогрессией исследовать сходимость ряда:

2438. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \dots$

2439. $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots$

2440. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \dots$

2441. Методом сравнения рядов показать, что ряд $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \dots$ при $|x| \leq 1$ расходится, а при $|x| > 1$ сходится.

Указание. Для сравнения в первом случае заменить x^2, x^4, x^6, \dots единицами, во втором случае отбросить в знаменателях единицы.

Найти сумму ряда:

2442. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

Указание. Разложить a_n на элементарные дроби.

2443. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$

Исследовать сходимость ряда:

2444. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \dots$

2445. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$

2446. $\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \dots$

2447. $\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots$

2448. Показать, что сумма S условно сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ уменьшится вдвое, если после каждого положительного члена ряда мы поместим два последующих отрицательных, и увеличится в полтора раза, если после каждой из двух положительных членов мы поместим один отрицательный.

Исследовать сходимость ряда:

2449. $1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{5}} + \dots$

2450. $1 + \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \dots$

2451. $\frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \dots$

2452. $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots$

2453. $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots$

2454. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$

2455. $\frac{21}{3} + \frac{41}{9} + \frac{61}{27} + \dots$

2456. $\frac{2}{1} + \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} + \dots$ **2457.** $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{5}} - \dots$

2458. $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$

2459. $1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^4} - \frac{1}{4a^6} + \dots$

Найти сумму ряда:

2460. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

2461. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

§ 2. Равномерная сходимость функционального ряда

1°. Совокупность значений x , при которых функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Функция $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ называется его *суммой*, а разность

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) — остатком ряда.$$

2°. Ряд (1) называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a, b]$, если для всякого $\epsilon > 0$ можно найти такой номер N , что при $n > N$ и любом x на отрезке $[a, b]$ будет выполнено неравенство $|R_n(x)| < \epsilon$.

3°. Признак равномерной сходимости. Ряд (1) сходится *абсолютно* и *равномерно* на отрезке $[a, b]$, если существует числовой сходящийся ряд с положительными членами

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots$$

такой, что $|u_n(x)| \leq c_n$ при $a \leq x \leq b$.

2462. Определить при $|x| < 1$ сумму и остаток ряда

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

и показать, что он сходится равномерно на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

При каком n остаток $|R_n(x)| < 0,001$ для любого x на этом отрезке?

2463. Показать, что ряд

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + x(1-x)^3 + \dots$$

сходится *неравномерно* на отрезке $[0; 1]$ и *равномерно* на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. При каком n остаток $|R_n(x)| < 0,01$ для любого x на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2464. Показать, что ряд $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. При каких n и любом x на этом отрезке $|R_n(x)| < 0,1$?

2465. Показать, что ряд $x^3 + \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{x^3}{(1+x^3)^2} + \dots$ сходится *неравномерно* при $x > 0$ и *равномерно* при $x \geq 1$. При каком n остаток $|R_n| < 0,001$ для любого $x \geq 1$?

2466. Показать, что ряд $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1+3x}} + \frac{1}{3^2\sqrt[3]{1+5x}} + \frac{1}{3^3\sqrt[3]{1+7x}} + \dots$ сходится равномерно

в интервале $0 \leq x < \infty$. При каком n (и любом неотрицательном x) остаток ряда $|R_n(x)| < 0,01$?

Указание. Сравнить данный ряд с числовым сходящимся рядом.

2467. Показать, что ряд $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+16} + \dots$ сходится равномерно на всей числовой оси. При каком n (и любом x) остаток ряда $|R_n(x)| < 0,0001$?

2468. Показать, что ряд $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots$ сходится равномерно к $\frac{1}{x}$ в интервале $0 < x < \infty$. При каком n (и любом $x > 0$) остаток ряда $|R_n(x)| < 0,1$?

2469. Показать, что ряд $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{2^3+2x}} + \frac{1}{\sqrt{2^4+3x}} + \frac{1}{\sqrt{2^6+4x}} + \dots$ сходится равномерно в интервале $0 \leq x < \infty$. При каком n остаток ряда $|R_n(x)| < 0,01$?

§ 3. Степенные ряды

Пусть дан степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

Число R называется *радиусом сходимости* ряда (1), если при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ — расходится. R можно найти или исследованием абсолютной сходимости ряда (1) по признаку Даламбера, или, когда все a_i отличны от нуля, по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. В частности, если этот предел равен ∞ , то ряд (1) абсолютно сходится на всей оси Ox .

Степенной ряд сходится не только *абсолютно*, но и *равномерно* на любом отрезке $[a, b]$, лежащем внутри *интервала сходимости* $(-R, R)$.

Определить интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала:

2470. $1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots$

2471. $1 - \frac{x}{5 \sqrt{2}} + \frac{x^3}{5^2 \sqrt{3}} - \frac{x^5}{5^3 \sqrt{4}} + \dots$

$$\mathbf{2472.} 1 + \frac{2x}{3^2\sqrt[3]{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt[3]{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt[3]{3^3}} + \dots$$

$$\mathbf{2473.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\mathbf{2474.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}.$$

$$\mathbf{2475.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}.$$

$$\mathbf{2476.} 1) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot n!; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}.$$

$$\mathbf{2477.} (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \dots$$

$$\mathbf{2478.} \frac{2x-3}{1} - \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} - \dots$$

Определить интервал сходимости ряда и найти его сумму:

$$\mathbf{2479.} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Указание. Для нахождения суммы S найти сначала $\int_0^x S dx$.

$$\mathbf{2480.} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Указание. Найти сначала $\frac{dS}{dx}$.

$$\mathbf{2481.} 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

Указание. Обозначив сумму ряда через S , составить выражение $S - Sx$ в виде суммируемого ряда.

$$\mathbf{2482.} 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Указание. Показать, что $\frac{S'}{m} + \frac{S'x}{m} = S$ и решить это дифференциальное уравнение.

Определить интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала:

$$\mathbf{2483.} 1 + \frac{2x}{\sqrt[5]{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt[9]{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt[13]{13 \cdot 5^3}} + \dots$$

$$\mathbf{2484.} \quad 1 - \frac{x^2}{3 \cdot 2 \sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2 \cdot 3 \sqrt{3}} - \frac{x^6}{3^3 \cdot 4 \sqrt{4}} + \dots$$

$$\mathbf{2485.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}. \quad \mathbf{2486.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$\mathbf{2487.} \quad \frac{x-1}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{(x-1)^5}{5 \cdot 2^5} + \dots$$

$$\mathbf{2488.} \quad \frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \dots$$

Определить интервал сходимости ряда и найти его сумму:

$$\mathbf{2489.} \quad 1 - 3x^3 + 5x^4 - 7x^6 + \dots$$

Указание. Для нахождения суммы S найти сначала $\int_0^x S dx$.

$$\mathbf{2490.} \quad x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Указание. Найти сначала $\frac{dS}{dx}$.

$$\mathbf{2491.} \quad 1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + \dots$$

Указание. Составить выражение $S + Sx$.

§ 4. Ряды Тейлора и Маклорена

1°. Формула Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + R_n(x), \quad (1)$$

где $R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)x$, $0 \leqslant 0 < 1$.

2°. Формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + R_n(x), \quad (2)$$

где $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}[a + 0(x-a)]$.

3°. Ряды Маклорена и Тейлора. Если при $n \rightarrow \infty$ в формулах (1) и (2) $R_n(x) \rightarrow 0$, то из этих формул получаются бесконечные ряды:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (3)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots, \quad (4)$$

сходящиеся к $f(x)$ при тех значениях x , при которых $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

4°. Разложения в ряды элементарных функций:

$$\left. \begin{array}{l} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{array} \right\} \text{сходятся к функции при всех значениях } x;$$

$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$ — биномиальный ряд; он сходится к биному $(1+x)^m$ при $|x| < 1$;

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ сходится к $\ln(1+x)$ при $-1 < x \leq 1$;

$\operatorname{arc tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ сходится к $\operatorname{arc tg} x$ при $|x| \leq 1$.

2492. Разложить в ряд по степеням x функции:

- 1) $\cos(x-a)$; 2) $\sin^2 x$; 3) xe^{ax} ; 4) $\sin\left(mx + \frac{\pi}{3}\right)$ и написать и исследовать формулу остаточного члена.

2493. Написать первые три члена разложения в ряд функции $f(x) = \ln(1+e^{kx})$.

2494. По формуле Маклорена написать разложение в ряд по степеням x бинома $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m$ и показать, что полученный ряд сходится при $|x| < a$.

2495. С помощью биномиального ряда показать, что при $|x| < 1$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} (-x)^{n-1}.$$

2496. С помощью биномиального ряда получить разложение в ряд функции

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots \text{ при } |x| < 1.$$

2497. Разложить в ряд по степеням x функции:

- 1) $\ln \frac{1+x}{1-x}$; 2) $\ln(2-3x+x^2)$; 3) $\ln(1-x+x^2)$.

2498. Интегрированием полученного в задаче 2496 ряда написать ряд для $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

2499. Разложить в ряд по степеням $x - a$ функцию $f(x) = e^{\frac{x}{a}}$ и написать и исследовать формулу остаточного члена ряда.

2500. Разложить функцию $f(x) = x^3 - 3x$ по степеням $x - 1$.

2501. Разложить x^4 по степеням $x + 1$.

2502. Разложить в ряд по степеням $x + 2$ функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ и исследовать сходимость ряда по признаку Даламбера.

2503. Разложить в ряды функции: 1) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ по степеням $x - \frac{\pi}{2}$; 2) $f(x) = \sin 3x$ по степеням $x + \frac{\pi}{3}$.

2504. Разложить в ряд по степеням $x + 1$ функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и исследовать по признаку Даламбера сходимость полученного ряда.

2505. Разложить в ряд по степеням x функции: 1) 2^x ; 2) $\cos\left(mx + \frac{\pi}{4}\right)$ и написать и исследовать формулы остаточных членов разложения.

2506. Разложить функцию $f(x) = x^4 - 4x^2$ по степеням $x + 2$.

2507. Разложить в ряд по степеням $x - \frac{\pi}{3}$ функцию $f(x) = \cos^2 x$ и написать и исследовать формулу остаточного члена ряда.

2508. Разложить в ряд по степеням $(x - 1)$ функцию $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$.

2509. Разложить в ряд по степеням $x - 4$ функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и исследовать по признаку Даламбера сходимость полученного ряда.

2510. С помощью биномиального ряда показать, что

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots \text{ при } |x| < 1.$$

2511. Почленным интегрированием ряда, полученного в задаче 2510, написать ряд для $\arcsin x$.

§ 5. Приложения рядов к приближенным вычислениям

2512. Написать биномиальный ряд для $\sqrt{1+x}$ и вычислить $\sqrt{1,004}$, $\sqrt{0,992}$, $\sqrt{90}$, ограничившись двумя членами ряда. Оценить погрешность.

2513. Написать биномиальный ряд для $\sqrt[3]{1+x}$ и вычислить $\sqrt[3]{1,006}$, $\sqrt[3]{0,991}$, $\sqrt[3]{130}$, ограничившись двумя членами ряда. Оценить погрешность.

2514. Вычислить $\sin 12^\circ$, ограничившись двумя членами ряда для $\sin x$, и оценить погрешность.

Указание. $x = 12^\circ$, в радианах $x = \frac{\pi}{15} = 0,2094$. Верхнюю границу погрешности определить из условия $x < 0,3$.

2515. Делением числителя дроби $\frac{1}{1+x^2}$ на ее знаменатель получить разложение $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2}$ и, проинтегрировав почленно полученный ряд, написать разложение в ряд $\arctg x$.

2516. Полагая $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ в разложении $\arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$, получить ряд для вычисления π :

$$\pi = 2\sqrt[3]{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) 3^{n-1}}.$$

2517. Вычислить π , взяв пять членов ряда задачи 2516.

2518. С помощью полученного в задаче 2497 ряда:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]$$

вычислить $\ln 2$; $\ln 3$; $\ln 4$; $\ln 6$.

Указание. Положив $\frac{1+x}{1-x} = 2$, найти x и т. д.

2519. Определить в виде рядов интегралы $\int \frac{\sin x}{x} dx$ и $\int \frac{e^x}{x} dx$.

2520. Определить в виде ряда функцию $\Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx$ и вычислить $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$, взяв столько членов, сколько нужно для того, чтобы погрешность была меньше 0,001.

2521. Определить в виде ряда функцию $\Phi(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1+x^2} dx$ и вычислить $\Phi\left(\frac{1}{5}\right)$, взяв столько членов, сколько нужно для того, чтобы погрешность была меньше 0,00001.

2522. Найти в виде ряда решение уравнения $y'' = x^2 y$ с начальными условиями: при $x = 0$ $y = 1$, $y' = 1$.

2523. Найти первые четыре члена ряда, определяющего решение уравнения (Риккати) $y' = 1 + x - y^2$ с начальными условиями: $y = 1$ при $x = 0$.

2524. Написать в виде ряда решение уравнения Бесселя $xy'' + y' + xy = 0$ с начальными условиями: при $x = 0$ $y = 1$, $y' = 0$.

2525. Вычислить $\sqrt[4]{1,005}$; $\sqrt[3]{1,0012}$; $\sqrt[4]{0,993}$; $\sqrt[3]{0,997}$; $\sqrt[4]{110}$; $\sqrt[3]{70}$; $\sqrt[5]{40}$, ограничившись двумя членами биномиального ряда $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$ и оценить погрешность.

2526. Вычислить $\cos 12^\circ$, ограничившись двумя членами разложения в ряд $\cos x$. Оценить погрешность.

2527. Полагая в разложении в ряд $\arcsin x$ (задача 2511) $x = \frac{1}{2}$, вычислить π , ограничиваясь тремя членами ряда.

Указание. Сначала вычислить первый из отброшенных членов, а затем выразить десятичной дробью каждый из первых трех числов с погрешностью не больше первого отброшенного члена.

2528. Пользуясь тождеством $\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$, написать выражение для π через сумму двух бесконечных рядов.

2529. Полагая в разложении $\ln(1+x)$ в ряд $x = \frac{1}{N}$, получить формулы:

$$1) \ln(N+1) = \ln N + \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \dots \right];$$

$$2) \lg_{10}(N+1) = \lg_{10}N + 0,4343 \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \dots \right].$$

2530. Зная $\ln 2 = 0,6931$, вычислить $\ln 5$ и $\ln 10$ и показать, что модуль $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343$.

2531. Вычислить $\lg_{10} 101$ и $\lg_{10} 102$.

2532. Определить в виде ряда длину дуги эллипса.

2533. Вычислить $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$, взяв столько членов

ряда, сколько нужно для того, чтобы погрешность была меньше 0,001.

2534. Определить в виде ряда функцию $\Phi(x) = \int_0^x \cos \frac{x^2}{4} dx$ и вычислить $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ с точностью до 0,000001.

2535. Написать первые три члена ряда, определяющие решение уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющее условию: $y=0$ при $x=0$.

2536. Написать в виде ряда решение уравнения $y'' + xy = 0$ с начальными условиями: при $x=0$ $y=1$. $y'=0$.

2537. Написать в виде рядов уравнения переходной кривой, вдоль которой кривизна k нарастает пропорционально длине дуги s .

Указание. Из условия $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{s}{C}$, где C — постоянное, найти φ и затем решить уравнения: $dx = ds \cos \varphi$ и $dy = ds \sin \varphi$.

§ 6. Ряд Тейлора для функции двух переменных

Формулу Тейлора для функции двух переменных можно написать в трех следующих видах:

$$\begin{aligned} F(x+h, y+l) &= F(x, y) + \frac{1}{1!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y} \right] F(x, y) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 F(x, y) + \dots \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x, y) = F(a, b) + \frac{1}{1!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right] F(a, b) + \\ + \frac{1}{2!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 F(a, b) + \dots, \quad (\text{II}) \\ \Delta z = \frac{dz}{1!} + \frac{d^2z}{2!} + \dots + \frac{d^nz}{n!} \Big|_{\substack{x=x_0+0\Delta x \\ y=y_0+0\Delta y}}. \quad (\text{III}) \end{aligned}$$

2538. Написать разложение функции $F(x+h, y+l)$ по формуле Тейлора (I), если $F(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

2539. Разложить функцию $F(x, y) = x^3 + 2xy^2$ по степеням $(x-1)$ и $(y-2)$ [формула (II)].

2540. Разложить функцию $F(x, y) = \ln(x-y)$ по степеням x и $(y+1)$, написав члены 1-го и 2-го порядков и остаточный член [формула (II)].

2541. Разложить функцию $F(x, y) = \sin(mx+ny)$ по степеням x и y , написав члены 1-го, 2-го и 3-го порядков и остаточный член [формула (II) при $a=b=0$].

2542. Разложить по степеням x и y функцию $e^{-x^2-y^2}$ [формула (II) при $a=b=0$].

2543. Определить приращение Δz функции $z = x^2 - xy + y^2$ [формула (III)] и вычислить его при условии, что x изменяется с 2 до 2,1, а y изменяется с 3 до 2,8.

2544. Определить приращение Δz функции $z = \cos(ax-by)$, написав два члена формулы (III) и остаточный член.

2545. Функцию $F(x, y) = x^2y$ разложить по степеням $(x-1)$ и $(y+1)$ [формула (II)].

2546. Функцию $F(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ разложить по степеням $(x-1)$ и y , ограничившись членами 1-го и 2-го порядков.

2547. Разложить функцию $z = y^x$ по степеням $(x-2)$ и $(y-1)$, написав члены 1-го и 2-го порядков, и вычислить $1,1^{2,1}$.

2548. Определить приращение Δz для функции $z = x^2y - y^2$ и вычислить его с точностью до 0,0001 при условии, что x изменяется от 2 до 1,99, а y — от 5 до 5,02.

§ 7. Ряд Фурье. Интеграл Фурье

1°. Определение. Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке $[a, b]$, если она на этом отрезке:
 1) имеет конечное число разрывов, причем все они первого рода;
 2) имеет конечное число экстремумов;
 3) во всех точках (a, b) $f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

2°. Функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле на отрезке $[-l, l]$, может быть определена во всех точках этого отрезка рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right], \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2)$$

Если $f(x) = f(-x)$, т. е. $f(x)$ — функция четная, то $b_n = 0$ и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (3)$$

Если $f(x) = -f(-x)$, т. е. $f(x)$ — функция нечетная, то $a_n = 0$ и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4)$$

Если функцию $f(x)$, определенную рядом (1) на отрезке $[-l, l]$, продолжить по периодическому закону с периодом $2l$, потребовав, чтобы $f(l) = \frac{f(l-0) + f(l+0)}{2}$, то она будет определяться рядом (1) и на всем своем продолжении.

3°. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$ (т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится) и удовлетворяет условиям Дирихле на всяком конечном отрезке, то она может быть представлена интегралом Фурье:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt = \\ &= \int_0^\infty [a(\alpha) \cos \alpha x + b(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$a(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos at dt \text{ и } b(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin at dt. \quad (6)$$

Разложить в ряды Фурье следующие периодические функции с периодом 2π :

2549. $f(x) = 1$ при $0 < x < \pi$ и $f(-x) = -f(x)$. С помощью полученного ряда показать, что

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

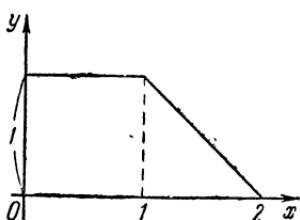
2550. $f(x) = x$ при $0 \leq x \leq \pi$ и $f(-x) = f(x)$. С помощью полученного ряда показать, что

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

2551. $f(x) = x^2$ при $-\pi \leq x \leq \pi$. С помощью полученного ряда показать, что

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12};$$

$$2) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$



Черт. 37.

2552. $f(x) = \begin{cases} \pi & \text{при } -\pi < x < 0, \\ \pi - x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Разложить в ряд Фурье периодические функции с периодом $2l$:

2553. $f(x) = 1$ при $0 < x < l$ и $f(-x) = -f(x)$.

2554. $f(x) = 1 - x$ при $0 \leq x \leq l$, $f(-x) = f(x)$, $l = 1$.

2555. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -l < x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < l. \end{cases}$

2556. $f(x)$ в области $(0, 2]$ задана графиком (черт. 37) и продолжена: 1) по четному; 2) по нечетному периодическому закону с периодом $2l = 4$. Разложить каждую из этих функций в ряд Фурье.

2557. Распространение тепла в стержне длиной l определяется уравнением $\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $u(x, t)$ — температура,

и условиями

1) граничными: $u = 0$ при $x = 0$ и при $x = l$;

2) начальными: $u = \begin{cases} x & \text{при } x < \frac{l}{2}, \\ l-x & \text{при } x > \frac{l}{2} \end{cases}$ при $t = 0$.

Определить методом Фурье функцию $u(x, t)$.

2558. Продольные колебания стержня длиной l , у которого один конец (при $x = 0$) заделан, а другой (при $x = l$) свободен, определяются уравнением $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $u(x, t)$ — продольное смещение, и условиями

1) граничными: $u = 0$ при $x = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x = l$;

2) начальными: $u = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ при $t = 0$.

Определить методом Фурье функцию $u(x, t)$.

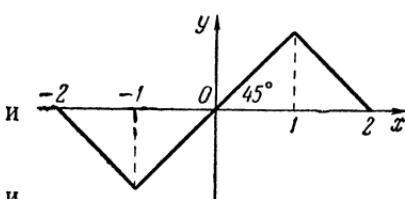
2559. Поперечные колебания стержня длиною l , опертого в обоих концах, определяются уравнением

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

с условиями

1) граничными: $u = 0$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$;

2) начальными: $u = f(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ при $t = 0$.



Черт. 38.

Определить методом Фурье функцию $u(x, t)$.

В задачах 2560—2562 написать интеграл Фурье для функций:

2560. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ и $f(-x) = -f(x)$.

2561. $f(x) = e^{-\beta x}$ при $x \geq 0$ и $f(-x) = f(x)$.

2562. $f(x)$, заданной на отрезке $[2; 2]$ графиком на черт. 38 и равной нулю вне этого отрезка.

Разложить в ряды Фурье функции:

2563. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x \leq \pi$

$$f(-x) = f(x), \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

2564. $f(x) = |\sin x|$; с помощью полученного ряда показать, что $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}$.

2565. $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ и $f(-x) = -f(x)$.

2566. $f(x) = x$ при $0 \leq x \leq l$,

$$f(-x) = f(x), \quad f(x + 2l) = f(x).$$

2567. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ и $f(x + 2) = f(x)$.

2568. $f(x) = e^x$ при $-l < x < l$ и $f(x + 2l) = f(x)$.

2569. Методом Фурье решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при условиях:

1) при $x = 0$ $u = 0$, при $x = \pi$ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

2) при $t = 0$ $u = f(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

2570. Написать интеграл Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

О Т В Е ТЫ

- 1.** $AB = 9$, $BC = -6$, $AC = 3$, $9 - 6 = 3$. **3.** $5(2 + \sqrt{2})$, 90° , 45° . **5.** 20. **6.** $5\sqrt{2}$. **7.** (5; 5), (5; -3). **8.** $B(0; 2)$ и $B(0; -4)$.
9. $x = a \pm \sqrt{c^2 - b^2}$; при $c > |b|$ две точки, при $c = |b|$ одна, при $c < |b|$ ни одной. **10.** $M(5; 0)$. **11.** Центр (1; -1), $R = 5$.
12. $\text{пр}_x \overline{AB} = -2$, $\text{пр}_y \overline{AB} = -4$, $|\overline{AB}| = 2\sqrt{5}$. **13.** $B(5; 8)$, $|\overline{AB}| = 3\sqrt{2}$. **14.** $B(4; -3)$. **15.** -4; 1; 3. **16.** $18\sqrt{2}$. **17.** (0; 2,9).
18. $B(4; 0)$, $B_1(-8; 0)$. **19.** Центр (2; -1), $R = 5$. **21.** $X = 7$, $Y = -1$, $5\sqrt{2}$. **22.** $M(1; 4)$, **23.** $M(13; 16)$. **24.** $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$. **26.** В 26 см от центра шара весом 100 Г.

27. (1; 2,5). **29.** $OC = 5$, $OD = \frac{24\sqrt{2}}{7}$.

30. (3; 3). **31.** 9 кв. ед. **33.** 13 кв. ед. **34.** (1; 3), если силы направлены в одну сторону, и (25; 27), если в разные стороны. **35.** (1; -1);

36. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. **37.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. **38.** $\left(\frac{37}{27}; \frac{13}{27}\right)$.

39. $C_1(3; 0)$, $C_2(-7; 0)$. **40.** $M(2; -6)$, $N(5; 8)$, $P(-4; 1)$, $k = \frac{7}{3}$.

42. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, A и O лежат на окружности. **43.** $x - y - 2 = 0$, D и E лежат на линии. **45.** $x^2 + y^2 = 8$. **46.** $y = \pm x$.

47. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. **48.** $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. **49.** $y = \pm 2x$. **51.** (1; 0), (3; 0), (0; 3). **53.** $y^2 = 8(x - 2)$. **54.** $2x - y + 5 = 0$. Точки B и D лежат на линии. **55.** $x^2 + y^2 = 4$. **57.** $y = \frac{x^2}{4} + 1$.

58. $\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 4$, или $xy = 2$; при $x = \pm \frac{1}{2}$, ± 1 , ± 2 , ± 4 , $y = \pm 4$, ± 2 , ± 1 , $\pm \frac{1}{2}$; по этим точкам можно построить кривую. **59.** $y = x + 3$, $y = -x + 3$. **60.** $y = x\sqrt{3} - 3$, $y = -x\sqrt{3} - 3$. **62.** $y = -1,5x$. **63.** 1) $k = \frac{2}{3}$, $b = -2$; 2) $k = -\frac{2}{3}$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = -3$; 4) $k = -\frac{3}{4}$, $b = 3$.

65. $k = 1$, $b = 1$, $y = x + 1$. **66.** 1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$; 2) $\frac{x}{-4/3} + \frac{y}{2} = 1$.

67. $y = 0$; $4x - 3y = 0$; $y = 4$; $4x - 3y + 12 = 0$. **68.** $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

или $-\frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 1$. **69.** $\text{пр}_{Ox} \overline{AB} = 8$, $\text{пр}_{Oy} \overline{AB} = 6$, $|\overline{AB}| = 10$.

70. A и C — на прямой, B — «выше», а D — «ниже» прямой. **71.** Неравенства определяют: 1) все точки, лежащие «выше» прямой $y = 3x + 1$ (полуплоскость); 2) все точки, лежащие «ниже» прямой $y = 3x + 1$;

3) все точки, лежащие «выше» прямой $y = 4 - 2x$ и на самой прямой; 4) точки, лежащие «ниже» прямой $y = 4 - 2x$. **73.** $x - y = \pm a$.

74. Через t секунд координаты точки M будут $x = a + mt$, $y = b + nt$.

Исключив t , получим уравнение траектории: $\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n}$.

75. 1) $y = x\sqrt{3} - 2$; 2) $y = -x\sqrt{3} - 2$. **76.** $k = 1$, $b = 5$.

77. $x + y - 4 = 0$; $x - y + 4 = 0$; $y = 3$, $y = 0$. **78.** $\frac{x}{5} \pm \frac{y}{3} = \pm 1$.

79. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ и $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-6} = 1$. **80.** $y = \pm 2(x + 3)$. **81.** $AB = 4\sqrt{5}$,

$\text{пр}_{Ox} \overline{AB} = 4$, $\text{пр}_{Oy} \overline{AB} = 8$. **82.** 1) $\arctg \frac{3}{4}$; 2) 45° ; 3) 45° ; 4) 0° ;

5) 90° ; 6) $\arctg \frac{a^2 - b^2}{2ab}$. **86.** $5x + 2y + 4 = 0$; $5x + 2y = 25$. **88.** $x - 3y + 2 = 0$; $5x - y = 4$; $3x + y = 12$. **89.** 28° , $12^\circ 30'$ и $139^\circ 30'$.

90. $y = 3x$ и $y = -\frac{1}{3}x$. **91.** $x - 5y + 6 = 0$; $5x + y = -4$. **92.** $y = 2x - 6$; $y = -2x + 6$. **93.** $(3; -1)$, $(3; 3)$; $\left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$, 45° ,

$71^\circ 34'$, $63^\circ 26'$, **94.** $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$. **95.** AE : $2x - 5y = -4$; AD : $x - 2y = -2$; $\sqrt{29}$. **96.** $A = 18^\circ 26'$, $B = 26^\circ 34'$; $C = 135^\circ$. **97.** $x + 2y - 11 = 0$. **98.** $\tg A = \frac{4}{3}$; $\tg B = \tg C = 2$; $S = 16$. **99.** $(1; -1)$, $\left(\frac{8}{3}; -2\right)$. **100.** $2x + y = -4$; $2x - y = -4$; $2x + y = 4$. **103.** 2,8;

104. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **105.** $k = \pm 2$. **107.** Две прямые, параллельные

данной: $4x - 3y \pm 20 = 0$. **108.** $8x - 15y + 6 = 0$; $8x - 15y = 130$.

109. $x - y = 0$ и $x + y - 4 = 0$. **110.** $3x - y = 12$ и $x + 3y = 4$.

111. $x + y = 2$ или $4x + y - 8 = 0$. **112.** $31x + 26y = -21$.

113. $x + 3y = 2$. **114.** $\sqrt{10}$. **115.** $3x - 4y + 10 = 0$; $x = 2$. **116.** $h = \frac{18}{\sqrt{34}}$.

117. Прямые: $x + y = 0$ и $x - 3y = 0$; расстояния: $d_1 = 2\sqrt{2}$, $d_2 = 0,4\sqrt{10}$. **118.** Пара прямых: $x + 2y = 0$ и $x + 2y = 10$.

119. $x + 3y = 0$ и $3x + y = 0$. **120.** $11x + 22y = 74$. **121.** $y = -\frac{x}{2}$

- и $y = -\frac{3}{2}x$. **122.** $x + 2y = 4$. **123.** $y = 0$; $2x + 3y = -4$; $y = -4$; $2x + 3y = 0$; $x + 2y = -2$; $y = -x$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{8}$. **124.** $18^\circ 26'$, $108^\circ 27'$; $S_\Delta = \frac{2b^2}{3}$. **125.** $\frac{a^3}{5}$ кв. ед. **126.** $A = 36^\circ 52'$; $B = 127^\circ 52'$.
- 127.** $4(\sqrt{10} + \sqrt{5})$; **20.** **128.** $2x - y + 6 = 0$; $x - 4y = 4$; $2x - 3y + 2 = 0$. **129.** $y = x + 2$; $x - 5y = 6$; $y = -x$; $2y = x$. **130.** $\sqrt{10}$.
- 131.** Точка движется по сторонам квадрата, ограниченного прямыми: $x - 3y = \pm 5$, $3x + y = \pm 5$. **133.** $h_1 = h_2 = \frac{6}{\sqrt{5}}$. **134.** $\left(\frac{3}{5}; \frac{19}{5}\right)$, $\left(-\frac{9}{5}; -\frac{17}{5}\right)$. **135.** (4; 5). **136.** (0; 2), (4; 0), (2; 4), (-2; 6). **137.** $y - x = 2$; $x + 2y = 4$; $2x + y = 8$. **138.** $B(2; 1)$, $C(-1; -5)$. **139.** $y = 2x + 6$, $\frac{12}{\sqrt{15}}$; $\angle DAB \approx 53^\circ$. **140.** $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$; A и O — на окружности, B — вне ее. **141.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$. **143.** (0; 0), (-2,5; 2,5). **144.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ или $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **145.** $\operatorname{tg} \alpha = -2,4$, $\alpha = 112^\circ 37'$. **146.** $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$. **147.** $x^2 + y^2 - 8y = 0$. **149.** $y = \frac{4}{3}x$ и $y = 0$. **150.** $y^2 = x(a-x)$. **151.** $(x-3)^2 + y^2 = 9$. **152.** $x^2 + \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$. **153.** $x^2 + y^2 = a^2$. **154.** $x^2 + y^2 = ax$. **155.** $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$. **156.** 1) (3; -2), $R = 6$; 2) $\left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $R = 4$; 3) $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$, $R = \frac{7}{2}$. **157.** $x^2 + y^2 + 4y = 0$; (0; 0), (2; -2), (-2; -2). **158.** $x^2 + y^2 + ax + ay = 0$. **159.** $y = 0$, $15x + 8y = 0$. **160.** 90° . **161.** $x + y = 3$. **162.** $x^2 + y^2 + ax = 0$. **163.** $(x-2)^2 + y^2 = 16$. **164.** $x^2 + y^2 = 2ax$. **165.** $a = 4$; $b = 2$; $c = 2\sqrt{3}$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **166.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. **167.** $b = 1,4$; 3; 4; 4,8; 5; $\varepsilon = 0,96$; 0,8; 0,6; 0,28; 0. **168.** $a = 150$ млн. км; $\varepsilon = \frac{1}{60}$. **169.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $r = 4 - \sqrt{3}$; $r_1 = 4 + \sqrt{3}$. **170.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$; $r = 11$; $r_1 = 5$. **171.** $4\sqrt{3}$. **172.** $\sqrt{0,4}$. **173.** $\left(\frac{2}{7}; \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$. **174.** $\left(-\frac{15}{4}; \pm \frac{\sqrt{63}}{4}\right)$. **175.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$. **176.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. **178.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. **179.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, или $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$. **180.** $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r = 3$, $r_1 = 9$. **181.** $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

- 182.** $\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и $(0; -1)$. **183.** $(-5; 7)$. **184.** $(\pm\sqrt{15}; \pm 1)$.
- 185.** $x^2 + 4y^2 = 16$. **186.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. **187.** $\epsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $53^\circ 08'$.
- 188.** $r = 1$, $r_1 = 9$. **189.** 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$. **190.** $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$; $2\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. **191.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **192.** $x^2 - y^2 = a^2$.
- 193.** $(0; \pm a\sqrt{2})$; 90° . **194.** $y + 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$. **195.** b ; $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}$.
- 196.** $\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$; $b > a$. **197.** 1) $\epsilon = 2$; 2) $\epsilon = \sec \alpha$. **198.** $y \leq -3$, $y < -|x|$. **199.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. **200.** $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ (при $x > 0$).
- 201.** $x^2 - y^2 = a^2$. **202.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **203.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (или $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$). **204.** $(0; 0)$ и $(6; \pm 2\sqrt{3})$. **205.** $y = \pm \frac{4}{3}(x+5)$.
- 206.** $(-9,6; \pm \frac{1}{2}\sqrt{119})$. **207.** $(\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{2})$. **208.** $(-4; 3)$ и $(-\frac{4}{7}; -\frac{3}{7})$. **209.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. **210.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ (при $x > 0$).
- 211.** $y = 3 - \frac{x^2}{4}$. **212.** $y^2 = 8(x+2)$. **214.** 1) $y^2 = 9x$; 2) $y = -x^2$.
- 215.** $y = \frac{a}{b^2}x^2$. **216.** $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = p^2$; $\left(\frac{p}{2}; \pm p\right)$. **217.** $y = -\frac{x^2}{2}$.
- 218.** $(3; \pm 3\sqrt{2})$. **219.** 40 см. **221.** $y^2 = px$. **222.** $y^2 = 4ax$ и $y = 0$.
- 224.** $y^2 = 8(2-x)$. **225.** $y = x - \frac{x^2}{4}$; $O_1(2; 1)$. **226.** 1) $y^2 = -4x$;
- 2) $y = x^2$. **227.** $y^2 = -3x$. **228.** $(0; 0)$, $(6; \pm 2\sqrt{3})$. **229.** $x = 0$;
 $x+y+2=0$. **230.** $y = -\sqrt{3}(x+1); \frac{16}{3}$. **231.** $r = 7,4$; $d = 9,25$.
- 232.** Директрисы $x = \pm 3,2$; $\epsilon = 1,25$; $r = 10,25$; $d = 8,2$.
- 233.** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. **234.** $x^2 - y^2 = 12$. **235.** Сопряженный диаметр
 $y = -\frac{x}{2}$; $a_1 = b_1 = \sqrt{10}$. **236.** Сопряженный диаметр $4y + x = 0$;
- 31°.** **237.** Уравнение диаметра $y = \frac{b}{a}x$; его длина $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$.
- 238.** $y = 1,5x$. **239.** $y = 2$. **240.** $8x - 9y + 25 = 0$.
- 241.** $y = 2x + 3$. **243.** 1) $x \pm 2\sqrt{3}y = 8$; 2) $2x \pm y = 1$; 3) $x \pm 2y = -2$.
- 245.** $x - y = \pm 5$. **246.** $y = \pm 2x + 6$. **247.** $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- 249.** $y = 2x \pm 4\sqrt{2}$. **250.** Уравнение нормали MN : $a^2y_0x - b^2x_0y = c^2x_0y_0$. Положив $y = 0$, найдем абсциссу точки N пересечения

нормали MN с осью Ox : $x_1 = \epsilon^2 x_0$. Тогда $FN = c - \epsilon^2 x_0 = \epsilon r$, $F_1 N = c + \epsilon^2 x_0 = \epsilon r_1$, т. е. нормаль MN делит FF_1 в отношении $r:r_1$ и поэтому есть биссектриса. **252.** Нормаль к параболе $y^2 = 2px$ имеет уравнение $y_0 x + py = y_0(p + x_0)$. Положив $y = 0$, найдем $x_1 = p + x_0$, $FN = x_1 - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + x_0 = FM$, т. е. $\angle FMN = \angle FNM$.

