ЛЕКЦИЯ 8.

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ВЫЧЕТ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ.

В этой лекции мы познакомимся с важным понятием изолированных особых точек аналитической функции. Но прежде всего, закончим некоторые рассуждения, связанные с понятием радиуса сходимости ряда Тейлора. В лекции 6 я указывал, что при разложении функции в ряд Тейлора круг сходимости ряда можно продолжить до первой ближайшей особой точки. Но это значит, что радиус сходимости определяется как расстояние от z_0 (z_0 -- точка, в окрестности которой исследуемая функция разлагается в ряд) до ближайшей особой точки. Рассуждения не являются строгими. Следующая теорема дает строгое обоснование этому факту.

Теорема 1. ***Пусть***

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

есть степенной ряд с конечным радиусом сходимости R***. Тогда на границе*** Γ ***круга сходимости радиуса*** R ***существует, по крайней мере, одна особая точка для суммы этого степенного ряда.***

Пример. Рассмотрим представление аналитической функции с помощью ряда геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-\left(-z^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

Ряд сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$, поэтому радиус сходимости ряда $R = 1$. Особые точки есть $\pm i$. Эти точки принадлежат единичной окружности Γ:

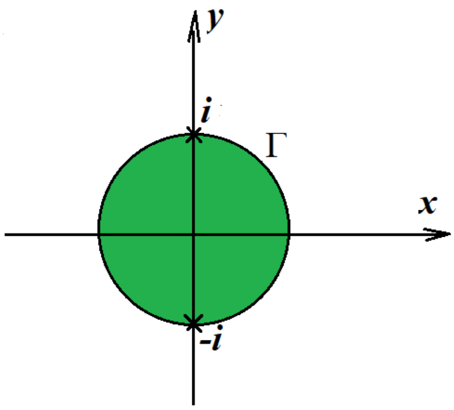

Рис.1 Круг сходимости

§1. Изолированные особые точки однозначной аналитической функции

Точку z_0 однозначной аналитической функции $f(z)$ будем называть особой, если в этой точке нарушается аналитичность $f(z)$. Обычно нарушение аналитичности ведет к бесконечно большим значениям функции, либо функция становится неопределенной в z_0. Исследуем простейший случай особых точек – изолированных особых точек.

Определение 1. ***Особую точку z_0 будем называть изолированной особой точкой однозначной, аналитической функции $f(z)$, если существует область $0<|z-z_0|<R_1$ этой точки, в которой $f(z)$ аналитична.***

Заметим, что область $0<|z-z_0|<R_1$ есть открытый круг радиуса R_1 с выколотой точкой z_0, т.е. вырожденное кольцо (внутренний радиус кольца есть $r=0$). Определение 1 гарантирует наличие единственной особой точки в круге $|z-z_0|<R_1$.

Согласно теореме Лорана, $f(z)$ можем разложить в ряд Лорана в кольце $0<|z-z_0|<R_1$. Возможны три случая.

1. Ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$.
2. Ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$.
3. Ряд Лорана содержит бесконечное членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$.

Рассмотрим первый случай. Тогда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

Очевидно, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$. Точка z_0 будет особой, если $f(z)$ не определена в z_0, либо принимает значение, отличное от c_0 (см. рис.2)

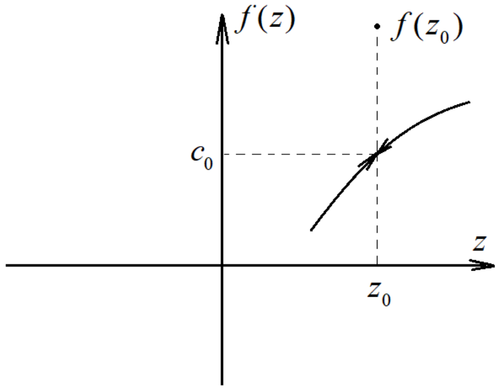

Рис. 2 Устранимая особая точка z_0.

В том и другом случае можем доопределить функцию в z_0, полагая $f(z_0)=c_0$. Так определенная функция будет аналитичной в z_0, ибо в круге $|z-z_0|<R_1$ она представима сходящимся степенным рядом. Особую точку z_0 называют *устранимой.*

Характерное свойство устранимой особой точки описывается следующей теоремой.

