МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФАКУЛЬТЕТ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА»

Учебно-методические комплексы кафедры «Математическая кибернетика»

В.Н. НЕФЕДОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНЫХ РАБОТ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ И СЕТЕЙ

Печатается по рекомендации Редакционного совета факультета «Прикладная математика и физика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Москва
Издательство «Доброе слово»
2015

ББК 517
УДК 512
Н 58

Нефедов В.Н. Методические указания к выполнению расчетных работ по теории графов и сетей: Учебное пособие. – М.: Издательство «Доброе слово», 2015. – 59 с.: ил.

ISBN 978-5-89796-528-5

Пособие предназначено для подготовки студентов к выполнению расчетных работ по следующим темам: связность, сильная связность, орграф конденсации; матричное задание графов, матрицы смежности, достижимости, связности; поиск маршрутов (путей) в графах (орграфах); деревья и циклы; внутренняя и внешняя устойчивость в графах, ядра графа; функции на вершинах орграфа, порядковая функция, функция Гранди; хроматическое число графа, задача об оптимальном раскрашивании вершин графа; цикломатическая матрица, электрические цепи, уравнения Кирхгофа; транспортные сети, поток в сети, максимальный поток. В каждой из тем приведены краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач, а также приводится решение типового варианта расчетной работы по этой теме. Пособие предназначено для студентов специальностей «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», а также для студентов других специальностей, изучающих курс «Дискретная математика».

Корректура: Яковлева С.Ю.

Издательство «Доброе слово»
www.dobroeslovo.info

Подписано в печать: 07.04.2015
П.л. 7,5. Формат 60х90/8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов специальностей «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», а также для студентов других специальностей, изучающих курс «Дискретная математика» и выполняющих расчетные работы по теории графов и сетей. В методических указаниях рассматриваются следующие темы: связность, сильная связность, орграф конденсации; матричное задание графов, матрицы смежности, достижимости, связности; поиск маршрутов (путей) в графах (орграфах); деревья и циклы; внутренняя и внешняя устойчивость в графах, ядра графа; функции на вершинах орграфа, порядковая функция, функция Гранди; хроматическое число графа, задача об оптимальном раскрашивании вершин графа; цикломатическая матрица, электрические цепи, уравнения Кирхгофа; транспортные сети, поток в сети, максимальный поток. В методических указаниях приведены краткие теоретические сведения по перечисленным темам, подробное изложение которых можно найти в учебном пособии [1]. Настоящее пособие дополняет учебное пособие [2], поскольку в нем рассматривается семь новых тем.

Тема 1. Элементы теории графов. Задача об оповещении

Под *графом* $G=(V,X)$ понимается пара, состоящая из конечного непустого множества $V=\{v_1,...,v_n\}$, элементы которого называются *вершинами* графа, и конечного множества пар вершин $X=\{x_1,...,x_m\}$. Если пары в X являются неупорядоченными, то граф G называется *неориентированным графом* (или просто *графом*). Если пары в X являются упорядоченными, то граф называется *ориентированным*, кратко *орграфом*.
Элементы множества X называются *ребрами*, если G – неориентированный граф, и *дугами*, если G – орграф. Ребра неориентированного графа обозначаются в виде двухэлементных множеств $\{v,w\}$, где $v,w\in V$. При этом $\{v,w\}=\{w,v\}$. Дуги орграфа обозначаются в виде упорядоченных пар вида (v,w) (или $<v,w>$), где $v,w\in V$. Иногда в множестве X допускается существование нескольких одинаковых пар. В этом случае граф называется *мультиграфом*. Иногда также допускаются пары с одинаковыми элементами, которые называются *петлями*. В последнем случае граф называется *псевдографом*. Одинаковые пары в X называются *кратными* (или *параллельными*). Количество одинаковых ребер (дуг) называется *кратностью* этого ребра (этой дуги). Все вводимые в этой теме понятия одинаково применимы к графам, мультиграфам, псевдографам. Поэтому чаще всего будем говорить просто о графах (ориентированных или неориентированных). Неориентированные графы будем обозначать буквой G или G с индексами (например, $G_0,G_1,...$), а ориентированные – буквой D или D с индексами (например, $D_0,D_1,...$). Кроме того, договоримся обозначать вершины буквами v,w,u (без индексов или с индексами), а ребра и дуги – буквами x,y,z (без индексов или с индексами). Для графа $G=(V,X)$ в случае $v\in V$ ($x\in X$) будем иногда кратко писать $v\in G$ ($x\in G$). Аналогично будем поступать и для орграфов. Графы принято изображать на плоскости в виде множества точек (маленьких кружков), соответствующих вершинам, и множества линий, соединяющих некоторые пары вершин, соответствующих ребрам. В случае орграфа на линиях, соответствующих дугам, рисуются стрелки, указывающие направления дуг (от первой вершины пары до второй). На рис. 1.1 приведено изображение неориентированного псевдографа, а на рис. 1.2 – ориентированного.

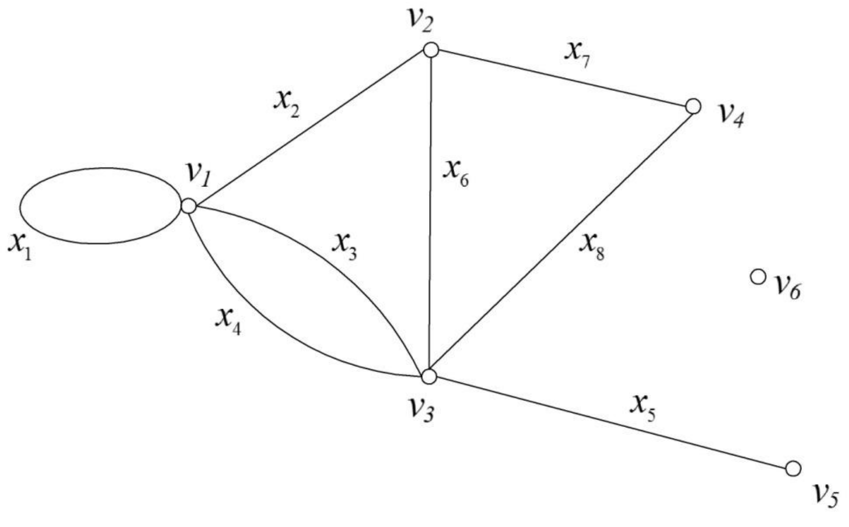


Рис. 1.1

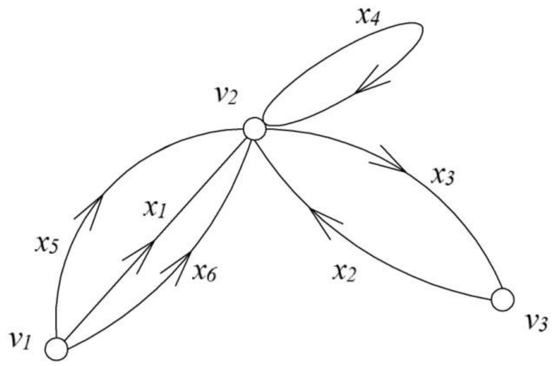
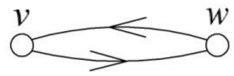


Рис. 1.2

Замечание 1.1. Для упрощения изображения графов вместо указания вершины около кружка, соответствующего ей, будем иногда указывать ее номер в центре этого кружка (см., например, рис. 1.8). Кроме того, будем вместо изображений вида



часто использовать изображение

.

Если $x = \{v, w\}$ – ребро неориентированного графа, то говорят, что (а) вершины v, w – *смежные*; (б) вершины v, w – *концы* ребра x; (в) ребро x *соединяет* вершины v, w; (г) ребро x *инцидентно* вершинам v, w; (д) вершины v, w *инцидентны* ребру x.

Если $x = (v, w)$ – дуга орграфа, то говорят, что (а) вершина v – *начало* дуги x, w – *конец* дуги x; (б) дуга x *исходит* из вершины v и *заходит* в вершину w; (в) дуга x *инцидентна* вершинам v, w; (г) вершины v, w *инцидентны* дуге x.

Степень вершины. *Степенью* вершины v графа G называется число $\delta(v)$ ребер графа G, инцидентных вершине v. Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а имеющая степень 1 – *висячей*. В случае псевдографа вклад петли $\{v, v\}$ в $\delta(v)$ равен 2.

Полустепенью исхода (*захода*) вершины v орграфа D называется число $\delta^+(v)$ ($\delta^-(v)$) дуг орграфа D, исходящих из вершины v (заходящих в вершину v). В случае ориентированного псевдографа вклад петли (v, v) в $\delta^+(v)$ и в $\delta^-(v)$ равен 1.

Пример 1.1.(а) Для графа, изображенного на рис. 1.1, $\delta(v_1) = 5$, $\delta(v_4) = 2$, $\delta(v_5) = 1$, $\delta(v_6) = 0$; (б) для орграфа, изображенного на рис. 1.2, $\delta^+(v_2) = 2$, $\delta^-(v_2) = 5$.

Будем количества вершин и ребер в графе G обозначать через $n(G), m(G)$ соответственно, а количества вершин и дуг в орграфе D – через $n(D), m(D)$ соответственно.

Утверждение 1.1. Для любого псевдографа $G = (V, X)$ выполняется равенство

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m(G). \qquad (1.1)$$

Доказательство. Равенство (1.1) является очевидным следствием того, что каждое ребро дает вклад, равный двум, в сумму из левой части равенства (1.1).

Приведем также соответствующее утверждение для орграфов.

Утверждение 1.2. Для любого ориентированного псевдографа $D = (V, X)$ выполняется

$$\sum_{v\in V}\delta^+(v)=\sum_{v\in V}\delta^-(v)=m(D). \qquad (1.2)$$

Маршруты, пути. Последовательность

$$v_1x_1v_2x_2...v_kx_kv_{k+1}, \qquad (1.3)$$

где $v_i \in V$, $x_i=\{v_i,v_{i+1}\}\in X$, называется *маршрутом*, соединяющим вершины v_1, v_{k+1} в графе $G=(V,X)$. Аналогично определяется путь в орграфе $D=(V,X)$. Последовательность (1.3), где $v_i \in V$, $x_i=(v_i,v_{i+1})\in X$, называется *путем* из v_1 в v_{k+1} в орграфе $D=(V,X)$. Вершина v_1 называется *начальной*, а v_{k+1} – *конечной* вершиной маршрута (пути), а остальные вершины – *внутренними*. *Длиной* маршрута (пути) называется количество ребер (дуг) в нем. Маршрут (путь) называется *замкнутым*, если его начальная вершина совпадает с конечной. Незамкнутый маршрут (путь), в котором ребра (дуги) попарно различны, называется *цепью*. Цепь, в которой все вершины попарно различны, называется *простой*. Замкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется *циклом* (*контуром*). Цикл (контур), в котором все вершины попарно различны, называется *простым*. Если ребро (дуга) x входит в некоторый маршрут (путь) η, то будем кратко писать $x\in\eta$.

Замечание 1.2. Последовательность (1.3) можно однозначно восстановить по последовательности $x_1x_2...x_k$, а следовательно, ее можно использовать как сокращенную форму записи маршрута или пути. Отметим далее, что в случае, когда в последовательности (1.3) $x_1,...,x_k$ имеют кратности, равные 1, ее можно однозначно восстановить по последовательности вершин $v_1v_2...v_{k+1}$, а следовательно, вместо (1.3) можно использовать и эту сокращенную форму записи маршрута или пути.

Говорят, что вершина w орграфа D (графа G) *достижима* из вершины v, если либо $v=w$, либо существует путь из v в w (маршрут, соединяющий v,w).

Подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа. Подграфом графа $G=(V,X)$, *порожденным* множеством вершин $V_1\subseteq V$, называется граф $G_1=(V_1,X_1)$, где $X_1=X\cap V_1^2$ (т.е. содержащий множество вершин V_1 и множество всех ребер графа G, соединяющих вершины из V_1). Приведенные определения распространяются и на орграфы. Граф называется *связным*, если для любых двух его различных вершин существует маршрут, соединяющий их. Орграф называется сильно связным, если для любых двух его различных вершин v,w существует путь из v в w. *Компонентной связности* графа G называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G. *Компонентной сильной связности* орграфа D называется его сильно связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа орграфа D. У графа, изображенного на рис. 1.3, три компоненты связности. У орграфа, изображенного на рис. 1.4, три компоненты сильной связности: D_1,D_2,D_3, изображенные на рис. 1.5 и выделенные пунктирными линиями на рис. 1.4.

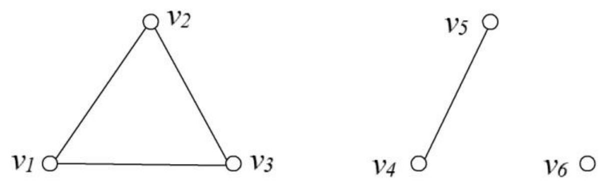
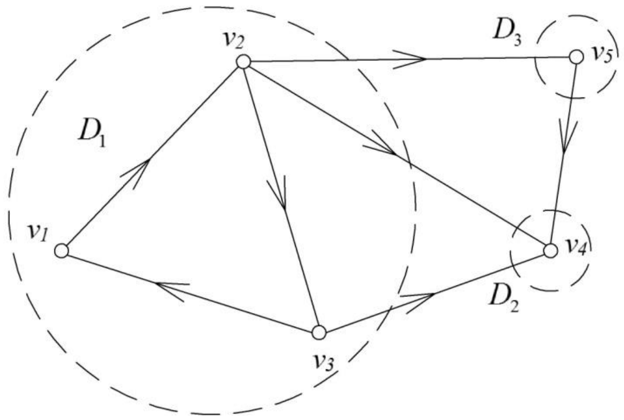


Рис. 1.3



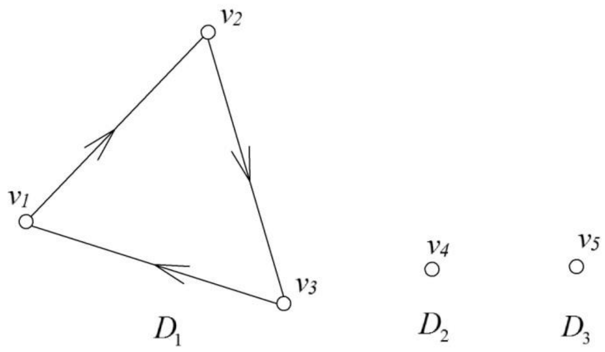


Рис. 1.4 Рис. 1.5

Орграф конденсации. *Орграфом конденсации* для ориентированного графа $D = (V, X)$ называется ориентированный граф $D_0 = (V_0, X_0)$, вершинами которого являются компоненты сильной связности орграфа D, а множество его дуг X_0 определяется условием: $x_0 = (v_0, w_0) \in X_0 \Leftrightarrow$ в компонентах сильной связности v_0, w_0 существуют вершины $v \in v_0$, $w \in w_0$, для которых $(v, w) \in X$.

Пример 1.2. Орграфом конденсации орграфа, изображенного на рис. 1.4, является орграф, изображенный на рис. 1.6.

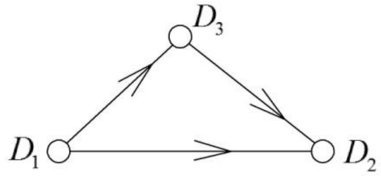


Рис. 1.6

Образ, прообраз вершины, множества вершин. Пусть $D = (V, X)$ – орграф, $v \in V$, $V_1 \subseteq V$. Обозначим $D(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in X\}$ – *образ вершины* v, $D^{-1}(v) = \{w \in V \mid (w, v) \in X\}$ – *прообраз вершины* v (см. рис. 1.7), $D(V_1) = \bigcup\limits_{v \in V_1} D(v)$ – *образ множества вершин* V_1, $D^{-1}(V_1) = \bigcup\limits_{v \in V_1} D^{-1}(v)$ – *прообраз множества вершин* V_1.

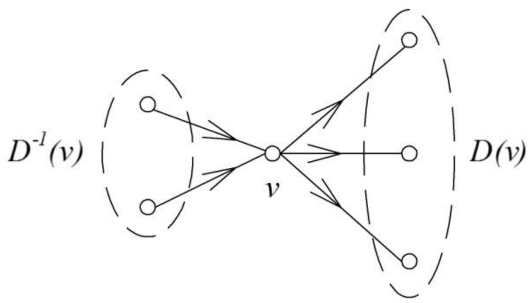


Рис. 1.7

Задача об оптимальном оповещении членов организации. Пусть в орграфе $D=(V,X)$, V – множество членов организации, X – множество дуг таких, что $x=(v,w)\in$ $\in X$ тогда и только тогда, когда v может передать информацию w. Рассмотрим следующую задачу. Требуется выделить подмножество U множества V с минимальным количеством элементов такое, что через оповещение некоторой информацией членов из U можно добиться оповещения этой информацией всех членов из V. Для решения этой задачи достаточно перейти от орграфа D к орграфу конденсации $D_0=(V_0,X_0)$ и выделить множество $W_0=\{v_0\in V_0 \mid D_0^{-1}(v_0)=\varnothing\}$. Тогда искомым множеством $U\subseteq V$ является множество вершин таких, что каждая вершина $u\in U$ является вершиной («представителем») одной и только одной компоненты сильной связности орграфа D, принадлежащей множеству W_0.

Пример 1.3. Решением указанной задачи для орграфа D, изображенного на рис. 1.4, является множество $U=\{v_1\}$ (или $U=\{v_2\}$ или $U=\{v_3\}$). Действительно, v_1 передает информацию v_2 (кратко, $v_1\mapsto v_2$), а затем $v_2\mapsto v_3$, $v_2\mapsto v_4$, $v_2\mapsto v_5$.

Разбор типового варианта. Пусть схема взаимного оповещения членов организации задана орграфом D, изображенным на рис. 1.8 (см. замечание 1.1). Выделить подмножество U множества V с минимальным количеством элементов такое, что через оповещение некоторой информацией членов из U можно добиться оповещения этой информацией всех членов из V. Указать общую схему такого оповещения.

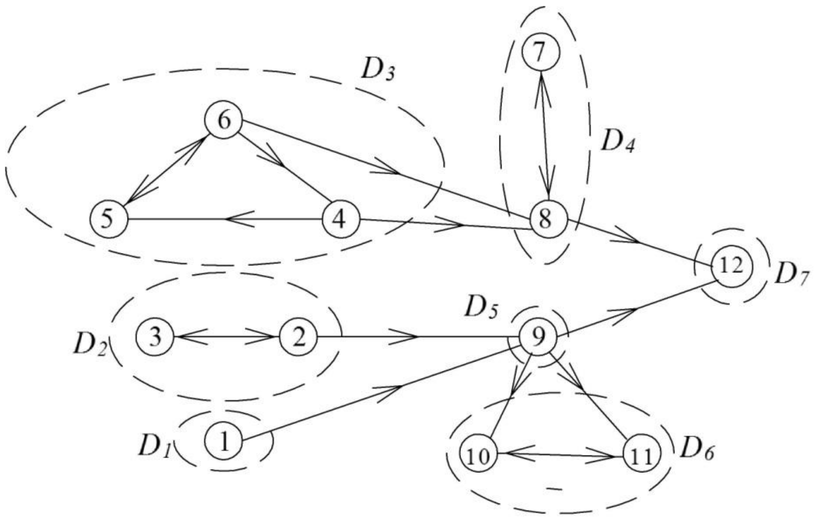


Рис. 1.8

Решение. Выделим компоненты сильной связности орграфа D: $D_1,\ldots,D_7$, (на рис. 1.8 они обведены замкнутыми пунктирными линиями). Построим по орграфу D его орграф конденсации D_0 (см. изображение D_0 на рис. 1.9). Условие $D_0^{-1}(v_0)=\varnothing$ выполняется при $v_0=D_1,D_2,D_3$. Возможными представителями этих орграфов являются вершины v_1,v_2,v_4. Тогда можно положить $U=\{v_1,v_2,v_4\}$ и согласно рис. 1.8, одной из возможных схем оповещения является: первоначально оповещаем v_1,v_2,v_4; далее:

$v_1\mapsto v_9\mapsto v_{10}\mapsto v_{11}$; $v_9\mapsto v_{12}$; $v_2\mapsto v_3$; $v_4\mapsto v_5\mapsto v_6\mapsto v_8\mapsto v_7$.

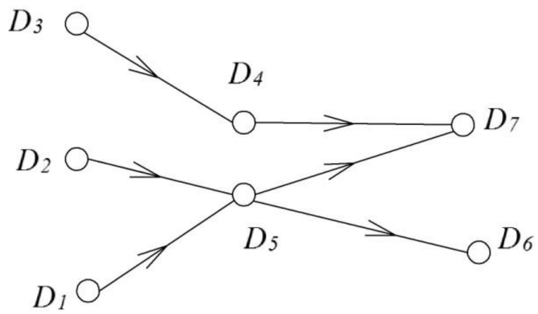


Рис. 1.9

Описанный алгоритм использует визуальное изображение орграфа. В следующей теме описывается алгоритм для случая его матричного задания.

Тема 2. Матрицы достижимости, связности. Определение наличия контуров в орграфах

В этом разделе рассматривается матричное задание графов (орграфов). С помощью этих матриц удобно задавать графы (орграфы) для обработки на ЭВМ. В рассмотренной в теме 1 задаче (см. разбор типового варианта) компоненты сильной связности орграфа $D=(V,X)$ легко определяются «визуально», т.е. исходя из изображения этого орграфа. Однако при большом количестве дуг такой подход затруднителен. В этом случае даже построение изображения орграфа является весьма трудоемким, а выделение компонент сильной связности становится практически невозможным. Поэтому представляют интерес алгоритмы выделения компонент сильной связности орграфа, основанные на использовании не изображения орграфа, а некоторых других способов задания орграфа, в частности, матричного. Такие матрицы должны легко строиться, исходя из множеств $V, X,$ а сам алгоритм должен быть легко программируемым и практически реализуемым даже при больших $n=n(D), m=m(D).$ Именно такой подход и рассматривается в настоящем разделе. В дальнейшем, если об этом не оговорено особо, предполагается, что в рассматриваемых графах (орграфах) отсутствуют петли и кратные ребра (дуги).

Матрицы смежности. Пусть $D=(V,X)$ – орграф, где $V=\{v_1,...,v_n\}$. *Матрицей смежности* орграфа D называется квадратная матрица $A(D)=[a_{ij}]$ порядка $n,$ у которой $a_{ij}=1,$ если $(v_i,v_j)\in X,$ и $a_{ij}=0$ – в противном случае. Введем также матрицу смежности для неориентированного графа. Пусть $G=(V,X)$ – граф, где $V=\{v_1,...,v_n\}$. *Матрицей смежности* графа G называется квадратная матрица $A(G)=[a_{ij}]$ порядка $n,$ у которой $a_{ij}=1,$ если $\{v_i,v_j\}\in X,$ и $a_{ij}=0$ – в противном случае.

Нам понадобится следующее свойство матрицы смежности. Обозначим через $A^k=[a_{ij}^{(k)}]$ k – ю степень матрицы смежности $A=A(D)$ орграфа D (аналогичное обозначение будем использовать и для графа G), где $k\in \mathrm{N}=\{1,2,...\}$.

Утверждение 2.1. Элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k орграфа $D=(V,X)$ (графа $G=(V,X)$), где $V=\{v_1,...,v_n\}$, $k\in\mathrm{N},$ равен числу всех путей (маршрутов) длины k из v_i в v_j (соединяющих v_i,v_j).

