ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

MICHAEL SPIVAK
Brandeis University

CALCULUS ON MANIFOLDS

A MODERN APPROACH TO CLASSICAL THEOREMS
OF ADVANCED CALCULUS

W. A. Benjamin, Inc.
NEW YORK · AMSTERDAM
1965

М. Спивак

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Перевод с английского
И. А. БЕРЕЗАНСКОГО

Под редакцией
Д. А. РАЙКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва 1968

Книга представляет собой современное введение в многомерный анализ. Автор последовательно знакомит читателя с такими понятиями, как отображения многомерных пространств и их дифференциалы, дифференциальные формы и действия над ними, многообразия в евклидовом пространстве. Далее доказывается общая теорема Стокса для дифференциальных форм на многообразиях и из нее выводится ряд классических результатов: формулы Грина, обычная формула Стокса и т. д.; от читателя требуется знание основ анализа и элементов линейной алгебры.

Книга доступна студентам физико-математических факультетов университетов и пединститутов; читатель, имеющий математическую подготовку в объеме втуза и желающий углубить свои знания, извлечет из знакомства с ней немалую пользу. Она заинтересует и математиков, преподающих анализ.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Стиль изложения дифференциального и интегрального исчислений для функций нескольких переменных, принятый в большинстве существующих руководств, довольно архаичен. Достаточно сказать, что в этих руководствах отсутствует общее понятие дифференцируемого отображения и его производной (для случая конечномерных евклидовых пространств). Многое излагается недостаточно строго. Особенно это относится к теоремам Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского. Их доказательства и сами формулировки существенно основываются на интуитивных представлениях о „поверхности, ограничивающей тело“ или „линии, ограничивающей поверхность“. Отсутствие же соответствующих точных общих понятий, а также необходимого аппарата дифференциальных форм, не позволяет установить, что три упомянутые теоремы — просто частные случаи „абстрактной теоремы Стокса“ об интегрировании $(k-1)$-формы по границе k-цепи.

До недавнего времени все это можно было найти лишь в специальных работах или монографиях. Но в последние годы стали появляться учебные руководства, адресованные студентам-математикам старших курсов и имеющие своей задачей изложение различных разделов общего курса математического анализа на более современном научном уровне (см., например, недавно переведенную у нас книгу Рудина [21]). Одним из таких руководств является и книга М. Спивака, русский перевод которой предлагается читателю.

Название книги может создать впечатление, что предмет ее довольно специальный. На самом деле „многообразия“, рассматриваемые в первых главах, — это просто открытые подмножества n-мерного евклидова пространства.

Во второй главе изучаются свойства их дифференцируемых отображений в евклидовы пространства, включая теоремы об обратимых отображениях и неявных функциях. В третьей главе интеграл (Римана), определяемый вначале на n-мерных параллелепипедах, распространяется с помощью „разбиений единицы" на функции, заданные на произвольных открытых множествах. Устанавливаются важнейшие его свойства, включая теорему о замене переменной (к сожалению, автор впоследствии упускает случай отметить тесную связь ее с интегрированием внешних дифференциальных форм). Введение множеств лебеговой меры нуль позволяет не только придать изложению теории интеграла Римана завершенную форму, но и доказать впоследствии теорему Сарда о том, что образ множества точек вырожденности дифференцируемого отображения имеет меру нуль.

Анализу на многообразиях в собственном смысле посвящены последние две главы. В четвертой главе, после необходимых сведений из полилинейной алгебры, вводятся дифференциальные формы и их дифференцирование, затем цепи „сингулярных кубов" (многомерных аналогов дуг Жордана) и их границы; кульминационным пунктом главы (и всей книги) является упомянутая „абстрактная теорема Стокса". Наконец, в пятой главе определяются многообразия и многообразия с краем, вложенные в n-мерное евклидово пространство, для них доказывается общая теорема Стокса и в завершение из нее выводятся классические теоремы Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского.

Некоторых, возможно, затруднит непривычная система обозначений, безусловно более точная, чем общепринятая, но иногда и более громоздкая. Рассуждения и особенно вычисления проведены местами излишне сжато. Кроме того, некоторые доказательства опираются на результаты, приведенные лишь в задачах. Таким образом, усвоение материала книги потребует от читателя довольно активной работы, но результаты окупят ее.

Д. А. Райков

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В этой небольшой книге нас интересуют главным образом те разделы „высшего анализа“, тонкость понятий и методов которых делает трудным строгое изложение на элементарном уровне. Подход, избранный здесь, состоит в применении элементарных версий методов современной утонченной математики. Формально предполагаются только знание семестрового курса линейной алгебры, шапочное знакомство с теоретико-множественными обозначениями и владение сносным начальным курсом анализа (в котором по крайней мере упоминается о верхней и нижней гранях числового множества). Сверх этого, пожалуй, наиболее существенным является (иногда неявное) использование абстрактной математики.

Первая половина книги охватывает ту простую часть повышенного курса анализа, которая обобщает элементарный анализ на функции многих переменных. Глава 1 содержит предварительные сведения, а в гл. 2 и 3 рассматриваются соответственно дифференцирование и интегрирование.

Остальная часть книги посвящена изучению кривых, поверхностей и их многомерных аналогов. Здесь современный и классический методы изложения совершенно различны, хотя и имеют много точек соприкосновения, что особенно отчетливо показано в последнем параграфе. Вполне классическим результатом является теорема, практически завершающая книгу. Эта теорема (теорема Стокса) имела любопытную историю и претерпела разительные метаморфозы.

Впервые формулировка теоремы появилась в виде приписки к письму сэра Уильяма Томсона (лорда Кельвина) к Стоксу, датированному 2 июля 1850 г. Опубликована она была в качестве восьмого вопроса к экзаменам на смитовскую премию 1854 г. Этот конкурсный экзамен, которому ежегодно подвергались лучшие студенты-математики Кембриджского университета, с 1849 по 1882 г. проводился проф. Стоксом. Ко времени его смерти результат был повсеместно известен как теорема Стокса. Современниками Стокса были даны по крайней мере три доказательства: одно опубликовал Томсон, другое было изложено в „Трактате о натуральной философии" Томсона и Тейта и третье предложил Максвелл в „Электричестве и магнетизме" [8]. С тех пор именем Стокса были названы значительно более общие результаты, сыгравшие столь заметную роль в развитии некоторых разделов математики, что теорема Стокса вполне может дать материал для размышлений о ценности обобщения.

В этой книге имеются три формы теоремы Стокса. Вариант, известный Стоксу, появляется в последнем параграфе вместе со своими неразлучными спутниками — теоремами Грина и Гаусса — Остроградского. Эти три классические теоремы весьма просто выводятся из современной теоремы Стокса, рассматриваемой перед этим в гл. 5. То, что классические теоремы утверждают для кривых и поверхностей, эта теорема устанавливает для их многомерных аналогов (многообразий), подробно изучаемых в первой части гл. 5. Изучение многообразий, которое могло бы быть оправдано уже одной их важностью в современной математике, в действительности требует не больше усилий, чем нужно затратить на аккуратное изучение только кривых и поверхностей.

Читатель, вероятно, подумает, что современная теорема Стокса по крайней мере столь же трудна, как и получаемые из нее классические теоремы. Однако это не так: она является очень простым следствием еще одного варианта теоремы Стокса; этот весьма абстрактный вариант является конечным и основным результатом гл. 4. Естественно предположить, что трудности, которых мы избежали, таятся именно здесь. Однако доказательство этой теоремы с точки зрения математика есть совершенная тривиальность — прямое вычисление. С другой стороны, даже формулировка этой тривиальной теоремы не может быть понята без вереницы трудных определений из гл. 4. Имеются веские причины, в силу которых теоремы должны быть легкими, а определения трудными. Как показывает эволюция теоремы Стокса, за несколькими трудными результатами может скрываться один простой принцип; доказательство многих теорем состоит просто в его обнажении. С другой стороны, определения служат двоякой цели: они являются и строгой заменой расплывчатых понятий, и аппаратом для изящных доказательств. В первых двух параграфах гл. 4 даны точные определения и доказаны правила обращения с тем, что в классической математике называют дифференциальными выражениями типа $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ или $P\,dxdy + Q\,dydz + R\,dzdx$. Цепи, определяемые в третьем параграфе, и разбиение единицы, ранее введенное в гл. 3, освобождают наши доказательства от необходимости раскраивания многообразий на мелкие части; они сводят вопросы, относящиеся к многообразиям, где все представляется трудным, к задачам в евклидовом пространстве, где все просто.

Концентрация глубоких идей в определениях несомненно экономна, но она создает некоторые трудности для изучающего. Надеюсь, что читателя поощрит к основательному изучению гл. 4 уверенность в том, что результаты оправдают его усилия. Классические теоремы последнего параграфа являются лишь немногими и ни в коем случае не самыми главными приложениями гл. 4; многие другие приведены в качестве задач, а указания на дальнейшее развитие можно найти в списке литературы.

Несколько слов о задачах и списке литературы. Задачи помещены после каждого параграфа и (подобно теоремам) имеют сквозную нумерацию внутри каждой из глав. Задачи, результаты которых используются в основном тексте, помечены звездочкой, но желательно, чтобы эта предосторожность оказалась ненужной — задачи составляют важнейшую часть книги, и читателю следовало бы по крайней мере попытаться решить их все. Список литературы нужно было делать либо очень неполным, либо громоздким, поскольку добрую половину основных разделов математики можно с полным правом рекомендовать в качестве естественного продолжения материала книги. Я попытался сделать его неполным, но заинтересовывающим.

Во время написания этой книги было высказано немало критических замечаний и предложений. Я особенно благодарен Ричарду Пелейсу, Хью Росси, Роберту Сили и Чарлзу Стенарду за их многочисленные полезные замечания.

Майкл Спивак

Уолхэм, Массачусетс
Август 1965

1

Функции на евклидовом пространстве

НОРМА И ВНУТРЕННЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Евклидово n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$ определяется как множество всех n-членных последовательностей $(x^1, \ldots, x^n)$ вещественных чисел x^i („1-членная последовательность чисел“ есть просто число, а $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел). Элементы множества $\mathbf{R}^n$ часто называются его точками, а $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ — прямой, плоскостью и пространством соответственно. Если через x обозначен элемент из $\mathbf{R}^n$, т. е. последовательность из n чисел, то i-е число обозначается x^i, так что

$$x = (x^1, \ldots, x^n).$$

Точки из $\mathbf{R}^n$ часто называются также векторами, ибо $\mathbf{R}^n$, наделенное операциями

$$x + y = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$$

и

$$ax = (ax^1, \ldots, ax^n),$$

действительно есть векторное пространство (над полем вещественных чисел, n-мерное). В этом векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ имеется понятие длины вектора x, обычно называемой *нормой* $|x|$ этого вектора и определяемой формулой

$$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}.$$

Если $n = 1$, то $|x|$ — обычная абсолютная величина числа x. Очень важна связь между нормой и структурой векторного пространства $\mathbf{R}^n$.

1.1. Теорема. *Если $x, y \in \mathbf{R}^n$ и $a \in \mathbf{R}$, то*

(1) $|x| \geqslant 0$, *причем* $|x| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = (0, \ldots, 0)$;

(2) $\left|\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right| \leqslant |x| \cdot |y|$, *причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы;*

(3) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

(4) $|ax| = |a| \cdot |x|$.

Доказательство.

(1) Предоставляется читателю.

(2) Если x и y линейно зависимы, то очевидно, что имеет место равенство. Пусть x и y линейно независимы, т. е. $\lambda y - x \neq (0, \ldots, 0)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда

$$0 < |\lambda y - x|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda y^i - x^i)^2 =$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x^i y^i + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2.$$

Поэтому квадратичный трехчлен относительно λ, стоящий в правой части, не имеет вещественных корней. Значит, его дискриминант отрицателен, т. е. $4\left(\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 < 0$.

(3) $$|x+y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i + y^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \leqslant |x^2| + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2.$$

(4) $$|ax| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (ax^i)^2} = \sqrt{a^2 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} = |a| \cdot |x|. \blacksquare$$ [1]

Выражение $\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$, входящее в (2), называется *внутренним произведением* [2] векторов x и y и обозначается

[1] Здесь и в дальнейшем знаком ▮ обозначается конец доказательства. — *Прим. перев.*

[2] В нашей литературе общепринят термин „скалярное произведение", однако мы предпочитаем сохранить терминологию автора. Причины этого станут вполне понятными при чтении гл. 4. — *Прим. перев.*

$\langle x, y\rangle$. Перечислим важнейшие свойства внутреннего произведения.

1.2. Теорема. *Если* x, x_1, x_2 *и* y, y_1, y_2 — *векторы из* $\mathbf{R}^n$ *и* $a\in\mathbf{R}$, *то*

(1) $\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$ (*симметричность*);

(2) $\langle ax, y\rangle=\langle x, ay\rangle=a\langle x, y\rangle$,
$\langle x_1+x_2, y\rangle=\langle x_1, y\rangle+\langle x_2, y\rangle$,
$\langle x, y_1+y_2\rangle=\langle x, y_1\rangle+\langle x, y_2\rangle$
(*билинейность*);

(3) $\langle x, x\rangle\geqslant 0$, *причем* $\langle x, x\rangle=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=0$ (*положительная определенность*);

(4) $|x|=\sqrt{\langle x, x\rangle}$;

(5) $\langle x, y\rangle=\dfrac{|x+y|^2-|x-y|^2}{4}$ (*поляризационное тождество*).

Доказательство.

(1) $\langle x, y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x^iy^i=\sum\limits_{i=1}^{n}y^ix^i=\langle y, x\rangle$.

(2) В силу (1) достаточно доказать, что

$$\langle ax, y\rangle=a\langle x, y\rangle,$$
$$\langle x_1+x_2, y\rangle=\langle x_1, y\rangle+\langle x_2, y\rangle.$$

Это вытекает из равенств

$$\langle ax, y\rangle=\sum_{i=1}^{n}(ax^i)y^i=a\sum_{i=1}^{n}x^iy^i=a\langle x, y\rangle,$$
$$\langle x_1+x_2, y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(x_1^i+x_2^i\right)y^i=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_1^iy^i+\sum_{i=1}^{n}x_2^iy^i=\langle x_1, y\rangle+\langle x_2, y\rangle.$$

(3) и (4) предоставляем читателю.

(5) В силу (4)

$$\frac{|x+y|^2-|x-y|^2}{4}=\frac{1}{4}\left[\langle x+y, x+y\rangle-\langle x-y, x-y\rangle\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\langle x, x\rangle+2\langle x, y\rangle+\langle y, y\rangle-(\langle x, x\rangle-2\langle x, y\rangle+\right.$$
$$\left.+\langle y, y\rangle)\right]=\langle x, y\rangle. \blacksquare$$

В заключение этого параграфа — несколько важных замечаний относительно обозначений. Вектор $(0, \ldots, 0)$ будет обычно обозначаться просто 0. *Стандартным базисом* в $\mathbf{R}^n$ будет называться базис, образованный векторами $e_1, \ldots, e_n$, где $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ с 1 на i-м месте и 0 на всех остальных.

Под матрицей линейного отображения $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ относительно стандартных базисов в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ понимается $(m \times n)$-матрица $A = (a_{ij})$, j-й столбец которой образован коэффициентами разложения вектора $T(e_j)$:

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i.$$

Если $S\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ имеет $(p \times m)$-матрицу B, то матрицей для $S \circ T$ будет $(p \times n)$-матрица BA (здесь $(S \circ T)(x) = S(T(x))$; в большинстве книг по линейной алгебре вместо $S \circ T$ пишут просто ST). Для нахождения $T(x)$ достаточно вычислить элементы $(m \times 1)$-матрицы

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix};$$

тогда $T(x) = (y^1, \ldots, y^m)$.

Через (x, y), где $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^m$, мы условимся обозначать вектор $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \in \mathbf{R}^{n+m}$. Это весьма упростит запись многих формул.

Задачи

1.1*. Доказать, что $|x| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x^i|$.

1.2. Когда в утверждении (3) теоремы 1.1 имеет место равенство? (Указание: проследить ход доказательства; ответом не будет „когда x и y линейно зависимы“.)

1.3. Доказать, что $|x - y| \leqslant |x| + |y|$. Когда имеет место равенство?

1.4. Доказать, что $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

1.5. Величина $|x-y|$ называется *расстоянием* между x и y. Доказать и геометрически истолковать „неравенство треугольника" $|z-x| \leqslant |z-y| + |y-x|$.

1.6. Пусть f и g — интегрируемые функции на отрезке $[a, b]$.

а) Доказать, что $\left|\int\limits_a^b fg\right| \leqslant \left(\int\limits_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int\limits_a^b g^2\right)^{1/2}$. (Указание: рассмотреть отдельно случаи, когда $0 = \int\limits_a^b (f-\lambda g)^2$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ и когда $\int\limits_a^b (f-\lambda g)^2 > 0$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$.)

б) Пусть в а) имеет место равенство. Означает ли это, что $f = \lambda g$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$? А если функции f и g непрерывны?

в) Показать, что теорема 1.1 (2) — частный случай утверждения а).

1.7. Говорят, что линейное отображение T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *сохраняет норму*, если $|T(x)| = |x|$, и *сохраняет внутреннее произведение*, если $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

а) Доказать, что T сохраняет норму тогда и только тогда, когда T сохраняет внутреннее произведение.

б) Доказать, что всякое такое линейное отображение T взаимно однозначно и теми же свойствами обладает T^{-1}.

1.8. Пусть $x, y \in \mathbf{R}^n$ — ненулевые векторы. *Угол* $\angle(x, y)$ между x и y определяется как $\arccos \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x| \cdot |y|}$; это определение имеет смысл в силу теоремы 1.1 (2). Говорят, что линейное отображение T *сохраняет углы*, если T взаимно однозначно и $\angle(Tx, Ty) = \angle(x, y)$ для всех $x, y \neq 0$.

а) Доказать, что если T сохраняет норму, то T сохраняет углы.

б) Доказать, что если существуют такие базис $x_1, \ldots, x_n$ в $\mathbf{R}^n$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что $Tx_i = \lambda_i x_i$, то T сохраняет углы тогда и только тогда, когда все λ_i равны между собой.

в) Описать все линейные отображения T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, сохраняющие углы.

1.9. Пусть T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant \theta < \pi$. Показать, что T сохраняет углы и $\angle(x, Tx) = \theta$ для всех $x \neq 0$.

1.10*. Показать, что для всякого линейного отображения T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ существует такое число M, что $|T(h)| \leqslant M|h|$

для всех $h \in \mathbf{R}^n$. (Указание: оценить $|T(h)|$ с помощью $|h|$ и коэффициентов матрицы T.)

1.11. Показать, что если $x, y \in \mathbf{R}^n$ и $z, w \in \mathbf{R}^m$, то $\langle (x, z), (y, w) \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, w \rangle$ и $|(x, z)| = \sqrt{|x|^2 + |z|^2}$. Напомним, что (x, z) и (y, w) — точки из $\mathbf{R}^{n+m}$.

1.12*. Пусть $(\mathbf{R}^n)^*$ — пространство, сопряженное к векторному пространству $\mathbf{R}^n$. Определим для каждого $x \in \mathbf{R}^n$ функционал $\varphi_x \in (\mathbf{R}^n)^*$ формулой $\varphi_x(y) = \langle x, y \rangle$, и пусть T — отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в $(\mathbf{R}^n)^*$, определенное формулой $T(x) = \varphi_x$. Показать, что T — взаимно однозначное линейное отображение, и вывести отсюда, что всякое $\varphi \in (\mathbf{R}^n)^*$ есть φ_x для однозначно определенного $x \in \mathbf{R}^n$.

1.13*. Элементы $x, y \in \mathbf{R}^n$ называются *перпендикулярными* (или *ортогональными*), если $\langle x, y \rangle = 0$. Доказать, что если x и y перпендикулярны, то $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

ПОДМНОЖЕСТВА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Замкнутый интервал $[a, b]$ обладает естественным аналогом в $\mathbf{R}^2$. Это *замкнутый прямоугольник* $[a, b] \times [c, d]$, определяемый как множество всех пар (x, y) с $x \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$. Если $A \subset \mathbf{R}^m$ и $B \subset \mathbf{R}^n$, то произведение $A \times B \subset \mathbf{R}^{m+n}$ определяется как множество всех $(x, y) \in \mathbf{R}^{m+n}$ с $x \in A$ и $y \in B$. В частности, $\mathbf{R}^{m+n} = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$. Если $A \subset \mathbf{R}^m$, $B \subset \mathbf{R}^n$ и $C \subset \mathbf{R}^p$, то $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ и оба произведения обозначаются просто $A \times B \times C$; это распространяется на произведение любого числа множеств. Множество $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым параллелепипедом* в $\mathbf{R}^n$, а множество $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbf{R}^n$ — *открытым параллелепипедом*. В более общем случае множество $U \subset \mathbf{R}^n$ называется *открытым* (рис. 1.1), если для всякого $x \in U$ существует такой открытый параллелепипед A, что $x \in A \subset U$.

Множество $C \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым* в $\mathbf{R}^n$, если $\mathbf{R}^n \setminus C$ открыто. Например, каждое множество C, содержащее только конечное число точек, замкнуто. Предоставим читателю доказать, что замкнутый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ действительно является замкнутым множеством.

Для множества $A \subset \mathbf{R}^n$ и точки $x \in \mathbf{R}^n$ всегда должна осуществляться одна из трех возможностей (рис. 1.2).

1. Существует такой открытый параллелепипед B, что $x \in B \subset A$.

2. Существует такой открытый параллелепипед B, что $x \in B \subset \mathbf{R}^n \setminus A$.

3. Всякий открытый параллелепипед B, содержащий x, содержит как точки из A, так и точки из $\mathbf{R}^n \setminus A$.

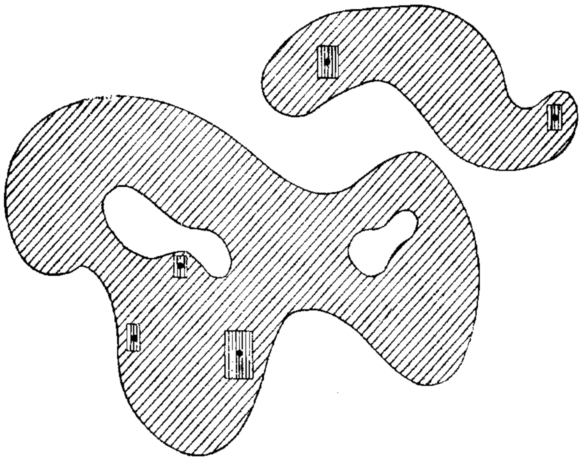


Рис. 1.1.

Точки x, обладающие свойством 1, образуют *внутренность* множества A, обладающие свойством 2 — *внешность* множества A, а обладающие свойством 3 — *границу* множества A. Задачи 1.16—1.18 показывают, что эти термины могут подчас приобретать неожиданный смысл.

Нетрудно видеть, что внутренность всякого множества A есть открытое множество; то же верно для внешности A, ибо она есть не что иное, как внутренность $\mathbf{R}^n \setminus A$. Таким образом (задача 1.14), их объединение открыто, так что граница, являясь его дополнением, должна быть замкнутой.

Семейство $\mathfrak{O}$ открытых множеств называется *открытым покрытием* множества A (или, кратко, *покрывает* A), если каждая точка $x \in A$ принадлежит некоторому множеству семейства $\mathfrak{O}$. Например, если $\mathfrak{O}$ — семейство всех открытых интервалов $(a, a+1)$, где a пробегает $\mathbf{R}$, то $\mathfrak{S}$ — покрытие множества $\mathbf{R}$. Очевидно, никакое конечное число множеств из $\mathfrak{S}$ не покрывает $\mathbf{R}$, как и любое его неограниченное подмножество. Подобная ситуация может встретиться и для ограниченных множеств. Так, например, если $\mathfrak{S}$ — семейство всех открытых интервалов $(1/n, 1-1/n)$, где $n=1, 2, \ldots$, то $\mathfrak{S}$ — открытое покрытие интервала $(0, 1)$, но снова никакое конечное число множеств из $\mathfrak{S}$ не покрывает $(0, 1)$. Хотя в этом явлении и нет ничего особенно страшного, все же множества, для которых такая

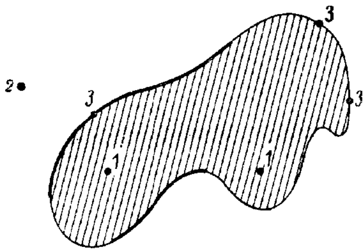


Рис. 1.2.

ситуация не может иметь места, настолько важны, что получили специальное название: множество A называется *компактным*, если всякое его открытое покрытие $\mathfrak{S}$ содержит конечное подсемейство, также покрывающее A.

Очевидно, что каждое конечное множество компактно; то же верно и для бесконечного множества A, состоящего из нуля и чисел $1/n$ для всех положительных целых n (действительно, если $\mathfrak{S}$ — покрытие, то $0 \in U$ для некоторого открытого множества U из $\mathfrak{S}$, и только конечное число остальных точек из A не принадлежит U, а для покрытия каждой из них достаточно по одному множеству из $\mathfrak{S}$).

Установление компактности множеств сильно упрощается благодаря следующим результатам, из которых лишь первый в какой-то мере глубок.

1.3. Теорема Бореля — Лебега. *Замкнутый интервал $[a, b]$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — открытое покрытие $[a, b]$. Рассмотрим множество

$$A = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b \text{ и } [a, x] \text{ покрыт конечным числом множеств из } \mathfrak{S}\}.$$

Заметим, что $a \in A$ и что A, очевидно, ограничено сверху (числом b). Нам нужно показать, что $b \in A$. Для этого достаточно рассмотреть число $\alpha = \sup A$ и доказать, что $\alpha \in A$ и $\alpha = b$.

Так как $\mathfrak{S}$ — покрытие, то $\alpha \in U$ для некоторого U из $\mathfrak{S}$. Тогда все точки некоторого интервала с правым концом α также принадлежат U (см. рис. 1.3). Так как

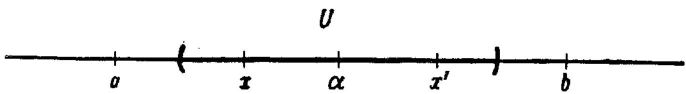


Рис. 1.3.

α — верхняя грань множества A, то в этом интервале найдется точка $x \in A$. Таким образом, $[a, x]$ покрыт некоторым конечным числом множеств из $\mathfrak{S}$, а $[x, \alpha]$ — уже одним множеством U. Следовательно, $[a, \alpha]$ покрыт конечным числом множеств из $\mathfrak{S}$, и $\alpha \in A$.

Чтобы доказать, что $\alpha = b$, предположим противное. Пусть $\alpha < b$. Тогда существует такая точка x' между α и b, что $[\alpha, x'] \subset U$. Так как $\alpha \in A$, то интервал $[a, \alpha]$ покрыт конечным числом множеств из $\mathfrak{S}$, интервал же $[\alpha, x']$ покрыт множеством U. Следовательно, $x' \in A$, в противоречии с тем, что α — верхняя грань множества A. ∎

Если $B \subset \mathbf{R}^m$ компактно и $x \in \mathbf{R}^n$, то легко видеть, что $\{x\} \times B \subset \mathbf{R}^{m+n}$ тоже компактно. Справедливо и более сильное утверждение.

1.4. Теорема. *Если B компактно и $\mathfrak{S}$ — открытое покрытие множества $\{x\} \times B$, то существует такое открытое множество $U \subset \mathbf{R}^n$, содержащее x, что $U \times B$ покрыто конечным числом множеств из $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Так как $\{x\} \times B$ компактно, то мы можем с самого начала считать, что $\mathfrak{S}$ — конечное покрытие, и нужно только найти такое открытое множество U, чтобы $U \times B$ покрывалось семейством $\mathfrak{S}$.

Для всякого $y \in B$ точка (x, y) лежит в некотором множестве W из $\mathfrak{S}$. Так как W открыто, то $(x, y) \subset U_y \times \times V_y \subset W$ для некоторого открытого параллелепипеда

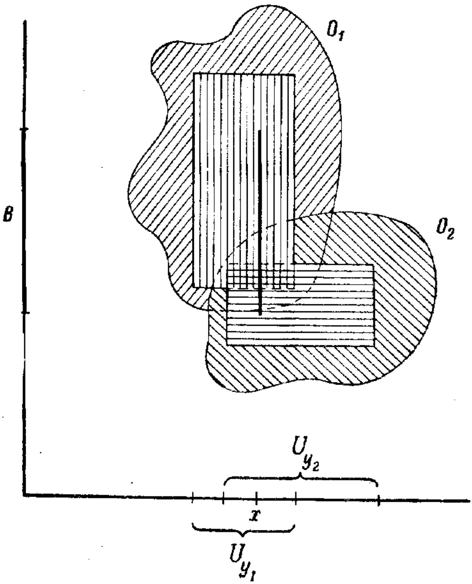


Рис. 1.4.

$U_y \times V_y$. Множества V_y покрывают компактное множество B, так что уже некоторое конечное их число $V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}$ покрывает B. Пусть $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_k}$. Тогда, если $(x', y') \subset U \times B$, то $y' \in V_{y_i}$ для некоторого i (рис. 1.4) и, разумеется, $x' \in U_{y_i}$. Следовательно, $(x', y') \in U_{y_i} \times V_{y_i}$, а это последнее множество содержится в некотором W из $\mathfrak{S}$. ∎

1.5. Следствие. *Если $A \subset \mathbf{R}^n$ и $B \subset \mathbf{R}^m$ компактны, то $A \times B \subset \mathbf{R}^{m+n}$ компактно.*

Доказательство. Если $\mathfrak{G}$ — открытое покрытие множества $A \times B$, то $\mathfrak{G}$ покрывает $\{x\} \times B$ для каждого $x \in A$. Согласно теореме 1.4, существует открытое множество U_x, содержащее x и такое, что $U_x \times B$ покрыто конечным числом множеств из $\mathfrak{G}$. Поскольку A компактно, среди множеств U_x имеется конечное число множеств $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$, покрывающее A. Так как каждое произведение $U_{x_i} \times B$ покрыто конечным числом множеств из $\mathfrak{G}$, то конечным числом множеств из $\mathfrak{G}$ покрывается и все произведение $A \times B$. ∎

1.6. Следствие. *Если каждое из множеств A_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) компактно, то и произведение $A_1 \times \ldots \times A_k$ компактно. В частности, любой замкнутый параллелепипед в $\mathbf{R}^k$ компактен.*

1.7. Следствие. *Всякое замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ компактно. Обратное также верно* (задача 1.20).

Доказательство. Если множество $A \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто и ограничено, то оно содержится в некотором замкнутом параллелепипеде B. Если $\mathfrak{G}$ — открытое покрытие для A, то $\mathfrak{G}$ и $\mathbf{R}^n \setminus A$ образуют открытое покрытие для B. Следовательно, конечное число множеств $U_1, \ldots, U_n$ из $\mathfrak{G}$, быть может вместе с $\mathbf{R}^n \setminus A$, покрывает B. Но тогда множества $U_1, \ldots, U_n$ покрывают A. ∎

Задачи

1.14*. Доказать, что объединение любого (даже бесконечного) числа открытых множеств открыто. Доказать, что пересечение двух (а потому и любого конечного числа) открытых множеств открыто. Дать контрпример для бесконечного числа открытых множеств.

1.15. Доказать, что множество $\{x \in \mathbf{R}^n\colon |x - a| < r\}$ открыто (см. также задачу 1.27).

1.16. Найти внутренность, внешность и границу множеств

$$\{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| \leqslant 1\},$$
$$\{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| = 1\},$$
$$\{x \in \mathbf{R}^n\colon \text{каждое } x^i \text{ рационально}\}.$$

1.17. Построить множество $A \subset [0, 1] \times [0, 1]$, содержащее не более одной точки на каждой горизонтали и каждой вертикали, но имеющее своей границей весь квадрат $[0, 1]\times[0, 1]$. (Указание: достаточно добиться, чтобы A содержало точки каждой четверти квадрата $[0, 1]\times[0, 1]$, каждой его шестнадцатой части и т. д.)

1.18. Пусть $A\subset[0, 1]$ есть объединение таких открытых интервалов (a_i, b_i), что каждая рациональная точка между 0 и 1 содержится в некотором (a_i, b_i). Показать, что границей множества A служит $[0, 1]\setminus A$.

1.19*. Показать, что замкнутое множество A, содержащее всякое рациональное число $r\in[0, 1]$, содержит весь отрезок $[0, 1]$.

1.20. Доказать обращение следствия 1.7: всякое компактное множество в $\mathbf{R}^n$ замкнуто и ограничено (см. также задачу 1.28).

1.21*. а) Доказать, что если A замкнуто и $x\notin A$, то существует такое $d>0$, что $|y-x|\geqslant d$ для всех $y\in A$.

б) Доказать, что если A замкнуто, B компактно и $A\cap B=\varnothing$, то существует такое $d>0$, что $|y-x|\geqslant d$ для всех $y\in A$ и $x\in B$. (Указание: для каждого $b\in B$ найти открытое множество U, содержащее b и такое, что требуемое соотношение верно для всех $x\in U\cap B$.)

в) Привести контрпример в $\mathbf{R}^2$, если множества A и B замкнуты, но ни одно из них не компактно.

1.22*. Показать, что если U открыто, а $C\subset U$ компактно, то существует компактное множество $D\subset U$, внутренность которого содержит C.

ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Функция f из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ (называемая иногда векторной функцией n переменных) есть правило, относящее каждой точке x из $\mathbf{R}^n$ некоторую точку из $\mathbf{R}^m$; точка, которую функция f относит x, обозначается $f(x)$. Мы пишем $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ (читаем „f отображает $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$“ или „f, отображающая $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$“ в зависимости от контекста) для указания того, что значение $f(x)\in\mathbf{R}^m$ определено для всех $x\in\mathbf{R}^n$. Запись $f\colon A\to\mathbf{R}^m$ указывает, что $f(x)$ определена только для точек x, пробегающих множество $A\subset\mathbf{R}^n$, которое называется *областью определения* функции f. Под $f(B)$, где $B\subset A$, мы понимаем множество всех значений $f(x)$ для $x\in B$; если $C\subset\mathbf{R}^m$, то по определению полагаем $f^{-1}(C)=\{x\in A\colon f(x)\in C\}$. Запись $f\colon A\to B$ означает, что $f(A)\subset B$.

Для функции $f\colon A\to\mathbf{R}$, где $A\subset\mathbf{R}^2$, можно получить удобное изображение, построив ее график — множество всех точек вида $(x, y, f(x, y))$, образующее некоторую фигуру в 3-мерном пространстве (см., например, рис. 2.1 и 2.2 в гл. 2).

Если $f, g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, то функции $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и f/g определяются точно так же, как и в одномерном случае. Если $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ и $g\colon B \to \mathbf{R}^p$, где $B \subset \mathbf{R}^m$, то *композиция* $g \circ f$ определяется равенством $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; областью определения $g \circ f$ служит $A \cap f^{-1}(B)$. Если $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ взаимно однозначно, т. е. если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$, то $f^{-1}\colon f(A) \to \mathbf{R}^n$ определяется требованием, чтобы $f^{-1}(z)$ было тем единственным $x \in A$, для которого $f(x) = z$.