Теорема 2. ***Если z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, то существует предельное значение $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$, причем $|c_0|<\infty$***

Как следствие, разложением функции в ряд Лорана можно пользоваться и в случае, когда z_0 -- правильная точка (точка аналитичности функции $f(z)$). Тогда ряд Лорана будет совпадать с рядом Тейлора.

Рассмотрим второй случай, когда ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

В этом случае точку z_0 называют *полюсом порядка* m.

Теорема 3. ***Если точка*** z_0 ***является полюсом функции*** $f(z)$***, то при*** $z\to z_0$ ***модуль функции*** $f(z)$ ***неограниченно возрастает независимо от стремления*** z ***к*** z_0***.***

Доказательство. В окрестности точки z_0 имеем

$$f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

где

$$\varphi(z)=\left(c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}\right),\ \ \varphi(z_0)=c_{-m}\neq 0$$

Здесь $\varphi(z)$ – аналитическая функция во всей плоскости. Отсюда следует, $\left|f(z)\right|\to\infty$ при $z\to z_0$. **Теорема доказана.**

Выражение для $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},\ \ \psi(z)=\varphi(z)+(z-z_0)^m\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ ,$$

где $\psi(z)$ -- аналитическая функция, причем $\psi(z_0)=c_{-m}\neq 0$.

Число m называют *порядком полюса*.

Рассмотрим третий случай, когда главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Точку z_0 называют *существенно особой***.** Поведение функции в окрестности существенно особой точки описывается следующей теоремой.

Теорема 3 (Сохоцкого-Казорати (1868-1876)). ***Если*** z_0 ***-- существенно особая точка функции*** $f(z)$***, то для любого комплексного числа A существует последовательность точек*** $z_k\to z_0$ ***такая, что***

$$\lim_{k\to\infty}f(z_k)=A$$

Доказательство теоремы опускаем. Эта теорема утверждает, что частичные пределы этой функции в z_0 не совпадают, принимают разные значения, поэтому предела функции в точке z_0 не существует.

Пример. Рассмотрим функцию $e^{1/z}$. Здесь $z=0$ -- существенно особая точка. Положим $A=\infty$. Тогда последовательность $\left\{z_k=\frac{1}{k}\right\}$ стремиться к нулю при $k\to\infty$, при этом $\left\{e^k\right\}\to\infty$. Пусть $A=0$, тогда последовательность $\left\{z_k=-\frac{1}{k}\right\}$ стремиться к нулю при $k\to\infty$, при этом $\left\{e^{-k}\right\}\to 0$.

Пусть $A\neq 0$ -- произвольное конечное число. Положим $z_k=\frac{1}{\ln A+2k\pi i}$. Тогда $\{z_k\}\to 0$ при $k\to\infty$, при этом $\lim\limits_{k\to\infty}e^{\ln A+2k\pi i}=Ae^{2k\pi i}=A\left(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi\right)=A$

§2. Случай особой, изолированной бесконечно удаленной точки.

Рассмотрим особую точку в бесконечности. Обозначим ее как $z_0 = \infty$. Пример: $g(z) = a \cdot z + b \cdot z^2$, $g(\infty) = \infty$, поэтому $z_0 = \infty$ -- особая точка для $g(z)$. Пусть $f(z)$ аналитична в окрестности $|z| > R$ (R -- фиксированное положительное число) бесконечно удаленной точки $z_0 = \infty$. Положим $\zeta = \frac{1}{z}$ и рассмотрим функцию $f^*(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Здесь точка $\zeta = 0$ является образом точки $z_0 = \infty$ при отображении $z \to \zeta$, задаваемым равенством $\frac{1}{z} = \zeta$. В зависимости от того, будет ли особая точка $\zeta = 0$ устранимой особой точкой, полюсом k-го порядка, либо существенно особой точкой для $f^*(\zeta)$ мы будем называть точку $z_0 = \infty$ *устранимой особой точкой, полюсом k-го порядка, либо существенно особой точкой*.