Булевы матрицы. Будем прямоугольную $(m\times n)$– матрицу $C=[c_{ij}],$ у которой $c_{ij}\in\{0,1\}$ называть *булевой*. Заметим, что матрица смежности $A(D)$ ($A(G)$) для произвольного орграфа D (графа G) является булевой. Над булевыми матрицами одинаковой размерности можно производить любые двухместные операции, определенные в математической логике и теории булевых функций: $\&, \vee, \supset, \sim, +$ и т.д. Например, если $C=[c_{ij}]$, $D=[d_{ij}]$– булевы $(m\times n)$– матрицы, то $F=[f_{ij}]=C\vee D$ есть булева $(m\times n)$– матрица с элементами $f_{ij}=c_{ij}\vee d_{ij},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n.$ Кроме того, будем использовать логическое умножение матриц, отличающееся от алгебраического умножения матриц только тем, что арифметическое сложение заменяется на $\vee$. Пусть $C=[c_{ij}]$– булева $(m\times k)$– матрица, $D=[d_{ij}]$– булева $(k\times n)$– матрица. Тогда $F=[f_{ij}]=CD$ есть булева $(m\times n)$– матрица с элементами $f_{ij}=\overset{k}{\underset{r=1}{\vee}} c_{ir}d_{rj},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n.$ В дальнейшем из контекста будет ясно, где используется алгебраическое умножение матриц, а где – логическое (всюду далее в этом разделе используется только логическое умножение матриц). Приведем утверждение, являющееся следствием утверждения 2.1, для случая, когда матрица $A^k=[a_{ij}^{(k)}]$ является k-й степенью матрицы смежности $A=A(D)$ орграфа D в случае логического умножения (аналогичное обозначение будем использовать и для графа G), где $k\in \mathrm{N}=\{1,2,...\}$.

Утверждение 2.2. Элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k орграфа $D=(V,X)$ (графа $G=(V,X)$), где $V=\{v_1,...,v_n\},\ k\in\mathrm{N},$ равен 1, если существует путь (маршрут) длины k из v_i в v_j (соединяющий v_i,v_j); в противном случае, он равен нулю.

Матрицы связности. Определение наличия контуров. Говорят, что вершина w орграфа D (графа G) *достижима* из вершины $v,$ если либо $v=w,$ либо существует путь из v в w (маршрут, соединяющий v,w). Пусть $D=(V,X)$– орграф, где $V=\{v_1,...,v_n\}.$ *Матрицей достижимости* орграфа D называется квадратная матрица $T(D)=[t_{ij}]$ порядка $n,$ у которой $t_{ij}=1,$ если вершина v_j достижима из вершины v_i, и $t_{ij}=0$ – в противном случае. *Матрицей сильной связности* орграфа D называется квадратная матрица $S(D)=[s_{ij}]$ порядка n, у которой $s_{ij}=1$ тогда и только тогда, когда вершины v_i,v_j взаимно достижимы (т.е. принадлежат одной компоненте сильной связности).

Пусть $G=(V,X)$ – граф, где $V=\{v_1,...,v_n\}.$ *Матрицей связности* графа G называется квадратная матрица $S(G)=[s_{ij}]$ порядка $n,$ у которой $s_{ij}=1$ тогда и только тогда, когда вершины v_i,v_j взаимно достижимы (т.е. принадлежат одной компоненте связности). Справедливы следующие утверждения, являющиеся следствиями утверждения 2.2.

Утверждение 2.3. Пусть $G=(V,X),$ где $V=\{v_1,...,v_n\},$– граф с матрицей смежности $A=A(G).$ Тогда $S(G)=E\vee A\vee A^2\vee...\vee A^{n-1}.$

Утверждение 2.4. Пусть $D=(V,X),$ где $V=\{v_1,...,v_n\},$– орграф с матрицей смежности $A=A(D).$ Тогда (1) $T(D)=E\vee A\vee A^2\vee...\vee A^{n-1}$; (2) $S(D)=T(D)\,\&\,[T(D)]^{\mathrm{T}}$, где т– операция транспонирования матрицы.

Утверждения 2.3, 2.4 дают простые, легко реализуемые на ЭВМ методы вычисления матриц $S(G), T(D), S(D)$. Существуют и более экономичные методы вычисления этих матриц. Опишем, например, метод Уоршелла, основанный на следующем утверждении.

Утверждение 2.5. Пусть A – матрица смежности графа $G=(V,X)$ (орграфа $D=(V,X)$), где $V=\{v_1,...,v_n\}$. Рассмотрим последовательность булевых квадратных матриц $B^{(l)}=[b_{ij}^{(l)}]$ порядка n, где $l=0,1,...,n$, $B^{(0)}=A\vee E$, элементы которых вычисляются по следующей итерационной формуле $b_{ij}^{(l)}=b_{ij}^{(l-1)}\vee(b_{il}^{(l-1)}\,\&\,b_{lj}^{(l-1)})$, где $l=1,2,...,n$. Тогда $S(G)=B^{(n)}$ (и соответственно $T(D)=B^{(n)}$, $S(D)=T(D)\,\&\,[T(D)]^{\mathrm{T}}$).

Пусть орграф D задан матрицей смежности $A(D)$ и уже найдена матрица сильной связности $S(D)$. Приведем алгоритм определения числа компонент сильной связности орграфа D, а также матриц смежности этих компонент (предполагая сохранение в компонентах того же порядка следования вершин, что и в исходном орграфе D).

Алгоритм 2.1

Шаг 1. Полагаем $p=1$, $S_1=S(D)$.

Шаг 2. Включаем в множество вершин V_p очередной компоненты сильной связности D_p орграфа D вершины, соответствующие единицам первой строки матрицы S_p. В качестве $A(D_p)$ берем подматрицу матрицы $A(D)$, находящуюся на пересечении строк и столбцов, соответствующих вершинам из V_p.

Шаг 3. Вычеркиваем из S_p строки и столбцы, соответствующие вершинам из V_p. Если в результате такого вычеркивания не остается ни одной строки (и соответственно ни одного столбца), то p – количество компонент сильной связности орграфа D и $A(D_1),\ldots,A(D_p)$ – матрицы смежности компонент сильной связности $D_1,\ldots,D_p$ орграфа D. В противном случае, обозначаем оставшуюся после вычеркивания из S_p соответствующих строк и столбцов матрицу через S_{p+1}, увеличиваем p на 1 и переходим к шагу 2.

При решении ряда задач нередко необходимо выяснить, есть ли контуры в заданном орграфе. Заметим, что если в орграфе D присутствует некоторый контур, то все вершины, входящие в этот контур, взаимно достижимы и поэтому принадлежат одной компоненте сильной связности орграфа D, а следовательно, эта компонента будет содержать более одной вершины. Заметим также, что если некоторая компонента сильной связности орграфа D содержит более одной вершины, то в этой компоненте, а следовательно, и в самом орграфе D обязательно присутствует контур. Таким образом, справедливо

Утверждение 2.6. Для того чтобы орграф D имел хотя бы один контур, необходимо и достаточно, чтобы он имел хотя бы одну компоненту сильной связности, содержащую более одной вершины или (что то же самое), чтобы матрица $S(D)$ была отлична от единичной матрицы E.

Иногда вопрос стоит так. В случае, когда орграф D имеет контуры, определить, какую минимальную длину имеют эти контуры. Для решения этой задачи снова воспользуемся утверждением 2.2, следствием которого является

Утверждение 2.7. Для того, чтобы орграф D с матрицей смежности $A = A(D)$ имел контур минимальной длины $k \in \{2,..., n(D)\},$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A^2,..., A^{k-1}$ имели только нулевые диагональные элементы, а матрица A^k имела ненулевые диагональные элементы.

Пусть $D = (V, X)$ – орграф. Обозначим $\forall U \subseteq V \ \ F(U) = D(U) \setminus U$. Пусть $D_1 = (V_1, X_1), \dots , D_p = (V_p, X_p)$ – компоненты сильной связности орграфа $D,$ $D_0 = (V_0, X_0)$ – орграф конденсации орграфа $D.$ Приведем алгоритм нахождения матрицы смежности $A_0 = A(D_0) = [a_{ij}^{(0)}],\ i, j \in \{1,2,..., p\}.$

Алгоритм 2.2

Для нахождения элементов строки матрицы A_0 с номером $i \in \{1,2,..., p\}$ действуем следующим образом. Находим $F(V_i) = D(V_i) \setminus V_i.$ Тогда $a_{ij}^{(0)} = 1 \Leftrightarrow F(V_i) \cap V_j \neq \varnothing,$ $j = 1,2,..., p.$ Множества $F(V_i)$ легко определяются, исходя из матрицы $A(D).$

Пусть $D = (V, X)$ – орграф. Приведем также алгоритм решения задачи об оптимальном оповещении членов организации (см. тему 1) для случая, когда V – множество членов организации и $x = (v, w) \in X$ тогда и только тогда, когда v может передать информацию $w.$ Этот алгоритм, в отличие от метода, приведенного в теме 1 и использующего изображение орграфа $D,$ основан на использовании матрицы смежности $A(D).$ В соответствии с постановкой задачи, приведенной в теме 1, требуется выделить подмножество U множества V с минимальным количеством элементов такое, что через оповещение некоторой информацией членов из U можно добиться оповещения этой информацией всех членов из $V.$ Кроме того, следует указать схему такого оповещения.

Алгоритм 2.3

Шаг 1. Следуя методу, приведенному в теме 1, определяем орграф конденсации $D_0 = (V_0, X_0)$ и выделяем множество $W_0 = \{v_0 \in V_0 \mid D_0^{-1}(v_0) = \varnothing\}.$ Тогда искомым множеством $U \subseteq V$ является множество вершин таких, что каждая вершина $u \in U$ является вершиной («представителем») одной и только одной компоненты сильной связности орграфа $D,$ принадлежащей множеству $W_0.$ Оповещаем (требуемой информацией) всех членов из $U.$ Полагаем $U_1 = U,\ i = 1.$

Шаг 2. Если $F(U_i) = \varnothing,$ то задача решена (т.е. все члены организации оповещены). В противном случае выбираем произвольную вершину $u_i \in F(U_i).$ Ее оповещает любая вершина из $U_i \cap D^{-1}(u_i).$

Шаг 3. Полагаем $U_{i+1} = U \cup \{u_i\},$ увеличиваем i на 1 и переходим к шагу 2.

Разбор типового варианта. Орграф $D=(V,X)$, где $V=\{v_1,\dots,v_n\}$, задан матрицей смежности $A=A(D)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$. Определить: (а) матрицы $T(D)$, $S(D)$; (б) наличие контуров в D (имеются или не имеются); (в) в случае наличия контуров в D определить минимальную длину контуров; (г) количество p компонент сильной связности орграфа D, матрицы смежности этих компонент, а также их изображения; (д) матрицу смежности орграфа конденсации D_0 орграфа D; (е) изображение орграфа D_0; (ж) решить задачу об оптимальном оповещении членов организации (см. тему 1), если V – множество членов организации и $x=(v,w)\in X$ тогда и только тогда, когда v может передать информацию w.

Решение. (а) Будем определять матрицу $T(D)$ по формуле из утверждения 2.4 (см. также замечание 2.2, в котором $T(D)$ определяется методом Уоршелла, т.е. по формулам из утверждения 2.5). В соответствии с этим последовательно определяем:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A^4=AA^3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A^5=AA^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Замечание 2.1. Из определения логического умножения матриц и вида матрицы A следует, что первая строка матрицы A^2 совпадает с пятой строкой матрицы A (совершенно аналогично, первая строка матрицы A^{k+1} совпадает с пятой строкой матрицы A^k, $k=1,2,\dots$). Заметим далее, что вторая строка матрицы A^{k+1} совпадает с дизъюнкцией четвертой и пятой строк матрицы A^k, а третья строка матрицы A^{k+1} совпадает с шестой строкой матрицы A^k, $k=1,2,\dots$, и т.д.

В силу утверждения 2.4,

$$T(D) = E \vee A \vee A^2 \vee \dots \vee A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S(D) = T(D) \,\&\, [T(D)]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ (б) В орграфе D имеются контуры, так как $S(D) \neq E.$ (в) Поскольку уже в матрице A^2 имеются ненулевые диагональные элементы, то в орграфе D имеется контур минимальной длины 2. (г) Используя алгоритм 2.1, последовательно определяем матрицы смежности компонент сильной связности орграфа $D.$ Согласно алгоритму 2.1, в первую компоненту сильной связности D_1 орграфа D войдет единственная вершина v_1, т.е. $D_1 = (V_1, X_1)$, где $V_1 = \{v_1\}$, $X_1 = \varnothing.$ Соответствующая этой компоненте сильной связности матрица смежности имеет вид (находится на пересечении первой строки и первого столбца матрицы $A(D)$)

$A(D_1) =$

	v_1
v_1	0

.

Изображение орграфа D_1 приведено на рис. 2.1.

Рис. 2.1

Вычеркнув из матрицы $S_1 = S(D)$ первую строку и первый столбец, получаем матрицу

$S_2 =$

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_2	1	0	1	0	0
v_3	0	1	0	0	1
v_4	1	0	1	0	0
v_5	0	0	0	1	0
v_6	0	1	0	0	1

.

Согласно алгоритму 2.1 во вторую компоненту сильной связности D_2 орграфа D войдут вершины $v_2, v_4,$ т.е. $D_2 = (V_2, X_2),$ где $V_2 = \{v_2, v_4\}.$ Соответствующая этой компоненте сильной связности матрица смежности имеет вид (находится на пересечении второй и четвертой строк со вторым и четвертым столбцами матрицы $A(D)$)

$A(D_2) =$

	v_2	v_4
v_2	0	1
v_4	1	0

.

Изображение орграфа D_2 приведено на рис. 2.1. Вычеркнув из матрицы S_2 строки и столбцы, соответствующие вершинам $v_2, v_4,$ получаем матрицу

$S_3 =$

	v_3	v_5	v_6
v_3	1	0	1
v_5	0	1	0
v_6	1	0	1

.

Согласно алгоритму 2.1 в третью компоненту сильной связности D_3 орграфа D войдут вершины $v_3, v_6,$ т.е. $D_3 = (V_3, X_3),$ где $V_3 = \{v_3, v_6\}.$ Соответствующая этой компоненте сильной связности матрица смежности имеет вид (находится на пересечении третьей и шестой строк с третьим и шестым столбцами матрицы $A(D)$)

$A(D_3) =$

	v_3	v_6
v_3	0	1
v_6	1	0

.

Изображение орграфа D_3 приведено на рис. 2.1. Вычеркнув из матрицы S_3 строки и столбцы, соответствующие вершинам v_3, v_6, получаем матрицу

$S_4 =$

	v_5
v_5	1

.

Согласно алгоритму 2.1, в четвертую компоненту сильной связности D_4 орграфа D войдет единственная вершина $v_4,$ т.е. $D_4 = (V_4, X_4),$ где $V_4 = \{v_5\},$ $X_1 = \varnothing.$ Соответствующая этой компоненте сильной связности матрица смежности имеет вид (находится на пересечении четвертой строки и четвертого столбца матрицы $A(D)$)

$A(D_4) =$

	v_5
v_5	0

.

Изображение орграфа D_4 приведено на рис. 2.1. Очевидно, что $p=4$, так как после исключения из S_4 строки и столбца, соответствующих вершине v_5, получаем пустую матрицу. (д) Для нахождения матрицы $A(D_0)$ воспользуемся алгоритмом 2.2. В нашем примере $V_1=\{v_1\},\ F(V_1)=D(V_1)\setminus V_1=\{v_5\}\setminus\{v_1\}=\{v_5\},\ v_5\in V_4\Rightarrow a_{14}^{(0)}=1,\ a_{1j}^{(0)}=0,\ j=1,2,3;$
$V_2=\{v_2,v_4\},\ F(V_2)=D(V_2)\setminus V_2=\{v_2,v_4,v_5\}\setminus\{v_2,v_4\}=\{v_5\},\ v_5\in V_4\Rightarrow a_{24}^{(0)}=1,\ a_{2j}^{(0)}=0,\ j=1,2,3;$
$V_3=\{v_3,v_6\},\ F(V_3)=D(V_3)\setminus V_3=\{v_3,v_6\}\setminus\{v_3,v_6\}=\varnothing\Rightarrow a_{3j}^{(0)}=0,\ j=1,2,3,4;\ V_4=\{v_5\},\ F(V_4)=$
$=D(V_4)\setminus V_4=\ \{v_3,v_6\}\setminus\{v_5\}=\{v_3,v_6\},\ v_3,v_6\in V_3\Rightarrow a_{43}=1, a_{4j}^{(0)}=0,\ j=1,2,4.$ Таким образом,

$A(D_0)=$

	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	0	0	0	1
D_2	0	0	0	1
D_3	0	0	0	0
D_4	0	0	1	0

.

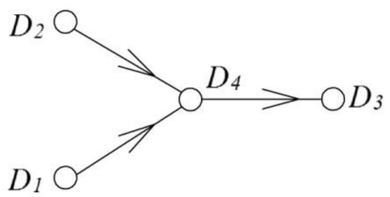


Рис. 2.2

(д) Изображение орграфа D_0 строится по матрице $A(D_0)$ (приведено на рис. 2.2). (е) В соответствии с алгоритмом 2.3 выделяем подмножество U множества V с минимальным количеством элементов такое, что через оповещение некоторой информацией членов из U можно добиться оповещения этой информацией всех членов из V. Для решения этой задачи рассматриваем орграф конденсации $D_0=(V_0,X_0)$ и выделяем множество $W_0=$ $=\{v_0\in V_0\,|\,D_0^{-1}(v_0)=\varnothing\}$ (множество вершин с нулевыми столбцами в $A(D_0)$). Тогда искомым множеством $U\subseteq V$ является множество вершин таких, что каждая вершина $u\in U$ является вершиной («представителем») одной и только одной компоненты сильной связности орграфа D, принадлежащей множеству W_0. Заметим, что $W_0=\{D_1,D_2\}$ (см. рис. 2.2), $v_1\in D_1$, $v_2\in D_2$ (см. рис. 2.1), поэтому полагаем $U=\{v_1,v_2\}$. Следуя алгоритму 2.3, далее полагаем $U_1=U=\{v_1,v_2\}$. Используя матрицу $A(D)$, находим множество

$$F(U_1)=D(U_1)\setminus U_1=D(\{v_1,v_2\})\setminus\{v_1,v_2\}=\{v_4,v_5\}\setminus\{v_1,v_2\}=\{v_4,v_5\}$$

и выбираем из него произвольную вершину, например, v_4, т.е. полагаем $u_1=v_4$. Далее находим множество $U_1\cap D^{-1}(u_1)=U\cap D^{-1}(v_4)=\{v_1,v_2\}\cap\{v_2\}=\{v_2\}$. Единственная вершина этого множества v_2 оповещает v_4 (кратко пишем: $v_2\mapsto v_4$). Далее полагаем $U_2=$ $=U_1\cup\{u_1\}=\{v_1,v_2,v_4\}$, находим множество

$$F(U_2)=D(U_2)\setminus U_2=D(\{v_1,v_2,v_4\})\setminus\{v_1,v_2,v_4\}=\{v_2,v_4,v_5\}\setminus\{v_1,v_2,v_4\}=\{v_5\},$$

содержащее единственную вершину v_5 и полагаем $u_2=v_5$. Находим множество $U_2\cap D^{-1}(u_2)=U_2\cap D^{-1}(v_5)=\{v_1,v_2,v_4\}\cap\{v_1,v_2\}=\{v_1,v_2\}$, выбираем из него произвольную вершину, например, v_1. Тогда $v_1 \mapsto v_5$. Далее полагаем $U_3 = U_2 \cup \{u_2\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$, находим множество

$$F(U_3) = D(U_3) \setminus U_3 = D(\{v_1, v_2, v_4, v_5\}) \setminus \{v_1, v_2, v_4, v_5\} =$$
$$= \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_4, v_5\} = \{v_3, v_6\},$$

и выбираем из него произвольную вершину, например, v_3, т.е. полагаем $u_3 = v_3$. Находим множество $U_3 \cap D^{-1}(u_3) = U_3 \cap D^{-1}(v_3) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \cap \{v_5, v_6\} = \{v_5\}$, содержащее единственную вершину v_5. Тогда $v_5 \mapsto v_3$. Далее полагаем $U_4 = U_3 \cup \{u_3\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, находим множество

$$F(U_4) = D(U_4) \setminus U_4 = D(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} =$$
$$= \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{v_6\},$$

и полагаем $u_4 = v_6$. Находим множество $U_4 \cap D^{-1}(u_4) = U_4 \cap D^{-1}(v_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap$ $\cap \{v_3, v_5\} = \{v_3, v_5\}$, выбираем из него произвольную вершину, например, v_3. Тогда $v_3 \mapsto v_6$. Далее полагаем $U_5 = U_4 \cup \{u_4\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, находим множество $F(U_5) =$ $= D(U_5) \setminus U_5 = \varnothing$, а это согласно алгоритму 2.3 (см. шаг 2), означает, что схема оповещения построена. А именно, вначале оповещаются v_1, v_2, а затем $v_2 \mapsto v_4$, $v_1 \mapsto v_5 \mapsto v_3 \mapsto v_6$.

Замечание 2.2. При решении задачи из типового варианта нахождение $T(D)$, $S(D)$ производилось по формулам из утверждения 2.4. Найдем также эти матрицы более экономичным методом (см. утверждение 2.5). Введем в рассмотрение вспомогательную квадратную матрицу $\hat{B}^{(l)} = [\hat{b}_{ij}^{(l)}]$ порядка n с элементами $\hat{b}_{ij}^{(l)} = b_{il}^{(l-1)} \,\&\, b_{lj}^{(l-1)}$, где $l = 1,2,...,n$. Тогда (см. утверждение 2.5) $B^{(l)} = B^{(l-1)} \vee \hat{B}^{(l)}$. Из определения матрицы $\hat{B}^{(l)}$ следует, что $l-$ ая строка матрицы $B^{(l-1)}$ повторяется во всех строках матрицы $\hat{B}^{(l)}$ с номерами $i \in \{1,2,...,n\}$, для которых $b_{il}^{(l-1)} = 1$, т.е., если матрицы $B^{(l-1)}, \hat{B}^{(l)}$ стоят рядом, то $l-$ ая строка матрицы $B^{(l-1)}$ находится в матрице $\hat{B}^{(l)}$ напротив всех единиц $l-$ го столбца матрицы $B^{(l-1)}$. Остальные строки матрицы $\hat{B}^{(l)}$ являются нулевыми. Далее в соответствующих таблицах единицы $l-$ ой строки, $l-$ го столбца матрицы $B^{(l-1)}$, а также единицы матрицы $\hat{B}^{(l)}$ будут выделены жирным шрифтом, где $l = 1,2,...,6$. Действуя таким образом, получаем:

$$B^{(0)} = A \vee E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^{(1)} = B^{(0)} \vee \hat{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^{(0)},$$

$$B^{(2)} = B^{(1)} \vee \hat{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^{(3)} = B^{(2)} \vee \hat{B}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = B^{(2)},$$

$$B^{(4)} = B^{(3)} \vee \hat{B}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^{(3)},$$

$$B^{(5)} = B^{(4)} \vee \hat{B}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^{(6)} = B^{(5)} \vee \hat{B}^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = B^{(5)}.$$

В силу утверждения 2.5 $T(D) = B^{(6)}$, $S(D)$ находится из $T(D)$ аналогично предыдущему.