253. $(\pm 3,2; \pm 2,4)$. **254.** Диаметры $y = x$ и $y = -\frac{x}{4}$; угол $59^\circ 02'$.

255. $y = \frac{x}{4}$. **256.** $4x - y = 6$. **257.** $\arctg 3 \approx 71^\circ 31'$. **259.** $x + y + 2 = 0$. **260.** 1) $O_1(1; 2)$, 2) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$. **261.** 5) $X^2 + 4Y^2 = 16$;

6) $Y^2 = 4X$; 7) $X^2 - 4Y^2 = 4$; 8) $Y = \frac{1}{2}X^2$. **262.** 1) $X^2 + 4Y^2 = 16$; 2) $X^2 - 4Y^2 = 16$. **263.** $X^2 - Y^2 = 8$. **264.** 1) $XY = 6$; 2) $XY = -6$; 3) $XY = 4$; 4) $XY = -6$. **268.** Уравнение струи: $y = 16(x - x^2)$; при $x = 0,75$ м $y = 3$ м. **269.** $y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

270. $x^2 + y^2 + 4x = 0$. **271.** 1) 45° ; 2) $\arctg 2$. **272.** $y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos \varphi}$. **273.** $y^2 = 24x + 3x^3$ (гипербола). **275.** 1) Эллипс;

2) гипербола. **276.** 1) $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{2} = 1$, $O_1(3; -1)$; 2) $X^2 - Y^2 = 9$;

3) $Y^2 = 2X$; 4) $X^2 = 4Y$. **277.** $X^2 + 2Y^2 = 4$. Фокусы в старой системе: $(1; 1)$ и $(-1; -1)$. **278.** $(x+1)^2 + y^2 = 4$. **279.** $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$. **280.** $x + 3y = 0$. **281.** $y^2 = 4(x+4)$. **283.** $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. **284.** $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. **285.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **286.** Основание $AB = 2a$, высота $OD = \frac{a}{\sqrt{5}}$, площадь $\frac{a^2}{\sqrt{5}}$. **287.** За начало примем точку O , делящую AB в отношении $AO:OB = m$, а за ось Ox — прямую OB ; пусть $OB = a$, тогда координаты точек A и B будут: $A(-ma; 0)$, $B(a; 0)$. Уравнение искомой линии: $(m-1)x^2 + (m-1)y^2 = 2max$; при $m \neq 1$ окружность: $x^2 + y^2 = \frac{2ma}{m-1}x$;

при $m = 1$ прямая: $x = 0$. **288.** Точку O примем за начало, а OB за ось Ox . Уравнение искомой линии: $(a-b)(x^2 + y^2) = 2abx$; при $a \neq b$ окружность: $x^2 + y^2 = \frac{2ab}{a-b}x$; при $a = b$ прямая: $x = 0$.

289. $2(k^2x^2 + y^2) = a^2(k^2 + 1)$; эллипс при $k \neq 1$, окружность $x^2 + y^2 = a^2$ при $k = 1$. **290.** $\frac{x^2 + 10x}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$. **291.** $3a^2\sqrt{3}$.

292. $\arctg \frac{3}{4} \approx 36^\circ 52'$. **293.** $(\pm a; \pm a)$. **294.** $A(\sqrt{6}; 0)$; $B(2; -2)$, $C(-2\sqrt{2}; \sqrt{2})$; пл. $\triangle ABC = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$. **295.** $2\sqrt{2}$;

- $y = x - 2$. **297.** $\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9p^2}{16}$. **298.** $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9p^2}{16}$. **299.** $ax - by + a^2 + b^2 = 0$; $d = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **300.** Вычитая уравнения получим, получим $4(y - x) = (y + x)(y - x)$; отсюда 1) $y = x$; 2) $x + y = 4$; следовательно, точки пересечения парабол лежат на прямой $y = x$ или на прямой $x + y = 4$; найдем: $x_1 = 2$; $x_2 = -6$; длина хорды $8\sqrt{2}$. **301.** 30. **302.** $x^2 + y^2 = a(x + y)$. **303.** $\frac{(x - 2)^2}{4} + y^2 = 1$ [эллипс с центром $(2; 0)$]. **304.** $xy = 4$. **305.** $y = \frac{x^2 - 6x + 25}{8}$. **306.** $X^2 - Y^2 = 4$; $O_1(2; -3)$. **307.** $\frac{(x - 2,5)^2}{2,25} - \frac{y^2}{4} = 1$ [гипербола с центром $(2,5; 0)$]. **308.** Пусть $M(x, y)$ — точка эллипса. Тогда $FM + F_1M = AF + AF_1$ или $\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 4a$; $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8a^2$; после поворота осей на 45° : $X^2 + 2Y^2 = 4a^2$. **309.** $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$; новое уравнение $X^2 - Y^2 = 4$. **310.** $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 20$; поворотом осей на угол $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$ приводится к виду $X^2 - Y^2 = 4$ (см. 309). **311.** $y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$. **313.** 1) пара прямых $y = \pm 2x$; 2) точка $(0; 0)$; 3) мнимая окружность; 4) точка $(3; 4)$; 5) пара прямых $x = 0$, $y = -x$; 6) пара прямых $y = \pm 4$; 7) пара прямых $y = x$ и $y = -\frac{x}{2}$. **314.** 1) $(1; -1)$, $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) $(2; 1)$, $X^2 - Y^2 = 9$; 3) $2X^2 + 5XY + 2Y^2 = 8$. **315.** 1) $\frac{X^2}{24} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{6} = 1$. **316.** 1) $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{4} = 1$. **317.** 1) $Y^2 = 2\sqrt{5}X$; 2) пара прямых $x - 2y = \pm 3 \pm 1$. **318.** 1) $3y = 2x - 7 \pm (x - 2)$; 2) точка $(2; -1)$; 3) $4y = -2x - 3 \pm 1$. **319.** $4X^2 - Y^2 = 8$; центр $(2; 0)$; $\varphi = -45^\circ$. **320.** $5(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. **321.** Повернув оси на -45° , получим: $Y = \frac{X^2}{a\sqrt{2}} + \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ определяет дугу AB этой параболы (черт. 91), на которой $x \leq a$ и $y \leq a$. **322.** $(x - m)^2 + (y - n)^2 - e^2(x \cos \alpha + y \sin \alpha - q)^2 = 0$; $A + C = 2 - e^2$; $\delta = -1e^2$. **323.** 1) Пара прямых $x \pm 2y = 0$; 2) точка $(-2; 2)$; 3) пара прямых $y = x$; $x + 6y = 0$. **324.** 1) $\frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{X^2}{20} - \frac{Y^2}{5} = 1$. **325.** 1) $Y^2 = 4\sqrt{2}X$; 2) прямые: $x + y = 2 \pm 1$. **326.** 1) $y = x - 2 \pm 1$; 2) $3y = x - 5 \pm 2(x + 1)$. **327.** 1) $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 48x - 48y + 144 = 0$; 2) $x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 6y - 18 = 0$. **328.** $(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0$; $Y^2 = a\sqrt{2}X$. **329.** $x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$; $X^2 - Y^2 = 3,2\sqrt{5}$. **335.** 1) $r = \frac{a}{\cos \varphi}$;

$$2) r = \frac{a \sin \alpha}{\sin \varphi}.$$

$$336. r = \frac{a \sin (\beta - \alpha)}{\sin (\beta - \varphi)}.$$

$$337. r = 2a \cos \varphi.$$

338. 1) $r_{\max} = 5$ при $\varphi = 135^\circ, 315^\circ$; $r_{\min} = 1$ при $\varphi = 45^\circ, 225^\circ$; $r = 3$ при $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$; 2) $r_{\max} = 3$ при $\varphi = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$; $r_{\min} = 1$ при $\varphi = 60^\circ, 180^\circ, 360^\circ$; 3) $r_{\max} = 2$ при $\varphi = 90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$; $r_{\min} = 0$, при $\varphi = 30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$. **339.** 1) $r_{\max} = a$ при $\varphi = 30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$; $r = 0$ при $\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$; 2) $r = a$ при $\varphi = 45^\circ, 225^\circ$; $r = -a$ при $\varphi = 135^\circ, 315^\circ$; $r = 0$ при $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ (см. стр. 354, черт. 87). **340.** 1) $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$; 2) $r = a$;

$$3) r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}; \quad 4) \operatorname{tg} \varphi = 1; \quad 5) r = a \cos \varphi; \quad 6) r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

341. 1) $x = a$; 2) $x^2 + y^2 = 2ay$; 3) $xy = a^2$; 4) $x + y = 2a$; 5) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. **342.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $y^2 = 6x$. **343.** $r = \frac{a}{\sin \varphi} \pm b$. **344.** $r = OB \pm AB = \frac{a(1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}$

или в декартовых координатах $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$. **345.** $FM^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \varphi$; $F_1M^2 = r^2 + a^2 + 2ra \cos \varphi$; $FM^2 \cdot F_1M^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4r^2a^2 \cos^2 \varphi = b^4$; отсюда $r^4 - 2a^2r^2 \cos 2\varphi = b^4 - a^4$. **346.** $r = a(1 + \cos \varphi)$; $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. **347.** Пусть C — центр неподвижного круга, C_1 — центр смещенного круга и $M(\varphi; r)$ — текущая точка. Так как $\angle OCC_1 = \angle MC_1C = \varphi$ и $CO = C_1M = \frac{1}{2}a$, то $OM \parallel CC_1$. Спроектировав ломаную $COMC_1$ на CC_1 , получим:

$\frac{a}{2} \cos \varphi + r + \frac{a}{2} \cos \varphi = a$. Отсюда $r = a(1 - \cos \varphi)$. **348.** 1) $r_{\max} = 5$ при $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$; $r_{\min} = 1$ при $\varphi = 90^\circ, 270^\circ$; 2) $r_{\max} = 4$ при $\varphi = 90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$; $r_{\min} = 2$ при $\varphi = 30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$; 3) $r = a$ при $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$; $r = -a$ при $\varphi = 90^\circ, 270^\circ$; $r = 0$ при $\varphi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$. **350.** $r = \frac{ab \sin(\beta - \alpha)}{a \sin(\varphi - \alpha) + b \sin(\beta - \varphi)}$. **351.** 1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

$$2) \frac{x^2}{4} - y^2 = 1; \quad 3) y^2 = x$$

$$\mathbf{352.} r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi; (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

На черт. 84 положено $c\sqrt{2} = a$. **353.** $r = b + a \cos \varphi$. **354.** Из $\triangle OAM$; $r = OM = OA \cos \varphi$, но из $\triangle OAB: OA = 2a \sin \varphi$; отсюда $r = a \sin 2\varphi$. **358.** Пусть точка A на оси Ox , точка B на оси Oy и $\angle OAB = t$. Тогда $x = BM \cos t = BC \cos^2 t = a \cos^3 t$, $y = AM \sin t = AC \sin^2 t = a \sin^3 t$; итак: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$; отсюда $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **360.** $y^2 = \frac{px^2}{p+x}$. **361.** $(3y^2 + x^2)^2 = 4x^2(a^2 - y^2)$.

362. В полярных координатах: $r = OM = AB = BD \sin \varphi = a \operatorname{tg} \varphi \times \sin \varphi$; в декартовых: $y^2 = \frac{x^8}{a-x}$ (черт. 89). **365.** Обозначив

через t угол луча OA с Ox , найдем $x = 2a \operatorname{ctg} t$, $y = 2a \sin^2 t$.

Исключив t , получим $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

$$367. \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$368. \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

$$369. y = x \operatorname{ctg} \frac{x}{a}.$$

$$370. \begin{cases} x = (R+r) \cos t - r \cos \frac{(R+r)t}{r} \\ y = (R+r) \sin t - r \sin \frac{(R+r)t}{r}, \end{cases} \text{ где } t \text{ — угол поворота линии центров.}$$

$$371. \begin{cases} x = (R-r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t \\ y = (R-r) \sin t - r \sin \frac{R-r}{r} t. \end{cases}$$

$$374. X = \sum X_i = 8; Y = \sum Y_i = -2; OM = \sqrt{64+4} = 2\sqrt{17}.$$

$$375. \sqrt{8+2\sqrt{3}}. \quad 379. 1) c = \frac{a+b}{2}; \quad 2) a = 2c - b.$$

$$380. c = \frac{2}{3}(a-b). \quad 381. m+p=n; \quad \overline{OB} = 3(m+n);$$

$$\overline{BC} = 3(n-m); \overline{EO} = 3(m-n); \overline{OD} = 3(2n-m); \overline{DA} = 6(m-n).$$

$$382. \overline{AC} = 2(n-m); \overline{OM} = 2n+m; \overline{ON} = 3m+n; \overline{MN} = 2m-n.$$

$$383. 6\sqrt{3}. \quad 384. X = X_1 + X_2 + X_3 = -3; Y = \sum Y_i = 6;$$

$$OM = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}. \quad 385. 1) a = 3(c-b); 2) c = 2b - a\sqrt{3}.$$

$$386. OM = r = 5\sqrt{2}; \cos \alpha = 0,5\sqrt{2}, \cos \beta = -0,3\sqrt{2}, \cos \gamma = 0,4\sqrt{2}. \quad 387. r = 7, \cos \alpha = \frac{2}{7}. \quad 388. \beta \approx 52^\circ \text{ или } 128^\circ.$$

$$389. M(3\sqrt{2}; 3; -3), r = 3(\sqrt{2}i + j - k). \quad 390. u = 2i - 6j + 3k, u = 7. \quad 391. \overline{OC} = i - 2j + k, OC = \sqrt{6}, \overline{AB} = k - 4j - i; AB = 3\sqrt{2}.$$

$$392. \text{Конец } B(4; -2; 5) \text{ или } B_1(4; -2; -7), \cos \alpha = \frac{2}{7}; \cos \beta = -\frac{3}{7}; \cos \gamma = \pm \frac{6}{7}. \quad 393. a = 2b - 0,8c.$$

$$394. u = 3\sqrt{5}, \cos \alpha = -\frac{2}{3\sqrt{5}}. \quad 395. \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$396. 45^\circ \text{ или } 135^\circ. \quad 397. D(4; 0; 6). \quad 398. c = 2b - 2a. \quad 399. 135^\circ.$$

$$400. B = C = 45^\circ. \quad 401. \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316; \quad \varphi = 71^\circ 35'.$$

$$402. \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894; \varphi \approx 26^\circ 37'. \quad 403. 60^\circ. \quad 404. \operatorname{arc cos} 0,8.$$

$$405. 90^\circ. \quad 406. \operatorname{pr}_b a = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \quad 407. 2. \quad 408. 1) 2 + \sqrt{3}; 2) 40.$$

$$409. (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi \text{ (теорема косинусов); } (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 \text{ (свойство диагоналей параллелограмма).}$$

$$410. 7. \quad 411. R = \sqrt{(a+b+c+d)^2} = 10\sqrt{4+2\sqrt{2}} \approx 25,3 \text{ кг.}$$

- 412.** $\sqrt{7}$ и $\sqrt{13}$. **413.** $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{m}}) = \frac{(2m - n)m}{\sqrt{(2m - n)^2 \cdot 1}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$;
- $$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{n}}) = -\frac{2}{\sqrt{7}}.$$
- 414.** $\frac{5}{6}$. **415.** $\overline{OM} = 2(l + j + 2k)$;
 $\overline{ON} = 2(l + 2j + k)$; $\cos \theta = \frac{5}{6}$. **416.** $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}$.
- 417.** $\cos \varphi = 0,26 \sqrt{10}$; $\varphi \approx 34^\circ 42'$. **418.** $D(-1; 1; 1)$; $\varphi = 120^\circ$.
- 419.** $\text{пр}_{\vec{a}\vec{q}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB}} = -6$. **420.** $OM = \sqrt{(2n+m)^2} = \sqrt{7}$; $ON = \sqrt{(3m+n)^2} = \sqrt{13}$; $\cos \varphi = \frac{\overline{OM} \cdot \overline{ON}}{\overline{OM} \cdot \overline{ON}} = \frac{17}{2\sqrt{91}} = \frac{17}{19,08} \approx 0,891$;
 $\varphi = 27^\circ$. **421.** 120° . **423.** 8 кГм , $\cos \theta = \frac{4\sqrt{2}}{15}$. **424.** $a\sqrt{6}$.
- 425.** $\cos \varphi = -\frac{1}{4}$. **426.** $\vec{a} \times \vec{b}$ равно: 1) $-6j$; 2) $-2k$;
3) $6i - 4j + 6k$. Площадь равна: 1) 6; 2) 2; 3) $2\sqrt{22}$. **427.** 24,5.
- 428.** $\sqrt{21}$ кв. ед., $h = \sqrt{4,2}$. **429.** 1) $2(k-i)$; 2) $2a \times c$;
3) $a \times c$; 4) 3. **430.** Площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма, вдвое больше площади данного параллелограмма. **431.** $50\sqrt{2}$. **432.** $1,5\sqrt{2}$. **433.** $3\sqrt{17}$,
 $S_{\Delta} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$ кв. ед. **434.** $S_{\Delta} = 7\sqrt{5}$ кв. ед., $BD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.
- 435.** $|a+b|=|a-b|=\sqrt{5}$; $S=\sqrt{6}$ кв. ед. **437.** 1,5.
- 438.** $V=51$, левая. **439.** $V=14$ куб. ед., $H=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.
- 441.** $c=5a+b$. **443.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **444.** $V=14$ куб. ед., $H=\sqrt{14}$.
- 445.** $c=a+2b$. **446.** $V=|(a+b) \cdot [(b+c) \times (a+c)]|=2|abc|$.
- 447.** $(m \times n) \cdot p = |m \times n| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$. **449.** 52.
- 451.** $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = \frac{3}{7}$, $\cos \gamma = \frac{6}{7}$. **452.** $x+4y-2z=2$.
- 453.** $x+y=2a$. **454.** $x-y+z=a$. **455.** $2y-3z+7=0$.
- 456.** $3y+2z=0$. **457.** $2x+y=0$. **458.** $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$.
- 459.** $x+y+z=4$. **460.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. **462.** $\cos \alpha = \frac{2}{3}$;
 $\cos \beta = -\frac{2}{3}$; $\cos \gamma = \frac{1}{3}$; $\alpha = 48^\circ 11'$, $\beta = 131^\circ 49'$, $\gamma = 70^\circ 32'$.
- 463.** $x-2y-3z+14=0$. **464.** $3x-4z=0$. **465.** $x+y=4$.
- 466.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$. **467.** 1) 45° ; 2) $78^\circ 30'$. **468.** $x-2y-3z=4$.

469. $2x + 3y + 4z = 3$. **470.** $2x + y + z = a$. **471.** $2x - 2y + z = 2$. **472.** $2x - y + z = 5$. **473.** $3x - y = 0$ и $x + 3y = 0$.

474. 3. **475.** $\sqrt{6}$. **476.** $2\sqrt{2}$. **477.** 1) $x - 2y + 2z = 11$ и $x - 2y + 2z = -1$; 2) $x + y - 2z = 0$ и $x + y + z = 0$.

478. 1) $x - 8y + 9z = 21$; 2) $x - y + 2z = 0$ и $x - y - z = 0$.

479. (1; -1; 2). **480.** $3x - 4y + z = 11$. **481.** $2y - 5z + 10 = 0$.

482. Уравнение плоскости: $x + y - 2z = 0$: угол ее с плоскостью

$z = 0$: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8165$; $\varphi = 35^{\circ}15'$. **483.** $\frac{|a|}{\sqrt{3}}$. **484.** $y = \pm z$.

485. $\frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$. **486.** $2x + 2y + z = 20$ и $2x + 2y + z + 4 = 0$. **487.** $7x + 14y + 24 = 0$. **488.** 1) (5; 4; 0) и (7; 0; 2); 2) (0; -4; 0) и (2; 0; 2). **489.** $x = -z + 3$, $y = -z + 5$; $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}$. **490.** $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$. **491.** $P\{0; 0; 1\}$.

492. 1) $P = i$; 2) $P = i + k$; 3) $P = j + k$. **493.** $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$; $\cos \alpha = 0,3\sqrt{2}$; $\cos \beta = 0,4\sqrt{2}$; $\cos \gamma = -0,5\sqrt{2}$. **494.** $x=2$, $z=3$. **495.** Через t секунд координаты точки M будут: $x = 4 + 2t$, $y = -3 + 3t$, $z = 1 + t$; $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{1}$. **496.** 1) $x = -2+t$, $y = 1-2t$, $z = -1+3t$; 2) $x = 1+t$, $y = 1-t$, $z = 2+t$.

497. 1) $\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{1}$, что значит: $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ 2) $z = c$ и

$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n}$. **498.** $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **499.** $\cos \varphi = \frac{11}{26}$. **501.** Направляющий вектор $P = N \times N_1 = i + 3j + 5k$. Уравнения прямой:

$\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$. **502.** $3x + 2y = 0$; $z = 4$. **503.** $0,3\sqrt{38}$.

504. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **505.** (4; 2; 0), (3; 0; 2), (0; -6; 8). **506.** $x = 6 - 3z$,

$y = -2z + 4$; $\frac{x-6}{-3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}$; следы: (6; 4; 0), (0; 0; 2).

507. $\frac{x}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{3}$. **508.** $P\{0; 1; 0\}$. **509.** $P\{1; 1; 2\}$; $\alpha = \beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$. **510.** $y = -3$; $2x - z = 0$. **511.** Приведем уравнения

к канонической форме: $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-5}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{6}$;

$\cos \varphi = \frac{20}{21} \approx 0,952$; $\varphi = 17^{\circ}48'$. **512.** Написав уравнения данной пря-

мой в виде $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-\frac{1}{3}}{1}$, получим уравнение искомой прямой: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{1}$. **513.** $A(0; +1; 0)$, $\overline{AM}\{3; -1; 4\}$, $P\{1; 2; 2\}$, $d = \sqrt{17}$. **514.** $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **515.** Для обеих прямых $Am + Bn + Cp = 2 \cdot 2 + 1(-1) + (-1) \cdot 3 = 0$, но точка первой $(-1; -1; 3)$ не лежит на плоскости, а точка второй $(-1; -1; -3)$ лежит на плоскости. **516.** $y+z+1=0$ (уравнения прямой можно записать в виде $\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$). **517.** $x-2y+z+5=0$.

518. $8x-5y+z-11=0$. **519.** $x+2y-2z=1$. **520.** $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}; 17^{\circ}33'$. **521.** $(5; 5; -2)$. **522.** $(6; 4; 5)$. **523.** $(5; 5; 5)$.

524. $(3; 3; 3)$. **525.** $d = \frac{\overline{AA_1}PP_1}{|P \times P_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **526.** $x+2y-5z=0$.

527. $\frac{x-2}{-9} = \frac{y-1}{8} = \frac{z}{11}$. **528.** $(1; 1; 2); 70^{\circ}$. **529.** $(-1; 2; 2), 30^{\circ}$.

530. $(6; 2; 0)$. **531.** $(3; -1; 1)$. **532.** $x-y-z=0$. **533.** $(-1; 3; 1)$.

534. $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{-1}$. **535.** Точки на прямых $O(0; 0; 0)$ и $A(2; 2; 0)$; направляющие векторы прямых: $P\{0; 0; 1\}$ и $P_1\{2; -1; 2\}$, $d = \frac{\overline{OAPP_1}}{|P \times P_1|} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. **536.** 1) $C(1,5;-2,5; 2)$, $R=2,5\sqrt{2}; 2) C(0; 0; a)$,

$R=a$. **537.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$. **538.** $x^2+y^2+z^2=8x$.

539. $x^2+y^2+z^2-a(x+y+z)=0$. **541.** $y^2=2ax-x^2$. **542.** $x^2+y^2=2ax$,

$x^2+z^2=2ax$, $y^2+z^2=a^2$. **544.** $(1; 7; 2)$, $R=4$. **545.** $(3Y-2Z)^2=$

$=12(3X-Z)$. **546.** 1) $y=0$; $x^2=a^2-az$ (парабола); 2) $x=0$;

$y^2=a^2-az$ (парабола); 3) $z=h$; $x+y=\pm\sqrt{a(a-h)}$ — прямая;

параллельная $x+y=a$ (см. черт. 63 на стр. 339). **547.** Цилиндрическая поверхность $2x^2+(y-z+2)^2=8$, форма тени $\frac{x^2}{4}+$

$+ \frac{(y+2)^2}{8} = 1$ — эллипс. **548.** $2x-y+3z-7=0$. **549.** x^2+

$+(y+4)^2+z^2=4$. **550.** $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{18} = 1$. **553.** $(x-z)^2+$

$+(y-z)^2=4(x-z)$. **554.** $x=4$, $z \pm y=2$. **555.** $\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$.

556. $h^2x^2=2pz[h(y+a)-az]$. **557.** $(0; a; 0)$, направляющая —

окружность $z=a$, $x^2+(y-a)^2=a^2$. **558.** Вершина $(0; 0; 0)$, на-

правляющая — парабола $z=h$; $x^2=2hy$. **559.** При $z=0$ $x=\pm a$;

при $y=h$ $x^2+y^2=a^2$; при $x=\pm c$ прямые $z=\pm\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{h}y$,

т. е. поверхность образована движением прямой, параллельной плоскости yOz и пересекающей окружность ABC (см. черт. 69 на стр. 342) и ось Ox . **560.** а) $z = x^2 + y^2$; б) $\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$.

561. 1) $z = e^{-(x^2+y^2)}$; 2) $z = \frac{4}{x^2+y^2}$. **562.** $9(x^2+z^2) = 16y^2$.

563. $x^2 + z^2 = z(y+a)$. **564.** а) $x^2 + z^2 = y^2$; б) $z^2 = x^2 + y^2$.

565. Повернув оси Ox и Oy вокруг оси Oz на 45° , получим уравнения поверхности и плоскости в виде $2Z^2 = X^2 - Y^2$, $X = a\sqrt{2}$. Отсюда сечение: $X = a\sqrt{2}$, $\frac{Y^2}{2a^2} + \frac{Z^2}{a^2} = 1$ эллипс с полуосами $a\sqrt{2}$ и a .

566. $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. **567.** а) $3,84\pi$; б) $\frac{45}{4}\pi$. **568.** а) $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (однополостный гиперболоид); б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1$ (двуполостный).

$$\text{570. } \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{z}{6} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{y}{2}\right) \\ \frac{x}{4} - \frac{z}{6} = 3 \left(1 - \frac{y}{2}\right) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{z}{6} = 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{4} - \frac{z}{6} = 1 + \frac{y}{2}. \end{cases}$$

571. $x = \frac{a}{c} [(c-z) \cos t + (c+z) \cos(t+\alpha)]$, $y = \frac{a}{c} [(c-z) \sin t + (c+z) \sin(t+\alpha)]$; отсюда: $\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{z^2}{c^2} (1 - \cos \alpha) = 1 + \cos \alpha$; при $\alpha = 90^\circ$ $\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; при $\alpha = 120^\circ$ $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{3z^2}{c^2} = 1$; при $\alpha = 180^\circ$ $\frac{x^2+y^2}{4a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (конус). **572.** $x^2 + y^2 = az$.

574. $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=z; \end{cases}$ **575.** $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2+z^2}{a^2} = 1$.

576. $x^2 + y^2 - z^2 = -2a^2$ (двуполостный гиперболоид).

577. $x = -\frac{z^2+y^2}{4a}$. **578.** $9x = \pm 13z$. **579.** $4y = \pm 3z$.

580. 1) Сфера с центром $(0; 0; a)$ и радиусом $R = a$; 2) параболоид вращения вокруг Oz ; 3) цилиндр; 4) гиперболический параболоид; 5) конус; 6) параболический цилиндр; 7) конус; 8) параболоид вращения; 9) конус; 10) цилиндр. **581.** $\begin{cases} x+y=2+z \\ x-y=2-z; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=3(z-2) \\ 3(y-x)=z+2. \end{cases}$ **582.** $x^2 + y^2 = 2az$. **583.** $z = a - \frac{x^2+y^2}{2a}$.

584. $2y = \pm 3z$. **585.** $\begin{cases} 3x+4y=24 \\ 3x-4y=12z; \end{cases}$ **586.** 26.

587. — 38. **588.** 7. **589.** 2a. **590.** 1. **591.** $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

592. — 10. **593.** 4a. **594.** $-2b^2$. **595.** $-2x$. **596.** $-4a^3$. **597.** 144.

598. 72. **599.** $(x-y)(y-z)(x-z)$. **600.** 1. **601.** $\sin(\beta-\alpha)$.

602. 10. **603.** Лежат на прямой $y = x + 2$. **604.** 1) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

$$2) \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{605. 10. 606. amn. 607. } a(x-z)(y-z)(y-x).$$

608. $4 \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. **610.** 1) $x_1 = 2, x_2 = 3$; 2) $x_1 = 0, x_2 = -2$.

611. $x = 5; y = -4$. **612.** $x = \frac{4}{a}; y = 1$. **613.** $x = 0; y = 2$. **614.** $x = m; y = 2m - n$. **615.** 5; 6; 10. **616.** $-1; 0; 1$. **617.** 7k; 8k; 13k.

618. 5k; $-11k$; $-7k$. **619.** $x = y = z = 0$. **620.** Несовместна.

621. Неопределенна: $x = \frac{2+5z}{3}, y = \frac{5-7z}{3}$. **622.** Несовместна.

624. 2; $-1; -3$. **625.** 1; $-1; 2$. **626.** $2k; k; -4k$. **627.** $x = y = z = 0$.

628. $-k; 13k; 5k$. **629.** Неопределенна: $y = 7 - 3x, z = 18 - 7x$.

630. 1) $12 + 5t$; 2) $a^2 + b^2$; 3) $5 - 12t$; 4) $-2 + 2t$; 5) t ; 6) $1 + t$. **634.** 1) $2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; 2) $2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$.

640. 1) $32t$; 2) 64 ; 3) $4(1-t)$; 4) $2(3 + 2\sqrt{2})t$; 5) $8t$.

641. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$.

642. $\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}$; $k = 0, 1, \dots, 5$. **643.** 1) $1, \frac{-1 \pm t\sqrt{3}}{2}$;

2) $-t, \frac{t \pm \sqrt{3}}{2}$; 3) $\pm t, \frac{\pm \sqrt{3} \pm t}{2}$; 4) $1 + t; -1,36 + 0,365t$;

$0,365 - 1,36t$. **644.** 1) $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[6]{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $\varphi = 45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$; 3) $\pm 2(\sqrt{3} + i), \pm 2(-1 + i\sqrt{3})$. **645.** 1) $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$;

2) $\pm 1 \pm t$. **646.** 1) $\ln 2 + \pi t$; 2) $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi t}{4}$; 3) $\frac{\pi t}{2}$; 4) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} +$

$+ i \operatorname{arc tg} \frac{y}{x}$; 5) $\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} t$. **647.** $\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$.

648. $\frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$. **650.** 1) $\frac{7 - 24t}{25}$; 2) $2b(3a^2 - b^2)t$;

651. 1) $4\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $2e^{\frac{2\pi i}{3}}$; 3) $\sqrt[4]{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$. **652.** 1) $5(\cos 0 + i \sin 0)$.

2) $e^{-\frac{\pi i}{2}}$; 3) $2e^{-\frac{8\pi i}{4}}$. **654.** Точки внутри круга с центром $C(z_0)$ и $r = 5$. **655.** 1) $8t$; 2) $512(1 - t\sqrt{3})$; 3) -27 . **657.** 1) $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$;

2) $\cos \varphi + i \sin \varphi$, где $\varphi = 0^\circ, 72^\circ, 114^\circ, 216^\circ, 288^\circ$. **658.** 1) 2, $-1 \pm i\sqrt{3}$; 2) $\pm 2i, \pm \sqrt{3} \pm i$; 3) $\pm 3, \pm 3i$. **659.** $\frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$.

660. 1) $-1, 2, 3$; 2) $5, \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}$. **661.** 1) $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = -2$; 2) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$; 3) $x_1 = -2, x_{2,3} = \pm \frac{1}{3}$; 4) $x_1 = 1, x_{2,3} = \pm \frac{i}{2}$. **662.** 1) $\Delta = \frac{49}{4} > 0, u_1 = 2, v_1 = 1, z_1 = 3, z_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\Delta = 0, z_1 = 4, z_2 = z_3 = -2$.

663. 1) $\Delta < 0, \varphi = 60^\circ, z_1 = 4 \cos 20^\circ, z_{2,3} = 4 \cos (20^\circ \pm 120^\circ)$.

665.

