ЛЕКЦИЯ 9
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

На прошлой лекции мы ввели понятие изолированных особых точек аналитической однозначной функции $f(z)$ как точек нарушения аналитичности функции. Изолированность особой точки означает отсутствие других особых точек в малой ее окрестности. Была дана классификация особых точек по виду поведения ряда Лорана в окрестности особой точки: существуют устранимые особые точки, полюса и существенно особые точки.

Далее, мы рассмотрели очень важное в комплексном анализе понятие вычета функции $f(z)$ в особой точке z_0. Напомню, что вычетом функции $f(z)$ в особой точке z_0 мы называем коэффициент c_{-1} при члене $(z-z_0)^{-1}$ в ряду Лорана разложения функции $f(z)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \cdots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{\boxed{c_{-1}}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

Имеем явное аналитическое выражение для этого коэффициента:

$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz} \qquad (1)$$

Здесь C -- замкнутый контур, окружающий особую точку (например, окружность с центром в особой точке). Для особой точке типа полюс, формула для c_{-1} такова:

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

Формулу (1) можно «обратить», рассматривая ее как формулу, с помощью которой можно вычислить контурный интеграл от функции $f(z)$:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot c_{-1}$$

Пример. Подсчитать контурный интеграл

$$\oint_C \frac{dz}{(1+z^2)^2},\ C = \left\{z : |z-i| = R < 2\right\}$$

Имеем:

$$\oint_C \frac{dz}{(1+z^2)^2} = res\left[\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right]2\pi i$$

Особые точки этой функции $z_0 = \pm i$ есть полюса второго порядка. Подсчитаем вычет $res[f(z), i]$.

Имеем $m = 2$. Тогда

$$res[f(z), i] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{1}{(1+z^2)^2}\right] = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right] = \frac{-2}{(i+i)^3} = -\frac{i}{4}$$

Отсюда

$$\oint_C \frac{dz}{(1+z^2)^2} = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Пусть z_0 есть *существенно особая изолированная точка*. Здесь нет простых формул для вычисления вычета, поэтому его надо искать с помощью разложения функции в ряд Лорана.

Пример. Найти вычет функции $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z^2}$ в ее особой точке $z_0 = 0$.

Получим лорановское разложение этой функции в нуле. Рассмотрим ряд

$$\sin\zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} - \cdots,$$

сходящийся при любых ζ, принадлежащих комплексной плоскости (радиус сходимости ряда бесконечен). Тогда вместо ζ можно подставить $\zeta = \frac{1}{z^2}$, $z \neq 0$. Имеем

$$f(z) = z^3\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \cdots\right) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} - \cdots$$

Ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями, поэтому $z_0 = 0$ -- существенно особая точка. Здесь $c_{-1} = 0$, так как этот ряд не содержит члена z^{-1}.

§1. Основная теорема теории вычетов

Для многих теоретических исследований и практических применений весьма полезной является следующая теорема.

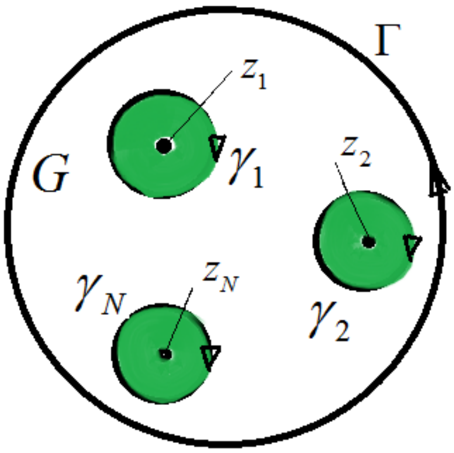

Рис.1

Теорема (основная теорема теории вычетов) ***Пусть*** $f(z)$ ***-- однозначная аналитическая функция, имеющая изолированные особые точки*** z_k $(k = 1,\ldots,N)$ **в** ***комплексной плоскости*** $\mathbf{C}$. ***Тогда*** интеграл ***от*** $f(z)$ ***вдоль замкнутой простой кривой Г, содержащей внутри себя особые точки*** z_k, ***равен произведению суммы вычетов функции*** $f(z)$ ***относительно всех особых точек*** z_k, ***на*** $2\pi i$, ***т.е.***

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k]$$

Доказательство. В многосвязной области G, ограниченной контуром Г и контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$, проходимыми в положительном направлении (см. рис. 1), функция $f(z)$ является всюду аналитической. По теореме о составном контуре, имеем

$$\oint_\Gamma f(z)dz + \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_N} f(z)dz = 0$$

или

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_{\gamma_1^-} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_N^-} f(z)dz$$

Здесь контур γ_k^- проходится в направлении, противоположном направлению обхода контура γ_k. Поэтому все контура $\Gamma, \gamma_1^-, \ldots, \gamma_N^-$ обходятся против часовой стрелке. Имеем

$$\boxed{\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k]}$$

Теорема доказана.

