ЛЕКЦИЯ 10
ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ

§1. Классификация целых аналитических функций.

В конце предыдущей лекции мы ввели в рассмотрение класс аналитических функций, которые мы назвали *целыми* функциями. Целые функции есть однозначные аналитические функции, не имеющие особых точек в конечной комплексной плоскости. Следовательно, по теореме Коши-Лиувилля, целая функция, отличная от константы, имеет особенность в точке $z_0 = \infty$. Целая функция $f(z)$ представима степенным рядом

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \tag{1}$$

радиус сходимости которого бесконечен: $R = \infty$.

Целые функции разбиваются на три класса функций, в зависимости от характера особой точки $z_0 = \infty$.

1. Пусть $z_0 = \infty$ есть устранимая особая точка. Тогда ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид (см. лекцию 8)

$$f(z) = c_0 + c_{-1} z^{-1} + c_{-2} z^{-2} + \cdots + c_{-n} z^{-n} + \cdots$$

Сравнивая это выражение с равенством (1), имеем $a_j = 0,\ c_{-j} = 0,\ j = 1,2,3\ldots$. Тогда

$$f(z) \equiv a_0 = c_0\ (\text{const})$$

2. Пусть $z_0 = \infty$ есть полюс порядка m. Тогда (см. лекцию 8)

$$f(z) = c_m z^m + \cdots + c_1 z + c_0 + c_{-1} z^{-1} + c_{-2} z^{-2} + \cdots + c_{-n} z^{-n} + \cdots$$

Сравнивая с (1), имеем

$$c_{-j} = 0\ \ (j = 1,2,3\ldots),\ c_0 = a_0, \ldots, c_m = a_m,\ a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = 0$$

Итак, $f(z)$ является многочленом:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$$

3. Пусть $z_0 = \infty$ есть существенно особая точка. Тогда ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Сравнивая с (1), имеем

$$c_{-j} = 0,\ c_j = a_j\ \ j = 1,2,3\ldots$$

Функция $f(z)$ отлична от многочлена, представляя собой бесконечный полином:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

Такие функции называют *целыми трансцендентными функциями*.

Примерами таких функций являются $e^z,\ \sin z, \cos z$:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

§2. Вычисление интегралов от функции действительной переменной с помощью вычетов

Рассмотрим задачу вычисления интеграла

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta,$$

где $R(x,y)$ -- действительная рациональная функция аргументов $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$. Напомним, что рациональную функцию можно представить в виде дроби

$$R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

где $P(x,y),\,Q(x,y)$ -- многочлены относительно x, коэффициенты которых – многочлены от y:

$$P(x,y)=s_1(y)+s_2(y)x+s_3(y)x^2+\cdots+s_n(y)x^n$$

$$s_j(y)=s_{j0}+s_{j1}y+\cdots+s_{jm}y^m \quad (s_{jk}=\mathrm{const})$$

Аналогичное выражение имеем и для $Q(x,y)$.

Свойства рациональных функций: если $x=X(x',y'),y=Y(x',y')$ -- рациональные функции от x',y', то $R(X(x',y'),Y(x',y'))$ -- рациональная функция x',y'.

Интеграл I может быть приведен к интегралу от аналитической функции комплексной переменной по замкнутому контуру. Действительно, сделаем замену переменных

$$z=e^{i\theta}$$

Тогда $dz=ie^{i\theta}d\theta$, поэтому

$$d\theta=\frac{1}{i}\frac{dz}{z},\ \cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \ \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

Видим, что переменная z пробегает окружность единичного радиуса $|z|=1$, когда θ меняется от 0 до 2π. Итак, интеграл I приводится к интегралу по замкнутому контуру:

$$I=\frac{1}{i}\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}$$

Подынтегральная функция – рациональная функция одной переменной z, поэтому она приводится к виду

$$\tilde{R}(z)\equiv R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{z}=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m},\quad a_j,b_j=\mathrm{const}$$

Особые точки этой функции – нули z_k знаменателя: $b_0+b_1z_k+\cdots+b_mz_k^m=0$.

Предположим, что внутри окружности $|z|=1$ находится N нулей знаменателя, которые будут полюсами функции $\tilde{R}(z)$. Пусть α_k -- порядок полюса z_k. Тогда, по основной теореме о вычетах, с учетом формулы вычисления вычета в полюсе, имеем

$$\boxed{I=2\pi i\sum_{k=1}^{N} res[\tilde{R},z_k]=2\pi\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(\alpha_k-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{\alpha_k-1}}{dz^{\alpha_k-1}}\left[(z-z_k)^{\alpha_k}\tilde{R}(z)\right]}$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta},\ |a|<1$$

Положим $z=e^{i\theta}$. Интеграл I приводится к виду

$$I=\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(1+\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)z}=\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(az^2+2z+a\right)}$$