α	β	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	k	k_1	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$	
1	2	-10	4	14	31	0,71	-0,13	$1,85 < x < 1,86$
1,71	1,87	-3,2	0,36	22	26	0,14	-0,01	

666. 2,15; 0,524; $-2,66$. **667.** 1) 1,305; 2) 4 и 0,310; 3) $-0,682i$;

4) $x_1 = 1,494, x_2 = -0,798$ (x_1 найдено по формуле $x = \sqrt[4]{2x+2}$, а x_2 — по формуле $x = \frac{x^4 + 3x - 2}{5}$). **668.** 1) $-6, -1 \pm i\sqrt{2}$;

2) $-1; 2$; 2. **669.** 1) $\Delta = \frac{1225}{4} > 0, u_1 = 3, v_1 = -2, z_1 = 1, z_{2,3} = \frac{-1 \pm 5i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\Delta = -4 < 0, \varphi = 45^\circ, z_1 = 2\sqrt{2} \cos 15^\circ =$

$= 1 + \sqrt{3}, z_2 = -2, z_3 = 1 - \sqrt{3}$; 3) $\Delta = 0, z_1 = -2, z_{2,3} = 1$;

4) положив $x = z - 2$, получим $z^3 - 3z + 2 = 0; \Delta = 0; z_1 = -2, z_2 = z_3 = 1; x_1 = -4, x_2 = x_3 = -1$. **670.** 1,76 и $-2,15$. **671.** 1) 1,17;

2) 3,07. **672.** 1,67. **675.** $0 \leq x < 1$. **681.** $x_1 = 0, x_2 = 4$.

683. 1) $x > -2$; 2) $-3 \leq x \leq 3$; 3) $0 \leq x \leq 4$. **684.** 1) $-4 \leq x \leq 0$;

2) $-1 \leq x \leq 3$. **685.** 1) $x \geq 0$; 2) $x \leq 4$. **686.** 1) $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$;

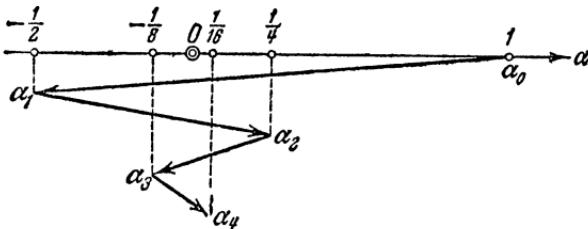
2) $-4 \leq x \leq +4$. **687.** 1) $f(0) = 1, f(1) = 1, f(-1) = 3, f(2) = 3, f(a+1) = a^2 + a + 1$. **688.** 1) $b+a$; 2) $2ah$. **689.** $\frac{b+a}{b^2 + ab + a^2}$.

690. $F(4; 3) = 19, F(3; 4) = -91$. **691.** 1) четная; 2) нечетная; 3) четная; 4) нечетная; 5) нечетная; 6) и не четная и не нечетная;

692. $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. **693.** $\log_a x$. **694.** a^x .

696. $2 < x \leq 3$. **700.** 1) $|x| \leq 2$; 2) $-1 \leq x \leq 3$; 3) $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq$

$\leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi$; 4) $|x| \geqslant 2$. **701.** 2) $6x^2 + 2h^2$; 3) $4(2 - a)$. **702.** Изменение переменной $a = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ изображено графически на черт. 39.



Черт. 39.

$|\alpha| < 0,001$, как только $n > \frac{3}{\lg 2}$ или $n > \frac{3}{0,3} = 10$; $|\alpha| < \varepsilon$, как только

$n > \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$. **703.** $x = 2; \frac{2}{3}; 1\frac{1}{5}; \frac{6}{7}; 1\frac{1}{9} \dots \rightarrow 1$. $|x - 1| < 0,01$, как только $n \geqslant 50$; $|x - 1| < \varepsilon$, как только $n > \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon}$.

704. $x = 4; 3,1; 3,01; \dots \rightarrow 3 + 0$; $x = 2; 2,9; 2,99; \dots \rightarrow 3 - 0$;

705. $x = 6; 5,1; 5,01; \dots \rightarrow 5 + 0$; $x = 4; 4,9; 4,99; \dots \rightarrow 5 - 0$;
 $x = -1; -1,9; -1,99; -1,999; \dots \rightarrow -2 + 0$;
 $x = -3; -2,1; -2,01; -2,001; \dots \rightarrow -2 - 0$.

707. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. **708.** $\delta = 0,01$. **712.** При $|x| > 2500,5$. **713.** При

$|x| \geqslant 7$. **715.** $\lim_{n \rightarrow \infty} x$ в первом примере равен 1, во втором -1 , в четвертом 0 , в пятом 2 , в шестом 0 , в третьем не существует.

716. $\frac{x}{x-2} \mid 3; 2,1; 2,01; \dots \rightarrow 2 + 0$; $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{x-2} = +\infty$.

$\frac{x}{x-2} \mid 3; 30; 300; \dots \rightarrow +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{x-2} = -\infty$,

$\frac{x}{x-2} \mid 1; 1,9; 1,99; \dots \rightarrow 2 - 0$;

717. $\frac{1}{2^x} \mid 1; 0,1; 0,01; \dots \rightarrow +0$; $\lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$,

$\frac{1}{2^x} \mid 2; 2^{10}; 2^{100}; \dots \rightarrow +\infty$;

$\frac{x}{2^x} \mid -1; -0,1; -0,01; \dots \rightarrow -0$;

$\frac{1}{2^x} \mid \frac{1}{2}; \frac{1}{2^{10}}; \frac{1}{2^{100}}; \dots \rightarrow 0$; $\lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$.

718. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$; 2) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{2}{x} = -\infty$;

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = \infty$; 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$; 5) $\lim_{x \rightarrow +0} \lg_{10} x = -\infty$;

6) $\lim_{x \rightarrow 90^\circ - 0^\circ} \operatorname{tg} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 90^\circ + 0^\circ} \operatorname{tg} x = -\infty$. **724.** $AB \rightarrow \infty$,

$CB \rightarrow \infty$, $\angle BCD \rightarrow 0$, $\angle ACB \rightarrow 180^\circ$.

725. $x = 5; 4; 1; 4; 0; 1; 4; 0; 0; \dots \rightarrow 4 + 0$;

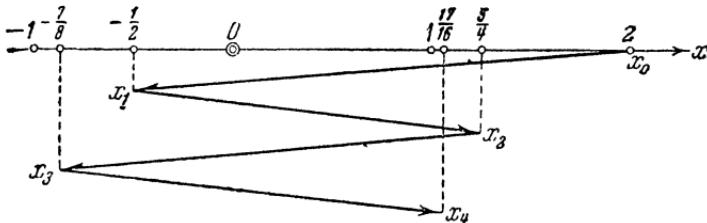
$x = 3; 3; 9; 3; 99; 3; 999; \dots \rightarrow 4 - 0$;

$x = -0,5; -1,4; -1,49; -1,499; \dots \rightarrow -1,5 + 0$;

$x = -2,5; -1,6; -1,51; -1,501; \dots \rightarrow -1,5 - 0$.

729. Только первая переменная имеет предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} x = 1$. В остальных

примерах $\lim_{n \rightarrow \infty} x$ не существует. Графиком изменения первой переменной может служить черт. 39, если на нем начало O сдвинуть на 1 влево, а вместо $-\frac{1}{2}$ поставить $+\frac{1}{2}$, вместо $-\frac{1}{8}$ поставить $+\frac{7}{8}$ и т. д. График изменения второй переменной $x = (-1)^n + \frac{1}{2^n}$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ показан на черт. 40. **730.** 1) 0; 2) ∞ ; 3) ∞ ;



Черт. 40.

4) 0; 5) 2; 6) 0; 7) 0 при $a > 1$, $\frac{1}{2}$ при $a = 1$, a при $0 < a < 1$. **733.** 1.

734. 1) $-0,6$; 2) 1. **735.** 4. **736.** 1. **737.** $\frac{3}{2}$. **738.** $\frac{1}{2}$.

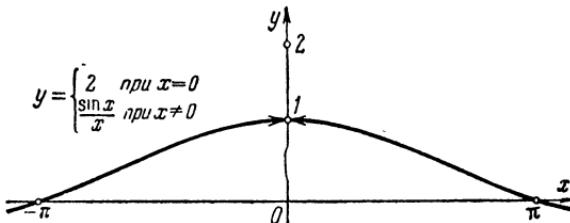
739. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **740.** $\frac{2}{3}$. **741.** $-\frac{1}{2}$ при $a > 0$ и ∞ при $a < 0$.

742. $\frac{2}{3}$. **743.** $\frac{m}{3}$. **744.** 1. **745.** $-\frac{1}{2}$. **746.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-2,5$.

747. 0. **748.** ∞ . **749.** -2 . **750.** $-\frac{3}{2}$. **751.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **752.** $\frac{1}{6}$.

753. $\frac{1}{4}$. **754.** -12 . **755.** -1 . **756.** $\lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{|\sin x|}{\sin x \sqrt{1-\cos x}} =$

- $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$. **757.** 2,5. **758.** $\sqrt{3}$. **759.** —4. **760.** 2. **761.** $-\frac{1}{56}$.
762. $-\sqrt{2}$. **763.** 4. **764.** $\frac{1}{3}$. **765.** 1. **766.** $\frac{1}{4}$. **767.** 2. **768.** $6\sqrt{2}$.
769. $2 \cos x$. **770.** 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$. **771.** $\frac{1}{2}$. **772.** $\frac{1}{2}$. **773.** $\frac{1}{3}$.
774. 8. **775.** $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{x} = -\sqrt{2}$. **776.** 4. **777.** $\frac{m^3}{2}$. **778.** 3.
779. $\frac{1}{4}$. **780.** 1) $-2 \sin x$; 2) $-\frac{1}{2}$. **781.** 1. **782.** 1,5. **783.** $\frac{1}{2}$.
784. 1. **785.** $\frac{1}{2}$. **786.** $\frac{1}{4}$. **787.** —3. **788.** $\frac{2}{\pi}$. **789.** —2.
790. $-\frac{1}{4}$. **791.** $\frac{1}{2}$. **792.** 0. **793.** $\frac{1}{2}$. **794.** $-\frac{1}{2}$. **795.** —1.
796. 1) $\frac{1}{20}$; 2) 3. **797.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) 2 [положить в примере 1) $x=t^2$,
 а в примере 2) $1+2x=t^4$]. **798.** —a. **799.** 1) —1; 2) —0,2. **800.** 1) 3;
 2) $\frac{3}{2}$. **801.** 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$. **802.** 1) —2; 2) —0,1. **803.** 1) —2,5;
 2) 1,5. **804.** 1) $-\sqrt{2\pi}$; 2) —1. **805.** 1) 2-го; 2) 3-го. **806.** 1) 4-го;
 2) 1-го; 3) 3-го. **807.** 2-го порядка. **809.** При $a \rightarrow 0$ $(1+a)^3 - 1 \approx 3a$.
810. 1) 2,5; 2) $\frac{a}{b}$; 3) 1,5. **811.** 2-го и 3-го. **812.** 1) 2-го; 2) 3-го;
 3) 1-го. **815.** 1) при $x=0$; 2) при $x=\frac{2n-1}{2}\pi$; 3) при $x=\pm 2$.



Черт. 41.

816. При $x=2$ выполнены первые три условия и не выполнено четвертое. **817.**

$$1) y = \begin{cases} -1 & \text{при } x < -1 \\ 1 & \text{при } x > -1, \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x < -1 \\ x+1 & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

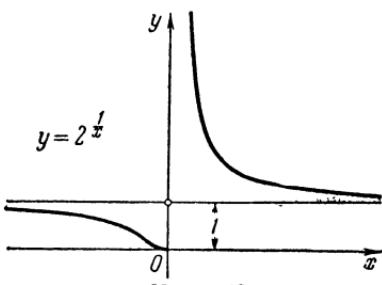
При $x=-1$ функции имеют разрыв I рода (выполнено только второе условие непрерывности). **818.** При $x=0$ не выполнено только четвертое условие (черт. 41). **819.** Разрыв при $x=0$. $\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow -0} y = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ (черт. 42). **820.** Разрывы при $x = \pm 2$.

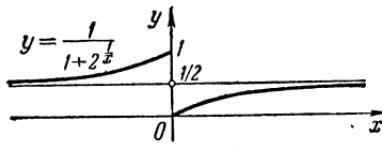
821. 1) Разрыв первого рода при $x = 0$, при этом $\lim_{x \rightarrow +0} y = 0$,

$\lim_{x \rightarrow -0} y = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{2}$ (черт. 43); 2) разрыв первого рода при $x = a$, при этом $\lim_{x \rightarrow a-0} y = -\frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow a+0} y = \frac{\pi}{2}$,

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = 0$; 3) $y = \frac{x^2}{2}$ при $x > 1$ и $-\frac{x^2}{2}$ при $x < 1$; при $x = 1$ — разрыв I рода, причем $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{1}{2}$. **822.** Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ определяет y как бесчисленное множество однозначных функций x . Из них две: $y = x$ и $y = -x$ непрерывные. Остальные (разрывные) на одних участках оси Ox определяются уравнением $y = x$, а на друг-



Черт. 42.



Черт. 43.

гих — уравнением $y = -x$. Четную с разрывами при $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ можно определить так:

$$y = \begin{cases} -|x| & \text{при } 2n-1 < x < 2n \\ +|x| & \text{при } 2n < x < 2n+1, \end{cases}$$

нечетную так:

$$y = \begin{cases} -x & \text{при } 2n-1 < x < 2n \\ +x & \text{при } 2n < x < 2n+1, \end{cases}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

823. Разрыв второго рода при $x = -2$. $\lim_{x \rightarrow -2-0} y = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -2+0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = 1$. **824.** При $x = 0$ не выполнено

только четвертое условие непрерывности; при $x = \pm 2$ еще и третье. **825.** Точки разрыва: 1) $x = 0$; 2) $x = 2$; 3) $x = 0$; 4) $x = 0$; 5) $x = \pm 2$ и $x = 0$. **826.** Бесчисленное множество. Из них: 1) непрерывные $y = \sqrt[4]{4-x^2}$ и $y = -\sqrt[4]{4-x^2}$; 2) искомая разрывная:

$$y = \begin{cases} -\sqrt[4]{4-x^2} & \text{при } |x| \leqslant 1 \\ +\sqrt[4]{4-x^2} & \text{при } 1 < |x| \leqslant 2. \end{cases}$$

827. $x = 0$ и $y = 1$. **828.** 1) $x = 0$ и $y = x$; 2) $x = -1$ и $y = x - 1$;

3) $y = 1$. **829.** 1) $x = 0$, $y = -1$; 2) $x = 0$ и $y = x - 1$; 3) $x =$

$= -\frac{n}{m}$ и $y = \frac{a}{m}$. **830.** 1) $x = -\frac{1}{2}$ и $y = -2$; 2) $y = x$; 3) $y = -x$.

831. 1) $y = \pm x$; 2) $x + y = -a$; 3) $y = x \pm \pi$; 4) $y = -\frac{\pi}{4}$.

832. 1) $y = 0$, 2) $y = \pm 2x$, 3) $x = 0$ и $y = x$. **833.** Параболы:

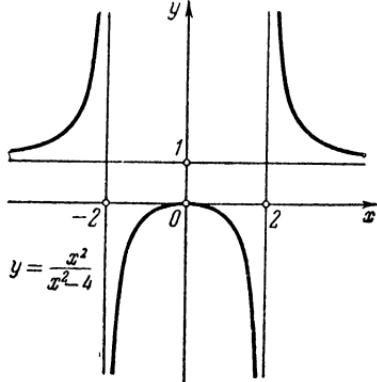
1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = x^3$. **834.** 1) $x = 0$ и $y = 1$; 2) $x = 0$ и $y = -x$.

835. 1) $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$; 2) $x = 1$

и $y = -\frac{x+1}{2}$; 3) $x = 2$, $x =$

$= -2$, $y = 1$ (черт. 44); 4) $x = 1$,

$x = -1$ и $y = -x$. **836.** $\frac{1}{e^6}$.



837. 1) $e^{-\frac{1}{3}}$; 2) e^4 . **838.** 1) e^2 ;

2) e^{-4} . **839.** 1) e^{-1} ; 2) e^{-2}

840. 1) 3; 2) e^3 . **841.** $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

842. 1) 1; 2) -1 ; 3) $2 \ln a$.

843. 3 и 4. **844.** 1) e^6 ;

2) $\frac{1}{e \sqrt[3]{e}}$. **845.** 1) $\frac{1}{e^2}$; 2) -3 .

Черт. 44.

846. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$. **847.** 1) $\frac{1}{x}$; 2) -2 . **848.** 1) $3x^2$; 2) $4x^3$; 3) $\frac{1}{2 \sqrt[3]{x}}$;

4) $\cos x$; 5) $-\frac{1}{x^2}$; 6) $-\frac{1}{2x \sqrt[3]{x}}$; 7) $-\frac{2}{x^3}$; 8) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 9) $-\frac{3}{x^4}$;

10) $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$; 11) $-\frac{3}{(3x+2)^2}$; 12) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **849.** 1) $(x-2)^2$;

2) $\frac{b}{a}$. **850.** 1) $(x^2-1)^2$; 2) x^3-2x . **851.** 1) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

2) $1 - \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$. **852.** 1) $-\frac{30}{x^4}$; 2) $-\frac{x^2+2x+3}{x^4}$.

853. 1) $\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^2$; 2) $3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$. **854.** 1) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$;

2) $\frac{2}{3x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} \right)$. **855.** 1) $\frac{1-x}{x^4}$; 2) $\frac{2}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right)$.

856. 1) $2 \sin^2 \frac{x}{2}$; 2) $-\operatorname{tg}^2 x$. **857.** 1) $x(2 \cos x - x \sin x)$;

$$2) \frac{x(\sin 2x - x)}{\sin^2 x}.$$

$$858. 1) -\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3}; \quad 2) \frac{2x}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$859. 1) \frac{1}{(1-4x)^2}; \quad 2) \frac{4x - \sin 2x}{4x \sqrt{x} \cos^2 x}. \quad 860. 1) \frac{1}{1-\sin x};$$

$$2) \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3} \quad 861. 1) gt; \quad 2) 2a \sin^2 \frac{t}{2}. \quad 862. 1; 0; 4. \quad 863. 8,25.$$

$$864. -90. \quad 865. 1) -6bx(a-bx^2)^3; \quad 2) \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right).$$

$$866. 1) \frac{2x-1}{2x^6}; \quad 2) \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right). \quad 867. 1) 2 \cos^2 \frac{x}{2}; \quad 2) -\operatorname{ctg}^2 x.$$

$$868. 1) x(2 \sin x + x \cos x); \quad 2) \frac{x(\sin 2x + x)}{\cos^2 x}. \quad 869. 1) \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{x}};$$

$$2) \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{2}{t^2}. \quad 870. 1) \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4}; \quad 2) \frac{4x}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$871. 1) -\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2; \quad 2) -\frac{2 + \sin x}{(1 + 2 \sin x)^2}. \quad 872. -\frac{1}{3}.$$

$$873. -1; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{25}. \quad 874. 1) 6 \cos 6x; \quad 2) b \sin(a - bx).$$

$$875. 1) \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right); \quad 2) -2 \sin \frac{x}{3}. \quad 876. 1) -20(1-5x)^3;$$

$$2) \frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}. \quad 877. 1) \frac{10x}{(1-x^2)^6}; \quad 2) -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 3) -2 \operatorname{tg} 4x \sqrt{\cos 4x}.$$

$$878. \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}. \quad 879. 4 \sin^3 x \cos x. \quad 880. 1) \sin 2x; \quad 2) -\sin 2x;$$

$$3) 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x. \quad 881. \frac{3}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \quad 882. 3 \operatorname{tg}^4 x.$$

$$883. \frac{-\sin 2x}{\frac{4}{4}\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}}. \quad 884. \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \quad 885. \pm (\sqrt{1-\sin 2x} +$$

+ \sqrt{1+\sin 2x}); знак + при $\cos 2x > 0$; знак - при $\cos 2x < 0$,
а при $\cos 2x = 0$ y' не существует ($\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} y' = \sqrt{2}$,

$$a \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} y' = -\sqrt{2}). \quad 886. \frac{20 \sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}. \quad 887. -\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}}.$$

$$888. \sin x(1+\sec^2 x). \quad 889. \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}. \quad 890. \frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}. \quad 891. -\sin \frac{2t}{a}.$$

892. 1) $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$; 2) $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2 \sin^2 2\varphi}{\sqrt{2\varphi + \cos^2(2\varphi + \frac{\pi}{4})}}$.

893. $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $f'(\pi) = 0$, $f'(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

894. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **895.** $\frac{4 \cos^2 2x}{\sqrt{4x+\sin 4x}}$. **896.** $\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. **897.** $-\sin 4x$.

898. $-\frac{2 \sin 6x}{\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}$. **899.** 1) $\sec^6 x$; 2) $3x^2 \sin 2x^3$.

900. $\frac{4 \cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$. **901.** $\frac{ds}{dt} = \frac{\sin^2 \frac{t}{4}}{2\sqrt{\frac{t}{2}-\sin \frac{t}{2}}}$. **902.** $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{2} \cos \varphi$.

903. $-\frac{2(3x+1)}{x^3 \sqrt[3]{4x+1}}$. **904.** $-\sqrt{\frac{\pi}{6}}$. **905.** $k = \operatorname{tg} \alpha = \pm 4$.

906. $y = 8 - 4x$, $x - 4y = 2$. **907.** $y = x + \frac{2}{3}$. **908.** $y = 0$ и $y = \pm \frac{1}{2}(3x-1)$. **909.** $y = -\frac{x}{2} + 2$. **910.** $y = \pi - x$. **911.** 45° и 135° .

912. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3}$. **913.** 1) $\frac{1}{2}; 2; \frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}$; 2) $\frac{2}{3}; \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{\sqrt{13}}{2}$.

915. $y = x^2 - 3x + 4$. Параметр b находится из условия $y' = 2x + b = 4 + b = 1$, а c — из условия, что $(2; 2)$ — точка касания. **916.** $y = -4x + 8$, $y = -\frac{1}{4}x - 2$; $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{15}{8} \approx 62^\circ$. **917.** $y = 4x$, $y = -4x + 16$. **918.** $x \pm 4y = 8$. **919.** $y = \pm(3x + 8)$ и $y = 0$.

920. $\frac{4}{\sqrt{17}}$. **921.** $40^\circ 54'$ или $139^\circ 6'$. **922.** $(-2; -4)$. **923.** $(\frac{1}{2}; \frac{17}{4})$.

924. 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **925.** $11^\circ 20'$ и $7^\circ 7'$. **926.** $y'_- = -1$, $y'_+ = 1$.

927. $y'_- = -\frac{1}{2}$; $y'_+ = \frac{1}{2}$. **928.** $y = x$ и $y = -x$. **929.** $y = \pm \frac{x-\pi}{\sqrt{2}}$;

930. $x = 0$. **931.** $x = 2$. **932.** $x = 0$. **933.** $x = 2$.

934. $y - 1 = \pm \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. **935.** $x = -1$. **936.** $y = \pm 4x$; 28° .

937. 1) $\ln x + 1$; 2) $-\frac{\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{0,4343}{x}$. **938.** 1) $\frac{(x+1)^2}{x^3}$; 2) $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$.

939. 1) $-\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} x \cos^2 x$. **940.** $\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **941.** $\frac{4a^2x}{a^4-x^4}$.

942. $\frac{2}{x(1-x^2)}$. **943.** $\frac{1}{\cos x}$. **944.** $\frac{2}{1-4x^2}$. **945.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

946. $\frac{1}{2+\sqrt{x}}$. **947.** 1) $-\frac{2 \operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}$; 2) $\frac{2}{x-ax^5}$. **948.** $y = x - 1$.

- 949.** Касаются в точке $\left(\sqrt{e}; \frac{1}{2}\right)$. **950.** 1) $2x + 3^x \ln 3$; 2) $(2x + x^2 \ln 2) 2^x$; 3) $x(2+x)e^x$. **951.** 1) $a^{\sin x} \cos x \ln a$; 2) $-2xe^{-x^2}$; 3) $2x(1-x)e^{-2x}$. **952.** $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$. **953.** $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
- 954.** $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. **955.** $\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\left(\cos \frac{x}{a} - \sin \frac{x}{a}\right)$. **956.** 1) $-2e^{-x} \sin x$; 2) $-\frac{x}{1+x}$. **957.** $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. **958.** $2a(e^{2ax} - e^{-2ax})$. **959.** $-\ln a$.
- 960.** $26^\circ 35'$. **962.** 1) $x^x(\ln x + 1)$; 2) $x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$.
- 963.** $-\operatorname{tg} x \sin^2 x$. **964.** $-\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}$. **965.** $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.
- 966.** $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. **967.** $\frac{1}{x(1-x^2)}$. **968.** $\operatorname{ctg} 2x$. **969.** $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{1-\sin 2x}$.
- 970.** $\frac{\operatorname{tg} x}{1+\cos x}$. **971.** $-\frac{x}{\sqrt{ax+x^2}}$. **972.** $-\frac{x}{a}e^{-\frac{x}{a}}$.
- 973.** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. **974.** $-\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$. **975.** $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$.
- 976.** $\frac{2}{e^{4x}+1}$. **977.** $x^{\frac{1}{x}} \frac{1-\ln x}{x^2}$. **978.** 16. **979.** $y = -\frac{x}{2}$.
- 980.** $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **981.** $\frac{x^2}{1+x^2}$. **982.** $-\frac{1}{\sqrt{x-4x^3}}$. **983.** $\frac{a}{|a|\sqrt{a^2-x^2}}$.
- 984.** $\frac{a}{a^2+x^2}$. **985.** $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **986.** $-\frac{1}{1+x^2}$. **987.** 1) $2\sqrt{1-x^2}$; 2) $\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$. **988.** $\frac{2}{1-x^4}$. **989.** $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$. **990.** $\operatorname{arc tg} \frac{x}{a}$.
- 991.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **992.** $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. **993.** 1) $\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$; 2) $\frac{1}{x^2+x^4}$. **994.** $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$. **995.** $\operatorname{arc cos} x$. **996.** $\frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}$.
- 997.** $\sqrt{\frac{4}{t}-1}$. **998.** $\sqrt{\frac{2}{x}-4}$. **999.** $\frac{\pi}{4}-1$. **1000.** 1) $\operatorname{sh} 2x$; 2) $\operatorname{th}^2 x$; 3) $\sqrt{\operatorname{ch} x+1}$. **1001.** 1,5. **1002.** 1) $\operatorname{th} x$; 2) $-\frac{4}{\operatorname{sh}^2 2x}$.
- 1003.** 1) $\operatorname{cth}^2 x$; 2) $\frac{2}{\operatorname{sh} 2x}$. **1004.** 1) $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$; 2) $4 \operatorname{sh} 4x$.

1005. $x + 1,175y = 2,815a.$

1006. $y = 3,76x + 3,89.$

1008. 1) $\frac{1-x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\operatorname{tg}^3 x.$ **1009.** $\frac{\sqrt{4x-1}}{2x}.$ **1010.** $\frac{dx}{dt} = \frac{2e^t(e^t-1)}{e^{2t}+1}.$ **1011.** $\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}.$ **1012.** $\frac{ds}{dt} = \operatorname{tg}^6 t.$ **1013.** $\frac{\pi a}{2}.$

1014. 1) $\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}$; 2) $2 \cos(\ln x).$ **1015.** $\frac{1}{15}.$ **1017.** $-\frac{1}{3a}.$

1021. 1) $2 \cos 2x;$ 2) $2 \operatorname{tg} x \sec^2 x;$ 3) $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$ **1022.** 1) $-4 \sin 2x;$

2) $-\frac{24}{x^6};$ 3) $-(x \cos x + 3 \sin x).$ **1023.** 1) $-\frac{1}{x^2};$ 2) $e^{-t}(3-t);$

3) $\frac{2a(3x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^3}.$ **1024.** $-\frac{2}{(2-t)^{3/2}}.$ **1025.** 1) $\left(-\frac{1}{a}\right)^n e^{-\frac{x}{a}};$

2) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$ 3) $\frac{(-1)^{n-1}1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \sqrt{x^{2n-1}}}.$ **1026.** 1) $n!;$

2) $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right);$ 3) $2^{n-1} \cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$ **1028.** 1) $-2e^x \sin x;$

2) $xa^x(x^2 \ln^2 a + 6x \ln a + 6);$ 3) $2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x.$

1029. 1) $2e^{-x}(\sin x + \cos x);$ 2) $\frac{2}{x};$ 3) $x \sin x - 3 \cos x.$

1030. $f'''(x) = \frac{x+3a}{a^3} e^{\frac{x}{a}};$ $f^{(n)}(x) = \frac{x+na}{a^n} e^{\frac{x}{a}};$ $f^{(n)}(0) = \frac{n}{a^{n-1}}.$

1031. 1, $m, m(m-1), m(m-1)(m-2), \dots, m(m-1)\dots(m-n+1).$

1035. 1) $2e^{-x^2}(2x^2-1);$ 2) $\frac{2 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x};$ 3) $\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}.$

1036. 1) $a^x (\ln a)^n;$ 2) $(-1)^n \frac{2^n \cdot n!}{(1+2x)^{n+1}};$ 3) $-2^{n-1} \cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

1037. $\frac{\pi}{6};$ $-\frac{\sqrt{3}}{6};$ $\frac{7\sqrt{3}}{36}.$ **1038.** 1) $e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6);$

2) $\frac{1}{a^3} \left(6a^2 \cos \frac{x}{a} - 6ax \sin \frac{x}{a} - x^2 \cos \frac{x}{a}\right);$ 3) $-xf^{IV}(a-x).$

1041. По формуле Лейбница $f^{(n)}(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right)^n +$

$+ n \cdot 2xe^{-\frac{x}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 2e^{-\frac{x}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-2}.$ Отсюда

$f^{(n)}(0) = \frac{n(n-1)}{a^{n-2}} (-1)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{a^{n-2}} (-1)^n.$ **1042.** $f'(x) =$

$= -2xe^{-x^2} = -2xf(x).$ Далее по формуле Лейбница $f^{(n)}(x) =$

$= [-2xf(x)]^{(n-1)}$ и т. д. **1044.** 1) $-\frac{x}{y};$ 2) $\frac{p}{y};$ 3) $\frac{b^2x}{a^2y}.$

1045. 1) $-\frac{2x+y}{x+2y}$; 2) $\frac{2x-y}{x-2y}$. **1046.** 1) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; 2) $\frac{e^{-x}+y}{e^y+x}$.

1047. $-\frac{e^x \sin y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}$. **1048.** $\frac{1}{y^2} + 1$. **1049.** $\frac{1}{3}$.

1050. 1) $-\frac{a^2}{y^3}$; 2) $\frac{2(y-a)}{(x-b)^3}$; 3) $\frac{m(m+n)y}{n^2x^2}$. **1051.** $-\frac{b}{a^2}$.

1052. $y = 3 - x$ и $y = x - 1$. **1053.** $\left(\frac{40}{9}; \frac{40}{9}\right)$ и $(40; 40)$.

1054. 1) $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$; 2) $yy_0 = p(x + x_0)$. **1055.** $x + y = \pm \frac{a}{\sqrt[2]{2}}$.

1056. $\operatorname{arc tg} 3$. **1057.** 1) $-\frac{b^2x}{a^2y}$; 2) $\frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$. **1058.** 1) $-\frac{a^2}{y^3}$;

2) $-\frac{R^2}{(y-\beta)^3}$; 3) $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$; 4) $-\frac{6a^2}{(x+2y)^3}$. **1059.** $2y = -x - 3$ и

$2y = x + 1$. **1060.** $x + 2y = 4\sqrt{2}$. **1061.** $1 - \frac{1}{e}$. **1062.** $e(e-1)$.

1063. ± 2 . **1064.** 1) $dy = nx^{n-1} dx$; 2) $dy = 3(x-1)^2 dx$.

1065. 1) $dy = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $ds = gt dt$. **1066.** 1) $dr = 4 \sin^2 \varphi d\varphi$;

2) $dx = -\frac{2 dt}{t^3}$. **1067.** 1) $\sin 2t dt$; 2) $\sin u du$. **1068.** 1) $-\frac{a^3 dx}{x^2(a^2+x^2)}$;

2) $\frac{(\alpha+1)d\alpha}{\alpha}$; 3) $-\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi$; 4) $-\frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$. **1070.** 1) 0,04;

2) 0,05. **1071.** 1) $dV = 3x^2 dx = 0,75$; $\frac{dV}{x^3} = 0,006$ или $0,6\%$. 2) $df = \frac{3b}{8f} ds$.

1072. 1) $dx \leqslant \frac{0,1 \cdot 2}{5x \sqrt{x}} < 0,005$; 2) радиус нужно измерить с погрешностью не более $\frac{1}{3}\%$. **1073.** 1) $S = \pi R^2$, $\Delta S \approx dS = 2\pi R dR$;

2) $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, $\Delta V \approx dV = 4\pi R^2 dR$. **1074.** 1) $\frac{(2-x) dx}{x^3}$;

2) $b \sin(a - b\varphi) d\varphi$; 3) $-\frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}}$. **1075.** 1) $-\operatorname{tg} x dx$; 2) $\frac{du}{2u \sqrt{4u-1}}$;

3) $-2e^{-2t} dt$. **1076.** 1) $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha d\alpha$; 3) $b(1+e^{-bt}) dt$.

1077. 1) $\Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 = -0,2376$, $dy = 3x^2 dx = -0,24$; 2) $dl = -\frac{14}{\pi} \approx 4,46$ см; 3) $|dx| \leqslant \frac{x^2 \cdot 0,1}{4} \leqslant 0,006$.

1078. 1) $4y^2 = x^3$; 2) $y^2 = x \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2$. **1079.** 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{a^{\frac{2}{3}}}$. **1080.** 1) $x^2 - y^2 = 1$; 2) $y = \frac{1}{1+x^2}$. **1082.** $x =$

$$= \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \quad \textbf{1083. } y = x + \frac{(4-\pi)a}{2}. \quad \textbf{1084. } x+y = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\textbf{1085. } 1) -\frac{1}{a \sin^3 t}; 2) \frac{t^2+1}{4t^3}; 3) -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}. \quad \textbf{1086. } 1) y = -x^2 - 2x;$$

$$2) (y+2)^2 = x^2. \quad \textbf{1087. } x+y = a\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right). \quad \textbf{1088. } y = x - \frac{a\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$\textbf{1089. } 1) -\frac{1}{4 \sin^3 t}; 2) \frac{3t^2-1}{4t^3}; 3) \frac{3}{4e^t}. \quad \textbf{1090. } x = at - \frac{gt^2}{2}; \frac{dx}{dt} = a - gt; \frac{d^2x}{dt^2} = -g; \text{ через } t = \frac{a}{g}, x = \frac{a^2}{2g} \text{ (высшая точка).}$$

$$\textbf{1091. } \frac{dx}{dt} = t^2 - 4t + 3; t_1 = 1; t_2 = 3. \quad \textbf{1095. } v = \frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt} = w; \text{ перемножим почленно. } \quad \textbf{1096. } 2v \frac{dv}{dt} = 2a \frac{dx}{dt} = 2av; \text{ отсюда } w = \frac{dv}{dt} = a.$$

$$\textbf{1097. } x = 10 + 20t - \frac{gt^2}{2}; \frac{dx}{dt} = 20 - gt; \frac{d^2x}{dt^2} = -g. \text{ В наивысшей точке } \frac{dx}{dt} = 0; t = \frac{20}{g} \approx 2,04 \text{ сек. } \quad \textbf{1098. } \frac{dh}{dt} = \frac{a}{\pi h(2R+h)} = \frac{a}{\pi r^2}.$$

$$\textbf{1099. } \frac{dx}{dt} = k(A-x). \quad \textbf{1100. } d(\omega^2) = 2\omega d\omega, \frac{d(\omega^2)}{d\varphi} = 2\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = 2\omega \frac{dt}{d\varphi} = 2\omega \frac{1}{\omega} = 2. \quad \textbf{1101. } \text{Корни функции } 1; 3. \text{ Корень производной } f'(x) = 2x - 4 \text{ равен } 2; 1 < 2 < 3. \quad \textbf{1102. } \text{Не применима, ибо при } x=0 \text{ нет производной. } \quad \textbf{1103. } \text{Потому, что точка } x=0 — \text{ угловая (две касательные). } \quad \textbf{1104. } \text{Наклон хорды } (AB): k = \frac{9-1}{3+1} = 2; f'(x) = 2x = 2, x = 1; \text{ в точке } x = 1 \text{ касательная параллельна хорде. } \quad \textbf{1105. } f(b) = b^2, f(a) = a^2, f'(c) = 2c; \text{ подставим это в формулу Лагранжа } b^2 - a^2 = (b-a) \cdot 2c; \text{ отсюда } c = \frac{b+a}{2}. \quad \textbf{1106. } c = \frac{9}{4}.$$

1108. На дуге есть угловая точка при $x = \frac{\pi}{2}$, в которой функция не имеет производной. **1109.** Функция непрерывна и имеет производную внутри отрезка $[0; 2]$, но разрывна на его правом конце.