Функция $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ определяет *m координатных функций* $f^1, \ldots, f^m\colon A \to \mathbf{R}$ равенством $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$. Обратно, для любых заданных m функций $g_1, \ldots, g_m\colon A \to \mathbf{R}$ существует такая единственная функция $f\colon A \to \mathbf{R}^m$, что $f^i = g_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, а именно $f(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$. Эта функция f будет обозначаться $(g_1, \ldots, g_m)$, так что всегда $f = (f^1, \ldots, f^m)$. Если $\pi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — тождественное отображение, $\pi(x) = x$, то $\pi^i(x) = x^i$; функция π^i называется *i-й проекцией*.

Запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, как и в одномерном случае, означает, что $f(x)$ можно сделать сколь угодно близким к b, взяв x достаточно близким к a, но не совпадающим с a. На математическом языке это означает, что для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$. Функция f называется *непрерывной в точке a*, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, и функция $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ называется (просто) *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке $a \in A$. Одной из приятных неожиданностей, связанных с этим понятием, является то, что непрерывность можно определить без использования пределов. Из приведенной ниже теоремы 1.8 вытекает, что $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ открыто для всякого открытого множества $U \subset \mathbf{R}^m$; если областью определения f служит не все $\mathbf{R}^n$, то требуется несколько более сложное условие.

1.8. Теорема. *Если $A \subset \mathbf{R}^n$, то функция $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ непрерывна тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества $U \subset \mathbf{R}^m$ существует такое открытое множество $V \subset \mathbf{R}^n$, что $f^{-1}(U) = V \cap A$.*

Доказательство. Предположим, что f непрерывна. Если $a \in f^{-1}(U)$, то $f(a) \in U$. Так как U — открытое множество, то существует такой открытый параллелепипед B, что $f(a) \in B \subset U$. Так как f непрерывна в точке a, то выбрав достаточно малый параллелепипед C, содержащий a, можно добиться, чтобы $f(x) \in B$ для всех x, содержащихся в C. Сделаем это для каждого $a \in f^{-1}(U)$, и пусть V — объединение всех таких C. Очевидно, $f^{-1}(U) = V \cap A$. Доказательство обратного предложения аналогично, и мы предоставляем его читателю. ∎

Из теоремы 1.8 вытекает важное следствие.

1.9. Теорема. *Если $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ непрерывна и A компактно, то $f(A)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое покрытие множества $f(A)$. Для всякого $U \in \mathcal{O}$ существует такое открытое множество V_U, что $f^{-1}(U) = V_U \cap A$. Семейство всех V_U является открытым покрытием множества A. Так как A компактно, то некоторый конечный набор множеств $V_{U_1}, \ldots, V_{U_n}$ покрывает A. Но тогда множества $U_1, \ldots, U_n$ покрывают $f(A)$. ∎

Если функция $f\colon A \to \mathbf{R}$ ограничена, то степень ее отклонения от непрерывности в точке $a \in A$ можно точно измерить.

Для $\delta > 0$ положим

$$M(a, f, \delta) = \sup\{f(x)\colon x \in A \text{ и } |x - a| < \delta\},$$
$$m(a, f, \delta) = \inf\{f(x)\colon x \in A \text{ и } |x - a| < \delta\}.$$

Колебание $o(f, a)$ функции f в точке a определяется формулой

$$o(f, a) = \lim_{\delta \to 0}[M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)].$$

Этот предел всегда существует, так как $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)$ убывает при убывании δ.

С $o(f, a)$ связаны два важных факта.

1.10. Теорема. *Ограниченная функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $o(f, a) = 0$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна в a. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in A$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$. Тогда $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) \leqslant 2\varepsilon$. Так как это верно для всякого ε, то $o(f, a) = 0$. Доказательство обратного утверждения аналогично, и мы его предоставляем читателю. ∎

1.11. Теорема. *Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — замкнутое множество. Тогда для всякой ограниченной функции $f\colon A \to \mathbf{R}$ и всякого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in A\colon o(f, x) \geqslant \varepsilon\}$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $B = \{x \in A\colon o(f, x) \geqslant \varepsilon\}$. Покажем, что $\mathbf{R}^n \setminus B$ открыто. Если $x \in \mathbf{R}^n \setminus B$, то либо $x \notin A$, либо $x \in A$ и $o(f, x) < \varepsilon$. В первом случае, поскольку A замкнуто, существует открытый параллелепипед C, содержащий x и такой, что $C \subset \mathbf{R}^n \setminus A \subset \mathbf{R}^n \setminus B$. Во втором случае существует такое $\delta > 0$, что $M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta) < \varepsilon$. Пусть C — открытый параллелепипед, содержащий x и такой, что $|x - y| < \delta$ для всех $y \in C$. Тогда, если $y \in C$, то существует такое δ_1, что $|x - z| < \delta$ для всех z, удовлетворяющих условию $|z - y| < \delta_1$. Поэтому $M(y, f, \delta_1) - m(y, f, \delta_1) < \varepsilon$ и, следовательно, $o(y, f) < \varepsilon$, так что $C \subset \mathbf{R}^n \setminus B$. ∎

Задачи

1.23. Пусть $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ и $C \subset \mathbf{R}^m$. В случае когда f взаимно однозначно, $f^{-1}(C)$ было определено двумя способами. Показать, что они эквивалентны.

1.24. Показать, что функция $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда каждая координатная функция f^i непрерывна.

1.25. Доказать, что линейное преобразование $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ непрерывно. (Указание: использовать задачу 1.10.)

1.26. Пусть $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon x > 0 \text{ и } 0 < y < x^2\}$.

а) Показать, что всякая прямая, проходящая через (0, 0), содержит целый интервал с центром (0, 0), принадлежащий $\mathbf{R}^2 \setminus A$.

б) Определим $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, положив $f(x) = 0$, если $x \notin A$, и $f(x) = 1$, если $x \in A$. Для каждой точки $h \in \mathbf{R}^2$ положим $g_h(t) = f(th)$. Показать, что каждая функция g_h непрерывна в 0, но f не непрерывна в (0, 0).

1.27. Доказать открытость множества $\{x \in \mathbf{R}^n: |x - a| < r\}$ путем рассмотрения функции $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где $f(x) = |x - a|$.

1.28. Доказать, что для всякого незамкнутого множества $A \subset \mathbf{R}^n$ существует неограниченная непрерывная функция $f: A \to \mathbf{R}$. (Указание: взяв невнутреннюю точку x множества $\mathbf{R}^n \setminus A$, положить $f(y) = 1/|y - x|$.)

1.29. Доказать, что если A компактно, то всякая непрерывная функция $f: A \to \mathbf{R}$ имеет наибольшее и наименьшее значения.

1.30. Пусть $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ — возрастающая функция. Показать, что $\sum_{i=1}^{n} o(f, x_i) < f(b) - f(a)$ для любых точек $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$.

2

Дифференцирование

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Напомним, что функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется дифференцируемой в точке $a \in \mathbf{R}$, если существует такое число $f'(a)$, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a). \tag{1}$$

Это равенство, очевидно, теряет смысл в общем случае функции $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, однако ему можно придать форму, допускающую обобщение. Пусть $\lambda\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — линейное отображение, определяемое формулой $\lambda(h) = f'(a) \cdot h$. Равенство (1) эквивалентно тогда равенству

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0. \tag{2}$$

Последнее равенство часто интерпретируют так: $\lambda(h) + f(a)$ есть хорошая аппроксимация функции f вблизи точки a (см. задачу 2.9). Сосредоточим теперь наше внимание на линейном отображении λ и переформулируем определение дифференцируемости следующим образом.

Функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дифференцируема в точке $a \in \mathbf{R}$, если существует такое линейное отображение $\lambda\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0.$$

В таком виде определение допускает простое обобщение на высшие размерности:

Функция $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *дифференцируема* в точке $a \in \mathbf{R}^n$, если существует такое линейное отображение $\lambda\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Заметим, что h — точка из $\mathbf{R}^n$, а $f(a+h)-f(a)-\lambda(h)$ — точка из $\mathbf{R}^m$, так что знаки нормы в этом определении существенны. Линейное отображение λ называется *производной* функции f в точке a и обозначается $Df(a)$.

2.1. Теорема. *Если функция f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ дифференцируема в точке $a \in \mathbf{R}^n$, то существует единственное линейное отображение λ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ такое, что*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|}=0.$$

Доказательство. Предположим, что линейное отображение μ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-\mu(h)|}{|h|}=0.$$

Полагая $d(h)=f(a+h)-f(a)$, получаем

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h)-\mu(h)|}{|h|}=\lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h)-d(h)+d(h)-\mu(h)|}{|h|} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h)-d(h)|}{|h|}+\lim_{h \to 0} \frac{|d(h)-\mu(h)|}{|h|}=0.$$

Но $tx \to 0$ при $t \to 0$ для всякого $x \in \mathbf{R}^n$. Поэтому для $x \neq 0$ имеем

$$0=\lim_{t \to 0} \frac{|\lambda(tx)-\mu(tx)|}{|tx|}=\frac{|\lambda(x)-\mu(x)|}{|x|}.$$

Следовательно, $\lambda(x)=\mu(x)$. ∎

В дальнейшем мы обнаружим простой способ отыскания $Df(a)$. Пока же рассмотрим функцию f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, определяемую формулой $f(x, y)=\sin x$. Покажем, что $Df(a, b)=\lambda$, где $\lambda(x, y)=(\cos a) \cdot x$. Для этого заметим, что

$$\lim_{(h, k) \to 0} \frac{|f(a+h, b+k)-f(a, b)-\lambda(h, k)|}{|(h, k)|}=$$

$$=\lim_{(h, k) \to 0} \frac{|\sin(a+h)-\sin a-(\cos a) \cdot h|}{|(h, k)|}.$$

Но так как $\sin'(a)=\cos a$, то

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\sin(a+h)-\sin a-(\cos a) \cdot h|}{|h|}=0.$$

А поскольку $|(h, k)| \geqslant |h|$, имеем также

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\sin(a+h) - \sin a - (\cos a)\cdot h|}{|(h, k)|} = 0.$$

Часто удобно рассматривать матрицу отображения $Df(a)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ относительно стандартных базисов в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$. Эта $(m \times n)$-матрица называется *матрицей Якоби* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$. Если $f(x, y) = \sin x$, то $f'(a, b) = (\cos a, 0)$. Если $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, то $f'(a)$ есть (1×1)-матрица, единственным элементом которой служит число, обозначаемое в элементарном анализе $f'(a)$.

Производную $Df(a)$ можно определить и для функции f, заданной только на некотором открытом множестве, содержащем a. Но рассмотрение лишь функций, определенных на всем $\mathbf{R}^n$, упрощает формулировки теорем, не приводя по существу к потере общности.

Будем говорить, что функция f дифференцируема на множестве A, если f дифференцируема в каждой точке $a \in A$. Функция $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ будет называться *дифференцируемой*, если ее можно продолжить до дифференцируемой функции на некотором открытом множестве, содержащем A.

Задачи

2.1*. Доказать, что если функция $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ дифференцируема в $a \in \mathbf{R}^n$, то она непрерывна в a. (Указание: использовать задачу 1.10.)

2.2. Функция $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *не зависит от второй переменной*, если для каждого $x \in \mathbf{R}$ имеем $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ для всех $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$. Показать, что f не зависит от второй переменной тогда и только тогда, когда существует такая функция $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что $f(x, y) = g(x)$. Как выражается $f'(a, b)$ через g'?

2.3. Определить независимость функции $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ от первой переменной и найти $f'(a, b)$ для таких f. Какие функции не зависят ни от первой, ни от второй переменной?

2.4. Пусть g — непрерывная функция на единичной окружности $\{x \in \mathbf{R}^2\colon |x| = 1\}$ и $g(0, 1) = g(1, 0) = 0$, $g(-x) = -g(x)$. Определим $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ условиями

$$f(x) = \begin{cases} |x|\, g\left(\dfrac{x}{|x|}\right) & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

а) Показать, что функция $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определенная равенством $h(t) = f(tx)$, где $x \in \mathbf{R}^2$, дифференцируема.

б) Показать, что f не дифференцируема в $(0, 0)$, кроме случая $g = 0$. (Указание: сначала показать, что $Df(0, 0) = 0$, рассматривая (h, k) с $k = 0$ и затем с $h = 0$.)

2.5. Пусть $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при} \quad (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) = 0. \end{cases}$$

Показать, что f есть функция вида, рассмотренного в задаче 2.4, и потому f не дифференцируема в $(0, 0)$.

2.6. Пусть $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определяется равенством $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Показать, что f не дифференцируема в $(0, 0)$.

2.7. Показать, что функция $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая условию $|f(x)| \leqslant |x|^2$, дифференцируема в нуле.

2.8. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$. Доказать, что f дифференцируема в a тогда и только тогда, когда f^1 и f^2 дифференцируемы в a, и что в этом случае

$$f'(a) = \begin{pmatrix} (f^1)'(a) \\ (f^2)'(a) \end{pmatrix}.$$

2.9. Функции $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называются *равными с точностью до n-го порядка* в a, если

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n} = 0.$$

а) Показать, что f дифференцируема в a тогда и только тогда, когда существует такая функция g вида $g(x) = a_0 + a_1(x - a)$, что f и g равны с точностью до первого порядка в a.

б) Пусть существуют $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$. Показать, что f равна с точностью до n-го порядка в a функции $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определенной равенством

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i.$$

(Указание: предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i}{(x - a)^n}$$

можно вычислить с помощью правила Лопиталя.)

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

2.2. Теорема. (Правило дифференцирования сложной функции.) *Если* f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *дифференцируема в* a *и* g: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ *дифференцируема в* $f(a)$, *то композиция* $g \circ f$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *дифференцируема в* a *и*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Замечание. Это равенство можно записать также в форме

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

При $m = n = p = 1$ получаем известное правило дифференцирования сложных функций.

Доказательство. Пусть $b = f(a)$, $\lambda = Df(a)$ и $\mu = Dg(f(a))$.

Положим

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a), \tag{1}$$

$$\psi(y) = g(y) - g(b) - \mu(y - b), \tag{2}$$

$$\rho(x) = (g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (\mu \circ \lambda)(x - a). \tag{3}$$

Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{|\varphi(x)|}{|x - a|} = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{y \to b} \frac{|\psi(y)|}{|y - b|} = 0, \tag{5}$$

и мы должны показать, что

$$\lim_{x \to a} \frac{|\rho(x)|}{|x - a|} = 0.$$

Но

$$\rho(x) = g(f(x)) - g(b) - \mu(\lambda(x - a)) =$$

$$= g(f(x)) - g(b) - \mu(f(x) - f(a) - \varphi(x)) \text{ согласно (1)}$$

$$= [g(f(x)) - g(b) - \mu(f(x) - f(a))] + \mu(\varphi(x)) =$$

$$= \psi(f(x)) + \mu(\varphi(x)) \text{ согласно (2).}$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\lim_{x \to a} \frac{|\psi(f(x))|}{|x-a|} = 0 \tag{6}$$

и

$$\lim_{x \to a} \frac{|\mu(\varphi(x))|}{|x-a|} = 0. \tag{7}$$

Но равенство (7) легко следует из (4) и задачи 1.10. Далее, в силу (5) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|\psi(f(x))| < \varepsilon |f(x) - b| \quad \text{при} \quad |f(x) - b| < \delta.$$

Последнее же неравенство справедливо при $|x-a| < \delta_1$ с надлежащим $\delta_1 > 0$. Тогда

$$|\psi(f(x))| < \varepsilon |f(x) - b| = \varepsilon |\varphi(x) + \lambda(x-a)| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon |\varphi(x)| + \varepsilon M |x-a|$$

для некоторого M (см. задачу 1.10). А отсюда легко следует равенство (6). ∎

2.3. Теорема.

(1) *Если* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — *постоянная функция* (*т. е. существует такое* $y \in \mathbf{R}^m$, *что* $f(x) = y$ *для всех* $x \in \mathbf{R}^n$), *то*

$$Df(a) = 0$$

при всех $a \in \mathbf{R}^n$.

(2) *Если* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — *линейное отображение, то*

$$Df(a) = f$$

при всех $a \in \mathbf{R}^n$.

(3) *Функция* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *дифференцируема в* $a \in \mathbf{R}^n$ *тогда и только тогда, когда дифференцируема каждая координатная функция* f^i, *и*

$$Df(a) = (Df^1(a), \ldots, Df^m(a)).$$

Таким образом, $f'(a)$ *есть* $(m \times n)$-*матрица,* i-*й строкой которой служит* $(f^i)'(a)$.

(4) *Если* $s\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *определено равенством* $s(x, y) = x + y$, *то*

$$Ds(a, b) = s.$$

(5) *Если* $p\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *определено равенством* $p(x, y) = xy$, *то*

$$Dp(a, b)(x, y) = bx + ay,$$

так что

$$p'(a, b) = (b, a).$$

Доказательство.

(1) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|f(a+h) - f(a) - 0|}{|h|} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|y - y - 0|}{|h|} = 0.$

(2) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|f(a+h) - f(a) - f(h)|}{|h|} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|f(a) + f(h) - f(a) - f(h)|}{|h|} = 0.$$

(3) Если каждая координатная функция f^i дифференцируема в a и

$$\lambda = (Df^1(a), \ldots, Df^n(a)),$$

то

$$f(a+h) - f(a) - \lambda(h) = \\ = (f^1(a+h) - f^1(a) - Df^1(a)(h), \ldots \\ \ldots, f^n(a+h) - f^n(a) - Df^n(a)(h))$$

и потому

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} \leqslant \\ \leqslant \lim_{h \to 0} \sum_{i=0}^{n} \frac{|f^i(a+h) - f^i(a) - Df^i(a)(h)|}{|h|} = 0.$$

Если же, с другой стороны, f дифференцируема в a, то $f^i = \pi^i \circ f$ дифференцируема в a в силу (2) и теоремы 2.2.

(4) Следует из (2).

(5) Пусть $\lambda(x, y) = bx + ay$. Тогда

$$\lim_{(h, k) \to 0} \frac{|p(a+h, b+k) - p(a, b) - \lambda(h, k)|}{|(h, k)|} = \lim_{(h, k) \to 0} \frac{|hk|}{|(h, k)|}.$$

Но

$$|hk| \leqslant \begin{cases} |h|^2, & \text{если } |k| \leqslant |h|, \\ |k|^2, & \text{если } |h| \leqslant |k|. \end{cases}$$

Следовательно, $|hk| \leqslant |h|^2 + |k|^2$. Поэтому

$$\frac{|hk|}{|(h, k)|} \leqslant \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2},$$

так что

$$\lim_{(h, k) \to 0} \frac{|hk|}{|(h, k)|} = 0. \ \blacksquare$$

2.4. Следствие. *Если $f, g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируемы в a, то*

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a),$$
$$D(fg)(a) = g(a)\,Df(a) + f(a)\,Dg(a).$$

Если, кроме того, $g(a) \neq 0$, то

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\,Df(a) - f(a)\,Dg(a)}{[g(a)]^2}.$$

Доказательство. Мы докажем лишь первое равенство, предоставив остальные читателю. Поскольку $f + g = s \circ (f, g)$, имеем

$$D(f + g)(a) = Ds(f(a), g(a)) \circ D(f, g)(a) =$$
$$= s \circ (Df(a), Dg(a)) = Df(a) + Dg(a). \ \blacksquare$$

Теперь нам гарантирована дифференцируемость тех функций $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, координатные функции которых получаются путем сложения, умножения, деления и композиции функций π^i (являющихся линейными отображениями), и тех функций, дифференцируемость которых установлена в элементарном анализе. Однако нахождение $Df(x)$ или $f'(x)$ может оказаться довольно сложным делом. Пусть, например, $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена равенством $f(x, y) = \sin(xy^2)$. Так как $f = \sin \circ (\pi^1 \cdot [\pi^2]^2)$, то мы имеем

$$f'(a, b) = \sin'(ab^2) \cdot [b^2 (\pi^1)'(a, b) + a([\pi^2]^2)'(a, b)] =$$
$$= \sin'(ab^2) \cdot [b^2 (\pi^1)'(a, b) + 2ab(\pi^2)'(a, b)] =$$
$$= (\cos(ab^2)) \cdot [b^2(1, 0) + 2ab(0, 1)] =$$
$$= (b^2 \cos(ab^2), 2ab\cos(ab^2)).$$

К счастью, мы найдем вскоре значительно более простой способ вычисления f'.

Задачи

2.10. Используя теоремы этого параграфа, найти f' для следующих функций:

а) $f(x, y, z) = x^y$,
б) $f(x, y, z) = (x^y, z)$,
в) $f(x, y) = \sin(x \sin y)$,
г) $f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$,
д) $f(x, y, z) = x^{y^z}$,
е) $f(x, y, z) = x^{y+z}$,
ж) $f(x, y, z) = (x+y)^z$,
з) $f(x, y) = \sin(xy)$,
и) $f(x, y) = [\sin(xy)]^{\cos 3}$,
к) $f(x, y) = (\sin(xy), \sin(x \sin y), x^y)$.

2.11. Найти f' в приводимых ниже примерах (где $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывно):

а) $f(x, y) = \int\limits_a^{x+y} g$, б) $f(x, y) = \int\limits_a^{xy} g$,

в) $f(x, y, z) = \int\limits_{x^y}^{\sin(x \sin(y \sin z))} g$.

2.12. Функция $f\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ называется *билинейной*, если для любых $x, x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $y, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^m$ и $a \in \mathbf{R}$

$$f(ax, y) = af(x, y) = f(x, ay),$$
$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),$$
$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2).$$

а) Доказать, что если f билинейна, то

$$\lim_{(h, k) \to 0} \frac{|f(h, k)|}{|(h, k)|} = 0.$$

б) Доказать, что $Df(a, b)(x, y) = f(a, y) + f(x, b)$.

в) Показать, что формула для $Dp(a, b)$ в теореме 2.3 есть частный случай пункта б).

2.13. Определим [1]) $IP\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ формулой $IP(x, y) = \langle x, y \rangle$.

а) Найти $D(IP)(a, b)$ и $(IP)'(a, b)$.

---

[1]) IP — сокращение от inner product (внутреннее произведение). — *Прим. перев.*

б) Показать, что если $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ дифференцируемы и $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определено равенством $h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$, то

$$h'(a) = \langle f'(a)^{\mathrm{T}}, g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a)^{\mathrm{T}} \rangle.$$

(Заметим, что $f'(a)$ есть $(n \times 1)$-матрица; транспонированная матрица $f'(a)^{\mathrm{T}}$ есть $(1 \times n)$-матрица, которую мы рассматриваем как элемент из $\mathbf{R}^n$.)

в) Показать, что если $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ дифференцируема и $|f(t)| = 1$ для всех t, то $\langle f'(t)^{\mathrm{T}}, f(t) \rangle = 0$.

г) Дать пример дифференцируемой функции $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для которой функция $|f|$, определяемая равенством $|f|(t) = |f(t)|$, была бы недифференцируемой.

2.14. Пусть E_i $(i = 1, \ldots, k)$ — евклидовы пространства различных размерностей. Функция $f: E_1 \times \ldots \times E_k \to \mathbf{R}^p$ называется *полилинейной*, если при любом выборе точек $x_j \in E_j$, $j \neq i$, функция $g: E_i \to \mathbf{R}^p$, определяемая равенством $g(x) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_k)$, линейна.

а) Показать, что если f — полилинейная функция и $i \neq j$, то для $h = (h_1, \ldots, h_k)$, где $h_l \in E_l$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a_1, \ldots, h_i, \ldots, h_j, \ldots, a_k)|}{|h|} = 0.$$

(Указание: функция $g(x, y) = f(a_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, a_k)$ билинейна.)

б) Доказать, что

$$Df(a_1, \ldots, a_k)(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

2.15. Будем считать $(n \times n)$-матрицу точкой произведения $\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n$ n экземпляров пространства $\mathbf{R}^n$, рассматривая каждую строку как элемент из $\mathbf{R}^n$.

а) Доказать, что $\det: \mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируем и

$$D(\det)(a_1, \ldots, a_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}.$$

б) Показать, что если a_{ij}: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дифференцируемы и $f(t) = \det(a_{ij}(t))$, то

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{j1}(t) & \ldots & a'_{jn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

в) Пусть $\det(a_{ij}(t)) \neq 0$ для всех t, функции $b_1, \ldots, b_n$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дифференцируемы, а функции $s_1, \ldots, s_n$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таковы, что $(s_1(t), \ldots, s_n(t))$ при каждом t образует решение системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j(t) = b_j(t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Показать, что все s_i дифференцируемы, и найти $s'_i(t)$.

2.16. Предположим, что функция f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ дифференцируема и имеет дифференцируемую обратную f^{-1}: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Показать, что $(f^{-1})'(a) = [f'(f^{-1}(a))]^{-1}$. (Указание: учесть, что $(f \circ f^{-1})(x) = x$.)

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Приступим к задаче отыскания производных по одной из переменных. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $a \in \mathbf{R}^n$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a^1, \ldots, a^i + h, \ldots, a^n) - f(a^1, \ldots, a^n)}{h},$$

если он существует, называется *i-й частной производной* функции f в точке a и обозначается $D_i f(a)$. Важно заметить, что $D_i f(a)$ есть обычная производная некоторой функции. А именно, $D_i f(a) = g'(a^i)$, где $g(x) = f(a^1, \ldots, x, \ldots, a^n)$. Это означает, что $D_i f(a)$ есть угловой коэффициент касательной в точке $(a, f(a))$ к кривой, полученной пересечением графика f с плоскостью $x^j = a^j$, $j \neq i$ (рис. 2.1). Это означает также, что вычисление $D_i f(a)$ есть задача, которую мы уже умеем решать. Если функция $f(x^1, \ldots, x^n)$ задана формулой, в которую входят $x^1, \ldots, x^n$, то $D_i f(x^1, \ldots, x^n)$ находится дифференцированием функции, значение которой в x^i задается этой формулой, если считать все x^j при $j \neq i$ постоянными. Например, если $f(x, y) = \sin(xy^2)$, то $D_1 f(x, y) = y^2 \cos(xy)^2$ и $D_2 f(x, y) = 2xy \cos(xy^2)$. Если же $f(x, y) = x^y$, то $D_1 f(x, y) = yx^{y-1}$, а $D_2 f(x, y) = x^y \ln x$.

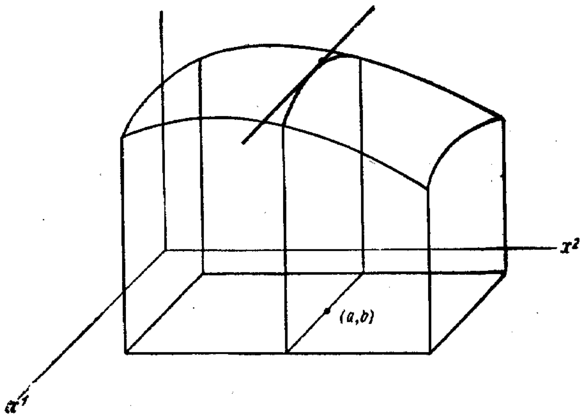


Рис. 2.1.

После небольшой практики (решив, например, задачи в конце этого параграфа) читатель достигнет той же легкости в вычислении $D_i f$, с какой он вычисляет обычные производные.

Если $D_i f(x)$ существует для всех $x \in \mathbf{R}^n$, то мы получаем функцию $D_i f$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Ее j-я частная производная в точке x, т. е. $D_j(D_i f)(x)$, часто обозначается $D_{i,j} f(x)$. Заметим, что эта запись обращает порядок i и j. На самом деле порядок обычно неважен, поскольку для большинства функций (по поводу исключений см. задачи) $D_{i,j} f = D_{j,i} f$.

Существуют различные тонкие теоремы относительно условий, обеспечивающих это равенство; следующая теорема вполне достаточна. Мы сформулируем ее здесь, но доказательство отложим (задача 3.28).

2.5. Теорема. *Если $D_{i,j} f$ и $D_{j,i} f$ непрерывны на открытом множестве, содержащем a, то*

$$D_{i,j} f(a) = D_{j,i} f(a).$$

Функция $D_{i,j}f$ называется (*смешанной*) *частной производной второго порядка* функции f. (Смешанные) частные производные высших порядков определяются аналогично. Очевидно, что при надлежащих условиях теорему 2.5 можно использовать для доказательства равенства (смешанных) частных производных высших порядков. Если f имеет частные производные всех порядков, то порядок индексов

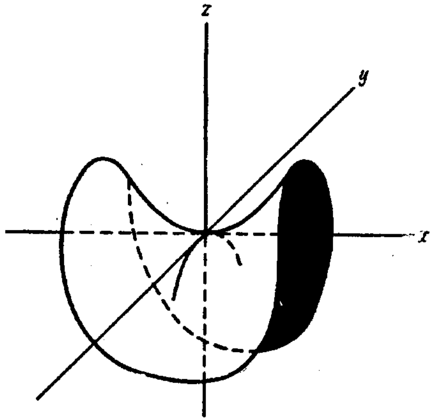


Рис. 2.2.

$i_1, \ldots, i_k$ в $D_{i_1, \ldots, i_k}f$ совершенно неважен. Такие функции называются функциями класса C^∞. В последующих главах часто будет удобно ограничиваться рассмотрением функций класса C^∞.

В следующем параграфе частные производные будут использованы для отыскания производных. Они имеют также другое важное применение — для отыскания максимумов функций.

2.6. Теорема. *Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$. Если максимум (или минимум) $f: A \to \mathbf{R}$ достигается во внутренней точке a множества A и $D_i f(a)$ существует, то $D_i f(a) = 0$.*

Доказательство. Пусть $g_i(x) = f(a^1, \ldots, x, \ldots \ldots, a^n)$. Очевидно g_i имеет максимум (или минимум) в a^i

и определена в открытом интервале, содержащем a^i. Следовательно, $D_i f(a) = g_i'(a^i) = 0$. ∎

Читатель помнит, что обращение теоремы 2.6 неверно даже при $n = 1$ (если f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определена равенством $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$, но 0 не является даже локальным максимумом или минимумом). При $n > 1$ невозможность обращения теоремы 2.6 может проявляться довольно эффектным образом. Предположим, например, что f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена равенством $f(x, y) = x^2 - y^2$ (рис. 2.2). Тогда $D_1 f(0, 0) = 0$, ибо g_1 имеет минимум в 0, а $D_2 f(0, 0) = 0$, ибо g_2 имеет максимум в 0. Очевидно $(0, 0)$ не является точкой ни относительного максимума, ни относительного минимума.

Если для отыскания максимума или минимума функции f на A используется теорема 2.6, то значения f в граничных точках должны быть рассмотрены особо — это нелегкое дело, поскольку границей A может быть все A. Один из способов справиться с этим указан в задаче 2.27; более же сильный метод, который часто используется, изложен в задаче 5.16.

Задачи

2.17. Найти частные производные следующих функций:

а) $f(x, y, z) = x^y$,
б) $f(x, y, z) = z$,
в) $f(x, y) = \sin(x \sin y)$,
г) $f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$,
д) $f(x, y, z) = x^{y^z}$,
е) $f(x, y, z) = x^{y+z}$,
ж) $f(x, y, z) = (x + y)^z$,
з) $f(x, y) = \sin(xy)$,
и) $f(x, y) = [\sin(xy)]^{\cos 3}$.

2.18. Найти частные производные следующих функций (где g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывна):

а) $f(x, y) = \int\limits_a^{x+y} g$,

б) $f(x, y) = \int\limits_y^{x} g$,

в) $f(x, y) = \int\limits_a^{xy} g$.

г) $f(x, y) = \int\limits_a^{\left(\int\limits_b^y g\right)} g$.

2.19. Найти $D_2 f(1, y)$ в случае, когда $f(x, y) = x^{x^{x^{x^y}}} + (\ln x)(\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,tg}(\sin(\cos xy) - \ln(x+y)))))$. (Указание: это можно сделать очень просто).

2.20. Выразить частные производные f через производные функции g и h, если

а) $f(x, y) = g(x)\,h(y)$,
б) $f(x, y) = g(x)^{h(y)}$,
в) $f(x, y) = g(x)$,
г) $f(x, y) = g(y)$,
д) $f(x, y) = g(x+y)$.

2.21*. Пусть $g_1, g_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ непрерывны и $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена равенством

$$f(x, y) = \int\limits_0^x g_1(t, 0)\,dt + \int\limits_0^y g_2(x, t)\,dt.$$

а) Показать, что $D_2 f(x, y) = g_2(x, y)$.

б) Как следовало бы определить f, чтобы $D_2 f(x, y) = g_1(x, y)$?

в) Найти такую функцию $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, у которой $D_1 f(x, y) = x$ и $D_2 f(x, y) = y$, и такую функцию, у которой $D_1 f(x, y) = y$ и $D_2 f(x, y) = x$.

2.22*. Показать, что функция $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, у которой $D_2 f = 0$, не зависит от второй переменной. Если же $D_1 f = D_2 f = 0$, то f — постоянная.

2.23*. Пусть $A = \{(x, y)\colon x < 0$ или $x \geqslant 0$ и $y \neq 0\}$.

а) Показать, что функция $f\colon A \to \mathbf{R}$, у которой $D_1 f = D_2 f = 0$, постоянна. (Указание: любые две точки в A можно соединить ломаной, каждое звено которой параллельно одной из осей.)

б) Найти такую функцию $f\colon A \to \mathbf{R}$, что $D_2 f = 0$, но f не независима от второй переменной.

2.24. Определим $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ равенством

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{при } (x, y) = 0. \end{cases}$$

а) Показать, что $D_2 f(x, 0) = x$ для всех x и $D_1 f(0, y) = -y$ для всех y.

б) Показать, что $D_{1,2} f(0, 0) \neq D_{2,1} f(0, 0)$.

2.25*. Определим $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Показать, что f есть функция класса C^∞ и $f^{(i)}(0) = 0$ для всех i. $\left(\text{Указание: предел } f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{-h^{-2}}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{h}}{e^{h^{-2}}}\right.$ можно вычислить по правилу Лопиталя; довольно легко вычисляется $f'(x)$ при $x \neq 0$, а тогда $f''(0) = \lim\limits_{h \to 0} f'(h)$ можно найти по правилу Лопиталя.$\Big)$

2.26*. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}} & \text{при} \quad x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (-1, 1). \end{cases}$$

а) Показать, что $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ есть функция класса C^∞, положительная на интервале $(-1, 1)$ и равная нулю во всех остальных точках.

б) Показать, что существует такая функция $g\colon \mathbf{R} \to [0, 1]$ класса C^∞, что $g(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $g(x) = 1$ при $x \leqslant \varepsilon$. $\left(\text{Указание: положить } g(x) = \int\limits_0^x f \Big/ \int\limits_0^\varepsilon f, \right.$ где f — функция класса C^∞, положительная на интервале $(0, \varepsilon)$ и равная нулю во всех остальных точках.$\Big)$

в) Определим при заданном $a \in \mathbf{R}^n$ функцию $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ равенством

$$g(x) = f([x^1 - a^1]/\varepsilon) \cdot \ldots \cdot f([x^n - a^n]/\varepsilon).$$

Показать, что g — функция класса C^∞, положительная на $(a^1 - \varepsilon, a^1 + \varepsilon) \times \ldots \times (a^n - \varepsilon, a^n + \varepsilon)$ и равная нулю во всех остальных точках.