Большое практическое значение этой формулы заключается в том, что во многих случаях оказывается гораздо проще вычислить вычеты функции $f(z)$ в особых точках, лежащих внутри области интегрирования, чем непосредственно вычислять интеграл, стоящий в левой части.

§2. Вычет относительно бесконечно удаленной точки.

Рассмотрим вопрос о вычислении вычета однозначной и аналитической функции $f(z)$ в бесконечно удаленной особой точке $z_0 = \infty$. Для этого рассмотрим окрестность $|z| > R$ бесконечно удаленной точки (рис. 3).

Запишем ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$ (см. лекцию 8):

$$f(z) = \cdots + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \cdots \qquad (2)$$

Здесь сумма членов с положительными показателями степени образуют главную часть ряда Лорана, совокупность членов с отрицательными показателями – правильную часть.

Будем считать, без ограничения общности, что особой точкой в конечной части комплексной плоскости является точка $z_0^* = 0$. Тогда (2) является также рядом Лорана в окрестности точки $z_0^* = 0$. Вычет функции $f(z)$ относительно $z_0^* = 0$ есть коэффициент c_{-1}, который можно вычислить по формуле

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz \qquad (3)$$

Здесь замкнутая кривая C окружает особую точку $z_0^* = 0$ и обходится против хода стрелки часов («внутренность» кривой лежит слева).

На рис. 2 голубым цветом изображена окрестность бесконечно удаленной точки, т.е. $|z| > R$. Замкнутая жордановая кривая C^- является границей этой окрестности и обходится по ходу стрелки, оставляя внешность кривой слева (рис. 2)

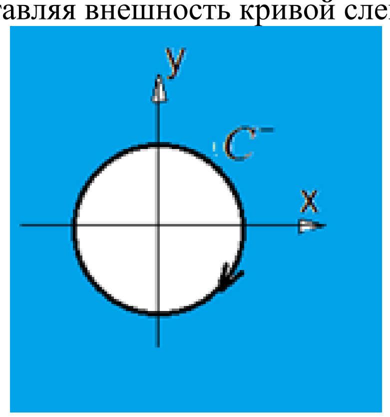

Рис. 2. Окрестности особой точки $z_0 = \infty$

Тогда, по аналогии с (3), будем считать вычетом относительно $z_0 = \infty$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)dz$$

Очевидно, что так определенный вычет есть $-c_{-1}$.

Итак, дадим определение вычета в виде, не зависящим от интегрального представления

Определение 1. ***Вычетом функции $f(z)$, относительно точки $z_0 = \infty$ будем называть взятый со знаком минус коэффициент при z^{-1} в лорановском разложении функции в окрестности $|z| > R$.***

Имеем, $res[f(z), \infty] = -c_{-1}$

Теорема (обобщенная теорема о вычетах). ***Пусть функция $f(z)$ является однозначной и аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k = 1, \ldots, N-1)$, включая и бесконечно удаленную точку $z_N = \infty$. Тогда***

$$\sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k] = 0$$

Отметим, что $z_1, \ldots, z_{N-1}$ – особые точки, принадлежащие конечной части плоскости.

Доказательство. Пусть радиус контура $C = \{z : |z| = R\}$ достаточно большой, так, что этот контур содержит внутри себя все $(N-1)$ особые точки. В силу доказанной выше теоремы имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{N-1} res[f(z), z_k]$$

Интеграл, стоящий слева, есть вычет в точке $z = \infty$, взятый со знаком минус:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = -res[f(z), z_N]$$

Тогда имеем

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k] = 0},$$

где $z_N = \infty$. *Теорема доказана.*

§3. Теорема Коши-Лиувилля. Понятия целой и мероморфной функций.

В лекции 8 мы познакомились с разложением аналитической функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $|z| > R$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$

$$a)\ f(z) = c_0 + c_{-1}z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \cdots + c_{-n}z^{-n} + \cdots$$

$$b)\ f(z) = c_k z^k + \cdots + c_1 z + c_0 + c_{-1}z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \cdots + c_{-n}z^{-n} + \cdots$$

$$c)\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Здесь предполагается, что R -- достаточно большое действительное число такое, что окрестность $|z| > R$ не содержит особых точек кроме, быть может, точки $z = \infty$.

