

Physic-VI

Вопросы по «Квантовая оптики и квантовая механика»

▼ 1. Равновесное излучение как баланс процессов. Законы Релея и Джинса, Стефана-Больцмана, формула и закон смещения Вина. Абсолютно черный излучатель. Степень черноты. Серый излучатель. Спектральная излучательная и поглощательная способность. Закон Кирхгоффа для равновесного излучения.

▼ Равновесное излучение как баланс процессов

Равновесное излучение — электромагнитное излучение, находящееся в термодинамическом равновесии с веществом, его излучающим и поглощающим.

Равновесное тепловое излучение — излучение, при котором расход энергии тела на излучение компенсируется энергией поглощённого им излучения для каждой длины волны.

▼ Формула Релея-Джинса

Получили, записав закон о равномерном распределении энергии между степенями свободы системы, находящейся в равновесии. Гласит, что излучательная способность АЧТ прямо пропорциональна квадрату частоты излучения:

$r_\nu = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} kT$, r_ν — спектральная плотность энергетической светимости [Дж/м²].

Формула справедлива для области малых частот.

▼ Закон Стефана-Больцмана

Энергетическая светимость абсолютно чёрного тела пропорциональна 4-й степени абсолютной температуры.

$R_e = \sigma T^4$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$ постоянная Стефана Больцмана.

▼ Закон смещения Вина

Длина волны, на которую приходится максимум излучения в спектре абсолютно чёрного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре.

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \text{ где } b = 2.89 \cdot 10^{-3} \text{ мк — постоянная Вина.}$$

Выводится из закона Вина: $\phi(\lambda, T) = \lambda^{-5} \Psi(\lambda T)$

▼ Абсолютно чёрный излучатель

Абсолютно Чёрное Тело — равновесный излучатель, у которого длина свободного пробега фотона очень маленькая. Поэтому пока фотон на него падает он полностью поглощается.

Условие черноты: поглощение в непосредственной окрестности точки падения.

▼ Альтернативное определение

АЧТ - тело, которое при любой температуре поглощает всё падающее на него излучение во всем диапазоне длин волн.

Его спектральный коэф. поглощения (поглощательная способность) = 1.

▼ Серый излучатель

Серое тело — непрозрачное тело, поглощательная способность которого не зависит от направления падающего света и спектрального состава.

Спектральный коэффициент поглощения = const, но не равен 1.

▼ Степень черноты

Отношение энергии теплового излучения серого тела к излучению чёрного тела при той же температуре.

▼ Спектральная излучательная способность

Энергетическая светимость тела R_T — количество энергии, излучаемое за единицу времени по всем направлениям с единицы площади поверхности тела во всём диапазоне длин волн.

Спектральная плотность энергетической светимости $I_{y,T}$ — количество энергии, излучаемой за единицу времени по всем направлениям с единицы площади поверхности тела в единичном диапазоне длин волн.

$r_{\nu,T} = \frac{dR_T}{d\nu}$ — формула спектральной плотности энергетической светимости.

▼ Спектральная поглотательная способность

Спектральный коэффициент поглощения зависит от длины волны и температуры тела:

$$a_{\lambda,T} = \frac{W_{in\lambda,T}}{W_{\lambda,T}}$$

▼ Закон Кирхгоффа для равновесного излучения

В состоянии теплового равновесия отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральному коэффициенту поглощения не зависит от природы тела и для всех тел является универсальной функцией, равной спектральной плотности энергетической светимости абсолютно чёрного тела.

$$\left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_2 = r_{\lambda,T}^0 = f(\lambda, T).$$

▼ 2. Гипотеза и распределение Планка. Энергия, частота, длина волны и импульс фотона. Вывод формулы Планка*. Связь распределения Планка с законами равновесного излучения. Явления, подтверждающие гипотезу Планка: фотоэффект, ограничение рентгеновских спектров торможения, эффект Комптона. Фотометрия: световой поток, освещенность, световое давление.

▼ Гипотеза Планка

Энергия совокупности стоячих волн может принимать только определённые дискретные значения в виде квантов энергии. Следовательно, испускание и поглощение энергии это тоже процесс дискретный.

▼ Распределение Планка

Используется для расчёта спектральной плотности энергетической светимости чёрного тела.

$$r_{\nu,T}^0 = \phi(\lambda, T) = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar c}{\lambda k T}) - 1}$$

Спектральная объёмная плотность энергии излучения:

$$f(w, T) = \frac{\hbar w^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar w}{k T}) - 1}$$

▼ ФОТОН

Квант электромагнитного излучения.

Является бозоном.

▼ Вывод формулы Планка

▼ Вывод из распределения Больцмана

1. Пусть электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии: $\epsilon = \hbar\omega$.
2. Если излучение испускается порциями, то его энергия кратна величине: $\epsilon_n = n\hbar\omega$, $n \in \mathbb{N}$.
3. В состоянии равновесия распределение колебаний по значениям энергии подчиняется закону Больцмана и получится: $P_n = \frac{N_n}{N} = \frac{\exp(-\frac{\epsilon_n}{kT})}{\sum_n \exp(-\frac{\epsilon_n}{kT})}$.
4. Теперь, зная вероятность различных значений энергии колебания, найдём среднее значение, как $\langle \epsilon \rangle = \sum_n P_n \epsilon_n$
5. Подставив (2) и (3) в (4) получается: $\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar \exp(-\frac{n\hbar\omega}{kT})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{n\hbar\omega}{kT})}$.
6. Сделаем замену $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$ и сделаем допущение, что x меняется непрерывно. После чего (5) будет иметь вид: $\langle \epsilon \rangle = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.
7. В (6) под логарифмом сумма бесконечной геометрической прогрессии и, понимая, что $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$.
8. Подставим (7) в (6): $\langle \epsilon \rangle = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1-e^{-x}} = \hbar\omega \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1}$. И сделаем обратную подстановку.
9. $\langle \epsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}$.
10. Теперь умножим (9) на плотность стоячих волн и получим:
 $u(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1} \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$. Отсюда получается, что:
11. $u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}$
12. Теперь вспомним как связывается испускательная способность абсолютного чёрного тела с равновесной плотностью энергии

теплового излучения. А вот так: $f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T)$.

13. Получается, что $f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar \omega}{kT}) - 1}$.

▼ Связь распределения Планка с законами равновесного излучения.

Формула Планка сшивает неопределённость, получаемую при отдельном применении законов Релея-Джинса и Вина.

▼ Закон Релея-Джинса

(низкочастотный предел распространения Планка)

Сделаем приближение, что $e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}} \sim 1 + \frac{\hbar c}{\lambda kT}$ и получим: $B_\lambda = \frac{2\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{\hbar c} = \frac{2ckT}{\lambda^4}$.

▼ Закон Вина

(высокочастотный предел распространения Планка)

Здесь сделаем приближение: $e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}} - 1 \sim e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}}$ и получаем: $B_\lambda = \frac{2\hbar c^2}{\lambda^5} \exp^{-\frac{\hbar c}{\lambda kT}}$.

▼ Закон Стефана-Больцмана

(полная плотность энергии)

Аналитический вывод закона Стефана-Больцмана для интегрального потока излучения из закона Планка для спектрального потока излучения состоит во взятии интеграла:

$$E_t^0(T) = \int_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5 (\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1)} d\lambda$$

1. Заемтим, что это несобственный интеграл. Значит нужно убедиться в его сходимости при обоих пределах. Сделаем замену: $x = \frac{c_2}{\lambda T}$.

2. $E_t^0(T) = c_1 \left(\frac{T}{c_2}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp x - 1}$.

3. При $x \rightarrow \infty$ он сходится из-за признака сравнения.

4. При $x \rightarrow 0$ показываем, что подинтегрально выражение можно представить как: $\frac{\exp(-x)x^3}{1 - \exp(-x)} = x^3 \sum_{n=0}^\infty \exp(-[n+1]x)$ пользуемся признаком Вейерштрасса и показываем, что ряд сходится.

5. Это ряд интегрируем и преобразуем к

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\sum_{n=0}^{\infty} (\int_{\epsilon}^{+\infty} x^3 \exp(-(n+1)x) dx)).$$
6. Делаем замену: $(n+1)x = t$.
7. Выражение преобразовывается к:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{(n+1)^4} \int_{(n+1)\epsilon}^{+\infty} t^3 \exp(-t) dt)).$$
 Этот интеграл сходится по признаку Вейерштрасса.
8. Численно интеграл ограничен гамма-функцией: $\Gamma(4) = \int_0^{\infty} t^3 \exp(-t) dt = 3!$
9. Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$
10. Таким образом, $E_t^0(T) = c_1 (\frac{T}{c_2})^4 (\frac{\pi^4}{15}) = c_1 \pi^4 \frac{T^4}{15 c_2^4} = \sigma T^4$.

▼ Явления, подтверждающие гипотезу Планка

- ▼ Фотоэффект
- ▼ Ограничение рентгеновских спектров торможения
- ▼ Эффект Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad \lambda_c = \frac{h}{mc} \text{ — комптоновская длина.}$$

▼ Фотометрия

Освещённость можно описать следующим образом: $E = \frac{I}{r^2} \cos i$, r — расстояние от источника до объекта, I — сила света точечного источника, i — угол падения лучей относительно нормали к поверхности.

▼ 3. Спектральная интенсивность, объемная плотность энергии и спектральная плотность потока энергии излучения. Спектральное кинетическое уравнение переноса излучения. Коэффициенты поглощения и рассеяния излучения. Индикатриса рассеяния. Изотропное излучение. Условие изотропизации излучения. Односторонняя спектральная плотность потока энергии излучения. Интегральные по спектру характеристики излучения.

▼ Спектральная интенсивность

Отношение интенсивности излучения, взятой в бесконечно малом интервале длин волн (частот), включающем данную длину волны (частоту), к этому интервалу.

▼ Объёмная плотность энергии

$$u(\omega, T)$$

▼ Спектральная плотность потока энергии излучения

Объёмная плотность энергии излучения, приходящуюся на единичный интервал частот вблизи частоты.

▼ Спектральное кинетическое уравнение переноса излучения

$$\frac{1}{c_\nu} \frac{\partial L_\nu}{\partial t} + \Omega \nabla L_\nu = j_\nu + \alpha_\nu L_\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}} - k_\nu L_\nu + \beta_\nu \int L_\nu(\Omega') \gamma_\nu(\Omega, \Omega') d\Omega'$$

▼ Коэффициенты поглощения и рассеяния излучения

$$\sigma = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

▼ Индикатриса рассеяния

Угловое распределение интенсивности рассеянной компоненты оптического или электромагнитного излучения, которое определяется размерами рассеивателя, его геометрической формой и относительным показателем преломления.

▼ Изотропное излучение

Во все направления излучение одинаковой интенсивности.

▼ Условие изотропизации излучения

$$B = \frac{1}{\pi}$$

▼ Односторонняя спектральная плотность потока энергии излучения

$$G_x x = 2u(\omega, T), \omega \geq 0; 0, \omega < 0.$$

▼ Интегральные по спектру характеристики излучения

- Плотность энергии: $U = \int_0^\infty U_\omega d\omega$.
- Интенсивность: $\oint I_\omega f(\theta) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi I_\omega(\theta) f(\theta) d\theta$.
- Поток: $F_\omega = 2\pi \int_0^{2\pi} I_\omega(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta$.

▼ 4. Гипотеза, волны и формула де Бройля. Экспериментальное подтверждение. Резонаторы линейные и кольцевые. Условие резонатора, квантование «долгоживущих волн». Опыты Резерфорда, строение и характерные размеры

атома в модели Бора. Ультрафиолетовая катастрофа. Постулаты Бора, назначение и формулировка. Связь правила квантования орбит с гипотезой де Бройля и условиями резонатора. Расчет планетарной модели, квантование энергии и момента импульса, спектры, формула Ридберга. Проблемы планетарной модели.

▼ Гипотеза де Бройля

Предположение в связи между корпускулярной (импульсом) и волновой (длина волны) природой частицы.

$$W = h\nu = h\omega = h\frac{c}{\lambda} = pc$$

▼ Волны де Бройля

Формула:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Для частиц с большой массой растёт импульс, а длина волны поменьше.

Так, если взять протон и электрон, то масса протона больше, но длина волны меньше.