Тема 3. Поиск маршрутов (путей) в графах (орграфах)

Задача о лабиринте. Опишем метод поиска маршрута в связном графе $G=(V,X)$, соединяющим заданные вершины $v,w\in V,\ \ v\neq w.$

Алгоритм 3.1 (Тэрри) поиска маршрута в связном графе

Если, исходя из вершины v и осуществляя последовательный переход от каждой достигнутой вершины к смежной ей вершине, руководствоваться следующими правилами: (1) идя по произвольному ребру, всякий раз отмечать направление, по которому оно пройдено; (2) исходя из некоторой вершины $v',$ всегда следовать по тому ребру, которое не было пройдено или было пройдено в противоположном направлении; (3) для всякой вершины $v',$ отличной от $v,$ отмечать ребро, по которому зашли в v' в первый раз; (4) исходя из некоторой вершины $v',$ отличной от $v,$ по первому заходящему в v' ребру идти лишь тогда, когда нет других возможностей, то всегда можно найти маршрут в связном графе G, соединяющий $v,w.$

Замечание 3.1. Задачу, которую решает алгоритм Тэрри, можно назвать *задачей о лабиринте*. Здесь v – начальная точка поиска, w – выход из лабиринта.

Замечание 3.2. Алгоритм Тэрри позволяет избежать повторного прохождения ребер в одном направлении. Если конец маршрута не задан, то, проводя поиск согласно алгоритму Тэрри, пока это возможно, мы найдем замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по разу в каждом направлении) по каждому ребру связного графа $G.$

Задача о поливочной машине. Пусть граф G соответствует схеме дорог некоторого района, которые нужно полить летом водой (соответственно посыпать песком зимой) с двух сторон (дорожки с двухсторонним движением). Вершина v_1 соответствует базе, где машина заправляется водой и бензином и куда она возвращается после полива дорожек. В силу замечания 3.2, алгоритм Тэрри дает оптимальное решение этой задачи (минимальный расход бензина и воды), поскольку каждая дорожка поливается ровно по разу в каждом направлении.

Разбор типового варианта. Решить задачу о поливочной машине, если схема дорог описывается графом $G=(V,X), V=\{v_1,...,v_7\},$ изображенным на рис. 3.1 (см. замечание 1.1), т.е. требуется указать маршрут, обеспечивающий полный обход всех вершин и ребер графа $G,$ начиная из вершины v_1 и заканчивая в этой же вершине. При этом каждое ребро должно быть пройдено по разу в каждом направлении.

Решение. Для решения этой задачи действуем в соответствии с алгоритмом Тэрри (см. замечание 3.2). Для реализации алгоритма помечаем первые заходящие в вершины ребра крестиками, которые наносим на ребрах ближе к той вершине в которую в первый раз заходим, а также указываем направления прохождения ребер и последовательность прохождения ребер. Алгоритм 3.1 дает следующий возможный маршрут (см. рис. 3.1) $v_1v_3v_2v_1v_2v_3v_4v_5v_7v_4v_6v_7v_6v_4v_7v_5v_4v_3v_1$ (см. замечание 1.2).

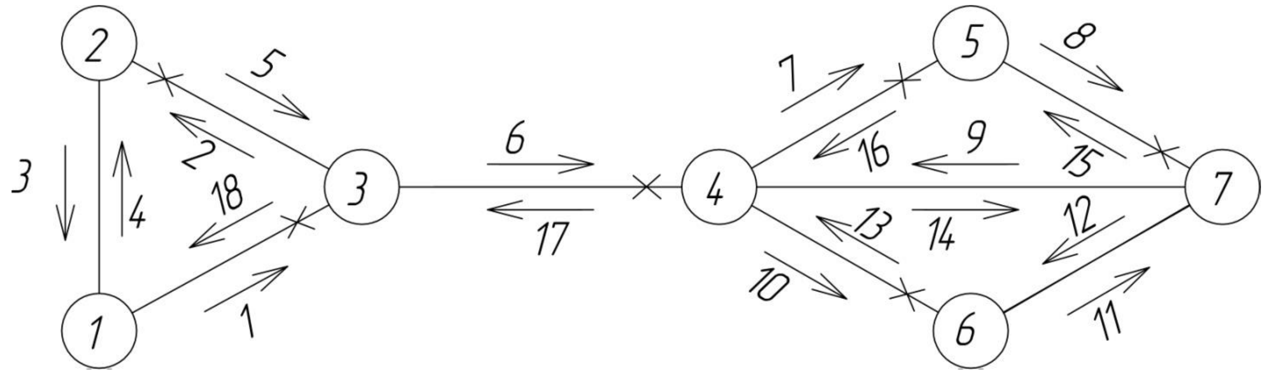


Рис 3.1

Поиск минимальных путей в орграфах. Алгоритм «фронта волны». Путь в орграфе D из вершины v в вершину $w,$ где $w \neq v,$ называется *минимальным*, если он имеет минимальную длину среди всех путей орграфа D из v в $w.$ Аналогично определяется минимальный маршрут в графе $G.$ Пусть $D=(V,X)$ – орграф с $n \geq 2$ вершинами, v,w – заданные вершины из V, $v \neq w.$ Опишем алгоритм *фронта волны* поиска минимального пути из v в w в орграфе $D.$ Будем использовать обозначения: $D(v)$, $D^{-1}(v)$ и др. (см. стр. 7).

Алгоритм 3.2 (фронта волны)

Шаг 1. Помечаем вершину v индексом 0, а все вершины, принадлежащие образу вершины $v,$ индексом 1. Обозначим через $FW_0(v), FW_1(v)$– множества вершин, помеченных индексами 0 и 1, соответственно, т.е. $FW_0(v)=\{v\}, FW_1(v)=D(v).$ Полагаем $k=1.$

Шаг 2. Если $FW_k(v)=\varnothing,$ то вершина w не достижима из v и работа алгоритма на этом заканчивается. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если $w \notin FW_k(v),$ то переходим к шагу 4. В противном случае существует минимальный путь из v в $w,$ имеющий длину $k.$ Последовательность его вершин $vw_1...w_{k-1}w,$ где

$$w_{k-1} \in FW_{k-1}(v) \cap D^{-1}(w),\ w_{k-2} \in FW_{k-2}(v) \cap D^{-1}(w_{k-1}),\ \dots\ ,\ w_1 \in FW_1(v) \cap D^{-1}(w_2), \qquad (3.1)$$

и есть искомый минимальный путь из v в w длины $k.$ На этом работа алгоритма заканчивается.

Шаг 4. Помечаем индексом $k+1$ все непомеченные вершины, принадлежащие образу множества вершин, помеченных индексом $k.$ Множество вершин, помеченных индексом $k+1,$ обозначаем $FW_{k+1}(v),$ т.е. $FW_{k+1}(v)=D(FW_k(v)) \setminus \bigcup_{i=0}^{k} FW_i(v).$ Увеличиваем k на 1 и переходим к шагу 2.

Замечание 3.3. Множество $FW_k(v)$ будем называть фронтом волны k-го уровня с центром в вершине $v.$

Замечание 3.4. Вершины $w_1,..., w_{k-1}$ из (3.1), вообще говоря, могут быть выделены неоднозначно, что говорит о возможности существования нескольких различных минимальных путей из v в $w.$

Замечание 3.5. Аналогично описывается алгоритм поиска минимальных маршрутов в неориентированном графе $G.$

Разбор типового варианта. Орграф $D=(V,X)$, где $V=\{v_1,...,v_{10}\}$, задан матрицей смежности $A(D)$, приведенной в табл. 3.1. Найти все минимальные пути из v_1 в v_{10}.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
v_2	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
v_3	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
v_4	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
v_5	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
v_6	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
v_7	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
v_8	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
v_9	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
v_{10}	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0

Табл.3.1

Решение. Действуя согласно алгоритму 3.2, последовательно определяем:

$FW_0(v_1)=\{v_1\}$, $FW_1(v_1)=D(v_1)=\{v_4,v_5,v_7\}$,

$FW_2(v_1)=D(FW_1(v_1))\setminus(FW_0(v_1)\cup FW_1(v_1))=D(\{v_4,v_5,v_7\})\setminus\{v_1,v_4,v_5,v_7\}=$
$=\{v_1,v_5,v_6,v_8,v_9\})\setminus\{v_1,v_4,v_5,v_7\}=\{v_6,v_8,v_9\}$,

$FW_3(v_1)=D(FW_2(v_1))\setminus(FW_0(v_1)\cup FW_1(v_1)\cup FW_2(v_1))=D(\{v_6,v_8,v_9\})\setminus$
$\setminus\{v_1,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}\setminus\{v_1,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}=\{v_2,v_3\}$,

$FW_4(v_1)=D(FW_3(v_1))\setminus(FW_0(v_1)\cup FW_1(v_1)\cup FW_2(v_1)\cup FW_3(v_1))=$
$=D(\{v_2,v_3\})\setminus\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}\setminus$
$\setminus\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9\}=\{v_{10}\}$.

Таким образом, $v_{10}\in FW_4(v_1)$, а следовательно, согласно алгоритму 3.2 существует минимальный путь в орграфе D из v_1 в v_{10} длины 4. Найдем все эти пути. На рис. 3.2 изображен подграф D' орграфа D, на котором последовательно изображены множества $FW_k(v_1)$, $k=0,1,2,3,4$, а также дуги вида (v,v'), где для некоторого $k\in\{0,1,2,3\}$ $v\in FW_k(v_1)$, $v'\in FW_{k+1}(v_1)$, т.е. исходящие из вершин некоторого k-го фронта волны и заходящие в вершины следующего $(k+1)$-го фронта волны.

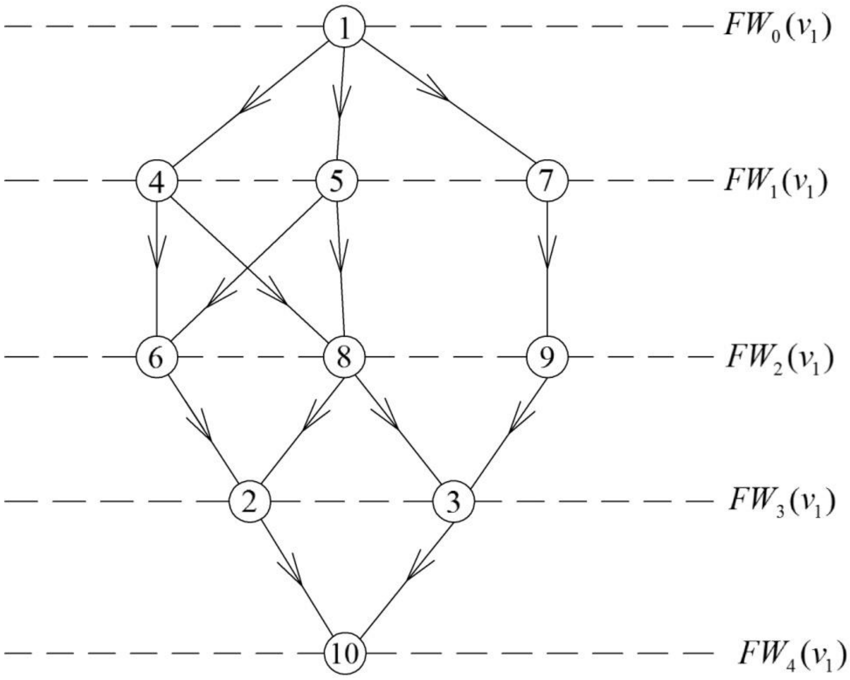


Рис. 3.2

Используя изображение D', нетрудно выделить все минимальные пути из v_1 в v_{10} в орграфе D. При этом, следуя (3.1), находим эти минимальные пути, используя орграф D', но двигаясь в D' в обратной последовательности (т.е. не из v_1 в v_{10}, а наоборот, из v_{10} в v_1). Используя рис. 3.2, получаем, что в любом минимальном пути из v_1 в v_{10} соблюдается следующая последовательность вершин. Вершиной, предшествующей вершине v_{10}, может быть любая из вершин v_2, v_3. Вершиной, предшествующей вершине v_2, может быть любая из вершин v_6, v_8, а вершиной, предшествующей вершине v_3, – любая из вершин v_8, v_9 и т.д. Этими условиями однозначно определяется множество минимальных путей из v_1 в v_{10}, которое компактно изображено на рис. 3.3. На этом рисунке изображены все вершины, входящие в минимальные пути из v_1 в v_{10}. Для каждой из промежуточных вершин v показано множество вершин, которые могут ей предшествовать, а также соответствующие дуги (исходящие из вершин, предшествующих v, и заходящие в v). Из рис. 3.3 видно, что всего существует семь минимальных путей из v_1 в v_{10} одним из которых является $v_1 v_4 v_6 v_2 v_{10}$.

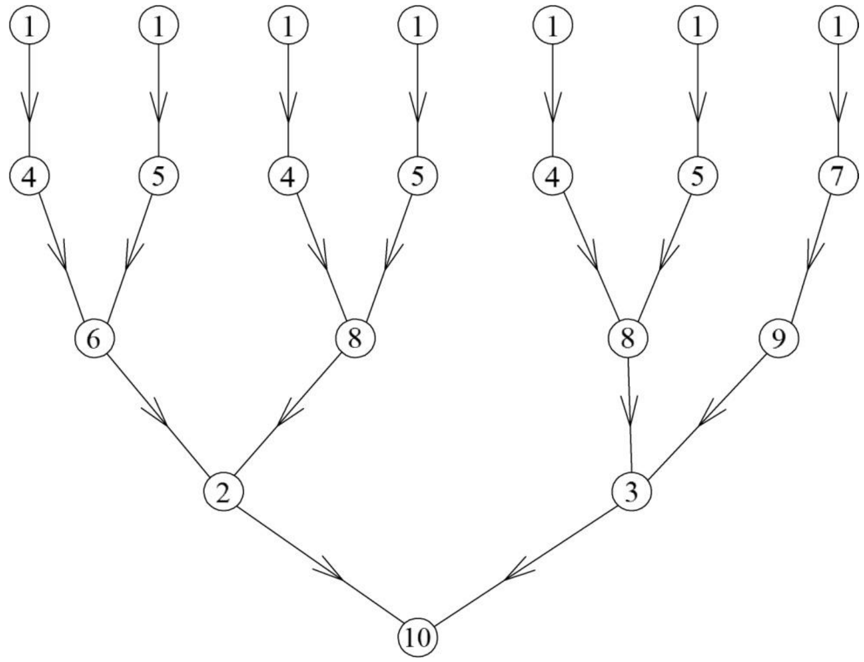


Рис. 3.3

Поиск минимальных путей (маршрутов) в нагруженных орграфах (графах). Назовем орграф $D=(V,X)$ *нагруженным*, если на множестве дуг X определена некоторая функция $l: X \to \mathrm{R}$. Тем самым в нагруженном орграфе D каждой дуге $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $l(x)$ – *длина дуги* x. Для любого пути π нагруженного орграфа D обозначим через $l(\pi)$ сумму длин входящих в π дуг; при этом каждая дуга учитывается столько раз, сколько она входит в этот путь. Будем называть $l(\pi)$ *длиной пути* π. Путь в нагруженном орграфе D из вершины v в вершину w, где $v,w \in V$, называется *минимальным*, если он имеет минимальную длину среди всех путей орграфа D из v в w.

Пусть $D=(V,X)$ – нагруженный орграф, $V=\{v_1,...,v_n\}$, $n \geq 2$. Опишем метод *Форда – Беллмана* поиска минимальных путей из начальной вершины v_1 в вершины $v_i, i=2,...,n$ (если таковые пути существуют). Если в орграфе существует хотя бы один контур отрицательной длины, то в нем может не существовать путь минимальной длины из некоторой вершины в некоторую другую вершину.

Пример 3.1. Рассмотрим нагруженный орграф D, изображенный на рис. 3.4 (около каждой дуги указана ее длина). В этом орграфе не существует минимального пути из v_1 в v_4, поскольку в нем существует контур $\sigma = v_2v_3v_2$ длины –1. Действительно,
$l(v_1v_2v_4)=3, l(v_1\sigma v_4)=2, l(v_1\sigma\sigma v_4)=1, \dots, l(v_1\underbrace{\sigma\sigma...\sigma}_{k}v_4)=3-k,\ k=0,1,...$.

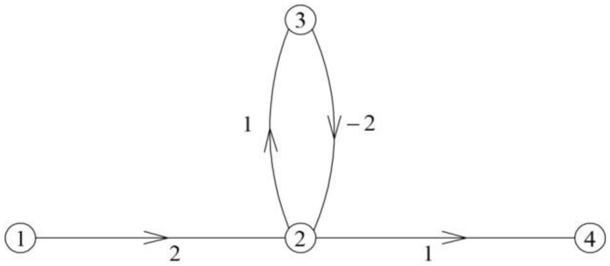


Рис. 3.4

Будем для простоты считать, что все длины дуг в орграфе D неотрицательны. В этом случае в D отсутствуют контуры отрицательной длины. Введем величины $\lambda_i^{(k)}$, где $i=1,2,...,n, k=1,2,...$. Для каждых фиксированных i и k величина $\lambda_i^{(k)}$ равна длине минимального пути среди всех путей орграфа D из v_1 в v_i, содержащих не более k дуг; если же таких путей нет, то $\lambda_i^{(k)}=\infty$ (здесь и далее под ∞ понимается $+\infty$). Кроме того, если произвольную вершину $v \in V$ считать путем из v в v нулевой длины, то величины $\lambda_i^{(k)}$ можно ввести также и для $k=0$, и при этом

$$\lambda_1^{(0)}=0,\ \lambda_i^{(0)}=\infty,\ i=2,\ldots,n. \tag{3.2}$$

Поскольку по предположению в D отсутствуют контуры отрицательной длины, то

$$\lambda_1^{(k)}=0,\ k=0,1,\ldots. \tag{3.3}$$

Введем также в рассмотрение квадратную матрицу $C(D)=[c_{ij}]$ порядка n с элементами $c_{ij}=l(v_i,v_j)$, если $(v_i,v_j)\in X$, и $c_{ij}=\infty$ – в противном случае, которую будем называть *матрицей длин дуг* нагруженного орграфа D.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 3.1. При $j=2,...,n, k=0,1,...$ выполняется равенство

$$\lambda_j^{(k+1)}=\min_{1\le i\le n}\{\lambda_i^{(k)}+c_{ij}\}. \tag{3.4}$$

Утверждение 3.2. Если $i\in\{2,...,n\}, \lambda_i^{(n-1)}=\infty$, то вершина v_i не достижима из v_1. В противном случае v_i достижима из v_1 и $\lambda_i^{(n-1)}$– длина минимального пути из v_1 в v_i.

Таким образом, по величинам $\lambda_2^{(n-1)},\ldots,\lambda_n^{(n-1)}$ можно судить о достижимости вершин $v_2,...,v_n$ из v_1, а также определять длины минимальных путей из v_1 во все достижимые вершины. Кроме того, по таблице $\lambda_i^{(j)}, i=1,2,...,n,\ j=0,1,...,n-1,$ можно определять минимальные пути из v_1 во все достижимые вершины. При этом, как и в алгоритме «фронта волны», двигаемся в обратной последовательности, т.е. из некоторой заданной вершины v_i с $\lambda_i^{(n-1)}<\infty$, где $i\in\{2,...,n\}$, в исходную вершину v_1, после чего восстанавливаем истинную последовательность вершин. Сначала определяем минимальный номер k_0, при котором $\lambda_i^{(k_0)}=\lambda_i^{(n-1)}$. Величина k_0 соответствует числу дуг в минимальном пути из v_1 в v_i. Предшествующей вершиной для v_i (в минимальном пути из v_1 в v_i) является вершина v_{i_1}, для которой выполняется равенство $\lambda_i^{(k_0)}=\min\limits_{1\le i'\le n}\{\lambda_{i'}^{(k_0-1)}+c_{i'i}\}=\lambda_{i_1}^{(k_0-1)}+c_{i_1 i}$. Вершиной, предшествующей вершине v_{i_1} (в минимальном пути из v_1 в v_i), является вершина v_{i_2}, для которой выполняется равенство $\lambda_{i_1}^{(k_0-1)}=\min\limits_{1\le i'\le n}\{\lambda_{i'}^{(k_0-2)}+c_{i'i_1}\}=\lambda_{i_2}^{(k_0-2)}+c_{i_2 i_1}$ и т.д. (это рассуждение основано на равенстве (3.4)).

Разбор типового варианта. Нагруженный орграф D задан матрицей длин дуг $C(D)$ (см. табл. 3.2). Найти минимальные пути из v_1 во все достижимые вершины.

Решение. Сначала определим таблицу величин $\lambda_i^{(j)}, i=1,2,...,n,\ j=0,1,...,n-1$ (см. табл. 3.3), где $n=7$. Обозначим $\lambda^{(k)}=(\lambda_1^{(k)},...,\lambda_7^{(k)})^{\mathrm{T}}$, где $k=0,1,...,6$. Это столбцы в табл.

3.3. Элементы $\lambda_i^{(0)}$, где $i = 1,2,...,7,$ столбца $\lambda^{(0)}$ определяются согласно (3.2). Из (3.3) следует, что первая строка таблицы 3.3 состоит из нулевых элементов.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7		$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$
v_1	∞	∞	9	∞	∞	2	12		**0**	0	0	0	0	0	0
v_2	1	∞	∞	∞	1	2	4		∞	∞	10	5	5	5	5
v_3	2	1	∞	∞	1	∞	2		∞	9	9	9	**6**	6	6
v_4	∞	1	1	∞	∞	1	∞		∞	∞	∞	**5**	5	5	5
v_5	1	2	∞	2	∞	∞	∞		∞	∞	**3**	3	3	3	3
v_6	∞	∞	∞	∞	1	∞	8		∞	**2**	2	2	2	2	2
v_7	∞	2	1	∞	1	2	∞		∞	12	10	10	9	**8**	8

Табл. 3.2 Табл. 3.3

Далее, используя утверждение 3.1, последовательно определяем (согласно формуле (3.4)) элементы столбца $\lambda^{(1)}$, используя элементы столбца $\lambda^{(0)}$ (а также элементы матрицы $C(D)$), затем находим элементы столбца $\lambda^{(2)}$, используя элементы столбца $\lambda^{(1)}$ и т.д. Например, $\lambda_2^{(3)} = \min\limits_{1 \le i \le 7}\{\lambda_i^{(2)} + c_{i2}\} = 5,$ поскольку при сложении соответствующих столбцов имеем (см. табл. 3.4):

v_2		$\lambda^{(2)}$		
∞	+	0	=	∞
∞	+	10	=	∞
1	+	9	=	10
1	+	∞	=	∞
2	+	3	=	**5**
∞	+	2	=	∞
2	+	10	=	12

Табл. 3.4

и число 5 является минимальным элементом в последнем столбце этой таблицы (выделено жирным шрифтом).

