ЛЕКЦИЯ 12.
МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ.

§1. Двузначность квадратного корня

До сих пор мы исследовали однозначные аналитические функции, практически не сталкиваясь с многозначными функциями. Многозначные функции имеют свою специфику, резко отличающие их от однозначных функций.

Одна из причин появления многозначных функций – представление неопределенных интегралов виде явных функций комплексной переменной. Примеры:

$$\int\frac{dz}{z}=\mathrm{Ln}(z)+C\,,\qquad \int\frac{dz}{1+z^2}=\mathrm{Arctg}(z)+\mathrm{C},\qquad \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\mathrm{Arcsin}(z)+\mathrm{C}$$

Здесь $\mathrm{Ln}(z)$, $\mathrm{Arctg}(z)$, $\mathrm{Arcsin}(z)$ – многозначные функции.

Для начала рассмотрим поведение многозначных функций на примере квадратного корня $w=\sqrt{z}$. Квадратный корень является обратной функцией по отношению к степенной функций $z=w^2$. Поэтому исследование начнем с описания однозначной функции

$$z=w^2\,, \tag{1}$$

для которой обратная функция является квадратным корнем из z.

Рассмотрим область $\operatorname{Im}w>0$. В этой области переменная $w=|w|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ меняется в верхней полуплоскости (над вещественной осью) так, что аргумент $\varphi=\arg w$ меняется в пределах от нуля до π (рис. 1, левый рисунок). При возведении в квадрат модуль $|w|$ будет возводится в квадрат, а аргумент $\arg w$увеличится в два раза:

$$z=|w|^2\left(\cos2\varphi+i\sin2\varphi\right)$$

Следовательно, значения $z=w^2$ заполнят уже всю плоскость, причем, как положительная, так и отрицательная части вещественной оси плоскости w перейдут на плоскости z в положительную часть вещественной оси. Мы видим, что в результате преобразования (1) верхняя часть плоскости w перейдет ***во всю плоскость z с разрезом, проведенным вдоль положительной части оси от 0 до*** $+\infty$ (рис. 1, правый рисунок). Обозначим плоскость с таким разрезом как T_1. Из этих рассуждений следует, что в области T_1 изменения z обратная функция

$$w=\sqrt{z}\,, \tag{2}$$

является однозначной, когда $\operatorname{Im}w>0$ Действительно, функция (2) имеет два значения при фиксированном $z=\rho(cos\theta+isin\theta), 0<\theta<2\pi$ $(z\in T_1)$, а именно, $w_1=\sqrt{\rho}\left(cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+isin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$, $w_2=\sqrt{\rho}\left(cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+isin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right)=-w_1$. Один из этих корней принадлежит области $\operatorname{Im}w>0$, другой – области $\operatorname{Im}w<0$, поэтому область $\operatorname{Im}w>0$ содержит одно значение функции (2).

Вещественные значения z будут находится как на верхнем берегу разрыва, так и на нижнем. На верхнем берегу функция $\sqrt{z}$ принимает вещественные положительные значения, на нижнем – вещественные отрицательные, так как верхний берег разреза отображается в луч $u>0$, нижний – в $u<0$.

Итак, функция (2) будет *взаимно-однозначной в области T_1 со значениями в области* $\operatorname{Im}w>0$.