1110. Пусть $s = f(t)$ — уравнение движения, а t_1 и t_2 — начальный и конечный моменты движения. По теореме Лагранжа между t_1 и t_2 найдется t_3 , при котором $\frac{f(t_3) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f'(t_3)$, т. е. $40 = f'(t_3) =$

$= \frac{ds}{dt}$ в момент t_3 . **1111.** $\Phi'(x) = \begin{vmatrix} 1 & f'(x) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$. Так как $\Phi(b) =$

$= \Phi(a) = 0$ и в интервале (a, b) имеется производная $\Phi'(x)$, то по теореме Ролля между a и b найдется $x = c$, при котором

$\Phi'(c) = 0$, т. е. $\begin{vmatrix} 1 & f''(c) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0$; отсюда $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Функция $\Phi(x)$ есть удвоенная площадь $\triangle AMB$, где M — любая точка на дуге AB . 1112. $\frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{3c^2}{2c}$; отсюда $c = \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$.

1113. Угловой коэффициент касательной $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$, а в точке $t = c$ $k = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Угловой коэффициент секущей $k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$; по теореме Коши между a и b найдется $t = c$, при котором $k_1 = k$, т. е. касательная параллельна хорде. При этом, так как $\varphi'(t) \neq 0$, то $\varphi(a) < \varphi(c) < \varphi(b)$ (или наоборот), и точка касания находится внутри дуги. 1117. $c = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$.

1118. 1) $\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$; 2) $\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$; 3) $\frac{1}{\ln 2}$. 1119. 1) $\frac{\pi}{4}$;

2) $\sqrt[3]{\left(\frac{15}{4}\right)^2} \approx 2,4$. 1120. Функция $y = |x - 1|$ не имеет производной при $x = 1$. 1121. В точке $x = -\frac{1}{2}$. 1122. 3. 1123. $\frac{1}{2}$.

1124. $\frac{1}{na^{n-1}}$. 1125. 1. 1126. $\frac{a^2}{b^2}$. 1127. $\frac{1}{2}$. 1128. $\frac{1}{6}$. 1129. 3.

1130. 1) ∞ ; 2) 0. 1131. 0. 1132. 0. 1133. 3. 1134. 2. 1135. 0. 1136. 0. 1137. 1. 1138. 1. 1139. e^3 . 1140. 2-го порядка.

1144. $a - b$. 1145. $\frac{1}{3}$. 1146. $\frac{1}{8}$. 1147. $\ln \frac{a}{b}$. 1148. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. 1149. 1.

1150. 1. 1151. $-\frac{1}{3}$. 1152. -2 . 1153. $\frac{1}{e}$. 1154. $\frac{1}{6}$. 1155. e^3 .

1160. При $x = -2$ $y_{\min} = 1$. 1161. При $x = -2$ $y_{\min} = -\frac{16}{3}$; при $x = 2$ $y_{\max} = +\frac{16}{3}$; точки пересечения с Ox : $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3,4$. 1162. При $x = -1$ $y_{\max} = 1\frac{2}{3}$; при $x = 3$ $y_{\min} = -9$; точки пересечения с Ox : $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx 1,5 \pm 3,3$.

1163. При $x = \pm 2$ $y_{\max} = 5$, при $x = 0$ $y_{\min} = 1$; при $y = 0$ $x \approx \pm 2,9$. 1164. При $x = 0$ $y = 0$ — перегиб; при $x = 3$ $y_{\min} = -6\frac{3}{4}$.

1165. При $x = -2$ $y_{\max} = -2$; при $x = 2$ $y_{\min} = 2$; асимптоты $x = 0$ и $y = \frac{x}{2}$. 1166. При $x = 0$ $y_{\min} = -1$ (точка возврата); точки пересечения с осью Ox : $x = \pm 1$. 1167. При $x = 0$ $y_{\max} = 1$; при $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow 0$, т. е. $y = 0$ — асимптота. Кривая симметрична отно-

сительно оси Oy (почему?). **1168.** При $x = 1$ $y_{\max} = -4$; при $x = 5$ $y_{\min} = 4$; асимптоты $x = 3$ и $y = x - 3$. **1169.** При $x = 0$ $y_{\min} = 0$; при $x = \frac{2}{3}$ $y_{\max} = \frac{4}{27}$. **1170.** При $x = 4$ $y_{\max} = 1$, при $y = 0$ $x = 3$ или $x = 5$; при $y = -3$ $x = -4$ или 12. **1171.** При $x = 0$ $y_{\max} = 1$; асимптота $y = 0$. Симметрична относительно Oy .

1172. При $x = \frac{\pi}{12}$ $y_{\max} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,1$; при $x = \frac{5\pi}{12}$ $y_{\min} \approx 0,4$.

1173. При $x = \frac{\pi}{3}$ $y_{\max} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2,45$; при $x = -\frac{\pi}{3}$ $y_{\min} = \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \approx -2,45$. Асимптоты $x = \pm \frac{\pi}{2}$. **1174.** При $x = 1$ $y_{\max} = 1$; при $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow -\infty$; при $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow 0$. Асимптоты $x = 0$ и $y = 0$. Точка пересечения осью Ox : $1 + \ln x = 0$, $\ln x = -1$, $x = e^{-1} \approx 0,4$.

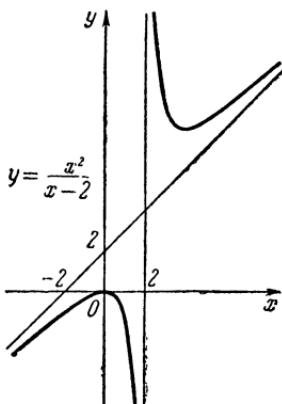
1175. При $x = \frac{1}{2}$ $y_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \approx -0,28$; при $x = -\frac{1}{2}$ $y_{\max} \approx 0,28$. Асимптоты: $y = x \pm \frac{\pi}{2}$. **1176.** 1) При $x = 2$ $y_{\max} = \frac{2}{e}$. Асимптота $y = 0$. 2) При $x = \frac{1}{e}$ $y_{\min} = -\frac{1}{e}$, $\lim_{x \rightarrow +0} y = 0$ — концевая точка; при $x = 1$ $y = 0$. **1177.** 1) При $x = 0$ $y_{\min} = 0$ (угловая точка); при $x = \pm \sqrt{\frac{4n+1}{2}\pi}$ $y_{\max} = 1$; 2) при $x = 0$ $y_{\min} = 0$ (угловая точка). **1178.** $y_{\min} = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \dots$; $y_{\max} = 1$ при $x = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; \dots$ **1179.** Область расположения кривой $x \leqslant 1$; $y_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ при $x = \frac{1}{2}$; $y = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. **1180.** При $x = 2$ $y_{\max} = \sqrt{2}$; область расположения кривой $x > 0$. **1181.** Асимптоты $x = 1$ и $x = 4$ (разрывы); $y_{\min} = -\frac{1}{9}$ при $x = -2$, $y_{\max} = -1$ при $x = 2$. **1182.** При $x = 1$ $y_{\min} = 1,5$. Кривая асимптотически приближается к параболе $y = \frac{x^2}{2}$

и к оси Oy . **1183.** При $x = 0$ и $x = 2$ $y_{\min} = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$; при $x = 1$ $y_{\max} = 2$ (в точках минимума точки возврата). **1184.** При $x = 0$ $y_{\perem} = 0$; при $x = 1$ $y_{\max} = 0,2$; при $x = 3$ $y_{\min} = -5,4$. **1185.** При $x_1 = -2$ $y_{\max} = 0$, при $x_2 = -1,2$ $y_{\min} \approx -1,1$, при $x = 0$ $y_{\perem} = 0$. **1186.** При $x = 2$ $y_{\max} = \frac{1}{2}$, при $y = 0$ $x = 1$, асимптоты — оси координат. **1187.** При $x = -3$ $y_{\max} = -4,5$, при $x = 0$ $y_{\perem} = 0$, при $x = 3$ $y_{\min} = +4,5$ асимптоты $y = x$ и $x = \pm \sqrt{3}$. **1188.** При $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $y_{\max} = 1$; при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi -$

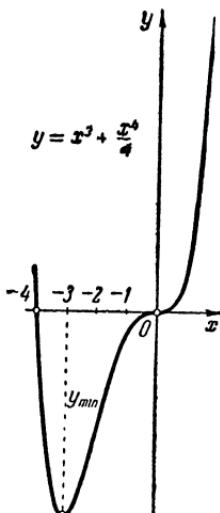
разрывы. **1189.** При $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $y_{\max} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - \frac{1}{2} \ln 2$.

1190. 1) При $x = 1$ $y_{\min} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$; 2) при $x = -1$ $y_{\max} = 1$, при $x = 0$ $y_{\min} = 0$ (угловая точка с наклонами $k = \pm 2$). **1191.** При $x = 0$ $y_{\min} = 0$; при $x = 2$ $y_{\max} = \frac{4}{e^2} \approx \frac{1}{2}$; асимптота $y = 0$.

1192. При $x = -1$ точка возврата $y_{\min} = 2$, при $x = 0$ $y_{\max} = 3$,



Черт. 45.



Черт. 46.

при $y = 0$ $x \approx 4$. **1193.** При $x = 2$ $y_{\max} = 4$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. **1194.** При $x = -1$ $y_{\min} = -4$; при $y = 0$ $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

1195. При $x = 0$ $y_{\min} = 0$; при $x = -2$ $y_{\max} = \frac{4}{3}$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. **1196.** При $x = -1$ $y_{\min} = -4$; при $x = -3$ $y_{\max} = 0$. **1197.** При $x = 0$ $y_{\max} = 0$; при $x = 2$ $y = \pm\infty$; при $x = 4$ $y_{\min} = 8$; асимптоты: $x = 2$ и $y = x + 2$ (черт. 45). **1198.** При $x = -3$ $y_{\min} = -6,75$; при $x = 0$ $y_{\text{перег}} = 0$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -4$ (черт. 46). **1199.** При $x = \pm 2$ $y_{\min} = -4$; при $x = 0$ $y_{\max} = 0$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = \pm \sqrt[3]{8} \approx \pm 2,8$. **1200.** При $x = 0$ точка возврата $y_{\max} = 0$; при $x = 1$ $y_{\min} = -1$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 3 \frac{3}{8}$ (черт. 47). **1201.** При $x = -1$ $y_{\max} = 2$; при $x = 1$ $y_{\min} = 0$; при $x = 0$ $y = 1$. Асимптота $y = 1$. **1202.** При $x = -1$ $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt[e]{e}} \approx -0,6$; при $x = 1$ $y_{\max} \approx 0,6$; ось Ox — асимптота.

1203. При $x = 2$ $y_{\min} = 2(1 - \ln 2) \approx 0,6$; ось Oy — асимптота; при $x = 1$ $y = 1$; при $x = e^2 \approx 7,4$ $y \approx 3,4$. **1204.** При $x = 0$ точка

возврата $y_{\max} = 0$; при $x = 2$ $y_{\min} = -3 \sqrt[3]{4} \approx -4,8$; при $x = 5$ $y = 0$. График подобен графику на черт. 47. **1205.** При $x = +\frac{\pi}{6}$

$y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \approx 0,34$; при $x = -\frac{\pi}{6}$ $y_{\min} \approx -0,34$; при

$x = \pm \frac{\pi}{2}$ $y = \mp \frac{\pi}{2} = \mp 1,57$. **1206.** При

$x = \frac{\pi}{4}$ $y_{\min} = \frac{\pi}{2} + 1 \approx 2,57$; при $x = \frac{3\pi}{4}$

$y_{\max} = +3,71$; асимптоты $x = 0$ и $x = \pi$.

1207. При $x = -\frac{1}{2}$ $y_{\max} = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx$

$\approx 1,85$; при $x = \frac{1}{2}$ $y_{\min} \approx 1,28$; при $x = 0$

$y = \frac{\pi}{2}$. Асимптота $y = x$. **1208.** При $x = 1$ точка возврата $y_{\min} = 1$; при $x = 0$ $y = 2$;

при $x = 2$ $y = 2$. **1209.** При $x = \frac{\pi}{6}$ и

$\frac{5\pi}{6}$ $y_{\max} = 1,5$; при $x = \frac{\pi}{2}$ $y_{\min} = 1$. **1210.** При $x = 0$ $y_{\min} = 0$; при

$x = 1$ $y_{\text{перег}} = 1$. **1211.** $x = e$, $y_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0,4$; при $y = 0$ $x = 1$.

Асимптоты $x = 0$ и $y = 0$. **1212.** При $x = -3$ $y_{\min} = 6$; при $x = -2$ $y = \infty$ (разрыв); при $x = -1$ $y_{\max} = 2$. Точки пересечения с осями:

$x = 0$, $y = 1,5$; $y = 0$, $x = \pm \sqrt[3]{3} \approx \pm 1,7$. Асимптоты: $x = -2$ и

$y = 2 - x$. **1213.** При $x = 1$ $y_{\min} = 2$, при $x = -1$ $y_{\max} = -2$, при $x = 0$ — разрыв. Асимптоты $y = x$ и $x = 0$. **1214.** 1) При $x = 0$

$y = a$. Точки пересечения с осью Ox : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Экстремум: при

$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ — минимум, при $x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ — максимум. Кри-

вая — график затухающих колебаний; она вписана в кривые $y = \pm ae^{-x}$, на которых и находятся точки экстремума. Построение нужно начать с кривых $y = \pm ae^{-x}$. Ось Ox — асимптота. 2) При

$x = -1$ $y_{\max} = 2$, при $x = 0$ — точка перегиба, при $x = 1$ $y_{\min} = -2$, при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx \pm 1,3$. **1215.** При $x = 1$ $y_{\min} = 3$; при

$x = 2$ $y = \infty$ (разрыв); при $x = 4$ $y_{\text{перег}} = 0$; при $x = 0$ $y \approx 3,6$.

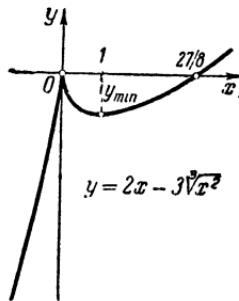
1216. При $x = -2$ $y_{\min} = 0$; при $x = -4$ $y_{\max} = 0,8$; при $x = 1$ $y_{\max} \approx 2,8$; ось Ox — асимптота. **1217.** При $x = \pm 1$ $y_{\max} = 1$; при

$y = 0$ $x = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx \pm 0,7$. Асимптоты оси Ox и Oy . **1218.** При

$x = 0$ $y_{\max} = 1$; при $x = 1$ $y_{\min} = 0$; при $y = 0$ $x = \pm 1$. **1219.** При

$x = -1$ $y_{\min} = \frac{1}{3}$; при $x = 1$ $y_{\max} = 3$; при $x = 0$ $y = 1$; асимптота

$y = 1$. **1220.** При $x = -1$ $y_{\max} = 1$, при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -4$,



Черт. 47.

область расположения кривой $x \leq 0$. **1221.** 1) При $x = -2$ $y = \infty$ (разрывы); при $x = -3$ $y_{\text{перег}} = 0$; при $x = 0$ $y_{\text{мин}} \approx 6 \frac{3}{4}$ асимпто-

ты $x = -2$ и $y = x + 5$. 2) $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 2n\pi$, $y_{\text{ макс}} = \sqrt{2}$ при $x = (2n+1)\pi$. В точках минимума y' не существует (угловые точки). **1222.** 30 м \times 60 м. **1223.** 5 и 5. **1224.** $\frac{ah}{4}$. **1225.** $\frac{a}{6}$.

1226. 4 м \times 4 м \times 2 м. **1227.** 20 см. **1228.** 60°. **1229.** $\frac{18}{\pi+4} \approx 2,5$.

1230. $\cos a = \frac{1}{m}$ (однако при условии, что $\frac{1}{m} \leq \frac{a}{AB}$, где a — проекция AB на направление железной дороги). **1231.** В 18 м от более сильного источника света. **1232.** Через $\frac{a}{2v}$ часов наименьшее рас-

стояние будет равно $\frac{a}{2}$ км. **1233.** $x = \frac{D}{2}$, $y = \frac{D\sqrt{3}}{2}$.

1234. В $\sqrt{3} \approx 1,7$ раза. **1235.** $l \approx 5,6$ м; определяется как макси-
мум функции $l = \frac{2,4}{\sin a} + \frac{1,6}{\cos a}$. **1236.** $v_{\text{ макс}} = \frac{128\pi}{9}$ дм³ при вы-
соте $x = 2$ дм.

1237. $S_{\text{ макс}} = R^2$ при высоте $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. **1238.** (1; 1).

1239. \sqrt{ab} . **1240.** При $x = 2$ м. **1241.** 4 см и $\sqrt{3} \approx 1,7$ см.

1242. $x = 1,5$. **1243.** Сечение — квадрат со стороной $\frac{D}{\sqrt{2}}$.

1244. При $a = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ радианов $\approx 294^\circ$. **1245.** $F = \frac{\mu P}{\cos a + \mu \sin a}$; $\operatorname{tg} a = \mu = 0,25$, $a \approx 14^\circ$. **1246.** 1) $y = x^2$, $y'' = 2 > 0$; кривая всюду выпу-
кла «вниз»; 2) $y = x^3$, $y'' = 6x$, кривая выпукла «вниз» при $x > 0$ и
«вверх» при $x < 0$; $x=0$ — точка перегиба, 3) $y = e^x$, $y'' = e^x > 0$ всюду выпукла «вниз», $(0; 1)$ — точка пересечения с Oy ; 4) $y = \ln x$ ($x > 0$),

$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, кривая всюду выпукла «вверх», $(1; 0)$ — точка пересечения с Ox ; 5) $(0; 0)$ — точка перегиба. **1247.** Точки перегиба

кривых: 1) $\left(2; -\frac{8}{3}\right)$; 2) $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$; 3) $\left(\pm \sqrt{3}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и

(0; 0); 4) при $x = -\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35$. **1252.** Область расположения

$x > -2$. Точки пересечения с осями $(-1; 0)$ и $(0; \ln 2)$. y всюду возрастает, кривая выпукла «вверх». Асимптота $x = -2$.

1253. $y > 0$, $y = 0$ — асимптота. **1254.** 1) Симметрична относительно Ox . Область расположения $x \geq 0$. Верхняя ветвь выпукла «вниз», нижняя «вверх». Обе ветви касаются Ox в точке $(0; 0)$. Кривая называется «полукубической параболой» (вместе с осью Oy образует букву К); 2) такая же, как предыдущая кривая, но сдвинута влево на 3 единицы. **1255.** 1) При $x = 0$ $y_{\text{ макс}} = -1$, асимптоты

$x = -2, x = 2$ и $y = 0$ (три ветви); 2) при $x = 1 y_{\max} = 2$, при $x = -1 y_{\min} = -2$, пересекается с Ox при $x = \pm \sqrt[3]{3}$, перегиб при $x = \pm \sqrt[3]{2}$, асимптоты — оси Ox и Oy . **1256.** 1) Область расположения $x > 0$; при $y = 0 x = 1$; асимптоты оси Ox и Oy . При $x = e y_{\max} = 1$; 2) при $x = 1 y_{\max} = 1$, при $x = 2 y_{\text{перег}} = \frac{2}{e} \approx \frac{2}{3}$,

ось Ox — асимптота, при $x = 0 y = 0$. **1257.** 1) При $x = 0 y_{\min} = 2$; асимптоты $x = -2$ и $x - y = 0$; 2) симметрична относительно Oy , при $y = 0 x = \pm \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \approx \pm 0,7$, при $x = \pm 1 y_{\min} = -1$, асимптота — ось Oy .

1258. 1) Область расположения $x > 0$; при $x = 1 y_{\min} = 1$; выпукла «вниз»; асимптота — ось Oy ; 2) Oy — ось симметрии, при $x = 0 y_{\min} = a$; всюду выпукла «вниз». Кривая называется *цепной линией*.

1259. 1) При $x = 0 y_{\max} = 0$, при $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,6 y_{\min} \approx 2,1$, при $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1,3 y_{\text{перег}} \approx -0,8$, асимптоты $x = 1$ и $y = x$;

2) при $x = -1 y_{\min} = -3$, при $y = 0 x = -\sqrt[3]{0,25} \approx -0,6$, асимптоты — оси Ox и Oy . **1260.** 1) Симметрична относительно Ox и Oy , область расположения $|x| < \sqrt[3]{2}$, при $x = \pm 1 y_{\pm} = \pm 1$, при $y = 0 x = 0$ или $\pm \sqrt[3]{2}$; 2) на ветви $y = x +$

$+ \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ $y_{\min} = 3$ при $x = 1$, ветвь $y = x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ пересекает Ox при $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$, обе ветви имеют асимптоты $y = x$ и $x = 0$.

1261. При $x = -2 y_{\min} = -\sqrt[3]{16} \approx -2,52$, при $x = 2 y_{\max} \approx 2,52$ (обе точки возврата), ось Ox — асимптота, ибо $y = \frac{8x}{(x+2)^{4/3} + (x^2-4)^{1/3} + (x-2)^{4/3}} \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow \pm \infty$.

1262. Симметрична относительно Ox , область расположения $x \geq 0$; асимптота ось Ox ($\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$); при $x = 1$ экстремум $y_{\pm} = \pm \frac{1}{e} \approx \pm 0,3$.

1264. 1) $\frac{x^3}{3} + x^2 + \ln x + C$; 2) $2x^5 - \frac{1}{x^3} + C$. **1265.** 1) $\frac{1-x}{x^2} + C$;

2) $\frac{x^2}{2} + 2 \ln x - \frac{1}{2x^2} + C$. **1266.** 1) $x \left(\frac{2}{3} \sqrt[3]{x} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x} \right) + C$;

2) $2 \sqrt[4]{x} - 4 \sqrt[4]{x} + C$. **1267.** 1) $\frac{2x \sqrt[3]{x}}{3} - 3x + 6 \sqrt[3]{x} - \ln x + C$;

2) $\frac{3}{4} (x-4) \sqrt[3]{x} + C$. **1268.** 1) $e^x + \frac{1}{x} + C$; 2) $\frac{ax}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + C$.

1269. 1) $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$; 2) $-\operatorname{ctg} x - x + C$.

1270. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$;

2) $3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x + C$. **1271.** 1) $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$; 2) $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C$.

1272. 1) $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{arc} \sin x + C$; 2) $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$.

1273. 1) $\frac{x^4 - 1}{2x^2} - 2 \ln x + C$; 2) $3 \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

1274. 1) $\frac{2(x+2)}{\sqrt{x}} + C$; 2) $4 \ln x - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C$. **1275.** 1) $\ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$; 2) $x + \cos x + C$.

1276. 1) $e^x + \operatorname{tg} x + C$; 2) $\frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{4x^4} + C$. **1277.** $\cos x - \operatorname{ctg} x + C$. **1278.** $\operatorname{tg} x - x + C$.

1279. $\frac{1}{3} \sin 3x + C$. **1280.** $-2 \cos \frac{x}{2} + C$. **1281.** $-\frac{1}{3} e^{-8x} + C$.

1282. $\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C$. **1283.** $2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + C$. **1284.** $\frac{1}{6} (4x-1)^{3/2} + C$.

1285. $-\frac{(3-2x)^5}{10} + C$. **1286.** $-\frac{1}{8} (5-6x)^{4/3} + C$.

1287. $-\sqrt{3-2x} + C$. **1288.** $\frac{1}{b} \cos(a-bx) + C$.

1289. $\ln(x^2 - 5x + 7) + C$. **1290.** $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$.

1291. $-0,1 \ln|1-10x| + C$. **1292.** $-\frac{1}{6} \ln|1-3e^{2x}| + C$.

1293. $\ln|\sin x| + C$. **1294.** $-\ln|\cos x| + C$. **1295.** $\ln|\sin 2x| + C$.

1296. $-\frac{1}{3} \ln|1+3 \cos x| + C$. **1297.** $\frac{1}{2} \ln|1+2 \sin x| + C$.

1298. $\ln|1+\ln x| + C$. **1299.** $\frac{\sin^3 x}{3} + C$. **1300.** $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

1301. $-\frac{1}{3 \sin^3 x} + C$. **1302.** $\frac{1}{2 \cos^2 x} + C$. **1303.** $\frac{2-\cos x}{\sin x} + C$.

1304. $\frac{\sin^2 x}{2} + C$. **1305.** $-e^{\cos x} + C$. **1306.** $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$.

1307. $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$. **1308.** $2e^{\sqrt{-x}} + C$. **1309.** $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C$.

1310. $\frac{1}{4} \sqrt[3]{(x^3-8)^4} + C$. **1311.** $\frac{1}{2} \sqrt[3]{(1+x^3)^2} + C$.

1312. $-\sqrt{1-x^2} + C$. **1313.** $-\sqrt{1+2 \cos x} + C$.

1314. $\frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + C$. **1315.** $\frac{1}{6} (1+4 \sin x)^{3/2} + C$.

1316. $-\frac{1}{40} (1-6x^5)^{4/3} + C$. **1317.** $2x + \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) + C$.

1318. $\frac{\sin^4 x}{4} + C$. **1319.** $-\frac{1}{2} \sqrt{1-4x} + C$. **1320.** $-\frac{1}{b} \sin(a-bx) + C$.

- 1321.** $\frac{1}{4}(1+3x)^{\frac{4}{3}} + C.$ **1322.** $-\frac{1}{7}(1-2x^3)^{\frac{7}{6}} + C.$
- 1323.** $\sqrt{1+x^2} + C.$ **1324.** $\frac{\sin x - 2}{\cos x} + C.$ **1325.** $2\ln|\sin x| - \operatorname{ctg} x + C.$
- 1326.** $e^{\sin x} + C.$ **1327.** $-\frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C.$ **1328.** $\frac{1}{2b(a-bx)^2} + C.$
- 1330.** 1) $0,1 \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C;$ 2) $\frac{1}{3} \operatorname{arc tg} \frac{x}{3} + C.$
- 1331.** 1) $\operatorname{arc sin} \frac{x}{2} + C;$ 2) $\ln(x + \sqrt{x^2+5}) + C.$
- 1332.** 1) $\ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C;$ 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \operatorname{arc tg} \frac{x}{\sqrt[3]{3}} + C.$
- 1333.** 1) $\operatorname{arc sin} \frac{x}{\sqrt[3]{5}} + C;$ 2) $\frac{1}{6} \operatorname{arc tg} \frac{x^3}{2} + C.$
- 1334.** 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arc sin} \frac{x^2}{\sqrt[3]{3}} + C;$ 2) $\frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{bx-a}{bx+a} \right| + C.$
- 1335.** 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arc sin} \frac{2x}{\sqrt[3]{3}} + C;$ 2) $\frac{1}{4} \ln(x^4 + \sqrt{x^8-1}) + C.$
- 1336.** 1) $2,5 \ln(x^2+4) - \operatorname{arc tg} \frac{x}{2} + C;$ 2) $\frac{3}{2} \ln(x^2-4) - \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$
- 1337.** 1) $\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C;$ 2) $-\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc sin} x + C.$
- 1338.** $x - \operatorname{arc tg} x + C.$ **1339.** $\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} \ln \left| \frac{x-\sqrt[3]{3}}{x+\sqrt[3]{3}} \right| + C.$
- 1340.** $\operatorname{arc tg}(x+2) + C.$ **1341.** $\frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{x-3}{2} + C.$
- 1342.** $\ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+3}) + C.$ **1343.** $\operatorname{arc sin} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2}} + C.$
- 1344.** $\operatorname{arc sin} \frac{x-2}{2} + C.$ **1345.** $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \operatorname{arc tg} \frac{2x+3}{\sqrt[3]{3}} + C.$
- 1346.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \operatorname{arc sin} \frac{4x-3}{5} + C.$ **1347.** $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+3}| + C.$
- 1348.** $\sqrt[3]{3} \left(\operatorname{arc tg} \frac{x}{\sqrt[3]{3}} + \ln \left| \frac{x-\sqrt[3]{3}}{x+\sqrt[3]{3}} \right| \right) + C.$
- 1349.** $\operatorname{arc sin} \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \ln(x + \sqrt{2+x^2}) + C.$
- 1350.** $2 \ln(x^2+5) - \sqrt[3]{5} \operatorname{arc tg} \frac{x}{\sqrt[3]{5}} + C.$
- 1351.** $x + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt[3]{2}}{x+\sqrt[3]{2}} \right| + C.$
- 1352.** $\frac{x^3}{3} - 2x + 2\sqrt[3]{2} \operatorname{arc tg} \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + C.$ **1353.** $\operatorname{arc sin}(e^x) + C.$

1354. $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x^2) + C.$

1355. $0,2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+2}{5} + C.$

1356. $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-1}{2} + C.$

1357. $\operatorname{arc} \sin \frac{x+2}{3} + C.$

1358. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

1359. $\frac{1}{2} \ln(2x+1 + \sqrt{4x^2+4x+3}) + C.$ **1360.** $x \ln|x| - x + C.$

1361. $\frac{x^3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{2} + x + \ln|x-1| \right) + C.$

1362. $\frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$ **1363.** $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{x}{2} + C.$

1364. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$ **1365.** $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$

1367. $x [(\ln|x|-1)^2 + 1] + C.$ **1368.** $-x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$

1369. $-\frac{\ln|x|+1}{x} + C.$ **1370.** $2\sqrt{1+x} \operatorname{arc} \sin x + 4\sqrt{1-x} + C.$

1371. $x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2} + C.$ **1372.** $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6) + C.$

1373. $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$ **1374.** $\frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$

1375. $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln|x| - \frac{2}{3} \right) + C.$ **1376.** $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8) + C.$

1377. $x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$ **1378.** $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$

1379. $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$ **1380.** $4\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} + C.$

1381. $-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C.$ **1382.** $x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$

1384. $3x + 4 \sin x + \sin 2x + C.$ **1385.** $\frac{3x}{2} + \cos 2x - \frac{\sin 4x}{8} + C.$

1386. $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$ **1387.** $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$

1388. $\frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C.$ **1389.** $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 32x}{48} + C.$

1390. $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$ **1391.** $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

1392. $\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$ **1393.** $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.$

1394. $7x + 14 \sin x + 3 \sin 2x - \frac{8 \sin^3 x}{3} + C.$

1395. $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$ **1396.** $\frac{1}{\cos x} + \cos x + C.$

1397. $\frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x| + C.$ **1398.** 1) $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$ 2) $\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

- 1399.** $\frac{1}{2} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] + C.$ **1400.** $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{dx}{\sin x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right| + C.$
- 1401.** $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.$ **1402.** $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C.$
- 1403.** $-\frac{1}{8} (\cos 4x + 2 \cos 2x) + C.$ **1404.** $\frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m+n)x}{m+n} + \frac{\sin (m-n)x}{m-n} \right] + C$ при $m \neq n$ и $\frac{x}{2} + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C$ при $m = n.$
- 1405.** 1) $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C;$ 2) $\frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n)x}{m-n} - \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right] + C$ при $m \neq n$ и $\frac{x}{2} - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C$ при $m = n.$ **1406.** $-\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \sin 4x + C.$ **1407.** 1) $\frac{5}{16}x - \cos x \left(\frac{\sin^5 x}{6} + \frac{5 \sin^3 x}{24} + \frac{5 \sin x}{16} \right) + C.$
- 1408.** 1) $\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$ 2) $-\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$
- 1409.** $\frac{11x}{2} + 3 \sin 2x + \frac{9}{8} \sin 4x + C.$ **1410.** $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$ **1411.** $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$
- 1412.** $\sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$ **1413.** $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$
- 1414.** $7x - 14 \cos x - 3 \sin 2x + \frac{8 \cos^3 x}{3} + C.$ **1415.** $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| - x + C.$
- 1416.** $\frac{1}{8} (2 \sin 2x - \sin 4x) + C.$ **1417.** $\frac{1}{\cos x} + \cos x + \operatorname{tg} x + C.$
- 1418.** $-\frac{1}{4} \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{4}x + C.$ **1419.** 1) $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8 \ln |x-2| + C;$ 2) $\frac{x^3}{3} - a^2 x + a^3 \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + C;$ 3) $\frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3} \ln |x^3 - a^3| + C.$
- 1420.** $\ln \frac{C(x-2)^2}{x-3}.$ **1421.** $\ln \left| \frac{(x-1)^3}{x+2} \right| + C.$ **1422.** $\ln \frac{Cx^3(x-1)}{x+1}.$
- 1423.** $\frac{x^3}{2} + 4x + \ln \frac{(x-1)^8}{|x|} + C.$ **1424.** $\frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C.$
- 1425.** $\frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{x-a}{x} \right| + \frac{x-a}{ax^2} + C.$ **1426.** $\ln Cx(x-1) + \frac{2}{x-1}.$
- 1427.** $\ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right|^2 + C.$ **1428.** $\frac{5}{2} \ln (x^2 + 2x + 10) - \operatorname{arc tg} \frac{x+1}{3} + C.$
- 1429.** $2 \ln (x^2 - 0,2x + 0,17) - 5 \operatorname{arc tg} \frac{10x-1}{4} + C.$

1430. $\ln|x+1|\sqrt{x^2+4}+C.$ **1431.** $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\arctg\frac{x-1}{2}+C.$

1432. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$ **1433.** $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}-\frac{1}{x+1}+\arctg x+C.$ **1434.** 1) $\frac{1}{2b^3}\left(\arctg\frac{x}{b}+\frac{bx}{x^2+b^2}\right)+C;$

2) $\frac{1}{8b^4}\left[\frac{x(5b^2+3x^2)}{(x^2+b^2)^2}+\frac{3}{b}\arctg\frac{x}{b}\right]+C.$ **1435.** 1) $-\frac{x+9}{8(x^2+2x+5)}-\frac{1}{16}\arctg\frac{x+1}{2}+C;$ 2) $\frac{1}{8}\left[\frac{(x-3)(3x^2-18x+32)}{(x^2-6x+10)^2}+3\arctg(x-3)\right]+C.$

1436. $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}+\frac{x-1}{x^2+1}+C.$ **1437.** $\frac{x-2}{4(x^2+2)}+\frac{\sqrt{2}}{8}\arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

1438. $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{x+a}\right|+C.$ **1439.** $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$

1440. $\frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{2}{x}\right|+C.$ **1441.** $\frac{1}{10\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{2}}\arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

1443. $\frac{1}{4}\int\frac{4+x^2-x^2}{x(4+x^2)}dx=\frac{1}{4}\ln\frac{|x|}{\sqrt{4+x^2}}+C.$ **1444.** $\ln\frac{C(x-2)^3}{x-1}.$

1445. $\ln C(x-1)\sqrt{2x+3}.$ **1446.** $\ln\frac{C(x-1)^3}{(x+2)^2(x-2)}.$

1447. $3\ln\frac{C(x-1)}{x+2}-\frac{2}{x+2}.$ **1448.** $2\ln\frac{C(x-2)}{x}-\frac{1}{x-2}.$

1449. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2-2x+2}}+2\arctg(x-1)+C.$ **1450.** $\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}+\frac{1}{a}\arctg\frac{x}{a}+C.$

1451. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

1452. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$

1453. $-\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\arctg(x+1)\right]+C.$

1454. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+C.$ **1455.** $\frac{1}{3}\int\frac{x^2+3-x^2}{x^2(x^2+3)}dx=$

$=-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$ **1456.** $\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}dx=$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctg x+C.$ **1457.** $\frac{1}{3}\int\frac{x^2+1-(x^2-2)}{(x^2+1)(x^2-2)}dx=$

$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{3}\arctg x+C.$ **1458.** $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C.$

1459. $\frac{2x+1}{12} (2\sqrt{2x+1}-3) + C.$ **1460.** $6 \left[\frac{\sqrt[3]{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1+\sqrt[6]{x}) \right] + C.$

1462. $\frac{3}{4} \left[\frac{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{2} - \sqrt[3]{x^4+1} + \ln(\sqrt[3]{x^4+1}+1) \right] + C.$

1463. $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^3+2}}{3} + C.$ **1464.** $\mp \arcsin \frac{1}{x} + C$ ($-$ при $x > 0$ и $+$ при $x < 0$). **1465.** $\ln \frac{Cx}{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}.$

1466. $-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C.$ **1467.** $\ln \frac{C(x+1)}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$

1468. $\frac{1}{2} \left[x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right] + C.$

1469. $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$ **1470.** $2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{4}(2-x^2)\sqrt{4-x^2} + C.$

1471. $\frac{x^3}{3a^2\sqrt{(a^2+x^2)^3}} + C.$ **1472.** $\int \sqrt{4-(x-1)^2} dx$ решаем подстановкой $x-1 = 2 \sin t$, $\int \sqrt{4-4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = 2 \arcsin \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}{2} + C.$ **1473.** $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

1474. $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2+2x+2} - 3,5 \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$

1475. $-\sqrt{3-2x-x^2} - \arcsin \frac{x+1}{2} + C.$ **1477.** $\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{a} + C.$ **1478.** $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1} \right| +$

$+ \frac{2}{3} \arctg \sqrt[4]{1+x^3} + C.$ **1479.** $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2} + C.$ **1480.** $\frac{m+1}{n} +$

$+ p = \frac{-2+1}{2} + \frac{3}{2} = \text{целому числу};$ положив $x^{-2}+1=t^2$, получим:

$\int \frac{x^{-2}x^{-3}dx}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}} = - \int \frac{t^2-1}{t^4} dt = - \frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}} + C.$ **1481.** $\frac{m+1}{n} =$

$= \frac{3+1}{2}$ = целому числу; положив $a - bx^2 = t^2$, получим: $\frac{1}{b^2} \int \frac{t^2 - a}{t^2} dt =$
 $= \frac{2a - bx^2}{b^2 \sqrt{a - bx^2}} + C$. **1482.** $\frac{(x-2) \sqrt{2x-1}}{3} + C$. **1483.** $\frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{2} +$
 $+ (3x+1)^{\frac{1}{3}} + \ln |(3x+1)^{\frac{1}{3}} - 1| + C$. **1484.** $x - 2\sqrt{x} +$
 $+ 2 \ln (\sqrt{x} + 1) + C$. **1485.** $-0,3(2x+3a) \sqrt[3]{(a-x)^2} + C$.
1486. $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \arctg \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$. **1487.** $\frac{3(x^2+1)}{2} \times$
 $\times \left(\frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{4} + \frac{1}{3} \right) + C$. **1488.** $\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) +$
 $+ \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}} + C$. **1489.** $x^2 + \frac{1}{3} \sqrt{(4-x^2)^3} + C$; в этом примере
 выгодно сначала освободиться от иррациональности в знаменателе.