г) Показать, что для всякого открытого множества A и компакта $C \subset A$ существует такая неотрицательная функция $f\colon A \to \mathbf{R}$ класса C^∞, что $f(x) > 0$ для всех $x \in C$ и $f(x) = 0$ вне некоторого замкнутого множества, содержащегося в A.

д) Показать, что указанную в г) функцию $f\colon A \to [0, 1]$ можно выбрать так, чтобы $f(x) = 1$ для всех $x \in C$. (Указание: если функция f из г) такова, что $f(x) \geqslant \varepsilon$ при $x \in C$, то рассмотреть $g \circ f$, где g — функция из б).)

2.27. Определим g, h: $\{x\in\mathbf{R}^2: |x|\leqslant 1\}\to\mathbf{R}^3$ равенствами

$$g(x, y)=(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}),$$
$$h(x, y)=(x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}).$$

Показать, что максимум f на $\{x\in\mathbf{R}^3: |x|=1\}$ есть либо максимум $f\circ g$, либо максимум $f\circ h$ на $\{x\in\mathbf{R}^2: |x|\leqslant 1\}$.

ПРОИЗВОДНЫЕ

Читатель, сравнивший задачи 2.10 и 2.17, вероятно уже догадался, что верно следующее утверждение.

2.7. Теорема. *Если f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ дифференцируема в a, то $D_jf^i(a)$ существует для всех i, j: $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, и $f'(a)$ есть $(m\times n)$-матрица $(D_jf^i(a))$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $m=1$, так что f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. Определим h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ равенством $h(x)=(a^1, \ldots, x, \ldots, a^n)$, где x стоит на j-м месте. Тогда $D_jf(a)=(f\circ h)'(a^j)$.

Но по теореме 2.2

$$(f\circ h)'(a^j)=f'(a)\cdot h'(a^j)=f'(a)\cdot\begin{pmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow j\text{-е место.}$$

Так как $(f\circ h)'(a^j)$ имеет $D_jf(a)$ своим единственным элементом, то это показывает, что $D_jf(a)$ существует и является j-м элементом $(1\times n)$-матрицы $f'(a)$.

Для произвольного m теорема следует теперь из теоремы 2.3, согласно которой каждая координатная функция f^i дифференцируема и i-й строкой матрицы $f'(a)$ служит $(f^i)'(a)$. ▮

В задачах приведено несколько примеров, показывающих, что обращение теоремы 2.7 неверно. Однако оно верно при одном дополнительном предположении.

2.8. Теорема. *Пусть функция f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ такова, что все частные производные $D_jf^i(x)$ существуют в не-*

котором открытом множестве, содержащем точку a, и непрерывны в a. Тогда f дифференцируема в a.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.7, достаточно рассмотреть случай $m=1$, т. е. $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Тогда

$$f(a+h)-f(a)=f(a^1+h^1, a^2, \ldots, a^n)-f(a^1, \ldots, a^n)+ \\ +f(a^1+h^1, a^2+h^2, a^3, \ldots, a^n)-f(a^1+h^1, a^2, \ldots, a^n)+\ldots \\ \ldots+f(a^1+h^1, \ldots, a^n+h^n)- \\ -f(a^1+h^1, \ldots, a^{n-1}+h^{n-1}, a^n).$$

Напомним, что $D_1 f$ есть производная функции g, определяемой равенством $g(x)=f(x, a^2, \ldots, a^n)$. Применяя к g теорему о среднем, получаем

$$f(a^1+h^1, a^2, \ldots, a^n)-f(a^1, \ldots, a^n)= \\ =h^1 \cdot D_1 f(b_1, a^2, \ldots, a^n),$$

где b_1 — некоторое число, заключенное между a^1 и a^1+h^1.

Аналогично i-й член суммы равен

$$h^i D_i f(a^1+h^1, \ldots, a^{i-1}+h^{i-1}, b_i, \ldots, a^n)=h^i D_i f(c_i)$$

с некоторым c_i. Тогда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left|f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\cdot h^i\right|}{|h|}= \\ =\lim_{h\to 0}\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}[D_i f(c_i)-D_i f(a)]\cdot h^i\right|}{|h|}\leqslant \\ \leqslant \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}|D_i f(c_i)-D_i f(a)|=0,$$

поскольку функции $D_i f$ непрерывны в a. ∎

Хотя в доказательстве теоремы 2.7 было использовано правило дифференцирования сложной функции, легко можно было бы обойтись и без него. Поэтому после теоремы 2.8, дающей признак дифференцируемости функций, и теоремы 2.7, дающей выражения для их производных, это правило могло бы показаться даже излишним. Однако оно имеет чрезвычайно важное следствие, касающееся частных производных.

2.9. Теорема. *Пусть* $g_1, \ldots, g_m$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *непрерывно дифференцируемы в* a *и* f: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ *непрерывно дифференцируема в* $(g_1(a), \ldots, g_m(a))$. *Определим* F: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *равенством* $F(x) = f(g_1(x), \ldots, g_m(x))$. *Тогда*

$$D_i F(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j f(g_1(a), \ldots, g_m(a)) D_i g_j(a).$$

Доказательство. Функция F есть просто композиция $f \circ g$, где $g = (g_1, \ldots, g_m)$. Так как функции g_i непрерывно дифференцируемы в a, то из теоремы 2.8 следует, что g дифференцируема в a. Аналогично f дифференцируема в $(g_1(a), \ldots, g_m(a))$. Следовательно, в силу теоремы 2.2

$$F'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) =$$

$$= (D_1 f(g(a)), \ldots, D_m f(g(a))) \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & \ldots & D_n g_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_m(a) & \ldots & D_n g_m(a) \end{pmatrix}.$$

Но $D_i F(a)$ есть i-й член левой части этого равенства, в то время как $\sum_{j=1}^{m} D_j f(g_1(a), \ldots, g_m(a)) D_i g_j(a)$ есть i-й член правой части. ∎

Теорему 2.9 также часто называют *правилом дифференцирования сложной функции*, но она слабее, чем теорема 2.2, поскольку g или f могут быть дифференцируемы и без того, чтобы g_i или f были непрерывно дифференцируемыми (см. задачу 2.32). Вычисления, опирающиеся на теорему 2.9, большей частью довольно просты. Некоторого ухищрения требует функция F: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, определенная равенством

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x), k(y)),$$

где h, k: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Чтобы применить теорему 2.9, определим $\bar{h}, \bar{k}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ равенствами

$$\bar{h}(x, y) = h(x), \quad \bar{k}(x, y) = k(y).$$

Тогда

$$D_1\bar{h}(x,\ y)=h'(x),\quad D_2\bar{h}(x,\ y)=0,$$
$$D_1\bar{k}(x,\ y)=0,\quad D_2\bar{k}(x,\ y)=k'(y)$$

и

$$F(x,\ y)=f(g(x,\ y),\ \bar{h}(x,\ y),\ \bar{k}(x,\ y)).$$

Положив $a=(g(x,\ y),\ h(x),\ k(y))$, получаем

$$D_1F(x,\ y)=D_2f(a)\cdot D_1g(x,\ y)+D_2f(a)\cdot h'(x),$$
$$D_2F(x,\ y)=D_1f(a)\cdot D_2g(x,\ y)+D_3f(a)\cdot k'(y).$$

Разумеется, нет необходимости действительно выписывать функции $\bar{h}$ и $\bar{k}$.

Задачи

2.28. Найти выражения для частных производных следующих функций:

а) $F(x,\ y)\quad=f(g(x)k(y),\ g(x)+k(y))$,
б) $F(x,\ y,\ z)=f(g(x+y),\ h(x+z))$,
в) $F(x,\ y,\ z)=f(x^y,\ y^z,\ z^x)$,
г) $F(x,\ y)\quad=f(x,\ g(x),\ h(x,\ y))$.

2.29. Пусть $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. Предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)}{t},$$

если он существует, обозначается $D_xf(a)$ и называется *производной* функции f в точке a *по направлению* x.

а) Показать, что $D_{e_i}f(a)=D_if(a)$.

б) Показать, что $D_{tx}f(a)=tD_xf(a)$.

в) Показать, что если f дифференцируема в a, то $D_xf(a)=$ $=Df(a)(x)$ и потому $D_{x+y}f(a)=D_xf(a)+D_yf(a)$.

2.30. Пусть f определена, как в задаче 2.4. Показать, что $D_xf(0,0)$ существует для всех x, однако если $g\neq 0$, то $D_{x+y}f(0,0)\neq D_xf(0,0)+D_yf(0,0)$ для некоторых x и y.

2.31. Пусть $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ определена, как в задаче 1.26. Показать, что $D_xf(0,0)$ существует для всех x, хотя f даже не непрерывна в $(0,0)$.

2.32. а) Пусть $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при}\quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при}\quad x=0.\end{cases}$$

Показать, что f дифференцируема в 0, но f' разрывна в 0.

б) Пусть $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при} \quad (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) = 0. \end{cases}$$

Показать, что f дифференцируема в $(0, 0)$, но $D_i f$ разрывны в $(0, 0)$.

2.33. Показать, что непрерывность $D_i f^j$ в a можно исключить из условий теоремы 2.8.

2.34. Функция $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ называется *однородной* степени m, если $f(tx) = t^m f(x)$ для всех x. Показать, что если при этом f дифференцируема, то

$$\sum_{i=1}^{n} x^i D_i f(x) = m f(x).$$

(Указание: найти $g'(1)$, где $g(t) = f(tx)$.)

2.35. Доказать, что если $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема и $f(0) = 0$, то существуют такие $g_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x).$$

$$\left(\text{Указание: если } h_x(t) = f(tx), \text{ то } f(x) = \int_0^1 h_x'(t)\, dt.\right)$$

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Предположим, что функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве, содержащем a, и $f'(a) \neq 0$. Если $f'(a) > 0$, то существует такой открытый интервал V, содержащий a, что $f'(x) > 0$ для всех $x \in V$, и аналогичное верно, когда $f'(a) < 0$. Таким образом, f возрастает (или убывает) на V, а потому взаимно однозначна и имеет обратную функцию f^{-1}, определенную на некотором открытом интервале W, содержащем $f(a)$. Кроме того, нетрудно показать, что f^{-1} дифференцируема и

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

для всех $y \in W$.

Аналогичные рассмотрения для высших размерностей значительно сложнее, но результат (теорема 2.11) весьма важен. Мы начнем с простой леммы.

2.10. Лемма. *Пусть* $A \subset \mathbf{R}^n$ — *параллелепипед и* $f: A \to \mathbf{R}^n$ *непрерывно дифференцируема. Если существует такое число* M, *что* $|D_j f^i(x)| \leqslant M$ *для всех* x *внутри* A, *то*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant n^2 M |x - y|$$

для всех $x, y \in A$.

Доказательство. Имеем

$$f^i(y) - f^i(x) = \sum_{j=1}^{n} [f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - \\ - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n)].$$

Применяя теорему о среднем, получаем

$$f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n) = \\ = |y^j - x^j| \cdot D_j f^i(z_{ij})$$

с некоторым z_{ij}. Выражение в правой части не превосходит $M|y^j - x^j|$. Следовательно,

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |y^j - x^j| \cdot M \leqslant nM|y - x|,$$

поскольку $|y^j - x^j| \leqslant |y - x|$ для каждого j. Наконец,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f^i(y) - f^i(x)| \leqslant n^2 M \cdot |y - x|. \blacksquare$$

2.11. Теорема об обратной функции. *Предположим, что* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *непрерывно дифференцируема в некотором открытом множестве, содержащем* a, *и* $\det f'(a) \neq 0$. *Тогда существуют открытое множество* V, *содержащее* a, *и открытое множество* W, *содержащее* $f(a)$, *такие, что отображение* $f: V \to W$ *имеет непрерывное обратное отображение* $f^{-1}: W \to V$, *дифференцируемое и для всех* $y \in W$ *удовлетворяющее соотношению*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Доказательство. Пусть λ — линейное отображение $Df(a)$. Оно невырожденно, поскольку $\det f'(a) \neq 0$.

Но $D(\lambda^{-1} \circ f)(a) = D(\lambda^{-1})(f(a)) \circ Df(a) = \lambda^{-1} \circ Df(a)$ есть тождественное линейное отображение. Если теорема верна для $\lambda^{-1} \circ f$, то она очевидно верна и для f. Поэтому мы можем считать с самого начала, что λ — тождественное отображение. Если тогда $f(a+h) = f(a)$, то

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = \frac{|h|}{|h|} = 1.$$

Но

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Это означает, что равенство $f(x) = f(a)$ не может выполняться для значений x, произвольно близких к a, не равных a. Поэтому существует замкнутый параллелепипед U, содержащий a в качестве внутренней точки и такой, что

$$f(x) \neq f(a), \quad \text{если} \quad x \in U \quad \text{и} \quad x \neq a \tag{1}$$

Поскольку f непрерывно дифференцируема в открытом множестве, содержащем a, можно также считать, что

$$\det f'(x) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in U \tag{2}$$

и

$$|D_j f^i(x) - D_j f^i(a)| < \frac{1}{2n^2} \quad \text{для всех} \quad i, j \quad \text{и} \quad x \in U. \tag{3}$$

Заметим, что из (3) и леммы 2.10, примененной к $g(x) = f(x) - x$, вытекает, что

$$|f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

для любых x_1, $x_2 \in U$. Так как

$$|x_1 - x_2| - |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|,$$

то получаем

$$|x_1 - x_2| \leqslant 2|f(x_1) - f(x_2)| \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in U. \tag{4}$$

Далее, f отображает границу параллелепипеда U в компактное множество, не содержащее, согласно (1), $f(a)$ (рис. 2.3). Поэтому существует такое число $d > 0$, что

$|f(a) - f(x)| \geqslant d$ для всех x, принадлежащих границе U. Пусть $W = \{y : |y - f(a)| < d/2\}$. Если $y \in W$ и x принадлежит границе U, то

$$|y - f(a)| < |y - f(x)|. \tag{5}$$

Покажем, что для всякого $y \in W$ существует единственное x внутри U, для которого $f(x) = y$. Для этого рассмотрим функцию $g\colon U \to \mathbf{R}$, определенную равенством

$$g(x) = |y - f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y^i - f^i(x))^2.$$

Эта функция непрерывна и потому имеет минимум на U. Если x принадлежит границе U, то $g(a) < g(x)$ в силу (5).

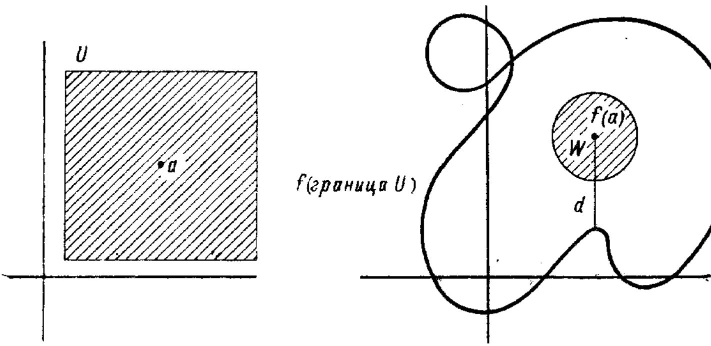


Рис. 2.3.

Следовательно, минимум g *не* достигается на границе U. Согласно теореме 2.6, тогда существует такая точка x внутри U, что $D_j g(x) = 0$ для всех j, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y^i - f^i(x))\, D_j f^i(x) = 0 \quad \text{для всех } j.$$

Но в силу (2) матрица $(D_j f^i(x))$ имеет ненулевой определитель. Поэтому мы должны иметь $y^i - f^i(x) = 0$ для всех i, т. е. $y = f(x)$. Тем самым доказано существование x. Единственность непосредственно следует из (4).

Обозначим через V пересечение внутренности U с $f^{-1}(W)$. Мы показали, что функция $f\colon V \to W$ имеет обратную $f^{-1}\colon W \to V$. Теперь (4) можно переписать в виде

$$|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leqslant 2|y_1 - y_2| \text{ для всех } y_1,\ y_2 \in W. \quad (6)$$

Это показывает, что f^{-1} непрерывна.

Осталось только доказать, что f^{-1} дифференцируема. Пусть $\mu = Df(x)$. Покажем, что f^{-1} дифференцируема в точке $y = f(x)$ и имеет в качестве производной μ^{-1}. Как и в доказательстве теоремы 2.2, для всех $x_1 \in V$ имеем

$$f(x_1) = f(x) + \mu(x_1 - x) + \varphi(x_1 - x),$$

где

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{|\varphi(x_1 - x)|}{|x_1 - x|} = 0.$$

Поэтому

$$\mu^{-1}(f(x_1) - f(x)) = x_1 - x + \mu^{-1}(\varphi(x_1 - x)).$$

Так как каждое $y_1 \in W$ имеет вид $f(x_1)$, где $x_1 \in V$, то последнее равенство можно переписать так:

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + \mu^{-1}(y_1 - y) - \mu^{-1}\left(\varphi\left(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\right)\right),$$

и потому достаточно показать, что

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{|\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)))|}{|y_1 - y|} = 0.$$

Следовательно (задача 1.10), достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = 0.$$

Но

$$\frac{\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} =$$

$$= \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|} \cdot \frac{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}{|y_1 - y|}.$$

Поскольку f^{-1} непрерывна, $f^{-1}(y_1) \to f^{-1}(y)$ при $y_1 \to y$. Поэтому первый множитель стремится к нулю. А так как в силу (6) второй множитель не превосходит 2, то произведение также стремится к 0. ▮

Следует заметить, что обратная функция f^{-1} может существовать даже если $\det f'(a)=0$. Например, если $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определяется равенством $f(x)=x^3$, то $f'(0)=0$, но f имеет обратную функцию $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$. Все же одно можно сказать определенно: если $\det f'(a)=0$, то f^{-1} не может быть дифференцируема в $f(a)$. Чтобы доказать это, заметим, что $(f\circ f^{-1})(x)=x$. Если бы f^{-1} была дифференцируема в $f(a)$, то правило дифференцирования сложных функций дало бы $f'(a)\cdot(f^{-1})'(f(a))=I$ и, следовательно, $\det f'(a)\cdot\det(f^{-1})'(f(a))=1$, в противоречии с тем, что $\det f'(a)=0$.

Задачи

2.36 *. Пусть $A\subset\mathbf{R}^n$ — открытое множество и $f\colon A\to\mathbf{R}^n$ — такая взаимно однозначная функция, что $\det f'(x)\neq 0$ для всех x. Показать, что $f(A)$ — открытое множество и $f^{-1}\colon f(A)\to A$ дифференцируема. Показать также, что $f(B)$ открыто для всякого открытого множества $B\subset A$.

2.37. а) Пусть $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Показать, что f *не* взаимно однозначна. (Указание: если, например, $D_1 f(x, y)\neq 0$ для всех (x, y) из некоторого открытого множества A, рассмотреть функцию $g\colon A\to\mathbf{R}^2$, определяемую равенством $g(x, y)=(f(x, y), y)$.)

б) Обобщить этот результат на случай непрерывно дифференцируемых $f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ с $m<n$.

2.38. а) Пусть $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такова, что $f'(a)\neq 0$ для всех $a\in\mathbf{R}$. Показать, что f взаимно однозначна (на всем $\mathbf{R}$).

б) Определим $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, положив $f(x, y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. Показать, что f не взаимно однозначна, хотя $\det f'(x, y)\neq 0$ для всех (x, y).

2.39. Используя функцию $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, определенную условиями

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при}\quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при}\quad x=0,\end{cases}$$

показать, что непрерывность производной нельзя исключить из предположений теоремы 2.11.

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, определенную равенством $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Если точка (a, b) выбрана так, что $f(a, b) = 0$, причем $a \neq 1, -1$, то (рис. 2.4)

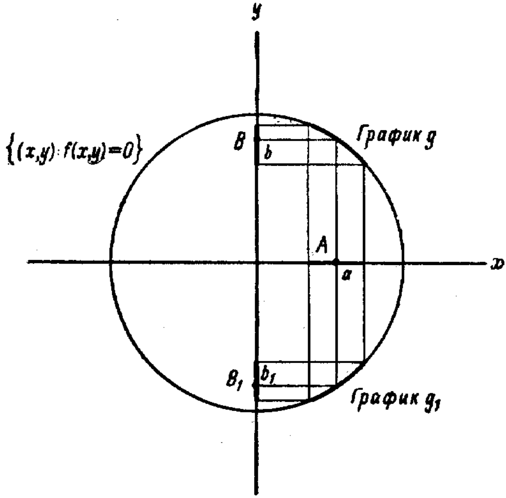


Рис. 2.4.

существуют такие открытые интервалы A и B, содержащие соответственно a и b, что для всякого $x \in A$ существует единственное $y \in B$, для которого $f(x, y) = 0$.

Поэтому можно определить функцию $g\colon A \to \mathbf{R}$ условиями $g(x) \in B$ и $f(x, g(x)) = 0$ (если $b > 0$, как изображено на рис. 2.4, то $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$). Для рассматриваемой нами функции f имеется еще одно число b_1, при котором $f(a, b_1) = 0$. И здесь существует такой интервал B_1, содержащий b_1, что если $x \in A$, то $f(x, g_1(x)) = 0$ для однозначно определенного $g_1(x) \in B_1$ (здесь $g_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}$). Обе функции g и g_1 дифференцируемы. Их называют *неявными* функциями, определенными уравнением $f(x, y) = 0$.

При $a = 1$ или -1 невозможно найти ни одной такой функции g, определенной в открытом интервале, содержащем a. Было бы желательно иметь простой критерий, позволяющий решать, когда вообще можно найти такую функцию. Более общим образом можно поставить вопрос так: пусть $f\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, причем $f(a^1, \ldots, a^n, b) = 0$; когда для каждого $(x^1, \ldots, x^n)$ вблизи $(a^1, \ldots, a^n)$ можно найти единственное y вблизи b, для которого бы $f(x^1, \ldots, x^n, y) = 0$? Еще более общим образом можно задаться вопросом об условиях разрешимости системы уравнений, зависящих от параметров $x^1, \ldots, x^n$, относительно m неизвестных: пусть

$$f_i\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

причем

$$f_i(a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^m) = 0, \quad i = 1, \ldots m;$$

когда для каждого $(x^1, \ldots, x^n)$ вблизи $(a^1, \ldots, a^n)$ можно найти единственное $(y^1, \ldots, y^m)$ вблизи $(b^1, \ldots$ $\ldots, b^m)$, удовлетворяющее уравнениям $f_i(x^1, \ldots, x^n,$ $y^1, \ldots, y^m) = 0$, $i = 1, \ldots, m$? Ответ дает следующая теорема.

2.12. Теорема о неявной функции. *Предположим, что $f\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ непрерывно дифференцируема в некотором открытом множестве, содержащем (a, b), и $f(a, b) = 0$. Пусть M есть $(m \times m)$-матрица*

$$(D_{n+j} f^i(a)), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m.$$

Тогда если $\det M \neq 0$, то существуют открытое множество $A \subset \mathbf{R}^n$, содержащее a, и открытое множество $B \subset \mathbf{R}^m$, содержащее b, со следующим свойством: для всякого $x \in A$ имеется единственное $g(x) \in B$, для которого $f(x, g(x)) = 0$. При этом функция $g\colon A \to B$ дифференцируема.

Доказательство. Определим $F\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ равенством $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Тогда $\det F'(a, b) =$ $= \det M \neq 0$. В силу теоремы 2.11, существуют открытое множество $W \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, содержащее точку $F(a, b) =$ $= (a, 0)$, и содержащее точку (a, b) открытое множество в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, которое можно считать имеющим вид $A \times B$, так что функция $F\colon A \times B \to W$ имеет дифференцируемую обратную $h\colon W \to A \times B$. Очевидно, h имеет вид $h(x, y) =$

$=(x, k(x, y))$, где k — некоторая дифференцируемая функция (поскольку F — функция такого вида). Пусть π: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ — функция, определенная равенством $\pi(x, y)=y$. Тогда $\pi \circ F=f$. Поэтому

$$f(x, k(x, y))=f \circ h(x, y)=$$
$$=(\pi \circ F) \circ h(x, y)=\pi \circ (F \circ h)(x, y)=\pi(x, y)=y.$$

Таким образом, $f(x, k(x, 0))=0$, т. е. можно положить $g(x)=k(x, 0)$. ▮

Зная, что функция g дифференцируема, легко найти ее производную. Действительно, так как $f^i(x, g(x))=0$, то, применяя D_j к обеим частям этого равенства, получаем

$$0=D_j f^i(x, g(x))+\sum_{\alpha=1}^{m} D_{n+\alpha} f^i(x, g(x)) \cdot D_j g^\alpha(x),$$
$$i, j=1, \ldots, m.$$

Поскольку $\det M \neq 0$, эта система уравнений относительно $D_j g^\alpha(x)$ разрешима. Ответ будет зависеть от значений $D_j f^i(x, g(x))$, а поэтому и от $g(x)$. Но это неизбежно, ибо функция g, вообще говоря, не единственна. Рассматривая функцию f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, определяемую равенством $f(x, y)=x^2+y-1$, мы уже заметили, что уравнению $f(x, g(x))=0$ удовлетворяют две функции: $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ и $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$. Дифференцирование уравнения $f(x, g(x))=0$ дает здесь

$$D_1 f(x, g(x))+D_2 f(x, g(x)) \cdot g'(x)=0,$$

или $2x+2g(x) \cdot g'(x)=0$, т. е. $g'(x)=-x/g(x)$, а этому условию удовлетворяет и $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ и $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$. Несколько обобщив метод доказательства теоремы 2.12, мы получим результат, который будет иметь важное значение в гл. 5.

2.13. Теорема. *Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, $p \leqslant n$, непрерывно дифференцируема на открытом множестве, содержащем точку a. Если $f(a)=0$ и $(n \times p)$-матрица $(D_i f^j(a))$ имеет ранг p, то существуют открытое множество $A \subset \mathbf{R}^n$ и дифференцируемая функция*

h: $A \to \mathbf{R}^n$, имеющая дифференцируемую обратную, такие, что

$$f \circ h(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n).$$

Доказательство. Мы можем рассматривать f как функцию из $\mathbf{R}^{n-p} \times \mathbf{R}^p$ в $\mathbf{R}^p$. Пусть M есть $(p \times p)$-матрица $(D_{n-p+i}f^j(a))$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$. Если $\det M \neq 0$, то мы находимся точно в ситуации, рассмотренной при доказательстве теоремы 2.12, а там было показано, что существует такая функция h, что

$$f \circ h(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n).$$

В общем же случае, поскольку $(D_if^j(a))$ имеет ранг p, найдутся такие индексы $i_1 < \ldots < i_p$, что матрица $(D_if^j(a))$, $1 \leqslant j \leqslant p$, $i = i_1, \ldots, i_p$, имеет ненулевой определитель. Пусть g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — функция, переставляющая переменные x^i так, что

$$g(x^1, \ldots, x^n) = (\ldots, x^{i_1}, \ldots, x^{i_p}).$$

Тогда $f \circ q$ есть функция рассмотренного уже типа, так что $((f \circ g) \circ k)(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$ при некоторой k. Искомой функцией будет $h = g \circ k$. ∎

Задачи

2.40. Решить задачу (2.15), используя теорему о неявной функции.

2.41. Пусть f: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Определим для каждого $x \in \mathbf{R}$ функцию g_x: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ равенством $g_x(y) = f(x, y)$. Пусть при любом x существует единственное $y = c(x)$, для которого $g_x'(y) = 0$.

а) Показать, что если $D_{2,2}f(x, y) \neq 0$ для всех (x, y), то c дифференцируема и

$$c'(x) = -\frac{D_{2,1}f(x, c(x))}{D_{2,2}f(x, c(x))}.$$

(Указание: равенство $g_x'(y) = 0$ можно переписать в форме $D_2f(x, y) = 0$.)

б) Показать, что если $c'(x)=0$, то существует y, для которого

$$D_{2,1}f(x, y)=0,$$
$$D_2 f(x, y)=0.$$

в) Пусть $f(x, y)=x(y\ln y-y)-y\ln x$. Найти

$$\max_{1/2\leqslant x\leqslant 2}\left(\min_{1/3\leqslant y\leqslant 1} f(x, y)\right).$$

ПО ПОВОДУ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Этот параграф содержит краткое и не вполне беспристрастное обсуждение классических обозначений, связанных с частными производными. Приверженцы классических обозначений записывают частную производную $D_1 f(x, y, z)$ в виде

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{или}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$$

или при помощи каких-либо других подходящих аналогичных символов. Такой способ записи ведет к тому, что вместо $D_1 f(u, v, w)$ пишут

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v, w),$$

хотя могут (а для выражений типа $D_1 f(7, 3, 2)$ должны) использоваться символы вроде

$$\left.\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right|_{(x, y, z)=(u, v, w)} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}(u, v, w).$$

Аналогичные обозначения используются для $D_2 f$ и $D_3 f$. Производные высших порядков обозначаются символами типа

$$D_2 D_1 f(x, y, z)=\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y\, \partial x}.$$

Для $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ символ ∂ автоматически заменяется первоначальным d, так что пишут $\frac{d\sin x}{dx}$, а не $\frac{\partial \sin x}{\partial x}$. Уже формулировка теоремы 2.2 потребовала бы в классической записи введения лишних букв.

Обычная запись вычисления $D_1(f \circ (g, h))$ такова: если $f(u, v)$ — некоторая функция и $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, то

$$\frac{\partial f(g(x, y), h(x, y))}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

[Символ $\partial u/\partial x$ означает $(\partial/\partial x)\ g(x, y)$, а $(\partial/\partial u) f(u, v)$ означает $D_1 f(u, v) = D_1 f(g(x, y), h(x, y))$.] Это равенство часто записывают просто в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

хотя f имеет в разных частях равенства неодинаковый смысл!

Обозначение df/dx, всегда представлявшееся преувеличенно соблазнительным, породило многие (обычно бессмысленные) определения для df и dx самих по себе, единственной целью которых было придать смысл равенству

$$df = \frac{df}{dx} \cdot dx.$$

Для $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, например, df *определяется* в классических курсах формулой

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

(что бы ни означали dx и dy).

Глава 4 содержит строгие определения, дающие возможность доказать вышеприведенные равенства. Действительно ли эти новые определения лучше классических — вопрос деликатный: пусть читатель судит о нем сам.

3

Интегрирование

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение интеграла функции $f\colon A \to \mathbf{R}$, где $A \subset \mathbf{R}^n$ — замкнутый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$, столь похоже на определение интеграла функций одной переменной, что мы ограничимся лишь беглыми замечаниями.

Напомним, что разбиением P замкнутого интервала $[a, b]$ называется последовательность $t_0, \ldots, t_k$, где $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b$. Разбиение P делит интервал $[a, b]$ на k интервалов $[t_{i-1}, t_i]$. *Разбиение* параллелепипеда $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ определяется как семейство $P = (P_1, \ldots, P_n)$, где каждое P_i есть разбиение интервала $[a_i, b_i]$. Предположим, например, что $P = t_0, \ldots, t_k$ — разбиение $[a_1, b_1]$ и $P_2 = s_0, \ldots, s_l$ — разбиение $[a_2, b_2]$. Тогда разбиение $P = (P_1, P_2)$ замкнутого прямоугольника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ делит его на $k \cdot l$ прямоугольников $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$. Вообще, если P_i делит $[a_i, b_i]$ на N_i интервалов, то $P = (P_1, \ldots, P_n)$ делит $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ на $N = N_1 \cdot \ldots \cdot N_n$ параллелепипедов. Мы будем называть их *параллелепипедами разбиения P*.

Предположим теперь, что A — параллелепипед, P — его разбиение и $f\colon A \to \mathbf{R}$ — ограниченная функция.

Для каждого параллелепипеда S разбиения P положим

$$m_S(f) = \inf \{f(x)\colon x \in S\},$$
$$M_S(f) = \sup \{f(x)\colon x \in S\},$$

и пусть $v(S)$ — объем S [за *объем* параллелепипеда $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ равно как и параллелепипеда $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, по определению принимается произведение $(b_1-a_1)\times\ldots\times(b_n-a_n)$]. *Нижняя и верхняя суммы* f для P определяются формулами[1])

$$L(f, P)=\sum_S m_S(f)\,v(S) \text{ и } U(f, P)=\sum_S M_S(f)\,v(S).$$

Очевидно, что $L(f, P)\leqslant U(f, P)$; верно даже более сильное утверждение (3.2).

3.1. Лемма. *Предположим, что разбиение P' есть продолжение разбиения P (т. е. каждый параллелепипед разбиения P' содержится в некотором параллелепипеде разбиения P). Тогда*

$$L(f, P)\leqslant L(f, P') \text{ и } U(f, P')\leqslant U(f, P).$$

Доказательство. Каждый параллелепипед S разбиения P распадается на несколько параллелепипедов $S_1, \ldots, S_\alpha$ разбиения P', так что $v(S)=v(S_1)+\ldots+v(S_\alpha)$. Но $m_S(f)\leqslant m_{S_i}(f)$, поскольку среди значений $f(x)$ для $x\in S$ содержатся все значения $f(x)$ для $x\in S_i$ (и, возможно, также меньшие значения). Поэтому

$$m_S(f)\,v(S)=m_S(f)\,v(S_1)+\ldots+m_S(f)\,v(S_\alpha)\leqslant$$
$$\leqslant m_{S_1}(f)\,v(S_1)+\ldots+m_{S_\alpha}(f)\,v(S_\alpha).$$

Сумма левых частей по всем S есть $L(f, P)$, тогда как суммой правых частей служит $L(f, P')$. Следовательно, $L(f, P)\leqslant L(f, P')$. Для верхних сумм доказательство аналогично. ∎

3.2. Следствие. $L(f, P')\leqslant U(f, P)$ *для любых разбиений P и P'.*

Доказательство. Пусть P'' — разбиение, продолжающее и P и P' (например, $P''=(P_1'', \ldots, P_n'')$, где P_i'' — разбиение $[a_i, b_i]$, продолжающее и P_i и P_i'). Тогда

$$L(f, P')\leqslant L(f, P'')\leqslant U(f, P'')\leqslant U(f, P). \ ∎$$

Из 3.2 следует, что верхняя грань всех нижних сумм для f не превосходит нижней грани всех верхних сумм. Функция $f\colon A\to\mathbf{R}$ называется *интегрируемой* на парал-

[1]) L и U — от lower (нижний) и upper (верхний) соответственно. — *Прим. перев.*

лелепипеде A, если она ограничена и $\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}$. Это общее значение обозначается $\int\limits_A f$ и называется *интегралом* f по A. Часто используют обозначение $\int\limits_A f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \ldots dx^n$. Если $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, где $a \leqslant b$, то $\int\limits_a^b f = \int\limits_{[a, b]} f$.

