Лекция 7

Численные методы поиска условного экстремума

МЕТОД ШТРАФОВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,\ldots,p$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1,\ldots,m; \quad m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1,\ldots,p \end{array} \right\}.$

Стратегия поиска

Идея метода заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска безусловного минимума *вспомогательной функции*:

$$F\left(x,r^k\right)=f(x)+P\left(x,r^k\right)\to\min_{x\in R^n},$$

где $P\left(x,r^k\right)$ – *штрафная функция*, r^k – параметр штрафа, задаваемый на каждой k-й итерации.

Штрафные функции конструируются, исходя из условий:

$$P\left(x,r^k\right)=\begin{cases}0, & \text{при выполнении ограничений,}\\ >0, & \text{при невыполнении ограничений,}\end{cases}$$

причем при невыполнении ограничений и $r^k\to\infty$, $k\to\infty$ справедливо $P(x,r^k)\to\infty$.

Как правило, для ограничений типа равенств используется квадратичный штраф, а для ограничений типа неравенств – квадрат срезки:

$$P\left(x, r^k\right) = \frac{r^k}{2}\left\{ \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p} [g_j^+(x)]^2 \right\},$$

где $g_j^+(x)$ – *срезка функции*:

$$g_j^+(x) = \max\{\ 0, g_j(x)\ \} = \begin{cases} g_j(x), & g_j(x) > 0, \\ 0, & g_j(x) \le 0. \end{cases}$$

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальную точку x^0, начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$, число $C > 1$ для увеличения параметра, малое число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

Шаг 2. Составить вспомогательную функцию

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{r^k}{2}\left\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(x)]^2\right\}.$$

Шаг 3. Найти точку $x^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F\left(x, r^k\right)$ по x с помощью какого-либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

$$F\left(x^*(r^k), r^k\right) = \min_{x \in R^n} F\left(x, r^k\right).$$

При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять x^k. Вычислить $P\left(x^*(r^k), r^k\right)$.

Шаг 4. Проверить условие окончания:

а) если $P\left(x^*(r^k), r^k\right) \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*(r^k), \qquad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right);$$

б)если $P\left(x^*(r^k), r^k\right) > \varepsilon$, положить: $r^{k+1} = C r^k$, $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

МЕТОД БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений-неравенств $g_j(x) \le 0, \quad j = 1,\ldots,m,$ определяющие множество допустимых решений X.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \mid g_j(x) \le 0, \ j = 1,\ldots,m \right\}.$

Стратегия поиска

Идея метода заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска безусловного минимума *вспомогательной функции* $F\left(x, r^k\right) = f(x) + P\left(x, r^k\right)$, где $P\left(x, r^k\right)$ – штрафная функция, $r^k \geq 0$ – параметр штрафа.

Как правило, используются:

а) *обратная штрафная функция* $P\left(x, r^k\right) = -\, r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)}$;

б) *логарифмическая штрафная функция* $P\left(x, r^k\right) = -r^k \sum_{j=1}^{m} \ln\left[-g_j(x)\right]$

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальную точку x^0 внутри области X, начальное значение параметра штрафа $r^k \geq 0$, число $C > 1$ для уменьшения параметра штрафа, малое число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

Шаг 2. Составить вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) - r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)} \quad \text{или} \quad F\left(x, r^k\right) = f(x) - r^k \sum_{j=1}^{m} \ln\left[-g_j(x)\right].$$

Шаг 3. Найти точку $x^*(r^k)$ минимума функции $F\left(x, r^k\right)$ с помощью какого-либо метода (нулевого, первого или второго порядка) поиска безусловного минимума с проверкой принадлежности текущей точки внутренности множества *X*. При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять x^k. Вычислить:

$$P\left(x^*(r^k), r^k\right) = -\,r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j\left(x^*(r^k)\right)} \quad \text{или} \quad P\left(x^*(r^k), r^k\right) = -r^k \sum_{j=1}^{m} \ln\left[-g_j\left(x^*(r^k)\right)\right].$$

Шаг 4. Проверить выполнение условия окончания:

а) если $\left|P\left(x^*(r^k), r^k\right)\right| \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*(r^k), \qquad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right);$$

б) если $\left|P\left(x^*(r^k), r^k\right)\right| > \varepsilon$, положить $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$; $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1,\dots,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,\dots,p$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1,\dots,m; \quad m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1,\dots,p \end{array} \right\}.$

Стратегия поиска

Для ограничений типа равенств применяется метод штрафов (внешних штрафов), а для ограничений-неравенств – метод барьерных функций (внутренних штрафов).

Задача на условный минимум сводится к решению последовательности задач поиска минимума *смешанной вспомогательной функции*:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k}\sum_{j=1}^{m}[g_j(x)]^2 - r^k\sum_{j=m+1}^{p}\frac{1}{g_j(x)}$$

или

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k}\sum_{j=1}^{m}[g_j(x)]^2 - r^k\sum_{j=m+1}^{p}\ln[-g_j(x)],$$

где $r^k \geq 0$ – параметр штрафа.

Начальная точка задается так, чтобы ограничения-неравенства строго выполнялись: $g_j(x) < 0, \quad j = m+1,\ldots,p$. На каждой k-й итерации ищется точка $x^*(r^k)$ минимума смешанной вспомогательной функции при заданном параметре r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации. Полученная точка $x^*(r^k)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при уменьшающемся значении параметра штрафа. При $r^k \to +0$ последовательность точек $x^*(r^k)$ стремится к точке условного минимума x^*.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальную точку x^0 так, чтобы $g_j(x) < 0,\ j = m+1, \ldots, p$; начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$; число $C > 1$ для уменьшения параметра штрафа; малое число ε для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

Шаг 2. Составить смешанную вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \frac{1}{g_j(x)} = f\left(x\right) + P\left(x, r^k\right)$$

или

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \ln[-g_j(x)] = f\left(x\right) + P\left(x, r^k\right).$$

Шаг 3. Найти точку $x^*(r^k)$ минимума функции $F\left(x, r^k\right)$ с помощью какого-либо метода поиска безусловного минимума с проверкой выполнения справедливости неравенств: $g_j(x) < 0,\ j = m+1, \ldots, p$. При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять x^k.

Шаг 4. Вычислить $P\left(x^*(r^k), r^k\right)$ и проверить условие окончания:

а) если $\left| P\left(x^*(r^k), r^k\right) \right| \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*(r^k), \quad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right);$$

б) если $\left| P\left(x^*(r^k), r^k\right) \right| > \varepsilon$, то положить $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}, \quad x^{k+1} = x^*(r^k), \quad k = k+1$ и перейти к шагу 2.