Длина минимального пути из v_1 в v_7 равна 8 (см. утверждение 3.2). В таблице 3.3 жирным шрифтом указаны величины, по которым последовательно находятся вершины в минимальном пути из v_1 в v_7. Минимальное число k_0, при котором $\lambda_7^{(k_0)} = 8,$ равно 5, поэтому выделена величина $\lambda_7^{(5)} = 8$. Вершиной, предшествующей v_7 (в минимальном пути из v_1 в v_7) является вершина v_3, поскольку $\lambda_7^{(5)} = 8 = \min\limits_{1 \le i \le 7}\{\lambda_i^{(4)} + c_{i7}\} = \lambda_3^{(4)} + c_{37} = 6 + 2$ (вершина v_3 находится в первом столбце табл. 3.2, в котором перечисляются вершины орграфа $D,$ напротив выделенного числа $6 = \lambda_3^{(4)}$). Вершиной, предшествующей v_3, является v_4 (вершина v_4 находится в первом столбце табл. 3.2 напротив выделенного числа $5 = \lambda_4^{(3)}$) и т.д. Таким образом, минимальным путем из v_1 в v_7 является $v_1 v_6 v_5 v_4 v_3 v_7$ (см. последовательность выделенных элементов в табл. 3.3). Соответственно $v_1 v_6 v_5 v_4 v_3$,

$v_1v_6v_5v_4$, $v_1v_6v_5$, v_1v_6 – минимальные пути из v_1 в соответствующие вершины. Минимальный путь из v_1 в v_2 находится аналогично. Его длина равна 5. Минимальное число k_0, при котором $\lambda_2^{(k_0)}=5$, равно 3. Вершиной, предшествующей v_2, является вершина v_5, поскольку $\lambda_2^{(3)}=5 \min\limits_{1\le i\le 7}\{\lambda_i^{(2)}+c_{i2}\}=\lambda_5^{(2)}+c_{52}=2+3.$ Далее, как было показано ранее, вершиной, предшествующей v_5, является вершина v_6, а вершиной, предшествующей вершине v_6, является вершина v_1. Таким образом, минимальным путем из v_1 в v_2 является $v_1v_6v_5v_2$.

Тема 4. Деревья и циклы

Граф G называется *деревом*, если он связен и не имеет циклов.

Пример 4.1. Граф G, изображенный на рис. 4.1, является деревом.

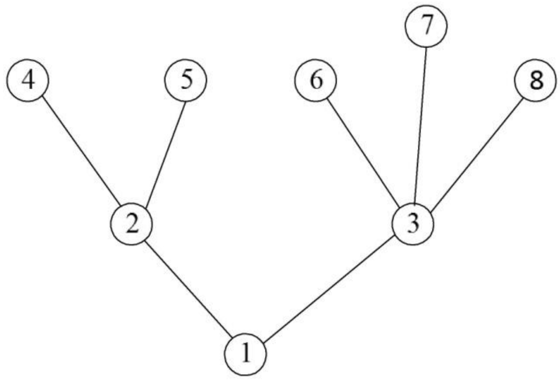


Рис. 4.1

Свойства деревьев. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Граф G есть дерево.

(2) Граф G является связным и не имеет простых циклов.

(3) Граф G является связным и число его ребер ровно на 1 меньше числа вершин.

(4) Любые две различные вершины графа G можно соединить единственной (и притом простой) цепью.

(5) Граф G не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получим ровно один (с точностью до направления обхода и выбора начальной вершины обхода) и притом простой цикл (проходящий через добавляемое ребро).

Остовное дерево связного графа. Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть G – связный граф. Тогда, в силу свойства (3), остовное дерево графа G (если оно существует) должно содержать $n(G)-1$ ребер. Таким образом, любое остовное дерево связного графа G есть результат удаления из G ровно $m(G)-(n(G)-1)=$ $=m(G)-n(G)+1$ ребер. Это число называется *цикломатическим числом* связного графа G и обозначается через $\nu(G)$. Покажем существование остовного дерева для произвольного связного графа G, описав алгоритм его выделения.

Алгоритм 4.1

Шаг 1. Выбираем в G произвольную вершину u_1, которая образует подграф G_1 графа G, являющийся деревом. Полагаем $i=1$.

Шаг 2. Если $i=n=n(G)$, то задача решена и G_i – искомое остовное дерево графа G. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Пусть уже построено дерево G_i, являющееся подграфом графа G и содержащее вершины $u_1,...,u_i$, где $1 \le i \le n-1$. Строим граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новую вершину $u_{i+1} \in V$, смежную в G с некоторой вершиной u_j графа G_i и новое ребро $\{u_j, u_{i+1}\}$ (в силу связности G и того, что $i < n$, указанная вершина u_{i+1} обязательно найдется). Увеличиваем i на 1 и переходим к шагу 2.

Минимальное остовное дерево нагруженного графа. Пусть теперь каждому ребру $x \in X$ связного графа $G = (V, X)$ с непустым множеством ребер X поставлено в соответствие действительное число $l(x)$ – длина ребра x, т.е. граф G является нагруженным. Приведем алгоритм, позволяющий найти остовное дерево графа G с минимальной суммой длин содержащихся в нем ребер (по сравнению со всеми другими остовными деревьями графа G), которое будем называть *минимальным остовным деревом* (МОД) графа G.

Алгоритм 4.2 (выделения МОД нагруженного связного графа G)

Шаг 1. Выбираем в G ребро минимальной длины (если их несколько, то любое). Вместе с инцидентными ему вершинами оно образует подграф G_2 графа G, являющийся деревом. Полагаем $i = 2$.

Шаг 2. Если $i = n = n(G)$, то задача решена и G_i – искомое МОД графа G. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Строим граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбираемое среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не принадлежащей G_i. Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и инцидентную ему вершину, не принадлежащую G_i. Увеличиваем i на 1 и переходим к шагу 2.

Замечание 4.1. Пусть граф G (см. рис. 4.2)

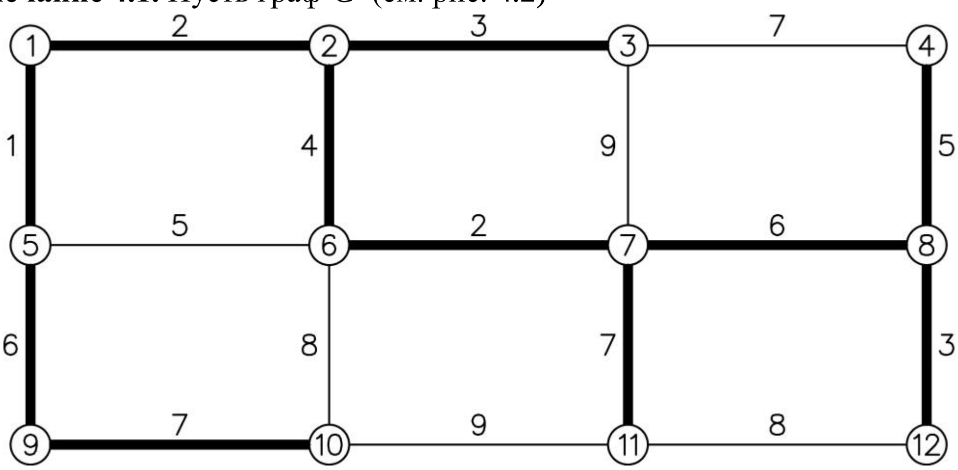


Рис. 4.2

соответствует множеству важных пунктов некоторого города (вокзалы, торговые центры, деловые центры, большие предприятия и т.д.). Нужно соединить эти пункты сетью дорог (например, сетью метрополитена) такой, чтобы было возможно сообщение между любыми двумя пунктами, т.е. выделить связный подграф графа G, содержащий все его вершины. Пусть, далее величины, указанные на ребрах, соответствуют стоимостям строительных работ (т.е. граф G является нагруженным). Тогда, если выделить МОД графа G, то мы получим проект с минимальной общей стоимостью строительных работ.

Разбор типового варианта. Выделить МОД графа G , изображенного на рис. 4.2. **Решение.** Согласно алгоритму 4.2 выбираем ребро $\{v_1, v_5\}$ минимальной длины 1. Выделяем его жирной линией (см. рис. 4.2). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо v_1, либо v_5 с какой-нибудь новой (т.е. отличной от v_1, v_5) вершиной графа G (т.е. выбираем среди ребер $\{v_1, v_2\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_5, v_9\}$). Минимальную длину имеет ребро $\{v_1, v_2\}$. Выделяем его жирной линией (см. рис. 4.2). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо v_1, либо v_2, либо v_5 с какой-нибудь новой вершиной графа G (т.е. выбираем среди ребер $\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_5, v_9\}$). Минимальную длину имеет ребро $\{v_2, v_3\}$. Выделяем его жирной линией (см. рис. 4.2). Следующим ребром минимальной длины среди всех возможных является $\{v_2, v_6\}$, затем $\{v_6, v_7\}$ и т.д. Действуя таким образом, выделяем МОД графа G (см. на рис. 4.2 подграф графа G, ребра которого выделены жирными линиями).

Тема 5. Внутренняя и внешняя устойчивость в графах. Ядра графа

Внутренняя устойчивость в орграфах. Пусть задан орграф $D = (V, X)$. Множество вершин $U \subseteq V$ называется *внутренне устойчивым*, если $\forall v \in U \;\; U \cap D(v) = \varnothing$, т.е. в орграфе D не существует дуги, инцидентной каким-либо двум различным вершинам из U. Внутренне устойчивое множество вершин $U \subseteq V$ называется *максимальным*, если, добавляя к U любую вершину $v \in V \setminus U$, получаем множество, не являющееся внутренне устойчивым. Часто при решении практических задач требуется найти внутренне устойчивые множества с максимальным числом вершин. Их следует искать среди максимальных внутренне устойчивых множеств вершин.

Обозначим через $\sigma(D)$ совокупность всех максимальных внутренне устойчивых множеств вершин орграфа D. Тогда число $\alpha(D) = \max\limits_{U \in \sigma(D)} |U|$ называется *числом внутренней устойчивости орграфа* D.

Пример 5.1. Для орграфа D, изображенного на рис. 5.1,

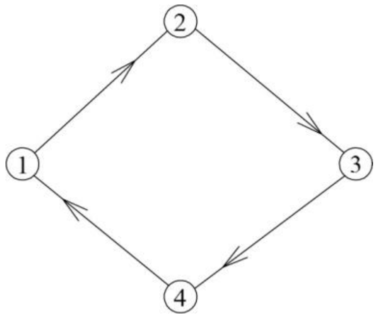


Рис. 5.1

максимальными внутренне устойчивыми множествами вершин являются: $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$; множество $\{v_1, v_2\}$ не является внутренне устойчивым; множество $\{v_1\}$ является внутренне устойчивым, но не максимальным.

Метод Магу отыскания семейства максимальных внутренне устойчивых множеств вершин орграфа $D.$ Пусть $D=(V, X)$ – орграф, где $X \neq \varnothing,$ $V=\{v_1,..., v_n\},$ $A=A(D)=[a_{ij}]_{n\times n}$ – матрица смежности орграфа $D.$ Составим формулу логики высказываний $F(Y_1,...,Y_n) = \underset{a_{ij}=1}{\&} (\overline{Y_i} \vee \overline{Y_j}),$ где $Y_1,...,Y_n$ – высказывательные переменные и под записью $"a_{ij}=1"$ понимается множество всех пар $<i, j>$ таких, что $i, j \in \{1,2,..., n\}, a_{ij}=1.$

Применяя дистрибутивность $\&$ относительно $\vee,$ приводим F к дизъюнктивной нормальной форме (кратко, ДНФ; см. [1, стр. 37]), а затем сокращаем ее до тех пор, пока это возможно, используя равносильности:

$$A \equiv A \vee (A\&B), \quad A \equiv A \vee A, \quad A \equiv A\&A, \tag{5.1}$$

где A, B – произвольные формулы логики высказываний. В результате получим формулу F_1 (равносильную F), находящуюся в ДНФ, каждому дизъюнктивному члену $\overline{Y}_{i_1}\&...\&\overline{Y}_{i_k}$ которой соответствует максимальное внутренне устойчивое множество вершин $V \setminus \{v_{i_1},..., v_{i_k}\}.$

Замечание 5.1. Перед приведением формулы F к ДНФ часто оказывается целесообразным упростить формулу $F,$ воспользовавшись равносильностями:

$$A \equiv A\&A, \ (A\vee B)\&(A\vee C)\&...\&(A\vee D) \equiv A \vee (B\&C\&...\&D), \tag{5.2}$$

где A, B, C, D – произвольные формулы логики высказываний.

Внутренняя устойчивость в неориентированных графах. Внутренне устойчивые множества вершин аналогично можно определить и для неориентированного графа $G=(V, X),$ а именно: множество вершин $U \subseteq V$ называется *внутренне устойчивым*, если $\forall v \in U \ \ U \cap G(v) = \varnothing,$ где $G(v)=\{w\in V \,|\, \{v, w\} \in X\},$ т.е. никакие две вершины из U не являются смежными. Нетрудно видеть, что если графу $G=(V, X)$ поставить в соответствие орграф D с множеством вершин $V,$ заменяя каждое ребро $\{v, w\}$ графа G на любую дугу из $(v, w), (w, v)$ (или на обе эти дуги), то в получаемом таким образом орграфе совокупность внутренне устойчивых множеств вершин совпадает с совокупностью внутренне устойчивых множеств вершин графа $G.$ Но тогда и совокупность максимальных внутренне устойчивых множеств вершин графа G совпадает с совокупностью максимальных внутренне устойчивых множеств вершин орграфа $D,$ а следовательно, для их отыскания можно воспользоваться методом Магу, применяя его к орграфу $D.$

Разбор типового варианта. Используя метод Магу, определить: (а) совокупность максимальных внутренне устойчивых множеств вершин орграфа $D,$ изображенного на рис. 5.2, а также число $\alpha(D).$

Решение. Составим матрицу смежности $A=A(D)=[a_{ij}]_{5\times 5}$ (см. табл. 5.1).

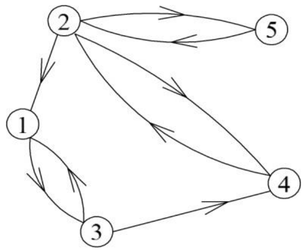


Рис. 5.2

$$A(D)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Табл. 5.1

Согласно методу Магу имеем:

$$\mathop{\&}_{a_{ij}=1}(\overline{Y}_i \vee \overline{Y}_j) = (\overline{Y}_1 \vee \overline{Y}_3)\&(\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_1)\&(\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_4)\&(\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_5)\&(\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_1)\&(\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_4)\&(\overline{Y}_4 \vee \overline{Y}_2)\&(\overline{Y}_5 \vee \overline{Y}_2) \equiv$$

(упрощаем полученную формулу, используя (5.2), и опускаем символ $\&$)

$$\equiv (\overline{Y}_1 \vee \overline{Y}_3)(\overline{Y}_1 \vee \overline{Y}_2)(\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_4)(\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_5)(\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_4) \equiv (\overline{Y}_1 \vee \overline{Y}_2\overline{Y}_3)(\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_4\overline{Y}_5)(\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_4) \equiv$$

(приводим полученную формулу к ДНФ, используя дистрибутивность $\&$ относительно $\vee,$ и упрощаем ее, используя равносильности (5.1))

$$\equiv (\overline{Y}_1\overline{Y}_2 \vee \overline{Y}_2\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_1\overline{Y}_4\overline{Y}_5 \vee \overline{Y}_2\overline{Y}_3\overline{Y}_4\overline{Y}_5)(\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_4) \equiv \overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_4 \vee \overline{Y}_2\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_2\overline{Y}_3\overline{Y}_4 \vee \overline{Y}_1\overline{Y}_3\overline{Y}_4\overline{Y}_5 \vee$$

$$\vee \overline{Y}_1\overline{Y}_4\overline{Y}_5 \vee \overline{Y}_2\overline{Y}_3\overline{Y}_4\overline{Y}_5 \vee \overline{Y}_2\overline{Y}_3\overline{Y}_4\overline{Y}_5 \equiv \overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_4 \vee \overline{Y}_2\overline{Y}_3 \vee \overline{Y}_1\overline{Y}_4\overline{Y}_5.$$

Таким образом, мы получили формулу, находящуюся в ДНФ. Дальнейшее ее сокращение с использованием равносильностей (5.1) невозможно, а следовательно, искомыми максимальными внутренне устойчивыми множествами вершин орграфа D являются: $\{v_3, v_5\}$, $\{v_1, v_4, v_5\}$, $\{v_2, v_3\}$, и при этом $\alpha(D) = 3$.

Внешняя устойчивость в орграфах. Пусть задан орграф $D = (V, X)$. Множество вершин $U \subseteq V$ называется *внешне устойчивым*, если $\forall v \in V \setminus U \quad U \cap D(v) \neq \varnothing,$ т.е. для любой вершины $v \in V,$ не принадлежащей $U,$ найдется дуга в орграфе $D,$ исходящая из v и заходящая в одну из вершин множества $U.$ Внешне устойчивое множество вершин $U \subseteq V$ называется *минимальным*, если после удаления из U произвольной вершины получаем множество, не являющееся внешне устойчивым. Часто при решении практических задач требуется найти внешне устойчивые множества с минимальным числом вершин. Их следует искать среди минимальных внешне устойчивых множеств вершин.

Пример 5.2. Для орграфа D из примера 5.1 множества вершин $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ являются внешне устойчивыми, а множество $\{v_1, v_2\}$ таковым не является, поскольку $v_3 \notin \{v_1, v_2\},$ но при этом $(v_3, v_1) \notin X$, $(v_3, v_2) \notin X$. Докажите, что $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ – минимальные внешне устойчивые множества вершин.

Обозначим через $\theta(D)$ совокупность всех минимальных внешне устойчивых множеств вершин орграфа $D.$ Тогда число $\beta(D) = \min\limits_{U \in \theta(D)} |U|$ называется *числом внешней устойчивости орграфа D*.

Метод Магу отыскания семейства минимальных внешне устойчивых множеств вершин орграфа $D.$ Пусть $D = (V, X)$ – орграф, где $V = \{v_1, ..., v_n\}.$ Составим формулу логики высказываний $F(Y_1, ..., Y_n) = \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n}(Y_i \vee \bigvee\limits_{a_{ij}=1} Y_j)$ (здесь при каждом фиксированном i под записью $"a_{ij} = 1"$ понимается множество всех $j \in \{1, 2, ..., n\}$ таких, что $a_{ij} = 1$). Применяя дистрибутивность $\&$ относительно $\vee,$ приводим F к ДНФ, а затем сокращаем ее до тех пор, пока это возможно, используя равносильности (5.1). В результате получаем формулу F_1, равносильную F, находящуюся в ДНФ, каждому дизъюнктивному члену $Y_{i_1} \& Y_{i_2} \& ... \& Y_{i_k}$ которой соответствует минимальное внешне устойчивое множество вершин $\{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}\}$.

Замечание 5.2. Перед приведением формулы F к ДНФ часто оказывается целесообразным упростить формулу F, применяя равносильности (5.2), а также

$$A \& (A \vee B) \equiv A. \qquad (5.3)$$

Внешняя устойчивость в неориентированных графах. Внешне устойчивые множества вершин можно аналогичным образом определить и для неориентированного графа $G=(V,X)$, а именно: множество $U \subseteq V$ называется внешне устойчивым, если $\forall v \in V \setminus U$ $U \cap G(v) \neq \varnothing$, т.е. любая вершина $v \in V$, не принадлежащая U, является смежной с какой-нибудь вершиной из U. Нетрудно видеть, что если графу $G=(V,X)$ поставить в соответствие орграф с множеством вершин V, заменяя каждое ребро $\{v,w\}$ графа G на две дуги $(v,w),(w,v)$, то в получаемом таким образом орграфе D совокупность внешне устойчивых множеств вершин совпадает с совокупностью внешне устойчивых множеств вершин графа G (поскольку в этом случае $\forall v \in V$ $G(v)=D(v)$). Но тогда и совокупность минимальных внешне устойчивых множеств вершин графа G совпадает с совокупностью минимальных внешне устойчивых множеств вершин орграфа D, а следовательно, для их отыскания можно воспользоваться методом Магу (применяя его к орграфу D). При этом, очевидно, используемая в алгоритме матрица $A(D)$ полностью совпадает с $A(G)$. Таким образом, метод Магу без изменений переносится и на неориентированные графы.

Разбор типового варианта (продолжение). (б) Используя метод Магу, определить совокупность минимальных внешне устойчивых множеств вершин орграфа D, изображенного на рис. 5.2, а также число $\beta(D)$.

Решение. Согласно методу Магу имеем:

$$\underset{i=1}{\overset{5}{\&}}(Y_i \vee \bigvee_{a_{ij}=1} Y_j) = (Y_1 \vee Y_3)\&(Y_2 \vee Y_1 \vee Y_4 \vee Y_5)\&(Y_3 \vee Y_1 \vee Y_4)\&(Y_4 \vee Y_2)\&(Y_5 \vee Y_2) \equiv$$

(опускаем символ $\&$ и упрощаем полученную формулу, используя равносильности (5.2), (5.3))

$$\equiv (Y_1 \vee Y_3)(Y_4 \vee Y_2)(Y_5 \vee Y_2) \equiv (Y_1 \vee Y_3)(Y_2 \vee Y_4 Y_5) \equiv$$

(приводим полученную формулу к ДНФ, используя дистрибутивность $\&$ относительно $\vee$, и упрощаем ее, используя равносильности (5.1))

$$\equiv Y_1 Y_2 \vee Y_1 Y_4 Y_5 \vee Y_2 Y_3 \vee Y_3 Y_4 Y_5.$$

Таким образом, мы получили формулу, находящуюся в ДНФ. Дальнейшее ее сокращение с использованием равносильностей (5.1) невозможно, а следовательно, искомыми минимальными внешне устойчивыми множествами вершин орграфа D являются: $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_4,v_5\}$, $\{v_2,v_3\}$, $\{v_3,v_4,v_5\}$, и при этом $\beta(D)=2$.

Ядра орграфа. Пусть задан орграф $D=(V,X)$. Множество вершин $N \subseteq V$ называется ядром орграфа D, если N – одновременно внутренне и внешне устойчивое множество, т.е., если выполняются условия:

$(N1) \quad \forall v \in N \quad N \cap D(v) = \varnothing;$

$(N2) \quad \forall v \in V \setminus N \quad N \cap D(v) \neq \varnothing.$

Замечание 5.3. Аналогично определяется ядро и для неориентированного графа $G = (V, X),$ при этом в условиях $(N1), (N2)$ $D(v)$ заменяется на $G(v).$

Орграф может не иметь ядра, иметь одно или несколько ядер. Заметим, что если орграф D имеет ядро $N,$ то $\beta(D) \leq |N| \leq \alpha(D).$

Пример 5.3. Рассмотрим орграф, изображенный на рис. 5.3. Он не имеет ядер, поскольку любое множество с одной вершиной не является внешне устойчивым, а любое множество с двумя или тремя вершинами не является внутренне устойчивым.

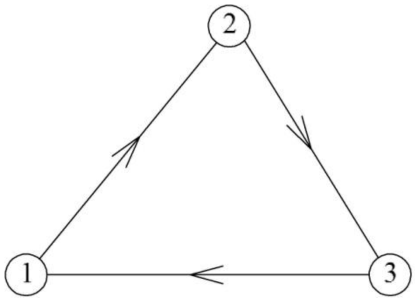


Рис. 5.3

Пример 5.4. В продолжение примеров 5.1–2 имеем: $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ – ядра орграфа $D,$ изображенного на рис. 5.1.

Теорема 5.1. Для того чтобы множество вершин $N \subseteq V$ являлось ядром орграфа $D = (V, X)$ (графа $G = (V, X)$), необходимо и достаточно, чтобы оно было одновременно максимальным внутренне устойчивым и минимальным внешне устойчивым.

Из теоремы 5.1 следует, что для выделения ядер орграфа D достаточно, например, найти все минимальные внешне устойчивые множества вершин орграфа $D,$ а затем выбрать из них внутренне устойчивые множества.

Разбор типового варианта (продолжение). (в) Определить ядра орграфа $D,$ изображенного на рис. 5.2.

Решение. Выберем из минимальных внешне устойчивых множеств вершин орграфа D множества, являющиеся внутренне устойчивыми. Такими множествами являются: $\{v_1, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3\}.$ В силу теоремы 5.1 – это ядра орграфа $D,$ и других ядер в D нет.