▼ Экспериментальное подтверждение

Для экспериментального подтверждения нужно проверить волновые свойства. Например, дифракция. Но нужны дифракционные решётки с периодом сопоставимым с длиной волны, такие можно найти в природе.

Опыты:

1. Дэвиссона — Джермера: исследовали отражение электронов от образцов никеля, то есть шлифованных кристаллов, чтобы шлифованная часть располагалась вдоль кристаллографической оси. Подтвердили: $2d \sin \alpha = k\lambda$.
2. Томсона и Тартаковского: наблюдали дифракцию электронов в преломленном свете на тонкой золотой фольге, настолько тонкой, что она была раскатана до толщины в 1 атом, в итоге подтвердили закон Фраунгофера: $d \sin \phi = k\lambda$.
3. Бибермана и Сушкина: подтвердили наличие волновых свойств у протонов и нейтронов (дифракция Фраунгофера слаботоочных электронов пучков на тонкой еталлической фольге).

▼ Резонаторы линейные и кольцевые. Условие резонатора

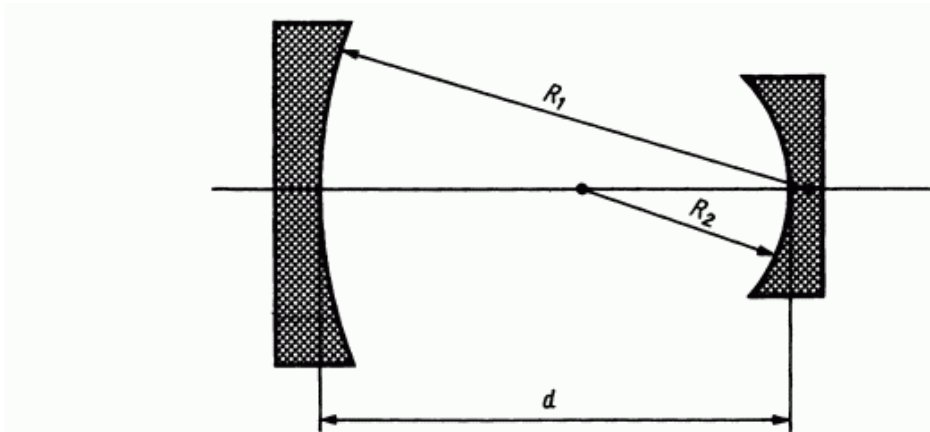


Рис. 7.13. Простой линейный оптический резонатор. Излучение из резонатора выводится различными способами: с помощью частично просветленного зеркала, с помощью отверстия, высверленного в одном из глухих зеркал, или с использованием лучей, претерпевших дифракцию на краях зеркала (в неустойчивых резонаторах).

Кольцевой резонатор — оптический резонатор, в котором свет распространяется по замкнутой траектории.

Условие линейного резонатора: отношение размера области к длине волны это целое число: $\frac{l}{\frac{\lambda}{2}} = n$

▼ Квантование «долгоживущих волн»

Если волна нечётная, то она сама себя гасит. Если чётная, то живёт.

▼ опыты Резерфорда

Его опыты показали, что есть ядро, где сосредоточена основная масса и весь положительный заряд, и где-то электроны.

▼ строение и характерные размеры атома в модели Бора

Его модель обычно зовётся планетарной, в центре ядро и вокруг электроны. За основу взят атом водорода.

▼ Ультрафиолетовая катастрофа

В такой модели сила, действующая на электрон радиальная, то есть под прямым углом, поэтому из этого следует, что у электрона нет касательного ускорения и он движется равномерно.

Но имея ускорение, то происходи тормозное излучение электрона, тогда он падает на ядро и нейтрализует один и из протонов. Упавший электрон по электрону лишают ядра возможности существовать. Это катастрофа ультрафиолетовая.

В итоге электрону запретили излучать на стационарной орбите.

▼ Постулаты Бора

1. Электроны в атомах находятся в стационарных состояниях, в которых они не излучают.
2. Стационарные орбиты образуют дискретные множества, электрон испускает или поглощает свет в форме фотона, если переходит на другой уровень.

▼ Связь правила квантования орбит с гипотезой де Бройля и условиями резонатора

По прежней теории из электромагнетизма следовало, что заряженная частица двигаясь, испускает электромагнитные волны, а значит излучает, теряя энергию. И в конце концов падая на атом.

Но это верно для частицы, а если электрон это волна, то для него нужны другие рассуждения.

Запишем для него: $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$ и применим условие линейного резонатора. Тогда выходит, что орбита квантуется:

$$p_e r = m_e v r = n \hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

▼ Расчет планетарной модели

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad v_n = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{1}{n} \\ (2) \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{zm_e e^2} n^2 \\ (3) \quad T_n = \frac{m_e v_n^2}{2} = \frac{z^2 e^4 m_e^2}{32\epsilon_0^2 \pi^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \\ (4) \quad U_n = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{z^2 e^4 m_e^2}{16\epsilon_0^2 \pi^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \\ (5) \quad U_n = -2T_n \\ (6) \quad W_n = U_n + T_n = -T_n = -\frac{z^2 e^4 m_e^2}{32\epsilon_0^2 \pi^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \\ (7) \quad \Delta W_{n \rightarrow e} = Z^2 \hbar R \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \hbar \omega_{ne} \end{array} \right.$$

▼ квантование энергии и момента импульса

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

▼ формула Ридберга

$$\text{Постоянная Ридберга: } R = \frac{m_e^2 e^4}{32\epsilon_0^2 \pi^2 \hbar^2}$$

▼ Проблемы планетарной модели Бора

- Не объясняет интенсивность спектральных линий
- Справедлива только для водорода.

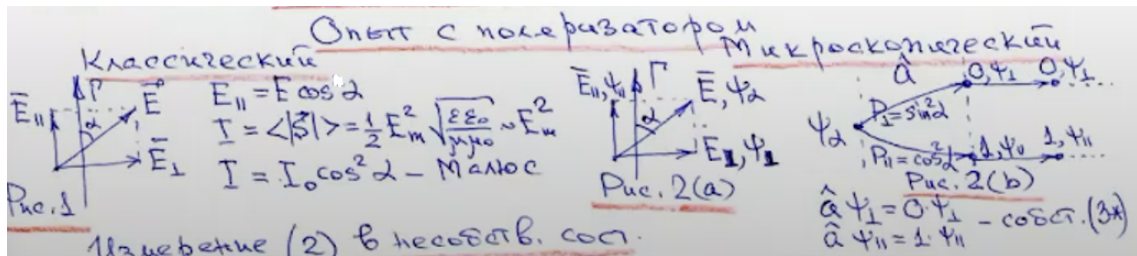
▼ 5. Микроскопичность и проблема измерения. Примеры. Опыт с поляризованными фотонами. Возможная трансформации состояний и неоднозначность, случайность результата измерения. Собственные и несобственные состояния. Принцип суперпозиции состояний. Интерпретация. Квантовые операторы как математические аналоги измерительных процессов, собственные состояния и спектр. Уравнения собственных состояний, интерпретация. Принцип эквивалентности состояний. Соотношения неопределенностей Гейзенберга. Примеры. Сопряженность величин и коммутативность операторов. Квантовые средние, сравнение со средними в классической статистике. Соответствие уравнений классической и квантовой физики. Самосопряженность операторов и свойства их спектра, базис состояний. Расчет вероятностей переходов через коэффициенты суперпозиции. Язык описания состояний.

▼ Микроскопичность и проблема измерения, случайность результата измерения.

Для того, чтобы провести измерения данной величины с помощью данного измерительного процесса в каком-то состоянии Ψ , мы должны иметь такое

состояние, которое под действием этого измерительного процесса меняться не будет.

▼ Опыт с поляризованными фотонами.



В микроскопическом случае, пропуская через поляризатор фотон возможны два результата: за поляризатором фотон есть или нет. Но можно найти вероятность перехода из начального состояния в эти, повторяя опыт несколько раз.

▼ Принцип суперпозиции состояний. Интерпретация

Если есть какое-то состояние Ψ и его можно представить в виде комбинаций с числовыми коэффициентами C_k каких-то состояний Ψ_k , то это означает, что существует процесс, переводящий состояние Ψ в одно из таких состояний Ψ_k :

$$\Psi = \sum_k c_k \Psi_k.$$

Коэффициенты c_k можно интерпретировать как коэффициент для разложения по базису или как вероятность перехода.

▼ Квантовые операторы как математические аналоги измерительных процессов, собственные состояния и спектр.

Квантовые операторы являются математическими аналогами измерительных процессов. Они реализуют линейные действия над символами состояний (операторы аналогичны матрицам, а символы состояний - векторам) $\hat{a}\Psi = a\Psi$, где a -оператор, а Ψ -символ состояния

Собственные состояния операторов аналогичны собственным состояниям измерительных процессов.

Спектр оператора - это множество его состояний

$$\Psi \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \leftarrow \hat{a}$$

▼ Принцип эквивалентности состояний, собственные и несобственные.

$$\hat{a}\Psi = a\Psi \Leftrightarrow \Psi$$

\hat{a} - измерительный процесс.

Ψ - так называемый символ состояний. Когда мы к Ψ применяем \hat{a} мы получаем число a и состояние Ψ . Число a - это результат измерения. Символ состояний Ψ бывает собственный и несобственный. Собственный - когда мы применили измерительный процесс и получили то же состояние Ψ .

Несобственный - когда после измерения мы получили другое состояние.

Список несобст. соот.

$$\Psi \rightarrow \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \leftarrow \hat{a} \quad (5^*)$$

$$\langle a \rangle_\Psi = \sum_k a_k p_k - \text{кв. ср.} \quad (5)$$

▼ Соотношения неопределённостей Гейзенберга. Примеры.

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \sim \hbar & (1) \\ \Delta E_x \Delta H_x \sim \hbar & (2) \\ \Delta W \Delta t \sim \hbar & (3) \end{cases}$$

(2) показывает, что нет пространства, лишённого энергии и напряжённости магнитного поля.

Из (3) следует существование виртуальных частиц, но их нельзя исследовать.

Можно добавить, что из-за этих соотношений произведения операторов, чьи величины между собой связаны через неопределённость — они не коммутируют.

▼ Сопряжённость величин и коммутативность операторов.

Самосопряжённый оператор имеет действительные собственные значения.

Спектр собственных функций самосопряжённого оператора ортогонален.

$(\hat{F} + \hat{G})\Psi = (\hat{F}\Psi) + (\hat{G}\Psi)$: сумма операторов коммутативна.

▼ Квантовые средние, сравнение со средними в классической статистике.

Среднее значение физической величины F в состоянии $\Psi(\xi)$:

$$\langle F \rangle = \int \Psi^*(\xi) \hat{F} \Psi(\xi) d\xi$$

Квантовое среднее можно записать как: $(\hat{a}\psi, \psi) = \sum_k |c_k|^2 a_k$

▼ Соответствие уравнений классической и квантовой физики.

Пусть $F(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \dots)$ - функция от квантовых операторов. Эта функция может стать аналогичной функции от классических величин, если произвести квантовое усреднение, а затем убрать из нее соотношения Гейзенберга, взяв $\hbar = 0$. Если записать то выйдет:

$$\langle F(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \dots) \rangle_{\Psi} \rightarrow_{\hbar \rightarrow 0} F(a, b, c, \dots)$$

Это возможно только если нет коммутирующих операторов. Обратный переход можно совершить простой заменой $a, b, c \dots$ на операторы.

▼ 6. Координатное представление. Волновая функция и ее смысл. Математические свойства, стандартные условия. Условие нормировки волновых функций.

Операторы координат и времени, импульса и энергии. Интерпретация коэффициентов суперпозиции состояний. Расчет вероятностей переходов и квантовых средних.

▼ Волновая функция

Волновая функции описывает движение электрона.

Физический смысл волновой функции заключается в:

$$|\psi|^2 dV = \frac{dN}{N}$$

Это вероятность обнаружить электрон в объёме.

▼ Координатное представление

Объект задаётся с помощью функции $\Psi(r, t)$. Так вероятность обнаружить его в окрестности в момент времени: $dP = |\Psi(r, t)|^2 dV$, а условие нормировки $\int_V |\Psi(r, t)|^2 dV = 1$.

▼ Условие нормировки волновых функций.

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1$$

▼ Операторы координат и времени, импульса и энергии.