Следующая теорема доставляет простой, но важный критерий интегрируемости.

3.3. Теорема. *Ограниченная функция $f\colon A \to \mathbf{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P параллелепипеда A, что $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.*

Доказательство. Если это условие выполнено, то, очевидно, $\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}$ и f интегрируема. С другой стороны, если f интегрируема, т. е. $\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ имеются такие разбиения P и P', что $U(f, P) - L(f, P') < \varepsilon$. Если тогда P'' продолжает и P и P', то, как вытекает из леммы 3.1, $U(f, P'') - L(f, P'') \leqslant U(f, P) - L(f, P') < \varepsilon$. ∎

В следующих параграфах мы охарактеризуем класс интегрируемых функций и найдем метод вычисления интегралов. Здесь же ограничимся рассмотрением двух функций, одна из которых интегрируема, а другая — нет.

1. Пусть $f\colon A \to \mathbf{R}$ постоянна, $f(x) = c$. Тогда для всякого разбиения P и всякого его параллелепипеда S имеем $m_S(f) = M_S(f) = c$, так что $L(f, P) = U(f, P) = \sum\limits_S cv(S) = cv(A)$. Следовательно, $\int\limits_A f = cv(A)$.

2. Пусть $f\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Каково бы ни было разбиение P, всякий его параллелепипед S будет содержать и точки (x, y) с рациональным x, и точки (x, y) с иррациональным x. Поэтому $m_S(f)=0$ и $M_S(f)=1$, так что

$$L(f, P)=\sum_S 0v(S)=0,$$

а

$$U(f, P)=\sum_S 1v(S)=v([0, 1]\times[0, 1])=1.$$

Следовательно, f неинтегрируема.

Задачи

3.1. Пусть f: $[0, 1]\times[0, 1]\to\mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x, y)=\begin{cases} 0, \text{ если } 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}, \\ 1, \text{ если } \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Показать, что f интегрируема и $\int\limits_{[0, 1]\times[0, 1]} f=1/2$.

3.2. Пусть f: $A\to\mathbf{R}$ интегрируема и $g=f$ всюду, кроме конечного числа точек. Показать, что g интегрируема и $\int\limits_A f=\int\limits_A g$.

3.3. Пусть f, g: $A\to\mathbf{R}$ интегрируемы.

а) Показать, что для всякого разбиения P параллелепипеда A и всякого параллелепипеда S этого разбиения $m_S(f)+m_S(g)\leqslant\leqslant m_S(f+g)$ и $M_S(f+g)\leqslant M_S(f)+M_S(g)$, а потому $L(f, P)+L(g, P)\leqslant L(f+g)$ и $U(f+g, P)\leqslant U(f, P)+U(g, P)$.

б) Показать, что $f+g$ интегрируема и $\int\limits_A f+g=\int\limits_A f+\int\limits_A g$.

в) Показать, что $\int\limits_A cf=c\int\limits_A f$ для всякой постоянной c.

3.4. Пусть f: $A\to\mathbf{R}$ и P — разбиение A. Показать, что f интегрируема тогда и только тогда, когда для всякого параллелепипеда S разбиения P сужение $f\mid S$ функции f на S интегрируемо, причем в этом случае $\int\limits_A f=\sum\limits_S\int\limits_S f\mid S$.

3.5. Пусть f, g: $A\to\mathbf{R}$ интегрируемы и $f\leqslant g$. Показать, что $\int\limits_A f\leqslant\int\limits_A g$.

3.6. Показать, что если $f\colon A \to \mathbf{R}$ интегрируема, то

$$\left| \int\limits_A f \right| \leqslant \int\limits_A |f|.$$

3.7. Пусть $f\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально, } y \text{ иррационально}, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{если } x \text{ рационально, } y = \dfrac{p}{q} \text{ — несократимая дробь.} \end{cases}$$

Показать, что f интегрируема и $\int\limits_{[0, 1] \times [0, 1]} f = 0.$

МЕРА 0 И ОБЪЕМ 0

Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ имеет (n-мерную) *меру* 0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие $\{U_1, U_2, U_3, \ldots\}$ этого множества замкнутыми параллелепипедами, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Очевидно (но тем не менее полезно напомнить), что если A имеет меру 0 и $B \subset A$, то B имеет меру 0. Нетрудно проверить, что в определении меры 0 вместо замкнутых параллелепипедов можно брать открытые.

Множество, содержащее лишь конечное число точек, очевидно, имеет меру 0. Множество, состоящее из бесконечного числа точек, которые могут быть занумерованы в последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$, также имеет меру 0; в самом деле для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого номера i можно выбрать замкнутый параллелепипед U_i, содержащий a_i, так, чтобы $v(U_i) < \varepsilon/2^i$, а тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(U_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$.

Важным и довольно неожиданным примером такого бесконечного множества является множество всех рациональных чисел между 0 и 1. Чтобы убедиться в этом, нужно только перечислять дроби из нижеследующей таблицы в порядке, указанном стрелками (исключая повторения и числа, большие чем 1)

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} \\[2ex]
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \\[2ex]
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} \\[2ex]
\frac{0}{4} & & & &
\end{array}$$

Этот пример допускает важное обобщение.

3.4. Теорема. *Если* $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ *и каждое* A_i *имеет меру* 0, *то* A *имеет меру* 0.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Будучи множеством меры нуль, A_i обладает таким покрытием $\{U_{i,1}, U_{i,2}U_{i,3}, \ldots\}$ замкнутыми параллелепипедами, что $\sum_{j=1}^{\infty} v(U_{i,j}) < \varepsilon/2^i$. Тогда семейство всех $U_{i,j}$ образует покрытие всего множества A. Из таблицы

$$\begin{array}{cccc}
U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & \ldots \\
U_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} & \ldots \\
U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,3} & \ldots
\end{array}$$

видно, что это семейство может быть занумеровано в последовательность $V_1, V_2, V_3, \ldots$. Очевидно, $\sum_{i=1}^{\infty} v(V_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$. ∎

Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ имеет (n-мерный) *объем* 0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое *конечное* покрытие $\{U_1, \ldots, U_n\}$ этого множества замкнутыми параллелепипедами, что $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. Очевидно, что множество, имеющее объем 0, имеет также меру 0. В этом определении вместо замкнутых параллелепипедов, как и раньше, можно было бы воспользоваться открытыми.

3.5. Теорема. *Если $a < b$, то интервал $[a, b] \subset \mathbf{R}$ не может иметь объем 0. А именно, если $\{U_1, \ldots, U_n\}$ — его конечное покрытие замкнутыми интервалами, то*

$$\sum_{i=1}^{n} v(U_i) \geqslant b - a.$$

Доказательство. Применим индукцию по n. Утверждение очевидно при $n = 1$. Предположим, что теорема справедлива для покрытий n интервалами, и пусть $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$, — покрытие $[a, b]$ $n+1$ замкнутым интервалом. Можно считать (изменяя, если нужно, нумерацию), что $a \in U_1$. Тогда $U_1 = [\alpha, \beta]$, где $\alpha \leqslant a \leqslant \beta$. Если $\beta \geqslant b$, то $v(U_1) \geqslant b - a$. Если же $\beta < b$, то $\{U_2, \ldots, U_n\}$ — покрытие интервала $[\beta, b]$ n интервалами, следовательно, $\sum_{i=2}^{n+1} v(U_i) \geqslant b - \beta$ и потому $\sum_{i=1}^{n+1} v(U_i) \geqslant (\beta - a) + (b - \beta) = b - a$. ∎

Если $a < b$, то верно также, что $[a, b]$ не может иметь меру 0. Это вытекает из следующей теоремы.

3.6. Теорема. *Компактное множество A, имеющее меру 0, имеет также объем 0.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как A имеет меру 0, то существует такое его покрытие $\{U_1, U_2, \ldots\}$ открытыми параллелепипедами, что $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Так как A компактно, то уже некоторое конечное число $U_1, \ldots, U_n$ параллелепипедов U_i покрывает A и, разумеется,

$$\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon. \quad ∎$$

Заключение теоремы 3.6 неверно, если A некомпактно. Пусть, например, A — множество всех рациональных чисел между 0 и 1; тогда A имеет меру 0. Предположим, что $\{[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\}$ — некоторое покрытие A. Тогда A содержится в замкнутом множестве $[a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_n, b_n]$, и потому $[0, 1] \subset [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_n, b_n]$. Из теоремы 3.5 следует, что $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \geqslant 1$ для всякого такого покрытия и, следовательно, A не может иметь объем 0.

Задачи

3.8. Доказать, что $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ не может иметь объем 0, если $a_i < b_i$ для всех i. (Вероятно, вы решите доказывать это в лоб; но см. задачу 3.25.)

3.9. а) Показать, что неограниченное множество не может иметь объем 0.

б) Дать пример замкнутого множества меры 0, не имеющего объем 0.

3.10. а) Показать, что если множество C имеет объем 0, то и его граница имеет объем 0.

б) Дать пример ограниченного множества C меры 0, граница которого не имеет меру 0.

3.11. Пусть A — множество из задачи 1.18. Показать, что если $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < 1$, то его граница не имеет меру 0.

3.12. Пусть f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — возрастающая функция. Показать, что множество ее точек разрыва имеет меру 0. (Указание: используя задачу 1.30, показать, что множество $\left\{x\colon o(f, x) > \frac{1}{n}\right\}$ конечно для любого целого положительного n.)

3.13*. а) Показать, что множество всех параллелепипедов $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ с рациональными a_i и b_i может быть расположено в последовательность.

б) Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ произвольное множество и $\mathfrak{G}$ — его открытое покрытие. Показать, что существует последовательность $U_1, U_2, U_3 \ldots$ элементов из $\mathfrak{G}$, также покрывающая A. (Указание: для каждого $x \in A$ существует такой параллелепипед $B = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ с рациональными a_i и b_i, что $x \in B \subset U$ для некоторого $U \in \mathfrak{G}$.)

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним, что $o(f, x)$ обозначает колебание функции f в точке x.

3.7. Лемма. *Пусть A — замкнутый параллелепипед и f: $A \to \mathbf{R}$ — ограниченная функция, у кото-*

рой $o(f, x) < \varepsilon$ *для всех* $x \in A$. *Тогда* A *обладает таким разбиением* P, *что* $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon v(A)$.

Доказательство. Для каждого $x \in A$ существует такой замкнутый параллелепипед U_x, содержащий x внутри себя, что $M_{U_x}(f) - m_{U_x}(f) < \varepsilon$. Так как A компактно, то конечное число $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ множеств U_x покрывает A. Пусть P — разбиение множества A, каждый параллелепипед которого содержится в некотором U_{x_i}. Тогда $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$ для каждого параллелепипеда S разбиения P, так что

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)]\, v(S) < \varepsilon v(A). \blacksquare$$

3.8. Теорема. *Пусть* A — *замкнутый параллелепипед*, $f\colon A \to \mathbf{R}$ — *ограниченная функция и* B — *множество ее точек разрыва. Тогда* f *интегрируема на* A *в том и только том случае, когда* B — *множество меры* 0.

Доказательство. Предположим сначала, что B имеет меру 0. Пусть $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon = \{x\colon o(f, x) \geqslant \varepsilon\}$. Тогда $B_\varepsilon \subset B$, так что B_ε имеет меру 0. Поскольку B_ε компактно (теорема 1.11), B_ε имеет объем 0. Таким образом, существует конечное семейство $U_1, \ldots, U_n$ замкнутых параллелепипедов, внутренности которых покрывают B_ε, такое, что $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. Пусть P — разбиение A, каждый параллелепипед S которого принадлежит одной из следующих двух групп (см. рис. 3.1):

$\mathscr{S}_1$, состоящей из таких параллелепипедов S, что $S \subset U_i$ для некоторого i.

$\mathscr{S}_2$, состоящей из параллелепипедов S, для которых $S \cap B_\varepsilon = \varnothing$.

Пусть $|f(x)| < M$ для всех $x \in A$. Тогда $M_S(f) - m_S(f) \leqslant 2M$ для каждого S. Поэтому

$$\sum_{S \in \mathscr{S}_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) \leqslant 2M \sum_{i=1}^{n} v(U_i) < 2M\varepsilon.$$

Далее, если $S \in \mathscr{S}_2$, то $o(f, x) < \varepsilon$ при $x \in S$. Из леммы 3.7 следует, что существует такое продолжение P' разбиения P, что

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') < \varepsilon \cdot v(S)$$

для всякого $S \in \mathscr{S}_2$. Тогда

$$U(f, P') - L(f, P') = \sum_{S' \subset S \in \mathscr{S}_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)]\, v(S') +$$
$$+ \sum_{S' \subset S \in \mathscr{S}_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)]\, v(S') <$$
$$< 2M\varepsilon + \sum_{S \in \mathscr{S}_2} \varepsilon v(S) \leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon v(A).$$

Так как M и $v(A)$ фиксированы, то отсюда следует, что, выбирая надлежащим образом разбиение P', можно сде-

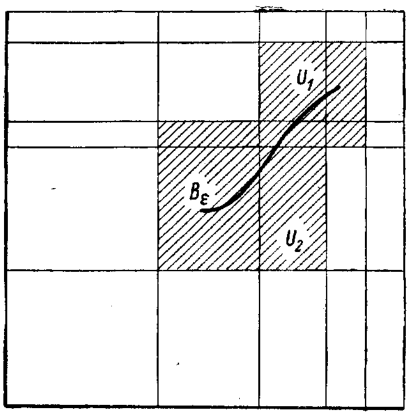


Рис. 3.1. Заштрихованные прямоугольники принадлежат $\mathscr{S}_1$.

лать $U(f, P') - L(f, P')$ как угодно малым. Таким образом, f интегрируема.

Обратно, предположим, что f интегрируема. Так как $B = B_1 \cup B_{1/2} \cup B_{1/3} \cup \ldots$, то достаточно (теорема 3.4) доказать, что каждое $B_{1/n}$ есть множество меры 0.

Мы покажем, что каждое $B_{1/n}$ имеет объем 0 (но так как $B_{1/n}$ компактно, то на самом деле это то же самое).

Пусть $\varepsilon > 0$, P — такое разбиение множества A, что $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/n$, и $\mathscr{S}$ — семейство всех параллелепипедов S разбиения P, пересекающихся с $B_{1/n}$. Тогда $\mathscr{S}$ покрывает $B_{1/n}$. Но если $S \in \mathscr{S}$, то $M_S(f) - m_S(f) \geqslant 1/n$. Таким образом,

$$\frac{1}{n}\sum_{S\in\mathscr{S}} v(S) \leqslant \sum_{S\in\mathscr{S}} [M_S(f) - m_S(f)]\, v(S) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{S} [M_S(f) - m_S(f)]\, v(S) < \frac{\varepsilon}{n}$$

и, следовательно, $\sum\limits_{S\in\mathscr{S}} v(S) < \varepsilon$. ∎

До сих пор мы имели дело только с интегралами от функций, заданных на параллелепипедах. Интегралы по другим множествам легко сводятся к интегралам этого вида. Пусть $C \subset \mathbf{R}^n$. *Характеристическая функция* χ_C множества C определяется так:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin C, \\ 1 & \text{при} \quad x \in C. \end{cases}$$

Если $C \subset A$ для некоторого замкнутого параллелепипеда A и $f\colon A \to \mathbf{R}$ ограничена, то под $\int\limits_C f$ понимается $\int\limits_A f\chi_C$ в предположении, что функция $f\chi_C$ интегрируема. Последнее во всяком случае имеет место (задача 3.14), если f и χ_C интегрируемы.

3.9. Теорема. *Функция $\chi_C\colon A \to \mathbf{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда граница множества C имеет меру* 0 (*и следовательно, объем* 0).

Доказательство. Если x — внутренняя точка множества C, то существует такой открытый параллелепипед U, что $x \in U \subset C$. Таким образом, $\chi_C = 1$ на U и очевидно, что χ_C непрерывна в x. Аналогично, если точка x — внешняя по отношению к C, то существует такой открытый параллелепипед U, что $x \in U \subset \mathbf{R}^n \setminus C$. Поэтому $\chi_C = 0$ на U и χ_C непрерывна в x. Наконец, если x принадлежит границе множества C, то для всякого открытого параллелепипеда U, содержащего x, существуют точка $y_1 \in U \cap C$ и точка $y_2 \in U \cap (\mathbf{R}^n \setminus C)$. Тогда $\chi_C(y_1) = 1$ и $\chi_C(y_2) = 0$. Следовательно, χ_C разрывна в x. Таким образом, множество точек разрыва функции χ_C совпадает с границей C и требуемый результат следует из теоремы 3.8. ∎

Ограниченное множество C, граница которого имеет меру 0, называется *измеримым по Жордану*. Интеграл $\int\limits_C 1$ называется (n-мерным) *объемом* множества C. Разумеется, одномерный объем часто называют *длиной*, а двумерный — *площадью*.

Задача 3.11 показывает, что даже открытое множество C может не быть измеримым по Жордану, так что интеграл $\int\limits_C f$ не обязательно определен, даже если C открыто, а f непрерывна. Это неудобство будет вскоре устранено.

Задачи

3.14. Показать, что если $f, g: A \to \mathbf{R}$ интегрируемы, то интегрируемо и $f \cdot g$.

3.15. Показать, что множество C, имеющее объем 0, содержится в некотором замкнутом параллелепипеде A, измеримо по Жордану и $\int\limits_A \chi_C = 0$.

3.16. Дать пример ограниченного множества C меры 0, для которого $\int\limits_A \chi_C$ не существует.

3.17. Показать, что если C — ограниченное множество меры 0 и интеграл $\int\limits_A \chi_C$ существует, то он равен нулю. (Указание: показать, что $L(f, P) = 0$ для всех разбиений P; использовать задачу 3.8.)

3.18. Показать, что если $f: A \to \mathbf{R}$ — неотрицательная функция и $\int\limits_A f = 0$, то $\{x: f(x) \neq 0\}$ имеет меру 0. (Указание: доказать, что $\{x: f(x) > 1/n\}$ имеет объем 0.)

3.19. Пусть A — открытое множество из задачи 1.18. Показать, что если $f = \chi_A$ с точностью до множества меры 0, то f неинтегрируема на $[0, 1]$.

3.20. Показать, что возрастающая функция $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ интегрируема на $[a, b]$.

3.21. Показать, что множество $C \subset A$, где A — замкнутый параллелепипед, измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P параллелепипеда A, что $\sum\limits_{S \in \mathscr{S}_1} v(S) - \sum\limits_{S \in \mathscr{S}_2} v(S) < \varepsilon$, где $\mathscr{S}_1$ состоит из всех параллелепипедов разбиения P, пересекающихся с C, а $\mathscr{S}_2$ — из всех содержащихся в C.

3.22*. Показать, что если множество A измеримо по Жордану, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое по Жордану компактное множество $C \subset A$, что $\int\limits_A \chi_{A \setminus C} < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА ФУБИНИ

Проблема вычисления интегралов в известном смысле решается теоремой 3.10, сводящей вычисление интегралов по замкнутому параллелепипеду из $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, к вычислению интегралов по замкнутым интервалам из $\mathbf{R}$. Достаточно важная, чтобы заслуживать специального наименования, эта теорема обычно называется теоремой Фубини, хотя она является лишь более или менее частным случаем теоремы, доказанной Фубини к моменту, когда теорема 3.10 уже давно была известна.

Идея, лежащая в основе теоремы, лучше всего иллюстрируется (рис. 3.2) на примере положительной непрерывной функции $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$. Пусть $t_0, \ldots, t_n$ — разбиение интервала $[a, b]$. Разобьем $[a, b] \times [c, d]$ на n полос прямолинейными отрезками $\{t_i\} \times [c, d]$.

Если определить g_x равенством $g_x(y) = f(x, y)$, то площадь области, ограниченной снизу отрезком $\{x\} \times [c, d]$, а сверху проектирующейся на него частью графика f, будет равна

$$\int\limits_c^d g_x = \int\limits_c^d f(x, y)\, dy.$$

Поэтому объем области, ограниченной снизу прямоугольником $[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]$, а сверху — соответствующей частью графика f, будет приближенно равен

$$(t_i - t_{i-1}) \int_0^d f(x, y)\,dy \quad \text{с произвольным} \quad x \in [t_{i-1}, t_i].$$

Таким образом, интеграл

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]} f$$

приближенно равен

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x_i, y)\,dy \quad \text{с произвольным} \quad x_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

С другой стороны, такого рода суммы входят в определение $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx$. Таким образом, есть основание надеяться, что функция h, определенная равенством $h(x) = \int_c^d g_x = \int_c^d f(x, y)\,dy$, интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f = \int_a^b h = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Это и в самом деле окажется верным, когда f непрерывна, однако в общем случае возникают трудности. Предположим, например, что множеством точек разрыва f служит $\{x_0\} \times [c, d]$ при некотором $x_0 \in [c, d]$. Тогда f интегрируема на $[a, b] \times [c, d]$, но $h(x_0) = \int_a^d f(x_0, y)\,dy$ не имеет даже смысла. В силу этого теорема Фубини формулируется несколько странным образом и сопровождается замечаниями, относящимися к различным специальным случаям, когда возможна более простая формулировка.

Нам потребуются еще два термина. Если $f\colon A \to \mathbf{R}$ — ограниченная функция на замкнутом параллелепипеде, то, интегрируема f или нет, верхняя грань всех нижних сумм и нижняя грань всех верхних сумм всегда существуют.

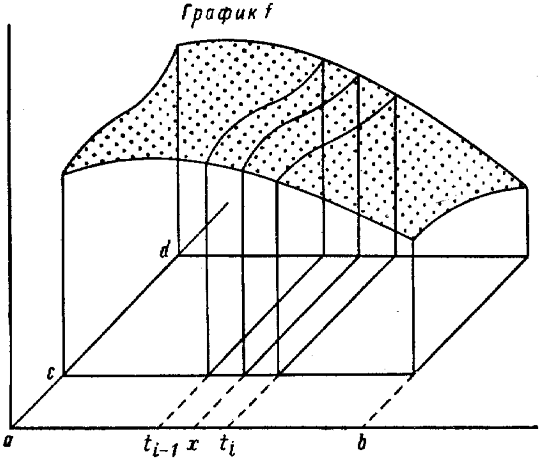


Рис. 3.2.

Они называются соответственно *нижним* и *верхним интегралами* f по A и обозначаются соответственно

$$\mathbf{L}\int_A f \quad \text{и} \quad \mathbf{U}\int_A f.$$

3.10. Теорема Фубини. *Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ и $B \subset \mathbf{R}^m$ — замкнутые параллелепипеды и $f\colon A \times B \to \mathbf{R}$ — интегрируемая функция. Пусть далее функция $g_x\colon B \to \mathbf{R}$ определена для каждого $x \in A$ равенством $g_x(y) = f(x, y)$ и*

$$\mathscr{L}(x) = \mathbf{L}\int_B g_x = \mathbf{L}\int_B f(x, y)\,dy,$$

$$\mathscr{U}(x) = \mathbf{U}\int_B g_x = \mathbf{U}\int_B f(x, y)\,dy.$$

Тогда $\mathscr{L}$ и $\mathscr{U}$ интегрируемы на A и

$$\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_A \mathscr{L} = \int\limits_A \left(\mathbf{L}\int\limits_B f(x, y)\,dy\right)dx,$$

$$\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_A \mathscr{U} = \int\limits_A \left(\mathbf{U}\int\limits_B f(x, y)\,dy\right)dx.$$

(Интегралы в правой части называются *повторными интегралами* для f.)

Доказательство. Пусть P_A — разбиение для A и P_B — разбиение для B. Вместе они дают разбинение P для $A\times B$, каждый параллелепипед S которого имеет вид $S_A\times S_B$, где S_A — параллелепипед разбиения P_A, а S_B — параллелепипед разбиения P_B. Тогда

$$L(f, P) = \sum_S m_S(f)\,v(S) = \sum_{S_A, S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\,v(S_A\times S_B) = \sum_{S_A}\left(\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\,v(S_B)\right)v(S_A).$$

Но если $x\in S_A$, то, очевидно, $m_{S_A\times S_B}(f)\leqslant m_{S_B}(g_x)$. Следовательно, для всех $x\in S_A$ имеем

$$\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\,v(S_B) \leqslant \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x)\,v(S_B) \leqslant \mathbf{L}\int\limits_B g_x = \mathscr{L}(x).$$

Поэтому

$$\sum_{S_A}\left(\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\,v(S_B)\right)v(S_A) \leqslant L(\mathscr{L}, P_A).$$

Таким образом,

$$L(f, P) \leqslant L(\mathscr{L}, P_A) \leqslant U(\mathscr{L}, P_A) \leqslant U(\mathscr{U}, P_A) \leqslant U(f, P),$$

где последнее неравенство доказывается совершенно так же, как первое. Но так как f интегрируема, то $\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\} = \int\limits_{A\times B} f$. Поэтому

$$\sup\{L(\mathscr{L}, P_A)\} = \inf\{U(\mathscr{L}, P_A)\} = \int\limits_{A\times B} f.$$

Другими словами, $\mathscr{S}$ интегрируема на A и $\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_{A} \mathscr{S}$.

Утверждение для $\mathscr{U}$ следует из неравенств

$$L(f, P) \leqslant L(\mathscr{S}, P_A) \leqslant L(\mathscr{U}, P_A) \leqslant \leqslant U(\mathscr{U}, P_A) \leqslant U(f, P). \quad \blacksquare$$

Замечания. 1. Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_{B}\left(\mathbf{L}\int\limits_{A} f(x, y)\,dx\right)dy = \int\limits_{B}\left(\mathbf{U}\int\limits_{A} f(x, y)\,dx\right)dy.$$

Эти интегралы называются *повторными интегралами* для f, взятыми в обратном порядке по сравнению с выбранным в теореме. Как видно из задач, возможность перемены порядка интегрирования в повторном интеграле имеет многочисленные следствия.

2. На практике часто встречается случай, когда g_x интегрируема для всех $x \in A$, так что

$$\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_{A}\left(\int\limits_{B} f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Это заведомо имеет место, когда f непрерывна.

3. Самое худшее, с чем обычно сталкиваются на практике, это неинтегрируемость g_x для конечного числа точек $x \in A$. В этом случае $\mathscr{S}(x) = \int\limits_{B} f(x, y)\,dy$ для всех значений x, кроме этого конечного множества. Так как $\int\limits_{A} \mathscr{S}$ не изменяется, если $\mathscr{S}$ переопределить в конечном числе точек, то все еще можно писать

$$\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_{A}\left(\int\limits_{B} f(x, y)\,dy\right)dx,$$

считая, что интегралу $\int\limits_{B} f(x, y)\,dy$, когда он не существует, придано произвольное значение, скажем 0.

4. Бывают случаи, когда этого нельзя сделать и теоремой 3.10 приходится пользоваться в том виде, как она

сформулирована. Пусть $f\colon [0,\ 1]\times[0,\ 1]\to\mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x,\ y)=\begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ иррационально}, \\ 1, \text{ если } x \text{ рационально и } y \text{ иррационально}, \\ 1-\dfrac{1}{q}, \text{ если } x=\dfrac{p}{q} \text{ — несократимая дробь и } \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y \text{ рационально}. \end{cases}$$

Тогда f интегрируема и $\int\limits_{[0,\ 1]\times[0,\ 1]} f=1$. Но $\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy=1$, если x иррационально, и не существует, если x рационально. Поэтому если интеграл $h(x)=\int\limits_0^1 f(x,\ y)\,dy$, когда он не существует, положить равным нулю, то функция h будет неинтегрируемой.

5. Если $A=[a_1,\ b_1]\times\ldots\times[a_n,\ b_n]$ и $f\colon A\to\mathbf{R}$ — достаточно хорошая функция, то повторное применение теоремы Фубини дает

$$\int\limits_A f=\int\limits_{a_n}^{b_n}\left(\ldots\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x^1,\ \ldots,\ x^n)\,dx^1\right)\ldots\right)dx^n.$$

6. Теорему Фубини можно использовать и для вычисления $\int\limits_C f$, где $C\subset A$, поскольку этот интеграл по определению равен $\int\limits_A \chi_C f$. Пусть, например,

$$C=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]\setminus\{(x,\ y)\colon |(x,\ y)|<1\}.$$

Тогда

$$\int\limits_C f=\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{1} f(x,\ y)\,\chi_C(x,\ y)\,dy\right)dx.$$

Но

$$\chi_C(x,\ y)=\begin{cases} 1, \text{ если } y>\sqrt{1-x^2} \text{ или } y<-\sqrt{1-x^2}, \\ 0 \text{ во всех остальных точках.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)\chi_C(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x, y)\,dy.$$

Вообще основная трудность при получении выражения для $\int_C f$, где $C \subset A \times B$, состоит в определении $C \cap (\{x\} \times B)$ для $x \in A$. Если легче определить $C \cap (A \times \{y\})$ для $y \in B$, то следует воспользоваться повторным интегралом

$$\int_C f = \int_B \left(\int_A f(x, y) \cdot \chi_C(x, y)\,dx \right) dy.$$

Задачи

3.23. Пусть $C \subset A \times B$ — множество объема 0 и $A' \subset A$ — множество всех $x \in A$, для которых $\{y \in B\colon (x, y) \in C\}$ не имеет объем 0. Показать, что A' — множество меры 0. (Указание: χ_C интегрируема и $\int_{A \times B} \chi_C = \int_A \mathcal{U} = \int_A \mathcal{L}$, так что $\int_A (\mathcal{U} - \mathcal{L}) = 0$.)

3.24. Пусть $C \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — объединение всех множеств $\{p/q\} \times [0, 1/q]$, где p/q — несократимые дроби из $[0, 1]$. Показать, что для множества C слово „мера" в задаче 3.23 нельзя заменить словом „объем".

3.25. Используя индукцию по n, показать, что $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ не может иметь меру 0 (или объем 0), если $a_i < b_i$ для каждого i.

3.26. Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ — интегрируемая неотрицательная функция и $A_f = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b \text{ и } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Показать, что множество A_f измеримо по Жордану и имеет площадь $\int_a^b f$.

3.27. Показать, что если $f\colon [a, b] \times [a, b] \to \mathbf{R}$ интегрируема то

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_x^b f(x, y)\,dy\,dx.$$

(Указание: вычислить двумя различными способами $\int\limits_C f$ с подходяще подобранным множеством $C \subset [a, b] \times [a, b]$.)

3.28*. Используя теорему Фубини, дать простое доказательство того, что $D_{1,2}f = D_{2,1}f$, если эти смешанные производные непрерывны. (Указание: если $D_{1,2}f(a) - D_{2,1}f(a) > 0$, то $D_{1,2}f - D_{2,1}f > 0$ на некотором параллелепипеде A, содержащем a.)

3.29. С помощью теоремы Фубини вывести выражение для объема множества в $\mathbf{R}^3$, получаемого вращением вокруг оси x множества, лежащего в плоскости yz.

3.30. Пусть C — множество из задачи 1.17. Показать, что

$$\int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{[0,1]} \chi_C(x, y)\, dx \right) dy = \int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{[0,1]} \chi_C(y, x)\, dy \right) dx = 0,$$

но $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} \chi_C$ не существует.

3.31. Пусть $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, $f\colon A \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция и $F\colon A \to \mathbf{R}$ определена равенством

$$F(x) = \int\limits_{[a_1, x^1] \times \ldots \times [a_n, x^n]} f.$$

Какова будет тогда $D_iF(x)$ для внутренних точек x параллелепипеда A?

3.32*. Пусть $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ и D_2f непрерывна. Положим $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$. Доказать *правило Лейбница*:

$$F'(y) = \int\limits_a^b D_2f(x, y)\, dx. \left(\text{Указание: } F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^y D_2f(x, y)\, dy + f(x, c) \right) dx. \right)$$

При доказательстве будет видно, что непрерывность D_2f можно заменить значительно более слабыми предположениями.

3.33. Пусть $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$, D_2f непрерывна и $F(x, y) = \int\limits_a^x f(t, y)\, dt$.

а) Найти D_1F и D_2F.

б) Найти $G'(x)$, если $G(x) = \int\limits_a^{g(x)} f(t, x)\,dt$.

3.34*. Пусть g_1, g_2: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции, причем $D_1g_2 = D_2g_1$.

Как и в задаче 2.21, положим

$$f(x, y) = \int\limits_0^x g_1(t, 0)\,dt + \int\limits_0^y g_2(x, t)\,dt.$$

Показать, что $D_1f(x, y) = g_1(x, y)$.

3.35*. а) Пусть g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейное отображение с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & 1 & \ldots & & 1 \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(где вторая матрица содержит в точности одну единицу вне диагонали). Показать, что объем образа $g(U)$ любого параллелепипеда U равен $|\det g|\,v(U)$.

б) Доказать, что $|\det g|\,v(U)$ есть объем образа $g(U)$ для всякого линейного отображения g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. (Указание: если $\det g \neq 0$, то g есть композиция линейных отображений рассмотренного в а) типа.)

3.36. (Принцип Кавальери.) Пусть A и B — измеримые по Жордану множества из $\mathbf{R}^3$, $A_c = \{(x, y)\colon (x, y, c) \in A\}$ и $B_c = \{(x, y)\colon (x, y, c) \in B\}$. Предположим, что A_c и B_c для каждого c измеримы по Жордану и имеют одинаковую площадь. Показать, что A и B имеют одинаковый объем.

РАЗБИЕНИЕ ЕДИНИЦЫ

В этом параграфе вводится понятие, имеющее чрезвычайно важное значение в теории интегрирования.

3.11. Теорема. Пусть $\mathcal{O}$ — *открытое покрытие множества* $A \subset \mathbf{R}^n$. *Тогда существует такое семейство* Φ *функций* φ *класса* C^∞, *определенных на некотором открытом множестве, содержащем* A, *что*

1) $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ *для каждого* $x \in A$;

2) *для каждого* $x \in A$ *существует такое открытое множество* V, *содержащее* x, *что только конечное число функций из* Φ *отлично на* V *от нуля*;

3) $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ *для каждого* $x \in A$ [*в силу* (2) *эта сумма для каждого* $x \in A$ *конечна на некотором открытом множестве, содержащем* x];

4) *для всякого* $\varphi \in \Phi$ *существует такое открытое множество* U *из* $\mathfrak{S}$, *что* $\varphi = 0$ *вне некоторого замкнутого множества, содержащегося в* U.

(Семейство Φ, удовлетворяющее условиям (1) — (3), называется C^∞-*разбиением единицы* для A. Если семейство Φ удовлетворяет также условию (4), то говорят, что оно *подчинено* покрытию $\mathfrak{S}$. В этой главе будет использоваться только непрерывность функций φ.)