1490. $\mp \sqrt{\frac{x+2}{x}} + C$ (— при $x > 0$ и + при $x < -2$).

1491. $\arccos \frac{1}{x-1} + C$. **1492.** $2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C$.

1493. $2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2} + C$.

1494. $\frac{2+x}{2} \sqrt{4x+x^2} - 2 \ln |x+2+\sqrt{4x+x^2}| + C$.

1495. $-\frac{x+6}{2} \sqrt{5+4x-x^2} + \frac{17}{2} \arcsin \frac{x-2}{3} + C$.

1496. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{|x|} + C$. **1497.** $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

1498. Положив $1 - x^3 = t^2$, найдем:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt{1-x^3}} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1} \right| + C$$

1499. Положив $x = \frac{1}{t}$, найдем;

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} = \arccos \frac{x+1}{2x} + C$$

1500. $\frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) - 2 \arctg(e^x) + C$. **1501.** $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$.

1502. $\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4 \ln(e^x+2) + C$. **1503.** $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.

1504. $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$ **1505.** $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C.$

1506. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x + C.$ **1507.** $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + C.$

1508. $e^x + \ln |e^x - 1| + C.$ **1509.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C.$

1510. $e^x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C.$ **1511.** $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt[4]{2}} \right) + C.$

1512. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C.$ **1513.** $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (2 \operatorname{tg} x) + C.$ **1514.** $\frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C.$

1515. $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + C.$ **1516.** $2 \ln |e^x - 1| - x + C.$ **1517.** $\frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + \ln |\operatorname{tg} x|) + C.$

1518. 1) $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12} - \frac{x}{2} + C;$ 2) $\frac{x}{2} + \operatorname{ch} 2x + \frac{\operatorname{sh} 4x}{8} + C.$

1519. 1) $\operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C.$ **1520.** $\ln |\operatorname{ch} x| + C.$ **1521.** $-\frac{1 - \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} + C.$

1522. $-\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} \right) + C.$ **1523 и 1524.** См. стр. 160, № 1366.

1525. $\frac{x}{4 \sqrt[4]{4+x^2}} + C.$ **1526.** $-\frac{x}{5 \sqrt[5]{x^2-5}} + C.$ **1527.** $\frac{\operatorname{ch}^3 3x}{9} - \frac{\operatorname{ch} 3x}{3} + C.$ **1528.** $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8} + C.$ **1529.** $\frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + C.$

1530. $x - \operatorname{cth} x + C.$ **1531.** $2 \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} + C$ (под интегралом умножить сначала числитель и знаменатель на $\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$).

1532. $\frac{\operatorname{sh} x - 2}{\operatorname{ch} x} + C.$ **1533.** $\frac{3}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 3}| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 3} + C.$

1534. $\ln |x + \sqrt{x^2 + 3}| - \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} + C.$ **1535.** $2 \sqrt{x+1} + \ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{x} \right| + C.$ **1536.** $\frac{(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2}{2} + C.$

1537. $\frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right| - \frac{1}{ax} + C.$ **1538.** $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + C.$

1539. $2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{x} + C$ (положить $x = \sin^2 t$). **1540.** $ab \times \times \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) + C.$ **1541.** $\frac{1}{4} \left(x^3 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C.$

1542. $\ln C(e^x + 1) - x - e^{-x}.$

1543. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx =$
 $= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

1544. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C.$

1545. $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$

1546. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + C.$

1547. $-\frac{1}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos x}{b} + C.$

1548. $3x^{\frac{1}{3}} - 12x^{\frac{1}{6}} + 24 \ln \left(x^{\frac{1}{6}} + 2 \right) + C.$

1549. $\frac{b-3ax}{6a(ax+b)^3} + C$ (положить $ax+b=t$).

1550. $-\frac{1}{x} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$

1551. $-\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}$ (разделить числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и положить $\operatorname{tg} x = t$).

1552. $\frac{2}{b} \sqrt{a+b \ln x} + C.$

1553. $\frac{1}{3b(n-1)(a-bx^3)^{n-1}} + C;$ при $n \neq 1$ и $-\frac{1}{3b} \ln |a-bx^3| + C$ при $n=1.$

1554. Выделив под корнем полный квадрат, положить $x+1 = \sqrt{2} \sin t$ (или же решить методом неопределенных коэффициентов); $\frac{x+1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + \operatorname{arc} \sin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$

1555. $-\frac{2 \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)^2} + C.$

1556. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} + C.$

1557. $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \ln(4+e^{2x}) + C.$

1558. $\ln \left| \frac{C \sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} \right|.$

1559. $x + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$

1560. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} + C.$

1561. 1) $\frac{1}{2 \sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \operatorname{ctg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{ctg} x} \right| + C = \frac{1}{2 \sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} \right| + C;$

2) $\frac{1}{2 \sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x} \right| + C.$

1562. 1) Освободиться от иррациональности в знаменателе; $\frac{2}{3a} \left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right] + C;$ 2) $\frac{1}{2} [x \sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x^2] + C.$

1563. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x} + \ln \frac{C(x-1)^2}{x}.$

1564. $-\frac{1}{3} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{\frac{3}{2}} + C$ (положить $x = \frac{1}{t}$).

1565. $\frac{2}{3} \operatorname{arc tg} \sqrt{x^3 - 1} + C$ (положить $x^3 - 1 = t^2$). **1566.** $\frac{1}{2} [x + \ln |\sin x + \cos x|] + C$. **1567.** $2[\sqrt{x} \operatorname{arc sin} \sqrt{x} + \sqrt{1-x}] + C$.

1568. $\operatorname{tg}^3 x + C$ или $\frac{1}{\cos^2 x} + C_1$. **1569.** $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x} dx = - \int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) + \int d(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C$.

1570. $-\operatorname{ctg} x \ln(\cos x) - x + C$. **1571.** $e^{-x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{ex-1}{ex+1} \right| + C$.

1572. $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C$ (положить $\operatorname{tg} x = t$). **1573.** $\ln |x| - \frac{x+1}{x} \ln |x+1| + C$.

1574. $\int \sqrt{1 - \sin x} dx = \pm \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x}} = \pm 2 \sqrt{1 + \sin x} + C$ (+ при $\cos x > 0$ и — при $\cos x < 0$). **1575.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$.

1576. $\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2-2)} = \frac{1}{6} \int \frac{x^2+1-(x^2-2)}{(x^2+1)(x^2-2)} d(x^2) = \frac{1}{6} \ln \frac{|x^2-2|}{x^2+1} + C$. **1577.** $-2e^{-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1) + C$.

1578. $2\sqrt{x} \operatorname{arc tg} \sqrt{x} - \ln |1+x| + C$. **1579.** $\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$ (положить $\operatorname{tg} x = t$). **1580.** $\ln |x| - \frac{x^2+1}{2x^2} \ln(x^2+1) + C$. **1581.** $\frac{1}{\ln a} \operatorname{arc tg}(ax) + C$.

1582. $2(\sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + C$.

1583. $\frac{2(x+7)}{3} \sqrt{x+1} + 2\sqrt{2} \ln \frac{|\sqrt{x+1} - \sqrt{2}|}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} + C$ (положить $x+1 = t^2$). **1584.** $x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc sin} x + C$. **1585.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ (положить $x = \frac{1}{t}$). **1586.** $-\frac{3x^2+3x+1}{3(x+1)^3} + C$ (положить $x+1 = t$).

1587. $\sqrt{2ax+x^2} - 2a \ln |x+a+\sqrt{2ax+x^2}| + C$ (стр. 164, п. 4°).

1588. $\ln \frac{(2x-1)^2}{|x^2+x|} + C$. **1589.** $-\frac{1+\cos x+\sin^2 x}{\sin x} + C$.

1590. $\frac{1}{16} \ln \frac{C(x^2+2x+2)}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8} \operatorname{arc tg} \frac{2x}{2-x^2}$ [знаменатель разлагается на множители так: $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - 4x^2 =$ = и т. д.]. **1592.** $s_5 = 0,646$, $S_5 = 0,746$, $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,693$. **1593.** 20.

1594. $2\frac{5}{8}$. **1595.** $\frac{14}{3}$. **1596.** $\frac{\pi}{6}$. **1597.** $\frac{\pi}{12a}$. **1598.** $3(e-1)$.

1599. $\ln(1 + \sqrt{2})$. **1600.** $\frac{1}{2}$. **1601.** Положив $x = t^2$ и изменив соответ-

ственно пределы, получим $\int_2^3 \frac{2t \, dt}{t-1} = [2t + 2 \ln(t-1)]_2^3 = 2(1 + \ln 2)$.

1602. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$. **1603.** $2 - \ln 2$. **1604.** $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **1605.** $\ln \frac{2e}{e+1}$.

1606. $\frac{a(\pi-2)}{4}$ (положить $x = a \sin^2 t$). **1607.** $\frac{1}{3}$. **1608.** $\frac{\pi a^2}{16}$.

1609. $2 \ln 2 - 1$. **1610.** $\frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$. **1611.** $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$.

1612. $\ln \frac{3}{2}$. **1613.** 1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}$. **1614.** $-\frac{a^3}{6}$.

1615. $\frac{1}{6}$. **1616.** 1. **1617.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **1618.** $2 \ln 1,5 - \frac{1}{3}$. **1619.** $\operatorname{arc tg} e - \frac{\pi}{4} \approx 0,433$. **1620.** $\frac{17}{6}$. **1621.** $\frac{\pi-2}{4}$. **1622.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **1623.** $\frac{1 - \ln 2}{2}$.

1624. 1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}$. **1625.** $\frac{32}{3}$. **1626.** πab .
1627. $\frac{2}{3}$ произведения основания ($2\sqrt{2ph}$) на высоту h . **1628.** $\frac{32}{3}$.

1629. $8 \ln 2$. **1630.** 1. **1631.** $\frac{16}{3}$. **1632.** 19,2. **1633.** 25,6. **1634.** $8 \frac{8}{15}$.

1635. $\frac{8}{3}$. **1636.** $20 \frac{5}{6}$. **1637.** πa^2 (см. черт. 60 на стр. 328). **1638.** 0,8 (см. черт. 57 на стр. 327). **1639.** $\frac{(4-\pi)a^2}{2}$; положить $x = 2a \sin^2 t$

(черт. 88 стр. 354). **1640.** $2a^2 \sinh 1 = a^2(e - e^{-1}) \approx 2,35a^2$. **1641.** $3\pi a^2$.

1642. $\frac{3\pi a^2}{8}$. **1643.** a^2 . **1644.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **1645.** $r_{\max} = 4$ при $2\varphi = 90^\circ + 360^\circ n$, т. е. при $\varphi = 45^\circ + 180^\circ n = 45^\circ, 225^\circ$; $r_{\min} = 2$ при $2\varphi = -90^\circ + 360^\circ n$, т. е. при $\varphi = -45^\circ + 180^\circ n = 135^\circ, 315^\circ$. Смежные экстремальные радиусы-векторы при 45 и 135° . Искомая площадь равна

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (3 + \sin 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{19\pi}{8}. \quad \text{1646. } \frac{3\pi}{4}. \quad \text{1647. } \frac{\pi a^2}{2}. \quad \text{1648. } \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$\text{1649. } r = a(\sin \varphi + \cos \varphi) = a\sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right); \quad r_{\max} = a\sqrt{2}$$

при $\varphi - \frac{\pi}{4} = 0$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $r_{\min} = 0$ при $\varphi - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

Площадь $S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (a\sqrt{2})^2 \cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = \frac{\pi a^2}{2}$. Ответ получается проще, если перейти к декартовым координатам: $x^2 + y^2 = a(x+y)$ — окружность.

1650. $\frac{7a^2}{4\pi}$. **1651.** $(10\pi + 27\sqrt{3})\frac{a^2}{64}$.

1652. $\frac{3}{2}a^2$. **1653.** 36. **1654.** 12. **1655.** $\frac{32}{3}$. **1656.** $\frac{4}{3}$ (см. черт. 56 на стр. 326). **1657.** $\frac{14}{3}$. **1658.** 2. **1659.** $\frac{16}{3}$. **1660.** $17,5 - 6 \ln 6$.

1661. $2 \int_{-1}^0 -x \sqrt{x+1} dx = \frac{8}{15}$ (см. черт. 53 на стр. 326). **1662.** $r_{\max} = 4$, когда $2\varphi = 180^\circ + 360^\circ n$, $\varphi = 90^\circ + 180^\circ n = 90^\circ$ или 270° ; $r_{\min} = 2$, когда $2\varphi = 0^\circ + 360^\circ n$, $\varphi = 180^\circ n$; 0° или 180° . Площадь

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{19\pi}{8}$$
.
 1663. $\frac{3\pi}{4}$. **1664.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **1665.** $\frac{\pi a^2}{4}$.

1666. $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi} - e^{-2\pi}) = \frac{a^2}{2} \sinh 2\pi$. **1667.** $4ab \arctan \frac{b}{a}$. **1668.** $\frac{11}{8}\pi a^2$.

1669. πph^2 . **1670.** $\frac{8\pi a^2 b}{3}$. **1671.** 12π . **1672.** $58,5\pi$. **1673.** $2\pi^2 a^2 b$.

1674. $\pi a^3 \left(\frac{\sinh 2}{2} + 1 \right)$. **1675.** $\frac{512\pi}{15}$. **1676.** $\frac{7}{6}\pi a^3$. **1677.** $3\pi^2$.

1678. $\frac{512\pi}{7}$. **1679.** $\frac{\pi}{4} \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. **1680.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **1681.** $\frac{\pi^2}{2}$.

1682. $\frac{64\pi}{3}$. **1683.** $\frac{(\pi+2)\pi}{4}$. **1684.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. **1685.** $\frac{32\pi a^3}{105}$.

1686. $19,2\pi$. **1687.** $\frac{8\pi a^3}{3}$. **1688.** $V = \frac{128\pi}{3}$. **1689.** $5\pi^2 a^3$.

1690. 72π . **1691.** $\frac{112}{27}$. **1693.** $6a$. **1694.** $\frac{670}{27}$. **1695.** $8a$. **1696.** Точки

пересечения с осями при $t_1 = 0$ и $t_2 = \sqrt[4]{8}$. $s = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt[t^4 + 1]{t^3} dt =$

$= 4 \frac{1}{3}$. **1697.** $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. **1698.** $2a \sinh 1 \approx 2,35a$.

1699. $s = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$; полагаем $1+x^2=t^2$; $s = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} =$
 $= \left[t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} \right]_{1,25}^{2,6} = 1,35 + \ln 2 \approx 2,043$. **1700.** Точки пересече-

ния с осями при $x_1=0$ и $x_2=\frac{\pi}{3}$; $s = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \ln(2+\sqrt{3}) \approx 1,31$. **1701.** 1) $4\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{2} \ln(2 \operatorname{ch} 2) \approx$

$\approx 1,009$. **1702.** 1) $8a$; 2) $\pi a \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$.

1703. $\frac{3\pi a}{2}$. **1705.** $\frac{28}{3}$. **1706.** $\ln 3$. **1707.** $2 \ln 3 - 1$. **1708.** $p [\sqrt{2} +$
 $+ \ln(1+\sqrt{2})] \approx 2,29p$. **1709.** $4\sqrt{3}$. **1711.** $\frac{14\pi}{3}$. **1712.** $\pi a^2 (\operatorname{sh} 2 + 2)$.

1713. $2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$. **1714.** $2\pi [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$. **1715.** $\frac{64}{3} \pi a^2$.

1716. 3π . **1717.** $4\pi^2 ab$. **1718.** $\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$. **1719.** $\frac{62\pi}{3}$. **1720.** $2,4\pi a^3$.

1721. $29,6\pi$. **1722.** 144 м; на нижнюю половину давление 108 м.

1723. $\frac{ah^2}{6}$. **1724.** $\frac{2}{3} R^3$. **1725.** 240 м. **1726.** $J_x = \frac{ab^3}{3}$; $J_y = \frac{a^3 b}{3}$.

1727. $J_x = \frac{ab^3}{12}$; $J_y = \frac{a^3 b}{12}$. **1728.** 6,4. **1729.** $M_x = M_y = \frac{a^3}{6}$;

$x_c = y_c = \frac{a}{3}$. **1730.** $M_x = \int_0^a \frac{y}{2} y dx = 0,1 ab^2$; $M_y = \int_0^a xy dx = \frac{1}{4} ba^2$;

$S = \int_0^a y dx = \frac{ab}{3}$; $x_c = \frac{3}{4} a$, $y_c = 0,3b$. **1731.** $x_c = 0$,

$y_c = \frac{2 \int_0^a \frac{y}{2} y dx}{0,5\pi a^3} = \frac{4}{3\pi} a \approx \frac{4}{9} a$. **1732.** 1) $1120\pi\kappa\Gamma M$; 2) $250\pi R^4\kappa\Gamma M$.

$$1733. \int\limits_R^{R+h} \frac{mgR^2}{x^2} dx = \frac{mgRh}{R+h}. \quad 1734. \quad \frac{1000\pi R^2 H^3}{6} \approx 21 \text{ кГм.}$$

$$1735. \quad 1241 \text{ кГм.} \quad 1736. \quad 0,024\pi \text{ кГм.} \quad 1737. \quad t = \int\limits_0^H \frac{S dx}{0,6s \sqrt{2gx}} = \\ = 100 \text{ сек.} \quad 1738. \quad t = \frac{R^2}{0,6r^2 H^2 \sqrt{2g}} \int\limits_h^{H+h} x \sqrt{x} dx, \text{ где } h \approx 2 - \text{ высота дополнительного конуса. Вычислив, получим: } t \approx 42 \text{ сек.} \quad 1739. \quad \frac{ah^2}{3}.$$

$$1740. \quad 17 \frac{1}{15}. \quad 1741. \quad \frac{h}{\sqrt{2}}. \quad 1742. \quad 2,4 \text{ м на каждую стенку.}$$

$$1743. \quad I_\omega = \int\limits_0^a y^2 x dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\pi a^4}{16}. \quad 1744. \quad x_0 = 0; \\ y_c = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx}{2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y dx} = \frac{8}{5}. \quad 1745. \quad \frac{\pi R^2 \cdot 1000}{H^2} \int\limits_0^H (H-x)^2 x dx \approx 30\pi \text{ кГм.}$$

$$1746. \quad \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[\left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} - 1 \right] \approx 1598 \text{ кГм.} \quad 1747. \quad t = \frac{14\pi R^2}{15 \cdot s \cdot 0,8} \sqrt{\frac{R}{2g}} = \\ = \frac{400\pi}{3} \approx 419 \text{ сек.} \quad 1748. \quad 1) \text{ 1; интегралы 2) и 3) расходятся; 4) } \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^n} =$$

$$= \frac{1}{n-1} \text{ при } n > 1; \text{ расходится при } n \leq 1. \quad 1749. \quad 1) ; 2) 1 \frac{1}{2}; 3) \frac{\pi}{4}; 4) 1;$$

$$5) \ln 2; \quad 6) 16. \quad 1750. \quad 1) \frac{\pi}{6}; \quad 2) \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}; \quad 3) \frac{\pi-2}{8}. \quad 1751. \quad 1) 6 \sqrt[3]{2};$$

$$2) \text{ расходится; 3) 6.} \quad 1752. \quad 1) \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \text{ сходится, ибо } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} < \frac{1}{x^{3/2}},$$

$$2) \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ сходится (см. задачу 1748); 2) } \int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}} \text{ расходится, ибо}$$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} > \frac{1}{x}$, а $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ расходится; 3) $\int_1^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$ сходится, ибо при $x \geq 1 \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$, а $\int_1^\infty e^{-x} dx$ сходится (см. задачу 1749); 4) $\int_1^\infty \frac{\sin x dx}{x^2}$

абсолютно сходится, ибо $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ а $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится (см. задачу 1748);

5) $\int_2^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$ расходится, ибо при $x > 1 \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} > \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^4}}$,

а $\int_2^\infty \frac{dx}{x \sqrt{2}}$ расходится; 6) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$ сходится,

ибо при $x \geq 1 e^{-x^2} \leq e^{-x}$, а $\int_1^\infty e^{-x} dx$ сходится. **1753.** 1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^n} =$

$= \frac{1}{1-n}$ при $n < 1$; расходится при $n \geq 1$. 2) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}$

при $n < 1$, расходится при $n \geq 1$. **1754.** π. **1755.** 2. **1756.** $3\pi a^2$.

1757. $2\pi^2 a^3$. **1758.** $\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. **1759.** $\frac{4\pi}{3}$. **1761.** 1) $\frac{1}{2}$;

2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) расходится. **1762.** 1) $\ln(1 + \sqrt{2})$; 2) 2; 3) $1 - \frac{\pi}{4}$. **1763.** $\frac{1}{2}$.

1764. 16π . **1765.** 2π . **1766.** 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{3 \ln 2}{\pi}$; 3) $\frac{1}{e-1}$; 4) $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$;

5) $\frac{\pi}{4}$. **1768.** 1) $\epsilon(h) = 0$, 2) $|\epsilon(h)| \leq \frac{4}{15} < 0,3$. **1770.** $\frac{55}{6}\pi \approx 28,8 \text{ дм}^3$.

1772. $\ln 2 = 0,6932$; $|\epsilon(h)| \leq \frac{2 \cdot 10^{-4}}{15} < 0,0001$. **1773.** 8, 16π . **1777.**

Приближенно 1,22π. **1778.** $R = \frac{1}{2}$. **1779.** $R = \frac{1}{2}$. **1780.** В вершине

(2; 0) $R_1 = \frac{1}{2}$; в вершине (0; 1) $R_2 = 4$. **1781.** $R = 4a$. **1782.** $y_{\max} = \frac{1}{e}$

при $x=1$; $R=e$. **1783.** (4; 4). **1784.** (3; -2). **1785.** (0; 1). **1786.** $27X^2 +$
+ $8Y^2 = 0$. **1787.** $(2X)^{2/3} + Y^{2/3} = 3^{2/3}$. **1788.** $X^{2/3} - Y^{2/3} = (2a)^{2/3}$.

1789. $X=a \cos t$; $Y=a \sin t$ или $X^2+Y^2=a^2$. **1790.** $k=e^x(1+e^{2x})^{-3/2}$;

$k_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ в точке $x = -\frac{\ln 2}{2} \approx -0,347$. **1792.** 1) $R = \frac{2}{3}\sqrt{2ar}$;

2) $\frac{a^2}{3r}$; 3) $\frac{r^3}{a^2}$. **1793.** $\frac{1}{2}$. **1794.** 2. **1795.** 1. **1796.** 1. **1797.** $(-2; 3)$.

1798. $(0; -\frac{4}{3})$. **1799.** $(-\frac{11}{2}; \frac{16}{3})$. **1800.** $X = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \approx -0,7$,

$Y = -\sqrt{2} \approx -1,4$. **1801.** $8X^3 - 27Y^2 = 0$. **1802.** $X = -t^2 \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)$,

$Y = 4t \left(1 + \frac{t^2}{3}\right)$; для построения кривой и эволюты составить та-

блицу значений x, y, X, Y для $t = 0; \pm 1; \pm \frac{3}{2}$. **1803.** $(X+Y)^{\frac{2}{3}} -$

$-(X-Y)^{\frac{2}{3}} = 4$. **1804.** $(X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$; при повороте

осей на 45° это уравнение примет вид $x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}$, т. е. эво-

люта астроиды есть тоже астроида с увеличенными вдвое размерами и повернутая на 45° . **1806.** 21. **1807.** 5т. **1808.** 7,5. **1809.** 2π.

1810. $2 \operatorname{sh} 1 \approx 2,35$. **1811.** $\frac{3 + \ln 2}{2}$. **1812.** $3x + 4y = 0$; $\frac{dr}{dt} = 4t - 3j$.

1813. $y = \frac{4}{3}x - \frac{x^2}{9}$; $\frac{dr}{dt} = 3i + 2(2-t)j$. **1814.** $w =$

$= \frac{d^2r}{dt^2} = -2j$; $w_\tau = \frac{4|t-2|}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$; $w_n = \frac{6}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$;

при $t = 0$ $w_\tau = 1,6$; $w_n = 1,2$. **1815.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $v = -a \sin t l +$

$+ b \cos t j$; $w = -r$. **1816.** $\frac{x-t}{1} = \frac{y-t^2}{2t} = \frac{z-t^3}{3t^2}$. **1817.** $\frac{X-x}{1} =$

$= \frac{Y-x^2}{2x} = \frac{Z-\sqrt{x}}{1}$. **1818.** $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$. **1819.** $\dot{r} =$

$= -t+k$, $B = i+k$, $N = -2j$; $\tau = \frac{-t+k}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{i+k}{\sqrt{2}}$, $\nu = -j$.

1820. $B = \dot{r} \times \ddot{r} = 6i - 6j + 2k$, $N = (\dot{r} \times \ddot{r}) \times \dot{r} = -22i - 16j +$

$+ 18k$, уравнения главной нормали: $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9}$; бинор-

мали: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$ и соприкасающейся плоскости: $3x -$

$-3y + z = 1$. **1821.** $N = 3(i+j)$, $B = -i + j + 2k$. Уравнения

главной нормали: $x = y$, $z = 0$; бинормали: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

1822. Исключив t , получим $x^2 + y^2 = z^2$ — уравнение конической

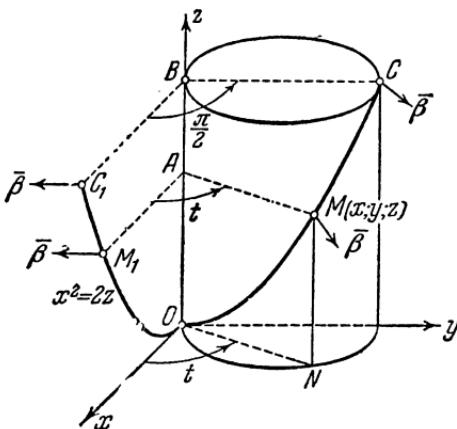
поверхности. $\dot{r} = (\cos t - t \sin t) i + (\sin t + t \cos t) j + k = i + k$;

$\ddot{r} = (-2 \sin t - t \cos t) i + (2 \cos t - t \sin t) j = 2j$; $B = \dot{r} \times \ddot{r} = 2i + 2k$,

$N = 4j$. Касательная: $x = z$ и $y = 0$; главная нормаль: ось Oy ;

бинормаль: $x + z = 0$ и $y = 0$. **1823.** При $t = \frac{\pi}{2}$ $\frac{x}{-a} = \frac{z - \frac{b\pi}{2}}{b}$, $y = a$.

1824. $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; $\cos \beta = \pm \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; $\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{4ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; выбор знака зависит от выбора направления на каждой ветви кривой. **1825.** Уравнения винтовой линии: $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$, $z = 2t^2$, где t — угол поворота (черт. 48). Единичный



Черт. 48.

бинормальный вектор β в точке C (при $t = \frac{\pi}{2}$): $\beta = \frac{\pi i + j + k}{\sqrt{2 + \pi^2}}$.

1826. При $t = \frac{\pi}{2}$ $v = a(t + j)$, $w = ai$. **1827.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8}{8}$. **1828.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1}$ и $z = 3$. **1829.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$.

1830. 120° , 60° , 45° . **1831.** $N = -26i - 31j + 22k$, $B = 16i - 12j + 2k$; $\frac{x-1}{26} = \frac{y-1}{31} = \frac{z-1}{-22}$; $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-1}{1}$. **1832.** $N = -4j - 4k$, $B = 2j - 2k$. Уравнения главной нормали: $x = \pi$, $z = y + 2$; бинормали: $x = \pi$, $y + z = 6$. **1834.** $v = \dot{r} = i + (1 - 2t)j$, $w = \ddot{r} = -2j$, $\frac{1}{R} = \frac{|v \times w|}{v^3} = \frac{2}{v^3}$;

$v = \sqrt{2 - 4t + 4t^2}$; $w_\tau = \dot{v} = \frac{4t - 2}{\sqrt{2 - 4t + 4t^2}} = -\sqrt{2}$, $w_n = \frac{v^3}{R} =$

$\frac{2}{v} = \sqrt{2}$. **1835.** $v = \dot{r} = -4 \sin t i + 3 \cos t j = \frac{-4t + 3j}{\sqrt{2}}$, $w = \ddot{r} = -\frac{4t + 3j}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{R} = \frac{12}{v^3}$; $v = \sqrt{16 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}$, $\dot{v} = \frac{7 \sin 2t}{2v}$; при $t = \frac{\pi}{4}$ $v = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $w_\tau = \dot{v} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = 0,7\sqrt{2}$, $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{12}{v} = \frac{12\sqrt{2}}{5} = 2,4\sqrt{2}$. **1836.** $v = \dot{r} = i + 2tj + 2t^2k$, $w = 2j + 4tk$, $v = 2t^2 + 1$, $\frac{1}{R} = \frac{|v \times w|}{v^3} = \frac{2}{(2t^2 + 1)^2} = \frac{2}{9}$; $w_\tau = \dot{v} = 4t = 4$, $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2(2t^2 + 1)^2}{(2t^2 + 1)^2} = 2$ (в любой точке). **1837.** Сначала составим матрицу координат векторов

$$\begin{array}{c|ccc} r & t & t^2 & t^3 \\ \dot{r} & 1 & 2t & 3t^2 \\ \ddot{r} & 0 & 2 & 6t \\ \ddot{r} & 0 & 0 & 6 \\ \dot{r} \times \ddot{r} & 6t^2 & -6t & 2 \end{array} \text{. Затем найдем: 1) } |\dot{r}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4};$$

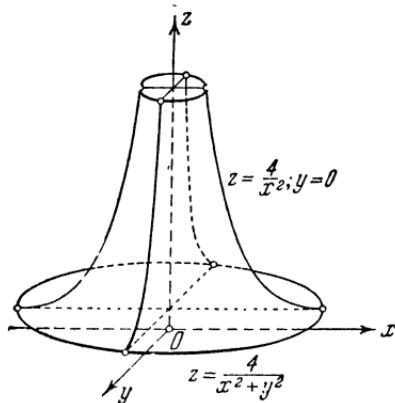
2) $|\dot{r} \times \ddot{r}| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$; 3) $\dot{r} \ddot{r} \ddot{r} = 12$; 4) $\frac{1}{R} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{\sqrt{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}} = 2$; 5) $\frac{1}{\rho} = \frac{12}{4(9t^4 + 9t^2 + 1)} = 3$. **1838.** $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. **1839.** $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{3}$.

1840. На «правой» винтовой линии: $\frac{1}{\rho} = \frac{b}{a^2 + b^2}$; на «левой»: $\frac{1}{\rho} = -\frac{b}{a^2 + b^2}$. **1841.** $\frac{1}{R} = \frac{2t}{(2t^2 + 1)^2} = \frac{2}{9}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{2t}{(2t^2 + 1)^2} = -\frac{2}{9}$.