- Координат: $\hat{q}_i \cdot |\psi\rangle = q_i \cdot |\psi\rangle = |\chi\rangle$
- Импульса: $\hat{L} = -i\hbar[(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y})\vec{i} + (z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z})\vec{j} + (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})\vec{k}]$
- Кинетической энергии: $\vec{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2$

▼ 7. Две формы оператора энергии. Нестационарное уравнение Шредингера – уравнение эволюции динамики в нерелятивистской механике. Детерминированная эволюция микрообъектов и множественность квантовых траекторий. Связь с классическим движением. Решение нестационарного уравнения Шредингера в стационарном потенциальном поле. Временная и пространственная части решения. Решение для свободной частицы. Связь с волнами де Бройля. Собственные состояния операторов импульса и энергии. Их связь с волнами де Бройля.

▼ Две формы оператора энергии

Первая форма из базисных операторов:

$$\hat{W}\psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar}{t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Вторая форма из оператора для полной механической энергии:

$$\hat{W}t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U\Psi$$

▼ Нестационарное уравнение Шредингера.

Возьмём две формы оператора энергии и приравняем, получая при этом уравнение эволюции состояния, или как функция состояния зависит от времени:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

▼ Общая форма записи

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \text{ где } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$$

▼ Другая форма записи

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi + U \cdot \Psi$$

▼ Детерминированная эволюция микрообъектов и множественность квантовых траекторий.

Уравнение Шредингера рассматривает систему как не взаимодействующую с чем-то другим, отсюда и детерминированность.

▼ Решение нестационарного уравнения Шредингера в стационарном потенциальном поле.

В потенциальном поле уравнение записывается: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\vec{r})\psi$.

▼ Решение для свободной частицы.

С учётом приближения свободных электронов уравнение Шредингера принимает вид: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$.

Движение свободного электрона описывается волновой функцией:

$$\psi = Ae^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Это решение представляет собой плоской волну.

При этом приближение свободных электронов применимо только для внешних электронов атомов в кристалле.

▼ Связь с волнами де Бройля.

Для свободной частицы волновой вектор \vec{k} и частота ω волны связаны с импульсом электрона \vec{p} и его энергией E соотношениями де Бройля: $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $E = \hbar\omega$.

▼ Собственные состояния операторов импульса и энергии.

▼ Их связь с волнами де Бройля.

▼ 8. Стационарное уравнение Шредингера. Интерпретация. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Связь решений уравнения Шредингера и модели резонатора. Гармонический квантовый осциллятор. Собственные функции. Сравнение с решением для прямоугольной ямы. Падение частицы на потенциальный барьер. Туннельный эффект. Коэффициенты прозрачности и отражения.

▼ Стационарное уравнение Шредингера.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U \cdot \Psi = W \cdot \Psi.$$

▼ Другая форма записи.

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\Psi = 0$$

▼ Интерпретация.

Уравнение описывает **стационарные энергетические состояния**, которые для оператора полной энергии будут собственными, то есть в них энергия имеет чёткие значения.

▼ Частица в одномерное прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

В такой ситуации частица, двигаясь в потенциальном стационарном силовом поле, имеет бесконечную потенциальную энергию по бокам и нулевую вниз, это одномерная **потенциальная яма**.

По условию задачи предполагается, что объект сперва посадили в эту яму. Частица из этой ямы никогда не выйдет, так как требуется бесконечное количество энергии.

Частица при этом двигается в этом поле свободно, поле на неё никак не действует.

Граничные условия и общее решение:

$$\begin{cases} R(x) = P \sin kx + Q \cos kx \\ R(0) = 0 \rightarrow Q = 0 \\ R(l) = 0 \rightarrow kl = n\pi \rightarrow k_n = \frac{\pi}{l}n \rightarrow p_{x_n} = \frac{\hbar\pi}{l}n \rightarrow E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \end{cases}$$

▼ Гармонический квантовый осциллятор.

Это обобщение случая про потенциальную яму, но объект теперь движется в параболическом поле.

▼ Падение частицы на потенциальный барьер

Вне барьера пространственная часть стационарного уравнения Шредингера выглядит как для прямоугольной ямы:

$$\begin{cases} R_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \\ R_3(x) = A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x} \end{cases}$$

Внутри барьера, если энергия превышает барьер, то решения волновые, иначе появляется комбинация экспоненциальных решений с вещественными показателями: $R_2(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}$, $\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E_2)}$

Временная часть везде одинакова, как в потенциальной яме.

▼ Туннельный эффект.

Способность микрообъектов проникать в области недоступные для них с классической точки зрения. Это невозможно, если барьер бесконечного размер, но вполне если высота барьера переменная.

Объясняется это соотношением неопределённости, то что про заимствование энергии из вакуума: внутри барьера частица на время берёт энергию из вакуума, а выходя возвращает, так энергия самой частицы сохраняется.

▼ Коэффициенты прозрачности и отражения

- $|A_1|^2$ — вероятность падения частицы на барьер

- $|B_1|^2$ — коэффициент отражения: вероятность возникновения в первой области отраженной волновой компоненты
- $|A_3|^2$ — коэффициент прозрачности (вероятность проникновения частицы за барьер)

▼ 9. Оператор момента импульса и его свойства. Следствия. Векторная модель атома. Кинетическая энергия вращения и ее оператор. Собственные состояния. Квантование энергии, момента импульса и его проекций при вращении. Орбитальное и магнитное квантовые числа.

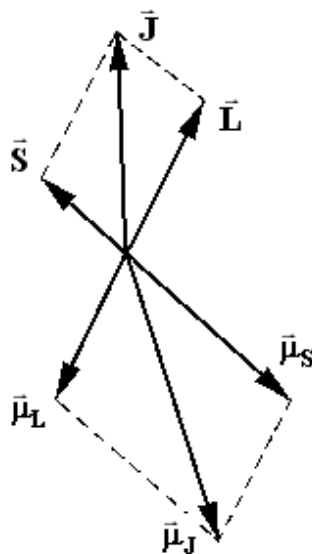
▼ Оператор момента импульса и его свойства.

$$\hat{\vec{L}} = [\vec{r}, \hat{\vec{p}}] = -i\hbar[\vec{r}, \hat{\nabla}] = \hat{\vec{L}} = \hat{L}_x \vec{e}_x + \hat{L}_y \vec{e}_y + \hat{L}_z \vec{e}_z$$

▼ Свойства и следствия.

1. Две любые проекции момента импульса не могут одновременно иметь определённые значения.
2. Вектор момента импульса \vec{L} не имеет определённого направления в пространстве.
3. Сохраняется квадрат момент импульса и одна из его проекций.
4. Момент импульса квантуется.

▼ Векторная модель атома.



Тут главное квантовое число L отождествляется с мерой результирующего, орбитального углового момента все электронов при их движении вокруг ядра.

Результирующий вектор: $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$ называется вектором полного момента импульса электрона.

$$|J| = \sqrt{J(J+1)}\hbar$$

▼ Кинетическая энергия вращения и её оператор.

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta.$$

▼ Собственные состояния.

Собственные состояния — состояние квантовой системы, при котором измерение данной физической величины приводит к определённому результату.

▼ Квантование энергии, момента импульса и его проекций при вращении.

- Проекций момента импульса: $L_z = \hbar \cdot m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l,$

▼ Орбитальное и магнитное квантовые числа.

l — орбитальное число и определяет модуль момента импульса $L_e = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Это квантовое число ограничено $n - 1$.

m — магнитное квантовое число и определяет проекцию момента импульса $L_z = m\hbar$.

▼ 10. Квантовая теория электрона в водородоподобном атоме. Квантование энергии, момента импульса и его проекций. Спин электрона, перемангличенность спина и отсутствие для него классического аналога. Гиромагнитное отношение для спина. Главное, орбитальное, магнитное, спиновое и магнитоспиновое квантовые числа. Суммарный механический и магнитный моменты атома. Оболочки и подоболочки в многоэлектронном атоме. Кратность вырождения (ёмкость) оболочки и подоболочки. Электронная конфигурация атома. Принцип запрета Паули для электронов. Разрешенные и запрещенные радиационные переходы электронов. Фотон и его спин. Связь спина переносчика с размерностью поля. Спектр атома в теории Шредингера. Заполнение электронных состояний в атомах. Периодическая система элементов Менделеева.

▼ Спин электрона

Спин электрона, момент движения, объясняет случайные линии в спектре.

Момент движения определяется двумя числами: спиновым квантовым числом, определяющим модуль; магнитным спиновым квантовым числом, описывающим проекцию.

▼ Гиромагнитное отношение

$$\frac{e}{2m_e}$$

▼ Оболочки и подоболочки в многоэлектронном атоме

Оболочка — совокупность состояний, у которых имеется общее значение главного квантового числа: S, P, D.

Подоболочка — совокупность состояний, у которого два квантовых числа зафиксированы.

▼ Принцип запрета Паули для электронов

В системе одинаковых частиц никакие два объекта не могут находиться в одинаковом квантовом состоянии.

▼ Периодическая система элементов Менделеева

Когда имеется ядро какого-то атома, лишённого электронов, то оно захватывает электроны из периферии, размещая их на уровень, где других электронов нет, стремясь минимизировать энергию системы в целом.

Когда атомы образуют химические соединения, они отдают один из своих внешних электронов. Дальше электроны могут вести себя по-разному, например:

- Попасть в зону действия соседнего ядра — ионная связь.
- Начать вращаться вокруг пары ионов — валентная связь.

Так, щелочные элементы — легко отдают внешний электрон, а окислители пытаются его захватить.

Вопросы по «Квантовая статистика, ядерная физика и физика элементарных

частиц»

▼ 1. Основные механизмы взаимодействия излучения с веществом.

Коэффициенты Эйнштейна. Основные элементы и принцип действия квантовых генераторов. Лазеры и мазеры. Порог генерации. Свойства лазерного излучения.

▼ Основные механизмы взаимодействия излучения с веществом

Заряженные частицы из излучения, двигаясь в веществе с достаточно большой скоростью, воздействует на атомы вещества, выбивая из них электроны, ионизируя их, или переводя атомы в возбуждённое состояние. При этом энергия заряженной частицы уменьшается.

На ядрах атомов происходит рассеяние.

▼ Основные элементы и принцип действия квантовых генераторов

В квантовых генераторах излучениях происходит:

1. Процесс поглощения веществом света, то есть переход на высшие уровни. Это вынужденный процесс и им можно управлять.
2. Процесс испускания света, переход на низшие уровни. Это спонтанный процесс.
3. Процесс вынужденного излучения: электрон со своего уровня ещё не успел упасть вниз. Если об него ударяется фотон с энергией меньше нужной для электрона, чтобы упасть вниз, то фотон не поглощается, а выбивается причём точно такой же, как и был до столкновения. Благодаря этим фотонам получается высококогерентный поток, растущий по мощности, причём все это фотоны в одном квантовом состоянии.

▼ Коэффициенты Эйнштейна

Скорость поглощения и вынужденного испускания фотона пропорциональна вероятности соответствующего перехода: $B_{12} \cdot u$ и $B_{21} \cdot u$ — **коэффициенты Эйнштейна** для поглощения и испускания; u — спектральная плотность излучения.

Эти коэффициенты характеризуют вероятности излучательных квантовых переходов.

$$B_{21} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} \cdot A_{21}$$

▼ Лазеры, мазеры и разеры

- Лазер — усилитель света за счёт вынужденного излучения в видимом диапазоне.
- Мазер — излучение в микроволновом диапазоне.
- Разер — излучение в рентгеновском диапазоне.

▼ Порог генерации

Состояние системы, при котором энергия, излучаемая активным веществом на частоте генерации равна полным потерям энергии на этой частоте.

▼ Свойства лазерного излучения

Это излучение создаётся веществом в молекулярном состоянии.

▼ 2. Собственные состояния и значения оператора парных перестановок в системе микрообъектов. Фермионы и бозоны. Суперсимметрия. Принцип запрета Паули для фермионов и его следствия.

▼ Фермионы и бозоны.

Частицы можно отличить из этого соотношения $\hat{p}\psi = \lambda\psi$, если собственное число: 1, то бозон, если -1, то фермион.

Фермионы — частицы, подходящие под принцип запрета Пауля.

Бозоны — частицы с целым квантовым числом

▼ Суперсимметрия.

Фермионы образующие частицы, а бозоны переносчики полей.

▼ Принцип запрета Паули для фермионов и его следствия.