Доказательство. *Случай* 1. *A компактно.*

Тогда некоторое конечное семейство $U_1, \ldots, U_n$ открытых множеств из $\mathfrak{S}$ покрывает A. Очевидно, достаточно построить разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Найдем сначала компактные множества $D_i \subset U_i$, внутренности которых покрывают A. Множества D_i строятся по индукции следующим образом. Предположим, что $D_1, \ldots, D_k$ выбраны так, что $\{\operatorname{int} D_1, \ldots$ $\ldots, \operatorname{int} D_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ — покрытие A[1]). Положим

$$C_{k+1} = A \setminus (\operatorname{int} D_1 \cup \ldots \cup \operatorname{int} D_k \cup U_{k+2} \cup \ldots \cup U_n).$$

Тогда множество $C_{k+1} \subset U_{k+1}$ компактно. Следовательно (задача 1.22), можно найти такое компактное множество D_{k+1}, что $C_{k+1} \subset \operatorname{int} D_{k+1}$ и $D_{k+1} \subset U_{k+1}$. Построив множества $D_1, \ldots, D_n$, можно для каждого i выбрать неотрицательную функцию ψ_i класса C^∞, положительную на D_i и равную 0 вне некоторого замкнутого множества, содержащегося в U_i (задача 2.26). Так как $\{D_1, \ldots, D_n\}$ покрывает A, то $\psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) > 0$ для всех точек x из некоторого открытого множества U, содержащего A. На U можно положить

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x)}.$$

Пусть $f\colon U \to [0, 1]$ — произвольная функция класса C^∞,

[1]) Символ $\operatorname{int} D$ означает внутренность (interior) множества D. — *Прим. перев.*

равная 1 на A и 0 вне некоторого замкнутого множества в U. Тогда $\Phi = \{f \cdot \varphi_1, \ldots, f \cdot \varphi_n\}$ будет искомым разбиением единицы.

Случай 2. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots$, *где каждое* A_i *компактно и* $A_i \subset \operatorname{int} A_{i+1}$.

Пусть $\mathfrak{O}_i$ для каждого i состоит из всех множеств вида $U \cap (\operatorname{int} A_{i+1} \setminus A_{i-2})$, где U пробегает $\mathfrak{O}$. Тогда $\mathfrak{O}_i$ будет открытым покрытием компактного множества $B_i = A_i \setminus \operatorname{int} A_{i-1}$. Согласно случаю 1, существует разбиение единицы Φ_i для B_i, подчиненное $\mathfrak{O}_i$. Для всякого $x \in A$ существует такое открытое множество $U \ni x$, что для любых $y \in U$ все члены суммы

$$\sigma(y) = \sum_{\varphi \in \Phi_i, \text{ все } i} \varphi(y),$$

кроме конечного их числа, равны нулю. Это вытекает из того, что если $y \in A_i$, то $\varphi(y) = 0$ для всех $\varphi \in \Phi_j$ с $j \geqslant i+2$. Для каждой функции $\varphi \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ положим $\varphi'(x) = \varphi(x)/\sigma(x)$. Семейство всех φ' будет искомым разбиением единицы.

Случай 3. A — *открытое множество.*

Полагая

$$A_i = \left\{ x \in A \colon |x| \leqslant i \text{ и расстояние от } x \text{ до границы } A \geqslant \frac{1}{i} \right\},$$

приходим к предыдущему случаю.

Случай 4. A — *произвольное множество.*

Пусть B — объединение всех U из $\mathfrak{O}$. Согласно случаю 3, существует разбиение единицы для B; оно является также разбиением единицы для A. ∎

Следует отметить важное следствие условия (2) теоремы. Пусть множество $C \subset A$ компактно. Для всякого $x \in C$ существует открытое множество V_x, содержащее x и такое, что только конечное число функций $\varphi \in \Phi$ не равно тождественно нулю на V_x. Так как C компактно, то конечное число таких V_x покрывает C. Таким образом, только конечное число функций $\varphi \in \Phi$ не равно тождественно нулю на C.

Приведем важное приложение разбиений единицы, иллюстрирующее их главную роль — склеивать результаты, полученные локально. Мы уже видели, что $\int\limits_A f$ может не существовать, даже если A — ограниченное открытое множество и множество точек разрыва f имеет меру 0. Но любое открытое множество A во всяком случае обладает таким открытым покрытием $\mathfrak{S}$, что все U из $\mathfrak{S}$ содержатся в A и каждое $U \in \mathfrak{S}$ измеримо по Жордану (так, например, A есть объединение открытых параллелепипедов). Если $\mathfrak{S}$ — такое покрытие и Φ — подчиненное ему разбиение единицы для A, то φf интегрируемо для каждого $\varphi \in \Phi$. Определяем тогда $\int\limits_A f$ как $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \int\limits_A \varphi \cdot f$ в предположении, что эта сумма сходится (она может сходиться, даже если A и f неограниченны). Эта сумма эквивалентна сумме обычного бесконечного ряда. Мы уже заметили (при рассмотрении случая 3 в доказательстве теоремы 3.11), что открытое множество A есть объединение последовательности компактных множеств. Так как на каждом из этих компактных множеств отлично от тождественного нуля только конечное число функций $\varphi \in \Phi$, то ненулевые интегралы $\int\limits_A \varphi f$ могут быть занумерованы в последовательность. Поскольку, однако, невозможно отдать предпочтение ни одному из таких способов нумерации, под сходимостью следует понимать сходимость при любом упорядочении, т. е. абсолютную.

3.12. Теорема.

1) *Если A — ограниченное множество, $f: A \to \mathbf{R}$ — ограниченная функция и множество ее точек разрыва имеет меру* 0, *то ряд*

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int\limits_A \varphi f$$

сходится.

2) *Если $\mathfrak{G}'$ — другое покрытие указанного типа и Ψ — подчиненное ему разбиение единицы, то*

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi f=\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi f.$$

3) *Если A измеримо по Жордану и $f\colon A\to\mathbf{R}$ интегрируема, то это определение $\int_A f$ согласуется со старым.*

Доказательство. 1) Пусть A содержится в замкнутом параллелепипеде B и $|f(x)|\leqslant M$ для всех $x\in A$. Тогда $\int_A|\varphi f|\leqslant M\int_A\varphi$. Поэтому для всякого конечного семейства $F\subset\Phi$

$$\sum_{\varphi\in F}\left|\int_A\varphi f\right|\leqslant\sum_{\varphi\in F}M\int_A\varphi=M\int_A\sum_{\varphi\in F}\varphi.$$

Заметим, что правая часть имеет смысл, поскольку F конечно. Но на B мы имеем $\sum\limits_{\varphi\in F}\varphi\leqslant\sum\limits_{\varphi\in\Phi}\varphi\leqslant 1$. Поэтому $\sum\limits_{\varphi\in F}\left|\int\limits_A\varphi f\right|\leqslant Mv(B)$. Таким образом, $\sum\limits_{\varphi\in\Phi}\left|\int\limits_A\varphi f\right|$, а следовательно, и $\sum\limits_{\varphi\in\Phi}\int\limits_A\varphi f$ сходятся.

2) Если Ψ — еще одно разбиение единицы, то функции $\varphi\psi$ со всевозможными $\varphi\in\Phi$ и $\psi\in\Psi$ образуют разбиение единицы. Но $\varphi\cdot f=0$ всюду, кроме некоторого компактного множества C, и существует только конечное число функций $\psi\in\Psi$, не равных тождественно нулю на C. Поэтому мы вправе написать, что

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi f=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\sum_{\psi\in\Psi}\psi\varphi f=\sum_{\substack{\varphi\in\Phi\\ \psi\in\Psi}}\int_A\psi\varphi f,$$

и на том же основании последнее выражение равно $\sum\limits_{\psi\in\Psi}\int\psi f$.

3) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует (задача 3.22) такое компактное измеримое по Жордану множество $C \subset A$, что $\int\limits_{A \setminus C} 1 < \varepsilon$. Существует только конечное число функций $\varphi \in \Phi$, не равных тождественно нулю на C. Для любого включающего их конечного семейства $F \subset \Phi$ имеем

$$\left| \int\limits_A f - \sum_{\varphi \in F} \int\limits_A \varphi f \right| \leqslant \int\limits_A \left| f - \sum_{\varphi \in F} \varphi f \right| \leqslant M \int\limits_A \left(1 - \sum_{\varphi \in F} \varphi \right) = \\ = M \int\limits_A \sum_{\varphi \in \Phi \setminus F} \varphi \leqslant M \int\limits_{A \setminus C} 1 \leqslant M\varepsilon.$$

Таким образом, $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \int\limits_A \varphi f = \int\limits_A f$. ∎

Задачи

3.37. Пусть f: $(0, 1) \to \mathbf{R}$ — неотрицательная непрерывная функция. Показать, что $\int\limits_{(0,1)} f$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f$.

3.38. Пусть $A_n = [1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}]$. Предположим, что f: $(0, 1) \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $\int\limits_{A_n} f = (-1)^n \left(\frac{1}{n} \right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Показать, что $\int\limits_{(0,1)} f$ не существует, но

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{(\varepsilon,\, 1-\varepsilon)} f = \ln 2.$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Если g: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция и f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывна, то, как хорошо известно,

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f = \int\limits_a^b (f \circ g) \cdot g'.$$

Доказательство весьма несложно: если $F' = f$, то $(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g'$; таким образом, слева стоит $F(g(b)) - F(g(a))$, а справа $F \circ g(b) - F \circ g(a) = F(g(b)) - F(g(a))$.

Предоставляем читателю показать, что если g взаимно однозначно, то рассмотренную формулу можно переписать в виде

$$\int\limits_{g((a,b))} f = \int\limits_{(a,b)} f \circ g \cdot |g'|.$$

(Рассмотреть отдельно случаи, когда g возрастает и когда g убывает.) Обобщение этой формулы на высшие размерности отнюдь не тривиально.

3.13. Теорема. *Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество и g: $A \to \mathbf{R}^n$ — такая взаимно однозначная непрерывно дифференцируемая функция, что* $\det g'(x) \neq 0$ *для всех $x \in A$. Тогда*

$$\int\limits_{g(A)} f = \int\limits_{A} (f \circ g) |\det g'|$$

для любой интегрируемой функции f: $g(A) \to \mathbf{R}$.

Доказательство. Начнем с нескольких важных замечаний.

(1) Предположим, что A обладает таким открытым покрытием $\mathfrak{S}$, что

$$\int\limits_{g(U)} f = \int\limits_{U} (f \circ g) |\det g'|$$

для каждого $U \in \mathfrak{S}$ и любой интегрируемой функции f. Тогда теорема верна для всего A. (Так как g автоматически взаимно однозначна на некоторой открытой окрестности каждой точки, то не удивительно, что это единственная часть доказательства, использующая взаимную однозначность g на всем A.)

Доказательство (1). Семейство всех $g(U)$ образует открытое покрытие $g(A)$. Пусть Φ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Если $\varphi = 0$ вне $g(U)$, то, поскольку g взаимно однозначно, $(\varphi f) \circ g = 0$ вне U.

Поэтому равенство

$$\int_{g(U)} \varphi f = \int_U [(\varphi f)\circ g]\,|\det g'|$$

можно переписать в виде

$$\int_{g(A)} \varphi f = \int_A [(\varphi\cdot f)\circ g]\,|\det g'|.$$

Следовательно,

$$\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_{g(A)} \varphi f = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_A [(\varphi f)\circ g]\,|\det g'| =$$
$$= \sum_{\varphi\in\Phi}\int_A (\varphi\circ g)(f\circ g)\,|\det g'| = \int_A (f\circ g)\,|\det g'|.$$

Замечание. Теорема следует также из предположения, что

$$\int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f\circ g)\,|\det g'|$$

для всех V из некоторого покрытия $g(A)$. Это вытекает из утверждения п. (1), примененного к g^{-1}.

(2) Достаточно доказать теорему для функции $f = 1$.

Доказательство (2). Если теорема верна для $f = 1$, то она верна и для постоянных функций. Пусть V — параллелепипед в $g(A)$ и P — его разбиение. Для каждого параллелепипеда S этого разбиения обозначим через f_S постоянную функцию со значением $m_S(f)$. Тогда

$$L(f,\ P) = \sum_S m_S(f)\,v(S) = \sum_S \int_{\operatorname{Int} S} f_S =$$
$$= \sum_S \int_{g^{-1}(\operatorname{Int} S)} (f_S\circ g)\,|\det g'| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_S \int_{g^{-1}(\operatorname{Int} S)} (f\circ g)\,|\det g'| = \int_{g^{-1}(V)} (f\circ g)\,|\det g'|.$$

Так как $\int\limits_V f$ — верхняя грань всех $L(f, P)$, то этим доказано, что $\int\limits_V f \leqslant \int\limits_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \,|\det g'|$. Аналогичное рассуждение, в котором $f_S = M_S(f)$, показывает, что $\int\limits_V f \geqslant$ $\geqslant \int\limits_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \,|\det g'|$. Справедливость утверждения следует теперь из приведенного выше замечания.

(3) Если теорема верна для $g\colon A \to \mathbf{R}^n$ и $h\colon B \to \mathbf{R}^n$, где $g(A) \subset B$, то она верна и для $h \circ g\colon A \to \mathbf{R}^n$.

Доказательство (3).

$$\int\limits_{h \circ g(A)} f = \int\limits_{h(g(A))} f = \int\limits_{g(A)} (f \circ h)\,|\det h'| =$$
$$= \int\limits_A [(f \circ h) \circ g]\,[\,|\det h'| \circ g]\,|\det g'| =$$
$$= \int\limits_A f \circ (h \circ g)\,|\det (h \circ g)'|.$$

(4) Теорема верна для линейного отображения g.

Доказательство (4). В силу (1) и (2) достаточно показать, что

$$\int\limits_{g(U)} 1 = \int\limits_U |\det g'|$$

для всякого открытого параллелепипеда U. Но это задача 3.35.

Сопоставление п. (3) и (4) показывает, что для любого фиксированного $a \in A$ можно считать $g'(a)$ единичной матрицей. В самом деле, если T — линейное отображение $Dg(a)$, то $(T^{-1} \circ g)'(a) = I$. Так как теорема верна для T, то если она верна для $T^{-1} \circ g$, она будет верна для g.

Теперь уже все подготовлено для доказательства теоремы, которое проводится индукцией по n. Замечания, предшествовавшие формулировке теоремы в соединении с (1) и (2), доказывают справедливость теоремы для случая $n = 1$.

Предполагая, что теорема верна для размерности $n-1$, докажем, что она справедлива и для размерности n. Нам нужно только найти для каждой точки $a \in A$ содержащее ее открытое множество $U \subset A$, для которого теорема верна. При этом можно считать, что $g'(A) = I$.

Определим $h\colon A \to \mathbf{R}^n$, положив $h(x) = (g^1(x), \ldots, g^{n-1}(x), x^n)$. Тогда $h'(a) = I$. Следовательно, в некотором открытом множестве U', таком, что $a \in U' \subset A$, функция h взаимно однозначна и $\det h'(x) \neq 0$. Определим теперь $k\colon h(U') \to \mathbf{R}^n$, положив $k(x) = (x^1, \ldots, x^{n-1}, g^n(h^{-1}(x)))$. Тогда $g = k \circ h$ и g представлено в виде композиции двух отображений, каждое из которых изменяет меньше чем n координат (рис. 3.3).

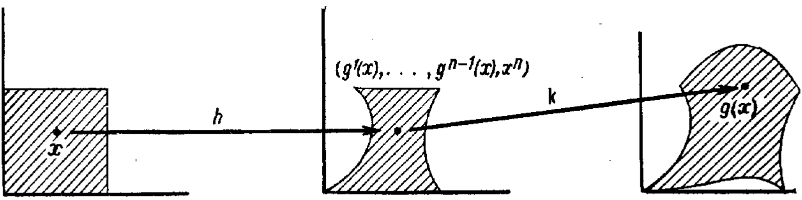


Рис. 3.3.

Остается позаботиться о некоторых деталях, которые обеспечат, чтобы k была функцией нужного вида. Так как $(g^n \circ h^{-1})'(h(a)) = (g^n)'(a) \cdot [h'(a)]^{-1} = (g^n)'(a)$, то $D_n(g^n \circ h^{-1})(h(a)) = D_n g^n(a) = 1$, так что $k'(h(a)) = I$. Поэтому в некотором открытом множестве V, таком, что $h(a) \in V \subset h(U')$, функция k взаимно однозначна и $\det k'(x) \neq 0$. Полагая $U = h^{-1}(V)$, имеем теперь $g = k \circ h$, где $h\colon U \to \mathbf{R}^n$, $k\colon V \to \mathbf{R}^n$ и $h(U) \subset V$. Согласно (3), достаточно доказать теорему для h и k. Мы дадим доказательство для h; доказательство для k аналогично, но легче.

Пусть $W \subset U$ — параллелепипед вида $D \times [a_n, b_n]$, где D — параллелепипед в $\mathbf{R}^{n-1}$. По теореме Фубини

$$\int\limits_{h(W)} 1 = \int\limits_{[a_n,\, b_n]} \left(\int\limits_{h_{x^n}(D)} 1\, dx^1 \ldots dx^{n-1} \right) dx^n.$$

где h_{x^n}: $D \to \mathbf{R}^{n-1}$ — функция, определенная равенством

$$h_{x^n}(x^1, \ldots, x^{n-1}) = (g^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots \\ \ldots, g^{n-1}(x^1, \ldots, x^n)).$$

Очевидно, h_{x^n} для каждого x^n взаимно однозначна и

$$\det(h_{x^n})'(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \det h'(x^1, \ldots, x^n) \neq 0.$$

Поэтому применение теоремы для случая $n - 1$ дает

$$\int\limits_{h(W)} 1 = \int\limits_{[a_n, b_n]} \left(\int\limits_{h_{x^n}(D)} 1\, dx^1 \ldots dx^{n-1} \right) dx^n =$$

$$= \int\limits_{[a_n, b_n]} \left(\int\limits_{D} |\det(h_{x^n})'(x^1, \ldots, x^{n-1})|\, dx^1 \ldots dx^{n-1} \right) dx^n =$$

$$= \int\limits_{[a_n, b_n]} \left(\int\limits_{D} |\det h'(x^1, \ldots, x^n)|\, dx^1 \ldots dx^{n-1} \right) dx^n =$$

$$= \int\limits_{W} |\det h'|. \ \blacksquare$$

Условие $\det g'(x) \neq 0$ можно исключить из предположений теоремы 3.13, если воспользоваться следующей теоремой, часто играющей непредвиденную роль.

3.14. Теорема Сарда. *Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество, g: $A \to \mathbf{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция и $B = \{x \in A$: $\det g'(x) = 0\}$. Тогда $g(B)$ имеет меру* 0.

Доказательство. Пусть $U \subset A$ — замкнутый параллелепипед, все ребра которого имеют одинаковую длину, скажем l, и $\varepsilon > 0$. Если N достаточно велико и U разбит на N^n параллелепипедов с ребрами длины l/N, то для каждого из этих параллелепипедов S и каждого $x \in S$ имеем

$$|Dg(x)(y - x) - g(y) - g(x)| < \varepsilon |x - y| \leqslant \varepsilon \sqrt{n} \frac{l}{N}$$

для всех $y \in S$. Если S пересекается с B, то можно выбрать $x \in S \cap B$; поскольку $\det g'(x) = 0$, множество $\{Dg(x)(y - x)$: $y \in S\}$ лежит в некотором $(n - 1)$-мерном подпространстве V пространства $\mathbf{R}^n$. Поэтому множество

$\{g(y)-g(x)\colon y\in S\}$ содержится в $\varepsilon\sqrt{n}\,l/N$-окрестности этого подпространства[1] V и, значит, $\{g(y)\colon y\in S\}$ содержится в $\varepsilon\sqrt{n}\,(l/N)$-окрестности $(n-1)$-мерной плоскости $V+g(x)$. С другой стороны, в силу леммы 2.10 существует такое число M, что

$$|g(x)-g(y)|<M|x-y|\leqslant M\sqrt{n}\,\frac{l}{N}.$$

Таким образом, если S пересекается с B, то множество $\{g(y)\colon y\in S\}$ содержится в цилиндре, высота которого меньше, чем $2\varepsilon\sqrt{n}\,(l/N)$, а основанием служит $(n-1)$-мерная сфера радиуса меньше $M\sqrt{n}\,l/N$. Объем этого цилиндра меньше $C(l/N)^n\varepsilon$, где C — некоторая константа. Но существует не более N^n таких параллелепипедов S. Поэтому $g(U\cap B)$ содержится в множестве объема, меньшего, чем $C(l/N)^n\varepsilon N^n=Cl^n\varepsilon$. Поскольку это верно для всех $\varepsilon>0$, множество $g(U\cap B)$ имеет меру 0. Так как (задача 3.13) A можно покрыть последовательностью таких параллелепипедов U, то требуемый результат следует из теоремы 3.4. ▮

Теорема 3.13 является в действительности лишь самой простой частью теоремы Сарда. Формулировку и доказательство полного более глубокого результата можно найти в [12, стр. 47].

Задачи

3.39. Используя теорему 3.14, доказать теорему 3.13 без предположения, что $\det g'(x)\neq 0$.

3.40. Пусть $g\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ и $g'(x)\neq 0$. Доказать, что в некотором открытом множестве, содержащем x, имеет место равенство $g=T\circ g_n\circ\ldots\circ g_1$, где g_i имеют вид $g_i(x)=(x^1,\ldots,f_i(x),\ldots,x^n)$, а T — линейное отображение. Показать, что $g=g_n\circ\ldots\circ g_1$ тогда и только тогда, когда $g'(x)$ — диагональная матрица.

3.41. Определим $f\colon \{r\colon r>0\}\times(0,2\pi)\to\mathbf{R}^2$ равенством $f(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

а) Показать, что f взаимно однозначно, вычислить $f'(r,\theta)$ и показать, что $\det f'(r,\theta)\neq 0$ для всех (r,θ). Показать, что $f(\{r\colon r>0\}\times(0,2\pi))$ есть множество A из задачи 2.23.

---

[1] Под ρ-окрестностью множества $G\subset R^n$ понимается множество $\{y\in R^n\colon |y-x|<\rho$ для некоторого $x\in G\}$. — *Прим. перев.*

б) Пусть $P = f^{-1}$. Показать, что $P(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$, где

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0, \\ \dfrac{3}{2}\pi, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Найти $P'(x, y)$. Функция P называется *системой полярных координат* на A.

в) Пусть $C \subset A$ — область, заключенная между окружностями радиусов r_1 и r_2 и лучами, исходящими из нуля и образующими с осью x углы θ_1 и θ_2. Показать, что если $h \colon A \to \mathbf{R}$, где $h(x, y) = g(r(x, y), \theta(x, y))$, то

$$\int_C h = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r g(r, \theta)\, d\theta\, dr.$$

Показать, что если $B_r = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$, то

$$\int_{B_r} h = \int_0^r \int_0^{2\pi} r g(r, \theta)\, d\theta\, dr.$$

г) Пусть $C_r = [-r, r] \times [-r, r]$. Показать, что

$$\int_{B_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \pi\left(1 - e^{-r^2}\right)$$

и

$$\int_{C_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

Доказать, что

$$\lim_{r \to \infty} \int_{B_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{r \to \infty} \int_{C_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

и вывести отсюда, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

(„Математик — это тот, для кого справедливость этого равенства так же очевидна, как дважды два — четыре“. — *Кельвин.*)

4

Интегрирование по цепям

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ

Пусть V — векторное пространство (над $\mathbf{R}$). Через V^k будет обозначаться k-кратное произведение $V \times \ldots \times V$. Функция $T\colon V^k \to \mathbf{R}$ называется *полилинейной*, если для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, имеем

$$T(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_k) = \\ = T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k),$$
$$T(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) = aT(v_1, \ldots vi, \ldots, v_k).$$

Полилинейная функция $T\colon V^k \to \mathbf{R}$ называется *k-тензором* на V, а множество всех k-тензоров, обозначаемое $\mathcal{J}^k(V)$, становится векторным пространством (над $\mathbf{R}$), если для каждой пары S, $T \in \mathcal{J}^k(V)$ и каждого $a \in \mathbf{R}$ положить

$$(S+T)(v_1, \ldots, v_k) = S(v_1, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_k),$$
$$(aS)(v_1, \ldots, v_k) = aS(v_1, \ldots, v_k).$$

Существует также операция, связывающая различные пространства $\mathcal{J}^k(V)$. А именно, пусть $S \in \mathcal{J}^k(V)$ и $T \in \mathcal{J}^l(V)$; *тензорное произведение* $S \otimes T \in \mathcal{J}^{k+l}(V)$ определяется формулой

$$S \otimes T(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \\ = S(v_1, \ldots, v_k)\, T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

Заметим, что порядок сомножителей S и T здесь существен, поскольку $S \otimes T$ и $T \otimes S$ отнюдь не равны. Доказательства следующих свойств операции $\otimes$ предоставляем читателю в качестве легких упражнений:

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T,$$
$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2,$$
$$(aS) \otimes T = S \otimes (aT) = a(S \otimes T),$$
$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U).$$

$(S\otimes T)\otimes U$ и $S\otimes(T\otimes U)$ обозначают обычно просто $S\otimes T\otimes U$; аналогично определяются произведения высших порядков $T_1\otimes\ldots\otimes T_k$.

Читатель, вероятно, уже заметил, что $\mathcal{J}^1(V)$ есть просто сопряженное пространство V^*. Операция $\otimes$ позволяет представить остальные векторные пространства $\mathcal{J}^k(V)$ через $\mathcal{J}^1(V)$.

4.1. Теорема. *Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис пространства V и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — дуальный базис сопряженного пространства, $\varphi_i(v_j)=\delta_{ij}$. Тогда множество всех тензорных произведений k-го порядка*

$$\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}\quad(1\leqslant i_1, \ldots, i_k\leqslant n)$$

является базисом пространства $\mathcal{J}^k(V)$, которое в силу этого имеет размерность n^k.

Доказательство. Заметим, что

$$\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})=\delta_{i_1,j_1}\cdot\ldots\cdot\delta_{i_k,j_k}=$$
$$=\begin{cases}1, \text{ если } j_1=i_1, \ldots, j_k=i_k,\\ 0 \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Если дано k векторов $w_1, \ldots, w_k$, где $w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j$, то для любого $T\in\mathcal{J}^k(V)$ имеем

$$T(w_1, \ldots, w_k)=\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n}a_{1j_1}\ldots a_{kj_k}T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})=$$
$$=\sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n}T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}(w_1, \ldots, w_k).$$

Следовательно,

$$T=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k},$$

так что $\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}$ порождают $\mathcal{J}^k(V)$.

Предположим теперь, что $a_{i_1,\ldots,i_k}$ — числа, для которых

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}a_{i_1,\ldots,i_k}\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}=0.$$

Применение обеих частей этого равенства к $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$ дает $a_{j_1, \ldots, j_k} = 0$. Таким образом, произведения $\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}$ линейно независимы. ▮

На тензоры можно распространить также важную конструкцию, хорошо известную в случае сопряженных пространств. Именно, всяким линейным отображением $f: V \to W$ определяется линейное отображение $f^*: \mathcal{J}^k(W) \to \mathcal{J}^k(V)$, действующее по формуле

$$f^*T(v_1, \ldots, v_k) = T(f(v_1), \ldots, f(v_k))$$

для любых $T \in \mathcal{J}^k(W)$ и $v_1, \ldots, v_k \in V$. Легко проверить, что $f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T$.

Читатель уже знаком с некоторыми тензорами, помимо элементов из V^*. Первый пример — внутреннее произведение $\langle\, ,\rangle \in \mathcal{J}^2(\mathbf{R}^n)$. Основываясь на том, что всякий хороший предмет математического обихода заслуживает обобщения, мы определяем *внутреннее произведение* на V как 2-тензор T, который *симметричен*, т. е. $T(v, w) = T(w, v)$ для всех $v, w \in V$, и *положительно определен*, т. е. $T(v, v) > 0$ для всех $v \neq 0$. Чтобы выделить $\langle\, ,\rangle$ мы называем его *стандартным внутренним произведением на* $\mathbf{R}^n$. Следующая теорема показывает, что это — не слишком далеко идущее обобщение.

4.2. Теорема. *Если T — внутреннее произведение на V, то V обладает базисом $v_1, \ldots, v_n$, для которого $T(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. (Такой базис называется ортонормальным относительно T.) Следовательно, существует такой изоморфизм $f: \mathbf{R}^n \to V$, что $T(f(x), f(y)) = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in \mathbf{R}^n$. Другими словами, $f^*T = \langle\, ,\rangle$.*

Доказательство. Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — произвольный базис пространства V. Положим

$$w_1' = w_1,$$

$$w_2' = w_2 - \frac{T(w_1', w_2)}{T(w_1', w_1')} w_1',$$

$$w_3' = w_3 - \frac{T(w_1', w_3)}{T(w_1', w_1')} w_1' - \frac{T(w_2', w_3)}{T(w_2', w_2')} w_2'$$

и т. д. Легко проверить, что $T(w'_i, w'_j) = 0$, если $j \neq i$ и $w'_i \neq 0$, так что $T(w'_i, w'_i) > 0$. Полагаем теперь $v_i = w'_i / \sqrt{T(w'_i, w'_i)}$. Изоморфизм f может быть определен равенствами $f(e_i) = v_i$. ∎

Несмотря на свою важность, внутреннее произведение играет значительно меньшую роль, чем другая хорошо известная чуть ли не вездесущая функция, тензор $\det \in \mathcal{J}^n(\mathbf{R}^n)$. Имея в виду обобщение этой функции, вспомним, что перестановка двух строк матрицы меняет знак ее определителя. Этим подсказывается следующее определение: k-тензор $\omega \in \mathcal{J}^k(V)$ называется ***антисимметрическим***, если

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

для всех $v_1, \ldots, v_k \in V$. (В этом равенстве v_i и v_j меняются местами, все же остальные v остаются на своем месте.) Множество $\Lambda^k(V)$ всех антисимметрических k-тензоров является, очевидно, подпространством в $\mathcal{J}^k(V)$. Поскольку составление определителя требует значительной работы, нет ничего удивительного в том, что антисимметрические тензоры трудно выписывать. Существует, однако, единообразный способ записи каждого из них. Напомним, что подстановке σ приписывается знак $+1$, если она четная, и -1, если она нечетная; знак этот обозначается символом $\operatorname{sgn}\sigma$. Пусть $T \in \mathcal{J}^k(V)$. Определим $\operatorname{Alt}(T)$ равенством[1])

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma\, T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}),$$

где S_k — множество всевозможных подстановок чисел $1, 2, \ldots, k$.

4.3. Теорема.

1) *Если* $T \in \mathcal{J}^k(V)$, *то* $\operatorname{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$.

2) *Если* $\omega \in \Lambda^k(V)$, *то* $\operatorname{Alt}(\omega) = \omega$.

3) $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(T)) = \operatorname{Alt}(T)$.

---

[1]) Alt — сокращение от alternation (чередование). — *Прим. перев.*

Доказательство. (1) Пусть (i, j) — подстановка, меняющая местами числа i и j и оставляющая все остальные на месте. Пусть $\sigma \in S_k$. Положим $\sigma' = \sigma \cdot (i, j)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma T (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(j)}, \ldots, v_{\sigma(i)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma T (v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(i)}, \ldots, v_{\sigma'(j)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} -\operatorname{sgn} \sigma' T (v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) = \\
&= -\operatorname{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

(2) Если $\omega \in \Lambda^k(V)$ и $\sigma = (i, j)$, то $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k)$. Так как всякая подстановка есть произведение подстановок вида (i, j), то это равенство верно для всех σ. Поэтому

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

(3) Непосредственно следует из (1) и (2). ∎

Для нахождения размерности $\Lambda^k(V)$ была бы желательна теорема, аналогичная теореме 4.1. Конечно, если $\omega \in \Lambda^k(V)$ и $\eta \in \Lambda^l(V)$, то $\omega \otimes \eta$ обычно не принадлежит $\Lambda^{k+l}(V)$. Мы определим поэтому новую операцию, *внешнее произведение* $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$, полагая

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

(Причина введения такого странного коэффициента выяснится позже.) Оставим в качестве упражнения читателю проверку следующих свойств внешнего произведения:

$$\begin{gathered}
(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, \\
\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2, \\
(a\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (a\eta) = a(\omega \wedge \eta), \\
\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega, \qquad f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta).
\end{gathered}$$

Справедливо также равенство $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$, но доказательство его требует бо́льших усилий.

4.4. Теорема.

1) *Если* $S \in \mathcal{J}^k(V)$, $T \in \mathcal{J}^l(V)$ *и* $\operatorname{Alt}(S) = 0$, *то* $\operatorname{Alt}(S \otimes T) = \operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$.

2) $$\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \\ = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \operatorname{Alt}(\eta \otimes \theta)).$$

3) *Если* $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ *и* $\theta \in \Lambda^m(V)$, *то*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!\, l!\, m!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Доказательство.

(1) $$\operatorname{Alt}(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \\ = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Пусть $G \subset S_{k+l}$ состоит из всех подстановок σ, оставляющих на месте числа $k+1, \ldots, k+l$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in G} \operatorname{sgn} \sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) = \\ = \left[\sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot S(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(k)})\right] \cdot \\ \cdot T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = 0.$$

Пусть теперь $\sigma_0 \notin G$. Положим $G\sigma_0 = \{\sigma\sigma_0 \colon \sigma \in G\}$ и $v_{\sigma_0(1)}, \ldots, v_{\sigma_0(k+l)} = w_1, \ldots, w_{k+l}$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in G\sigma_0} \operatorname{sgn} \sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\, T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) = \\ = \left[\operatorname{sgn} \sigma_0 \cdot \sum_{\sigma' \in G} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot S(w_{\sigma'(1)}, \ldots, w_{\sigma'(k)})\right] \cdot \\ \cdot T(w_{k+1}, \ldots, w_{k+l}) = 0.$$

Заметим теперь, что $G \cap G\sigma_0 = \varnothing$. В самом деле, если $\sigma \in G \cap G\sigma_0$, то $\sigma = \sigma' \cdot \sigma_0$ для некоторого $\sigma' \in G$ и потому $\sigma_0 = \sigma(\sigma')^{-1} \in G$ вопреки предположению. Продолжая так дальше, мы разобьем S_{k+l} на попарно непересекающиеся подмножества, сумма по каждому из которых равна нулю, так что и суммой по всему S_{k+l} будет 0. Равенство $\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$ доказывается аналогично.

(2) Имеем

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta) - \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta) = 0.$$

Следовательно, в силу (1)

$$0 = \mathrm{Alt}(\omega \otimes [\mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta]) = \\ = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta)) - \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

(3) $$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!} \mathrm{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) = \\ = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!} \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Второе равенство доказывается аналогично. ∎

Естественно обозначить оба произведения $\omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ и $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta$ просто $\omega \wedge \eta \wedge \theta$ и определить произведения высших порядков $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_r$ аналогичным образом. Взяв теперь какой-либо базис $v_1, \ldots, v_n$ пространства V, можно весьма просто построить по дуальному базису $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ базис для $\Lambda^k(V)$.

4.5. Теорема. *Множество всех*

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$$

является базисом пространства $\Lambda^k(V)$, *которое в силу этого имеет размерность*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Доказательство. Если $\omega \in \Lambda^k(V) \subset \mathcal{J}^k(V)$, то можно написать

$$\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}.$$

Поэтому

$$\omega = \mathrm{Alt}(\omega) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}).$$

Так как каждое $\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k})$ отличается от соответствующего внешнего произведения $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ лишь постоянным множителем, то эти произведения порождают $\Lambda^k(V)$. Их линейная независимость доказывается как в теореме 4.1 (см. задачу 4.1)[1]. ∎

Из теоремы 4.5 следует, что если V имеет размерность n, то $\Lambda^n(V)$ имеет размерность 1. Таким образом, все антисимметрические n-тензоры на V являются кратными любого ненулевого из них. Так как примером такого тензора служит определитель, то неудивительно появление его в следующей теореме.