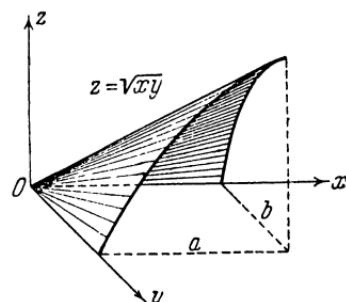
1842. $r = \frac{y^2}{2}i + yj + \frac{y^4}{4}k$; $\frac{1}{R^2} = \frac{9y^4 + 4y^6 + 1}{(y^2 + 1 + y^6)^3} = \frac{14}{27}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{3}{7}$.

1843. $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{3}$. **1844.** 3) Вся плоскость, кроме точки $(0; 0)$; 4) $x^2 + y^2 \leq a^2$; 5) $xy > 0$ (первый и третий квадранты); 6) $x^2 + y^2 < 1$; 7) вся плоскость, кроме прямой $y = x$. Уравнения 1) и 2) определяют параболоиды вращения; 3) — поверхность вращения вокруг оси Oz кривой $z = \frac{4}{x^2}$ и $y = 0$ (черт. 49); 4) полусферу; 5) конус, для изображения которого возьмем сечения: $x = a$, $z^2 = ay$ и $y = b$, $z^2 = bx$ — параболы (черт. 50); 6) поверхность вращения кривой $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y = 0$ вокруг Oz ; 7) конус с образующими

$y = kx$, $z = \frac{kx}{k-1}$ и направляющими равносторонними гиперболами $y = h$, $(x-h)(z+h) = -h^2$, имеющими вершины на оси Oy и одну из асимптот на плоскости $y = x$ ($x = h$, $y = h$); такие же гиперболы получаются в сечениях $x = h$ или $z = h$ (черт. 51).

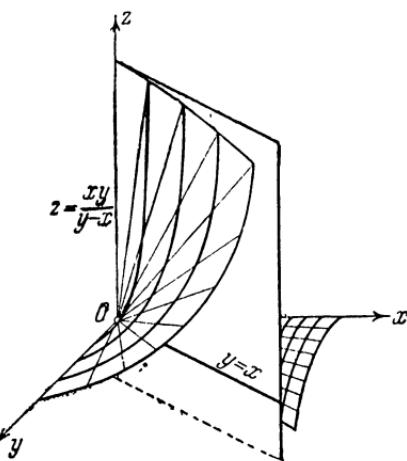


Черт. 49.



Черт. 50.

1845. $s = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. Область существования функции: $0 < x < p$, $0 < y < p$ и $x+y > p$, т. е. множество точек



Черт. 51.

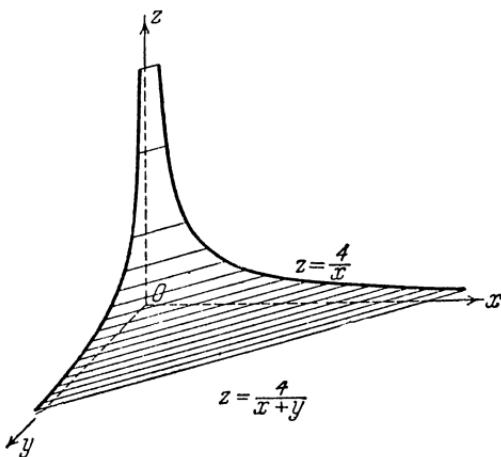
внутри треугольника, ограниченного линиями $x = p$, $y = p$ и $x + y = p$.

1848. $\Delta_x z = (2x - y + \Delta x) \Delta x = 0,21$; $\Delta_y z = (2y - x + \Delta y) \Delta y = -0,19$; $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z - \Delta x \Delta y = 0,03$.

1849. Непрерывные и одно-

значные в области $|y| \leq |x|$ функции $z = +\sqrt{x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{x^2 - y^2}$ изображаются верхней и нижней поверхностями кругового конуса (с осью Ox). Примером разрывной функции, определяемой уравнением $z = \pm \sqrt{x^2 - y^2}$, может служить функция $z = \begin{cases} +\sqrt{x^2 - y^2} & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ -\sqrt{x^2 - y^2} & \text{при } 1 \leq x < 2 \\ +\sqrt{x^2 - y^2} & \text{при } 2 \leq x < 3 \end{cases}$ и т. д. — линии разрыва.

Изображением будут чередующиеся полосы верхней и нижней поверхностей конуса. Область определения этой функции $|y| \leq |x|$, т. е. множество точек внутри острого угла между прямыми $y = \pm x$ и на этих прямых. **1854.** 2) Вся плоскость, кроме прямой $y = -x$. 3) точки внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и на эллипсе; 4) вся плоскость; 5) точки внутри угла $|y| \leq |x|$ и на его сторонах; 6) квадрант плоскости $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Поверхность 2) — цилиндрическая с образующими $z = h$, $x + y = \frac{4}{h}$ и направляющей $z = \frac{4}{x}$, $y = 0$ (черт. 52).



Черт. 52.

Поверхности 5) и 6) — конические; поверхность 4) — параболоид;

1858. $3x(x+2y)$; $3(x^2 - y^2)$. **1860.** $-\frac{y}{x^2}$; $\frac{1}{x}$. **1861.** $\frac{-y}{x^2 + y^2}$;

1862. $-\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $\frac{x^2}{(x-y)^2}$. **1863.** $\frac{\sqrt[3]{t}}{3x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{t})}$;

1864. $\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a - b \cos \alpha}{c}$; $\frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b - a \cos \alpha}{c}$;

- 1866.** $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-xy}(1-xy)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$. **1867.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ab \sin \alpha}{c}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$. **1868.** $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{5t}{(x+2t)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{5x}{(x+2t)^2}$. **1869.** $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{t}{2\sqrt{x-x^2t^3}}$; $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sqrt{\frac{x}{1-xt^2}}$. **1870.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -a \sin(ax-by)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = b \sin(ax-by)$. **1871.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y|x|}{x^2\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}$. **1872.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y}{(3y-2x)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x}{(3y-2x)^3}$. **1873.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ctg}(x-2t)$; $\frac{\partial u}{\partial t} = -2 \operatorname{ctg}(x-2t)$. **1874.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \sin y \cos(2x+y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2 \sin x \times \cos(x+2y)$. **1875.** 1) 0,075; 2) $-0,1e^3 \approx -0,739$. **1876.** $-0,1$. **1877.** $-0,1$. **1878.** $1,2\pi dM^3$. **1879.** 0,13 см. **1880.** 1) $dz = -\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right)dy$; 2) $ds = \ln t dx + \frac{x dt}{t}$. **1881.** $\Delta z = 0,0431$, $dz = 0,04$. **1882.** 0,15. **1883.** $-30\pi cm^3$. **1884.** $\frac{dz}{dt} = -(e^t + e^{-t}) = -2 \operatorname{ch} t$. **1885.** $\frac{dz}{dx} = e^y + xe^y \frac{dy}{dx}$. **1886.** $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{x}{y} \left(4 + \frac{x}{y}\right)$. **1887.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = m \frac{\partial z}{\partial u} + p \frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = n \frac{\partial z}{\partial u} + q \frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial v}$. **1888.** $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi$; $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi\right)r$. **1889.** 1) $\frac{\partial z}{\partial t} = 2[(Ax+By)\cos t - (Bx+Cy)\sin t] = (A-C)\sin 2t + 2B \cos 2t$; 2) $\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$. **1890.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + \frac{\partial z}{\partial v}$. **1891.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y+3}$. **1892.** 1) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; 2) $\frac{2ye^{2x}-e^{2y}}{2xe^{2y}-e^{2x}}$. **1893.** $\pm \frac{3}{4}$. **1894.** -1 . **1895.** 1) $(-1; 3)$ и $(-1; -1)$; 2) $(1; 1)$ и $(-3; 1)$. **1896.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3-x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$. **1897.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2z}$. **1898.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b}{c}$. **1899.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$. **1900.** $-\frac{y}{x}$. **1901.** $\frac{x^2+xy+y^2}{xy}$. **1902.** $\frac{1}{2}$. **1903.** $\frac{4}{5}$; **1904.** $\frac{1}{5}$. **1905.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x-z}$. **1906.** 6; 2; 0; 6.

1929. — $\frac{6y}{x^4}; \frac{2}{x^3}; 0; 0.$ **1931.** $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$

1938. 1) $\frac{2}{x^4}(3y^2 dx^3 - 4xy dx dy + x^2 dy^2);$ 2) $-\frac{(y dx - x dy)^2}{xy^2}.$

1942. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(3 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z = 9 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad | \quad 1$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(3 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) z = 3 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad | \quad -4$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad | \quad 3$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

1943. Записывая так же, как и в задаче 1942, получим $4 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$

1945. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v} \quad | \quad x^2$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad | \quad -y^2$
 $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{2y}{x} \frac{\partial z}{\partial v}.$

1946. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad \text{1947.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-2y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(1-2y)^3};$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}. \quad \text{1948.} \quad 0; 0; \frac{4}{9t^2 \sqrt[3]{t}}; -\frac{28x}{27t^3 \sqrt[3]{t}}. \quad \text{1953.} \quad d^2u =$
 $= -\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy; d^3u = \frac{2y}{x^3} dx^3 - \frac{3}{x^2} dx^2 dy. \quad \text{1954.} \quad 4a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$

1955. $-v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u} \frac{\partial z}{\partial v}. \quad \text{1959.} \quad u = \frac{x^2}{2} + x \ln y - \cos y + C.$

1962. $u = \frac{x}{z} + \frac{1}{x} + \ln y - \operatorname{arc tg} z + C. \quad \text{1963.} \quad u = xy^2 - x + \frac{3y^2}{2} + C.$

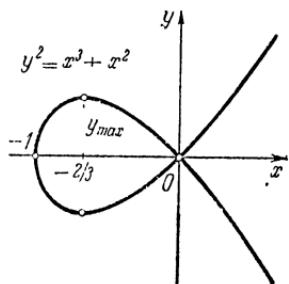
1964. $u = x \sin 2y + y \ln \cos x + y^2 + C. \quad \text{1965.} \quad u = xy + \frac{\sin^2 y}{x} + y + C. \quad \text{1966.} \quad u = \sqrt{x}(1 + \sqrt{t^2 + 1}) + C. \quad \text{1967.} \quad u =$

$= x \ln y - x \cos 2z + yz + C. \quad \text{1968.} \quad u = \frac{x-3y}{z} + C. \quad \text{1969.} \quad y =$

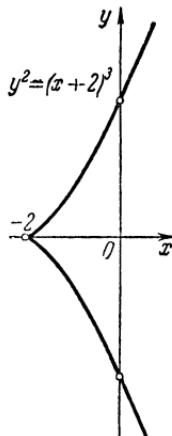
$= \pm x \sqrt{1+x}$; область расположения: $1+x \geq 0; x \geq -1$. Точки пересечения с Ox : $y=0, x=0$ или -1 . Особая точка $O(0; 0)$ — узел. Экстремум y при $x = -\frac{2}{3}, y_0 = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx \mp \frac{2}{5}$ (черт. 53).

1970. $y = \pm (x+2) \sqrt{x+2}$; $x \geq -2$ — область расположения. Особая точка: $(-2; 0)$ — точка возврата. Точки пересечения с осями: при $x=0$ $y = \pm 2\sqrt{2}$; при $y=0$ $x=-2$ (черт. 54).

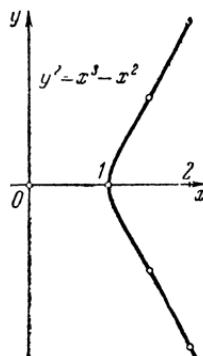
1971. $y = \pm x \sqrt{x-1}$. Область расположения $x \geq 1$, $x=0, y=0$ — особая изолированная точка. При $x=1$ $y=0$, при $x=2$



Черт. 53.



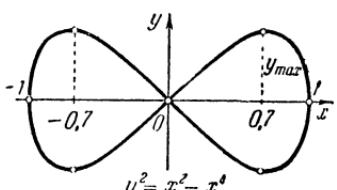
Черт. 54.



Черт. 55.

$y = \pm 2$. Точка перегиба: $x = \frac{4}{3}$, $y = \pm \frac{4}{3\sqrt{3}}$ (черт. 55). **1972.** $y = \pm x \sqrt{1-x^2}$; область расположения $|x| \leq 1$ или $-1 \leq x \leq 1$. Точки пересечения с осями: при $y=0$ $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Особая точка $O(0; 0)$ — узел. Экстремумы при $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,7$

$y_e = \pm \frac{1}{2}$ (черт. 56). **1973.** $y = x \pm x \sqrt{x}$. Область расположения: $x \geq 0$; точки пересечения с осями: при $y=0$ $x=0$ или $x=1$; особая точка $O(0; 0)$ — точка возврата первого рода с касательной $y=x$.



Черт. 56.

Экстремум имеет функция $y = x - x \sqrt{x}$: при $x = \frac{4}{9}$ $y_{max} = \frac{4}{27}$ (черт. 57). **1974.** $y = \pm (x-2) \sqrt{x}$; $x \geq 0$; при $y=0$ $x=0$ или $x=2$; особая точка $(2; 0)$ — узел. Кривая имеет такой же вид, как на черт. 53, но сдвинута вправо. **1975.** $y =$

$= \pm (x+2a) \sqrt{-\frac{x+2a}{x}}$; кривая расположена в той области, где x и $x+2a$ имеют разные знаки, т. е. при $-2a \leq x < 0$. Особая точка $(-2a; 0)$ — точка возврата; $x=0$ — асимптота. Кривая — циссиона, такая же, как на черт. 89, но смещенная на $2a$

влево. 1976. $y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - y^3}{3}}$, область расположения: $y \leq x$.

Точки пересечения с осями: при $x = 0$ $y = 0$ или $y = -3$. Особая точка $(0; 0)$ — точка возврата. Найдем асимптоту вида $y = kx + b$. Разделим члены уравнения на x^3 : $1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{1}{x} = 0$.

Отсюда $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3y^2}{x^2 + xy + y^2} = -1.$$

Итак, асимптота $y = x - 1$. Экстремум функции $x =$

$$= \varphi(y) = \sqrt[3]{y^3 + 3y^2}$$

при $y = -2$ $x_0 =$

$$= \sqrt[3]{4} \approx 1,6$$

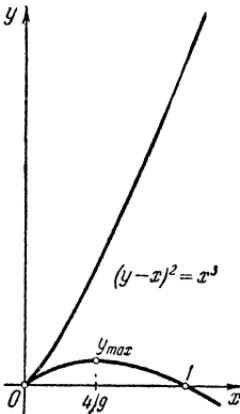
при $x = 0$ $y = -3$ — перегиб (черт. 58). 1977.

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ — декартов лист (см. задачу 366). Особая точка $O(0; 0)$ — узел с касательными $y = 0$ и $x = 0$.

Найдем асимптоту $y = kx + b$. Приведем уравнение к виду $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3a\left(\frac{y}{x}\right) \times$

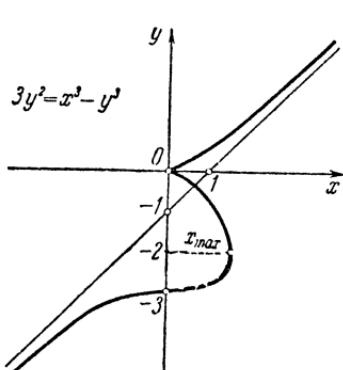
$$\times \frac{1}{x} = 0;$$

отсюда $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{x}\right) = -1$,

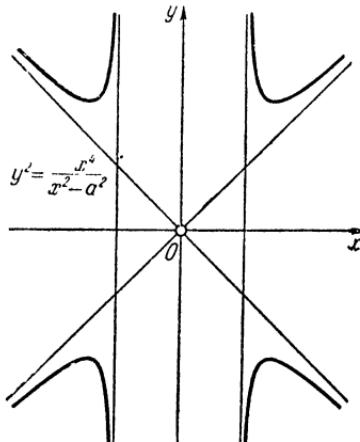


Черт. 57.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y + x) =$$



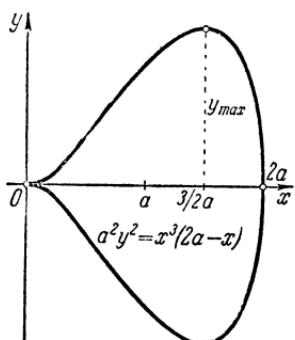
Черт. 58.



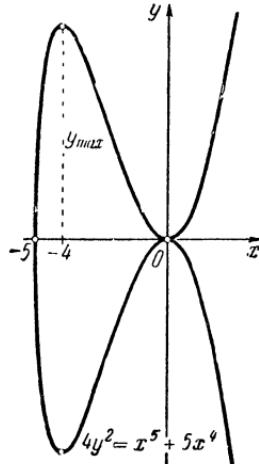
Черт. 59.

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = -a$. Итак, $y = -x - a$ — асимптота (см. черт. 83). 1978. $y = \pm \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2 - a^2}}$. Симметрична относительно Ox

и Oy . Область расположения: $|x| > a$, и $|y| > |x|$. $O(0; 0)$ — особая изолированная точка. При $x = \pm a\sqrt{2}$ экстремум $y = \pm 2a$. Асимптоты $x = \pm a$ и $y = \pm x$ (черт. 59). **1979.** $y = \pm x\sqrt{2-x}$; область расположения: $x \leq 2$. Точки пересечения с осью Ox : при $y=0$ $x_1=0$, $x_2=2$. Особая точка $(0; 0)$ — узел. Экстремумы y : при $x = \frac{4}{3}$ $y_s = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \pm 1,08$. (Кривая имеет такую же форму, как и на черт. 53.) **1980.** $y = \pm \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - (x-a)^2}$; область расположения: $|x-a| \leq a$ или $-a \leq x-a \leq a$, или $0 \leq x \leq 2a$. При $y=0$ $x_1=0$, $x_2=2a$. Точка $(0; 0)$ — особая (точка возврата). При $y'=0$, $\sqrt{2ax-x^2} + \frac{x(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}} = 0$, $x = \frac{3a}{2}$, $y_s = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}a \approx \pm \frac{5}{4}a$ (черт. 60). **1981.** $y = \pm(x+2)\sqrt{x}$. Область расположения: $x \geq 0$ и еще изолированная точка $(-2; 0)$. Точка перегиба при $x = \frac{2}{3}$. Кривая такая же, как на черт. 55, но смещена влево. **1982.** Две области расположения: 1) $x > 0$; 2) $x < -a$. Три асимптоты: $y = x + \frac{3a}{2}$, $y = -x - \frac{3a}{2}$ и $x = 0$. Точка возврата $(-a; 0)$.



Черт. 60.



Черт. 61.

Экстремумы y при $x = \frac{a}{2}$ $y_s = \pm \frac{3\sqrt{3}a}{2} \approx \pm 2,6a$. **1983.** $y = \pm \frac{x^2}{2} \times \sqrt{x+5}; x \geq -5$. Особая точка $(0; 0)$ — точка самосоприкосновения. Экстремумы y : при $x = -4$ $|y|_{\max} = 8$; при $x = 0$ $|y|_{\min} = 0$

(черт. 61). **1984.** $y = \pm x \sqrt{x^2 - 1}$. Области расположения: $|x| \geq 1$ с изолированной точкой $O(0; 0)$. График такой же, как и на черт. 55, с добавлением еще до симметрии кривой слева. **1985.** При $y = 0$ $x_1 = 0$ и $x_2 = -4$; при $x = 0$ $y_1 = 0$, $y_2 = -1$. Особая точка $(0; 0)$ — узел с наклоном касательных $k = \pm 2$. При $x = -\frac{8}{3}$ $y_{\max} = 1,8$ и

при $x = 0$ $y_{\min} = -1$. Асимптота $y = x + 1$. Кривая пересекает асимптоту при $x = -0,4$ и затем описывает петлю, пройдя через $(0; 0)$ и $(0; -1)$.

1986. 1) $y = \pm (x - a) \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$; кривая расположена там, где x и $2a - x$ имеют одинаковые знаки, т. е. при $0 \leq x \leq 2a$. Точка $(a; 0)$ особая — узел с наклоном касательных $k = \pm 1$. Асимптота $x = 2a$ (черт. 88). 2) $y = \pm \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; область расположения

$|x| > a$ и $|y| > a$ с изолированной точкой $(0; 0)$. Асимптоты $x = \pm a$ и $y = \pm a$. Между каждой парой этих асимптот точек кривой, кроме особой, нет, ибо $|x| > a$ и $|y| > a$. Кривая состоит из четырех симметричных ветвей, приближающихся к асимптотам $x = \pm a$ и $y = \pm a$.

1987. 1) $y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{x + a}}$, $-a < x \leq a$. Точки пересечения с осью Ox : $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$. Особая точка $(0; 0)$ — узел. Асимптота $x = -a$. Кривая — строфиона и получается перегибанием черт. 88 по оси Oy и смещением затем оси Oy влево на a . 2) Области расположения: $x \geq a$; $x < -a$ и $x = 0$. Точка $(0; 0)$ — изолированная. Асимптоты $x = -a$, $y = a - x$ и $y = x - a$. При $x =$

$$=\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} \approx -1,6a \quad y_s \approx \pm 3,3a. \quad \textbf{1988.} \quad 1) y = -\frac{x^2}{4}; \quad 2) y = \pm 2x.$$

1989. 1) $y = \pm R$; 2) $y = 0$ и $y = -x$. **1990.** 1) $y = 1$; 2) $y = 1$ — геометрическое место точек возврата, но не огибающая; 3) $y = 1$ и геометрическое место точек возврата и огибающая; 4) $y = x - \frac{4}{3}$ — огибающая, $y = x$ — геометрическое место точек возврата. **1991.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1992. $y^3 = -\frac{x^3}{x+2}$. **1993.** $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy$. **1994.** Семейство

траекторий $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2b^2 \cos^2 \alpha}$. Их огибающая (парабола «безопасности») $y = \frac{b^2}{2g} - \frac{gx^2}{2b^2}$. **1995.** 1) $x^2 + y^2 = p^2$; 2) $y^2 = 4x$; 3) $y = 1$.

1996. $y^2 = 4(x + 1)$. **1997.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. **1998.** $y = -\frac{4}{3}x^2$.

1999. $2x + 4y - z = 3$. **2000.** $xy_0 + yx_0 = 2zz_0$. **2001.** $xy_0z_0 +$

$+ yx_0z_0 + zx_0y_0 = 3a^3$. **2002.** $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$. **2003.** $x + y -$

$-z = \pm 9$. **2004.** $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{-5}$; в точке $(0; 0; 0)$.

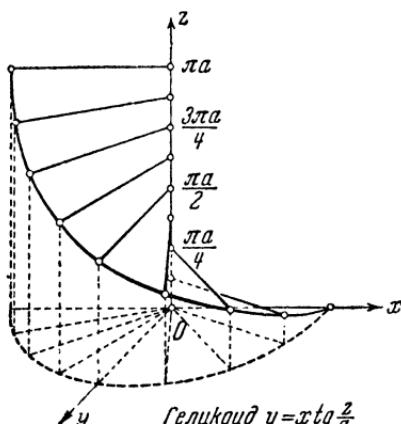
2005. $\cos \alpha = -\cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **2006.** $y = 0$, $x + z + 1 = 0$;

поверхность изображена на черт. 49, стр. 322. **2009.** Касательная плоскость $x - y + 2z = \frac{\pi a}{2}$. Ее расстояние от начала равно $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$.

Геликоид — поверхность «линейчатая». Прямые линии получаются в сечениях $z = h$. При $z = 0$ $y = 0$; при $z = \frac{\pi a}{4}$ $y = x$; при $z = \frac{\pi a}{2}$

$x = 0$; при $z = \frac{3\pi a}{4}$ $y = -x$; при $z = \pi a$ $y = 0$ (черт. 62). **2010.** $z = 0$

и $x + y - z = \frac{a}{2}$. **2012.** $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$. **2013.** $\cos \alpha = \frac{2}{3}$;



Черт. 62.

$$\cos \beta = -\frac{2}{3}; \quad \cos \gamma = -\frac{1}{3}.$$

2014. Плоскость $z + y - x = a$,

$$p = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \text{2016. 1) } z = 4;$$

$$2) 2x + 2y + z = 6. \quad \text{2017. } \operatorname{grad} z = -2xi - 2yj = -2(i + 2j).$$

$$\text{2018. 1) } \operatorname{grad} z = \frac{i + j}{2x};$$

$$2) \operatorname{grad} z = \frac{i + j}{2x}. \quad \text{2019.}$$

$$\operatorname{grad} h = -\frac{x}{2}i - 2j. \quad \text{2020.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4xy}} =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0,79. \quad \text{2021. } \frac{du}{dl} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{2022. } \frac{du}{dt} = 2 + \sqrt{2}; \quad \operatorname{grad} u = 2i + 2j + 2k; \quad |\operatorname{grad} u| =$$

$$= 2\sqrt{3}. \quad \text{2023. } \operatorname{grad} u = \pm 4i. \quad \text{2024. } \frac{du}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$\text{2025. } \operatorname{grad} z = 0,32i - 0,64j; \quad |\operatorname{grad} z| = 0,32\sqrt{5}. \quad \text{2026. } \frac{du}{dt} =$$

$$= \frac{yz + xz + xy}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}. \quad \text{2027. } \operatorname{grad} u = 2(xi + yj - zk); \quad |\operatorname{grad} u| =$$

$$= 2z\sqrt{2}. \quad \text{2028. } \operatorname{grad} u = \frac{xi + yj + zk}{u}; \quad |\operatorname{grad} u| = 1 \text{ в любой точке.}$$

$$\text{2029. } -\frac{3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad \text{2030. } z_{\min} = 1 \text{ при } x = -4, y = 1.$$

$$\text{2031. } z_{\max} = 12 \text{ при } x = y = 4. \quad \text{2032. } z_{\min} = 0 \text{ при } x = 1, y = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{2033. Нет экстремума. 2034. } z_{\min} = -\frac{2}{e} \text{ при } x = -2, y = 0.$$

2035. $z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ при $x = y = \frac{\pi}{3}$. **2036.** $z_{\min} = 2$ при $x = y = 1$.

2037. $z_{\max} = -4$ при $x = y = -2$ и $z_{\min} = 4$ при $x = y = 2$. **2038.** $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = 0,5\sqrt[3]{2V}$. **2039.** $\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right)$,

$\left(-\frac{8}{5}; -\frac{3}{5}\right)$. **2040.** Нужно найти минимум функции $z = d^2 = x^2 + (y - 2)^2$ при условии $x^2 - y^2 - 4 = 0$. Искомая точка $(\pm\sqrt{5}; 1)$.

2041. $R = 1$, $H = 2$. **2042.** 1) Вершины $(\pm 3; -1)$ и $(0; 2)$; 2) луч должен пройти так, чтобы $\sin \alpha : \sin \beta = v_1 : v_2$, как это и происходит в природе. **2043.** $z_{\min} = 9$ при $x = 0$ и $y = 3$. **2044.** $z_{\min} = 0$ при $x = y = 2$. **2045.** $z_{\min} = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$. **2046.** $z_{\min} = 0$ при $x = 2$, $y = 4$. **2047.** $z_{\max} = 1$ при $x = y = \pm 1$; $z_{\min} = -1$ при $x = -y = \pm 1$. **2048.** $V = 8$. **2049.** 1) Нужно найти минимум $d = \frac{x-y+4}{\sqrt{2}}$ или минимум $z = x - y + 4$ при условии $4x - y^2 = 0$. Искомая точка $(1; 2)$; 2) $2ab$. **2050.** $R = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$. **2051.** Урав-

нения интегральных кривых: 1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = x^3$; 3) $y = -\frac{x^3}{3}$.

2053. $xy' = 2y$. **2054.** 1) $y^3 - x^2 = 2xyy'$; 2) $x^2 + y = xy'$.

2057. $y = Cx$, $y = -2x$. **2058.** $xy = C$, $xy = -8$. **2059.** $x^2 + \frac{1}{y^2} = C^2$, $x^2 + y^2 = 20$. **2060.** $y = Ce^x$, $y = 4e^{x+2}$. **2061.** $y = Ce^{\frac{x}{2}}$.

2062. $x + y = \ln C(x + 1)(y + 1)$. **2063.** $r = Ce^{\frac{\varphi}{2}} + a$. **2064.** $s^2 = \frac{t^2 - 1 + Ct}{t}$. **2065.** $y = Ce^{\sqrt{x}}$, $y = e^{\sqrt{x}-2}$. **2066.** $y = \frac{C \sin^2 x - 1}{2}$;

$y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$. **2067.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C$; $y = -x$. **2068.** Общие интегралы: 1) $y = C(x^2 - 4)$; 2) $y = C \cos x$. Все интегральные кривые первого уравнения пересекают ось Ox при $x = \pm 2$, а второго —

при $x = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (особые точки). **2069.** $y = \frac{x^3}{3}$. **2070.** $\int_0^x y dx =$

$= a \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx$, отсюда $y = a \sqrt{1+y'^2}$, $y' = \pm \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$;

положим $y = a \operatorname{ch} u$, тогда $a \operatorname{sh} u \cdot u' = \pm \operatorname{sh} u$. Отсюда: 1) $\operatorname{sh} u = 0$, $\operatorname{ch} u = 1$, $y = a$; 2) $a du = \pm dx$, $au = \pm(x + c)$, $y = a \operatorname{ch} u =$

$= a \operatorname{ch} \frac{x+c}{a}$; при $x = 0$ $y = a$ и $C = 0$. Итак, или $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ —

цепная линия, или $y = a$ — прямая. **2071.** $y^2 = ax$. **2072.** $y^2 = 4(x + 2)$. **2073.** За 40 мин. *Решение.* Пусть через t секунд тем-

пература тела будет T ; $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20^\circ)$, где k — пока неизвестный

коэффициент пропорциональности; $\ln(T - 20^\circ) = -kt + C$; при $= 0 T = 100^\circ$, поэтому $C = \ln 80^\circ$, $kt = \ln \frac{80^\circ}{T - 20^\circ}$; подставив сюда $T_1 = 25^\circ$ и $T_2 = 60^\circ$ и разделив почленно, исключим неизвестное k : $\frac{kt}{k \cdot 10} = \frac{\ln 16}{\ln 2}$, $t = 10$ мин.

2074. $\sum X_i = -H + T \cos \alpha = 0$, $\sum Y_i = -px + T \sin \alpha = 0$; отсюда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{px}{H}$, $y = \frac{p}{2H} x^2 + C$ (парабола).

2075. Уравнение касательной $Y - y = y'(X - x)$. Положив $Y = 0$, найдем абсциссу точки A пересечения касательной с осью Ox :

$X_A = x - \frac{y}{y'}$. По условию $X_A = 2x$; $x = -\frac{y}{y'}$; решив это дифференциальное уравнение, найдем искомую кривую $xy = -a^2$ (гипербола).

2076. $x^2 + 2y^2 = c^2$.

2077. $y^2 - x^2 = C$.

2078. $2x^2 + 3y^2 = 3a^2$.

2079. $y = Cx^4$.

2080. $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$.

2081. $2y = \frac{Cx^2}{(1+x)^2} - 1$.

2082. $y = C(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

2083. $y = \frac{C-x}{1+Cx}$.

2084. $r = C \cos \varphi$,

$r = -2 \cos \varphi$.

2085. $\sqrt{y} = x \ln x - x + C$,

$\sqrt{y} = x \ln x - x + 1$.

2086. $y = \frac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$,

$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

2087. $xy = -1$.

2088. $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

2089. $y = \frac{2x}{1-x}$.

2090. $x^2y = C$.

2091. Радиус-вектор $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, отрезок нормали $MN =$

$= \frac{y}{\cos \alpha} = y \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = y \sqrt{1 + y'^2}$. Искомая кривая или $x^2 + y^2 = C^2$

(окружность) или $x^2 - y^2 = C$ (гипербола).

2092. $y = Cx^2$.

2093. $y -$

$-x = Ce^{\frac{x}{y-x}}$.

2094. $x^2 - y^2 = Cx$.

2095. $s^2 = 2t^2 \ln \frac{C}{t}$.

2096. $y =$

$= Cx^3 - x^2$.

2097. $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$.

2098. $y = \frac{C - \cos 2x}{2 \cos x}$.

2099. $y =$

$= \frac{1}{x \ln Cx}$.

2100. $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + C}$.

2101. $\sin \frac{y}{x} + \ln x = C$.

2102. $y =$

$= \frac{x}{C - \ln x}$.

2103. $y = \ln x + \frac{C}{x}$.

2104. $y^3 = \frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}$.

2105. $y =$

$= \frac{x^2 - 1}{2}$.

2106. $s = Ct^2 + \frac{1}{t}$;

$s = 2t^2 + \frac{1}{t}$.

2107. $y = xe^{Cx}$;

$y = xe^{-\frac{x}{2}}$.

2108. $(x - y)^2 = Cy$.

2109. $x^2 + y^2 = 2Cy$.

2110. $i = \frac{kt}{R} + \frac{kL}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right)$.

2111. Положив $X = 0$ в

уравнении касательной $Y - y = y'(X - x)$, найдем $V_0 =$

$= -ON = y - xy'$,

$ON = xy' - y = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Отсюда

$y = \frac{x^2 - C^2}{2C}$. Зеркало должно быть параболоидом вращения.

2112. $y^2 = Cx e^{-\frac{y}{a}}$. **2113.** $y = \frac{\ln C(x + \sqrt{a^2 + x^2})}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. **2114.** При

$x > 0 \sqrt{\frac{y}{x}} = \ln \frac{C}{x}$, при $x < 0 \sqrt{\frac{y}{x}} = \ln Cx$. **2115.** $y = \frac{x-1}{3} + \frac{C}{\sqrt{2x+1}}$. **2116.** $y = 1 + \frac{\ln C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos x}$. **2117.** $s = t^3 (\ln t - 1) + Ct^2$.

2118. $y^2 = \frac{1}{1 + Ce^{x^2}}$. **2119.** $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$. **2120.** $y = \frac{2x}{1 - Cx^2}$; $y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$. **2121.** $y^3 = x + Ce^{-x}$; $y^3 = x - 2e^{1-x}$.

2122. $y = \frac{1}{3 \sqrt[3]{1 - x^2 - 1}}$. **2123.** $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. **2124.** $y = \frac{\ln Cx}{x}$. **2125.** $y^2 = x(Cy - 1)$. **2126.** $xy = \frac{y^4}{4} + C$. **2127.** $\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$. **2128.** $y = \cos x + \frac{C}{\sin x}$. **2129.** $s = \frac{t}{C+t-t \ln t}$.

2130. $x^2 y^2 + 2 \ln x = C$. **2131.** $s = \frac{Ct-1}{t^2}$. **2132.** $y = x^2 + Cx$.

2133. $\sin y = x + \frac{C}{x}$. **2134.** $y = \frac{x}{C + 2e^{-\frac{x}{2}}}$. **2135.** $4x^2 + y^2 = Cx$.

2136. $x^3 e^y - y = C$. **2137.** $y + xe^{-y} = C$. **2138.** $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$.