В системе тождественных фермионов вероятность события того, что два фермиона окажутся в одинаковом квантовом состоянии = 0.

▼ 3. Средние числа заполнения состояний в системах свободных тождественных микрообъектов. Распределение Ферми-Дирака. Интерпретация. Зависимость от температуры. Вырожденная и невырожденная система микрообъектов. Распределение Бозе-Эйнштейна. Интерпретация. Бозе-конденсация. Примеры.

▼ Средние числа заполнения состояний в системах свободных тождественных микрообъектов.

В любой равновесной системе частицы распределяются по состояниям так, что её внутренняя энергия принимает наименьшее значение.

▼ Распределения Ферми-Дирака.

Равновесное распределение электронов по состояниям при $T \neq 0$ описывается через функцию Ферми-Дирака:

$$\bar{N}(E) = \frac{1}{1 + \exp \frac{E - E_F}{kT}}$$

▼ Вырожденная и невырожденная система микрообъектов.

Из-за принципа запрета Паули фермионы стараются разъединиться, дабы занять своё отдельное место, бозоны же объединиться и они могут заселять одно и то же состояние.

Условие невырожденности: $\frac{N}{G} < 1$, N — число одинаковых частиц; G — число различных состояний.

В таком случае частицы не проявляют свои свойства.

▼ Распределение Бозе-Эйнштейна.

$$F(\epsilon, T) = \frac{1}{\exp(\frac{W - \mu}{kt}) - 1}$$

▼ Бозе-конденсация.

При определённых условиях системы все бозоны переходят в состояние с энергией μ . Это можно назвать фазовым переходом, во время которого резко меняются свойства системы.

▼ Примеры.

- Сверхтекучесть. Это можно увидеть на примере гелия: он рассматривался как совокупность альфа-частиц (это ядра атома гелия); когда температура была отлична от 0, то в этом газе было тепловое движение частиц. Когда температура ещё не стала нулевой, а приблизилась к 20К, то поведение частиц резко поменялось — они все свалились в состояние с неограниченной ёмкостью. При этом движение частиц движется в одном направлении с одинаковой скоростью. По свойствам газов, когда частицы

сталкиваются, возникает вязкое трение. При очень низких температурах пропадает эта сила трения.

- Сверхпроводимость: есть система из положительно заряженных ионов и электронов. В такой системе при обычных условиях частицы хаотично двигаются, а ионы имеют скорости меньшие, чем у электронов. Ионы более инертные. Поскольку они положительно заряжены, их поле в конечной окрестности похоже на кулоновское, оно будет притягивать частицы противоположного знака. Получается, что каждый ион окружен электронами. Эта совокупность ослабляет поле иона и оказывается, что ионные силовые поля тянутся не к бесконечности (как было бы с кулоновскими полями), а к конечному расстоянию – радиусу экранирования/дебаевский радиус. Когда температура становится низкой, то оказывается, что подвижности (скорость, обретаемая частицей в единичном поле) электронов и ионов становятся соизмеримы, и может появиться ситуация, когда электрон может быть окружён ионами. Ослабляя совокупность электронов, можно вызвать эффект инверсии, то есть за пределами ионной оболочки поле будет выглядеть как поле положительного заряда, то есть электрон будет вести себя как частица с положительным зарядом. Электрон сможет притянуть другой электрон. Из них возникает устойчивая система – куперовская пара. Куперовская пара является бозоном. Если температура падает на уровень 20К, то все куперовские пары садятся на состояние с энергией μ . В итоге пропадает хаотичное движение, сила трения механическая и электрическое сопротивление.

▼ 4. Классический кристалл. Закон Дюлонга и Пти. Теория Дебая для теплоемкости кристалла. Фононы. Внутренняя энергия и теплоемкость кристалла с кубической решеткой (по Дебаю). Зависимость $CV(T)$ кристалла. Температура Дебая.

▼ Классический кристалл.

Кристалл образуют обычно ионы либо атомы в форме решётки.

Каждая частица в кубическом кристалле имеет 3 направления движения, а значит имеет 3 степени свободы.

Так на каждую степень свободы приходится энергия $\frac{kt}{2}$, учитывая 3 степени свободы, то на каждую частицу приходит $\frac{3kt}{2}$.

Но частицы кристалла несвободны, значит, есть ещё потенциальная энергия.

Внутренняя энергия: $3RT$.

▼ Закон Дюлонга и Пти.

Молярная теплоёмкость твёрдых тел: $3R$.

Такое соотношение выполняется, когда температура превышает характеристическое значение, а именно температура Дебая.

▼ Теория Дебая для теплоёмкости кристалл.

Полагается, что когда частицы кристалла во время теплового движения недалеко отклоняются от своих потенциальных ям, то атомы кристалла находятся в квазиупругих полях.

Следовательно колебание одного атома приведёт в движение другие.

▼ Фононы.

Переносчики тепловых процессов по кристаллам, передавая колебания всем частицам металла.

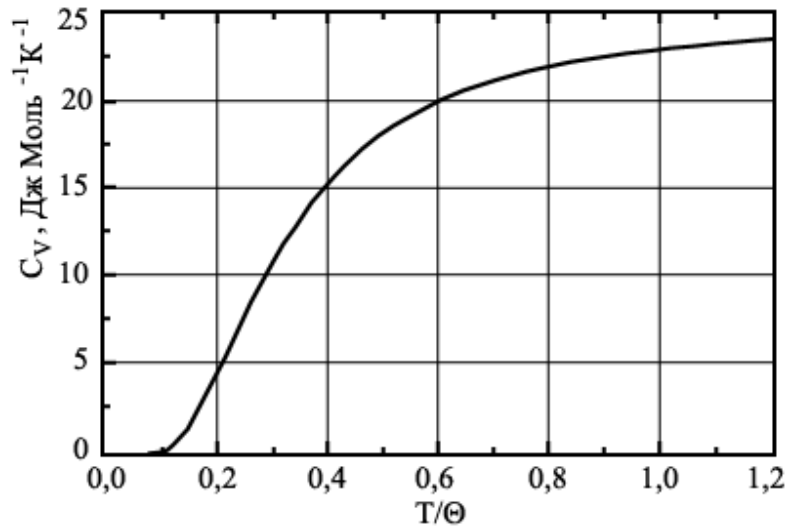
Они распространяют колебания всем частицам металла.

Для фононов должно соблюдаться условие линейного резонатора.

▼ Внутренняя энергия и теплоёмкость кристалла с кубической решёткой.

Энергия кристалла вычисляется, как $\langle E_{mol} \rangle = 3N_A \langle E \rangle = 3N_A \int_0^\infty \hbar\omega n(\omega) d\omega = 3N_A \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1} d\omega$

▼ Зависимость CV(T) кристалла.



$$c_\nu = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \frac{n}{N_A}$$

▼ Температура Дебая.

$$\Theta_D = \frac{h\nu_D}{k_B}$$

▼ 5. Механизм возникновения электронов проводимости в металлах. Эффект Мотта. Идеальный газ электронов проводимости. Энергетическая плотность их состояний.

▼ Механизм возникновения электронов проводимости в металлах.

Если кристаллическая решётка формируется из атомов. Атомов много, а ядра находятся близко друг от друга, поэтому электроны отдельных атомов притягиваются другими ядрами из соседних атомов. Значит, связь с родным ядром слабеет, но в таком случае он оторвётся и выскочит в общий пул. Такой почти свободный электрон с низкой тепловой реакцией называется **электрон проводимости**.

▼ Эффект Мотта.

Резкое изменение электропроводности твердого тела при увеличении концентрации носителей заряда, обусловленная экранированием кулоновского взаимодействия между электронами и дырками

▼ Идеальный газ электронов проводимости.

Свободные электроны в металле называют электронным газом. Если распределение электронов по состояниям описывается функцией Ферми-Дирака, то электронный газ называется вырожденным.

▼ 6. Энергия Ферми для электронов проводимости в металле. Интерпретация. Расчет энергии Ферми для $T=0$. Температурная зависимость и типичные значения энергии Ферми. Средняя энергия электрона проводимости. Температура вырождения. Объяснение аномально низкой теплоемкости электронов проводимости.

▼ Энергия Ферми для электронов проводимости в металле.

Максимальная энергия заполненных состояний в системе тождественных фермионов при температуре $= 0$.

▼ Расчёт энергии Ферми для $T = 0$.

Энергия Ферми зависит от концентрации свободных электронов n и вычисляется по формуле: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$.

▼ Температурная зависимость и типичные значения энергии Ферми.

При увеличении температуры вероятность заполнения состояний электронами задаётся функцией занятости состояний: $f(E) = \frac{1}{e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} + 1}$

▼ Средняя энергия электрона проводимости.

$$U_{эл} = \int_0^\infty E f(E) dN_E$$

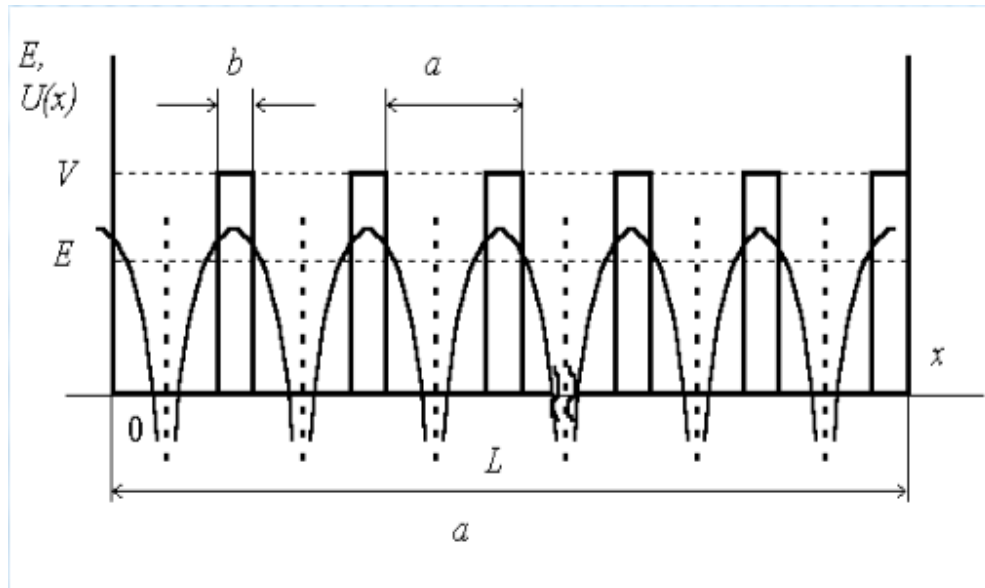
▼ Температура вырождения.

Зависит от плотности квантового газа: $T_0 \sim \frac{N^{\frac{2}{3}}}{mk}$

▼ 7. Энергетический спектр электрона проводимости, движущегося в идеально периодическом поле кристалла. Решения Блоха. Зоны Бриллюэна. Движение электрона в поле кристалла. Дрейфовое уравнение. Эффективная масса. Интерпретация. Время релаксации и стационарный предел дрейфовой скорости электронов проводимости. Собственная проводимость кристалла и локальная форма закона Ома. Температурная зависимость проводимости металлов в классической и квантовой физике.

▼ Энергетический спектр электрона проводимости, движущегося в идеально периодическом поле кристалла.

Энергетический спектр электрона в периодическом потенциале представляет собой области разрешённых и запрещённых значений.



▼ Решение Блоха.

Теорема Блоха имеет вид: $\Psi(r + R) = \exp(ikR)\psi(r)$.

В ходе нескольких выкладок следует, что число разрешенных волновых векторов, содержащихся в одной элементарной ячейке обратной решетки, равно числу ячеек в кристалле.

▼ Зоны Бриллюэна.

Переходы между запрещёнными и разрешённым зонами происходят на границах зон Бриллюэна, то есть при волновом числе, соответствующем границе зон Бриллюэна.

На границах зон Бриллюэна происходит разрыв непрерывности энергии.

Изменение компонента квазиволнового вектора можно ограничить конечной областью:

$$\begin{cases} -\pi \leq k_1 a_1 \leq \pi, \\ -\pi \leq k_2 a_2 \leq \pi, \\ -\pi \leq k_3 a_3 \leq \pi. \end{cases}$$

Эти неравенства определяют объём в k -пространстве, называемый *первой зоной Бриллюэна*.