Тема 6. Функции на вершинах орграфа. Порядковая функция. Функция Гранди

Рассмотрим орграф $D = (V, X),$ не содержащий контуров, и определим множества $V_0, V_1, ..., V_r:$

$$\begin{aligned}
&V_0 = \{v \in V \mid D(v) = \varnothing\},\\
&V_1 = \{v \in V \setminus V_0 \mid D(v) \subseteq V_0\},\\
&V_2 = \{v \in V \setminus (V_0 \cup V_1) \mid D(v) \subseteq V_0 \cup V_1\}, \qquad (6.1)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&V_r = \{v \in V \setminus \bigcup_{k=0}^{r-1} V_k \mid D(v) \subseteq \bigcup_{k=0}^{r-1} V_k\},
\end{aligned}$$

где r – наименьшее число такое, что $V \setminus \bigcup_{k=0}^{r} V_k = \varnothing$. Множества $V_0, V_1, ..., V_r$ называются *уровнями орграфа* D. Справедлива

Теорема 6.1. Уровни орграфа $D = (V, X)$ без контуров являются непустыми множествами, образующими разбиение множества его вершин V (т.е. $V = \bigcup_{k=0}^{r} V_k$ и $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$).

Справедливо также утверждение, обратное теореме 6.1.

Утверждение 6.1. Пусть $D = (V, X)$ – орграф, $r \geq 0, V_0, V_1, ..., V_r$ – непустые множества, удовлетворяющие (6.1), такие, что $V = \bigcup_{k=0}^{r} V_k$. Тогда D – орграф без контуров.

Функция $O(v)$, определенная на множестве вершин V орграфа без контуров $D = (V, X)$ и ставящая в соответствие каждой вершине $v \in V$ номер уровня, которому она принадлежит, называется *порядковой функцией орграфа* D.

Пример 6.1. Разобьем орграф D, изображенный на рис. 6.1, на уровни и определим порядковую функцию $O(v)$. Согласно (6.1) имеем

$V_0 = \{v \in V \mid D(v) = \varnothing\} = \{v_4, v_6\}$,

$V_1 = \{v \in V \setminus V_0 \mid D(v) \subseteq V_0\} = \{v_1, v_5\}$,

$V_2 = \{v \in V \setminus (V_0 \cup V_1) \mid D(v) \subseteq V_0 \cup V_1\} = \{v_3\}$,

$V_3 = \{v \in V \setminus (V_0 \cup V_1 \cup V_2) \mid D(v) \subseteq V_0 \cup V_1 \cup V_2\} = \{v_2\}$,

$V \setminus (V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3) = \varnothing$.

Определив множества V_0, V_1, V_2, V_3, найдем значения порядковой функции $O(v)$, $v \in V$. На рис. 6.1 они указаны при вершинах.

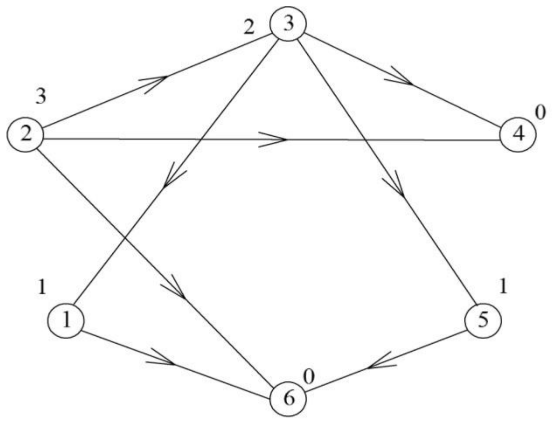


Рис. 6.1

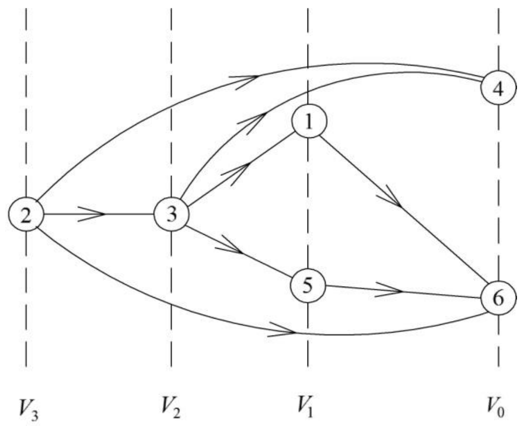


Рис. 6.2

Замечание 6.1. Для наглядности после разбиения некоторого орграфа D на уровни имеет смысл перерисовать его, последовательно расположив вершины орграфа D на вертикальных прямых; при этом вершины одного уровня располагаются на одной вертикальной прямой (см. на рис. 6.2 новое изображение орграфа D, изображенного на рис. 6.1).

Приведем простой алгоритм выделения уровней орграфа без контуров, использующий задание орграфа матрицей смежности.

Алгоритм 6.1 (нахождения уровней орграфа $D = (V, X)$ без контуров)

Шаг 1. Выпишем матрицу смежности $A(D)$. Образуем под матрицей $A(D)$ строку Λ_0, в i-ом месте которой укажем число единиц в i-й строке матрицы $A(D)$. Уровень V_0 образуют вершины, которым в строке Λ_0 соответствует число 0. Если $V = V_0$, то задача решена и V_0 – единственный уровень орграфа D. В противном случае переходим к шагу 2.
Шаг 2. Образуем под строкой Λ_0 строку Λ_1, ставя под каждым нулем строки Λ_0 символ $\times$, а на любом другом i-м месте – число единиц в i-й строке матрицы $A(D)$, не учитывая единицы в столбцах, находящихся над символами $\times$ в строке Λ_1. Уровень V_1 образуют вершины, которым в строке Λ_1 соответствует число 0. Полагаем $j = 1$.
Шаг 3. Пусть при некотором $j \geq 1$ уже построены строки $\Lambda_0,...,\Lambda_j$, по которым получены множества $V_0,...,V_j$. Если строка Λ_j состоит из нулей и символов $\times$, то задача решена и при $r = j$ $V_0,...,V_j$ – уровни орграфа D. В противном случае переходим к шагу 4.
Шаг 4. Образуем под строкой Λ_j строку Λ_{j+1}, ставя под каждым нулем и символом $\times$ строки Λ_j символ $\times$, а на любом другом i-м месте – число единиц в i-й строке матрицы $A(D)$, не учитывая единицы в столбцах, находящихся над символами $\times$ в строке Λ_{j+1}. Уровень V_{j+1} образуют вершины, которым в строке Λ_{j+1} соответствует число 0. Увеличиваем j на 1 и переходим к шагу 3.

Следующее утверждение говорит о том, что наряду с нахождением уровней орграфа без контуров алгоритм 6.1 позволяет проверить наличие хотя бы одного контура у произвольного орграфа.

Утверждение 6.2. Для того, чтобы в орграфе $D = (V, X)$ имелся хотя бы один контур, необходимо и достаточно, чтобы в результате применения к D алгоритма 6.1 при некотором $j \geq 0$ появилась строка Λ_j без нулей.

Разбор типового варианта. (а) Используя алгоритм 6.1, разбить орграф, изображенный на рис. 6.1 на уровни. Привести новое изображение орграфа в соответствии с замечанием 6.1.

Решение. Составим матрицу смежности $A(D)$ орграфа D, а затем укажем под ней строки $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, являющиеся результатом работы алгоритма 6.1 (см. табл. 6.1). Из табл. 6.1 следует, что уровнями орграфа D являются $V_0 = \{v_4, v_6\}$, $V_1 = \{v_1, v_5\}$, $V_2 = \{v_3\}$, $V_3 = \{v_2\}$. Изображение орграфа D, построенное с учетом замечания 6.1, приведено на рис. 6.2.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	0	0	0	0	1
v_2	0	0	1	1	0	1
v_3	1	0	0	1	1	0
v_4	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	1
v_6	0	0	0	0	0	0
Λ_0	1	3	3	0	1	0

Λ_1	0	1	2	×	0	×
Λ_2	×	1	0	×	×	×
Λ_3	×	0	×	×	×	×

Табл. 6.1

Функция Гранди. Рассмотрим орграф $D=(V,X)$. Функция $g(v)$, ставящая в соответствие каждой вершине $v\in V$ целое число $g(v)\geq 0$, называется *функцией Гранди* для орграфа D, если в каждой вершине $v\in V$ число $g(v)$ является минимальным из всех целых неотрицательных чисел, не принадлежащих множеству $\{g(w)\,|\,w\in D(v)\}$, и $g(v)=0$ при $D(v)=\varnothing$.

Если для орграфа D существует функция Гранди, то говорят, что орграф D *допускает* (в противном случае – *не допускает*) функцию Гранди. Не всякий орграф D допускает функцию Гранди (см. пример 6.3), а если и допускает, то она не обязательно единственная (см. пример 6.4).Из определения функции Гранди следует, что справедливо

Утверждение 6.3. Если орграф $D=(V,X)$ допускает функцию Гранди, то найдется вершина $v\in V$ такая, что $g(v)=0$.

Пример 6.2. На рис. 6.3 приведено изображение орграфа D, допускающего функцию Гранди, около каждой вершины которого указано значение этой функции. Если произвести замену: $0\to 1, 1\to 0$, то получим еще одну функцию Гранди для D.

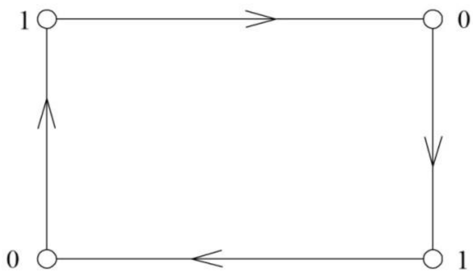


Рис. 6.3

Пример 6.3. Покажем, что орграф D, изображенный на рис. 6.4, не допускает функцию Гранди. Предположим обратное, т.е. орграф D допускает функцию Гранди. Используя утверждение 6.3, получаем, что на некоторой вершине значение функции Гранди равно нулю. Пусть для определенности $g(v_1)=0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Тогда в силу того, что $D(v_3)=\{v_1\}$, $D(v_2)=\{v_3\}$, $D(v_1)=\{v_2\}$, последовательно получаем: $g(v_3)=1$, $g(v_2)=0$, $g(v_1)=1$, а это противоречит равенству $g(v_1)=0$.

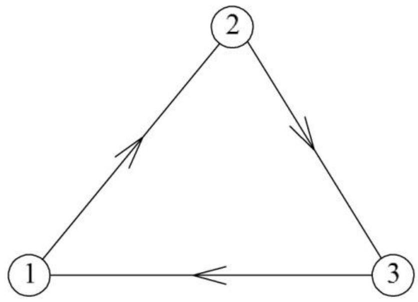


Рис. 6.4

Приведем достаточное условие существования функции Гранди, а также алгоритм ее определения.

Теорема 6.2. Пусть $D=(V,X)$ – орграф без контуров. Тогда D допускает и притом единственную функцию Гранди.

Эту теорему обосновывает

Алгоритм 6.2 (определения функции Гранди на множестве вершин V орграфа $D=(V,X)$ без контуров)

Согласно теореме 6.1 множество вершин V орграфа D можно разбить на уровни $V_0, V_1, ..., V_r$. По определению функции Гранди

$$\forall v \in V_0 \;\; g(v)=0; \;\; \forall v \in V_1 \;\; g(v)=1. \qquad (6.2)$$

Заметим, что значения функции Гранди на каждом уровне V_i, где $i \geq 2$, однозначно находятся по ее значениям на предыдущих уровнях $V_0, V_1, ..., V_{i-1}$ (поскольку $\forall v \in V_i$ $D(v) \subseteq \bigcup_{k=0}^{i-1} V_k$), а следовательно, исходя из (6.2), ее можно однозначно определить на всех последующих уровнях.

Следующая теорема показывает, что по функции Гранди орграфа можно легко определить его ядро.

Теорема 6.3. Если орграф $D=(V,X)$ допускает функцию Гранди $g(v)$, то множество вершин $N=\{v \in V \mid g(v)=0\}$ является ядром этого орграфа. В случае, когда орграф D является бесконтурным, это ядро является единственным.

Разбор типового варианта (продолжение). (б) Используя алгоритм 6.2, найти значения функции Гранди для орграфа D, изображенного на рис. 6.1, а также его единственное ядро (см. теорему 6.3).

Решение. Используя разбиение орграфа D на уровни (см. рис. 6.2), с учетом (6.2) получаем: $g(v_4)=g(v_6)=0$, $g(v_1)=g(v_5)=1$. Далее по определению функции Гранди находим значение этой функции для вершины $v_3 \in V_2$, а именно, $g(v_3)=2$, а затем для вершины $v_2 \in V_3$, а именно, $g(v_2)=1$ (см. на рис. 6.5 изображение орграфа D, разбитого на уровни в соответствии с рис. 6.2, около каждой вершины которого указано значение функции Гранди на этой вершине). Единственным ядром этого орграфа является множество $N=\{v \in V \mid g(v)=0\}=\{v_4, v_6\}$.

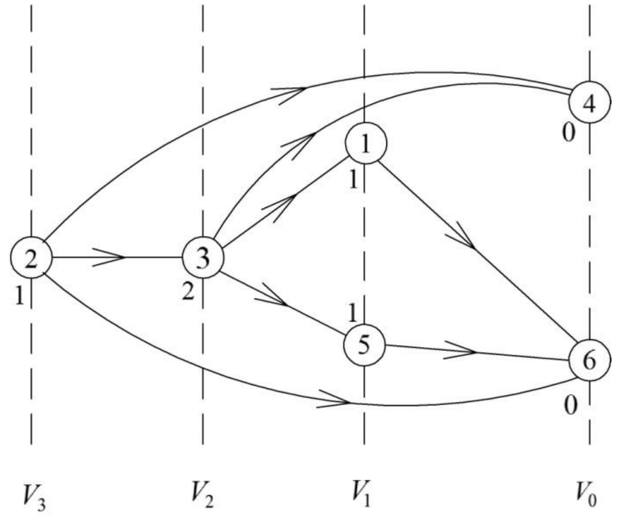


Рис. 6.5

Тема 7. Хроматическое число графа. Задача об оптимальном раскрашивании вершин графа. Задача о минимальном числе помещений для хранения продуктов

Пусть $G=(V,X)$ – неориентированный граф, где $V=\{v_1,...,v_n\}$. Рассмотрим следующую задачу: (а) определить минимальное количество цветов $p=p(G)$, необходимое для раскрашивания вершин графа G так, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены одним цветом; (б) разбить множество вершин V на подмножества $V_1,...,V_p$ такие, что $V=V_1\cup...\cup V_p$, $V_i\cap V_j=\varnothing$ при $i\neq j$, и чтобы множества $V_1,...,V_p$ являлись внутренне устойчивыми (т.е. чтобы никакие две вершины из любого множества V_i не были смежными, а следовательно, могли быть окрашенными в один цвет). Такая задача называется задачей об оптимальном раскрашивании вершин неориентированного графа G, а число $p=p(G)$ называется его *хроматическим числом*.

Будем предполагать, что граф G является связным. В противном случае для достижения оптимального раскрашивания отдельно раскрашиваем множества вершин каждой компоненты связности графа G. Тогда хроматическим числом графа G является максимальное из хроматических чисел его компонент связности.

Опишем два алгоритма раскрашивания вершин графа G. Первый является приближенным («эвристическим»), дающим в некоторых случаях оптимальное раскрашивание вершин графа G. Второй – гораздо более сложный, дающий во всех случаях оптимальное раскрашивание вершин графа G.

Алгоритм 7.1 («эвристический»)

Окрашиваем вершину v_1 цветом 1. Окрашиваем вершину v_2 цветом 1, если она не является смежной с вершиной v_1, или цветом 2, если она является смежной с вершиной v_1. Каждую вершину v_k (где $1\le k\le n$) окрашиваем цветом с минимальным номером среди номеров $\{1,2,...,k\}\setminus N_k$, где N_k – множество номеров цветов вершин $v_1,...,v_{k-1}$, смежных с вершиной v_k.

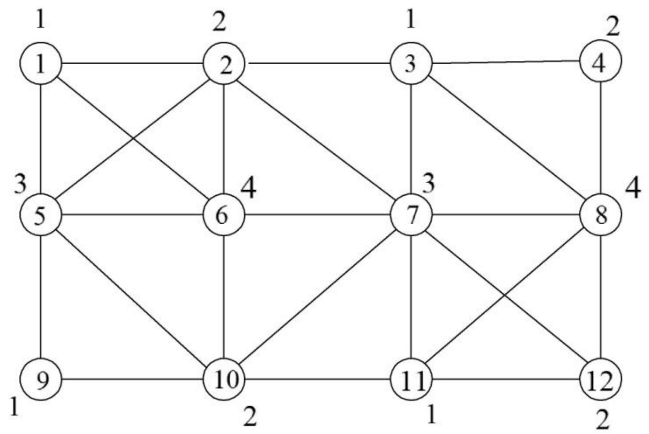


Рис. 7.1

Пример 7.1. Применим алгоритм 7.1 к графу G, изображенному на рис. 7.1. Действуя в соответствии с алгоритмом 7.1, окрашиваем вершину v_1 цветом 1, и, поскольку вершина v_2 является смежной с v_1, окрашиваем ее цветом 2. Вершина v_3 является смежной с v_2, но не с v_1, поэтому $N_3 = \{2\}$, $\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$, минимальным номером в множестве $\{1, 3\}$ является 1, а следовательно, вершина v_3 окрашивается цветом 1. Далее вершину v_4 окрашиваем цветом с номером $\min\{\{1, 2, 3, 4\} \setminus N_4\} = \min\{\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1\}\} = 2$, вершину v_5 – цветом с номером $\min\{\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus N_5\} = \min\{\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 2\}\} = 3$, вершину v_6 – цветом с номером $\min\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus N_6\} = \min\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{1, 2, 3\}\} = 4$, и т.д. Указываем около каждой вершины на рис. 7.1 номер цвета, в который эта вершина окрашивается. По окончании работы алгоритма имеем: $V = V_1 \cup ... \cup V_r$, где $r = 4$, V_i – множество вершин, окрашенных цветом с номером i, где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$; $V_1 = \{v_1, v_3, v_9, v_{11}\}$, $V_2 = \{v_2, v_4, v_{10}, v_{12}\}$, $V_3 = \{v_5, v_7\}$, $V_4 = \{v_6, v_8\}$; $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$; r – количество цветов, которое необходимо для такого раскрашивания. При этом никакие две различные вершины из V_i, где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, не являются смежными.

Для того чтобы убедиться в оптимальности полученного раскрашивания вершин связного графа G (полученного с использованием алгоритма 7.1 или любого другого «эвристического» алгоритма) нередко помогают следующие простые утверждения.

Утверждение 7.1. Если связный граф G с $n(G) \geq 2$ вершинами не содержит циклов или любой его простой цикл имеет четную длину, то этот граф является *бихроматическим,* т.е. $p(G) = 2$ (см. на рис. 7.2 пример графа с оптимальным раскрашиванием вершин, у которого отсутствуют простые циклы нечетной длины).

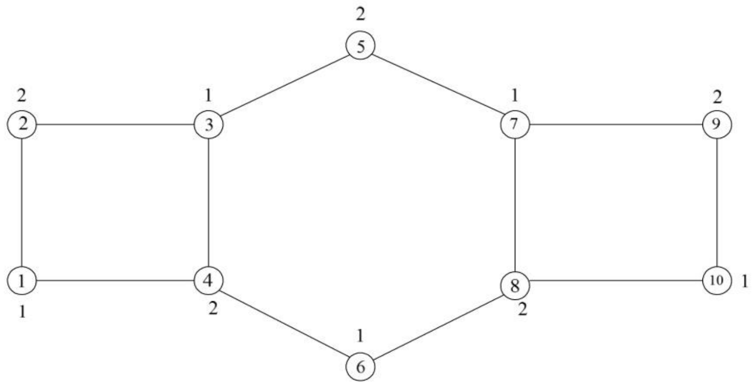


Рис. 7.2

Утверждение 7.2. Если связный граф G с $n(G) \geq 3$ вершинами имеет хотя бы один цикл нечетной длины, то $p(G) \geq 3$.

На рис. 7.3 приведено оптимальное раскрашивание вершин графа, содержащего цикл нечетной длины.

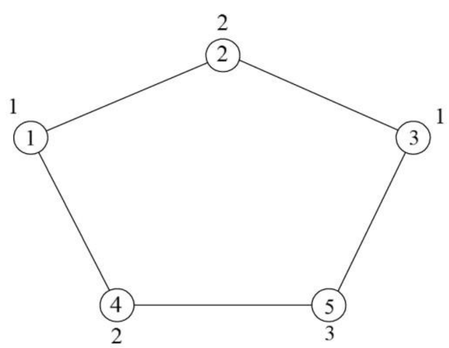


Рис. 7.3

Замечание 7.1. Используя утверждение 2.2, нетрудно показать, что для того, чтобы у графа G с $n(G)=2k$ (или $n(G)=2k+1$ вершинами) отсутствовали простые циклы нечетной длины, необходимо и достаточно, чтобы в матрице $K_o = A^3 \vee ... \vee A^{2k-1}$ ($K_o = A^3 \vee ... \vee A^{2k+1}$), где $A = A(G)$ – матрица смежности графа G, отсутствовали ненулевые диагональные элементы.

Нам понадобится следующее определение. Граф G называется *полным,* если вместе с любыми его вершинами $v, w,$ где $v \neq w,$ он содержит также ребро $\{v, w\}$.

Утверждение 7.3. Если у связного графа G имеется полный подграф с k вершинами, где $k \in \mathrm{N},$ то $p(G) \geq k$ (см. на рис. 7.4 полные графы для $k = 2, 3, 4, 5$ и соответствующие оптимальные раскрашивания их вершин).

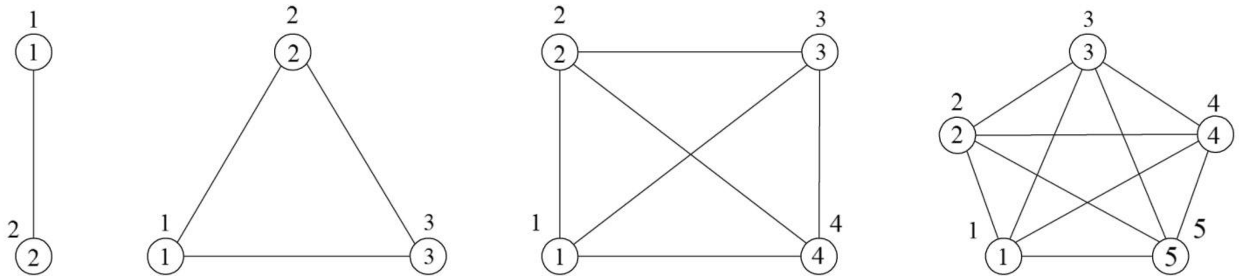


Рис. 7.4

В соответствии с приведенными утверждениями заметим, что граф G из примера 7.1 содержит полный подграф с 4 вершинами (например, порожденный вершинами v_1, v_2, v_5, v_6), а следовательно, $p(G) \geq 4$ (см. утверждение 7.3). Но тогда раскрашивание вершин, найденное с помощью алгоритма 7.1 и приведенное на рис. 7.1, является оптимальным, т.е. $p(G) = 4.$

Метод «ветвей и границ». Как будет видно из последующих примеров, алгоритм 7.1 далеко не всегда дает оптимальное раскрашивание вершин графа. Для того, чтобы раскрашивание вершин связного графа $G = (V, X),$ где $V = \{v_1,..., v_n\},$ было гарантированно оптимальным можно применить так называемый *метод «ветвей и границ»*. В этом методе решается задача минимизации некоторой *целевой функции* $f(x)$ на конечном множестве *допустимых решений* $P.$ Допустимыми решениями (или *допустимыми последовательностями*) являются последовательности $(i_1,..., i_n)$ (кратко – *раскраски*), где $i_j \in \{1,2,..., n\},$ такие, что вершина v_j окрашивается цветом с номером i_j, $j = 1,2,..., n,$ и при этом никакие две смежные вершины не окрашиваются одним цветом, т.е. $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in X \Rightarrow i_{j_1} \neq i_{j_2}$. Совершенно аналогично будем понимать допустимость любой части этой последовательности $(i_1,..., i_j),$ и называть ее *раскраской множества вершин* $\{v_1,..., v_j\},$ где $j \in \{1,2,..., n-1\}.$

Ищется последовательность, на которой достигается минимум целевой функции $f(i_1,..., i_n) = \max\{i_1,..., i_n\}$ на множестве допустимых решений $P.$ Эта последовательность, очевидно, и укажет нам оптимальное раскрашивание вершин графа $G.$

Будем искать оптимальное раскрашивание вершин графа G на дереве возможных решений (раскрасок) G_T. Это дерево состоит из n уровней: 1-ый уровень соответствует вершине v_1 и каждый j-й уровень – вершине v_j, где $j \in \{1,2,..., n\}.$ Совокупность вершин каждого j-го уровня соответствует допустимым номерам цветов для окрашивания j-ой вершины. При изображении дерева решений эти номера будут указываться внутри вершин каждого j-го уровня (см. на рис. 7.6 изображение дерева возможных решений G_T для графа, изображенного на рис. 7.5).