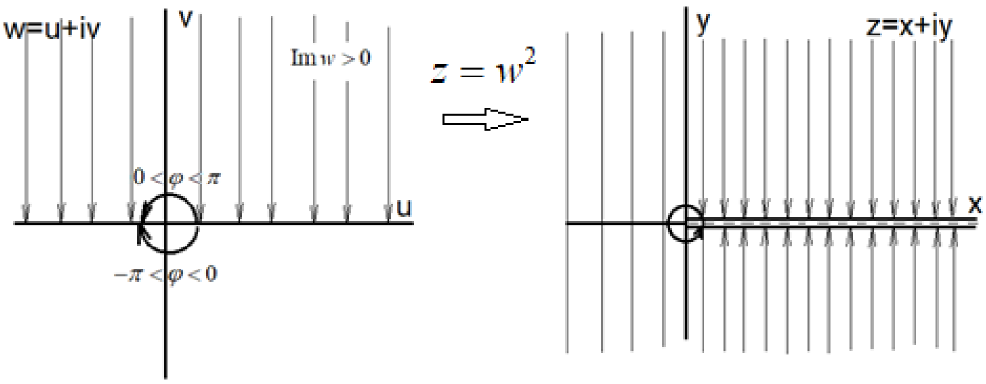

Рис. 1 Отображение $z = w^2$ в области $\operatorname{Im} w > 0$

Будем теперь считать, что w меняется в нижней полуплоскости: $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im}\sqrt{z} < 0$. Для функции $z = w^2$ получим, аналогично описанному выше, второй экземпляр той же самой области T_1, при этом мы берем то значение радикала, которое удовлетворяет условию $\operatorname{Im}\sqrt{z} < 0$. Обозначим этот экземпляр области T_1 через T_2. Отличие T_2 от T_1 состоит только в том, что верхние и нижние берега разреза в T_1 и T_2 меняются местами. Такой «change» вызван изменением области значений аргумента φ: $0<\varphi<\pi$ меняется на $-\pi<\varphi<0$.

Таким образом, проводя разрез в плоскости переменной z от нуля до $+\infty$, мы имеем область определения, где функция (2) (квадратный корень) однозначна. Но, чтобы описать все значения этой функции, следует рассматривать *две различные функции*, определенные в областях T_1 и T_2 со значениями в $\operatorname{Im} w > 0$ и $\operatorname{Im} w < 0$ соответственно:

$$\left(\sqrt{z}\right)_1 : T_1 \to \{w : \operatorname{Im}(w) > 0\},\ \left(\sqrt{z}\right)_2 : T_2 \to \{w : \operatorname{Im}(w) < 0\}$$

Эти *функции называют ветвями квадратного корня* $w = \sqrt{z}$. Ветви являются взаимно-однозначными функциями. Каждая ветвь задается своей областью определения и своей областью значений.

Рассмотрим производную функции $w = \sqrt{z}$:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Она обращается в бесконечность при $z = 0$ и равна нулю $z = \infty$.

Выясним особую роль этих точек. Если на плоскости переменной z из какой-либо точки $z_0 \neq 0$ опишем простой замкнутый контур вокруг $z = 0$ так, что аргумент комплексного числа z при возвращении в исходную точку z_0 получим приращение 2π, а аргумент числа $\sqrt{z}$ получит приращение π, то мы придем в z_0 уже с другим знаком $\sqrt{z_0}$. Действительно, для точки z_0 можем записать тригонометрическое представление $z_0 = |z_0|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$, тогда $\sqrt{z_0} = |z_0|^{1/2}\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + i\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$. После возвращения в эту точку при обходе простого замкнутого контура, получим

$$\sqrt{z_0} = |z_0|^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{2}\right)\right) = -|z_0|^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

Точку $z = 0$ называют точкой ветвления функции.

Совершенно аналогично, точка $z = \infty$ будет также точкой ветвления функции $\sqrt{z}$. Для этого достаточно взять замкнутый контур L, содержащий точку $z = 0$ внутри, а $z = \infty$

– вне L. Тогда обход вдоль контура L есть обход вокруг $z=\infty$ в расширенной плоскости с приращением аргумента у функции $\sqrt{z}$ на π.

§2. Многозначность логарифмической функции.

Логарифмическая функция имеет вид $w=\mathrm{Ln}\,z$, где

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi),\ z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Здесь $\varphi=\arg z,\quad \varphi+2k\pi=\mathrm{Arg}\,z,\ 0\le\varphi<2\pi$.

Наша цель – описать поведение функции $\mathrm{Ln}\,z$ в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Функция $\mathrm{Ln}\,z$ многозначна (точнее говоря, бесконечнозначна), поэтому описание этой функции требует определенных усилий. Для начала мы вспомним как ведет себя функция $w=e^z$, где $z=x+iy,\ w=u+iv$.