На границе зоны Бриллюэна для электрона есть 2 решения:

1. Значение энергии ниже, чем значение энергии свободного электрона:

$$\epsilon_1 = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{2}b_0\right)^2 - U_1 = \epsilon_{\text{св}} - U_1$$

2. Значение энергии, которое выше энергии свободного электрона: $\epsilon_2 =$

$$\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{2}b_0\right)^2 + U_1 = \epsilon_{\text{св}} + U_1$$

Между ϵ_1 и ϵ_2 есть область запрещённых значений.

▼ Движение электрона в поле кристалла.

При отсутствии барьеров задача аналогична задаче о движении электрона в одномерной потенциальной яме шириной L с периодическими граничными условиями для волновой функции.

Если же барьеры высокие и широкие, значит, туннелированием электрона сквозь них можно пренебречь и свести задачу к движению электрона в одномерной потенциальной яме.

▼ Дрейфовое уравнение.

$$v_d = \frac{I}{neA}$$

▼ Эффективная масса.

Если рассмотреть движение электрона как классической частицы под действием внешней силы F , можно вычислить как будет меняться групповая скорость: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} F$. А потом переписать её, как: $\frac{\partial v}{\partial t} m_{\text{э}} = F$ и это же аналог второго закона Ньютона.

$$m_{\text{э}} = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}}$$

Вот это эффективная масса электрона.

▼ Интерпретация.

Она косвенно учитывает воздействие периодического поля кристалла, изменение энергии электрона от волнового вектора электрона.

▼ Время релаксации и стационарный предел дрейфовой скорости электронов проводимости.

Время релаксации можно достать из уравнения Больцмана:

.....

$$\tau_p(W_s) = \frac{mv_d}{qE}$$

Дрейфовая скорость электронов и дырок: $v_d = \frac{q\tau_p E}{m(\bar{W})} = \mu E$, μ — подвижность носителей заряда.

▼ Собственная проводимость кристалла и локальная форма закона Ома.

Собственная проводимость кристалла обусловлена дрейфом носителей заряда при их термическом возбуждении из валентной зоны в зону проводимости.

▼ Температурная зависимость проводимости металлов в классической и квантовой физике.

Концентрация электронов = концентрации дырок, а сама концентрация зависит от ширины запрещенной зоны: $n_i = p_i = CT^{\frac{-3}{2}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$.

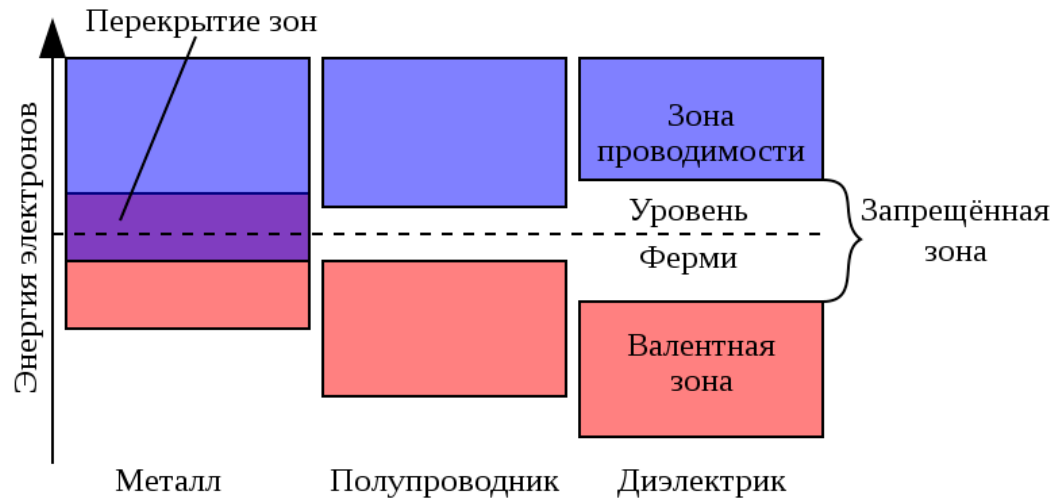
▼ 9. Зонная теория твердых тел. Металлы, полупроводники и диэлектрики.
Заполнение электронами энергетических зон в твердых телах. Связь ширины запрещенной зоны (энергии активации) чистого полупроводника с энергией Ферми.
Примесная проводимость. Донорные и акцепторные уровни.

▼ Зонная теория твердых тел.

Из постулатов Бора следует, что энергия электрона принимает дискретные значения: электрон занимает одну из орбиталей.

Если несколько атомов объединены химической связью, то электронные орбитали расщепляются в количестве, пропорциональном числу атомов, на молекулярные орбитали. Чем дальше система увеличивается, тем ближе она к макроскопическому кристаллу, увеличивается и количество орбиталей: разность энергий электронов на соседних орбиталях уменьшается и энергетические уровни расщепляются на энергетические зоны.

▼ Металлы, полупроводники и диэлектрики.



Для металлов зона проводимости это разрешённая зона, в которой находятся электроны при температуры 0 К. В случае полупроводников и диэлектриках: самая высокая разрешённая энергетическая зона, где при нуле кельвинах все энергетические состояния заняты электронами — **валентная зона**, следом за ней **зона проводимости**.

▼ Заполнение энергетических зон в твёрдых телах.

Заполнение энергетических уровней зон электронами происходит в соответствии с законами квантовой статистики. Так как внутренние оболочки атомов заполнены полностью, то и внутренние зоны, которые из них образуются, также будут заполнены полностью. Уровни, на которых располагаются внешние (валентные) электроны, образуют *валентную зону* (ВЗ). Находящиеся в этой зоне электроны чаще всего связаны каждый со своим атомом. Следующая за ней более высокая зона энергии образована из свободных уровней и называется *зоной проводимости* (ЗП). На уровнях этой зоны электроны обобществляются всем объемом кристалла.

▼ Связь ширины запрещённой зоны (энергии активации) чистого полупроводника с энергией Ферми.

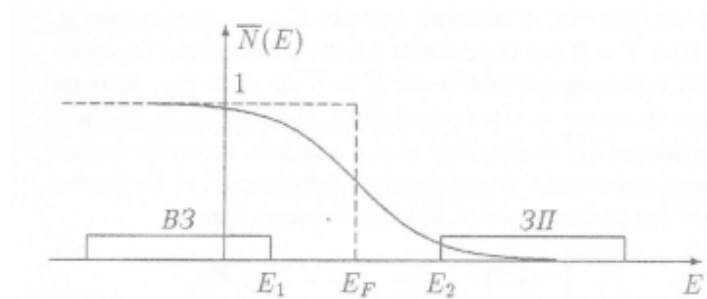


Рис. 8.6. Функция Ферми-Дирака и уровни энергий электронов в полупроводниках и диэлектриках.

$$\Delta E \geq 4kT$$

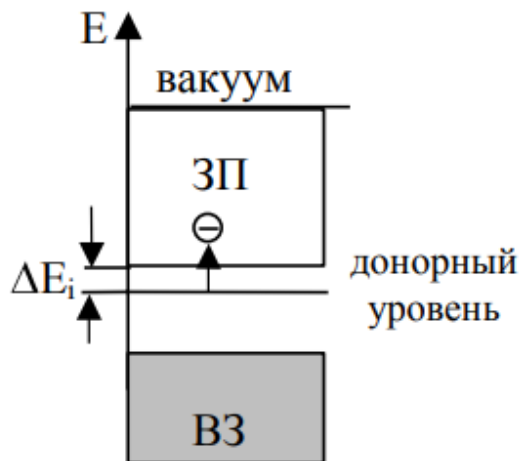
▼ Примесная проводимость.

Примесная проводимость реализуется при замещении базовых атомов кристалла атомами другого вещества, валентность которого отличается на единицу от валентности основных атомов. Даже при введении атомов примеси в малых концентрациях электропроводность полупроводников значительно увеличивается.

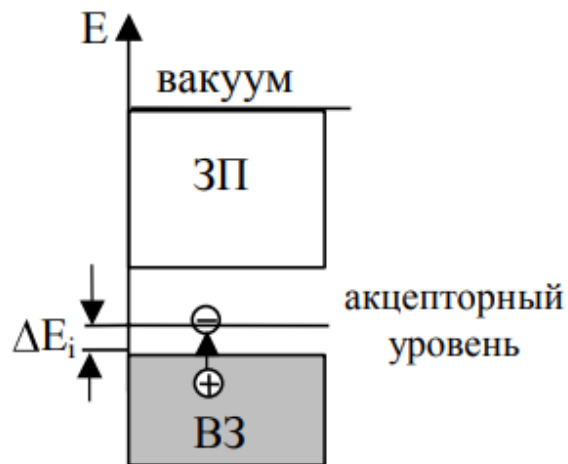
$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}} + \gamma_1 e^{-\frac{\Delta W_n}{2kT}}$$

▼ Донорные и акцепторные уровни.

Полупроводник n-типа получается, если в чистый полупроводник добавить примесь с валентностью, большей на единицу. Например, если в чистый четырехвалентный полупроводник германий (Ge) добавить пентавалентный мышьяк (As). Четыре электрона атома мышьяка образуют ковалентные связи с четырьмя валентными электронами атома германия. Пятый же электрон атома мышьяка окажется избыточным.



Полупроводник *p*-типа получается, если в чистый полупроводник добавить примесь с валентностью, меньшей на единицу. Так, при замещении одного атома германия (Ge) трехвалентным атомом бора (В) одна связь окажется ненасыщенной электронами примеси. Образуется вакантное место – дырка. При повышении температуры на место этой дырки может перейти электрон соседнего атома германия.



▼ 10. Полупроводниковые диоды и транзисторы. Формирование структуры P-N перехода. Зависимость структуры перехода от внешнего поля. Принцип действия и характеристики диода. Принцип действия и характеристики транзистора.

▼ Формирование структуры P-N перехода.

Переход между двумя областями полупроводников с различным типом проводимости: дырочной и электронной.

Сначала после введения примесей в полупроводнике есть 2 области:

- р-область: свободные носители заряда — дырки, а в узлах кристаллической решётки — отрицательные ионы примеси.
- n-область: носители заряда — электроны, а в узлах кристаллической решётки — положительные ионы примеси.

После чего свободные носители заряда начнут перемещаться с области с большей концентрацией в меньшую, то есть электроны начнут диффундировать в р-область, дырки в n-область. Тем самым возникают диффузионные токи. Уходя в другую область свободные носители заряда рекомбинируют и образуют электрически нейтральный атом полупроводника. То что осталось образуют слой зарядов: потенциальный барьер.

Новое электрическое поле действует на свободные носители электрического заряда: дырки уходят вглубь р-области, а электроны — в n-область.

В зоне действия электрического поля образуется слой, где носители заряда отсутствуют, его называют запирающим.

Неосновные носители заряда, близкие к р-n-переходу, в областях передрейфуют и станут там основными носителями: электроны из р-области в n-область и дырки из n в р.

То есть при отсутствии внешнего поля установится равновесие.

▼ Зависимость структуры перехода от внешнего поля.

Если полупроводник Р-N-типа подключить к батарее, то направление внешнего поля будет противоположно полю контактного слоя.

При приложении внешнего электрического поля сопротивление р-n-перехода меняется и зависит от направления поля. Это вентильный эффект.

Высота потенциального барьера уменьшается и увеличивается число диффундирующих зарядов, возникает прямой ток, уменьшается сопротивление р-n-перехода.

Пока внешнее напряжение возрастает, происходят те же процессы, что и при Р-N-переходе, но при этом из внешнего поля в n-область приходят электроны, которые благодаря Р-N-переходу попадают в р-область и оттуда

уходят во внешнее поле, цепь, например. Концентрация электронов и дырок в областях остаётся такой же.

▼ Полупроводниковые диоды

▼ Принцип действия

Принцип действия основан на прямом смещении P-N-перехода: внешняя разность потенциалов вынуждает основных носителей заряда двигаться в сторону рекомбинации и позволяет току протекать. При обратном смещении диффузионный ток крайне мал и слой сопротивления на границе P-N-перехода лишь увеличивается.