Замечание 7.2. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что для любой раскраски $(i_1,..., i_n) \in P$ выполняется

$$i_1 = 1,\ \forall j \in \{2,..., n\}\ \ i_j \le \max\{i_1,..., i_{j-1}\} + 1, \qquad (7.1)$$

так как, если имеется некоторая раскраска, то всегда можно перенумеровать цвета так, чтобы выполнялось это условие. Из (7.1), в частности, следует, что

$$i_j \le j,\quad j = 1,2,..., n. \qquad (7.2)$$

Пример 7.2. Если раскраска вершин некоторого графа G соответствует второй строке табл. 7.1, то после перенумерации цветов она переходит в раскраску, соответствующую третьей строке этой таблицы, а эта раскраска удовлетворяет (7.1).

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
5	3	1	2	4	1	3	4	5	4
1	2	3	4	5	3	2	5	1	5

Табл. 7.1

В соответствии с замечанием 7.2 (см. условие (7.2)) на первом уровне дерева G_T, соответствующего вершине v_1, присутствует единственная вершина с номером цвета 1, а на каждом j-ом уровне (соответствующем вершине v_j), где $j \in \{2,..., n\}$, – вершины с номерами цветов из множества $\{1,2,..., j\}$. Для каждого $j \in \{2,..., n\}$ никакие две вершины j-го уровня не являются смежными (иначе G_T не будет деревом, поскольку в нем будут присутствовать циклы).

Единственная вершина первого уровня с номером цвета 1 соединяется ребрами с вершинами второго уровня, соответствующими возможным номерам цветов вершины v_2. При этом, в силу (7.1), если вершины v_1, v_2 являются смежными, то единственной вершиной второго уровня является вершина с номером цвета 2, в противном случае вершинами второго уровня являются вершины с номерами цветов 1, 2, расположенные на его изображении в порядке возрастания этих номеров (см. рис. 7.6).

Вершины второго уровня соединяются ребрами с вершинами третьего уровня, соответствующими возможным номерам цветов вершины v_3. Если на втором уровне оказалась единственная вершина с номером цвета 2, то в силу (7.1) эта вершина соединяется с вершинами третьего уровня с номерами цветов $i_3 \in \{1, 2, 3\}$, для которых последовательность $(1, 2, i_3)$ является допустимой (расположенными на его изображении в порядке возрастания номеров). В случае, если на втором уровне находятся две вершины с номерами цветов 1, 2, то (в соответствии с условием (7.1)) вершина с номером цвета 1 соединяется с вершинами третьего уровня с номерами цветов $i_3 \in \{1, 2\}$, для которых последовательность $(1, 1, i_3)$ является допустимой (расположенными на его изображении в порядке возрастания номеров), а вершина с номером цвета 2 соединяется с вершинами третьего уровня с номерами цветов $i'_3 \in \{1, 2, 3\}$, для которых последовательность $(1, 2, i'_3)$ является допустимой (расположенными на его изображении в порядке возрастания номеров).

На каждом j-м уровне, где $j \in \{3,..., n-1\}$, любая вершина этого уровня соединяется ребрами с некоторыми вершинами $(j+1)$-го уровня. При этом в силу того, что G_T – дерево, для любой вершины j-го уровня с некоторым цветом i_j существует единственная цепь (и при этом простая; см. свойство (4) деревьев в теме 4), соединяющая единственную вершину первого уровня с номером цвета $i_1 = 1$ с этой вершиной j-го уровня, которой соответствует последовательность $(i_1,..., i_j)$ номеров цветов, соответствующих вершинам этой цепи. В силу (7.1) указанная вершина j-го уровня с номером цвета i_j соединяется ребрами с вершинами $(j+1)$-го уровня с номерами цветов $i_{j+1} \in \{1,2,..., \max\{i_1,..., i_j\}+1\}$ (расположенными на его изображении в порядке возрастания номеров), для которых последовательности $(i_1,..., i_{j+1})$ допустимы.

Описанное дерево G_T, дает нам схему *«ветвления»* для решения поставленной задачи. Цепи, соединяющие единственную вершину первого уровня с вершинами n-го уровня дадут нам все возможные раскраски (последовательности цветов, соответствующих последовательностям вершин этих цепей), среди которых будет находиться и оптимальная. См. на рис. 7.6 дерево G_T, для графа G, изображенного на рис. 7.5. Это дерево построено с учетом выполнения условия (7.1).

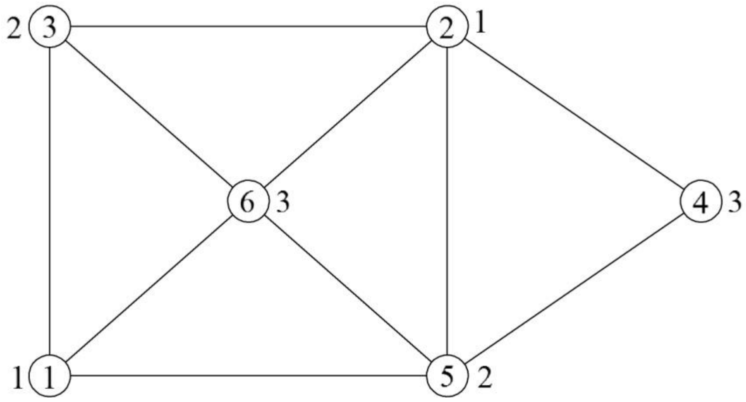


Рис. 7.5

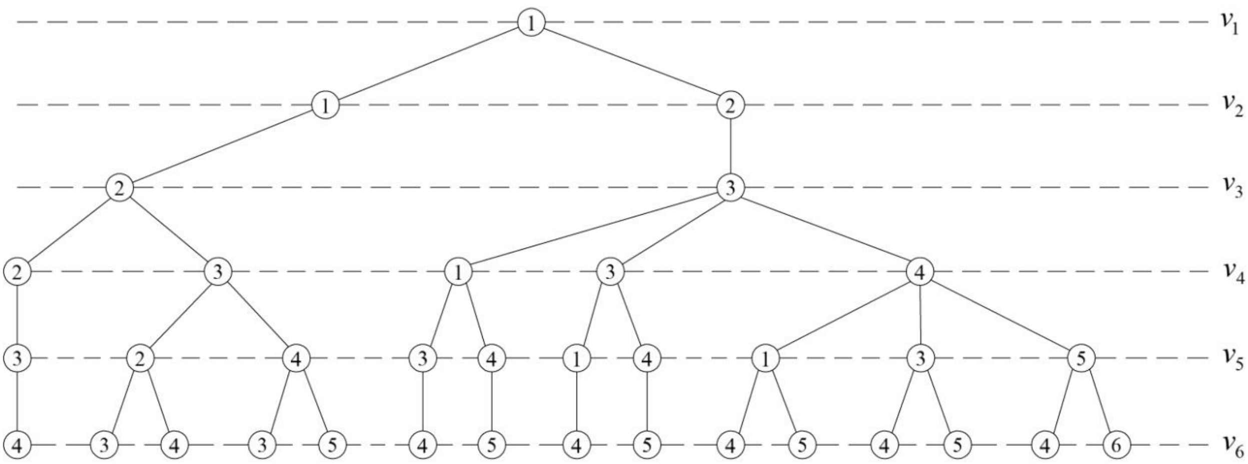


Рис. 7.6

Понятно, что при достаточно большом количестве вершин n количество вершин в G_T может оказаться очень большим, что создаст затруднения при выборе оптимальной раскраски. Для того, чтобы по возможности избежать эти затруднения можно воспользоваться следующими правилами:

(а) Во-первых, воспользуемся тем, что ищутся не все оптимальные раскраски, а лишь любая из них. Учитывая это, на последнем этапе ветвления, т.е. после получения цепи длины $n-1$ с последовательностью номеров цветов ее вершин $(i_1,...,i_{n-1})$ последняя вершина этой цепи с номером цвета i_{n-1} соединяется с единственной вершиной n-го уровня с номером минимально возможного цвета $i_n \in \{1,2,..., \max\{i_1,...,i_{n-1}\}+1\},$ для которого последовательность $(i_1,...,i_n)$ допустима, т.е. является раскраской. Понятно, что пользуясь этим правилом, мы не отсечем все оптимальные раскраски.

(б) Во вторых, воспользуемся так называемыми *«правилами отсечения»*. Каждой вершине n-го уровня дерева G_T, с некоторым номером цвета i_n соответствует единственная цепь, соединяющая единственную вершину первого уровня с этой вершиной. Этой цепи соответствует раскраска, т.е. последовательность номеров цветов ее вершин $(i_1,...,i_n)$. Поставим этой вершине в соответствие значение функции $f(i_1,...,i_n) = \max\{i_1,...,i_n\},$ которое будем указывать над каждой вершиной n-го уровня на изображении дерева G_T (см. рис. 7.7). Совершенно аналогично каждой вершине j-го уровня дерева G_T, где $j \in \{2,..., n-1\},$ соответствует единственная цепь, соединяющая единственную вершину первого уровня с этой вершиной. Этой цепи соответствует последовательность номеров цветов $(i_1,...,i_j)$ ее вершин. Поставим этой вершине в соответствие значение функции $\max\{i_1,...,i_j\},$ которое будем указывать на дереве G_T над этой вершиной и называть *оценкой* для этой вершины. Заметим, что для любой раскраски $(i_1,...,i_j,...,i_n) \in P$ (*продолжающей* раскраску $(i_1,...,i_j)$ множества вершин $\{i_1,...,i_j\}$) выполняется

$$f(i_1,...,i_j,...,i_n) = \max\{i_1,...,i_n\} \geq \max\{i_1,...,i_j\}, \tag{7.3}$$

т.е. величина $\max\{i_1,...,i_j\}$ является нижней оценкой для всех раскрасок, продолжающих раскраску множества вершин $\{i_1,...,i_j\},$ где $j \in \{1,2,..., n-1\}.$

Заметим, что (по построению) самой левой цепью дерева G_T, соединяющей единственную вершину первого уровня с самой левой вершиной n-го уровня является раскраска, получаемая в соответствии с реализацией алгоритма 7.1. Организуем поэтапное построение дерева G_T таким образом, чтобы эта цепь была построена первой. Значение целевой функции на раскраске, соответствующей этой цепи обозначим через $\tilde{p}.$ Эту величину, которая будет уточняться при дальнейшем построении дерева G_T, будем называть *достигнутым рекордом*, т.е. минимальным достигнутым числом цветов, для всех уже построенных раскрасок дерева G_T. В силу неравенства (7.3), если для некоторой очередной вершины дерева G_T (которую мы проходим в процессе поэтапного построения дерева G_T) оценка этой вершины больше или равна достигнутого рекорда $\tilde{p},$ то все продолжающие ее раскраски не улучшат достигнутый рекорд $\tilde{p},$ и поэтому в дереве G_T не осуществляется дальнейшего продолжения цепей после этой вершины и на изображении G_T такие вершины выделяются жирными кружками (см. на рис. 7.7 вершины с №10, №12).

Остается описать порядок прохождения вершин в дереве G_T (*порядок продолжения ветвления*). В [3, стр. 47, 48] описаны три возможных способа (продолжения ветвления). Применим к решению нашей задачи способ 2. В этом способе для очередного ветвления (т.е. для построения, продолжающих эту вершину цепей дерева G_T) берется вершина текущего дерева решений максимального уровня $j \in \{1,2,...,n-1\}$ и являющаяся самой левой среди вершин этого уровня, для которых еще не были построены продолжающие их цепи. По построению дерева G_T эта вершина будет иметь минимальную оценку среди всех таких вершин. При таком выборе способа продолжения ветвления раскраска, соответствующая самой левой цепи дерева G_T, соединяющая единственную вершину первого уровня с самой левой вершиной n-го уровня, является самой первой из построенных раскрасок. Очевидно, что эта раскраска получается в соответствии с реализацией алгоритма 7.1. На рис. 7.7 приведен результат обхода множества вершин дерева G_T, изображенного на рис. 7.6 и соответствующего множеству раскрасок графа G, изображенного на рис. 7.5. Этот обход произведен в соответствии с правилами (а) и (б), а также с выбранным способом продолжения ветвления. На этом рисунке под каждой вершиной дерева G_T указан номер этой вершины в порядке обхода вершин этого дерева. На рис. 7.7 все пройденные (и пронумерованные при этом обходе) вершины выделены жирными (№10, №12) или полужирными (№№1–9, №11) кружками, а все ребра, входящие в цепи, соединяющие единственную вершину первого уровня со всеми выделенными вершинами, изображены в виде отрезков полужирных прямых.

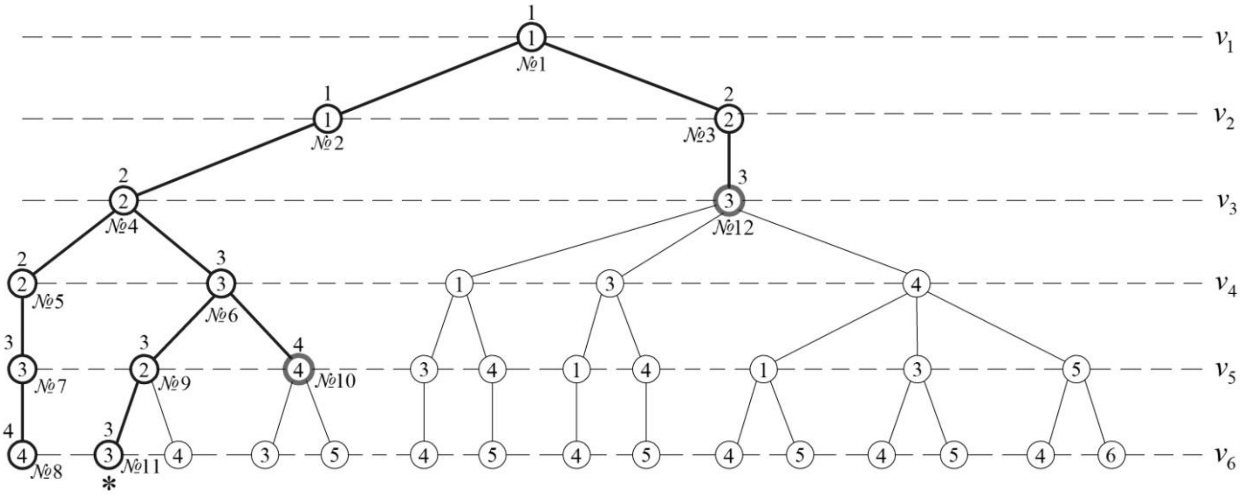


Рис. 7.7

Заметим, что при достижении вершины с №8 получаем первое значение достигнутого рекорда $\tilde{p} = 4.$ В соответствии с правилом (б) при достижении вершины с №10 (изображена жирным кружком) отсекаем все продолжающиеся из нее цепи. Далее при достижении вершины с №11 уменьшаем достигнутый рекорд до $\tilde{p} = 3$ и в соответствии с правилом (б) при достижении вершины с №12 (изображена жирным кружком) отсекаем все продолжающиеся из нее цепи. Оптимальная раскраска соответствует цепи, соединяющей единственную вершину первого уровня дерева G_T с вершиной n-го уровня, помеченной символом $*$. Соответствующие этой раскраске номера цветов указаны около вершин графа G на рис. 7.5. Таким образом, хроматическим числом графа G, изображенного на рис. 7.5, является $p(G) = 3$.

Замечание 7.3. В соответствии с утверждением 7.3 перед началом реализации метода ветвей и границ полезно (для уменьшения числа вершин в дереве G_T) выделить в графе G полный подграф G_0 по возможности с большим числом вершин n_0, а затем перенумеровать вершины графа G так, чтобы первыми его вершинами: $v_1,...,v_{n_0}$ были вершины из G_0. Тогда при построении G_T с учетом (7.1) на каждом j-м уровне, где $j \in \{1,2,...,n_0\}$, имеем единственную вершину с номером цвета j.

Задача о минимальном числе помещений для хранения продуктов. Пусть $D=(V,X)$ – орграф, V – множество продуктов, X – множество дуг вида $x=(v,w)\in X$, где $v,w\in V$. Если $x=(v,w)\in X$, то продукт v отрицательно воздействует на продукт w, т.е. продукты v,w нельзя хранить в одном помещении. В этом случае можно поставить задачу об определении минимального числа помещений для хранения продуктов из множества V. Заметим, что в рассматриваемой задаче направление дуги (v,w) не имеет значения, поскольку присутствие вместо дуги (v,w) дуги (w,v) также означает, что продукты v,w нельзя хранить в одном помещении. Поэтому при указанной постановке задачи можно от орграфа $D=(V,X)$ перейти к неориентированному графу $G=(V,\widetilde{X})$, где $x=\{v,w\}\in\widetilde{X}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий: $(v,w)\in X$ или $(w,v)\in X$. Граф $G=(V,\widetilde{X})$ называется *ассоциированным* с орграфом $D=(V,X)$. В этом случае задача об определении минимального числа помещений для хранения продуктов из V эквивалентна задаче об оптимальном раскрашивании вершин графа G : (а) определить минимальное количество цветов p, необходимое для раскрашивания вершин неориентированного графа G так, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены одним цветом; (б) разбить множество вершин V на подмножества $V_1,...,V_p$ такие, что $V=V_1\cup...\cup V_p$, $V_i\cap V_j=\varnothing$ при $i\neq j$, и чтобы множества $V_1,...,V_p$ являлись внутренне устойчивыми (т.е. никакие две вершины из любого множества V_i не были смежными, а следовательно, могли быть окрашенными в один цвет).

Разбор типового варианта. Решить задачу о нахождении минимального числа помещений для хранения множества продуктов V, взаимодействие которых соответствует орграфу $D=(V,X)$, изображенному на рис. 7.8.

Решение. Переходим от орграфа D к ассоциированному с ним неориентированному графу G, изображенному на рис. 7.9.

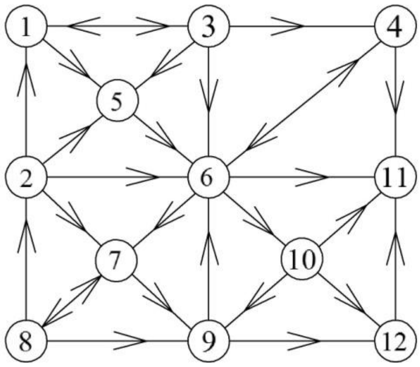


Рис. 7.8

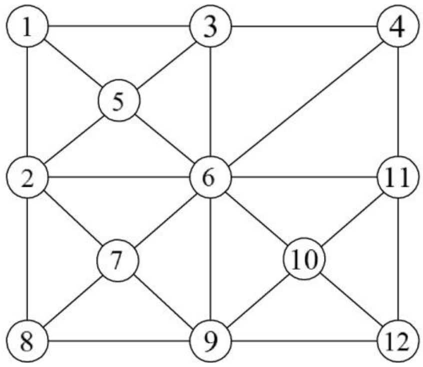


Рис. 7.9

Заметим, что подграф графа G, порожденный множеством вершин $\{v_1,v_2,v_5\}$, является полным. В соответствии с замечанием 7.3 перенумеруем вершины в графе G так, чтобы вершина v_5 в новой нумерации стала вершиной v_3. При этом граф G переходит, например, в граф G', изображенный на рис. 7.10.

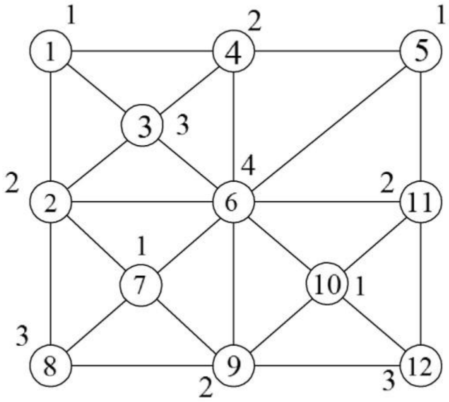


Рис. 7.10

Применяя к графу G' алгоритм 7.1, получаем раскрашивание вершин, указанное на рис. 7.10, с максимальным номером цвета $r = 4$. Для уменьшения r применяем к графу G' метод ветвей и границ. Пусть G'_T – дерево возможных решений (раскрасок) для графа G' (аналогичное дереву G_T, изображенному на рис. 7.6, являющемуся деревом возможных решений для графа G, изображенного на рис. 7.5). На рис. 7.11 приведен результат обхода части множества вершин дерева G'_T, т.е на этом рисунке приведено дерево G'_{T_1}, являющееся подграфом дерева G'_T (ранее на рис. 7.7 аналогичным образом был выделен полужирными и жирными линиями подграф дерева возможных решений G_T, соответствующего множеству раскрасок графа G, изображенного на рис. 7.5). Этот обход произведен в соответствии с правилами (а) и (б), а также с выбранным способом продолжения ветвления. На этом рисунке над каждой вершиной последнего 12-го уровня указано значение целевой функции для соответствующей этой вершине раскраски. Соответственно, над каждой вершиной меньшего уровня указана соответствующая этой вершине оценка. Кроме того, на этом рисунке под каждой вершиной дерева G'_{T_1} указан номер этой вершины в порядке обхода вершин этого дерева. В соответствии с правилом (б) не осуществляем дальнейшее продолжение цепей после вершин с оценками, большими или равными достигнутого текущего рекорда $\tilde{p}$ (уточняемого в процессе обхода вершин дерева G'_{T_1}). Такие вершины выделены полужирными кружками. Оптимальная раскраска графа G', изображенного на рис. 7.10, соответствует цепи, соединяющей единственную вершину первого уровня дерева G'_{T_1} с любой вершиной n-го уровня, с минимальным значением целевой функции для соответствующей этой цепи раскраски. Она оказалась единственной, помеченной символом $*$ (№38). Таким образом, хроматическим числом графа G' является $p(G') = 3.$ Оптимальное раскрашивание вершин графа G' приведено на рис. 7.12, а соответствующее ему оптимальное раскрашивание вершин графа G приведено на рис. 7.13 (получается из рис. 7.12 после возвращения к исходной нумерации вершин графа G).