4.6. Теорема. *Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис пространства V и $\omega \in \Lambda^n(V)$. Для любых n векторов $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j$ из V имеем*

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n).$$

Доказательство. Пусть $\eta \in \mathcal{J}^n(\mathbf{R}^n)$ определено равенством

$$\eta((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})) = \\ = \omega\left(\sum a_{1j}v_j, \ldots, \sum a_{nj}v_j\right)$$

Очевидно, $\eta \in \Lambda^n(\mathbf{R}^n)$, так что $\eta = \lambda \cdot \det$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\lambda = \eta(e_1, \ldots, e_n) = \omega(v_1, \ldots, v_n)$. ∎

Теорема 4.6 показывает, что ненулевой тензор $\omega \in \Lambda^n(V)$ разбивает базисы пространства V на две группы: тех базисов $v_1, \ldots, v_n$, для которых $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$, и тех, для которых $\omega(v_1, \ldots, v_n) < 0$. Если $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_n$ — два базиса и $A = (a_{ij})$ — матрица перехода $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j$,

---

[1]) Как показывает условие $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, в теореме 4.5 предполагается, что $k \leqslant n$. Однако из доказательства теоремы видно также, что если $k > n$, то $\Lambda^k(V) = \{0\}$. В самом деле, при перестановке множителей φ_{i_p} и φ_{i_q} произведение $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ умножается на -1. Но если $k > n$, то, поскольку $i_1, \ldots, i_k$ — натуральные числа, не превосходящие n, найдутся неравные индексы p и q, для которых $i_p = i_q$. Поэтому $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ всегда равно 0. — *Прим. ред.*

то $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_n$ принадлежат одной и той же группе тогда и только тогда, когда $\det A > 0$. Этот критерий, не зависящий от ω, всегда можно использовать для разбиения базисов пространства V на две группы. Каждая из этих двух групп называется *ориентацией* пространства V. Ориентация, содержащая базис $v_1, \ldots, v_n$, будет обозначаться символом $[v_1, \ldots, v_n]$, а вторая ориентация — символом — $[v_1, \ldots, v_n]$. *Стандартной ориентацией* пространства $\mathbf{R}^n$ будет называться $[e_1, \ldots, e_n]$.

Тот факт, что $\dim \Lambda^n(\mathbf{R}^n) = 1$, вероятно, не покажется новым, поскольку $\det$ часто определяется как единственный элемент $\omega \in \Lambda^n(\mathbf{R}^n)$, для которого $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$. В случае общего векторного пространства V нет никакого критерия подобного рода для выделения особого $\omega \in \Lambda^n(V)$. Предположим, однако, что на V задано внутреннее произведение T. Если $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_n$ — два базиса, ортонормальные относительно T, и $A = (a_{ij})$ — матрица перехода $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, то

$$\delta_{ij} = T(w_i, w_j) = \sum_{k, l=1}^{n} a_{ik} a_{jl} T(v_k, v_l) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}.$$

Другими словами, обозначая через A^T матрицу, транспонированную к A, имеем $A \cdot A^T = I$, так что $\det A = \pm 1$. Из теоремы 4.6 следует, что если $\omega \in \Lambda^n(V)$ таково, что $\omega(v_1, \ldots, v_n) = \pm 1$, то и $\omega(w_1, \ldots, w_n) = \pm 1$. Если на V задана еще ориентация μ, то отсюда следует, что существует единственное $\omega \in \Lambda^n(V)$ такое, что $w(v_1, \ldots, v_n) = 1$ для всякого ортонормального базиса $v_1, \ldots, v_n$, у которого $[v_1, \ldots, v_n] = \mu$. Это единственное ω называется *элементом объема* пространства V, определяемым внутренним произведением T и ориентацией μ. Заметим, что $\det$ есть элемент объема пространства $\mathbf{R}^n$, определяемый стандартным внутренним произведением T и стандартной ориентацией μ, и что $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$ есть объем параллелепипеда, натянутого на прямолинейные отрезки, соединяющие 0 с каждой из точек $v_1, \ldots, v_n$.

Мы заключим этот параграф рассмотрением одной конструкции, которое мы проведем лишь для $V = \mathbf{R}^n$.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ и φ определено равенством

$$\varphi(w) = \det \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \\ w \end{bmatrix}.$$

Так как $\varphi \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$, то существует единственное $z \in \mathbf{R}^n$, такое, что

$$\langle w, z \rangle = \varphi(w) = \det \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \\ w \end{bmatrix}.$$

Это z обозначается символом $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ и называется *векторным произведением* векторов $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Из этого определения непосредственно вытекают следующие свойства векторного произведения:

$$v_{\sigma(1)} \times \ldots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot v_{\sigma(1)} \times \ldots \times v_{\sigma(n-1)},$$
$$v_1 \times \ldots \times a v_i \times \ldots \times v_{n-1} = a(v_1 \times \ldots \times v_{n-1}),$$
$$v_1 \times \ldots \times (v_i + v_i') \times \ldots \times v_{n-1} = v_1 \times \ldots \times v_i \times \ldots$$
$$\ldots \times v_{n-1} + v_1 \times \ldots \times v_i' \times \ldots \times v_{n-1}.$$

В математике редко имеют дело с „произведениями", зависящими более чем от двух „сомножителей". В случае двух векторов $v, w \in \mathbf{R}^3$ получаем более привычно выглядящее обычное произведение $v \times w \in \mathbf{R}^3$. По этой причине часто утверждают, что векторное произведение может быть определено только в $\mathbf{R}^3$.

Задачи

4.1*. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbf{R}^n$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — дуальный базис.

а) Показать, что $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 1$. Какой была бы правая часть, если бы в определение $\wedge$ не входил множитель $\dfrac{(k+l)!}{k!\,l!}$?

б) Показать, что $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(v_1, \ldots, v_k)$ есть минор матрицы $\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_k \end{pmatrix}$, получающийся при оставлении столбцов с индексами $i_1, \ldots, i_k$.

4.2. Пусть $f\colon V \to V$ — линейное отображение и $\dim V = n$. Тогда $f^*\colon \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$ должно быть умножением на некоторую константу c. Показать, что $c = \det f$.

4.3. Показать, что если $\omega \in \Lambda^n(V)$ — элемент объема, определяемый T и μ, и $w_1, \ldots, w_n \in V$, то

$$|\omega(w_1, \ldots, w_n)| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

где $g_{ij} = T(w_i, w_j)$. (Указание: показать, что если $v_1, \ldots, v_n$ — ортонормальный базис и $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, то $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.)

4.4. Пусть ω — элемент объема в V, определяемый T и μ, и $f\colon \mathbf{R}^n \to V$ — изоморфизм, для которого $f^*T = \langle\ ,\ \rangle$ и $[f(e_1), \ldots, f(e_n)] = \mu$. Показать, что $f^*\omega = \det$.

4.5. Показать, что если $c\colon [0, 1] \to (\mathbf{R}^n)^n$ непрерывно и каждое $(c^1(t), \ldots, c^n(t))$ есть базис в $\mathbf{R}^n$, то $[c^1(0), \ldots, c^n(0)] = [c^1(1), \ldots, c^n(1)]$. (Указание: рассмотреть $\det \circ c$.)

4.6. а) Что означает $v \times$, если $v \in \mathbf{R}^2$?

б) Показать, что если $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ линейно независимы, то $[v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \times \ldots \times v_{n-1}]$ есть стандартная ориентация в $\mathbf{R}^n$.

4.7. Показать, что всякое ненулевое $\omega \in \Lambda^n(V)$ является элементом объема, определяемым некоторым внутренним произведением T и ориентацией μ.

4.8. Пусть $\omega \in \Lambda^n(V)$ — элемент объема. Выразить векторное произведение $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ через ω.

4.9*. Вывести следующие свойства векторного произведения в $\mathbf{R}^3$:

а) $e_1 \times e_1 = 0, \quad e_2 \times e_1 = -e_3, \quad e_3 \times e_1 = e_2,$
$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_2 = 0, \quad e_3 \times e_2 = -e_1,$
$e_1 \times e_3 = -e_2, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_3 = 0.$

б) $v \times w = (v^2w^3 - v^3w^2)\,e_1 + (v^3w^1 - v^1w^3)\,e_2 + (v^1w^2 - v^2w^1)\,e_3.$

в) $|v \times w| = |v|\,|w| \sin\theta$, где $\theta = \angle(v, w)$,
$\langle v \times w, v\rangle = \langle v \times w, w\rangle = 0.$

г) $\langle v, w \times z\rangle = \langle w, z \times v\rangle = \langle z, v \times w\rangle$,
$v \times (w \times z) = \langle v, z\rangle w - \langle v, w\rangle z$,
$(v \times w) \times z = \langle v, z\rangle w - \langle w, z\rangle v$.

д) $|v \times w| = \sqrt{\langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$.

4.10. Пусть $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Показать, что

$$|w_1 \times \ldots \times w_{n-1}| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

где $g_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle$. (Указание: применить задачу 4.3 к надлежаще выбранному $(n-1)$-мерному подпространству в $\mathbf{R}^n$.)

4.11. Пусть T — внутреннее произведение на V. Линейное отображение $f: V \to V$ называется *самосопряженным* (относительно T), если $T(x, f(y)) = T(f(x), y)$ для всех $x, y \in V$. Показать, что если $A = (a_{ij})$ — матрица T относительно ортонормального базиса $v_1, \ldots, v_n$, то $a_{ij} = a_{ji}$.

4.12. Пусть $f_1, \ldots, f_{n-1}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. Определим $f_1 \times \ldots \times f_{n-1}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ формулой $f_1 \times \ldots \times f_{n-1}(p) = f_1(p) \times \ldots \times f_{n-1}(p)$. Используя задачу 2.14, вывести формулу для $D(f_1 \times \ldots \times f_{n-1})$.

ПОЛЯ И ФОРМЫ

Пусть $p \in \mathbf{R}^n$. Множество всех пар (p, v), где v пробегает $\mathbf{R}^n$, будет обозначаться $\mathbf{R}^n_p$ и называться *касательным пространством* к $\mathbf{R}^n$ в точке p. Это множество можно очевидным образом превратить в векторное пространство, положив

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w),$$
$$a(p, v) = (p, av).$$

Вектор $v \in \mathbf{R}^n$ часто изображают в виде стрелки с началом 0 и концом v; вектор $(p, v) \in \mathbf{R}^n_p$ можно изображать (рис. 4.1) в виде стрелки с теми же направлением и длиной, но с начальной точкой p. Эта стрелка идет от p до $p + v$, и мы поэтому будем называть точку $p + v$ концом вектора (p, v). Вместо (p, v) мы будем обычно писать v_p (читается: вектор v, приложенный в p).

Векторное пространство $\mathbf{R}^n_p$ находится в столь близком родстве с $\mathbf{R}^n$, что многие структуры в $\mathbf{R}^n$ имеют аналоги в $\mathbf{R}^n_p$. В частности, стандартное *внутреннее произведение* $\langle\ ,\ \rangle_p$ на $\mathbf{R}^n_p$ определяется равенством $\langle v_p, w_p\rangle_p = \langle v, w\rangle$, и за *стандартную ориентацию* на $\mathbf{R}^n_p$ принимается $[(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p]$.

Любая операция, возможная в векторном пространстве, может быть произведена в каждом $\mathbf{R}^n_p$, и бо́льшая часть этого параграфа представляет собой просто разработку

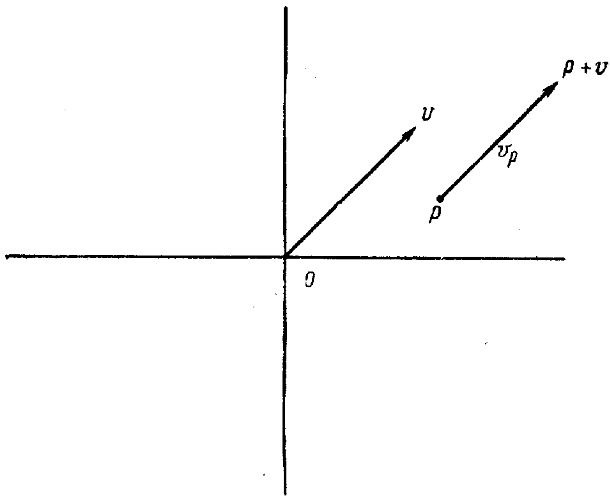


Рис. 4.1.

этой темы. Пожалуй, простейшей операцией в векторном пространстве является выбор в нем вектора. Если такой выбор произведен в каждом $\mathbf{R}^n_p$, то получаем *векторное поле* (рис. 4.2). Говоря более точно, векторное поле—это функция F, относящая каждому $p \in \mathbf{R}^n$ вектор $F(p) \in \mathbf{R}^n_p$. Для каждого p существуют тогда такие числа $F^1(p), \ldots$ $\ldots, F^n(p)$, что

$$F(p) = F^1(p) \cdot (e_1)_p + \ldots + F^n(p) \cdot (e_n)_p.$$

Таким образом мы получаем *n координатных функций* F^i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Векторное поле F называется непрерывным, дифференцируемым и т. д., если таковы функции F^i. Аналогичные определения могут быть даны для векторных полей, определенных на открытых подмножествах из $\mathbf{R}^n$. Операции над векторами порождают соответствующие операции над векторными полями, производимые

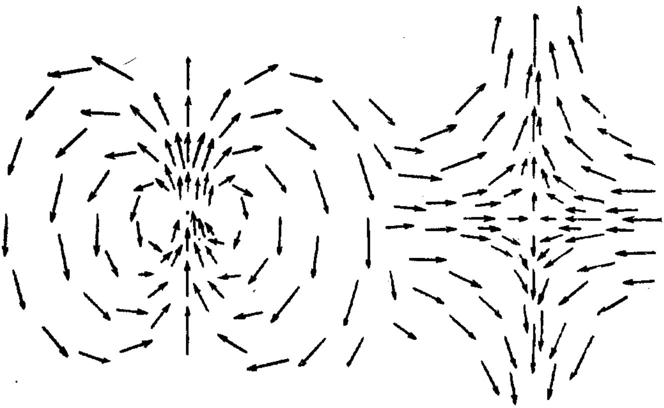


Рис. 4.2.

поточечно. Например, если F и G — векторные поля и f — функция, то полагаем по определению

$$(F+G)(p)=F(p)+G(p),$$
$$\langle F, G\rangle(p)=\langle F(p), G(p)\rangle,$$
$$(f\cdot F)(p)=f(p)F(p).$$

Если $F_1, \ldots, F_{n-1}$ — векторные поля на $\mathbf{R}^n$, то можно аналогичным образом положить по определению

$$(F_1\times \ldots \times F_{n-1})(p)=F_1(p)\times \ldots \times F_{n-1}(p).$$

Приведем еще несколько полезных стандартных определений. *Дивергенцией* $\operatorname{div} F$ поля F называют $\sum\limits_{i=1}^{n} D_i F^i$. Введя формальный символ

$$\nabla=\sum_{i=1}^{n} D_i e_i,$$

можно написать символически $\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle$. При $n=3$ пишем в соответствии с этой символикой

$$\begin{aligned}(\nabla \times F)(p) = {} & (D_2F^3 - D_3F^2)(e_1)_p + \\ & + (D_3F^1 - D_1F^3)(e_2)_p + \\ & + (D_1F^2 - D_2F^1)(e_3)_p.\end{aligned}$$

Векторное поле $\nabla \times F$ называется *вихрем* (или *ротором*) поля F и обозначается $\operatorname{curl} F$. Названия „дивергенция" и „вихрь" получены из физических соображений, которые будут указаны в конце книги.

Многие аналогичные рассмотрения могут быть применены к функции ω, относящей каждой точке $p \in \mathbf{R}^n$ тензор $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n_p)$; такая функция называется *формой k-й степени* на $\mathbf{R}^n$ или просто *дифференциальной формой*. Обозначая через $\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p)$ базис, дуальный к $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$, имеем

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(p) \left[\varphi_{i_1}(p) \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(p)\right],$$

где $\omega_{i_1, \ldots, i_k}$ — некоторые функции. Форма ω называется непрерывной, дифференцируемой и т. д., если таковы все функции $\omega_{i_1, \ldots, i_k}$. Формы и векторные поля обычно будут неявно предполагаться дифференцируемыми, а под дифференцируемостью с этого момента будет подразумеваться принадлежность классу C^∞; это упрощающее предположение избавит нас от необходимости подсчитывать, сколько раз в процессе доказательства продифференцирована та или иная функция. Определения суммы $\omega + \eta$, произведения $f\omega$ и внешнего произведения $\omega \wedge \eta$ очевидны. Скалярная функция f рассматривается как форма нулевой степени, и $f\omega$ записывается также в виде $f \wedge \omega$.

Если $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема, то $Df(p) \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$. Небольшая модификация приводит тогда к форме первой степени df, определяемой равенством

$$df(p)(v_p) = Df(p)(v).$$

Рассмотрим, в частности, формы первой степени $d\pi^i$. Вошло в обычай пользоваться для функции π^i обозначением x^i (в случае $\mathbf{R}^3$ вместо x^1, x^2 и x^3 часто пишут x, y и z). Эта стандартная запись имеет очевидные недостатки, но она позволяет выражать многие классические результаты формулами столь же классического вида. Так как $dx^i(p)(v_p) = d\pi^i(p)(v_p) = D\pi^i(p)(v) = \pi^i(v) = v^i$, то мы видим, что $dx^1(p), \ldots, dx^n(p)$ есть не что иное, как базис, дуальный к $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$. Таким образом, всякую форму k-й степени ω можно записать в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Особый интерес представляет выражение для df.

4.7. Теорема. *Если* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *дифференцируема, то*

$$df = D_1 f \cdot dx^1 + \ldots + D_n f \cdot dx^n.$$

В классической записи:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

Доказательство. $df(p)(v_p) = Df(p)(v) =$
$$= \sum_{i=1}^{n} D_i f(p) v^i = \sum_{i=1}^{n} D_i f(p) dx^i(p)(v_p). \blacksquare$$

Пусть теперь задано дифференцируемое отображение $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Для всякого $p \in \mathbf{R}^n$ оно порождает линейное отображение $Df(p)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Вновь несколько модифицируя его, получаем линейное отображение $f_*\colon \mathbf{R}^n_p \to \mathbf{R}^m_{f(p)}$, определяемое равенством

$$f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}.$$

Это линейное отображение индуцирует линейное отображение $f^*\colon \Lambda^k(\mathbf{R}^m_{f(p)}) \to \Lambda^k(\mathbf{R}^n_p)$. Поэтому каждой форме k-й степени ω на $\mathbf{R}^m$ можно отнести форму k-й степени $f^*\omega$ на $\mathbf{R}^n$, полагая $(f^*\omega)(p) = f^*(\omega(p))$, т. е.

$$f^*\omega(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(p))(f_*(v_1), \ldots, f_*(v_k))$$

для всякого набора $v_1, \ldots, v_k \in \mathbf{R}^n_p$ [1]).

[1]) Если ω — форма нулевой степени, то под $f^*(\omega)$, естественно, понимается $\omega \circ f$. — *Прим. ред.*

В качестве противоядия к абстрактности этих определений приведем теорему, резюмирующую важные свойства отображения f^* и позволяющую в явном виде вычислять $f^*(\omega)$.

4.8. Теорема. *Если f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ дифференцируемо, то*

(1) $$f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^{n} D_j f^i \cdot dx^j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j,$$

(2) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$,

(3) $f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*(\omega)$,

(4) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$[1].

Доказательство.

(1) $f^*(dx^i)(p)(v_p) = dx^i(f(p))(f_*(v_p)) =$

$$= dx^i(f(p))(Df(p)(v))_{f(p)} =$$

$$= dx^i(f(p))\left(\sum_{j=1}^{n} D_j f^1(p) v^j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} D_j f^m(p) v^j\right)_{f(p)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} D_j f^i(p) v^j = \sum_{j=1}^{n} D_j f^i(p)\, dx^j(p)(v_p).$$

(2), (3) и (4) предоставляем доказать читателю. ∎

Повторно применяя теорему 4.8, получаем, например,

$$f^*(P\,dx^1 \wedge dx^2 + Q\,dx^2 \wedge dx^3) =$$
$$= (P \circ f)[f^*(dx^1) \wedge f^*(dx^2)] + (Q \circ f)[f^*(dx^2) \wedge f^*(dx^3)].$$

Выражение, получающееся при раскрытии каждого $f^*(dx^i)$, довольно сложно. (Полезно, однако, помнить, что $dx^i \wedge dx^i = (-1)\,dx^i \wedge dx^i = 0$.) Рассмотрим специальный случай, где стóит провести такое явное вычисление.

4.9. Теорема. *Если f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ дифференцируемо, то*

$$f^*(h\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f')\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Доказательство. Так как

$$f^*(h\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = (h \circ f)\, f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n),$$

[1]) Одним и тем же символом f^* обозначены здесь три, вообще говоря, разных отображения. — *Прим. ред.*

то достаточно показать, что

$$f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = (\det f')\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Пусть $p \in \mathbf{R}^n$ и $A = (a_{ij})$ — матрица $f'(p)$. Будем здесь и дальше, где это удобно и не может привести к путанице, опускать p в $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(p)$ и подобных выражениях. Тогда

$$\begin{aligned} f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(e_1, \ldots, e_n) &= \\ = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(f_*e_1, \ldots, f_*e_n) &= \\ = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n\left(\sum_{i=1}^n a_{1i}e_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{ni}e_i\right) &= \\ = \det(a_{ij}) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(e_1, \ldots, e_n), \end{aligned}$$

согласно теореме 4.6. ∎

Важной конструкцией, связанной с формами, является обобщение оператора d, переводящего формы нулевой степени в формы первой степени. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Определим форму $(k+1)$-й степени $d\omega$, *дифференциал* ω, равенством

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} d\omega_{i_1, \ldots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^n D_\alpha(\omega_{i_1, \ldots, i_k}) \cdot dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

4.10. Теорема.

(1) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$.

(2) *Если ω — форма k-й степени, то*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(3) $d(d\omega) = 0$. *Кратко*, $d^2 = 0$.

(4) *Если ω — форма k-й степени на* $\mathbf{R}^m$ *и* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *дифференцируемо, то* $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Доказательство.

(1) Предоставляем читателю.

(2) Формула верна для $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ и $\eta = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$, поскольку все члены обращаются в 0. Справедливость формулы легко проверяется, когда ω — форма нулевой степени. Формула для общего случая получается из (1) и этих двух утверждений.

(3) Так как

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha (\omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

то

$$d(d\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha, \beta} (\omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Но в этой сумме члены каждой пары

$$D_{\alpha, \beta} (\omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

и

$$D_{\beta, \alpha} (\omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

взаимно уничтожаются.

(4) Это очевидно, если ω — форма нулевой степени[1]. Предположим по индукции, что (4) верно, когда ω — форма k-й степени. Достаточно доказать (4) для формы $(k+1)$-й степени вида $\omega \wedge dx^i$. Имеем

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx^i)) &= f^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge d(dx^i)) = \\ &= f^*(d\omega \wedge dx^i) = f^*(d\omega) \wedge f^*(dx^i) = \\ &= d(f^*\omega \wedge f^*(dx^i)) = d(f^*(\omega \wedge dx^i)). \ \blacksquare \end{aligned}$$

---

[1]) Приведем все же доказательство. Применяя теоремы 4.7, 4.8 и 2.9, получаем

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) = f^*\left(\sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha\omega \cdot dx^\alpha\right) &= \sum_{\alpha=1}^{m} (D_\alpha\omega \circ f) f^*(dx^\alpha) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} (D_\alpha\omega \circ f) D_\beta f^\alpha \cdot dx^\beta = \\ &= \sum_{\beta=1}^{n} D_\beta(\omega \circ f) dx^\beta = d(\omega \circ f) = d(f^*\omega). \end{aligned}$$

— *Прим. ред.*

Форма называется *замкнутой*, если $d\omega=0$, и *точной*, если $\omega=d\eta$ для некоторого η. Теорема 4.10 показывает, что всякая точная форма замкнута, и естественно спросить, не будет ли, и обратно, всякая замкнутая форма точна. Если ω — форма первой степени $P\,dx+Q\,dy$ на $\mathbf{R}^2$, то

$$d\omega=(D_1P\,dx+D_2P\,dy)\wedge dx+(D_1Q\,dx+D_2Q\,dy)\wedge dy=$$
$$=(D_1Q-D_2P)\,dx\wedge dy.$$

Таким образом, если $d\omega=0$, то $D_1Q=D_2P$. Задачи 2.21 и 3.34 показывают, что на $\mathbf{R}^2$ существует такая форма нулевой степени f, что $\omega=df=D_1f\,dx+D_2f\,dy$. Однако если ω определено только на подмножестве $\mathbf{R}^2$, то такой функции может не существовать. Классическим примером является форма

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

определенная на $\mathbf{R}^2\setminus 0$. Эта форма обычно обозначается $d\theta$ (где θ определено в задаче 3.41), так как (задача 4.21) она равна $d\theta$ на области $\{(x, y)\colon x<0$ или $x\geqslant 0$ и $y\neq 0\}$ определения θ. Заметим, однако, что θ нельзя определить непрерывным образом на всем множестве $R^2\setminus 0$. Если $\omega=df$ для некоторой функции $f\colon \mathbf{R}^2\setminus 0\to\mathbf{R}$, то $D_1f=D_1\theta$ и $D_2f=D_2\theta$, так что $f=\theta+\mathrm{const}$, а это показывает, что такого f существовать не может.

Предположим, что $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\,dx^i$ — форма первой степени на $\mathbf{R}^n$, оказавшаяся равной $df=\sum\limits_{i=1}^{n}D_if\,dx^i$. Очевидно, можно считать, что $f(0)=0$. Как в задаче 2.35, имеем

$$f(x)=\int_0^1\frac{d}{dt}f(tx)\,dt=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}D_if(tx)\cdot x^i\,dt=$$
$$=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\omega_i(tx)\cdot x^i\,dt.$$

Это наводит на мысль, что для отыскания f по заданному ω следует рассмотреть функцию $I\omega$, определяемую равенством

$$I\omega(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) \cdot x^i\,dt.$$

Заметим, что для того, чтобы определение $I\omega$ имело смысл, нужно лишь, чтобы ω было определено на открытом

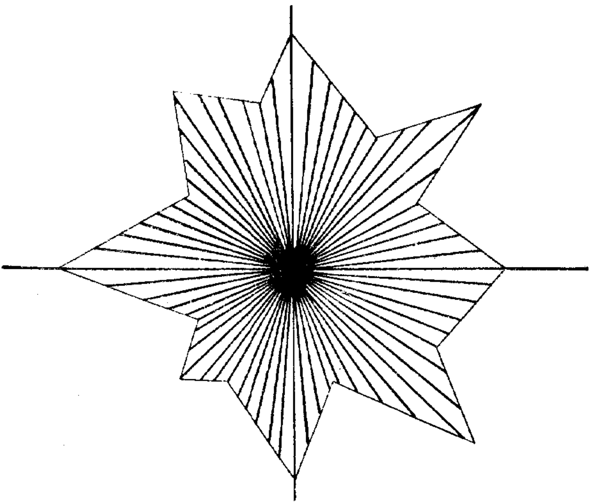


Рис. 4.3.

множестве $A \subset \mathbf{R}^n$, обладающем тем свойством, что вместе со всяким $x \in A$ весь прямолинейный отрезок, соединяющий 0 и x, содержится в A. Такое открытое множество называется *звездным* относительно 0 (рис. 4.3). Довольно сложное вычисление показывает, что (на звездном открытом множестве) равенство $\omega = d(I\omega)$ действительно имеет место, лишь бы ω удовлетворяло необходимому условию $d\omega = 0$. Это вычисление, равно как и определение $I\omega$, можно значительно обобщить.

4.11. Теорема (лемма Пуанкаре). *Всякая замкнутая форма на открытом множестве $A \subset \mathbf{R}^n$, звездном относительно* 0, *точна.*

Доказательство. Мы определим функцию I, относящую всякой форме l-й степени некоторую форму $(l-1)$-й степени (для каждого l) так, что $I(0)=0$ и $\omega = I(d\omega)+d(I\omega)$ для всякой формы ω. При $d\omega=0$ будем иметь тогда $\omega = d(I\omega)$. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_l} \omega_{i_1,\ldots,i_l} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}.$$

Так как A звездно, то можно положить

$$I\omega(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\,dt\right)x^{i_\alpha}\times$$

$$\times\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l},$$

где символ $\frown$ над dx^{i_α} означает, что dx^{i_α} нужно опустить. Тождество $\omega = I(d\omega)+d(I\omega)$ доказывается прямым вычислением. Используя задачу 3.32, имеем

$$d(I\omega) = l\cdot\sum_{i_1<\ldots<i_l}\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\,dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge dx^{i_l} +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{l}D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)\,dt\right)\times$$

$$\times\, x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}.$$

(Почему вместо t^{l-1} появилось t^l?) С другой стороны,

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{j=1}^{n} D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_l})dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}$$

и, применяя I к форме $(l+1)$-й степени $d\omega$, получаем

$$I(d\omega) = \sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^l D_j\left(\omega_{i_1,\ldots,i_l}\right)(tx)\,dt\right)x^j dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l} -$$
$$-\sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^l D_j\left(\omega_{i_1,\ldots,i_l}\right)(tx)\,dt\right)\times$$
$$\times x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}.$$

При сложении полученных выражений тройные суммы взаимно уничтожаются и мы будем иметь

$$d(I\omega)+I(d\omega)=$$
$$=\sum_{i_1<\ldots<i_l} l\cdot\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\,dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}+$$
$$+\sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^l x^j D_j\left(\omega_{i_1,\ldots,i_l}\right)(tx)dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}=$$
$$=\sum_{i_1<\ldots<i_l}\left(\int_0^1\frac{d}{dt}\left[t^l\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\right]dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}=$$
$$=\sum_{i_1<\ldots<i_l}\omega_{i_1,\ldots,i_l}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}=\omega. \blacksquare$$

Задачи

4.13. а) Пусть $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ и $g\colon \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^p$. Показать, что $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ и $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$.

б) Показать, что если $f, g\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, то $d(fg)=f\,dg+g\,df$.

4.14. Пусть c — дифференцируемая кривая в $\mathbf{R}^n$, т. е. дифференцируемая функция $c\colon [0, 1]\to\mathbf{R}^n$. Определим *касательный вектор* v к кривой c в точке t формулой $c_*((e_1)_t)=((c^1)'(t), \ldots, (c^n)'(t))_{c(t)}$. Показать, что если $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, то касательным вектором к кривой $f\circ c$ в точке t служит $f_*(v)$.

4.15. Пусть $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и кривая $c\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ определена формулой $c(t)=(t, f(t))$. Показать, что конец касательного вектора, проведенного к кривой c в точке t, лежит на касательной к графику f, проведенной в точке $(t, f(t))$.

4.16. Пусть кривая c: $[0, 1] \to \mathbf{R}^n$ такова, что $|c(t)| = 1$ для всех t. Показать, что $c(t)_{c(t)}$ и касательный вектор к c в точке t перпендикулярны.

4.17. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Определим векторное поле $\mathbf{f}$ формулой $\mathbf{f}(p) = f(p)_p \in \mathbf{R}^n_p$.

а) Показать, что любое векторное поле F на $\mathbf{R}^n$ есть поле вида $\mathbf{f}$ для некоторого f.

б) Показать, что $\operatorname{div} \mathbf{f} = \operatorname{tr} f'$ [1]).

4.18. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Определим векторное поле $\operatorname{grad} f$ формулой

$$(\operatorname{grad} f)(p) = D_1 f(p) \cdot (e_1)_p + \ldots + D_n f(p) \cdot (e_n)_p.$$

Очевидно, можно писать также $\operatorname{grad} f = \nabla f$. Полагая $\nabla f(p) = w_p$ доказать, что $D_v f(p) = \langle v, w \rangle$, и вывести отсюда, что $\nabla f(p)$ является направлением наиболее быстрого изменения функции f вблизи точки p.

4.19. Пусть F — векторное поле на $\mathbf{R}^3$. Определим формы

$$\omega^1_F = F^1\, dx + F^2\, dy + F^3\, dz,$$

$$\omega^2_F = F^1\, dy \wedge dz + F^2\, dz \wedge dx + F^3\, dx \wedge dy,$$

$$\omega^3_F = (F^1 + F^2 + F^3)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

а) Доказать, что

$$df = \omega^1_{\operatorname{grad} f},$$

$$d\left(\omega^1_F\right) = \omega^2_{\operatorname{curl} F},$$

$$d\left(\omega^2_F\right) = \omega^3_{\operatorname{div} F}.$$

б) Используя (а), доказать, что

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0.$$

в) Показать, что если F — векторное поле на звездном открытом множестве A и $\operatorname{curl} F = 0$, то $F = \operatorname{grad} f$ для некоторой функции f: $A \to \mathbf{R}$. Аналогично, в случае $\operatorname{div} F = 0$ показать, что $F = \operatorname{curl} G$ для некоторого векторного поля G на A.

4.20. Пусть f: $U \to \mathbf{R}^n$ — дифференцируемая функция, имеющая дифференцируемую обратную f^{-1}: $f(U) \to \mathbf{R}^n$. Предположим, что всякая замкнутая форма на $f(U)$ точна. Показать, что то же верно для U. (Указание: при $d\omega = 0$ и $f^*\omega = d\eta$ рассмотреть $(f^{-1})^* \eta$.)

[1]) $\operatorname{tr} f'$ — след матрицы f' — определяется как сумма всех элементов, стоящих на главной диагонали. — *Прим. перев.*

4.21*. Доказать, что

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

на всей области определения θ (задача 3.41).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИИ

Сингулярным n-мерным кубом в A называется непрерывная функция c: $[0, 1]^n \to A$ (где $[0, 1]^n$ означает n-кратное произведение $[0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$ и A — открытое множество в $\mathbf{R}^m$ с $m \geqslant n$). Обычно $\mathbf{R}^0$ и $[0, 1]^0$ обозначаются символом $\{0\}$. Тогда сингулярный нульмерный куб в A есть функция f: $\{0\} \to A$, или, что то же самое, — точка в A. Сингулярный одномерный куб часто называют *кривой*. Особенно простым, но и особенно важным примером сингулярного n-мерного куба является *стандартный n-мерный куб* I^n: $[0, 1]^n \to \mathbf{R}^n$, определяемый равенством $I^n(x) = x$ для всех $x \in [0, 1]^n$.