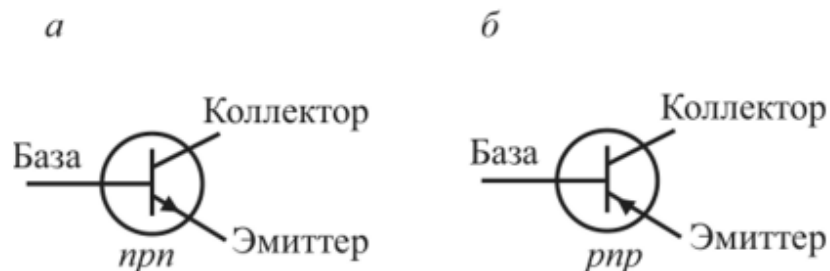
▼ Характеристики диода.



▼ Транзисторы.

Приборы для усиления электрических сигналов

▼ Принцип действия



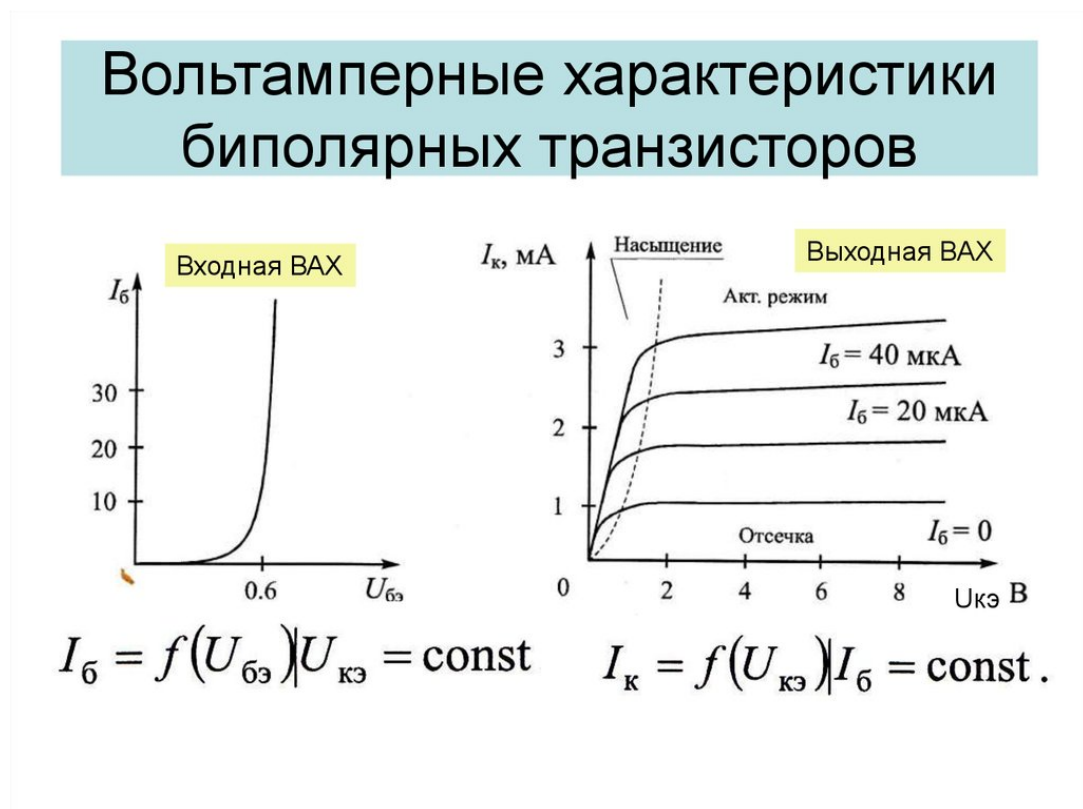
Есть p-n-p триод: между эмиттером и базой прикладывается смещающее в прямом направлении, а между базой и коллектором — постоянное

сдвигающее напряжение в обратном направлении.

Ток в эмиттере течёт благодаря дыркам и при p-n переходе несколько дырок впрыскиваются в базу, где они диффундируют к коллектору, где они захватываются полем и меняется ток коллектора. С него снимается повышенный ток. Получается слабый ток в цепи эмиттер-база и сильный эмиттер-коллектор и если наращивать напряжение на базе транзистора, то будет наращиваться мощность потока дырок, растёт ток в цепи.

Для n-p-n транзистора всё аналогично, но там за свободные носители заряда отвечают электроны.

▼ Характеристики транзистора.



▼ 11. Фундаментальные взаимодействия в квантовой теории. Переносчики. Виртуальный характер и длина волны Комптона переносчиков. Связь спина переносчика с размерностью поля. Классификация элементарных частиц. Барионы, мезоны и лептоны. Адроны и кварки. Конфайнмент. Нуклоны. Состав и размер атомного ядра. Формула Вейцекера*. Устойчивые и неустойчивые ядра.

Уравнение радиоактивного распада. Частота, постоянная распада и период полураспада. Энергия связи ядра. Энергетически выгодные ядерные реакции.

▼ Фундаментальные взаимодействия в квантовой теории.

Таблица 6. Основные типы взаимодействий и их характеристики

Тип	Константа	Радиус, см	Потенциал	Переносчик взаимодействия	Взаимодействующие частицы	Время взаимодействия, сек	Поперечное сечение, см ²
Сильное	$\alpha_s = \frac{g_s^2}{\hbar c} \sim 14 \quad r > r_p$	10^{-13}	$1/r^n$ или $e^{-r/a}$	π, ρ, ω, \dots	адроны, ядра	10^{-23}	10^{-24}
	$\alpha_s(q^2) \sim \left(\ln \frac{q^2}{\Lambda^2} \right)^{-1} \quad r < r_p$	10^{-14}	$\pm \alpha_s/r + \text{æг}$	g_1, \dots, g_8 глюоны	кварки, глюоны	10^{-24}	10^{-24}
Электромагнитное	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$	∞	$1/r$	γ фотон	заряжен. частицы, фотон	$10^{-23}-10^{-16}$	10^{-27}
Слабое	$\alpha_W = \frac{G_F}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^2 = 1.02 \cdot 10^{-5}$	10^{-16}		Z^0, W^+, W^- бозоны	лептоны, адроны	$>10^{-12}$	10^{-40}
Гравитационное	$\alpha_G = \frac{Gm_N^2}{\hbar c} = 0.5 \cdot 10^{-38}$	∞	$1/r$	G гравитон	все частицы	∞	

▼ Виртуальный характер и длина волны Комптона переносчиков.

Комптоновская длина волны определяет расстояние, на которое может удалиться виртуальная частица массы m от точки своего рождения.

▼ Связь спина переносчика с размерностью поля.

Учитывается магнитный спин: $2s + 1$.

▼ Классификация элементарных частиц.

По времени жизни они делятся:

- Стабильные: бесконечно время жизни в свободном состоянии.
- Нестабильные.

По массе:

Классификация элементарных частиц по их массе

Группа частиц	Примеры частиц	частица / античастица	Масса m , Мэв
лептоны	Электрон	e^- e^+	$0,5109989461 \pm \pm 0,0000000031$
	Электронное нейтрино	ν_e $\bar{\nu}_e$	$0,0000022 \pm B$
	Мюон	μ^- μ^+	$105,6583745 \pm \pm 0,0000024$
	Мюонное нейтрино	ν_μ $\bar{\nu}_\mu$	$0,17 \pm B$
	Тау-лептон	τ^- τ^+	$1776,86 \pm 0,12$
	Таонное нейтрино	ν_τ $\bar{\nu}_\tau$	$15,5 \pm B$
мезоны	Пионы	$\begin{cases} \pi^+ & \pi^0 & \pi^- \end{cases}$	$139,57018 \pm 0,00035$ $134,9770 \pm 0,0005$
	Каоны	$\begin{cases} K^0 & \bar{K}^0 \\ K^+ & K^- \end{cases}$	$497,611 \pm 0,013$ $493,677 \pm 0,016$
	Эта-мезоны	η^0	$547,862 \pm 0,017$
барионы	Протон	p \bar{p}	$938,272081 \pm 0,000006$
	Нейтрон	n \bar{n}	$939,565413 \pm 0,000006$
	Гипероны:		
	· ламбада	Λ^0 $\bar{\Lambda}^0$	$1115,683 \pm 0,006$
	· сигма	$\begin{cases} \Sigma^0 \\ \Sigma^+ \\ \Sigma^- \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{\Sigma}^0 \\ \bar{\Sigma}^+ \\ \bar{\Sigma}^- \end{cases}$	$1192,642 \pm 0,024$ $1189,37 \pm 0,07$ $1197,449 \pm 0,030$
	· кси	$\begin{cases} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{\Xi}^0 \\ \bar{\Xi}^- \end{cases}$	$1314,86 \pm 0,20$ $1321,71 \pm 0,07$
	· омега	Ω^- $\bar{\Omega}^-$	$1672,45 \pm 0,29$

По величине спина:

- Бозоны (целый спин): фотон, глюон, мезоны...
- Фермионы — частицы с полуцелым спином: электрон, протон, нейтрон, нейтрино...



По видам взаимодействия:

- Адроны — частицы, участвующие во всех видах фундаментальных взаимодействии, состоящие из кварков и делящиеся на:
 - Мезон: адроны с целым спином и являются бозонами.
 - Барионы: адроны с полуцелым спином.
- Лептоны: фермионы, имеющие вид точечных частиц. Не участвуют в сильных взаимодействиях.
- Кварки: дробно заряженные частицы, не наблюдаемые в свободном виде.
- Калибровочные бозоны: частицы, посредством обмена которых происходят взаимодействия.

▼ Нуклоны.

Протоны и нейтроны, из которых состоят ядра атомов, называются **нуклонами**.

▼ Конфайнмент.

Явление, состоящее в невозможности получить кварки в свободном состоянии.

▼ Состав и размер атомного ядра.

Ядро размером 10^{-15} м находится в центре атома. Вокруг него движутся электроны. Сам атом нейтрален электрически, так как заряд по модулю равен суммарному заряду электронов.

▼ Формула Вейцекера.

Полуэмперическая формула для энергии связи ядра:

$$E_{\text{св}}(A, Z) = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(\frac{A}{2} - Z)^2}{A} + a_5 A^{-\frac{3}{4}}$$

Первое слагаемое в энергии связи ядра, подобного жидкой капле, пропорционально массовому числу A и описывает примерное постоянство удельной энергии связи ядер.

Второе слагаемое — поверхностная энергия ядра уменьшает полную энергию связи, так как нуклоны, находящиеся на поверхности имеют меньше связей, чем частицы внутри ядра. Это аналог поверхностного натяжения.

Третье слагаемое в энергии связи обусловлено кулоновским взаимодействием протонов. В капельной модели предполагается, что электрический заряд протонов равномерно распределен внутри сферы радиуса $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$.

Четвертое слагаемое — энергия симметрии ядра отражает тенденцию к стабильности ядер с $N = Z$.

Пятое слагаемое — энергия спаривания учитывает повышенную стабильность основных состояний ядер с четным числом протонов и/или нейтронов.

▼ Устойчивые и неустойчивые ядра.

Если при ядерных реакциях ядро не распадается, то оно устойчивое, иначе нет.

▼ Уравнение радиоактивного распада.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

▼ Частота, постоянная распада и период полураспада.

Период полураспада — время, в течение которого число радиоактивных атомов или активность образца уменьшаются в 2 раза.

▼ Энергия связи ядра.

$$E_{\text{св}} = \Delta M \cdot c^2, \Delta M — \text{дефект масс.}$$

▼ Энергетически выгодные ядерные реакции.

Наиболее энергетически выгодными является реакции синтеза — слияние лёгких ядер в более тяжёлые.

FAQ

▼ Закон Стефана-Больцмана

Энергетическая светимость абсолютно чёрного тела пропорциональна 4-й степени абсолютной температуры.

$$R_e = \sigma T^4, \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} \text{ постоянная Стефана Больцмана.}$$

▼ Вывод из распределения Планка.

(полная плотность энергии)

Аналитический вывод закона Стефана-Больцмана для интегрального потока излучения из закона Планка для спектрального потока излучения состоит во взятии интеграла:

$$E_t^0(T) = \int_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5 (\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1)} d\lambda$$

1. Заемтим, что это несобственный интеграл. Значит нужно убедиться в его сходимости при обоих пределах. Сделаем замену: $x = \frac{c_2}{\lambda T}$.
2. $E_t^0(T) = c_1 \left(\frac{T}{c_2}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp x - 1}$.
3. При $x \rightarrow \infty$ он сходится из-за признака сравнения.
4. При $x \rightarrow 0$ показываем, что подинтегрально выражение можно представить как: $\frac{\exp(-x)x^3}{1-\exp(-x)} = x^3 \sum_{n=0}^\infty \exp(-[n+1]x)$ пользуемся

признаком Вейерштрасса и показываем, что ряд сходится.