Таким образом, минимальное количество помещений, необходимое для хранения продуктов 1,2,…,12 со схемой взаимодействия, соответствующей орграфу D, изображенному на рис. 7.8, равно 3.

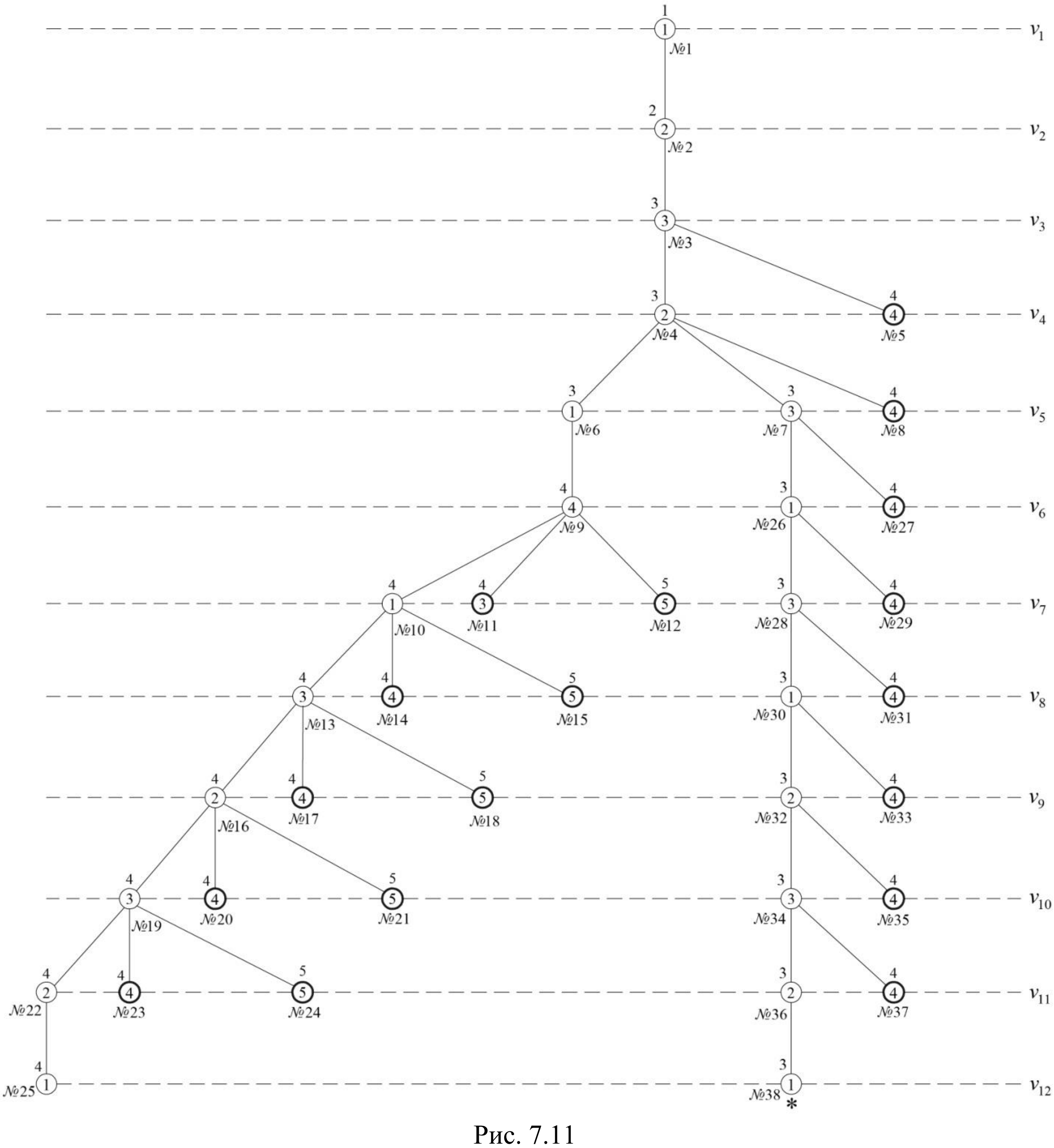


Рис. 7.11

Одно из оптимальных распределений продуктов по помещениям соответствует оптимальному раскрашиванию вершин, приведенному на рис. 7.13. В первом помещении хранятся продукты 1, 6, 8, 12; во втором – 2, 3, 9, 11; в третьем – 4, 5, 7, 10.

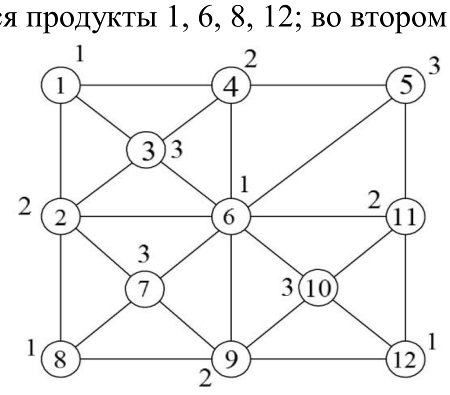


Рис 7.12

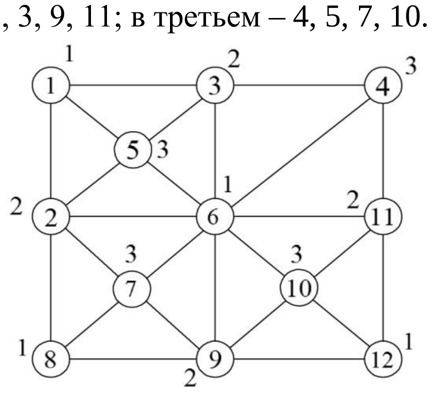


Рис. 7.13

Тема 8. Цикломатическая матрица. Электрические цепи. Уравнения Кирхгофа

Пусть $G=(V,X)$ – связный граф (в общем случае мультиграф), где $V=\{v_1,...,v_n\}$, $X=\{x_1,...,x_m\}$, например, изображенный на рис. 8.1.

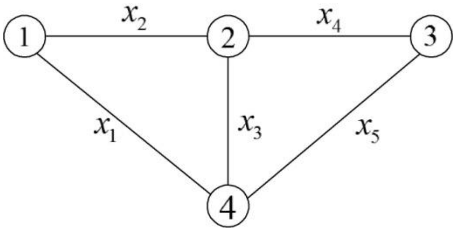


Рис. 8.1

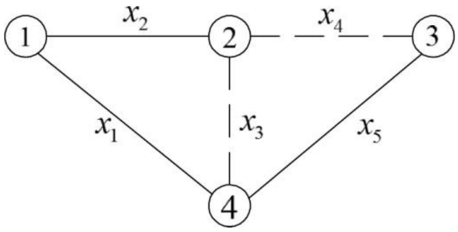
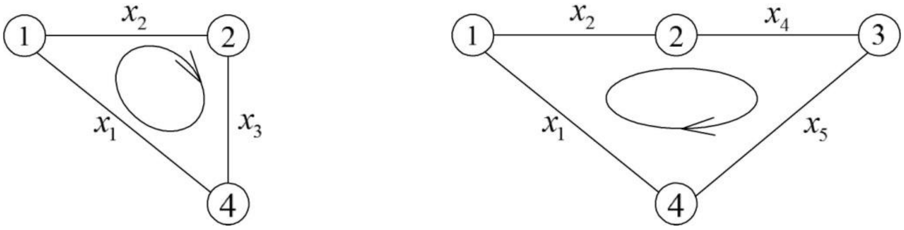


Рис. 8.2

Выделим произвольным образом остовное дерево графа G (например, используя алгоритм 4.1). Для графа G, изображенного на рис. 8.1, одним из возможных остовных деревьев является дерево, изображенное на рис. 8.2 (пунктирными линиями изображены удаленные из G ребра).

Тогда, добавляя любое из ребер, не вошедших в остовное дерево графа G (изображенных на рис. 8.2 пунктирными линиями), мы получим граф с некоторым единственным простым циклом (см. тему 4, свойство (5) деревьев), проходящим через добавляемое ребро. Всего в остовное дерево не вошли $\nu(G)=m-n+1$ ребер (для графа, изображенного на рис. 8.1, $\nu(G)=m-n+1=2$), а поэтому можем получить таким образом $\nu(G)$ простых циклов. Эти циклы различны в том смысле что каждый из них проходит через ребро (то самое, которое мы добавляли для выделения данного цикла), через которое не проходит ни один другой цикл. Они образуют *цикловой базис графа* G (см. [1, стр. 215]). Для графа, изображенного на рис. 8.1, в цикловой базис войдут циклы: $\mu_1=\mu_1(x_3)=x_1x_2x_3$, $\mu_2= \ =\mu_2(x_4)=x_1x_2x_4x_5$. См. изображение этих циклов на рис. 8.3 (при этом внутри циклов указывается выбранное направление обхода ребер в этих циклах; в обоих случаях это направление выбрано по часовой стрелке; возможен выбор и противоположного направления для любого из этих циклов).



μ_1 μ_2

Рис 8.3

Введем произвольным образом ориентацию на ребрах графа G (т.е. каждое ребро $\{v,w\}\in X$ превращаем либо в дугу (v,w), либо в дугу (w,v)). В результате каждое ребро x_j превратится в дугу $\tilde{x}_j$ и соответственно множество ребер X – в множество дуг $\tilde{X}$, а сам граф $G=(V,X)$ – в орграф $D=(V,\tilde{X})$. Для графа G, изображенного на рис. 8.1, в результате введения ориентации на его ребрах получим, например, орграф $D=(V,\tilde{X})$, изображенный на рис. 8.4.

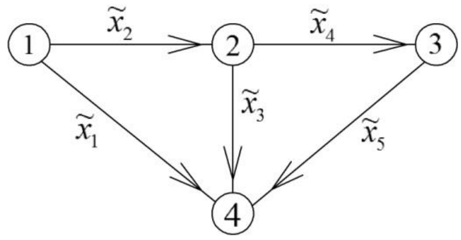


Рис. 8.4

Цикломатической матрицей графа G с цикловым базисом $\{\mu_1,..., \mu_{\nu(G)}\}$ называется матрица $C(G)=[c_{ij}]_{\nu(G)\times m}$ (т.е. с $\nu(G)$ строками и m столбцами) с элементами: $c_{ij}=1$, если ребро x_j входит в цикл μ_i и проходится в этом цикле в направлении $\tilde{x}_j$; $c_{ij}=-1$, если ребро x_j входит в цикл μ_i и проходится в этом цикле в направлении, противоположном $\tilde{x}_j$; $c_{ij}=0$, если ребро x_j не входит в цикл μ_i.

Для графа G, изображенного на рис. 8.1, для выделенного ранее циклового базиса этого графа $\{\mu_1, \mu_2\}$ (см. рис. 8.3) и выбранной ориентацией ребер, соответствующей орграфу D, изображенному на рис. 8.4, цикломатическая матрица имеет вид

$C(G)$ =

			*	*	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
μ_1	-1	1	1	0	0
μ_2	-1	1	0	1	1

.

При построении циклового базиса графа G мы поочередно добавляли к остовному дереву графа G ребра x_3, x_4. Выделим соответствующие этим ребрам столбцы в матрице $C(G)$ (они помечены символом $*$). Из выделенных столбцов составим матрицу. Ее определитель равен 1, а следовательно, ранг матрицы $C(G)$ равен числу строк, т.е. $\nu(G)$. Этот факт не случаен. Выделяя столбцы матрицы $C(G)$, соответствующие добавляемым ребрам, мы всегда получим матрицу, определитель которой равен 1 по абсолютной величине, а следовательно, ранг матрицы $C(G)$ всегда равен $\nu(G)$, т.е. числу строк.

Пусть теперь граф G, изображенный на рис. 8.1, соответствует электрической цепи, изображенной на рис. 8.5, где кружками изображены узлы этой цепи (см. замечание 8.1).

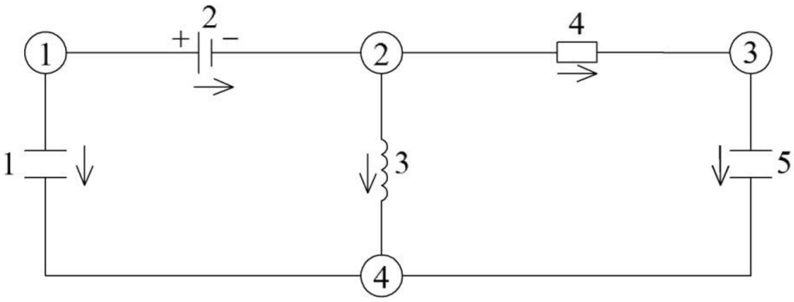


Рис. 8.5

Замечание 8.1. Будем говорить, что граф G, изображенный на рис. 8.1, является графом, ассоциированным с электрической цепью, изображенной на рис. 8.5. Аналогичным образом произвольной электрической цепи, состоящей из двухполюсных элементов (сопротивлений, емкостей, индуктивностей, источников тока, напряжений и т.д.) и соединенных проводниками, можно поставить в соответствие граф (в общем случае – мультиграф), в котором каждому элементу цепи будет соответствовать ребро графа. Вершины этого графа соответствуют узлам электрической цепи (условным точкам соединения проводниками некоторых концов элементов цепи).

Выберем произвольным образом направления токов в элементах цепи (условные направления; после решения соответствующей системы уравнений знаки при величинах токов покажут истинные направления токов). Пусть эти направления соответствуют выбранной ранее ориентации ребер графа G (см. рис. 8.4). Пусть μ – некоторый цикл в графе G. Сформулируем уравнение Кирхгофа для напряжений относительно этого цикла: *алгебраическая сумма разницы напряжений для элементов электрической цепи, входящих в цикл* μ, *равна нулю.* Выпишем систему уравнений Кирхгофа для напряжений относительно выделенных ранее циклов μ_1, μ_2:

$$\mu_1: \quad -u_1 + u_2 + u_3 + 0 + 0 = 0,$$

$$\mu_2: \quad -u_1 + u_2 + 0 + u_4 + u_5 = 0,$$

или, что то же самое,

$$C(G)U = 0, \text{ где } U = [u_1, \dots, u_5]^{\mathrm{T}}. \tag{8.1}$$

Таким образом, получили систему из $\nu(G)$ линейно независимых уравнений Кирхгофа для напряжений. Можно показать (см., например [1]), что любое уравнение Кирхгофа для напряжений, соответствующее некоторому произвольному циклу графа G, является линейной комбинацией уравнений системы (8.1). Поэтому имеет смысл ограничиться рассмотрением системы (8.1).

Матрица инцидентности. Пусть $D = (V, X)$ – орграф (в общем случае ориентированный мультиграф), где $V = \{v_1, ..., v_n\}$, $X = \{x_1, ..., x_m\}$. *Матрицей инцидентности* орграфа D называется матрица $B(D) = [b_{ij}]_{n \times m}$ (т.е. с n строками и m столбцами) с элементами: $b_{ij} = 1$, если вершина v_i является концом дуги x_j; $b_{ij} = -1$, если вершина v_i является началом дуги x_j; $b_{ij} = 0$, если вершина v_i не инцидентна дуге x_j.

Пример 8.1. Для орграфа D, изображенного на рис. 8.6,

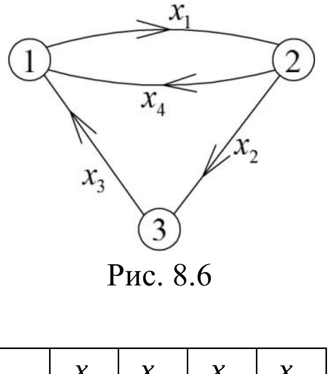


Рис. 8.6

матрица $B(D)$ имеет вид:

$B(D) =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
v_1	-1	0	1	1
v_2	1	-1	0	-1
v_3	0	1	-1	0

.

Уравнения Кирхгофа для токов. Уравнение Кирхгофа для токов формулируется относительно каждого узла электрической цепи: *алгебраическая сумма величин токов, втекающих в данный узел электрической цепи, равна нулю.*

Для электрической цепи, изображенной на рис. 8.5, совокупность уравнений Кирхгофа для токов имеет вид:

узел 1: $-i_1 - i_2 + 0 + 0 + 0 = 0,$

узел 2: $0 + i_2 - i_3 - i_4 + 0 = 0,$

узел 3: $0 + 0 + 0 + i_4 - i_5 = 0,$

узел 4: $i_1 + 0 + i_3 + 0 + i_5 = 0,$

или, что то же самое

$$B(D)I = 0, \text{ где } \quad I = [i_1, \dots, i_5]^{\mathrm{T}}, \tag{8.2}$$

$B(D) =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
v_1	-1	-1	0	0	0
v_2	0	1	-1	-1	0
v_3	0	0	0	1	-1
v_4	1	0	1	0	1

,

$B(D)$ – матрица инцидентности орграфа $D = (V, \widetilde{X})$ (см. рис. 8.4), полученного ранее в результате введения ориентации на ребрах графа G (см. рис. 8.1). При этом условные направления токов в элементах электрической цепи, изображенной на рис. 8.5, соответствуют направлениям дуг в орграфе D.

Рассмотрим вопрос о числе линейно независимых уравнений Кирхгофа для токов и как их выделить. Очевидно, что если сложить строки матрицы $B(D)$, то получим нулевую строку, а следовательно, любое уравнение Кирхгофа для токов является суммой остальных уравнений, взятой со знаком «минус». Таким образом, мы можем удалить произвольное уравнение из системы (8.2) и такой переход будет равносильным. Остается выяснить, будет ли оставшаяся система линейно независимой. Об этом утвердительно говорит

Теорема 8.1. Пусть $G = (V, X)$ – связный граф и $D = (V, \widetilde{X})$ – орграф, полученный из G введением ориентации на ребрах (т.е. каждое ребро $\{v, w\} \in X$ превращаем либо в дугу (v, w), либо в дугу (w, v)). Тогда ранг матрицы $B(D)$ равен $n(G) - 1$.

Замечание 8.2. Утверждение теоремы 8.1 остается справедливым и в случае, когда G – связный мультиграф.

Из этой теоремы следует, что после вычеркивания любой строки из $B(D)$ получаем матрицу, ранг которой совпадает с числом строк. Но тогда после удаления из системы (8.2) любого уравнения оставшаяся система уравнений оказывается линейно независимой.

Подсчитаем общее число линейно независимых уравнений Кирхгофа для токов и напряжений для некоторой электрической цепи с m элементами (двухполюсными) и содержащей n узлов. Этой цепи соответствует некоторый граф G, ассоциированный с ней, содержащий n вершин и m ребер. Будем считать, что электрическая цепь является неделимой, т.е. граф G является связным. Тогда этой цепи можно поставить в соответствие $\nu(G) = m - n + 1$ линейно независимых уравнений Кирхгофа для напряжений и $n - 1$ линейно независимых уравнений Кирхгофа для токов, т.е систему из $\nu(G) + n - 1 =$

$= m - n + 1 + n - 1 = m$ линейно независимых уравнений относительно $2m$ неизвестных (для каждого из m элементов неизвестны величина тока по этому элементу и напряжение между концами этого элемента). Недостающими m уравнениями являются уравнения связи между величиной тока и напряжением для каждого элемента цепи. Простейшим из уравнений связи является закон Ома: $u = ir$ для случая, когда элементом цепи является сопротивление величины r.

Разбор типового варианта. Пусть каждому ребру неориентированного графа G, изображенного на рис. 8.7, соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома и предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить общую систему уравнений для токов.

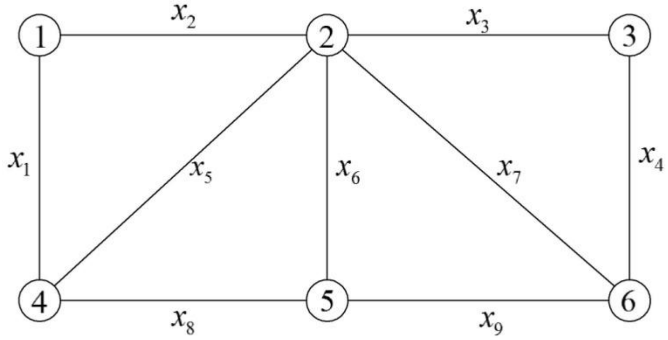


Рис. 8.7

Решение. Выделим произвольным образом остовное дерево графа G (например, используя алгоритм 4.1). Для графа G, изображенного на рис. 8.7, одним из возможных остовных деревьев является дерево, изображенное на рис. 8.8 (пунктирными линиями изображены удаленные из G ребра).

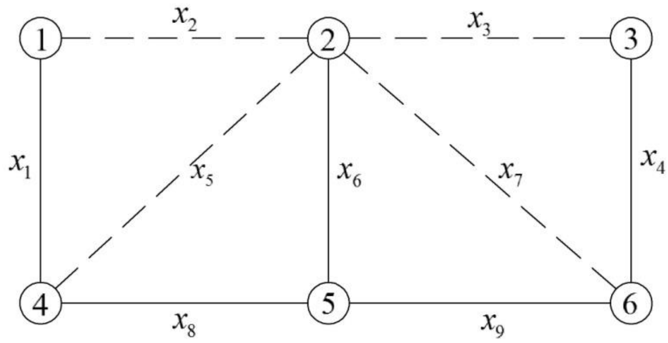


Рис. 8.8

Добавляя любое из ребер, не вошедших в остовное дерево графа G (изображенных на рис. 8.2 пунктирными линиями), мы получим граф с некоторым простым циклом (см. тему 4, свойство (5) деревьев). Всего в остовное дерево не вошли $\nu(G) = m(G) - n(G) + 1$ ребер (для графа, изображенного на рис. 8.7, $\nu(G) = 9 - 6 + 1 = 4$), а поэтому можем получить таким образом $\nu(G) = 4$ простых циклов. Эти циклы различны в том смысле что каждый из них проходит через ребро (то самое, которое мы добавляли для выделения данного цикла), через которое не проходит ни один другой цикл. Они образуют *цикловой базис графа* G.

Для графа $G,$ изображенного на рис. 8.7, в цикловой базис войдут циклы:

$$\mu_1 = \mu_1(x_2) = x_1 x_2 x_6 x_8,\ \mu_2 = \mu_2(x_3) = x_3 x_4 x_9 x_6,\ \mu_3 = \mu_3(x_5) = x_5 x_6 x_8\ \mu_4 = \mu_4(x_7) = x_6 x_7 x_9.$$

Введем произвольным образом ориентацию на ребрах графа G (т.е. каждое ребро $\{v, w\}$ превращаем либо в дугу $(v, w),$ либо в (w, v)). В результате каждое ребро x_j превратится в дугу $\widetilde{x}_j$ и соответственно множество ребер X в множество дуг $\widetilde{X},$ а сам граф $G = (V, X)$ в орграф $D = (V, \widetilde{X}).$ Для графа $G,$ изображенного на рис. 8.7, в результате введения ориентации на его ребрах получаем, например, орграф $D = (V, \widetilde{X}),$ изображенный на рис. 8.9.