Полоса $\varphi_0<y<\varphi_0+h,\ 0\le h<2\pi$ ширины h отображается на угловой сектор с углом раствора h в плоскости переменной w. В этой полосе имеем взаимно-однозначное соответствие между точками z полосы и точками w сектора, так как в рассматриваемой полосе G обратное отображение $\mathrm{Ln}\,w$ будет однозначным (рис. 2)

Если $\varphi_0=0$, а h бесконечно близко к 2π, то имеем полосу $0\le y<2\pi$ (полоса G), которая отображается взаимно-однозначно на всю плоскость переменной $w=u+iv$ с вырезом вдоль положительной части оси u (рис. 3)

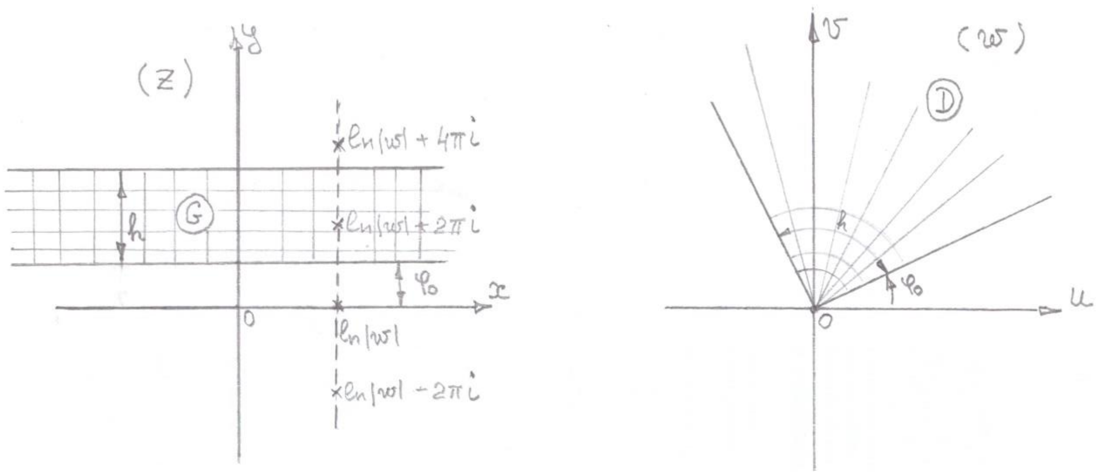

Рис. 2 Отображение полосы G в угловой сектор D

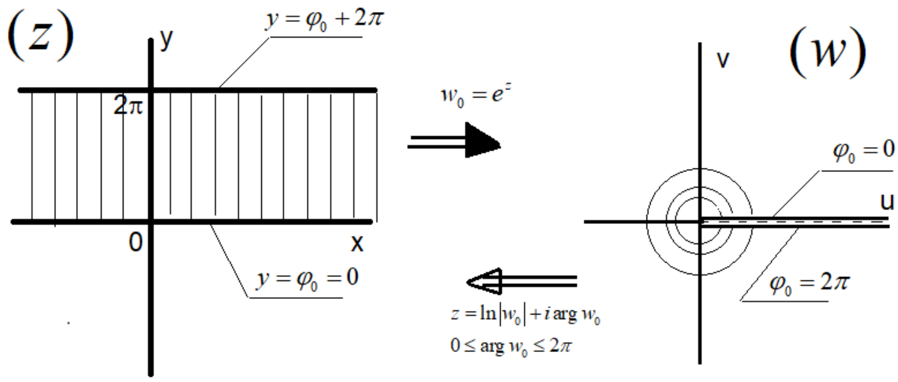

Рис. 3 Отображение полосы $0\le y<2\pi$ в комплексную плоскость $\mathbf{C}$ с вырезом вдоль луча $u>0$

Действительно, нижняя граница $y=0$ полосы G отображается в луч $u>0$, являющийся «верхним берегом» разреза, а верхняя граница $y=2\pi$ области G отображается в «нижний берег» разреза. Угловой сектор D (см. рис. 2) имеет угол раствора 2π и совпадает со всей комплексной плоскостью, за исключением «нижнего берега» разреза, так как верхняя граница $y = 2\pi$ полосы G не принадлежит самой полосе. Всюду ниже, разрез вдоль луча $u > 0$ будет означать, что вы удерживаете «верхний берег» разреза и отбрасываете «нижний берег» разреза. Это значит, что в комплексной области переменной w с разрезом вдоль луча $u > 0$ угол $\varphi = \arg w$ меняется в следующих пределах: $0 \le \arg w < 2\pi$.

Теперь переходим к изучению логарифмической функции $w = \mathrm{Ln}\, z$, обратной по отношению к экспоненциальной функции. В сравнении с проведенными только что исследованиями, когда под w подразумевалась экспоненциальная функция e^z, а под z -- ее аргумент, теперь обозначения функции и ее аргумента меняются: под w мы подразумеваем значение логарифма (ранее это было z), а под z подразумеваем аргумент логарифма (ранее w). Итак, w и z *меняются местами*.