2139. $\mu = \frac{1}{x^2}$; $x + \frac{y}{x} = C$. **2140.** $\ln \mu = \ln \cos y$; $x^2 \sin y + \frac{1}{2} \cos 2y = C$. **2141.** $\mu = e^{-2x}$; $y^2 = (C - 2x) e^{2x}$. **2142.** $\mu = \frac{1}{\sin y}$; $\frac{x}{\sin y} + x^3 = C$. **2143.** $x^3 + 2xy - 3y = C$. **2144.** $x^3 y - 2x^2 y^2 + 3y^4 = C$. **2145.** $\frac{x^2 \cos 2y}{2} + x = C$. **2146.** $\mu = \frac{1}{y}$; $xy - \ln y = 0$. **2147.** $\mu = \frac{1}{x^4}$; $y^2 = Cx^3 + x^2$. **2148.** $\mu = e^{-y}$; $e^{-y} \cos x = C + x$. **2149.** $\ln \mu = -\ln x$; $\mu = \frac{1}{x}$; $x \sin y + y \ln x = C$.

2150. $y = (C \pm x)^2$. Через точку $M(1; \frac{1}{4})$ проходят кривые $y = (1+x)^2$ и $y = (3-x)^2$. **2151.** $y = \sin(C \pm x)$. Через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ проходят кривые $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и $y = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$. **2152.** $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$; особые интегралы $y = \pm 2x$.

2153. 1) $y = x + C$ и $x^2 + y^2 = C^2$; 2) $x \left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} \pm 1 \right)^2 = C$ или $(y - C)^2 = 4Cx$. Особые интегралы $x = 0$ и $y = -x$. Область расположения парабол: при $x > 0$ $y \geq -x$, при $x < 0$ $y < -x$. Параболы касаются оси Oy и прямой $y = -x$.

2154. 1) $y = 1 + \frac{(x-C)^2}{4}$; особый интеграл $y = 1$; 2) $x = 2p - \frac{1}{p^2}$, $y = p^2 - \frac{2}{p} + C$.

2155. 1) $y = (C + \sqrt{x+1})^2$; особый интеграл $y = 0$; 2) $x = Ct^2 - 2t^3$; $y = 2Ct - 3t^2$, где $t = \frac{1}{p}$; 3) $Cy = (x - C)^2$, особые интегралы $y = 0$ и $y = -4x$.

2156. 1) $y = Cx - C^2$; особый интеграл $y = \frac{x^2}{4}$; 2) $y = Cx - a\sqrt{1+C^2}$; особый интеграл $x^2 + y^2 = a^2$; 3) $y = Cx + \frac{1}{2C^2}$; особый интеграл $y = 1,5x^{\frac{3}{2}}$.

2157. $y = 1 - \frac{(x+C)^2}{4}$; через $M\left(1; \frac{3}{4}\right)$ пройдут две кривые: $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ и $y = x - \frac{x^2}{4}$.

2158. 1) $x = 2p + \frac{3}{2}p^2 + C$; $y = p^2 + p^3$; 2) $x^2 + (y + C)^2 = a^2$.

2159. $y = -\frac{x^2}{4} + Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{2}$.

2160. 1) $y = Cx + \frac{1}{C}$; особый интеграл $y^2 = 4x$; 2) $y = C(x+1) + C^2$, $y = -\frac{(x+1)^2}{4}$.

2161. Отрезки касательной $Y - y = y'(X - x)$ на осях координат: $X_A = x - \frac{y}{y'}$, $Y_B = y - xy'$. По условию $\frac{X_A \cdot Y_B}{2} = 2a^2$; $(y - xy')^2 = -4a^2y'$, $y = xy' \pm \sqrt{-4a^2y'}$ — уравнение Клеро. Любая прямая семейства $y = -Cx \pm 2a\sqrt{C}$, а также кривая, определяемая особым интегралом $xy = a^2$, дает решение задачи.

2162. Парабола $(y - x - a)^2 = 4ax$.

2163. 1) $y = 3 \ln x + 2x^2 - 6x + 6$; 2) $y = 1 - \cos 2x$; 3) $y = C_1x + x \operatorname{arc tg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + C_2$.

2164. $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$.

2165. $y^2 = C_1x + C_2$.

2166. $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x + C_2$.

2167. $y^3 + C_1y + C_2 = 3x$.

2168. $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$.

2169. $\operatorname{ctg} y = C_2 - C_1x$.

2170. 1) $y = e^x(x-1) + C_1x^2 + C_2$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arc tg} \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$ (при $C_1 > 0$),

$\frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{-C_1}}{x + \sqrt{-C_1}} \right| + C_2$ (при $C_1 < 0$), $C_2 - \frac{1}{x}$ (при $C_1 = 0$).

2171. $y'' = \frac{P}{EI}(\ell - x)$. При $x = 0$ $y = 0$ и $y' = 0$. $y = \frac{P}{2EI} \left(\ell x^2 - \frac{x^3}{3} \right)$

- уравнение кривой изгиба. **2172.** $C_1 y = \frac{(C_1 x + C_2)^3}{4} + 1$. **2173.** $y = a \operatorname{ch} \frac{(x-b)}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}} \right)$. **2174.** $y = \frac{x^3}{6}$. **2175.** $y = C_1 x + C_2 - \ln \cos x$; частный интеграл $y = -\ln(\cos x)$. **2176.** $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + C_1 \operatorname{arc tg} x + C_2$. **2177.** $C_1 y^2 = 1 + (C_1 x + C_2)^2$. **2178.** $y = (C_1 x + C_2)^2$. **2179.** $s = -\frac{t^2}{4} + C_1 \ln t + C_2$. **2180.** $4(C_1 y - 1) = (C_1 x + C_2)^2$. **2181.** $y = C_2 - C_1 \cos x - x$. **2182.** См. 2177. **2183.** $y = -\ln \cos x$. **2184.** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x}$. **2185.** $y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$. **2186.** $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$. **2187.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} = A \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x$. **2188.** $y = A \cos 2x + B \sin 2x = a \sin(2x + \varphi)$. **2189.** $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$. **2190.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{-4t}$. **2191.** $\rho = A \cos \frac{\varphi}{2} + B \sin \frac{\varphi}{2}$. **2192.** $s = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$; $s = e^{-t}(\cos t + 2 \sin t)$. **2193.** $y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) e^{2x}$. **2194.** $y = C_1 \operatorname{ch} 2x + C_2 \operatorname{sh} 2x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. **2195.** $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos x \sqrt[3]{3} + C_3 \sin x \sqrt[3]{3})$. **2196.** $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-ax}$. **2197.** $y = A \sin x \operatorname{sh} x + B \sin x \operatorname{ch} x + C \cos x \operatorname{sh} x + D \cos x \operatorname{ch} x$. **2198.** $y = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x + C \cos \frac{x}{2} + D \sin \frac{x}{2}$. **2199.** Отклонение $x = a \sin \sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)$; период $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. **2200.** $x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t$; период $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. **2201.** $x = ae^{-kt} \sin(\omega t + \varphi)$, где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4}}$. **2202.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$. **2203.** $y = (C_1 x + C_2) e^{ax}$. **2204.** $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. **2205.** $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$. **2206.** $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. **2207.** $s = C_1 + C_2 e^{-at}$. **2208.** $x = e^{-t}(A \cos t \sqrt{2} + B \sin t \sqrt{2})$. **2209.** $y = C_1 e^{-x} + (C_2 x + C_3) e^{2x}$. **2210.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. **2211.** $y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x$. **2212.** $y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = \operatorname{sh} x$. **2213.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$. **2214.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 0,25 \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$. **2215.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^{2x}$. **2216.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^{2x}$. **2217.** $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$. **2218.** $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7$. **2219.** $y = C_1 e^{2x} + (C_2 - x) e^{2x}$. **2220.** $x = A \sin k(t - t_0) - t \cos kt$. **2221.** $y = C_1 e^{x \sqrt{\frac{2}{3}}} + C_2 e^{-x \sqrt{\frac{2}{3}}} - (x-2)e^{-x}$. **2222.** $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^3}{6}$. **2223.** $y = \frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-2x} + C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x}$. **2224.** $x = e^{-kt}(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + \sin kt - 2 \cos kt$. **2225.** $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + x) e^{-x} + x^3 - 3x^2$. **2226.** $y =$

- $= C_1 e^{3x} + \left(C_2 - \frac{x}{4} \right) e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x.$ **2227.** $x =$
 $= C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + t^3 - 6t.$ **2228.** $y = \left(C_1 + \frac{x}{12} \right) e^{-2x} +$
 $+ (C_2 \cos x \sqrt{3} + C_3 \sin x \sqrt{3}) e^{2x}.$ **2229.** 1) $x = \left(C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-2t};$
 2) $x = A \cos \frac{t}{a} + B \sin \frac{t}{a} + \frac{1}{a}.$ **2230.** В нашем примере $y_1 = \cos 2x,$
 $y_2 = \sin 2x, w = 2; A = -\frac{x}{2} + C_1; B = \frac{1}{4} \ln \sin 2x + C_2$ и
 $y = \left(C_1 - \frac{x}{2} \right) \cos 2x + \left(C_2 + \frac{1}{4} \ln \sin 2x \right) \sin 2x.$ **2231.** $y =$
 $=[(C_1 + \ln \cos x) \cos x + (C_2 + x) \sin x] e^{2x}.$ **2232.** $y = (C_1 - \ln x + C_2 x) e^{2x}.$
2233. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$ **2234.** 1) $y = C_1 +$
 $+ C_2 e^{-x} - (1 + e^{-x}) \ln (1 + e^x) + x;$ 2) $y = e^{-2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2x} \right).$
2235. $x = a(e^{-t} + t - 1).$ **2236.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1,5).$
2237. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5 \cos 3x - \sin 3x).$ **2238.** $y =$
 $= (C_1 x + C_2) e^{-x} + \frac{1}{4} e^x.$ **2239.** $y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{3x}{2} + C_2 \sin \frac{3x}{2} \right) -$
 $- 6 \cos 2x + 8 \sin 2x.$ **2240.** $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} - x^3.$ **2241.** $y = C_1 e^v +$
 $+ \left(C_2 - \frac{x}{2} \right) e^{-w}.$ **2242.** $s = e^{-t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + (t - 1)^3.$
2243. 1) $y = e^{mx} (C_1 + C_2 x) + \frac{\cos mx}{2m^2};$ 2) $y = C_1 e^{\frac{2x}{n}} + C_2 e^{-\frac{2x}{n}} - \frac{2}{n}.$
2244. $y = A \cos x + B \sin x + C \cos 2x + D \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos x.$
2245. $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{x^3}{6} \right) e^x.$ **2246.** $y = \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + \right.$
 $+ C_1 + C_2 x) e^{-2x}.$ **2247.** 1) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2 \cos x};$
 2) $y = (C_1 - \ln |\sin x|) \cos 2x + \left(C_2 - x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \right) \sin 2x.$
2248. $y = \left(C_1 + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} + C_2 x \right) e^x.$
2249. $y = \frac{C - (x + 2) e^{-x}}{x + 1}.$ **2250.** $y = 1 + C \cos x.$ **2251.** $y = x(1 +$
 $+ C \sqrt{1 - x^2}),$ линейное. **2252.** $y = C \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right).$ **2253.** $s =$
 $= \frac{e^t + C}{t^2}.$ **2254.** $\sqrt{-y} = Cx^2 - 1.$ **2255.** $2Cy^2 = x(C^2 x^2 - 1).$

2256. $y = x \ln x - 2x + C_1 \ln x + C_2$.

2258. $y = C_1 e^{mx} + \left(C_2 - \frac{x}{2m} \right) e^{-mx}$.

2260. $y = xe^{\frac{x}{2}-1}$. **2261.** $y^2 = \frac{1}{x + Ce^{2x}}$. **2262.** $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + C_3 + \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x$. **2263.** $C_1 y = 1 + C_2 e^{C_1 x}$. **2264.** $s = C_1 e^{2t} + e^{-t} (C_2 + C_3 t) - \frac{\sin t}{2}$.

2265. 1) $s = (t^2 + C) \operatorname{tg} \frac{t}{2}$; 2) $y^2 = Cx^2 - 1$. **2266.** 1) $y = \frac{\sin x + C \cos x}{x}$; 2) $y = e^{-x} \left(C_1 + \frac{x}{3} \right) +$

$+ C_2 e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{x \sqrt{3}}{2} + C_3 e^{-x} \sin \frac{x \sqrt{3}}{2}$. **2267.** 1) $y =$

$= (C_1 - \ln \sqrt{1+e^{2x}}) e^{2x} + (C_2 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{2x}) e^{2x}$; 2) $y = C_1 e^{V_c x} + C_2 e^{-V_c x}$ и $y = C_1 x + C_2$. **2268.** $\frac{d^2}{dt^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + 1000 x = 0$,

$x = A \cos \frac{10 \sqrt{10} g}{a} t + B \sin \frac{10 \sqrt{10} g}{a} t$, период $T = \frac{\pi a}{5 \sqrt{10} g}$.

2269. $\frac{dT}{dr} = -\frac{k}{4\pi r^2}$; $T = \frac{k}{8\pi r} + C$; k и C находим из условий: $20^\circ = \frac{k}{8\pi \cdot 2a} + C$ и $100^\circ = \frac{k}{8\pi \cdot a} + C$; $T = \frac{160^\circ a}{r} - 60^\circ = 40^\circ$.

2270. 1) $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3 x^3$; 2) $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2$; 3) $y = C_1 x^n + C_2 x^{-(n+1)}$. **2271.** 1) $y = x^{-2} (C_1 + C_2 \ln x)$; 2) $y = C_1 \cos (\ln x) + C_2 \sin (\ln x)$. **2272.** 1) $y = \frac{5x^2}{3} + C_1 x^{-1} + C_2$; 2) $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \ln x + \frac{1}{3}$.

2273. 1) $y = C_1 x + C_2 x^2 - 4x \ln x$;

2) $y = \frac{C_1 + C_2 \ln x + \ln^3 x}{x}$. **2274.** 1) $y = \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) x^2$;

2) $y = \frac{x}{2} + C_1 \cos (\ln x) + C_2 \sin (\ln x)$. **2275.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$,

$y = -\frac{dx}{dt} = C_1 e^t - 3C_2 e^{-3t}$. **2276.** $x = e^t + C_1 + C_2 e^{-2t}$, $y = e^t +$

$+ C_1 - C_2 e^{-2t}$. **2277.** $x = 2e^{-t} + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$, $y = 3e^{-t} + 3C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t}$. **2278.** $x = e^t + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + C_3 \cos(t + \varphi)$.

2279. $x = e^{-2t} (1 - 2t)$. **2280.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t \operatorname{ch} t$.

2281. 1) $u = \varphi(x) + \psi(y)$; 2) $u = y\varphi(x) + \psi(x)$; 3) $u = x\varphi(y) + \psi(x)$;

4) $u = ax^2 \ln y + bxy + \varphi(x) + \psi(y)$. **2282.** $z = y^2(x + y - 1)$.

2283. Чтобы уравнение $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$ привести

к каноническому виду, нужно решить характеристическое уравнение $A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$; в двух его интегралах: $\varphi(x, y) = \xi$ и $\psi(x, y) = \eta$, произвольные постоянные ξ и η принять за новые

переменные и преобразовать к этим новым переменным данное уравнение (см. задачи 1941 и 1942). В нашем примере нужно решить уравнение $dx^2 + 4dx dy + 3dy^2 = 0$, отсюда $dy + dx = 0$, $dy + 3dx = 0$, $y + x = \xi$, $y + 3x = \eta$. В новых переменных уравнение примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Отсюда $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(y+x) + \psi(y+3x)$.

2284. Характеристическое уравнение $x^2 dy^2 - 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0$ или $(x dy - y dx)^2 = 0$ или $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$; $\frac{y}{x} = \xi$. Решения равные; за η принимаем y . Итак, характеристики: $\frac{y}{x} = \xi$ и $y = \eta$. Уравнение примет вид (см. задачи 1944 и 1945): $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$; $u = \eta \varphi(\xi) + \psi(\xi)$ или $u = y \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$\mathbf{2285. } u = y \varphi(y+2x) + \psi(y+2x).$$

2286. $u = xy + \sin y \cos x$. **2287.** (См. задачу 1944.) $u = y \ln x + 2y + 1$.

2288. $u = \sqrt{x t} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) + \psi(xt)$; частное решение $u = \frac{x^2(1+t^3)}{t}$.

2289. $u = e^{-x} \varphi(x-t) + \psi(x)$; частное решение

$u = (x-t)e^{-t} - x$.

2290. Частное решение $u = xat + \frac{1}{3}a^3t^3$.

$$\mathbf{2291. } u = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz.$$

2292. $6 - 4 \ln 2 \approx 3,28$.

2293. 1) $10^{2/3}$ кв. ед.; 2) $\frac{4}{a}$ кв. сд.

2294. $20 \frac{5}{6}$. **2295.** $\frac{9a^3}{2}$. **2296.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. **2297.** 1) $\int_0^a dx \int_0^x dy =$

$$= \int_0^a dy \int_y^a dx = \frac{a^2}{2}; \text{ 2) } \int_0^a dy \int_{a-y}^{V{a^2-y^2}} dx = \int_0^a dx \int_{a-x}^{V{a^2-x^2}} dy = a^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2\right);$$

$$3) \frac{\pi a^3}{4}. \mathbf{2298. } 1) \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy = \int_0^1 dy \int_0^x dx + \int_1^2 dy \int_0^{V{2-y^2}} dx = 1 \frac{1}{6};$$

$$2) \int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 dx = \int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{4+x}}^0 dy = \frac{16}{3}.$$

$$\mathbf{2299. } \left(\frac{\pi}{4} + 2\right) a^2.$$

2300. Площадь меньшего сегмента: $\left(\frac{4\pi}{3} - V^3\right) a^2 \approx 2,457 a^2$.

$$\mathbf{2301. } \frac{3a^3}{2} \ln 2. \mathbf{2302. } \frac{868}{15} a^2. \mathbf{2303. } \frac{3}{8} \pi a^2. \mathbf{2304. } 4,5. \mathbf{2305. } \frac{a^2}{6}.$$

2306. $\sqrt{2} - 1$. **2307.** $\frac{9}{2} a^2$. **2308.** $8\pi + 9\sqrt{3}$. **2309.** $\left(2 - \frac{\pi}{4}\right) a^2$.

2310. $7 \ln 2$. **2311.** 1) $\int_a^b dx \int_a^x dy = \int_a^b dy \int_y^b dx = \frac{(b-a)^2}{2}$;

2) $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx = \int_0^a dx \int_0^{\frac{a^2}{y}} dy + \int_a^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy = \frac{a^2(3\pi - 2)}{12}$;

3) $\int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{8-y}{2}} dx + \int_4^8 dy \int_0^{8-y} dx = \frac{40}{3}$. **2312.** $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$.

2313. $(3; 4,8)$. **2314.** $\left(\frac{2a}{5}; \frac{a}{2}\right)$. **2315.** $\left(0; \frac{4a}{3\pi}\right)$. **2316.** $\left(0; \frac{256a}{315\pi}\right)$.

2318. $\frac{17a^4}{96}$. **2319.** $\frac{a^4}{4}$. **2320.** $\frac{a^4}{6}$. **2321.** $\frac{\pi a^4}{8}$. **2322.** $\frac{\pi a^4}{2}$.

2323. $\frac{88a^4}{105}$. **2324.** $\left(\frac{3a}{5}; \frac{3a}{8}\right)$. **2325.** $\left(0; \frac{4b}{3\pi}\right)$. **2326.** $\frac{a^4}{30}$.

2327. 3. **2328.** $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$. **2329.** 47,5. **2330.** $\frac{35\pi a^4}{16}$.

2331. $42 \frac{2}{3}$. **2332.** $\frac{79}{60} a^3$. **2333.** Сечения плоскостью $z = h$,

$x + y = \pm \sqrt{a(a-h)}$ — параллельные прямые, т. е. поверхность цилиндрическая (черт. 63). Иско-

мый объем $V = 2 \int_0^a dx \int_0^{a-x} z dy =$

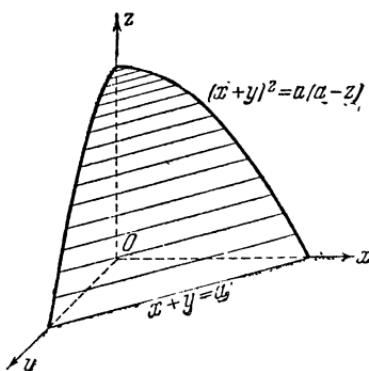
$= \frac{a^3}{2}$. **2334.** $\frac{16}{3} a^3$ (черт. 64).

2335. (См. черт. 50, стр. 322) $\frac{8}{9} a^3$.

2336. $\frac{a^3}{3}$. **2337.** $\frac{\pi}{12} a^3$. **2338.** $3\pi a^3$.

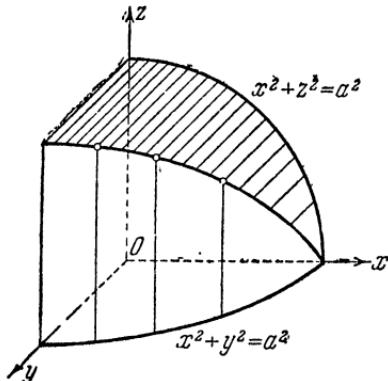
2339. $V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} m \cos \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr =$

$= \frac{4ma^3}{3}$ (черт. 65). **2340.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **2341.** $4\pi \sqrt{3}a^3$. **2342.** $\frac{4a^8}{9}(3\pi - 4)$

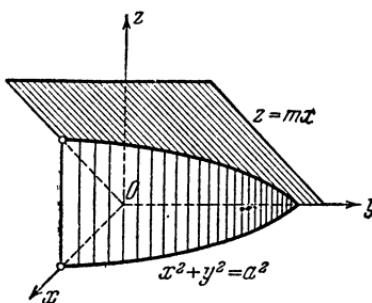


Черт. 63.

- (черт. 66). **2343.** $\pi^2 a^3$ (черт. 62). **2344.** $\frac{16\sqrt{2}}{15} a^3$. **2345.** $\frac{\pi abc}{2}$.
2346. $\pi abc \left(1 - \frac{1}{e}\right)$. **2347.** $\frac{4\pi a^3}{35}$. **2348.** $\frac{8}{15} a^3$.

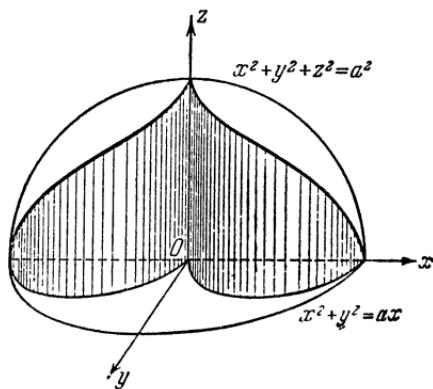


Черт. 64.

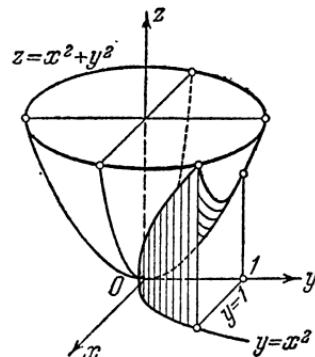


Черт. 65.

2349. $V = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 z dy = \frac{88}{105}$ (черт. 67).



Черт. 66.



Черт. 67.

2350. $V = 4 \int_0^{8a} dx \int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} \sqrt{4ax - y^2} dy = 3a^3 (4\pi - 3\sqrt{3})$ (черт. 68).

$$2351. V = 8 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy = \frac{16ab^3}{3}.$$

2352. $V = 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{y}{h}} \sqrt{a^2 - x^2} dy = \frac{\pi a^2 h}{2}$ равна площади основания коноида, умноженной на половину высоты (черт. 69).

$$2353. \frac{128}{105} a^3.$$

$$2354. 18\pi.$$

$$2355. 2\pi a^3.$$

$$2356. 8\pi \ln 2$$
 (см. черт. 49, стр. 322).

$$2357. \frac{3}{16}\pi a^3.$$

$$2358. \frac{5\pi a^3}{16}.$$

$$2359. \frac{4\pi abc}{3}.$$

$$2360. 13.$$

$$2361. \frac{8\sqrt{2}}{3} a^3.$$

$$2362. 2\pi a^2.$$

$$2363. \frac{2\pi a^3}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

$$2364. 2\pi p^2 \sqrt{2}.$$

$$2365. 8a^3.$$

$$2366. 4a^2(\pi - 2).$$

$$2367. \frac{14}{3}\pi a^3.$$

$$2368. \sigma = \iint_{(S)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} dx dy = \frac{\pi \beta}{180} R^2 \sin \alpha; \text{ при } \beta = 60^\circ \text{ и}$$

$$\alpha = 30^\circ \sigma = \frac{\pi R^3}{6}. \quad 2369. \frac{\pi a^3}{12} \left(\text{радиус сечения } r = \frac{a}{\sqrt[3]{3}} \right). \quad 2370. \frac{2\pi a^3}{3} \times$$

$$\times (2 - \sqrt{2}). \quad 2372. \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} z dz = \frac{a^4}{24}. \quad 2373. \left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{4} \right).$$

$$2374. \left(0, 0; \frac{a}{3} \right).$$

$$2375. \frac{a^5}{4}.$$

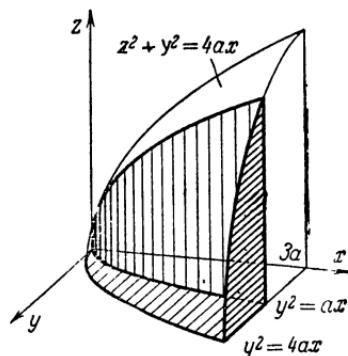
$$2376. \frac{\pi a^5}{\sqrt[3]{2}}.$$

$$2377. 1) \frac{\pi a^3}{3}; \quad 2) \frac{\pi a^3}{60}. \quad 2378. \frac{\pi a^3}{6} (8\sqrt{2} - 7).$$

$$2379. \frac{32}{3}\pi.$$

$$2380. \frac{\pi a^3}{6}. \quad 2381. \frac{\pi h^4}{4}. \quad 2382. \frac{a^4}{12}. \quad 2383. \left(0; 0; \frac{3a}{8} \right).$$

$$2384. \frac{32\sqrt{2}a^5}{135}. \quad 2385. \frac{a^3}{360}. \quad 2386. 6k\pi a^2, \text{ где } k \text{ — коэффициент пропорциональности.}$$

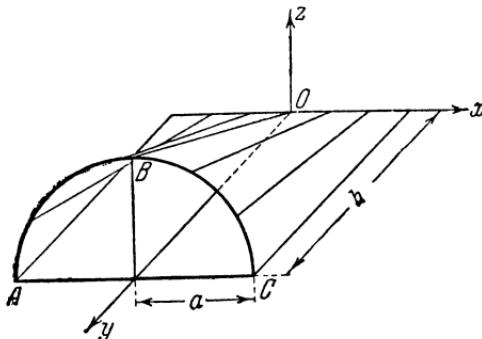


Черт. 68.

2387. $\int (x+y) dx = \begin{cases} 4 & \text{по прямой } OA, \\ \frac{10}{3} & \text{по дуге } OA, \\ 2 & \text{по ломаной } OBA. \end{cases}$

2388. 1) 8; 2) 4. **2389.** $\int (x dy + y dx) = 8$ в обоих случаях.

Это потому, что здесь $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. **2390.** 1) $1,5a^3$; 2) a^3 . **2391.** $8a^3$.



$$\text{Конусид } (a^2 - x^2)y^2 = h^2z^2$$

Черт. 69.

2392. πa^3 . **2393.** $\frac{\pi mab}{4}$. **2394.** 0. **2396.** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) $-\frac{1}{2}$;

3) $2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. **2397.** $\frac{2a^3}{3}$. **2398.** πab . **2399.** $\frac{8}{15}$. **2400.** $\frac{3}{2}a^3$.

2401. $X = 0$, $Y = \frac{2kmM}{\pi a^2}$. **2402.** $Y = \frac{kmM}{a^2 \sqrt{2}}$.

2403. $Y = \frac{kmM}{a^2}$. **2404.** 1) -16 ; 2) $-\frac{52}{3}$; 3) -12 . **2405.** 1) $\frac{3a^2}{2}$;

2) $\frac{a^2}{2}$; 3) $\frac{11a^2}{6}$. **2408.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2409.** $\frac{4}{3}$. **2410.** $\frac{a^3}{2}$.

2411. $\frac{a^4}{3} \left(\frac{4}{5} + \frac{\pi}{16} \right)$. **2412.** Каждая из частей формулы равна $4\pi a^3$.

2413. Каждая из частей формулы равна $\frac{a^4}{3} \left(\frac{4}{5} + \frac{\pi}{16} \right)$. **2419.** Каждая из частей формулы равна $\frac{12}{5}\pi a^5$. **2421.** 0,15a⁵. **2422.** Нет.

2423. Да. **2424.** Да. **2425.** Ряд расходится. **2426.** Расходится.

2427. Сходится, ибо $\int_1^\infty \frac{x dx}{(x+1)^3} = \frac{3}{8}$. **2428.** Сходится, ибо

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. **2429.** Расходится, ибо $\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \infty$. **2430.** Сходится, ибо

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2 - 1} = \left[\frac{1}{4} \ln \frac{x}{x+1} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{4} \ln 2$. **2431.** Сходится. **2432.** Сходится. **2433.** Сходится. **2434.** Сходится, ибо

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$. **2435.** Расходится. **2436.** Расходится. **2437.** Сходится. **2438.** Расходится. **2439.** Сходится. **2440.** Расходится.

2442. 1. **2443.** $\frac{1}{3}$. **2444.** Сходится не абсолютно. **2445.** Сходится абсолютно.

2446. Сходится не абсолютно. **2447.** Сходится абсолютно. **2448.** После первой перестановки членов напишем ряд в виде: $\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots$ Выполнив действия в скобках, получим ряд, члены которого вдвое меньше членов данного ряда. После второй перестановки членов *этнную тройку* членов преобразуем: $\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}$; при $n = 1, 2, 3, \dots$ первые четыре члена образуют данный ряд с суммой S , а последние два — ряд с суммой $\frac{1}{2}S$. **2449.** Сходится.

2450. Расходится, ибо $\int_1^{\infty} \frac{dx}{100x-99} = \infty$. **2451.** Сходится, ибо

$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{8}$. **2452.** Расходится, ибо $\int_1^{\infty} \frac{2x-1}{x^2} dx = \infty$. **2453.** Сходится.

2454. Сходится, ибо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$. **2455.** Сходится, ибо

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n+21}{3(20n+1)} = \frac{1}{3} < 1$. **2456.** Сходится. **2457.** Сходится не абсолютно.

2458. Сходится абсолютно. **2459.** При $a > 1$ сходится абсолютно, при $a = 1$ сходится не абсолютно, при $a < 1$

расходится. **2460.** $1/2$. **2461.** $1/4$. **2462.** Сумма ряда $S(x) = \frac{1}{1-x}$

при $x < 1$, остаток $R_n = S - S_n = \frac{x^n}{1-x}$. На отрезке $[0; \frac{1}{2}]$ $|R_n| < \frac{1}{2^{n-1}} < 0,001$, как только $n-1 > \frac{\lg 1000}{\lg 2}$; $n \geq 11$. **2463.** Ряд имеет сумму $S = \frac{x}{1-(1-x)} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ и остаток $R_n = \begin{cases} (1-x)^n & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ При любом n остаток R_n будет больше, например, 0,9, как только $x < 1 - \sqrt[n]{0,9}$, т. е. на отрезке $[0; 1]$ ряд сходится *неравномерно*. Но на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ он сходится равномерно, ибо тогда при любом x $|R_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, как только $n > \frac{-\lg \varepsilon}{\lg 2}$; в частности, $|R_n| < 0,01$ при $n \geq 7$. **2464.** Остаток закочередующегося ряда меньше по модулю первого отброшенного члена. Поэтому на отрезке $[0, 1]$ $|R_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} \leq 0,1$, как только $n+1 \geq 10$ или $n \geq 9$. **2465.** Ряд имеет сумму $S = \begin{cases} 1+x^3 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ и остаток $R_n = \begin{cases} \frac{(1+x^3)^{n-1}}{1-x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ При любом n остаток R_n будет больше, например, 0,1, как только $x^3 < \sqrt[n-1]{10} - 1$, т. е. при $x \geq 0$ ряд сходится *неравномерно*. Но при $x \geq 1$ он сходится уже *равномерно*, ибо тогда при любом $x \geq 1$ $|R_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, как только $n-1 > \frac{-\lg \varepsilon}{\lg 2}$; в частности, $|R_n| < 0,001$ при $n \geq 11$. **2466.** При любом неотрицательном x члены данного ряда меньше (или равны) членов числового сходящегося ряда $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$ Следовательно, ряд сходится равномерно для всех $x \geq 0$, $R_n(x)$ меньше остатка числового ряда, т. е. $R_n(x) < \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < 0,01$, как только $3^{n-1} > 50$ или $n \geq 5$, при любом $x \geq 0$. **2467.** $|R_n(x)| < \frac{1}{n^2} \leq 0,0001$, как только $n \geq 100$, при любом x . **2468.** $u_n = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$. Поэтому $S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$; $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{x}$, при любом $x \neq 0$. В частности, при $x > 0$ $R_n(x) = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n} \leq 0,1$, как только $n \geq 10$. **2469.** При любом неотри-

цательном x члены данного ряда меньше (или равны) членов числового сходящегося ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$. Поэтому ряд сходится рав-

номерно для всех $x \geq 0$, $R_n(x) < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} < 0,01$, как только

$2^{n-1} > 100$ или $n \geq 8$. **2470.** $-3 \leq x < 3$. **2471.** $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$.

2472. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. **2473.** Абсолютно сходится на всей числовой оси. **2474.** $-1 < x \leq 1$. **2475.** $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$.

2476. 1) $R=0$; 2) $R=e$. **2477.** $-5 \leq x < 3$. **2478.** $1 < x \leq 2$.

2479. $\frac{1}{(1-x)^2}$ при $|x| < 1$. **2480.** $\arctg x$ при $|x| \leq 1$. **2481.** $\frac{1+x}{(1-x)^2}$

при $|x| < 1$. **2482.** $(1+x)^m$. **2483.** $-\frac{\sqrt{5}}{2} < x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2484. $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. **2485.** $-0,1 \leq x < 0,1$. **2486.** $-1 \leq x \leq 1$.

2487. $-1 \leq x < 3$. **2488.** $-1 \leq x < 0$. **2489.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ при $|x| < 1$.

2490. $-\ln(1-x)$ при $-1 \leq x < 1$. **2491.** $\frac{1-2x}{(1+x)^2}$ при $|x| < 1$.

2492. 1) $\cos(x-a) = \sin a \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) + \cos a \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)$; $|R_n(x)| = \frac{x^n}{n!} \cos \left(0x - a + n \frac{\pi}{2} \right)$; 2) $\sin^2 x = \frac{2 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^2 x^4}{4!} + \frac{2^5 \cdot x^6}{6!} - \dots$; 3) $x e^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$; 4) $\sin \left(mx + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^4 x^4}{4!} - \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{mx}{1} - \frac{m^3 x^3}{3!} + \frac{m^5 x^5}{5!} - \dots \right)$.