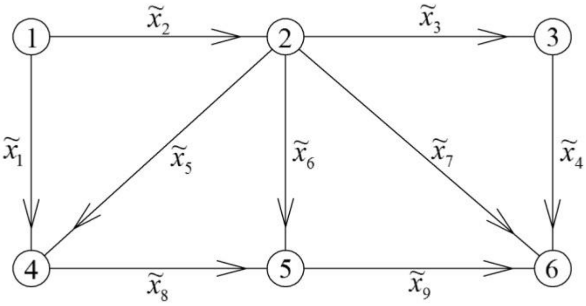


Рис. 8.9

Для графа $G,$ изображенного на рис. 8.7, с выделенным ранее цикловым базисом $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ и выбранной ориентацией ребер, соответствующей орграфу $D,$ изображенному на рис. 8.9, цикломатическая матрица имеет вид

$C(G) =$

		*	*		*		*		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
μ_1	-1	1	0	0	0	1	0	-1	0
μ_2	0	0	1	1	0	-1	0	0	-1
μ_3	0	0	0	0	-1	1	0	-1	0
μ_4	0	0	0	0	0	-1	1	0	-1

.

При построении циклового базиса графа G мы поочередно добавляли к остовному дереву графа G ребра $x_2, x_3, x_5, x_7.$ Выделим соответствующие этим ребрам столбцы в матрице $C(G)$ (они помечены символом $*$). Из выделенных столбцов составим матрицу. Ее определитель равен $-1 \neq 0,$ а следовательно, ранг матрицы $C(G)$ равен числу строк, т.е. $\nu(G).$

Пусть теперь граф $G,$ изображенный на рис. 8.7, соответствует электрической цепи, изображенной на рис. 8.10 (см. замечание 8.1).

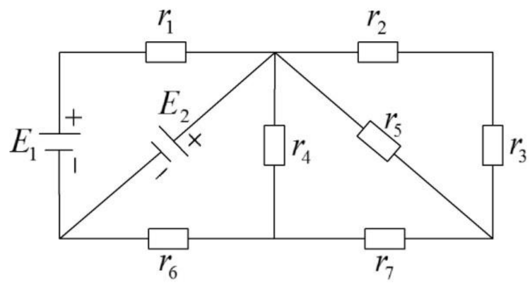


Рис. 8.10

Выберем произвольным образом направления токов в элементах цепи (условные направления; после решения соответствующей системы уравнений знаки при величинах токов покажут истинные направления токов). Пусть эти направления соответствуют выбранной ранее ориентации ребер графа G (см. рис. 8.9). Выпишем систему уравнений Кирхгофа для напряжений в соответствии с (8.1):

$\mu_1: \quad -u_1 + u_2 + u_6 - u_8 = 0,$

$\mu_2: \quad u_3 + u_4 - u_6 - u_9 = 0,$

$\mu_3: \quad -u_5 + u_6 - u_8 = 0,$

$\mu_4: \quad -u_6 + u_7 - u_9 = 0,$

или, с учетом закона Ома, а также того, что $u_1 = E_1,\ u_5 = E_2,$ имеем:

$$\begin{cases} E_1 + i_2 r_1 + i_6 r_4 - i_8 r_6 = 0, \\ i_3 r_2 + i_4 r_3 - i_6 r_4 - i_9 r_7 = 0, \\ E_2 + i_6 r_4 - i_8 r_6 = 0, \\ -i_6 r_4 + i_7 r_5 - i_9 r_7 = 0. \end{cases} \qquad (8.3)$$

Система уравнений Кирхгофа для токов имеет вид (8.2), где

$B(D) =$

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{x}_7$	$\tilde{x}_8$	$\tilde{x}_9$
v_1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	1	-1	0	-1	-1	-1	0	0
v_3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
v_4	1	0	0	0	1	0	0	-1	0
v_5	0	0	0	0	0	1	0	1	-1
v_6	0	0	0	1	0	0	1	0	1

.

При этом для достижения линейной независимости системы уравнений Кирхгофа для токов необходимо исключить из системы (8.2) любое уравнение, например, второе. В результате система линейно независимых уравнений Кирхгофа для токов имеет вид:

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 = 0, \\ i_3 - i_4 = 0, \\ i_1 + i_5 - i_8 = 0, \\ i_6 + i_8 - i_9 = 0, \\ i_4 + i_7 + i_9 = 0. \end{cases} \qquad (8.4)$$

Таким образом, общей системой уравнений для токов является объединение систем (8.3), (8.4). Заметим, что полученная объединенная система уравнений состоит из девяти уравнений относительно девяти неизвестных: $i_1, i_2, ..., i_9,$ после нахождения которых нетрудно определить $u_1, u_2, ..., u_9.$

Тема 9. Транспортные сети. Поток в транспортной сети. Максимальный поток

Под транспортной сетью будем понимать орграф $D = (V, X),$ где $V = \{v_1, ..., v_n\},$ с выделенными вершинами $v_1,\ v_n,$ для которого выполняются условия:

(Т1) существует одна и только одна вершина v_1, называемая *источником*, такая, что $D^{-1}(v_1) = \varnothing$ (т.е. ни одна дуга не заходит в вершину v_1);

(Т2) существует одна и только одна вершина v_n, называемая *стоком*, такая, что $D(v_n) = \varnothing$ (т.е. ни одна дуга не исходит из вершины v_n);

(Т3) каждой дуге $x \in X$ поставлено в соответствие целое число $c(x) \geq 0$, называемое *пропускной способностью* этой дуги.

Вершины в транспортной сети, отличные от источника и стока, называются *промежуточными*.

Функция $\varphi(x)$, определенная на множестве X дуг транспортной сети D и принимающая неотрицательные целочисленные значения называется *потоком* в транспортной сети D, если:

(П1) для любой дуги $x \in X$ величина $\varphi(x)$, называемая *потоком по дуге* x, удовлетворяет условию $0 \leq \varphi(x) \leq c(x)$;

(П2) для любой промежуточной вершины v сумма потоков по дугам, заходящим в v, равна сумме потоков по дугам, исходящим из v.

Величиной потока φ в транспортной сети D будем называть число $\overline{\varphi}$, равное сумме потоков по дугам, исходящим из источника v_1 (или, что то же самое, равное сумме потоков по дугам, заходящим в сток v_n).

Пример 9.1. На рис. 9.1 приведен пример транспортной сети $D = (V, X)$ (см. (а)), а также пример потока φ в этой сети (см. (б)); в этом примере $\overline{\varphi} = 8 + 10 = 10 + 3 + 5 = 18$. На рис. 9.1 (а) пропускные способности дуг взяты в скобки. На рис. 9.1 (б) около каждой дуги $x \in X$ указан поток по этой дуге $\varphi(x)$. Проверьте выполнение условия (П2) для потока φ в транспортной сети D.

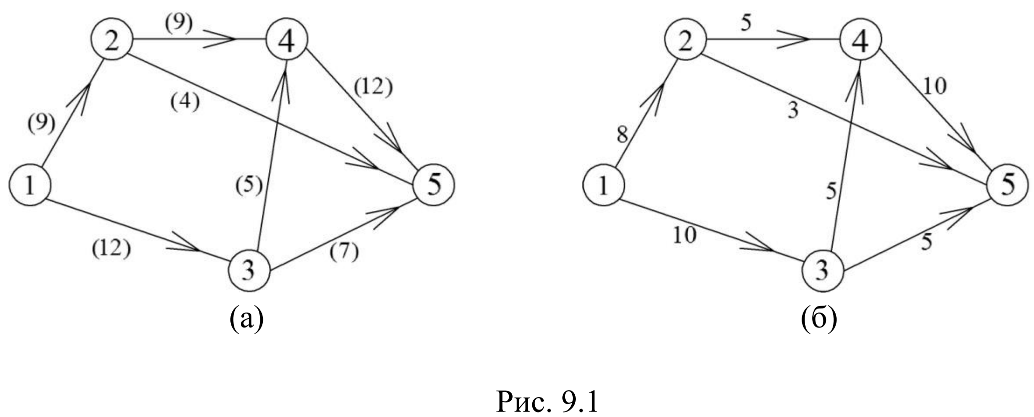


Рис. 9.1

Пусть φ – поток в транспортной сети $D = (V, X)$. Дуга $x \in X$ называется *насыщенной,* если поток по ней равен ее пропускной способности, т.е., если $\varphi(x) = c(x)$. Поток φ называется *полным*, если любой путь из источника в сток содержит по крайней мере одну насыщенную дугу. Поток φ с максимальной величиной $\overline{\varphi}$ называется *максимальным*. Очевидно, что максимальный поток обязательно является полным. Обратное, вообще говоря, не верно (не всякий полный поток является максимальным). Тем не менее полный поток можно рассматривать как некоторое приближение к максимальному. В связи с этим опишем алгоритм построения полного потока в транспортной сети D.

Алгоритм 9.1 (построения полного потока в транспортной сети D)

Шаг 1. Полагаем $\forall x \in X \quad \varphi(x) = 0$ (т.е. начинаем с нулевого потока). Полагаем $D' = D$ (D' – вспомогательный орграф).

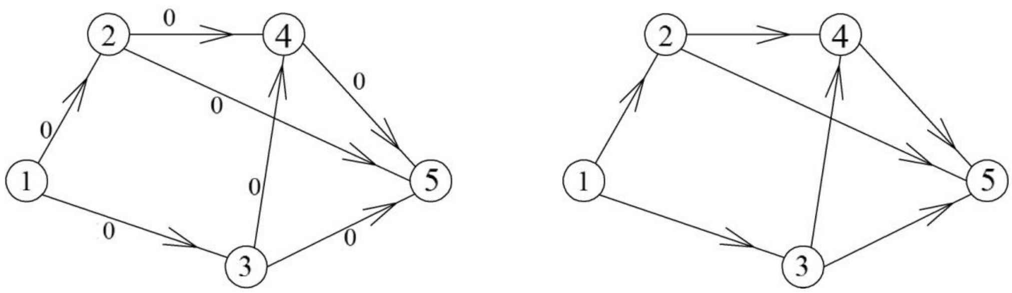
Шаг 2. Удаляем из D' дуги, являющиеся насыщенными при потоке φ в транспортной сети D.

Шаг3. Ищем в D' простую цепь η из v_1 в v_n. Если такой цепи нет, то φ – искомый полный поток. В противном случае переходим к шагу 4.

Шаг 4. Увеличиваем поток $\varphi(x)$ по каждой дуге x из η на одинаковую величину $a > 0$ такую, что по крайней мере одна дуга из η оказывается насыщенной, а потоки по остальным дугам из η не превосходят их пропускных способностей. Переходим к шагу 2.

Разбор типового варианта. (а) Используя алгоритм 9.1, построить полный поток в транспортной сети из примера 9.1.

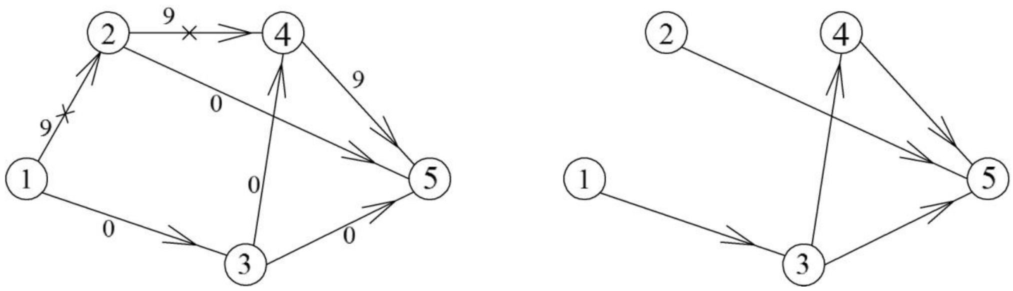
Решение. Начинаем с нулевого потока φ_0. Каждой новой цепи из v_1 в $v_n = v_5$ будем ставить в соответствие ее очередной номер, т.е. будем обозначать эти цепи через η_1, η_2 и т.д. Соответственно после нахождения цепи η_1 поток φ_0 изменится на поток φ_1 (см. шаг 4 алгоритма 9.1). После нахождения цепи η_2 поток φ_1 изменится на φ_2 и т.д. Числа, на которые увеличиваем потоки по дугам из η_i, обозначаем через a_i. Насыщенные дуги при изображении транспортной сети D с очередным потоком φ_i помечаем символом $\times$. На рис. 9.2 приведены изображения орграфа D с потоком φ_0, а также вспомогательного орграфа D', который на этом этапе совпадает с D.



φ_0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ D'

Рис. 9.2

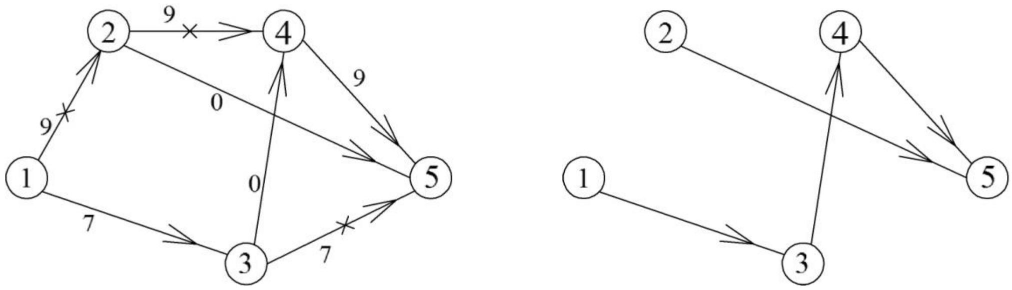
Выделяем в D' простую цепь $\eta_1 = v_1 v_2 v_4 v_5$ из v_1 в v_5. Увеличиваем поток $\varphi(x)$ по каждой дуге x из η_1 на одинаковую величину $a_1 = 9$ до насыщения дуг (v_1, v_2), (v_2, v_4), при этом поток по дуге (v_4, v_5) не превышает ее пропускной способности. В результате поток φ_0 меняется на поток φ_1, а из орграфа D' удаляются дуги (v_1, v_2), (v_2, v_4). На рис. 9.3 приведены изображения орграфа D с потоком φ_1, а также соответствующего этому потоку вспомогательного орграфа D'.



φ_1 D'

Рис. 9.3

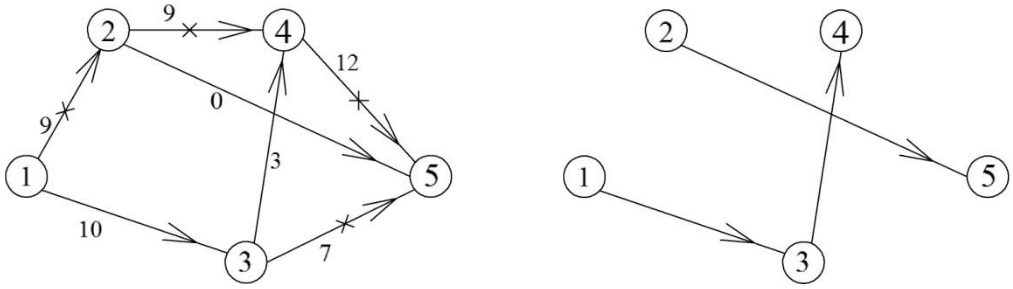
Выделяем в D' простую цепь $\eta_2 = v_1 v_3 v_5$ из v_1 в v_5. Увеличиваем поток $\varphi(x)$ по каждой дуге x из η_2 на одинаковую величину $a_2 = 7$ до насыщения дуги (v_3, v_5), при этом поток по дуге (v_1, v_3) не превышает ее пропускной способности. В результате поток φ_1 меняется на поток φ_2, а из орграфа D' удаляется дуга (v_3, v_5). На рис. 9.4 приведены изображения орграфа D с потоком φ_2, а также соответствующего этому потоку вспомогательного орграфа D'.



φ_2 D'

Рис. 9.4

Выделяем в D' простую цепь $\eta_3 = v_1 v_3 v_4 v_5$ из v_1 в v_5. Увеличиваем поток $\varphi(x)$ по каждой дуге x из η_3 на одинаковую величину $a_3 = 3$ до насыщения дуги (v_4, v_5), при этом потоки по дугам $(v_1, v_3), (v_3, v_4)$ не превышают их пропускных способностей. В результате поток φ_2 меняется на поток φ_3, а из орграфа D' удаляется дуга (v_4, v_5). На рис. 9.5 приведены изображения орграфа D с потоком φ_3, а также соответствующего этому потоку вспомогательного орграфа D'.



φ_3 D'

Рис. 9.5

Мы видим, что для орграфа D', соответствующего потоку φ_3, не существует пути из источника в сток, а следовательно, φ_3 – полный поток.

Как мы увидим далее, полученный полный поток φ_3 не является максимальным. Для того чтобы иметь возможность увеличивать полный поток до максимального нам понадобится новое понятие.

Орграф приращений. Введем для транспортной сети $D=(V,X)$ и потока φ в этой сети *орграф приращений* $I(D,\varphi)=(V,\widetilde{X})$. Для любой дуги $x=(v,w)\in X$ обозначим $x'=(w,v)$. Для каждой дуги $x\in X$ выполняется: (а) $x\in\widetilde{X}\Leftrightarrow\varphi(x)<c(x)$; (б) $x'\in\widetilde{X}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\varphi(x)>0$.

Замечание 9.1. В дальнейшем мы будем искать в орграфе приращений простые цепи из v_1 в v_n. Поэтому в нем можно не учитывать дуги, заходящие в v_1, а также исходящие из v_n. Будем орграф приращений без указанных дуг называть *модифицированным.*

Разбор типового варианта (продолжение). (б) Построить орграф приращений $I(D,\varphi_3)$.

Решение. На рис. 9.6 приведено изображение орграфа $I(D,\varphi_3)$, а на рис. 9.7 – изображение модифицированного орграфа $I(D,\varphi_3)$.

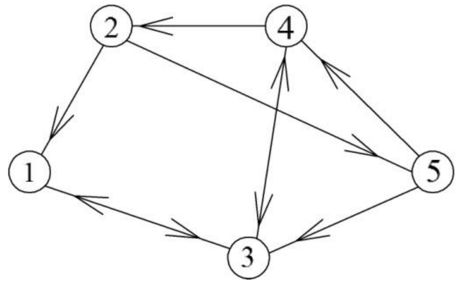


Рис. 9.6

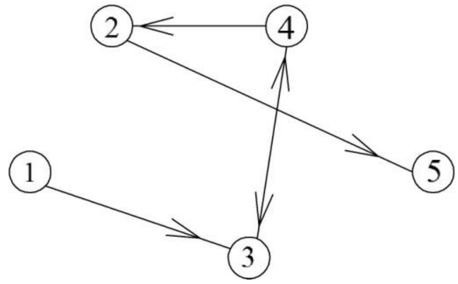


Рис. 9.7

Для дальнейшего понадобится

Теорема 9.1 (Форда – Фалкерсона). Поток φ в транспортной сети D является максимальным тогда и только тогда, когда в орграфе приращений $I(D,\varphi)$ вершина v_n (сток транспортной сети D) не достижима из v_1 (источника транспортной сети D).

Используя теорему Форда – Фалкерсона, нетрудно описать алгоритм построения максимального потока в транспортной сети D.

Алгоритм 9.2 (Форда – Фалкерсона)

Шаг 1. Пусть φ – любой поток в транспортной сети D (например, нулевой или полный).

Шаг 2. Строим орграф приращений $I(D,\varphi)$.

Шаг 3. Если в $I(D,\varphi)$ вершина v_n не достижима из вершины v_1, то φ – искомый максимальный поток. В противном случае ищем в $I(D,\varphi)$ простую цепь η из v_1 в v_n. Увеличиваем потоки по дугам цепи η на максимально допустимую величину (см. замечание 9.2) $a>0$ и переходим к шагу 2.

Замечание 9.2. Если дуга x в цепи η имеет то же направление, что и в D, то можно увеличить поток по ней, не превышая ее пропускной способности, т.е. на величину, не превышающую $c(x)-\varphi(x)$. При этом по определению $I(D,\varphi)$ в этом случае $c(x)-\varphi(x)>0$. Если же дуга x' в η направлена противоположно соответствующей дуге x из D (см. определение $I(D,\varphi)$), то можно увеличить поток по ней (и, соответственно, уменьшить поток по дуге x) до обнуления потока по дуге x, т.е. на величину, не превышающую $\varphi(x)$. При этом по определению $I(D,\varphi)$ в этом случае $\varphi(x)>0$. Таким образом, величина $a>0$, используемая на шаге 3 алгоритма 9.2, является минимальной на множестве натуральных чисел $\{c(x)-\varphi(x)\mid x\in X, x\in\eta\}\cup\{\varphi(x)\mid x\in X, x'\in\eta\}$.

Разбор типового варианта (продолжение). (в) Используя алгоритм Форда – Фалкерсона, построить максимальный поток для сети D из примера 9.1.

Решение. Начинаем с ранее построенного полного потока φ_3. Выделяем в $I(D,\varphi_3)$ простую цепь $\eta_4=v_1v_3v_4v_2v_5$ из v_1 в v_5. Увеличиваем потоки по дугам из η_4 на одинаковую величину, равную 2, до насыщения дуг (v_1,v_3), (v_3,v_4). При этом поток по дуге (v_2,v_5) не превышает ее пропускной способности, а величина потока по дуге (v_2,v_4) уменьшается на 2 (см. замечание 9.2). В результате поток φ_3 меняется на поток φ_4. На рис. 9.8 приведено изображение орграфа D с потоком φ_4. Далее строим орграф приращений $I(D,\varphi_4)$ (см. изображение модифицированного орграфа приращений $I(D,\varphi_4)$ на рис. 9.9). Поскольку в $I(D,\varphi_4)$ вершина v_5 не достижима из v_1, то согласно алгоритму Форда – Фалкерсона φ_4 – искомый максимальный поток, при этом $\overline{\varphi}_4=21$.

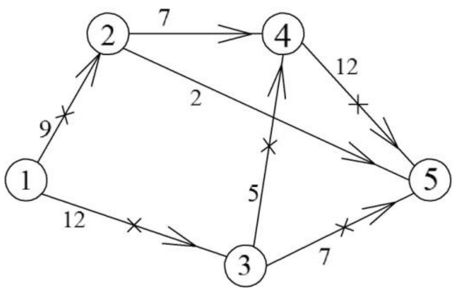


Рис. 9.8

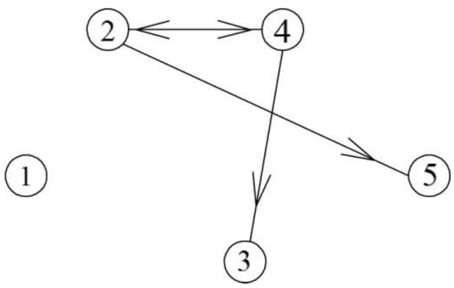


Рис. 9.9

Замечание 9.3. Условие единственности источника (стока) не является ограничительным. Например, в случае двух источников v_1, v_2, удовлетворяющих условиям: $D^{-1}(v_1)=\varnothing$, $D^{-1}(v_2)=\varnothing$, можно добавить к транспортной сети D новую вершину v_0 и две дуги (v_0,v_1), (v_0,v_2). При этом пропускной способностью дуги (v_0,v_1) (соответственно дуги (v_0,v_2)) следует считать сумму пропускных способностей дуг, исходящих из v_1 (исходящих из v_2). В этом случае вершина v_0 становится единственным (*фиктивным*) источником. Аналогично поступаем в случае большего числа источников или в случае нескольких стоков. Таким образом, приведенные алгоритмы можно использовать и для нахождения максимального потока в транспортных сетях с несколькими источниками и стоками. В этом случае величиной потока в транспортной сети является сумма величин потоков по дугам, исходящим из совокупности ее источников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992.

2. Методические указания к выполнению расчетных работ по дискретной математике / Под ред. В.А. Осиповой. – М.: Изд-во МАИ, 1994.

3. *Нефедов В.Н.* Дискретные задачи оптимизации. – М.: Изд-во МАИ, 1993.

СОДЕРЖАНИЕ