Нули знаменателя есть

$$z_{1,2}=-\frac{1}{a}\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-1},\ \ \frac{1}{a^2}-1>0$$

Эти нули – полюса первого порядка. Поскольку $z_1\cdot z_2=1$, то лишь один корень лежит внутри единичной окружности: $z_2=-\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$. Тогда

$$I=2\pi i\cdot res\left[\frac{2}{ia(z-z_1)(z-z_2)},z_2\right]=4\pi\cdot\lim_{z\to z_2}\left((z-z_2)\frac{1}{a(z-z_1)(z-z_2)}\right)=\frac{4\pi}{a(z_2-z_1)}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

§3. Логарифмический вычет. Принцип аргумента

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$$

в области G при условии, что $f(z)$ аналитична в этой области, но может иметь изолированные особенности – полюса. Эту функцию называют логарифмической производной функции $f(z)$, так как

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d}{dz}\mathrm{Ln}\,f(z)$$

Сейчас займемся вычислением вычетов функции $\varphi(z)$ с последующим их применением к некоторым задачам анализа.

Особенности функции $\varphi(z)$ совпадают с нулями и полюсами функции $f(z)$. Действительно, пусть a -- корень функции $f(z)$, имеющий кратность n. Тогда

$$f(z)=(z-a)^n f_1(z),\ f_1(a)\neq 0$$

Здесь $z=a$ является правильной точкой (точкой аналитичности) функции $f_1(z)$. Очевидно,

$$f'(z)=n(z-a)^{n-1}f_1(z)+(z-a)^n f_1'$$

Получим в окрестности точки a

$$\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{(z-a)}+\frac{f_1'}{f_1(z)}$$

Отсюда следует, что a -- полюс функции $\varphi(z)$ первого порядка, вычет этой функции в точке a равен n.

Пусть b -- полюс порядка m функции $f(z)$. Тогда

$$f(z)=\frac{f_2(z)}{(z-b)^m},\ f_2(b)\neq 0$$

Подсчитаем производную этой функции:

$$f'(z)=-\frac{m}{(z-b)^{m+1}}f_2(z)+\frac{1}{(z-b)^m}f_2'$$

Тогда

$$\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{m}{(z-b)}+\frac{f_2'}{f_2(z)}$$

Отсюда следует, что b -- полюс первого порядка функции $\varphi(z)$. Вычет этой функции в точке $z=b$ равен $(-m)$.

Теперь рассмотрим интеграл, *называемый логарифмический вычет функции* $f(z)$ *относительно контура* Γ

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\,.$$

Здесь Γ -- замкнутая жорданова кривая, содержащаяся в G и не проходящая через особые точки подынтегральной функции. Пусть внутри области, ограниченной кривой Γ, находятся p корней a_k функции $f(z)$ с кратностями $n_1,\ldots,n_p$ и q полюсов b_k функции $f(z)$ с кратностями $m_1,\ldots,m_q$. Тогда

$$I=\sum_{k=1}^{p}res[\varphi(z),a_k]+\sum_{k=1}^{q}res[\varphi(z),b_k]=\sum_{k=1}^{p}n_k-\sum_{k=1}^{q}m_k$$

Обозначим через N число корней (с учетом их кратности) функции $f(z)$, через M -- число полюсов (с учетом их кратности). Тогда

$$I=N-M \tag{2}$$

Итак, *разность между количеством корней и полюсов функции* $f(z)$ *внутри контура* Γ *равна логарифмическому вычету функции* $f(z)$ *относительно этого контура.*

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

где

$$f(z)=\frac{(z-1)^5(z^2+4)^2}{(z+1)^7},\quad \Gamma:|z|=3$$

Вычислим интеграл с помощью формулы (2). Заметим, что $f(z)$ имеет нули: $z_1=1$ кратности 5, $z_2=\pm 2i$ каждый кратности 2, а также полюс в точке $z_3=-1$ порядка 7. Следовательно, $N=5+2+2=9,\ M=7$. Тогда

$$\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(9-7)=4\pi i \quad \blacklozenge$$

Логарифмический вычет I имеет простой геометрический смысл. Перепишем его в виде

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d}{dz}[\mathrm{Ln}\, f(z)]dz$$

Отметим на замкнутой кривой Γ точку z_0, которую будем считать начальной (и конечной точкой после обхода кривой). При движении вдоль кривой Γ в положительном направлении, непрерывно меняется $\mathrm{Ln}\, f(z)$. В начальной точке z_0 имеем

$$\mathrm{Ln}\, f(z_0)=\ln|f(z_0)|+i\Phi_0$$

После обхода кривой возвращаемся в точку z_0, имеем

$$\mathrm{Ln}\, f(z_0)=\ln|f(z_0)|+i\Phi_1$$

Тогда

$$I=\frac{1}{2\pi i}\Big[\big(\ln|f(z_0)|+i\Phi_1\big)-\big(\ln|f(z_0)|+i\Phi_0\big)\Big]=\frac{\Phi_1-\Phi_0}{2\pi}$$