2493. $\ln(1+e^{kx}) = \ln 2 + \frac{kx}{2} + \frac{k^2 x^2}{2! 2^2} - \frac{k^4 x^4}{4! 2^3} + \dots$

2497. 1) $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]$; 2) $\ln(2-3x+x^2) =$

$= \ln(1-x)(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (1+2^{-n}) \frac{x^n}{n}$; 3) $\ln(1-x+x^2) =$

$= \ln \frac{1+x^2}{1+x} = - \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} + \dots \right] =$

$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{3} \frac{x^n}{n}$. **2498.** $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad \mathbf{2499.} \quad e^{\frac{x}{a}} = e \left[1 + \frac{x-a}{1!a} + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-a)^2}{2! a^2} + \frac{(x-a)^3}{3! a^3} + \dots \right], R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n! a^n} e^{1+\theta(\frac{x}{a}-1)}. \quad \mathbf{2500.} \quad x^3 -$$

$$-3x = -2 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3. \quad \mathbf{2501.} \quad x^4 = 1 - 4(x+1) +$$

$$+ 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4. \quad \mathbf{2502.} \quad \frac{1}{x} = -\frac{1}{2\left(1-\frac{x+2}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(x+2)^3}{8} + \dots \right] \text{ при } -4 < x < 0.$$

$$\mathbf{2503.} \quad 1) \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \frac{\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}{1!2} - \frac{\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^3}{2!2^3} + \dots \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)! 2^{n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi}{4}; \text{ принимая } 0! \text{ условно равным } 1 \text{ (см.}$$

$$\text{сноска на стр. 186 к задаче 1760); 2) } \sin 3x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

$$\mathbf{2504.} \quad \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{1-(x+1)} = -1 + \frac{x+1}{3 \cdot 1!} + \frac{2(x+1)^2}{3^2 \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 5(x+1)^3}{3^3 \cdot 3!} + \dots =$$

$$= -1 + \frac{x+1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3^{n+1} (n+1)!} (x+1)^{n+1} \quad \text{при } -2 < x < 0.$$

$$\mathbf{2505.} \quad 1) \quad 2^x = 1 + \frac{x \ln 2}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} \dots; |R_n| = \frac{x^n \ln^n 2}{n!} 2^{n-x};$$

$$2) \quad \cos \left(mx + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \frac{mx}{1!} - \frac{m^2 x^2}{2!} + \dots \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(mx)^{n-1}}{(n-1)!} \cos (2n-1) \frac{\pi}{4} \text{ (полагая } 0! = 1). \quad \mathbf{2506.} \quad x^4 - 4x^2 =$$

$$= (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 20(x+2)^2 - 16(x+2). \quad \mathbf{2507.} \quad \cos^2 x =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{x-\frac{\pi}{3}}{1!} - \frac{2^2 \left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!} + \frac{2^4 \left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5}{5!} - \dots \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{2 \left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} - \frac{2^8 \left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4}{4!} + \frac{2^6 \left(x-\frac{\pi}{3}\right)^6}{6!} - \dots \right].$$

2508. $\sin \frac{\pi x}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^n}{3^n n!} \sin \left(\frac{\pi}{3} + n \frac{\pi}{2} \right)$ (полагая $0! = 1$).

2509. $\sqrt{x} = 2 \left[1 + \frac{x-4}{2^3 \cdot 11} \frac{(x-4)^3}{2^6 \cdot 21} + \frac{1 \cdot 3 (x-4)^3}{2^9 \cdot 31} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (x-4)^4}{2^{12} \cdot 41} + \dots \right].$

2511. $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 21} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^8 \cdot 31} \frac{x^7}{7} + \dots$ **2512.** $\sqrt{0,992} =$

$$= \sqrt{1 - 0,008} \approx 1 - 0,004 = 0,996; \sqrt{90} = \sqrt{81 + 9} = 9 \sqrt{1 + \frac{1}{9}} \approx$$

$$\approx 9 \left(1 + \frac{1}{18} \right) = 9,5. \quad \text{2513. } \sqrt[3]{0,991} = \sqrt[3]{1 - 0,009} \approx 0,997; \sqrt[3]{130} =$$

$$= \sqrt[3]{125 + 5} = 5 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{25}} \approx 5 \left(1 + \frac{1}{75} \right) = 5 \frac{1}{15}. \quad \text{2515. } \arctg x =$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{2517. } \pi = 2 \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^3} - \frac{1}{7 \cdot 3^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{9 \cdot 3^4} \right) = 1,814 \sqrt{3} \approx 3,142. \quad \text{2519. 1) } \int \frac{\sin x}{x} dx = C + x - \frac{x^3}{3! 3} +$$

$$+ \frac{x^5}{5! 5} - \dots; \quad \text{2) } \int_x^{\infty} \frac{e^x}{x} dx = C + \ln x + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2! 2} + \frac{x^5}{3! 3} + \dots$$

2520. $\Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{1! 3} + \frac{x^5}{2! 5} - \frac{x^7}{3! 7} + \dots; \quad \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx$

$$\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} \approx 0,419 \text{ с погрешностью } < \frac{1}{2430}. \quad \text{2521. } \Phi(x) =$$

$$= \int_0^x \sqrt[3]{1+x^2} dx = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3^2 2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{2 \cdot 5}{3^3 3!} \frac{x^7}{7} - \dots;$$

$$\Phi\left(\frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5^3} \approx 0,2008 \text{ с погрешностью } < \frac{1}{32 \cdot 5^6} < 0,0001.$$

2522. Продифференцировав уравнение n раз и подставив $x = 0$, получим: $y_0^{(n+2)} = n(n-1)y_0^{(n-2)}$. Отсюда $y_0'' = y_0''' = 0$, $y_0^{IV} = 2 \cdot 1$, $y_0^V = 3 \cdot 2$, $y_0^{VI} = 0$ и т. д. Подставив эти значения в формулу Маклорена $y = y_0 + \frac{y'_0}{1!} x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \dots$, находим: $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \dots$

2523. $y = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} - \dots$ **2524.** Решением является «функция Бесселя нулевого порядка»: $I_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$

2525. $\sqrt{1,005} \approx 1,0025; \sqrt[3]{1,0012} \approx 1,0004; \sqrt{0,993} \approx 0,9965; \sqrt[3]{0,997} \approx 0,999; \sqrt{110} = \sqrt{100 + 10} \approx$

$$\approx 10 \left(1 + \frac{1}{20}\right) = 10,5; \sqrt[5]{70} \approx 4 \left(1 + \frac{1}{32}\right) = 4,125; \sqrt[5]{40} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{20}\right) = 2,1.$$

2527. $\pi = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 2^6} + \dots \right) \approx 3(1 + 0,0417 + 0,0047) \approx 3,14.$

2528. $\pi = 2 \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \dots \right] + \frac{4}{3} \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \dots \right] = \frac{10}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{9^n \cdot 3} \right).$

2532. $s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt = 2\pi a \left[1 - \frac{\epsilon^2}{2^2} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon^6}{5} - \dots \right],$ где ϵ — эксцентриситет эллипса, а a — его большая полуось (см. № 1624 и его ответ).

2533. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx = \left[x + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^7}{2^3 \cdot 2! \cdot 7} + \dots \right]_0^{0,5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \times \frac{1}{24} - \dots \approx \frac{65}{128} \approx 0,508$ с погрешностью $< \frac{1}{7 \cdot 2^{10}}.$

2534. $\Phi(x) = x - \frac{1}{2!} \frac{x^5}{4^2 \cdot 5} + \frac{1}{4!} \frac{x^9}{4^4 \cdot 9} - \dots; \quad \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^{10}} + \dots \approx 0,499805$ с погрешностью $< \frac{1}{27 \cdot 2^{20}}.$

2535. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3^2 \cdot 7} + \frac{2 \cdot x^{11}}{3^3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots$

2536. Продифференцировав уравнение n раз и подставив $x = 0$, получим $y_0^{(n+2)} = -ny_0^{(n-1)}$, отсюда $y_0 = 1, y'_0 = 0, y''_0 = 0, y'''_0 = -1, y^{IV}_0 = y_0^V = 0, y_0^VI = 1 \cdot 4, \dots, y = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^6}{6!} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^9}{9!} + \dots$

2537. $x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2C} ds = s \left[1 - \frac{s^4}{2! (2C)^2 \cdot 5} + \dots \right], \quad y = \int_0^s \sin \frac{s^2}{2C} ds = \frac{s^3}{2C} \left[\frac{1}{3} - \frac{s^4}{3! (2C)^3 \cdot 7} + \dots \right],$ где постоянная $C = R \cdot L$, R — радиус круговой кривой и L — длина переходной кривой. Кривая называется *клоноидой* (черт. 92 стр. 355).

2538. $F(x+h, y+l) = x^2 + xy + y^2 + h(2x+y) + l(2y+x) + h^2 + hl + l^2.$

2539. $x^3 + 2xy^2 = 9 + 11(x-1) + 8(y-2) + 3(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2 + (x-1)^3 + 2(x-1)(y-2)^2.$

2540. $\ln(x-y) = x - (y+1) - \frac{x^2}{2} + x(y+1) - \frac{(y+1)^2}{2} + R_3,$ где $R_3 = \frac{(x-y-1)^3}{3[0x+1-0(y+1)]^3}.$

2541. $\sin(mx+ny) = mx+ny - \frac{(mx+ny)^3}{3!} + \frac{(mx+ny)^4}{4!} \times \times \sin \theta (mx+ny)$. **2543.** $dx = 0,1; dy = -0,2; \Delta z = (2x-y) dx + + (2y-x) dy + dx^2 - dx dy + dy^2 = -0,63$. **2544.** $\Delta z = = -(a dx - b dy) \sin(ax-by) - \frac{1}{2!}(a dx - b dy)^2 \cos(ax-by) + R_3$,

где $R_3 = \frac{1}{3!}(a dx - b dy)^3 \sin[a(x+\theta dx) - b(y+\theta dy)]$.

2545. $x^2y = -1 - 2(x-1) + (y+1) - (x-1)^2 + (x-1)(y+1)$.

2546. $\operatorname{arc tg} \frac{y}{x} = y - (x-1)y + \dots$ **2547.** $y^x = 1 + 2(y-1) + (x-2) \times \times (y-1) + \frac{(y-1)^2}{2} + \dots; 1,1^2, 1 \approx 1 + 2 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,1 + \frac{0,1^2}{2} = = 1,215$. **2548.** $dx = -0,01, dy = 0,02; \Delta z = 2yx dx + + (x^2 - 2y) dy + y dx^2 + x dx dy - dy^2 + \frac{1}{3} dx^3 dy \approx -0,1407$.

2549. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **2550.** $\frac{\pi}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2551. $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$. **2552.** $\frac{3\pi}{4} - \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right] + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$.

2553. $\frac{4}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right]$.

2554. $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \dots \right]$. **2555.** $\frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi x}{l} + + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right] + \frac{l}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right]$.

2556. 1) $\frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^3} \left[\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^3} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^3} \cos \frac{5\pi x}{2} - - \frac{2}{6^3} \cos \frac{6\pi x}{2} + \dots \right]$; 2) $\frac{2}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right] + + \frac{4}{\pi^3} \left[\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^3} \sin \frac{5\pi x}{2} - \dots \right]$.

2557. $u = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}$.

2558. $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{2n+1}{2l} \pi nt \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x$, где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi \xi d\xi. \quad 2559. \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{a\pi^2 n^2 t}{l^2}$$

где $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi. \quad 2560. \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda.$

$$2561. \quad f(x) = \frac{2b}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\beta^2 + \lambda^2} d\lambda.$$

$$2562. \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \lambda) \sin \lambda}{\lambda^2} \sin \lambda x d\lambda.$$

$$2563. \quad \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right].$$

$$2564. \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right].$$

$$2565. \quad \frac{4}{\pi} \left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right].$$

$$2566. \quad \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\frac{\cos \frac{\pi x}{l}}{1^2} + \frac{\cos \frac{3\pi x}{l}}{3^2} + \dots \right].$$

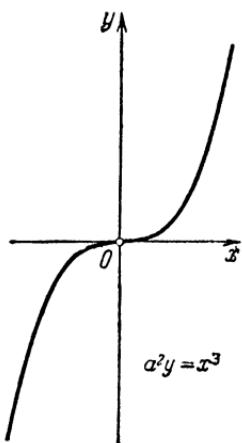
$$2567. \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \dots \right] - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \pi x}{1} + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \dots \right].$$

$$2568. \quad \operatorname{sh} l \left[\frac{1}{l} - 2l \left(\frac{\cos \frac{\pi x}{l}}{\pi^2 + l^2} - \frac{\cos \frac{2\pi x}{l}}{2^2 \pi^2 + l^2} + \dots \right) + 2\pi \left(\frac{1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}}{\pi^2 + l^2} - \frac{2 \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2 \pi^2 + l^2} + \dots \right) \right]. \quad 2569. \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{2n+1}{2} t \sin \frac{2n+1}{2} x,$$

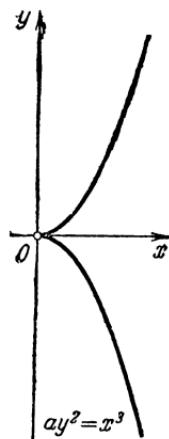
где $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \xi d\xi. \quad 2570. \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\sin \lambda \cos \lambda x|}{\lambda} d\lambda.$

ПРИЛОЖЕНИЯ

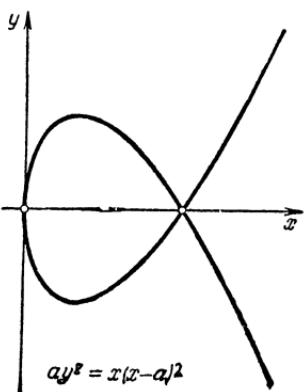
1. НЕКОТОРЫЕ КРИВЫЕ (ДЛЯ СПРАВОК)



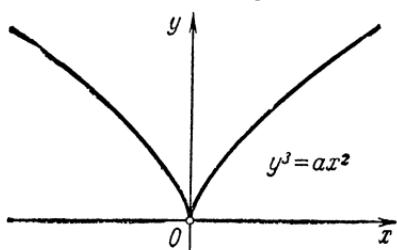
Черт. 70. Кубическая парабола.



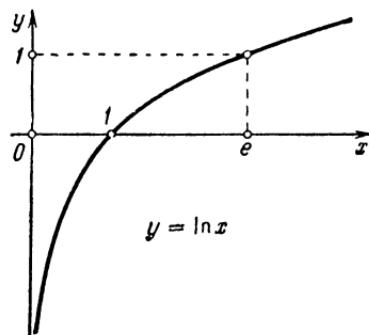
Черт. 71. Полукубическая парабола.



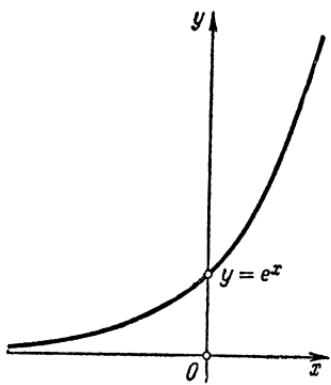
Черт. 73. Петлевая парабола.



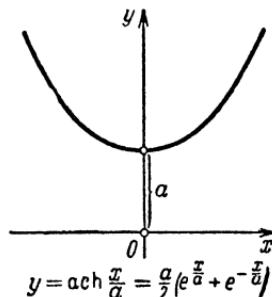
Черт. 72. Полукубическая парабола.



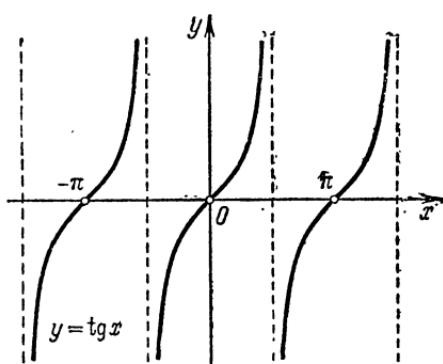
Черт. 74. Логарифмика.



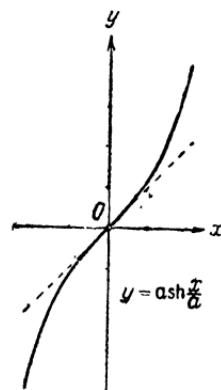
Черт. 75. Логарифмика.



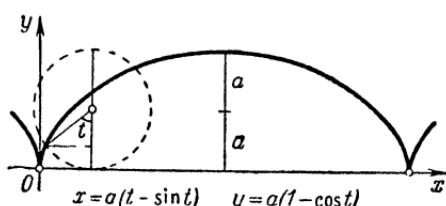
Черт. 77. Цепная линия.



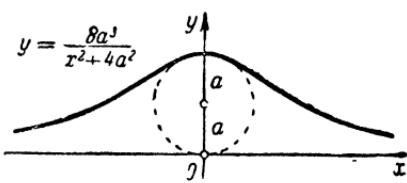
Черт. 76. Тангенсонада.



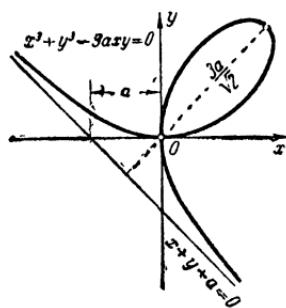
Черт. 78. График гиперболического синуса.



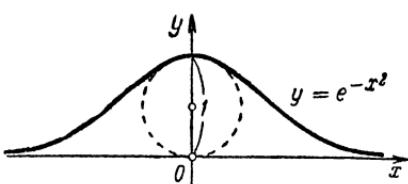
Черт. 79. Циклоида.



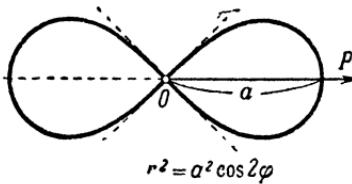
Черт. 80. Локон.



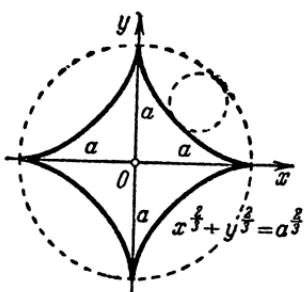
Черт. 83. Декартов лист.



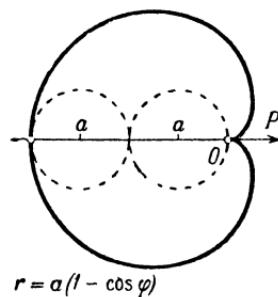
Черт. 81. Кривая «вероятностей».



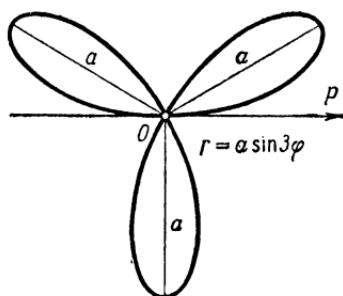
Черт. 84. Лемниската Бернулли.



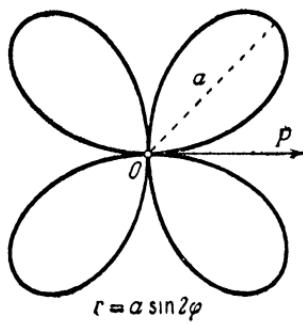
Черт. 82. Астроида.



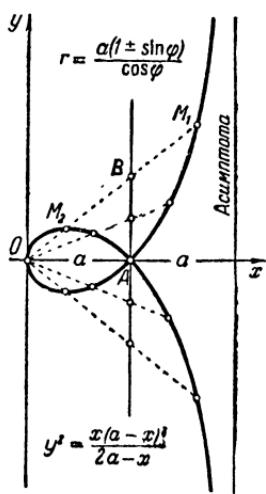
Черт. 85. Кардиоида.



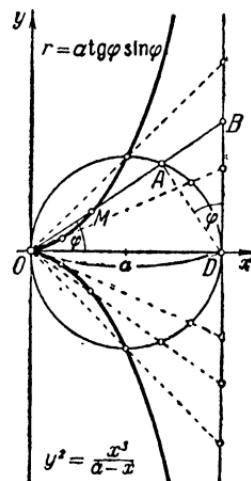
Черт. 86. Трехлепестковая роза.



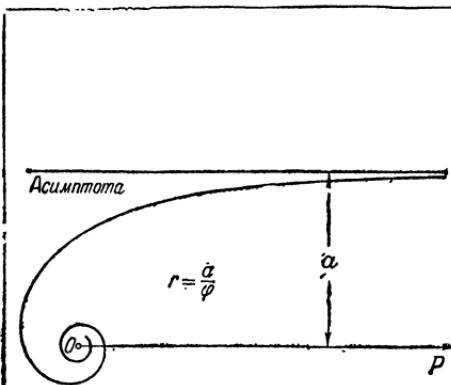
Черт. 87. Четырехлепестковая роза.



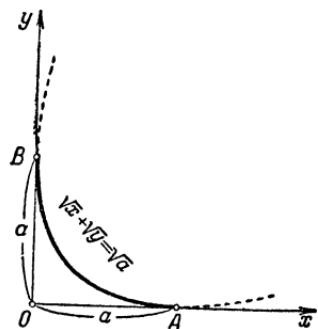
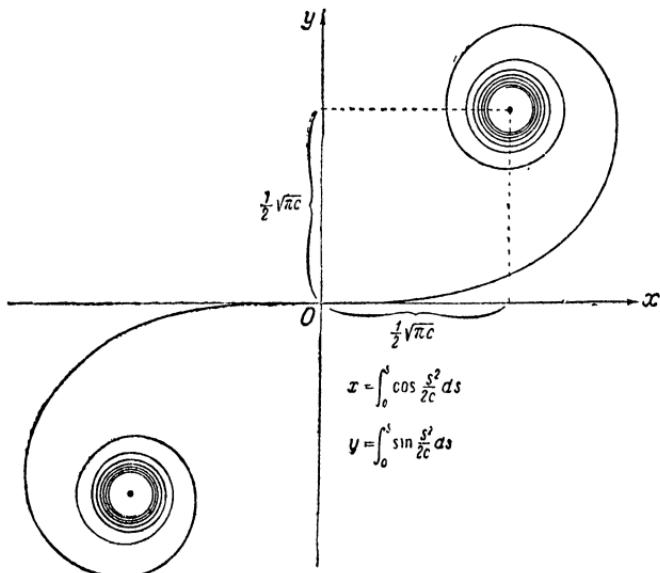
Черт. 88. Строфоида.



Черт. 89. Циссоида.



Черт. 90. Гиперболическая спираль.

Черт. 91. Дуга параболы, вписанной в угол xOy .

Черт. 92. Клотоида.

II. ТАБЛИЦЫ

1. Тригонометрические функции

α°	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos \alpha$		α°	a радианов	$\sin a$	$\operatorname{tg} a$
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90	0	0	0,000	0,000
1	0,175	0,175	57,3	1,000	89	5,73	0,1	0,100	+ 0,100
2	0,349	0,349	28,6	0,999	88	11,5	0,2	0,199	+ 0,203
3	0,523	0,524	19,1	0,999	87	17,2	0,3	0,296	+ 0,310
4	0,697	0,699	14,3	0,998	86	22,9	0,4	0,389	+ 0,422
5	0,872	0,875	11,4	0,996	85	28,7	0,5	0,480	+ 0,547
6	1,045	1,051	9,51	0,995	84	34,4	0,6	0,564	+ 0,684
7	1,219	1,228	8,11	0,993	83	40,1	0,7	0,644	+ 0,842
8	1,39	1,41	7,11	0,990	82	45,0	$\frac{\pi}{4}$	0,707	+ 1,000
9	1,56	1,58	6,31	0,988	81	45,8	0,8	0,717	+ 1,023
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80	51,6	0,9	0,784	+ 1,260
11	191	194	5,145	0,982	79	57,3	1,0	0,842	+ 1,558
12	208	213	4,705	0,978	78	63,0	1,1	0,891	+ 1,963
13	225	231	4,331	0,974	77	68,8	1,2	0,932	+ 2,579
14	242	249	4,011	0,970	76	74,5	1,3	0,964	+ 3,606
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75	80,2	1,4	0,985	+ 5,789
16	276	287	487	0,961	74	86,0	1,5	0,998	+ 14,30
17	292	306	271	0,956	73	$\frac{\pi}{2}$	1,000	—	
18	309	325	3,078	0,951	72	90,0	$\frac{\pi}{2}$	1,000	—
19	326	344	2,904	0,946	71	91,7	1,6	0,999	-33,75
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70	97,4	1,7	0,992	- 7,695
21	358	384	605	0,934	69	103,1	1,8	0,974	- 4,292
22	375	404	475	0,927	68	108,9	1,9	0,946	- 2,921
23	391	424	356	0,921	67	114,6	2,0	0,909	- 2,184
24	407	445	246	0,914	66	120,3	2,1	0,863	- 1,711
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65	126,1	2,2	0,808	- 1,373
26	438	488	2,050	0,899	64	131,8	2,3	0,745	- 1,118
27	454	510	1,963	0,891	63	135,0	$\frac{3\pi}{4}$	0,707	- 1,000
28	469	532	881	0,883	62	137,5	2,4	0,676	- 0,916
29	485	554	804	0,875	61	143,2	2,5	0,599	- 0,748
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60	149,0	2,6	0,515	- 0,602
31	515	601	664	0,857	59	154,7	2,7	0,428	- 0,472
32	530	625	600	0,848	58	160,4	2,8	0,336	- 0,356
33	545	649	540	0,839	57	166,1	2,9	0,240	- 0,247
34	559	675	483	0,829	56	171,9	3,0	0,141	- 0,142
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55	177,6	3,1	0,042	- 0,042
36	588	727	376	0,809	54	180,0	π	0,000	0,000
37	601	754	327	0,799	53				
38	616	781	280	0,788	52				
39	629	810	235	0,777	51				
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,			
41	656	869	150	0,755	49	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$,			
42	669	900	111	0,743	48	$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,			
43	682	933	072	0,731	47	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$.			
44	695	966	036	0,719	46				
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45				
	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin \alpha$	α°				
α градусов	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α радианов	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,140	0,157
1 радиан = $57^\circ 17' 45''$									

2. Гиперболические функции

x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
0	0	1			
0,1	0,100	1,005	2,1	4,022	4,289
0,2	0,201	1,020	2,2	4,457	4,563
0,3	0,304	1,045	2,3	4,937	5,037
0,4	0,411	1,081	2,4	5,466	5,557
0,5	0,521	1,128	2,5	6,050	6,132
0,6	0,637	1,185	2,6	6,695	6,769
0,7	0,759	1,255	2,7	7,407	7,474
0,8	0,888	1,337	2,8	8,192	8,253
0,9	1,026	1,433	2,9	9,060	9,115
1,0	1,175	1,543	3,0	10,02	10,07
1,1	1,336	1,669	3,1	11,08	11,12
1,2	1,509	1,811	3,2	12,25	12,29
1,3	1,698	1,971	3,3	13,54	13,58
1,4	1,904	2,151	3,4	14,97	15,00
1,5	2,129	2,352	3,5	16,54	16,57
1,6	2,376	2,578	3,6	18,29	18,32
1,7	2,646	2,828	3,7	20,21	20,24
1,8	2,942	3,107	3,8	22,34	22,36
1,9	3,268	3,418	3,9	24,69	24,71
2,0	3,627	3,762	4,0	27,29	27,31

При $x > 4$ можно принять, что $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{e^x}{2}$ с точностью до 0,1.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x; \quad e^{xi} = \sin x + i \cos x.$$

3. Обратные величины, квадратные и кубические корни, логарифмы, показательная функция

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[x]{x}$	$\sqrt[10]{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[10]{x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
1,0	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	000	0,000	2,72	1,0	
1,1	0,909	05	32	03	22	79	041	095	3,00	1,1	
1,2	0,833	10	46	06	29	93	079	192	3,32	1,2	
1,3	0,769	14	61	09	35	5,07	114	252	3,67	1,3	
1,4	0,714	18	74	12	41	19	146	336	4,06	1,4	
1,5	0,667	1,23	3,87	1,15	2,47	5,13	176	0,405	4,48	1,5	
1,6	0,625	27	4,00	17	52	43	204	470	4,95	1,6	
1,7	0,588	30	12	19	57	54	230	530	5,47	1,7	
1,8	0,556	34	24	22	62	65	255	588	6,05	1,8	
1,9	0,526	38	36	24	67	75	279	642	6,69	1,9	
2,0	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	301	0,693	7,39	2,0	
2,1	0,476	45	58	28	76	94	322	742	8,17	2,1	
2,2	0,455	48	69	30	80	6,03	342	789	9,03	2,2	
2,3	0,435	52	80	32	84	13	362	833	9,97	2,3	
2,4	0,417	55	90	34	88	21	380	875	11,0	2,4	

Продолжение

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[x]{x}$	$\sqrt[10]{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[8]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
2,5	0,400	1,58	5,00	1,36	2,92	6,30	398	0,916	12,2	2,5
2,6	385	61	10	38	96	38	415	0,955	13,5	2,6
2,7	370	64	20	39	3,00	46	431	0,993	14,9	2,7
2,8	357	67	29	41	04	54	447	1,030	16,4	2,8
2,9	345	70	39	43	07	62	462	0,065	18,2	2,9
3,0	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	477	1,099	20,1	3,0
3,1	323	76	57	46	14	77	491	131	22,2	3,1
3,2	313	79	66	47	18	84	505	163	24,5	3,2
3,3	303	81	75	49	21	91	519	194	27,1	3,3
3,4	294	84	83	50	24	98	532	224	30,0	3,4
3,5	0,286	1,87	5,92	1,52	3,27	7,05	544	1,253	33,1	3,5
3,6	278	90	6,00	53	30	11	556	281	36,6	3,6
3,7	270	92	08	55	33	18	568	308	40,4	3,7
3,8	263	95	16	56	36	24	580	335	44,7	3,8
3,9	256	98	25	57	39	31	591	361	49,4	3,9
4,0	0,250	2,00	6,33	1,59	3,42	7,37	602	1,386	54,6	4,0
4,1	244	03	40	60	45	43	613	411	60,3	4,1
4,2	238	05	48	61	48	49	623	435	66,7	4,2
4,3	233	07	56	63	50	55	634	458	73,7	4,3
4,4	227	10	63	64	53	61	644	482	81,5	4,4
4,5	0,222	2,12	6,71	1,65	3,56	7,66	653	1,504	90,0	4,5
4,6	217	15	78	66	58	72	663	526	99,5	4,6
4,7	213	17	86	68	61	78	672	548	110	4,7
4,8	208	19	93	69	63	83	681	569	121	4,8
4,9	204	21	7,00	70	66	88	690	589	134	4,9
5,0	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	699	1,609	148	5,0
5,1	196	26	14	72	71	99	708	629	164	5,1
5,2	192	28	21	73	73	8,04	716	649	181	5,2
5,3	189	30	28	74	76	09	724	668	200	5,3
5,4	185	32	35	75	78	14	732	686	221	5,4
5,5	0,182	2,35	7,42	1,77	3,80	8,19	740	1,705	244	5,5
5,6	179	37	48	78	83	24	748	723	270	5,6
5,7	175	39	55	79	85	29	756	740	299	5,7
5,8	172	41	62	80	87	34	763	758	330	5,8
5,9	170	43	68	81	89	39	771	775	365	5,9
6,0	0,167	2,45	7,75	1,82	3,92	8,43	778	1,792	403	6,0
6,1	164	47	81	83	94	48	785	808	446	6,1
6,2	161	49	87	84	96	53	792	825	493	6,2
6,3	159	51	94	85	98	57	799	841	545	6,3
6,4	156	53	8,00	86	4,00	62	806	856	602	6,4
6,5	0,154	2,55	8,06	1,87	4,02	8,66	813	1,872	665	6,5
6,6	152	57	12	88	04	71	820	887	735	6,6
6,7	149	59	19	89	06	75	826	902	812	6,7
6,8	147	61	25	90	08	79	833	918	898	6,8
6,9	145	63	31	90	10	84	839	932	992	6,9
7,0	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	845	1,946	1097	7,0
7,1	141	67	43	92	14	92	851	960	1212	7,1
7,2	139	68	49	93	16	96	857	974	1339	7,2
7,3	137	70	54	94	18	9,00	863	982	1480	7,3
7,4	135	72	60	95	20	05	869	2,001	1636	7,4

Продолжение

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[10]{x}$	$\sqrt[5]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
7,5	0,133	2,74	8,66	1,96	4,22	9,09	875	2,015	1808	7,5
7,6	132	76	72	97	24	13	881	028	1998	7,6
7,7	130	78	78	98	25	17	887	041	2208	7,7
7,8	128	79	83	98	27	21	892	054	2440	7,8
7,9	127	81	89	99	29	24	898	067	2697	7,9
8,0	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	903	2,079	2981	8,0
8,1	124	85	9,00	01	33	32	909	092	3294	8,1
8,2	122	86	06	02	34	36	914	104	3641	8,2
8,3	121	88	11	03	36	40	919	116	4024	8,3
8,4	119	90	17	03	38	44	924	128	4447	8,4
8,5	0,118	2,92	9,22	2,04	4,40	9,47	929	2,140	4914	8,5
8,6	116	93	27	05	41	51	935	152	5432	8,6
8,7	115	95	83	06	43	55	940	163	6003	8,7
8,8	114	97	88	07	45	58	945	175	6634	8,8
8,9	112	98	43	07	47	62	949	186	7332	8,9
9,0	0,111	8,00	9,49	2,08	4,48	9,66	954	2,197	8103	9,0
9,1	110	02	54	09	50	69	959	208	8955	9,1
9,2	109	03	59	10	51	73	964	219	8987	9,2
9,3	108	05	64	10	53	76	969	230	10938	9,3
9,4	106	07	88	11	55	80	973	241	12088	9,4
9,5	0,105	3,08	9,75	2,12	4,56	9,83	978	2,251	13360	9,5
9,6	104	10	80	13	58	87	982	263	14765	9,6
9,7	103	11	84	13	60	90	987	272	16318	9,7
9,8	102	13	90	14	61	93	991	282	18034	9,8
9,9	101	15	95	15	63	97	996	293	19930	9,9
10,0	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	000	2,303	22026	10,0

В графе $\lg x$ даны мантиссы десятичных логарифмов.

Для нахождения натуральных логарифмов чисел, больших 10 или меньших 1, нужно пользоваться формулой

$$\ln(x \cdot 10^k) = \ln x + k \ln 10.$$

Заметим, что

$$\ln 10 = 2,303; \quad \ln 10^2 = 4,605;$$

$$\ln x = 0,4343 \ln x; \quad \ln x = 2,303 \ln x.$$

Формулы для приближенного извлечения корней:

$$1) \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} + \frac{1-n}{2n^2} x^2 \quad \text{при } |x| < 1.$$

$$2) \sqrt[n]{a^n+b} \approx a \left(1 + \frac{b}{na^n} + \frac{1-n}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{a^{2n}} \right) \quad \text{при } \left| \frac{b}{a^n} \right| < 1.$$

Манорский Василий Павлович.
Сборник задач по высшей математике.

Редактор А. Т. Цветков.

Техн. редактор Н. Я. Мурашова.

Корректор И. С. Варшавская.

Печать с матриц.

*Подписано к печати 14/VIII 1961 г.
Бумага 84 × 108¹/₃₂. Физ. печ. л. 11,25.
Условн. печ. л. 18,45. Уч.-изд. л. 16,95.
Тираж 75 000 экз. Цена книги 61 коп.
Заказ № 2160.*

*Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.*

*Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.*

Цена 61 коп.

В.П. Минорский СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