Нам нужно будет рассматривать формальные суммы сингулярных n-мерных кубов в A, умноженных на целые коэффициенты, т. е. выражения вида

$$2c_1 + 3c_2 - 4c_3,$$

где c_1, c_2 и c_3 — сингулярные n-мерные кубы в A. Такая конечная сумма сингулярных n-мерных кубов с целыми коэффициентами называется сингулярной *n-мерной цепью* в A. В частности, сингулярный n-мерный куб c рассматривается также как сингулярная n-мерная цепь $1 \cdot c$. Сингулярные n-мерные цепи можно естественным образом складывать и умножать на целые числа. Например,

$$2(c_1 + 3c_4) + (-2)(c_1 + c_3 + c_2) = -2c_2 - 2c_3 + 6c_4.$$

Для каждой сингулярной n-мерной цепи c в A мы определим сингулярную $(n-1)$-мерную цепь в A, называемую *границей* цепи c и обозначаемую ∂c. Границу для I^2, например, можно было бы определить как сумму четырех сингулярных одномерных кубов, проходимых против часовой стрелки вдоль границы $[0, 1]^2$, как указано на рис. 4.4, *а*. Но на самом деле значительно удобнее определять ∂I^2 как сумму с указанными коэффициентами четырех сингулярных одномерных кубов, изображенных на рис. 4.4, *б*. Точное определение ∂I^n требует некоторых предварительных понятий. Для каждого индекса i от 1 до n определим два

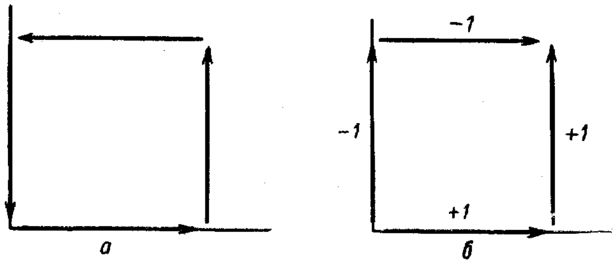


Рис. 4.4.

сингулярных $(n-1)$-мерных куба $I^n_{(i,0)}$ и $I^n_{(i,1)}$ следующим образом. Для каждого $x \in [0, 1]^{n-1}$ положим

$$I^n_{(i,0)}(x) = I^n(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1}) = \\ = (x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1}),$$

$$I^n_{(i,1)}(x) = I^n(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^{n-1}) = \\ = (x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^{n-1}).$$

Назовем $I^n_{(i,0)}$ $(i, 0)$-гранью I^n, а $I^n_{(i,1)}$ $(i, 1)$-гранью (рис. 4.5) и положим

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}.$$

Для произвольного сингулярного n-мерного куба c: $[0, 1]^n \to A$ мы сначала определим (i, α)-грань

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ (I^n_{(i,\alpha)})$$

и затем положим

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}.$$

Наконец, определим границу сингулярной n-мерной цепи $\sum a_i c_i$ формулой

$$\partial\left(\sum a_i c_i\right) = \sum a_i \partial(c_i).$$

Хотя этих нескольких определений достаточно для всех приложений в этой книге, мы приведем еще одно типичное свойство символа ∂.

4.12. Теорема. *$\partial(\partial c)=0$ для всякой сингулярной n-мерной цепи c в A. Коротко, $\partial^2=0$.*

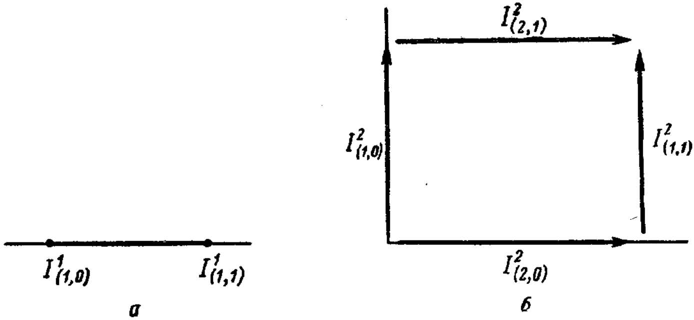


Рис. 4.5.

Доказательство. Пусть $i\leqslant j$. Рассмотрим $\left(I^n_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}$. Если $x\in[0,1]^{n-2}$, то, вспоминая определение (j,β)-грани сингулярного n-мерного куба, имеем

$$\left(I^n_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}(x)=I^n_{(i,\alpha)}\left(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x)\right)=$$
$$=I^n_{(i,\alpha)}\left(x^1,\ \ldots,\ x^{j-1},\ \beta,\ x^j,\ \ldots,\ x^{n-2}\right)=$$
$$=I^n(x^1,\ \ldots,\ x^{i-1},\ \alpha,\ x^i,\ \ldots,\ x^{j-1},\ \beta,\ x^j,\ \ldots,\ x^{n-2}).$$

Аналогично

$$\left(I^n_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}=I^n_{(j+1,\beta)}\left(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x)\right)=$$
$$=I^n_{(j+1,\beta)}\left(x^1,\ \ldots,\ x^{i-1},\ \alpha,\ x^i,\ \ldots,\ x^{n-2}\right)=$$
$$=I^n(x^1,\ \ldots,\ x^{i-1},\ \alpha,\ x^i,\ \ldots,\ x^{j-1},\ \beta,\ x^j,\ \ldots,\ x^{n-2}).$$

Таким образом, $\left(I^n_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}=\left(I^n_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$ при $i\leqslant j$. (Полезно проверить это на рис. 4.5.) Отсюда легко следует, что $\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}=\left(c_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$ при $i\leqslant j$ для любого сингулярного n-мерного куба c. Но

$$\partial(\partial c)=\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}c_{(i,\alpha)}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\beta=0,1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta}\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}.$$

В эту сумму $\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}$ и $\left(c_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$, где $1\leqslant i\leqslant j\leqslant$ $\leqslant n-1$, входят с противоположными знаками. Поэтому [1]) все члены попарно взаимно уничтожаются и $\partial(\partial c)=0$. Поскольку теорема верна для всякого сингулярного n-мерного куба, она верна также для любой сингулярной n-мерной цепи. ▮

Естественно задаться вопросом, верно ли обращение теоремы 4.12, т. е. всегда ли при $\partial c=0$ имеется сингулярная n-мерная цепь c' в A, такая, что $c=\partial c'$. Ответ зависит от A и, вообще говоря, отрицателен. Например, пусть c: $[0, 1]\to\mathbf{R}^2\setminus 0$ определено равенством $c(t)=(\sin 2\pi nt, \cos 2\pi nt)$, где n — ненулевое целое. Тогда $c(1)=c(0)$, так что $\partial c=0$. Но (задача 4.26) не существует никакой сингулярной двумерной цепи c' в $\mathbf{R}^2\setminus 0$, для которой бы $\partial c'=c$.

Задачи

4.22. Пусть $\mathscr{S}$ — множество всех сингулярных n-мерных кубов и $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел. *Сингулярная n-мерная цепь* [2]) есть такая функция f: $\mathscr{S}\to\mathbf{Z}$, что $f(c)=0$ для всех, кроме конечного множества сингулярных n-мерных кубов c. Определим $f+g$ и nf формулами $(f+g)(c)=f(c)+g(c)$ и $(nf)(c)=nf(c)$. Показать, что $f+g$ и nf принадлежат $\mathscr{S}$. Для всякого $c\in\mathscr{S}$ мы будем обозначать через c также такую функцию f, что $f(c)=1$ и $f(c')=0$ для всех $c'\neq c$. Показать, что всякая сингулярная n-мерная цепь f может быть записана в виде $a_1c_1+\ldots+a_kc_k$ с некоторыми целыми коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$ и сингулярными n-мерными кубами $c_1, \ldots, c_k$.

4.23. Определим для заданных $R>0$ и $n\neq 0$ сингулярный одномерный куб $c_{R,n}$: $[0, 1]\to\mathbf{R}^2\setminus 0$ формулой $c_{R,n}(t)=$ $=(R\cos 2\pi nt, R\sin 2\pi nt)$. Показать, что существует сингулярный

---

[1]) Легко проверить, что $\{(k, l)\colon 1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant n-1\}$ распадается на пары (i, j), $(j+1, i)$ $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1)$. — *Прим. ред.*

[2]) По общепринятой терминологии это не цепь, а коцепь. — *Прим. ред.*

двумерный куб c: $[0, 1]^2 \to \mathbf{R}^2 \setminus 0$, для которого $c_{R_1, n} - c_{R_2, n} = \partial c$.

4.24. Показать, что если c — сингулярный одномерный куб в $\mathbf{R}^2 \setminus 0$, у которого $c(0) = c(1)$, то существует такое целое n, что $c - c_{1, n} = \partial c^2$ для некоторого двумерного куба c^2. (Указание: сначала разбить $[0, 1]$ так, чтобы каждое $c([t_{i-1}, t_i])$ лежало по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через 0.)

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Тот факт, что $d^2 = 0$ и $\partial^2 = 0$, не говоря уже о типографской схожести символов ∂ и d, наводит на мысль, что между формами и цепями существует какая-то связь. Эта связь устанавливается интегрированием форм по цепям. В дальнейшем будут рассматриваться только дифференцируемые сингулярные n-мерные кубы.

Пусть ω — форма k-й степени на $[0, 1]^k$. Тогда $\omega = f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ с однозначно определенной функцией f. Мы положим

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f.$$

Это равенство можно было бы записать также в виде

$$\int_{[0,1]^k} f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k$$

— это одно из оснований для введения функций x^i. Если теперь ω — форма k-й степени на A, а c — сингулярный k-мерный куб в A, то мы положим

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega.$$

Заметим, что, в частности,

$$\int_{I^k} f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} (I^k)^*(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) =$$

$$= \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k.$$

Особое определение требуется для случая $k=0$. Форма ω нулевой степени есть функция. Для каждого сингулярного нульмерного куба $c\colon \{0\}\to A$ в A положим

$$\int_c \omega = \omega(c(0)).$$

Наконец, интеграл от ω по сингулярной k-мерной цепи $c=\sum a_i c_i$ определим формулой

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega.$$

Интеграл от формы первой степени по сингулярной одномерной цепи часто называют *криволинейным интегралом.* Если $P\,dx+Q\,dy$ — форма первой степени на $\mathbf{R}^2$ и $c\colon [0,1]\to\mathbf{R}^2$ — сингулярный одномерный куб (кривая), то можно доказать (но мы не будем этого делать), что

$$\int_c P\,dx+Q\,dy=\lim\sum_{i=1}^{n}[c^1(t_i)-c^1(t_{i-1})]\,P(t^i)+$$
$$+[c^2(t_i)-c^2(t_{i-1})]\,Q(t^i),$$

где $t_0, \ldots, t_n$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, t^i произвольно выбрано в $[t_{i-1}, t_i]$ и предел берется по всем разбиениям при стремлении к 0 наибольшего из $|t_i-t_{i-1}|$. Правую часть часто принимают за определение $\int_c P\,dx+Q\,dy$.

Такое определение естественно, поскольку входящие в него суммы очень похожи на суммы, входящие в определение обычного интеграла. Однако с подобным выражением почти невозможно работать, и его быстро преобразуют в интеграл, эквивалентный $\int_{[0,1]} c^*(P\,dx+Q\,dy)$. Аналогичные определения для *интегралов по поверхности*, т. е. интегралов от форм второй степени по сингулярным двумерным кубам, еще более сложны и трудноприменимы. Это одна из причин того, что мы уклонились от такого подхода. Другая причина заключается в том, что данное здесь определение сохраняет смысл и в более общей ситуации, рассматриваемой в гл. 5.

Связь между формами, цепями, d и ∂ наиболее четко выражается теоремой Стокса, которую часто называют основной теоремой многомерного анализа (при $k=1$ и $c=I^1$ это действительно основная теорема дифференциального и интегрального исчисления).

4.13. Теорема Стокса. *Пусть* ω — *форма* $(k-1)$-*й степени на* A *и* c — *сингулярная* k-*мерная цепь в* A. *Тогда*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $c=I^k$ и ω — форма $(k-1)$-й степени на $[0, 1]^k$. Тогда ω есть сумма форм $(k-1)$-й степени вида

$$f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \ldots \wedge dx^k$$

и достаточно доказать теорему для каждой из них. А это достигается непосредственным вычислением.

Заметим, что

$$\int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\ *}_{(j,\alpha)}\left(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \ldots \wedge dx^k\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq l, \\ \displaystyle\int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, \alpha, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k & \text{при} \quad j = l. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{\partial I^k} f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\ *}_{(j,\alpha)}\left(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \ldots \wedge dx^k\right) =$$

$$= (-1)^{l+1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k +$$

$$+ (-1)^l \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k.$$

С другой стороны,

$$\int_{I^k} d(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k}) =$$

$$= \int_{[0,1]^k} D_i f\,dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i f.$$

Применяя теорему Фубини и теорему Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int_{I^k} d(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k) =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 D_i f(x^1, \ldots, x^k)\,dx^i \right) \times$$

$$\times dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 [f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k) -$$

$$- f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)]\,dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k +$$

$$+ (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k.$$

Таким образом,

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega.$$

Если теперь c — произвольный сингулярный k-мерный куб, то из определений следует, что

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega.$$

Поэтому

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Наконец, для произвольной сингулярной k-мерной цепи $\sum a_i c_i$ имеем

$$\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega. \blacksquare$$

Теорема Стокса обладает тремя важными характерными признаками многих больших теорем.

1. Она тривиальна.

2. Тривиальна она потому, что все входящие в нее выражения определены надлежащим образом.

3. Она имеет важные следствия.

Так как вся эта глава по сути дела состоит из определений, которые сделали возможными формулировку и доказательство теоремы Стокса, то читатель охотно признает за теоремой Стокса первые два из этих признаков. Остающаяся часть книги посвящена подтверждению третьего.

Задачи

4.25. (*Независимость от способа параметризации.*) Пусть c — сингулярный k-мерный куб и p: $[0, 1]^k \to [0, 1]^k$ — такое взаимно однозначное отображение, что $p([0, 1]^k) = [0, 1]^k$ и $\det p'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0, 1]^k$. Показать, что

$$\int_c \omega = \int_{c \circ p} \omega$$

для любой формы k-й степени ω.

4.26. Показать, что $\int\limits_{c_{R,n}} d\theta = 2\pi n$, и, используя теорему Стокса, вывести отсюда, что $c_{R,n} \neq \partial c$ для всякой сингулярной двумерной цепи c в $\mathbf{R}^2 \setminus 0$ (напомним, что $c_{R,n}$ было определено в задаче 4.23).

4.27. Показать, что целое n в задаче 4.24 единственно. Это число называется *порядком* кривой c относительно 0.

4.28. Напомним, что $\mathbf{C}$ обозначает множество всех комплексных чисел. Пусть $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ задано равенством $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Определим сингулярный одномерный куб $c_{R,f}\colon [0, 1] \to \mathbf{C} \setminus 0$ формулой $c_{R,f} = f \circ c_{R,1}$ и сингулярный двумерный куб c равенством $c(s, t) = tc_{R,n}(s) + (1-t)c_{R,f}(s)$.

а) Показать, что $\partial c = c_{R,f} - c_{R,n}$ и что $c([0, 1] \times [0, 1]) \subset \mathbf{C} \setminus 0$, если R достаточно велико.

б) Используя задачу 4.26, доказать *основную теорему алгебры*: всякий полином $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ с коэффициентами $a_i \in \mathbf{C}$ имеет корень в $\mathbf{C}$.

4.29. Пусть ω — форма первой степени $f\,dx$ на $[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$. Показать, что существует единственное число λ, такое, что $\omega - \lambda\,dx = dg$ для некоторой функции g, у которой $g(0) = g(1)$. (Указание: для нахождения λ проинтегрировать $\omega - \lambda\,dx = dg$ на $[0, 1]$.)

4.30. Пусть ω — замкнутая форма первой степени на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$. Доказать, что

$$\omega = \lambda\,d\theta + dg$$

для некоторых $\lambda \in \mathbf{R}$ и $g\colon \mathbf{R}^2 \setminus 0 \to \mathbf{R}$. (Указание: показать, что все числа λ_R в $c_R{}^*(\omega) = \lambda_R\,dx + d(g_R)$ имеют одно и то же значение λ.)

4.31. Показать, что если $\omega \neq 0$, то существует цепь c, для которой $\int_c \omega \neq 0$. Используя этот факт, теорему Стокса и равенство $\partial^2 = 0$, доказать, что $d^2 = 0$.

4.32. а) Пусть c_1, c_2 — такие сингулярные одномерные кубы, что $c_1(0) = c_2(0)$ и $c_1(1) = c_2(1)$. Показать, что существует сингулярный двумерный куб c, у которого $\partial c = c_1 - c_2 + c_3 + c_4$, где c_3 и c_4 — *вырожденные* кубы, т. е. $c_3[0, 1]$ и $c_4[0, 1]$ — точки. Вывести отсюда, что если форма ω точна, то $\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$. Дать контрпример на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$ для случая, когда ω лишь замкнута.

б) Показать, что если ω — такая форма на подмножестве $\mathbf{R}^2$, что $\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$ для всех c_1 и c_2, у которых $c_1(0) = c_2(0)$ и $c_1(1) = c_2(1)$, то ω точна. (Указание: рассмотреть задачи 2.21 и 3.34.)

4.33. (*Элементы теории функций комплексного переменного.*) Функцию f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ называют *дифференцируемой* в точке $z_0 \in \mathbf{C}$, если существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

(Под знаком предела — отношение двух комплексных чисел, так что это определение совершенно отлично от данного в гл. 2.) Если f дифференцируема в каждой точке z открытого множества A и f' непрерывна на A, то функцию f называют *аналитической* на A.

а) Показать, что функция $f(z) = z$ аналитична, а $f(z) = \bar{z}$ (где $\overline{x + iy} = x - iy$) нет. Показать, что сумма, произведение и частное аналитических функций — аналитические функции.

б) Показать, что если $f = u + iv$ аналитична на A, то u и v удовлетворяют *условиям Коши — Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Указание: воспользоваться тем фактом, что

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

должен быть одним и тем же для $z = z_0 + (x + i0)$ и $z = z_0 + (0 + iy)$ с $x, y \to 0$ (если u и v непрерывно дифференцируемы, то верно также обратное утверждение, но его труднее доказать).)

в) Пусть T: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ — линейное отображение (где $\mathbf{C}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbf{R}$). Показать, что если матрица T относительно базиса $(1, i)$ равна $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$, то T есть оператор умножения на некоторое комплексное число тогда и только тогда, когда $a = d$ и $b = -c$. Пункт б) показывает, что аналитическая функция f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, рассматриваемая как функция f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, имеет производную $Df(z_0)$, являющуюся оператором умножения на комплексное число. Что это за комплексное число?

г) Положим

$$d(\omega + i\eta) = d\omega + i\,d\eta,$$

$$\int_c \omega + i\eta = \int_c \omega + i \int_c \eta,$$

$$(\omega + i\eta) \wedge (\theta + i\lambda) = \omega \wedge \theta - \eta \wedge \lambda + i(\eta \wedge \theta + \omega \wedge \lambda)$$

и

$$dz = dx + i\,dy.$$

Показать, что $d(f\,dz) = 0$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям Коши — Римана.

д) Доказать *интегральную теорему Коши:* если f аналитична на A, то $\int_c f\,dz = 0$ для всякой замкнутой кривой c (сингулярного одномерного куба c, у которого $c(0) = c(1)$), такой, что $c = \partial c'$ для некоторого сингулярного двумерного куба c' в A.

е) Показать, что если $g(z) = 1/z$, то $g\,dz$ (или $(1/z)\,dz$ в классической записи) равно $i\,d\theta + dh$ для некоторой функции h: $\mathbf{C} \setminus 0 \to \mathbf{R}$. Вывести отсюда, что $\int\limits_{c_{R,\,n}} (1/z)\,dz = 2\pi i n$.

ж) Пусть f аналитична на $\{z: |z| < 1\}$. Используя тот факт, что $g(z) = f(z)/z$ аналитична на $\{z: 0 < |z| < 1\}$, показать, что

$$\int\limits_{c_{R_1,\,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int\limits_{c_{R_2,\,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz,$$

если $0 < R_1, R_2 < 1$.

Используя е), вычислить

$$\lim_{R \to 0} \int\limits_{c_{R,\,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz$$

и вывести отсюда *интегральную формулу Коши*: Если f аналитична на $\{z: |z| \leqslant 1\}$ и c — замкнутая кривая в $\{z: 0 < |z| < 1\}$, имеющая порядок n относительно 0, то

$$nf(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c} \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

4.34. Пусть F: $[0, 1]^2 \to \mathbf{R}^3$. Для каждого $s \in [0, 1]$ определим F_s: $[0, 1] \to \mathbf{R}^3$ формулой $F_s(t) = F(s, t)$. Если каждое F_s есть замкнутая кривая, то F называют *гомотопией* между замкнутой кривой F_0 и замкнутой кривой F_1. Пусть F и G — гомотопии между замкнутыми кривыми. Если для каждого s замкнутые кривые F_s и G_s не пересекаются, то пара (F, G) называется гомотопией между парами непересекающихся замкнутых кривых F_0,

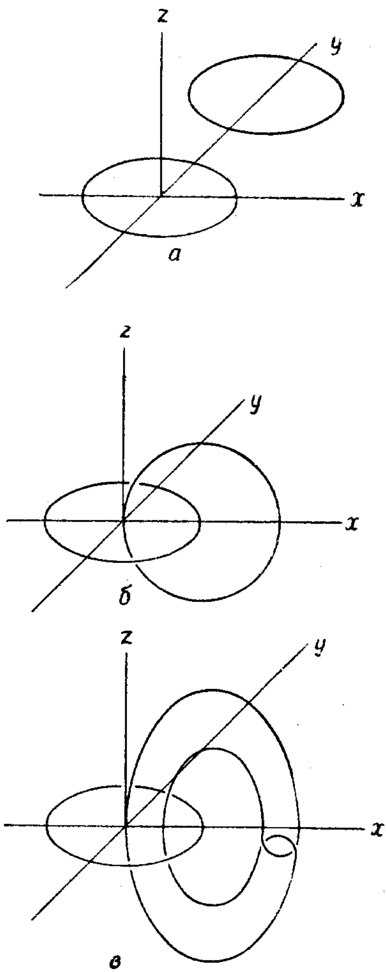


Рис. 4.6.

G_0 и F_1, G_1. Интуитивно ясно, что такой гомотопии не существует, если F_0, G_0 — пара кривых, изображенная на рис. 4.6, *а*, а F_1, G_1 — пара из *б* или *в*. Предлагаемая задача и задача 5.33 доказывают это для случая *б*, но доказательство для случая *в* требует другой техники.

а) Пусть f, g: $[0, 1] \to \mathbf{R}^3$ — непересекающиеся замкнутые кривые. Определим $c_{f,g}$: $[0, 1]^2 \to \mathbf{R}^3 \setminus 0$ формулой

$$c_{f,g}(u, v) = f(u) - g(v).$$

Если (F, G) — гомотопия между непересекающимися замкнутыми кривыми, определим $C_{F,G}$: $[0, 1]^3 \to \mathbf{R}^3 \setminus 0$ формулой

$$C_{F,G}(s, u, v) = c_{F_s, G_s}(u, v) = F(s, u) - G(s, v).$$

Показать, что $\partial C_{F,G} = c_{F_0, G_0} - c_{F_1, G_1}$.

б) Пусть ω — замкнутая форма второй степени на $\mathbf{R}^3 \setminus 0$. Показать, что

$$\int\limits_{c_{F_0, G_0}} \omega = \int\limits_{c_{F_1, G_1}} \omega.$$

5

Интегрирование на многообразиях

МНОГООБРАЗИЯ

Пусть U и V — открытые множества в $\mathbf{R}^n$. Дифференцируемую функцию h: $U \to V$, имеющую дифференцируемую обратную h^{-1}: $V \to U$, будем называть *диффеоморфизмом*.

Подмножество M в $\mathbf{R}^n$ называется *k-мерным многообразием* (в $\mathbf{R}^n$), если для всякой точки $x \in M$ выполнено следующее условие:

(M) Существуют открытое множество U, содержащее x, открытое множество $V \subset \mathbf{R}^n$ и диффеоморфизм h: $U \to V$, такие, что

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^k \times \{0\}) = \\ = \{x \in V\colon\ x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}.$$

Другими словами, $U \cap M$ „с точностью до диффеоморфизма" есть просто часть пространства $\mathbf{R}^k \times \{0\}$ (см. рис. 5.1). Отметим два крайних случая нашего определения: точка в $\mathbf{R}^n$ есть нульмерное многообразие, а открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$ есть n-мерное многообразие.

Общеизвестным примером n-мерного многообразия является *n-мерная сфера* S^n, определяемая как множество $\{x \in \mathbf{R}^{n+1}\colon |x| = 1\}$. Доказательство выполнения условия (M) оставляем в качестве упражнения читателю. Если же читатель не расположен утруждать себя деталями, то он может воспользоваться следующей теоремой, доставляющей много примеров многообразий (заметим, что $S^n = g^{-1}(0)$, где g: $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ определено равенством $g(x) = |x|^2 - 1$).

5.1. Теорема. *Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество и g: $A \to \mathbf{R}^p$ — такая дифференцируемая функция, что $g'(x)$ имеет ранг p для всех точек x, в которых $g(x) = 0$. Тогда $g^{-1}(0)$ есть $(n-p)$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$.*

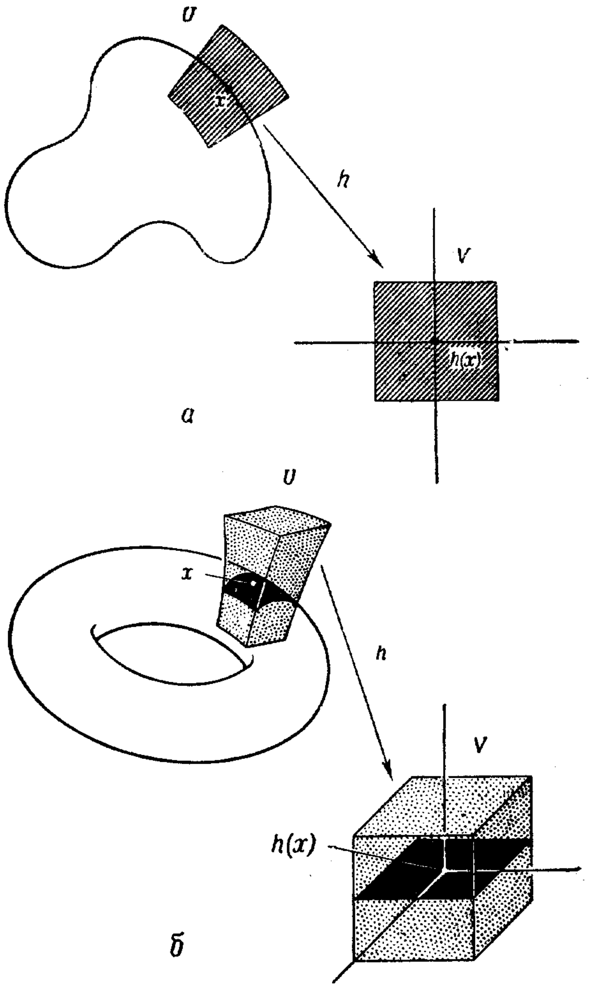


Рис. 5.1 Одномерное многообразие в $\mathbf{R}^2$ и двумерное многообразие в $\mathbf{R}^3$.

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из теоремы 2.13[1]. ∎

5.2. Теорема. *Для всякой точки x k-мерного многообразия $M \subset \mathbf{R}^n$ выполнено следующее „координатное условие".*

(C) *Существуют открытое множество U, содержащее x, открытое множество $W \subset \mathbf{R}^k$ и взаимно однозначная дифференцируемая функция $f: W \to \mathbf{R}^n$, такие, что*

1) $f(W) = M \cap U$,

2) $f'(y)$ *имеет ранг k для всякого $y \in W$.*

[Такая функция f называется *системой координат* в окрестности точки x (см. рис. 5.2).]

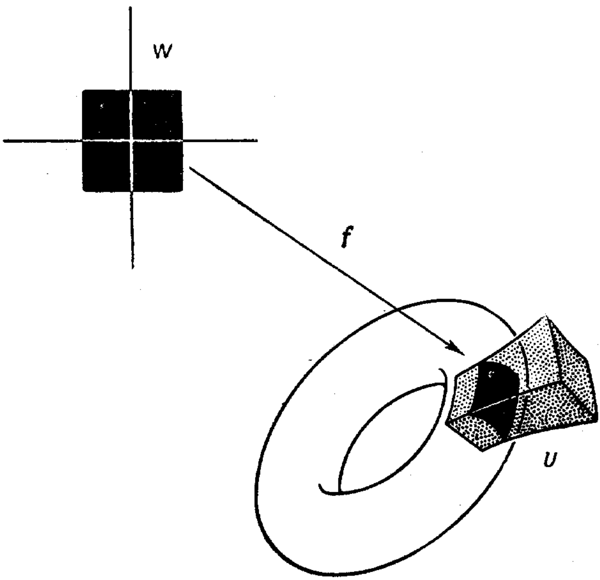


Рис. 5.2.

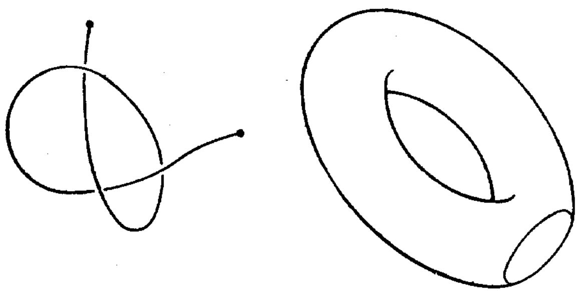
[1]) Нужно только при проверке выполнения условия (M) для $M = g^{-1}(0)$ и $k = n - p$ взять h обратным фигурирующему в теореме 2.13. — *Прим. перев.*

Доказательство. Рассмотрим h: $U \to V$, удовлетворяющее условию (M). Пусть $W = \{a \in \mathbf{R}^k: (a, 0) \in h(M)\}$. Определим f: $\to \mathbf{R}^n$ равенством $f(a) = h^{-1}(a, 0)$. Очевидно, $f(W) = M \cap U$. Если H: $U \to \mathbf{R}^k$ определить равенством $H(z) = (h^1(z), \ldots, h^k(z))$, то $H(f(y)) = y$ для всех $y \in W$; поэтому $H'(f(y)) \cdot f'(y) = I$, и матрица $f'(y)$ должна иметь ранг k. ▮

Отметим одно следствие доказательства теоремы 5.2: для всяких двух систем координат f_1: $W_1 \to \mathbf{R}^n$ и f_2: $W_2 \to \mathbf{R}^n$ отображение

$$f_2^{-1} \circ f_1: \; f_1^{-1}(f_2(W_2)) \to \mathbf{R}^k$$

дифференцируемо и имеет невырожденный якобиан. В самом деле, $f_2^{-1}(x)$ состоит из первых k компонент отображения $h(x)$.



а *б*

Рис. 5.3. Одномерное и двумерное многообразия с краем в $\mathbf{R}^3$.

Полупространством $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{R}^k$ будет называться множество $\{x \in \mathbf{R}^k: x^k \geqslant 0\}$. Подмножество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется ***k-мерным многообразием с краем*** (рис. 5.3), если для всякой точки $x \in M$ выполняется либо условие (M), либо следующее условие.

(M') Существуют открытое множество U, содержащее x, открытое множество $V \subset \mathbf{R}^n$ и диффеоморфизм h: $U \to V$, такие, что

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{H}^k \times \{0\}) =$$
$$= \{x \in V\colon\ x^k \geqslant 0 \text{ и } x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}.$$

Важно заметить, что условия (M) и (M') не могут одновременно выполняться для одной и той же точки x. Действительно, если бы h_1: $U_1 \to V_1$ и h_2: $U_2 \to V_2$ удовлетворяли соответственно условиям (M) и (M'), то $h_2 \circ h_1^{-1}$ было бы дифференцируемым отображением, переводящим открытое множество из $\mathbf{R}^k$, содержащее $h(x)$, в подмножество $\mathbf{H}^k$, не являющееся открытым в $\mathbf{R}^k$. Но поскольку $\det(h_2 \circ h_1^{-1})' \neq 0$, это противоречило бы результату из задачи 2.36. Множество всех точек $x \in M$, удовлетворяющих условию (M'), называется *краем* многообразия M' и обозначается ∂M. Его не следует путать с границей множества, определявшейся в гл. 1 (см. задачи 5.3 и 5.8).

Задачи

5.1. Пусть M есть k-мерное многообразие с краем. Доказать, что ∂M есть $(k-1)$-мерное, а $M \setminus \partial M$ есть k-мерное многообразия.

5.2. Найти аналог условия (C) для многообразий с краем.

5.3. а) Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество, граница которого является $(n-1)$-мерным многообразием. Показать, что объединение N множества A с его границей есть n-мерное многообразие с краем. (Полезно иметь в виду следующий пример: если $A = \{x \in \mathbf{R}^n\colon\ |x| < 1 \text{ или } 1 < |x| < 2\}$, то N есть многообразие с краем, но ∂N не совпадает с границей A.)

б) Доказать аналогичное утверждение для открытого подмножества n-мерного многообразия.

5.4. Доказать частичное обращение теоремы 5.1: для всякой точки x k-мерного многообразия $M \subset \mathbf{R}^n$ существуют такое открытое множество $A \subset \mathbf{R}^n$ и такая функция g: $A \to \mathbf{R}^{n-k}$, что $A \cap M = g^{-1}(0)$ и $g'(x)$ имеет ранг $n-k$ всюду, где $g(x) = 0$.

5.5. Доказать, что k-мерное (векторное) подпространство в $\mathbf{R}^n$ есть k-мерное многообразие.

5.6. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. *Графиком* f называется множество $\{(x, y)\colon\ y = f(x)\} \subset R^n \times R^m$. Показать, что график f является n-мерным многообразием тогда и только тогда, когда f дифференцируемо.

5.7. Пусть $\mathbf{K}^n = \{x \in \mathbf{R}^n\colon x^1 = 0$ и $x^2, \ldots, x^{n-1} > 0\}$. Показать, что если $M \subset \mathbf{K}^n$ есть k-мерное многообразие и N получается вращением M вокруг оси $x^1 = \ldots = x^k = 0$, то N есть $(k+1)$-мерное многообразие. Пример — тор (рис. 5.4).

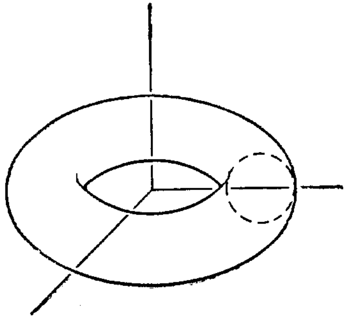


Рис. 5.4.

5.8. а) Показать, что если M есть k-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ и $k < n$, то M имеет меру 0.

б) Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие с краем в $\mathbf{R}^n$. Показать, что граница M совпадает с ∂M. Дать контрпример для случая незамкнутого M.

в) Показать, что всякое компактное n-мерное многообразие с краем в $\mathbf{R}^n$ измеримо по Жордану.