5. Это ряд интегрируем и преобразуем к

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\sum_{n=0}^{\infty} (\int_{\epsilon}^{+\infty} x^3 \exp(-(n+1)x) dx)).$$

6. Делаем замену: $(n+1)x = t$.

7. Выражение преобразовывается к:

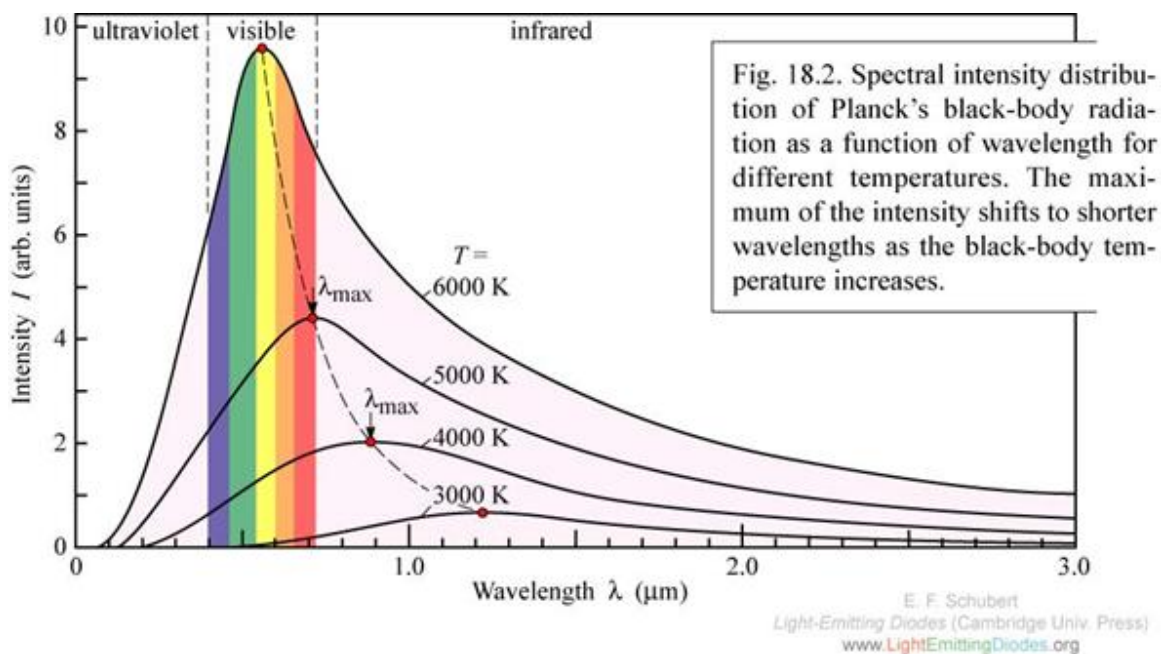
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{(n+1)^4} \int_{(n+1)\epsilon}^{+\infty} t^3 \exp(-t) dt)). \text{ Этот интеграл сходится по признаку Вейерштрасса.}$$

8. Численно интеграл ограничен гамма-функцией: $\Gamma(4) = \int_0^{\infty} t^3 \exp(-t) dt = 3!$

9. Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$

10. Таким образом, $E_t^0(T) = c_1 (\frac{T}{c_2})^4 (\frac{\pi^4}{15}) = c_1 \pi^4 \frac{T^4}{15c_2^4} = \sigma T^4$.

▼ Распределение Планка



Распределение Планка для испускательной способности абсолютно чёрного тела при разных температурах. С ростом температуры максимум спектров сдвигается вдоль пунктирной линии в сторону коротких длин волн в соответствии с законом Вина

Формула Планка — описывает распределение энергии теплового излучения абсолютно черного тела.

Спектральная плотность энергетической светимости чёрного тела:

$$r_{\nu,T}^0 = \phi(\lambda, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}$$

Спектральная объёмная плотность энергии излучения:

$$f(w, T) = \frac{8\pi \hbar \omega^3}{c^3} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}$$

▼ Вывод формулы Планка

▼ Вывод из распределения Больцмана

1. Пусть электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии: $\epsilon = \hbar\omega$.
2. Если излучение испускается порциями, то его энергия кратна величине: $\epsilon_n = n\hbar\omega$, $n \in \mathbb{N}$.
3. В состоянии равновесия распределение колебаний по значениям энергии подчиняется закону Больцмана и получится: $P_n = \frac{N_n}{N} = \frac{\exp(-\frac{\epsilon_n}{kT})}{\sum_n \exp(-\frac{\epsilon_n}{kT})}$.
4. Теперь, зная вероятность различных значений энергии колебания, найдём среднее значение, как $\langle \epsilon \rangle = \sum_n P_n \epsilon_n$
5. Подставив (2) и (3) в (4) получается: $\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar \exp(-\frac{n\hbar\omega}{kT})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{n\hbar\omega}{kT})}$.
6. Сделаем замену $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$ и сделаем допущение, что x меняется непрерывно. После чего (5) будет иметь вид: $\langle \epsilon \rangle = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.
7. В (6) под логарифмом сумма бесконечной геометрической прогрессии и, понимая, что $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$.
8. Подставим (7) в (6): $\langle \epsilon \rangle = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1-e^{-x}} = \hbar\omega \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1}$. И сделаем обратную подстановку.

$$9. \langle \epsilon \rangle = \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

10. Теперь умножим (9) на плотность стоячих волн и получим:

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \text{ Отсюда получается, что:}$$

$$11. u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}$$

12. Теперь вспомним как связывается испускательная способность абсолютного чёрного тела с равновесной плотностью энергии теплового излучения. А вот так: $f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T)$.

$$13. \text{Получается, что } f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

Выводы из распределения Планка:

▼ Закон Релея-Джинса (низкочастотный предел распределения Планка)

Закон Релея-Джинса (низкочастотный предел распределения Планка)

$$\rho(\nu) \approx 8\pi \nu^2 kT / c^3, \quad h\nu \ll kT$$

Сделаем приближение, что $e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \sim 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$ и получим: $B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2ckT}{\lambda^4}$.

▼ Закон Вина (высокочастотный предел распределения Планка)

(высокочастотный предел распространения Планка)

$$u_\lambda = \lambda^{-5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

Здесь сделаем приближение: $e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \sim e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$ и получаем: $B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp^{-\frac{hc}{\lambda kT}}$.

▼ Закон Стефана-Больцмана (полная плотность энергии)

(полная плотность энергии)

Аналитический вывод закона Стефана-Больцмана для интегрального потока излучения из закона Планка для спектрального потока излучения состоит во взятии интеграла:

$$E_t^0(T) = \int_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5 (\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1)} d\lambda$$

1. Заемтим, что это несобственный интеграл. Значит нужно убедиться в его сходимости при обоих пределах. Сделаем замену: $x = \frac{c_2}{\lambda T}$.
2. $E_t^0(T) = c_1 \left(\frac{T}{c_2}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp x - 1}$.
3. При $x \rightarrow \infty$ он сходится из-за признака сравнения.
4. При $x \rightarrow 0$ показываем, что подинтегрально выражение можно представить как: $\frac{\exp(-x)x^3}{1-\exp(-x)} = x^3 \sum_{n=0}^\infty \exp(-(n+1)x)$ пользуемся признаком Вейерштрасса и показываем, что ряд сходится.
5. Это ряд интегрируем и преобразуем к $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\sum_{n=0}^\infty (\int_\epsilon^{+\infty} x^3 \exp(-(n+1)x) dx))$.
6. Делаем замену: $(n+1)x = t$.
7. Выражение преобразовывается к: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\sum_{n=0}^\infty (\frac{1}{(n+1)^4} \int_{(n+1)\epsilon}^{+\infty} t^3 \exp(-t) dt))$. Этот интеграл сходится по признаку Вейерштрасса.
8. Численно интеграл ограничен гамма-функцией: $\Gamma(4) = \int_0^\infty t^3 \exp(-t) dt = 3!$
9. Заметим, что $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$
10. Таким образом, $E_t^0(T) = c_1 \left(\frac{T}{c_2}\right)^4 \left(\frac{\pi^4}{15}\right) = c_1 \pi^4 \frac{T^4}{15c_2^4} = \sigma T^4$.

▼ Явления, подтверждающие гипотезу Планка

▼ Эффект Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \lambda_c = \frac{h}{mc} \text{ — комптоновская длина.}$$

▼ Волна де Бройля

Волны де Бройля – волны, связанные с любой движущейся материальной частицей. Любая движущаяся частица (например, электрон) ведёт себя не только как локализованный в пространстве перемещающийся объект - корпускула, но и как волна, причём длина этой волны даётся формулой $\lambda = h/p$, где $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

10^{-34} Дж.

сек – постоянная Планка, а p – импульс частицы.

Если частица имеет массу m и скорость $v \ll c$ (c – скорость света), то импульс частицы $p = mv$ и дебройлевская длина волны связаны соотношением $\lambda = h/mv$.

Для расчёта длины волны де Бройля частицы массы m , имеющей кинетическую энергию E , удобно использовать соотношение

$$\lambda = \frac{\lambda_{\text{КОМПТОН.}}}{[2E/E_0 + (E/E_0)^2]^{1/2}}$$

где $E_0 = mc^2$ – энергия покоя частицы массы m ,

$\lambda_{\text{КОМПТОН}} = h/mc$ – комптоновская длина волны частицы,

$\lambda_{\text{КОМПТОН}}(\text{электрон}) = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 0.024 \text{ \AA}$

$\lambda_{\text{КОМПТОН}}(\text{протон}) = 1.32 \cdot 10^{-15} \text{ м}$

▼ Опыты, подтверждающие гипотезу де Бройля

Существование волн де Бройля доказано многочисленными экспериментами, в которых частицы ведут себя как волны.

Так при рассеянии пучка электронов с энергией 100 эВ на упорядоченной системе атомов кристалла, играющего роль дифракционной решётки, наблюдается отчётливая дифракционная картина.

Существование волн де Бройля лежит в основе работы электронного микроскопа, разрешающая способность которого на много порядков выше, чем у любого оптического микроскопа, что позволяет наблюдать молекулы и атомы, а также в основе методов исследования таких сверхмалых объектов, как атомные ядра и элементарные частицы, бомбардировкой их частицами высоких энергий.

Метод дифракции частиц в настоящее время широко используется при изучении строения и свойств вещества.

▼ Волновая функция

Для задания состояния объекта есть несколько способов. Один из них координатный: состояние задаётся с помощью функции $\Psi(\vec{r}, t)$, которая зависит от координат и времени.

Волновая функция имеет статистический смысл: квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности нахождения частицы (электрона)

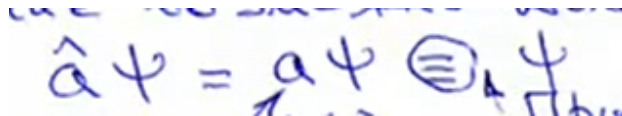
$$dP = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$

Это записана вероятность обнаружения в окрестности dV в момент t .

Чтобы волновая функция работала и выводила на вероятность её нормируют:
 $\int_V |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$.

Также говорят про условие финитности: функция обращается в нуль если один из её аргументов обнуляется.

▼ Принцип Эквивалентности



\hat{a} - измерительный процесс.

Ψ - так называемый символ состояний. Когда мы к Ψ применяем \hat{a} мы получаем число a и состояние Ψ . Число a - это результат измерения. Символ состояний Ψ бывает собственный и несобственный. Собственный - когда мы применили измерительный процесс и получили то же состояние. Несобственный - когда после измерения мы получили другое состояние.

▼ Принцип Суперпозиции состояний

Принцип суперпозиции утверждает, что если в данных условиях система может находиться в различных состояниях, которым соответствуют волновые функции $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i$, то возможно также состояние с волновой функцией $\Psi = \sum C_i \Psi_i$, где C_i – произвольные комплексные числа.

В общем коэффициенты C_i означают разложение состояния по базису в пространстве l_2 .

Физический их смысл: вероятность перехода.