Напомню, что в случае а) точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой, в случае б) – полюсом порядка k, в случае с) – существенно особой точкой.

В случае а) функция $f(z)$ имеет представление в виде ряда Тейлора по степеням z^{-1} ($|z^{-1}|$ мало, так как $|z|$ большое).

Определение 2. ***Функцию $f(z)$ будем называть аналитической в точке $z_0 = \infty$, если её разложение в ряд Лорана в окрестности $z_0 = \infty$ не содержит положительных степеней z:***

$$f(z) = c_0 + c_{-1}z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \cdots + c_{-n}z^{-n} + \cdots$$

В этом случае имеем $f(\infty)=\lim_{z\to\infty} f(z)=c_0$. В силу непрерывности $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности $|z|>R$.

Теперь предположим, что $f(z)$ аналитична также в оставшейся части комплексной плоскости, т.е. в круге $|z|\le R$. В силу непрерывности $f(z)$ в замкнутом круге, она ограничена в этом круге, поэтому $f(z)$ будет ограничена в полной комплексной области: $|f(z)|\le M$, $M=\text{const}$!

Оказывается, что в этом случае $f(z)=\text{const}$! Справедлива теорема

Теорема Коши-Лиувилля. ***Если функция*** $f(z)$ ***аналитична в полной комплексной плоскости, то она постоянна, т.е.*** $f(z)=\text{const}$

Напомним, что аналитичность в области означает аналитичность в каждой точке этой области. Теорема замечательна своим следствием.

Следствие. ***Аналитическая функция*** $f(z)$***, отличная от константы, имеет в полной комплексной плоскости хотя бы одну особую точку.***

Доказательство теоремы. Для того, чтобы доказать теорему, следует убедиться в том, что условия теоремы гарантируют выполнение равенства $f'(z)=0$ в каждой точке полной комплексной плоскости. Для этого вспомним выражение для производной от функции в точке z :

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \;\Rightarrow\; f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{2}}d\zeta$$

Здесь C -- простой замкнутый контур, окружающий точку z, проходимый против хода стрелки часов.

Итак, фиксируем произвольную точку z в комплексной плоскости. Считаем, что C – окружность радиуса ρ с центром в z, причем радиус окружности можем выбирать сколь угодно большим. Действительно, $f(z)$ аналитична (по предположению) во всей полной комплексной области, поэтому подынтегральная функция $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$ имеет единственную особую точку, совпадающую с фиксированной точкой z. За пределами малой окрестности z других особых точек у подынтегральной функции нет, поэтому применима теорема о контурном интеграле: интегралы от функции $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$ вдоль разных окружностей с центром в z совпадают.

Тогда, учитывая неравенство $|f(z)|\le M$, которое, как мы показали выше, является следствием аналитичности $f(z)$ на всей плоскости, получим

$$|f'(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_C\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\right||d\zeta|\le\frac{M}{2\pi\rho^2}\cdot\oint_C|d\zeta|=\frac{M}{2\pi\rho^2}2\pi\rho=\frac{M}{\rho}$$

Поскольку $|f'(z)|$ не зависит от ρ, при этом дробь (M/ρ) можно сделать сколь угодно малой, приходим к выводу, что $f'(z)=0$ при любых z. Тогда $f(z)\equiv\text{const}$. *Теорема доказана*.

Простейший класс аналитических функций составляют однозначные функции, аналитические во всей комплексной плоскости, исключая удаленную точку $z=\infty$. Такие функции называют ***целыми***. Примеры целых функций:

$$S(z)\equiv a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,\ \sin z,\ \cos z,\ e^z$$

Для целых функций точка $z=\infty$ является особой. Для многочлена $S(z)$ точка $z=\infty$ является полюсом, так как $S(\infty)=\infty$, для $\sin z, \cos z, e^z$ -- существенно особая точка. Целая функция – обобщение многочлена.

Функцию $f(z)$ называют **мероморфной**, если в конечной комплексной плоскости она имеет представление в виде частного двух целых функций $g(z), h(z)$:

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$$

Целая функция $h(z)$ имеет нули, представляющие собой полюса функции $f(z)$. Можно показать, что других особых точек, отличных от полюсов, мероморфная функция не имеет.

Пример мероморфной функции – специальная гамма-функция $\Gamma(z)$ (функция Эйлера). Она задается функциональным равенством $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. Если $z=n$, где n – целое число, то $\Gamma(n+1)=n!$ Таким образом, функция Гаусса является обобщением факториала целых чисел на все комплексную плоскость. Особые точки этой функции – полюса первого порядка в точках $z=0,-1,-2,-3,\ldots$