С учетом сделанных замечаний, функция $w = \ln|z| + i\arg z,\ 0 \le \arg z < 2\pi$ отображает плоскость z, разрезанную по положительной части действительной оси, в полосу G вида $0 \le v < 2\pi$; функция $w = \ln|z| + i\arg z,\ 2\pi \le \arg z < 4\pi$ отображает плоскость z, разрезанную по положительной части действительной оси, в полосу $2\pi \le v < 4\pi$ и так далее.

В общем случае, бесконечнозначная функция $w = \mathrm{Ln}\, z$ предстоит в виде набора *однозначных* функций (точнее говоря – взаимно-однозначных), называемых *ветвями*

$$w_k = \ln|z| + i\arg z,\ 2k\pi \le \arg z < 2(k+1)\pi,\quad k = 0, \pm1, \pm2...$$

и отображающих плоскость z, разрезанную по положительной части действительной оси x, в плоскость w, состоящую из полос вида (рис. 4)

$$2k\pi \le v < 2(k+1)\pi,\ u - \text{любое вещественное число}$$

Отметим, что ветвь логарифма $w_0 = \ln|z| + i\arg z,\ 0 \le \arg z < 2\pi$ принято обозначать как $\ln z$ и называть *главной ветвью логарифма*.

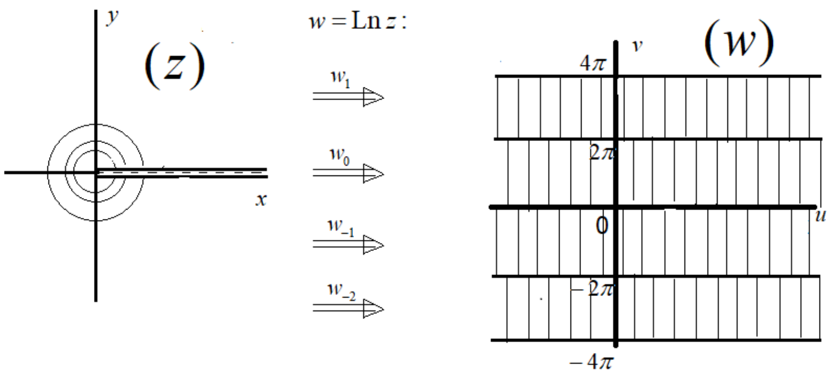

Рис.4 Представление бесконечнозначной функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ в виде бесконечной последовательности взаимно-однозначных ветвей.

Рассмотрим производную логарифмической функции:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$$

Точка $z = 0$ является точкой ветвления логарифма. Действительно, совершая обход точки $z = 0$ по замкнутому контуру, мы даем приращение аргументу z на 2π, как следствие, попадаем на новую полосу в плоскости переменной w, т.е. добавляем к функции $w = \ln z$ слагаемое $2\pi i$. И всякий новый обход этой точки будет давать нам новые значения функции, увеличенные на $2\pi i$. К примеру, n обходов точки $z = 0$ дает приращение функции на $2n\pi i$. Точка $z = 0$ называется ***точкой ветвления бесконечного порядка.***

Обратим внимание на бесконечно удаленную точку $z = \infty$. Для функции $w = e^z$ она является существенно особой, а для $w = \mathrm{Ln}\, z$ -- точкой ветвления бесконечного порядка. Отметим также, что любая точка ветвления, принадлежащая конечной комплексной плоскости, является особой точкой многозначной функции $f(z)$, поэтому производная от $f(z)$ в точке ветвления должна обращаться в бесконечность, либо не существовать вовсе.

Итак, алгоритм исследования многозначных функций состоит в следующем.

1. Находите точку ветвления функции
2. Делаете разрез в плоскости комплексной переменной вдоль луча, проходящего через точку ветвления. Этот разрез запрещает обходить точку ветвления по замкнутому контуру
3. Плоскость с разрезом рассматриваете как область задания однозначности функции (ветви функции)
4. Исследуете всевозможные области значений ветви функции. Как следствие, описываете все множество ветвей, каждая из которых характеризуются своей областью задания и своей областью значений.