В указанных случаях функция $f^*(\zeta)$ будет представима рядом Лорана в вырожденном кольце $0 < |\zeta| < R^{-1}$ в виде

$$a)\ f^*(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots$$

$$b)\ f^*(\zeta) = a_{-k}\zeta^{-k} + \cdots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots$$

$$c)\ f^*(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\zeta^n$$

Тогда функция $f(z) = f^*\left(\frac{1}{z}\right)$ будет иметь представление в окрестности $|z| > R$ в следующем виде (полагаем $c_0 = a_0$, $c_{-k} = a_k$, $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$)

$$a)\ f(z) = c_0 + c_{-1}z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \cdots + c_{-n}z^{-n} + \cdots$$

$$b)\ f(z) = c_k z^k + \cdots + c_1 z + c_0 + c_{-1}z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \cdots + c_{-n}z^{-n} + \cdots$$

$$c)\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Итак, особая точка $z_0 = \infty$ принадлежит одному из трех типов: в случае а) $z_0 = \infty$ есть устранима особа точка, в случае в) – полюс k-го порядка, в случае с) – имеем существенно особую точку. Здесь характер особой точки определяется характером разложения функции $f(z)$ в ряд также как и в случае конечной особой точки, но роли членов с положительными и отрицательными степенями меняются между собой. Имеем: *устранимая особенность не имеет членов с положительными степенями, полюс k-го порядка допускает k членов с положительными степенями, существенно особая точка имеет бесконечное число членов с положительными степенями*.

Итак, главная часть лорановского разложения в окрестности бесконечно удаленной точки есть совокупность членов с положительными степенями, правильная часть – совокупность членов с отрицательными степенями.

§3. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Способы вычисления вычета.

Рассмотрим важное для приложений понятие вычета в изолированной особой точке. Пусть z_0 -- изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$. В окрестности $0 < |z - z_0| < R$ эта функция может быть разложена в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\left(\zeta - z_0\right)^{n+1}}d\zeta \ ,$$

C – произвольная замкнутая жордановая кривая, проходимая в положительном направлении (внутренняя область кривой остается слева), принадлежащая окрестности $0 < |z - z_0| < R$ и окружающая особую точку z_0. При $n = -1$ имеем

$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)d\zeta} \qquad (1)$$

Определение 2. ***Вычетом аналитической функции*** $f(z)$ ***в изолированной особой точке*** z_0 ***называется комплексное число, равное значению коэффициента при*** $(z - z_0)^{-1}$ ***в лорановском разложении функции*** $f(z)$ ***в окрестности*** z_0**.**

Обозначение: $c_{-1} = res[f(z), z_0]$. Тогда

$$\oint_C f(\zeta)d\zeta = res[f(z), z_0]\cdot 2\pi i$$

Эту формулу можно рассматривать как формулы вычисления контурного интеграла через вычет функции $f(z)$. Но для этого надо найти пути вычисления коэффициента c_{-1}, независимые от вычисления контурного интеграла. Для этого достаточно вспомнить, что коэффициенты ряда Тейлора (в окрестности неособой точки z_0) можно получить путем многократного дифференцирования самой функции в точке z_0. Будем искать похожие формулы для вычисления коэффициента c_{-1}.

I. Пусть z_0 является *устранимой особой точкой*, следовательно, ее ряд Лорана на содержит членов с отрицательными степенями. Тогда $res[f(z), z_0] = 0$.

II. Пусть z_0 является *полюсом первого порядка*. Тогда имеем

$$f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

Умножаем это равенство на $(z - z_0)$ и переходим к пределу $z \to z_0$:

$$\boxed{c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)}$$

Эта формула для вычисления c_{-1} не зависит от вычисления контурного интеграла, поэтому ее вполне можно использовать. Но не всегда удобно пользоваться этим пределом. Получим иную формулу для вычисления c_{-1}. Функцию с полюсом первого порядка можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

где $\varphi(z_0) \neq 0$, z_0 есть простой корень знаменателя $\psi(z)$: $\psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$ Имеем ряд Тейлора для $\psi(z)$:

$$\psi(z) = \psi'(z_0)(z - z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = c_{-1}} \qquad (2)$$

III. Пусть z_0 есть *полюс порядка* m. Тогда

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

Тогда

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + c_1(z - z_0)^{m+1} + \cdots$$

Вычислим производную $(m-1)$-го порядка от этой функции:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - z_0)^m f(z)\right] = c_{-1}(m-1)! + c_0 m!(z - z_0) + \cdots$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$, получим

$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - z_0)^m f(z)\right]} \qquad (3)$$

Итак, вычисление контурного интеграла от аналитической функции $f(z)$ с помощью вычета сводится к процедуре вычисления производных от этой функции в особой точке, лежащей внутри контура интегрирования (формулы (2), (3)).