▼ Соотношения неопределённости

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \sim \hbar & (1) \\ \Delta E_x \Delta H_x \sim \hbar & (2) \\ \Delta W \Delta t \sim \hbar & (3) \end{cases}$$

(2) показывает, что нет пространства, лишённого энергии и напряжённости магнитного поля. Даже в вакууме есть частицы и какое-то движение. Например, электрон в вакууме берёт энергию фотона и увеличивает энергию, выходя оттуда. На его месте возникает антиэлектрон — позитрон.

Из (3) следует существование виртуальных частиц, но их нельзя исследовать.

Можно добавить, что из-за этих соотношений произведения операторов, чьи величины между собой связаны через неопределённость — они не коммутируют.

▼ Уравнение Шрёдингера

В настоящее время спектры атомов и молекул объясняются законами квантовой механики, основным уравнением которой является уравнение Шредингера.

▼ Нестационарное уравнение

Взято как равенство двух записей операторов энергии.

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

Стационарное когда не меняются с течением времени физические параметры (потенциальная энергия).

Стационарное уравнение Шредингера для движения электрона в кулоновском поля ядра атома водорода и водородоподобных атомов имеет вид:

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \Psi = 0$$

где Ψ – волновая функция, Δ – оператор Лапласа ($\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$), E – полная энергия

электрона в атоме, $U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ – потенциальная энергия

В атомной физике оператор Лапласа в уравнении Шредингера (11.9) удобно записывать в сферических координатах: r – радиус–вектор, θ – зенитный и ϕ – азимутальный углы. Тогда решение уравнение Шредингера распадается на три сомножителя:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \Psi(r) \cdot \Psi(\theta) \cdot \Psi(\phi)$$

В частности, для основного состояния атома водорода функция $\Psi(r)$ имеет вид

$$\Psi(r) = Ce^{-r/r_0}$$

Где r_0 – первый боровский радиус

▼ Операторы

▼ Координаты

$$\hat{x}\psi(\vec{r}, t) = x\psi(\vec{r}, t)$$

▼ Времени

$$\hat{t}\psi(\vec{r}, t) = t\psi(\vec{r}, t)$$

▼ Энергии.

$$\hat{W}\psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

▼ Импульса.

$$\hat{p}_x\psi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

▼ Момент импульса

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i} [\vec{l}(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}) + \vec{j}(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}) + \vec{k}(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})]$$

▼ Потенциальной энергии

$$\hat{u}\psi = u(x)\psi$$

▼ Квадрата модуля импульса

$$\hat{p}^2\psi = -\hbar^2\Delta\psi$$

▼ Полной механической энергии

$$\hat{W}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + u \cdot \Psi$$

▼ Квантовые числа

Состояние определяется 4 квантовыми числами: n, l, m, m_s :

- $n = 1, 2, \dots$ — главное и влияет на энергию: $E_n = -\frac{w_e Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$
- $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ — орбитальное и влияет на орбитальный момент $h_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Модуль момента импульса.
- $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ — спиновое квантовое число. $L_z = m\hbar$ и определяет проекцию
- $m_s = -g \dots g$ — магнитное спиновое квантовое число, $g = \frac{1}{2}$.

▼ Принцип Запрета Паули

В системе тождественных фермионов вероятность события того, что два фермиона окажутся в одинаковом квантовом состоянии = 0.

▼ Энергия Ферми

Максимальная энергия заполненных состояний в системе тождественных фермионов при температуре = 0.

Энергия Ферми зависит от концентрации свободных электронов n и вычисляется по формуле: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$.

При увеличении температуры вероятность заполнения состояний электронами задаётся функцией занятости состояний: $f(E) = \frac{1}{e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} + 1}$

▼ Фермионы

Фермионы — частицы с полуцелым спином.

Они подчиняются принципу запрета Пауля и распределению Ферми-Дирака.

$$\overline{N}(E) = \frac{1}{1 + \exp \frac{E - E_F}{kT}}$$

Примеры фермионов:

- Адроны: протоны и нейтроны.
- Лептоны: электроны, мюоны, нейтрино.

▼ Бозоны

Бозоны — частицы с целым спином.

Подчиняются распределению Бозе-Эйнштейна.

$$F(\epsilon, T) = \frac{1}{\exp(\frac{W - \mu}{kT}) - 1}$$

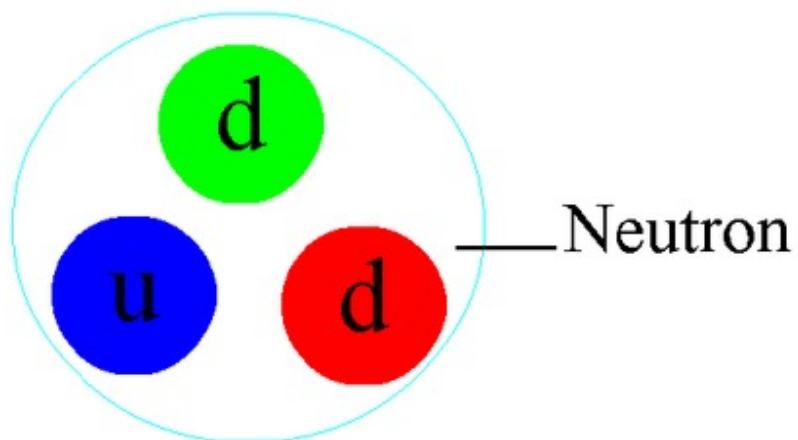
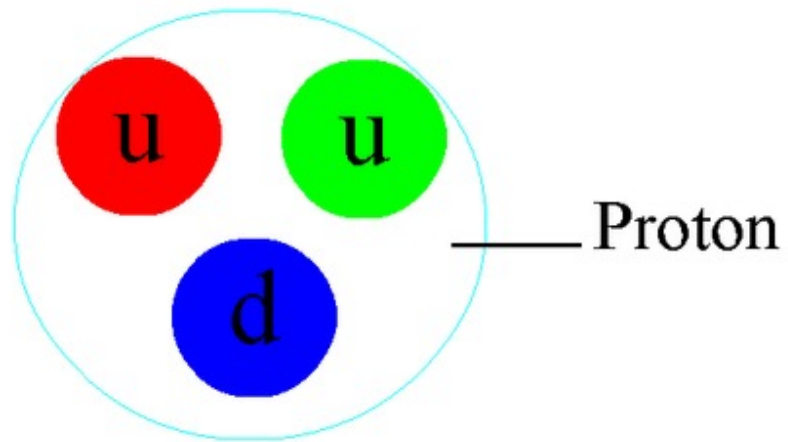
Значит, в одном квантовом состоянии может находиться неограниченное число бозонов.

Среди бозонов отдельно выделяются кванты полей, среди них, например:

- Фотоны (кванты электромагнитных взаимодействий)
- Глюоны (сильных взаимодействий).

▼ Кварки

Кварки — дробно заряженные элементарные частицы $(-\frac{1}{3}, +\frac{2}{3})$, объединяющиеся в составные: адроны, из которых самые стабильные протон и нейтрон:



Так как их спин дробный, то это фермионы и они подчиняются принципу запрета Паули.

Кварки разделяют по ароматам и по поколениям: по два в каждом:

Типы кварков и их характеристики									
Символ	Название	В	Г	t_b	S	C	В	Г	Q
u^+	Верхний (u, от англ. up)	$1/3$	$1/2$	$+1/2$	0	0	0	0	$2/3$
d^+	Нижний (d, от англ. down)	$1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	0	0	0	$-1/3$
s^+	Странный (s, от англ. strange)	$1/3$	0	0	-1	0	0	0	$-1/3$
c^+	Очарованный (c, от англ. charm)	$1/3$	0	0	0	1	0	0	$2/3$
b^+	Красивый (b, от англ. beauty)	$1/3$	0	0	0	0	1	0	$-1/3$
t^+	Истинный (t, от англ. truth)	$1/3$	0	0	0	0	0	1	$+2/3$

Кварк отдельно не наблюдается, о чём свидетельствует свойство конфайнмент.

Кварки взаимодействуют благодаря глюоном.

▼ Какие-то Математические Выводы

▼ Вывод Формула Планка

1. Пусть электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии: $\epsilon = \hbar\omega$.
2. Если излучение испускается порциями, то его энергия кратна величине:
 $\epsilon_n = n\hbar\omega, n \in \mathbb{N}$.
3. В состоянии равновесия распределение колебаний по значениям энергии подчиняется закону Больцмана и получится: $P_n = \frac{N_n}{N} = \frac{\exp(-\frac{\epsilon_n}{kT})}{\sum_n \exp(-\frac{\epsilon_n}{kT})}$.
4. Теперь, зная вероятность различных значений энергии колебания, найдём среднее значение, как $\langle \epsilon \rangle = \sum_n P_n \epsilon_n$
5. Подставив (2) и (3) в (4) получается: $\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \exp(-\frac{n\hbar\omega}{kT})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{n\hbar\omega}{kT})}$.
6. Сделаем замену $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$ и сделаем допущение, что x меняется непрерывно. После чего (5) будет иметь вид: $\langle \epsilon \rangle = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.
7. В (6) под логарифмом сумма бесконечной геометрической прогрессии и, понимая, что $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

8. Подставим (7) в (6): $\langle \epsilon \rangle = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1-e^{-x}} = \hbar\omega \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{\hbar\omega}{e^x-1}$. И сделаем обратную подстановку.

$$9. \langle \epsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}.$$

10. Теперь умножим (9) на плотность стоячих волн и получим: $u(\omega, T)d\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1} \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$. Отсюда получается, что:

$$11. u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$$

12. Теперь вспомним как связывается испускательная способность абсолютного чёрного тела с равновесной плотностью энергии теплового излучения. А вот так: $f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T)$.

$$13. \text{Получается, что } f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}.$$

▼ Вывод Закона Релея-Джинса Из Формулы Планка

Сделаем приближение, что $e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}} \sim 1 + \frac{\hbar c}{\lambda kT}$ и получим: $B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2ckT}{\lambda^4}$.

▼ Вывод Закона Вима Из Формулы Планка

Здесь сделаем приближение: $e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}} - 1 \sim e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}}$ и получаем: $B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp^{-\frac{\hbar c}{\lambda kT}}$.

▼ Вывод Формулы Стефана-Больцмана Из Формулы Планка

(полная плотность энергии)

Аналитический вывод закона Стефана-Больцмана для интегрального потока излучения из закона Планка для спектрального потока излучения состоит во взятии интеграла:

$$E_t^0(T) = \int_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5 (\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1)} d\lambda$$

1. Заемтим, что это несобственный интеграл. Значит нужно убедиться в его сходимости при обеих пределах. Сделаем замену: $x = \frac{c_2}{\lambda T}$.

$$2. E_t^0(T) = c_1 \left(\frac{T}{c_2}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp x - 1}.$$

3. При $x \rightarrow \infty$ он сходится из-за признака сравнения.
4. При $x \rightarrow 0$ показываем, что подинтегрально выражение можно представить как: $\frac{\exp(-x)x^3}{1-\exp(-x)} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(n+1)x)$ пользуемся признаком Вейерштрасса и показываем, что ряд сходится.
5. Это ряд интегрируем и преобразуем к $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\sum_{n=0}^{\infty} (\int_{\epsilon}^{+\infty} x^3 \exp(-(n+1)x) dx))$.
6. Делаем замену: $(n+1)x = t$.
7. Выражение преобразовывается к: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{(n+1)^4} \int_{(n+1)\epsilon}^{+\infty} t^3 \exp(-t) dt))$. Этот интеграл сходится по признаку Вейерштрасса.
8. Численно интеграл ограничен гамма-функцией: $\Gamma(4) = \int_0^{\infty} t^3 \exp(-t) dt = 3!$
9. Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$
10. Таким образом, $E_t^0(T) = c_1 (\frac{T}{c_2})^4 (\frac{\pi^4}{15}) = c_1 \pi^4 \frac{T^4}{15c_2^4} = \sigma T^4$.

С консультации:

▼ Характерные точки графика спектральной плотности светимости

Экстремумы:

- $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$
- Бесконечность
- Ноль

▼ Асимптотики графика спектральной плотности светимости

▼ Низкочастотная (Релея-Джинса)

▼ Высокочастотная (закон Вина (не смещение))

▼ Связь между формулой Планка и законом Стефанга-Больцмана

Подставим в $R = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu$ формулу планка от частоты $r_{\nu,T}^0 = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}$ и получим (через какие-то шаги) закон Стефана-Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4$$