Принцип аргумента. *Разность между количеством корней и полюсов функции* $f(z)$*, заключающихся внутри замкнутой кривой* Γ*, равна изменению* $\mathrm{Arg}\, f(z)$ *при обходе точкой* z *контура* Γ *в положительном направлении, деленному на* 2π *, т.е.*

$$N - M = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{2\pi}.$$

Если полюсов нет, то этот принцип указывает на количество корней функции $f(z)$, заключенных внутри кривой Γ. Так как функция $f(z)$ непрерывна на контуре Γ, то при полном обходе этого контура соответствующая ей точка $f(z) = u + iv$ описывает замкнутый контур в плоскости переменных u, v. При этом точка $u = 0, v = 0$ может оказаться как вне контура, так и внутри контура.

Ниже представлены два возможных случая поведения образа кривой Γ в плоскости переменных u, v (рис. 1). В первом случае имеем $\Phi_1 - \Phi_0 = 0$, во втором случае $\Phi_1 - \Phi_0 = 4\pi$. В соответствии с принципом аргумента, в первом случае внутри кривой Γ нет корней функции $f(z)$, так как

$$N = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{2\pi} = 0.$$

Во - втором случае имеем

$$N = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{2\pi} = 2$$

Поэтому функция $f(z)$ имеет два корня внутри кривой Γ.

Еще раз напомню, что эти рассуждения справедливы только для функции, не имеющей полюсов (например, для полинома).

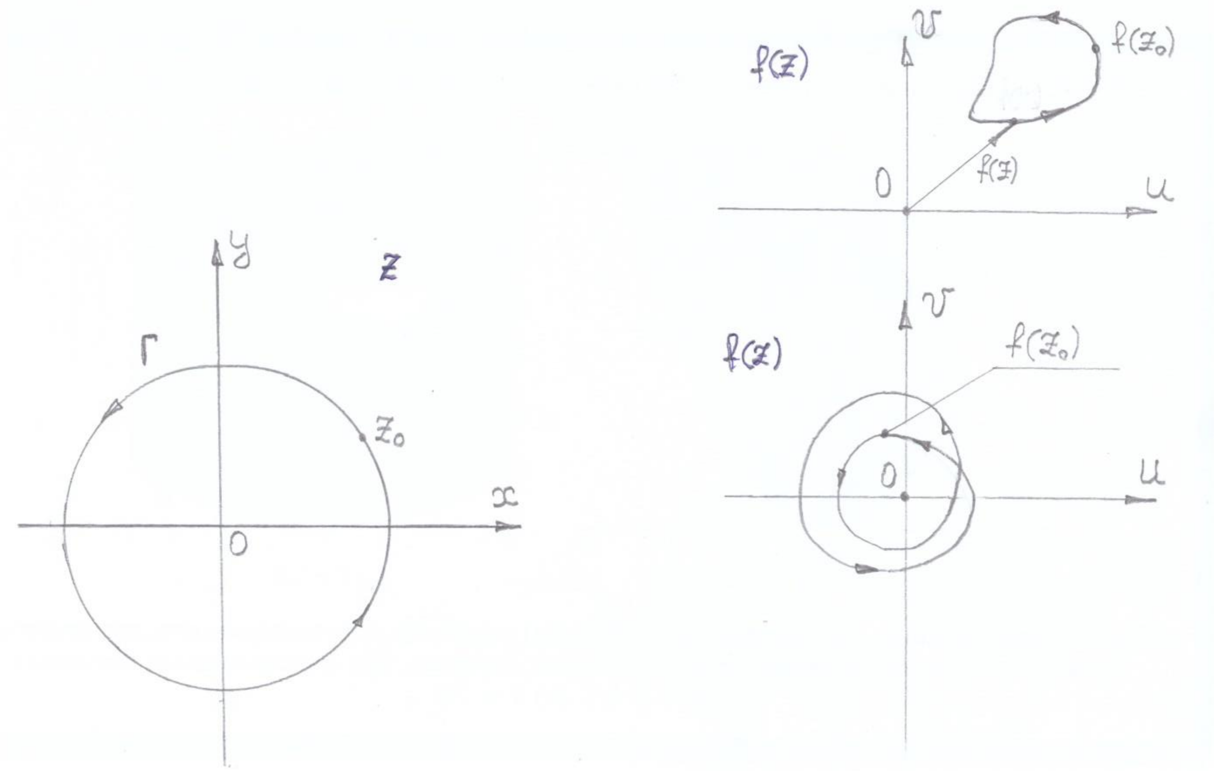

Рис. 1