ПОЛЯ И ФОРМЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть M есть k-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ и $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ — система координат в окрестности точки $x = f(a)$. Так как ранг матрицы $f'(a)$ равен k, то линейное отображение $f_*\colon \mathbf{R}^k_a \to \mathbf{R}^n_x$ взаимно однозначно и $f_*(\mathbf{R}^k_a)$ есть k-мерное подпространство в $\mathbf{R}^n_x$. Если $g\colon V \to \mathbf{R}^n$ — еще одна система координат с $x = g(b)$, то

$$g_*(\mathbf{R}^k_b) = f_*(f^{-1} \circ g)_*(\mathbf{R}^k_b) = f_*(\mathbf{R}^k_a).$$

Таким образом, k-мерное подпространство $f_*(\mathbf{R}^k_a)$ не зависит от выбора системы координат f. Это подпространство называется *касательным пространством* M в точке x (см. рис. 5.5) и обозначается M_x. В следующих параграфах мы будем пользоваться тем фактом, что на M_x имеется естественное внутреннее произведение T_x, индуцируемое внутренним произведением из $\mathbf{R}^n_x$ и определяемое для всякой пары v, $w \in M_x$ равенством $T_x(v, w) = \langle v, w\rangle_x$.

Предположим, что A — открытое множество, содержащее M, и F — такое дифференцируемое поле на A, что $F(x) \in M_x$ для каждого $x \in M$. Для системы координат $f: W \to \mathbf{R}^n$ существует единственное (дифференцируемое)

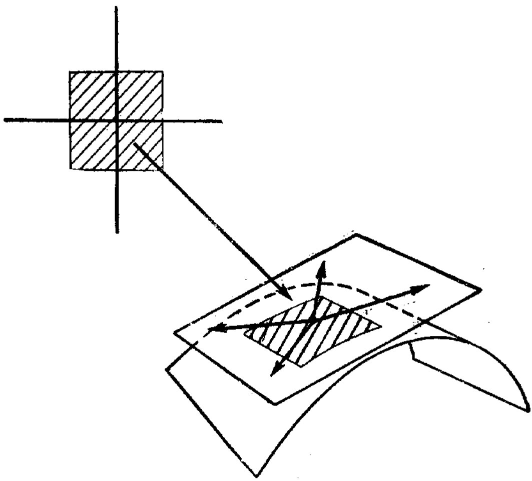


Рис. 5.5.

векторное поле G на W, такое, что $f_*(G(a)) = F(f(a))$ для каждого $a \in W$. Можно также рассматривать функцию F, которая относит каждому $x \in M$ некоторый вектор $F(x) \in M_x$; такая функция называется ***векторным полем на*** M. По-прежнему существует единственное векторное поле G на W, такое, что $f_*(G(a)) = F(f(a))$ для каждого $a \in W$. Мы *по определению* будем считать F дифференцируемым, если дифференцируемо G. Заметим, что наше определение не зависит от выбора системы координат: если $g: V \to \mathbf{R}^n$ таково, что $g_*(H(b)) = F(b)$ для всех $b \in V$, то координатные функции для $H(b)$ должны совпадать с координатными функциями для $G(f^{-1}(g(b)))$, так что дифференцируемость G влечет *дифференцируемость* H.

В точности те же рассмотрения проводятся и для форм. Функция ω, которая каждому $x \in M$ относит $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$, называется *формой p-й степени на M*. Если $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ — система координат, то $f^*\omega$ будет формой p-й степени на W. Форма ω называется дифференцируемой, если дифференцируема форма $f^*\omega$. Форма p-й степени ω на M может быть записана в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1, \ldots, i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

где функции $\omega_{i_1, \ldots, i_p}$ определены только на M. Прежнее определение $d\omega$ было бы лишено здесь смысла, поскольку не определены $D_j(\omega_{i_1, \ldots, i_p})$. Тем не менее существует разумный способ определения $d\omega$.

5.3. Теорема. *Существует единственная форма $(p+1)$-й степени $d\omega$ на M, такая, что*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

для всякой системы координат $f\colon W \to \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Пусть $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ — система координат с $x = f(a)$ и $v_1, \ldots, v_{p+1} \in M_x$. В $\mathbf{R}^k_a$ имеются однозначно определенные векторы $w_1, \ldots, w_{p+1}$, для которых $f_*(w_i) = v_i$. Положим теперь по определению $d\omega(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) = d(f^*\omega)(a)(w_1, \ldots, w_{p+1})$. Можно проверить, что это задание $d\omega(x)$ не зависит от выбора системы координат, так что $d\omega$ определено корректно.

При этом ясно, что $d\omega$ обязано удовлетворять условию этого определения и потому единственно. ∎

Часто бывает необходимо выбрать ориентацию μ_x в каждом касательном пространстве M_x многообразия M. Такие ориентации называются *согласованными* (рис. 5.6), если для каждой системы координат $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ и каждой пары $a, b \in W$ равенство

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$[f_*((e_1)_b), \ldots, f_*((e_k)_b)] = \mu_{f(b)}.$$

Предположим, что выбраны согласованные ориентации μ_x. Если система координат $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ такова, что

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

для некоторого, а потому и для каждого $a \in W$, то говорят, что f *сохраняет ориентацию*. Если f *не* сохраняет ориентацию и $T\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ — линейное отображение с $\det T = -1$,

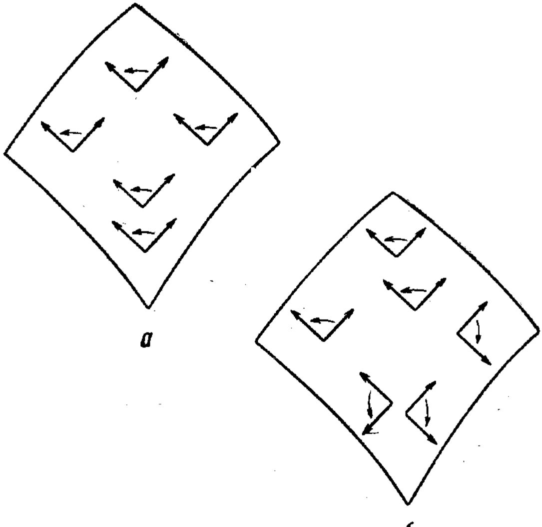


Рис. 5.6.

а — согласованный выбор ориентаций, *б* — несогласованный выбор ориентаций.

то $f \circ T$ уже сохраняет ориентацию. Поэтому в окрестности любой точки существует система координат, сохраняющая ориентацию. Если f и g сохраняют ориентацию и $x = f(a) = g(b)$, то из равенств

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_x = [g_*((e_1)_b), \ldots, g_*((e_k)_b)]$$

следует, что

$$[(g^{-1} \circ f)_*((e_1)_a), \ldots, (g^{-1} \circ f)_*((e_k)_a)] = [(e_1)_b, \ldots, (e_k)_b],$$

откуда $\det (g^{-1} \circ f)' > 0$ — важный факт, который следует запомнить.

Многообразие M, допускающее выбор согласованных ориентаций μ_x, называется *ориентируемым*, а всякий такой выбор μ_x — *ориентацией* μ этого многообразия. Многообразие M вместе с его ориентацией μ называется *ориентированным многообразием*. Классическим примером неориентируемого многообразия является лист Мёбиуса. Модель его можно получить, склеив концы бумажной полоски, закрученной на пол-оборота (рис. 5.7).

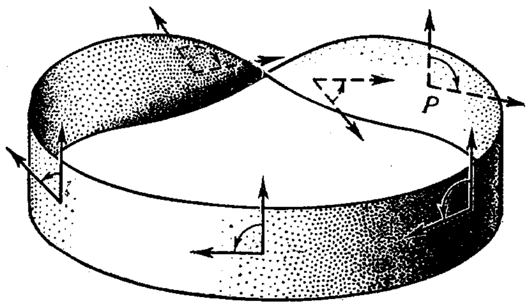


Рис. 5.7. Лист Мёбиуса, пример неориентируемого многообразия.

Базис движется вправо, начиная от P, и, сделав один оборот, возвращается в P уже с противоположной ориентацией.

Наши определения векторных полей, форм и ориентаций можно распространить и на многообразия с краем. Если M есть k-мерное многообразие с краем и $x \in \partial M$, то $(\partial M)_x$ есть $(k-1)$-мерное подпространство k-мерного векторного пространства M_x. Таким образом, существуют в точности два единичных вектора в M_x, перпендикулярных к $(\partial M)_x$. Их можно различить следующим образом (рис. 5.8). Пусть $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ — система координат с $W \subset \mathbf{H}^k$ и $f(0) = x$. Тогда только один из этих единичных векторов равен $f_*(v_0)$ для некоторого v_0 с $v^k < 0$. Этот единичный вектор $n(x)$ называется ортом *внешней нормали*. Нетрудно проверить, что это определение не зависит от системы координат f.

Пусть μ — ориентация на k-мерном многообразии с краем M. Для всякого $x \in \partial M$ выберем $v_1, \ldots, v_{k-1} \in (\partial M)_x$ так, чтобы $[n(x), v_1, \ldots, v_{k-1}] = \mu_x$.

Если также $[n(x), w_1, \ldots, w_{k-1}] = \mu_x$, то $[v_1, \ldots, v_{k-1}]$ и $[w_1, \ldots, w_{k-1}]$ задают одну и ту же ориентацию на $(\partial M)_x$; она обозначается $(\partial\mu)_x$. Легко видеть, что ориен-

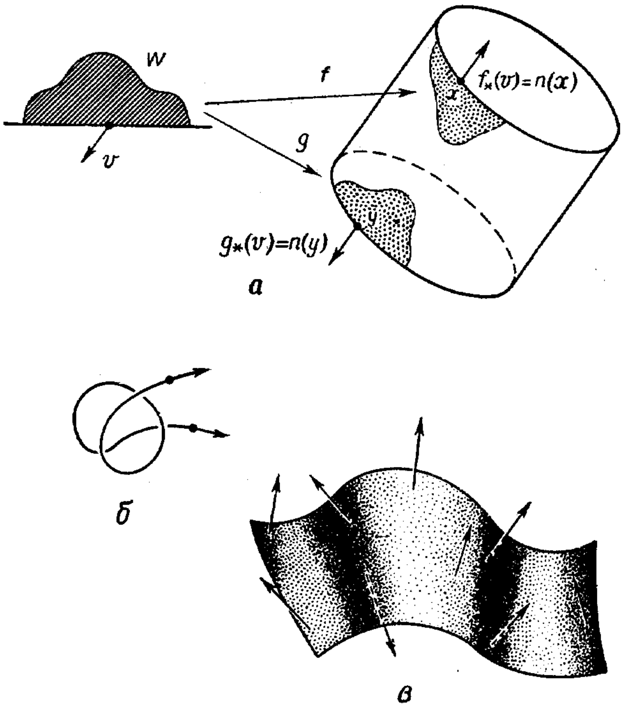


Рис. 5.8. Некоторые орты внешних нормалей многообразий с краем в $\mathbf{R}^3$.

тации $(\partial\mu)_x$ для $x \in \partial M$ согласованы на ∂M. Таким образом, если M ориентируемо, то также ∂M ориентируемо, и ориентация μ на M определяет ориентацию $\partial\mu$ на ∂M, называемую *индуцированной ориентацией*. Если мы применим эти определения к полупространству $\mathbf{H}^k$ с его стандартной ориентацией, то увидим, что индуцированной ориентацией на $\mathbf{R}^{k-1} = \{x \in \mathbf{H}^k \colon x^k = 0\}$ служит стандартная ориентация, умноженная на $(-1)^k$. Основания для описанного выбора индуцированной ориентации выяснятся в следующем параграфе.

В том случае, когда M — *ориентированное* $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$, можно определить орты внешних нормалей, даже в том случае, когда M не является границей n-мерного многообразия. Пусть $[v_1, \ldots, v_{n-1}] = \mu_x$. Выберем единичный вектор $n(x)$ в $\mathbf{R}^n_x$ так, чтобы он был перпендикулярен M_x, а $[n(x), v_1, \ldots, v_{n-1}]$ было стандартной ориентацией на $\mathbf{R}^n_x$, и по-прежнему назовем $n(x)$ ортом внешней нормали к M (определяемым ориентацией μ). Вектор $n(x)$ в очевидном смысле непрерывно зависит от точки $x \in M$. Обратно, всякое заданное на M непрерывное семейство единичных нормальных векторов $n(x)$ определяет на M ориентацию. Это показывает, что такой непрерывный выбор нормальных векторов на листе Мёбиуса невозможен. В бумажной модели листа Мёбиуса в точках по обе стороны бумажной полоски (которая имеет толщину) можно приложить нормальные векторы, направленные в противоположные стороны. Невозможность непрерывного выбора нормальных векторов отражена в знаменитом свойстве этой бумажной модели: она имеет только одну сторону (начав красить ее с одной стороны, вы в конце концов закрасите ее всю); другими словами, произвольно выбрав нормальный вектор $n(x)$ в некоторой точке и затем перемещая его в другие точки с соблюдением непрерывности, можно вернуться в исходную точку с противоположно направленным $n(x)$.

Задачи

5.9. Показать, что M_x состоит из касательных векторов в t к всевозможным кривым c, лежащим в M и таким, что $c(t) = x$.

5.10. Пусть на M задан такой набор систем координат $\mathcal{C}$, что

1) для каждого $x \in M$ существует $f \in \mathcal{C}$, являющееся системой координат в окрестности точки x;

2) $\det(f^{-1} \circ g) > 0$ для любых $f, g \in \mathcal{C}$.

Показать, что на M существует единственная ориентация, сохраняющаяся при всех $f \in \mathcal{C}$.

5.11. Пусть M есть n-мерное многообразие с краем в $\mathbf{R}^n$. Возьмем в качестве μ_x стандартную ориентацию пространства $M_x = \mathbf{R}^n_x$ (так определенная ориентация μ называется *стандарт-*

ной ориентацией многообразия M). Показать, что для $x \in \partial M$ оба данных выше определения $n(x)$ совпадают.

5.12. а) Пусть F—дифференцируемое векторное поле на многообразии $M \subset \mathbf{R}^n$. Показать, что существуют такие открытое множество $A \supset M$ и дифференцируемое векторное поле $\widetilde{F}$ на A, что $\widetilde{F}(x) = F(x)$ для всех $x \in M$. (Указание: сделать это локально и воспользоваться разбиением единицы.)

б) Показать, что если M замкнуто, то в качестве A можно взять все пространство $\mathbf{R}^n$.

5.13. Пусть $g\colon A \to \mathbf{R}^p$ то же, что в теореме 5.1.

а) Пусть $x \in M = g^{-1}(0)$ и $h\colon U \to \mathbf{R}^n$ — тот по существу единственный диффеоморфизм, для которого $g \circ h(x) = (x^{n-p+1}, \ldots$ $\ldots, x^n)$ и $h(0) = x$. Определим $f\colon \mathbf{R}^{n-p} \to \mathbf{R}^n$ равенством $f(a) =$ $= h(0, a)$. Показать, что f_* взаимно однозначно, так что $n - p$ векторов $f_*((e_1)_0), \ldots, f_*((e_{n-p})_0)$ линейно независимы.

б) Показать, что ориентации μ_x могут быть выбраны согласованно, так что M — ориентируемое многообразие.

в) Показать, что если $p = 1$, то координаты орта внешней нормали в x кратны $D_1 g(x), \ldots, D_n g(x)$.

5.14. Пусть $M \to \mathbf{R}^n$ — ориентируемое k-мерное многообразие. Доказать существование такого $g\colon A \to \mathbf{R}^{n-k}$, что $M = g^{-1}(0)$ и $g'(x)$ имеет ранг $n - k$ для всякого $x \in M$. (Указание: задача 5.4 дает локальное решение; используя ориентацию, выбрать согласованные локальные решения и воспользоваться разбиением единицы).

5.15. Пусть M есть $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ и $M(\varepsilon)$ — совокупность концов всех нормальных векторов длины ε (проведенных в обоих направлениях). Предположим, что ε столь мало, что $M(\varepsilon)$ также есть $(n-1)$-мерное многообразие. Показать, что $M(\varepsilon)$ ориентируемо (даже если M было неориентируемо). Что такое $M(\varepsilon)$ в случае, когда M — лист Мёбиуса?

5.16. Пусть $g\colon A \to \mathbf{R}^p$ то же, что и в теореме 5.1. Показать, что если $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема и ее максимум (или минимум) на $g^{-1}(0)$ достигается в точке a, то существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{R}$, что

$$D_j f(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_j g^i(a), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

(Указание: эти равенства можно переписать в виде $df(a) =$ $= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, dg^i(a)$; они очевидны, когда $g(x) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$.)

Максимум (или минимум) функции f на $g^{-1}(0)$ иногда называют условным экстремумом при *уравнениях связи* $g^i = 0$. Можно пытаться отыскивать a, решая систему уравнений (1).

В частности, если $g\colon A \to \mathbf{R}$, мы должны решить $n+1$ уравнений

$$D_j f(a) = \lambda D_j g(a),$$
$$g(a) = 0$$

относительно $n+1$ неизвестных $a^1, \ldots, a^n, \lambda$, что часто очень просто, если оставить уравнение $g(a)=0$ напоследок. Это *метод Лагранжа*, а полезное, но постороннее λ называется *множителем Лагранжа*. В следующей задаче дается пример изящного теоретического использования множителей Лагранжа.

5.17. а) Пусть $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — самосопряженный оператор с матрицей $A = (a_{ij})$, так что $a_{ij} = a_{ji}$. Показать, что если $f(x) = \langle Tx, x\rangle = \sum a_{ij}x^i x^j$, то $D_k f(x) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x^j$. Рассматривая максимум функции $\langle Tx, x\rangle$ на сфере S^{n-1}, доказать существование $x \in S^{n-1}$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, таких, что $Tx = \lambda x$.

б) Пусть $V = \{y \in \mathbf{R}^n\colon \langle x, y\rangle = 0\}$. Показать, что $T(V) \subset V$ и что оператор $T\colon V \to V$ самосопряжен.

в) Доказать существование базиса, состоящего из собственных векторов оператора T.

ТЕОРЕМА СТОКСА НА МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть на k-мерном многообразии с краем M заданы форма p-й степени ω и сингулярный p-мерный куб c. Интеграл от ω по c определяется точно так же, как и раньше:

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^p} c^*\omega.$$

Интегралы по сингулярным p-мерным цепям так же определяются, как и выше. В случае $p=k$ может оказаться, что существуют такие открытое множество $M \supset [0, 1]^k$ и система координат $f\colon W \to \mathbf{R}^n$, что $c(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, 1]^k$. Сингулярные k-мерные кубы в M всегда будут считаться принадлежащими этому типу. Если M ориентировано, то будем говорить, что сингулярный k-мерный куб c в M *сориентирован*, если f сохраняет ориентацию.

5.4. Теорема. *Пусть M — ориентированное k-мерное многообразие, $c_1, c_2\colon [0, 1]^k \to M$ — два сориентированных сингулярных k-мерных куба в M и ω — форма*

k-й степени на M, обращающаяся в 0 вне $c_1([0, 1]^k) \cap$ $\cap\, c_2([0, 1]^k)$. Тогда

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{c_1} \omega = \int_{[0,1]^k} c_1^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega).$$

(Здесь $c_2^{-1} \circ c_1$ определено только на подмножестве из $[0, 1]^k$, и второе равенство существенно опирается на то, что $\omega = 0$ вне $c_1([0, 1]^k) \cap c_2([0, 1]^k)$.) Поэтому достаточно показать, что

$$\int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} c_2^*(\omega) = \int_{c_2} \omega.$$

Пусть $c_2^*(\omega) = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. Обозначая $c_2^{-1} \circ c_1$ через g, в силу теоремы 4.9 имеем

$$\begin{aligned}(c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) &= g^*(g\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) = \\ &= (f \circ g) \cdot \det g' \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \\ &= (f \circ g) |\det g'| \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k,\end{aligned}$$

поскольку $\det g' = \det (c_2^{-1} \circ c_1)' > 0$. Утверждаемый результат вытекает теперь из теоремы 3.13. ∎

Последнее равенство в этом доказательстве помогает понять, почему мы должны были уделять столько внимания ориентациям.

Пусть ω — форма k-й степени на ориентированном k-мерном многообразии M. Если в M найдется такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что $\omega = 0$ вне $c([0, 1]^k)$, то мы по определению положим

$$\int_M \omega = \int_c \omega.$$

Теорема 5.4 показывает, что $\int_M \omega$ не будет зависеть от выбора c.

Пусть теперь ω — произвольная форма k-й степени на M и M обладает таким открытым покрытием $\mathcal{O}$, что для каждого $U \in \mathcal{O}$ существует такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что $U \subset c([0, 1]^k)$. Пусть Φ — разбиение единицы на M, подчиненное этому покрытию. Положим

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$$

в предположении, что сумма сходится (она во всяком случае сходится, когда M компактно). Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 3.12, показывают, что так определенный $\int\limits_M \omega$ не зависит от покрытия $\mathcal{O}$ и разбиения Φ.

Все наши определения можно было бы дать и для k-мерного многообразия с краем M, снабженного ориентацией μ. Наделим ∂M индуцированной ориентацией $\partial\mu$, и пусть c — такой сориентированный сингулярный k-мерный куб в M, что $c_{(k, 0)}$ лежит в ∂M и является единственной гранью, хотя бы одна внутренняя точка которой принадлежит ∂M. Из замечаний, сделанных после определения $\partial\mu$, следует, что $c_{(k, 0)}$ сориентирована, если k четно, и несориентирована, если k нечетно. Таким образом, для всякой формы $(k-1)$-й степени ω на M, равной нулю всюду вне $c([0, 1]^k)$, имеем

$$\int_{c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{\partial M} \omega.$$

С другой стороны, $c_{(k, 0)}$ входит с коэффициентом $(-1)^k$ и в ∂c. Поэтому

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{(-1)^k c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{c_{(k,0)}} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Наш выбор $\partial\mu$ был сделан с тем расчетом, чтобы полностью избавиться от отрицательных знаков в этом равенстве и следующей теореме.

5.5. Теорема Стокса. *Пусть M — компактное ориентированное k-мерное многообразие с краем и ω — форма $(k-1)$-й степени на M. Тогда*

$$\int_M \partial\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где ∂M наделено индуцированной ориентацией.

Доказательство. Предположим сначала, что в $M \setminus \partial M$ имеется такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что $\omega = 0$ вне $c[(0, 1)^k]$. В силу теоремы 4.13 и определения $d\omega$

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Тогда

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0,$$

поскольку $\omega = 0$ на ∂c. С другой стороны, и $\int_{\partial M} \omega = 0$, поскольку $\omega = 0$ на ∂M.

Предположим теперь, что в M имеется такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что единственной его гранью, лежащей в ∂M, служит $c_{(k,0)}$ и $\omega = 0$ вне $c([0, 1]^k)$. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Обратимся, наконец, к общему случаю. M допускает такое открытое покрытие $\mathfrak{S}$ и такое подчиненное ему разбиение единицы Φ, что для каждого $\varphi \in \Phi$ форма $\varphi\omega$ принадлежит одному из двух уже рассмотренных типов. Имеем

$$0 = d(1) = d\left(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi\right) = \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi,$$

так что

$$\sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi \wedge \omega = 0.$$

Поскольку M компактно, эта сумма конечна, и потому

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0.$$

Следовательно,

$$\int_M d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi\, d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega + \varphi \cdot d\omega =$$

$$= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d(\varphi\omega) = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{\partial M} \varphi\omega = \int_{\partial M} \omega. \blacksquare$$

Задачи

5.18. Пусть M есть n-мерное многообразие (или многообразие с краем) в $\mathbf{R}^n$, наделенное стандартной ориентацией. Показать, что интеграл $\int_M f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, определенный в этой главе, совпадает с интегралом $\int_M f$, определенным в гл. 3.

5.19. а) Показать, что для некомпактных M теорема 5.5 неверна. (Указание: если M — многообразие с краем, для которого справедлива теорема 5.5, то $M \setminus \partial M$ — также многообразие с краем (пустым).)

б) Показать, что теорема 5.5 верна и для некомпактного M, если ω равна нулю всюду вне некоторого его компактного подмножества.

5.20. Доказать, что если ω — форма $(k-1)$-й степени на компактном k-мерном многообразии M, то $\int_M d\omega = 0$. Дать контрпример с некомпактным M.

5.21. *Абсолютным тензором* k-й степени на V называется функция η: $V^k \to \mathbf{R}$ вида $|\omega|$, где $\omega \in \Lambda^k(V)$. *Абсолютной формой* k-й степени на M называется такая функция η, что $\eta(x)$ есть абсолютный тензор k-й степени на M_x для каждого $x \in M$. Показать, что можно определить интеграл $\int_M \eta$ даже если M неориентируемо.

5.22. Пусть $M_1, M_2 \in \mathbf{R}^n$ — компактные n-мерные многообразия с краем, причем $M_2 \subset M_1 \setminus \partial M_1$, и ω — форма $(n-1)$-й степени на M_1. Доказать, что

$$\int_{\partial M_1} \omega = \int_{\partial M_2} \omega,$$

где ∂M_1 и ∂M_2 наделены ориентациями, индуцированными стандартными ориентациями многообразий M_1 и M_2. (Указание: найти такое многообразие с краем M, что $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2$ и индуцированная ориентация на ∂M совпадает на ∂M_1 с ориентацией ∂M_1 и противоположна на ∂M_2 ориентации ∂M_2.)

ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА

Пусть M есть k-мерное многообразие (или многообразие с краем) в $\mathbf{R}^n$, наделенное ориентацией μ. Для каждого $x \in M$ введенные раньше ориентация μ_x и внутреннее произведение T_x определяют элемент объема $\omega(x) \in \Lambda^k(M_x)$. Мы получаем поэтому всюду отличную от нуля форму k-й степени ω на M, которая называется *элементом объема* на M (определяемым μ) и обозначается dV, хотя она, вообще говоря, и не является дифференциалом какой-либо формы $(k-1)$-й степени. Под *объемом* M понимают $\int\limits_M dV$ в предположении, что этот интеграл существует, что во всяком случае имеет место, когда M компактно. Для одномерных или двумерных многообразий „объем" обычно называют соответственно *длиной* или *площадью*, а dV обозначают ds („элемент длины") или dA (а также dS) („элемент площади [поверхности]").

Интересующий нас конкретный случай — это элемент объема ориентированной поверхности (двумерного многообразия) M в $\mathbf{R}^3$. Пусть $n(x)$ — орт внешней нормали в точке $x \in M$. Если $\omega \in \Lambda^2(M_x)$ определить формулой

$$\omega(v, w) = \det \begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix},$$

то $\omega(v, w) = 1$, если v и w образуют ортонормальный базис в M_x с $[v, w] = \mu_x$. Таким образом, $dA = \omega$. С другой стороны, $\omega(v, w) = \langle v \times w, n(x)\rangle$ по определению $v \times w$, так что

$$dA(v, w) = \langle v \times w, n(x)\rangle.$$

Так как $v \times w$ для любых $v, w \in M_x$ кратно $n(x)$, то заключаем, что

$$dA(v, w) = |v \times w|$$

при $[v, w] = \mu_x$. Чтобы найти площадь поверхности M, мы должны вычислить $\int_{[0,1]^2} c^*(dA)$ для сориентированных сингулярных двумерных кубов c. Положим

$$E(a) = [D_1c^1(a)]^2 + [D_1c^2(a)]^2 + [D_1c^3(a)]^2,$$
$$F(a) = D_1c^1(a)\cdot D_2c^1(a) + D_1c^2(a)\cdot D_2c^2(a) + D_1c^3(a)\cdot D_2c^3(a),$$
$$G(a) = [D_2c^1(a)]^2 + [D_2c^2(a)]^2 + [D_2c^3(a)]^2.$$

Тогда

$$c^*(dA)((e_1)_a, (e_2)_a) = dA(c_*((e_1)_a), c_*((e_2)_a)) =$$
$$= |(D_1c^1(a), D_1c^2(a), D_1c^3(a)) \times (D_2c^1(a), D_2c^2(a), D_2c^3(a))| =$$
$$= \sqrt{E(a)G(a) - F(a)^2}$$

по задаче 4.9. Таким образом,

$$\int_{[0,1]^2} c^*(dA) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{EG - F^2}.$$

Очевидно, что вычисление площади поверхности — отважное предприятие. К счастью, редко требуется знать площадь поверхности. Кроме того, существует простое выражение для dA, достаточное для теоретических рассмотрений.

5.6. Теорема. *Пусть M — компактное ориентированное двумерное многообразие (или многообразие с краем) в $\mathbf{R}^3$ и n — орт внешней нормали. Тогда*

1) $dA = n^1\,dy \wedge dz + n^2\,dz \wedge dx + n^3\,dx \wedge dy.$

Кроме того,

2) $n^1\,dA = dy \wedge dz,$

3) $n^2\,dA = dz \wedge dx,$

4) $n^3\,dA = dx \wedge dy.$

Доказательство. Равенство (1) эквивалентно равенству

$$dA(v, w) = \det \begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix},$$

что явствует из разложения определителя по минорам нижней строки. Для доказательства остальных равенств рассмотрим

$z \in M_x$. Так как $v \times w = \alpha n(x)$ с некоторым $\alpha \in \mathbf{R}$, то

$$\langle z, n(x)\rangle \cdot \langle v \times w, n(x)\rangle = \langle z, n(x)\rangle \alpha = \\ = \langle z, \alpha n(x)\rangle = \langle z, v \times w\rangle.$$

Взяв в качестве z векторы e_1, e_2 и e_3, получим (2), (3) и (4). ∎

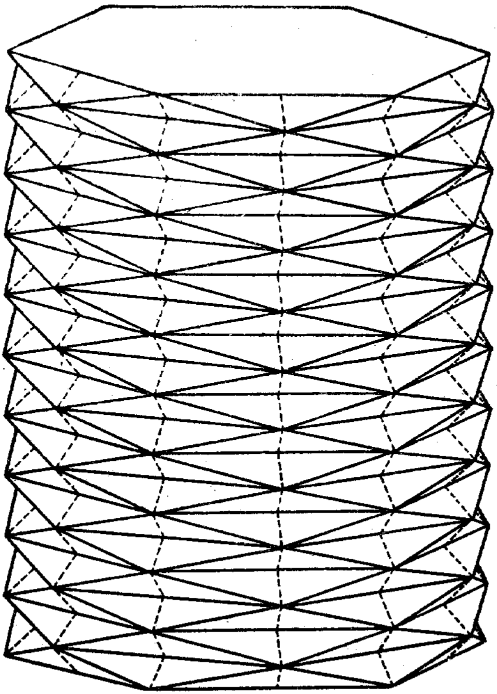


Рис. 5.9. Поверхность образована треугольниками, вписанными в часть цилиндра.

Основания треугольников лежат на параллельных плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра. Расстояния между соседними плоскостями равны. Будем увеличивать число треугольников, уменьшая это расстояние, и потребуем, чтобы нижняя грань длин оснований всех треугольников была при этом строго больше нуля. В таком случае площадь вписанной поверхности можно сделать сколь угодно большой.

Предостережение: для $\omega \in \Lambda^2(\mathbf{R}_a^3)$, определенного равенством

$$\omega = n^1(a)\,dy(a) \wedge dz(a) + n^2(a)\,dz(a) \wedge dx(a) + \\ + n^3(a)\,dx(a) \wedge dy(a),$$

неверно, например, что

$$n^1(a)\,\omega = dy(a) \wedge dz(a).$$

Обе стороны дают одинаковый результат, только будучи примененными к $v, w \in M_a$.

Несколько замечаний относительно оснований для данных нами определений длины кривой и площади поверхности. Если $c:[0,1] \to \mathbf{R}^n$ дифференцируемо и $c([0,1)]$ — одномерное многообразие с краем, то можно показать (но с помощью довольно канительного доказательства), что его длина действительно является верхней гранью длин вписанных ломаных. При $c:[0,1]^2 \to \mathbf{R}^n$ естественно ожидать, что площадь $c([0,1]^2)$ будет верхней гранью площадей поверхностей, составленных из треугольников, вершины которых лежат в $c([0,1]^2)$. Довольно поразительно, что такая верхняя грань обычно не существует — можно вписывать многогранные поверхности, сколь угодно близкие к $c([0,1]^2)$, но имеющие сколь угодно большую площадь. На рис. 5.9 это продемонстрировано на примере цилиндра. Было предложено много определений площади поверхности, которые расходятся друг с другом, но все согласуются с нашим определением для случая дифференцируемых поверхностей. Рассмотрение этих трудных вопросов читатель может найти в работах [17] или [10].

Задачи

5.23. Показать, что если M — ориентированное одномерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ и c: $[0, 1] \to M$ сориентировано, то

$$\int_{[0,1]} c^*(ds) = \int_{[0,1]} \sqrt{[(c^1)']^2 + \ldots + [(c^n)']^2}.$$

5.24. Показать, что если M есть n-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ со стандартной ориентацией, то $dV = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, так что его объем, определенный в этом параграфе, совпадает с объемом, определенным в гл. 3. (Заметим, что здесь проявляется влияние числового коэффициента в определении $\omega \wedge \eta$.)

5.25. Обобщить теорему 5.6 на случай ориентированного $(n-1)$-мерного многообразия в $\mathbf{R}^n$.

5.26. а) Пусть f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — неотрицательная функция и график f в плоскости xy вращается вокруг оси x в $\mathbf{R}^3$, образуя поверхность M. Показать, что ее площадь равна

$$\int_a^b 2\pi f\sqrt{1+(f')^2}.$$

б) Вычислить площадь сферы S^2.

5.27. Пусть $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейное отображение, сохраняющее норму, и M есть k-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$. Показать, что M и $T(M)$ имеют одинаковый объем.

5.28. а) Показать, что на k-мерном многообразии M можно определить абсолютный тензор k-й степени $|dV|$, даже если M неориентируемо, так, что M будет иметь объем $\int\limits_M |dV|$.

б) Показать, что для $c\colon [0, 2\pi]\times(-1, 1)\to\mathbf{R}^3$, определенного равенством

$$c(u, v)=\left(2\cos u+v\sin\frac{u}{2}\cos u,\ 2\sin u+v\sin\frac{u}{2}\sin u,\ v\cos\frac{u}{2}\right),$$

$c([0, 2\pi]\times(-1, 1))$ есть лист Мёбиуса, и найти его площадь.

5.29. Показать, что если на k-мерном многообразии M существует всюду отличная от нуля форма k-й степени, то M ориентируемо.

5.30. а) Пусть $f\colon [0, 1]\to\mathbf{R}$ дифференцируема и $c\colon [0, 1]\to\mathbf{R}^2$ определено равенством $c(x)=(x, f(x))$. Показать, что $c([0, 1])$ имеет длину $\int\limits_0^1 \sqrt{1+(f')^2}$.

б) Показать, что эта длина является верхней гранью длин вписанных ломаных. (Указание: Если $0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots$ $\ldots\leqslant t_n=1$, то

$$|c(t_i)-c(t_{i-1})|=\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2}=$$
$$=\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+f'(s_i)^2(t_i-t_{i-1})^2}$$

с некоторым $s_i\in[t_{i-1}, t_i]$.)

5.31. Пусть ω — форма второй степени, определенная на $\mathbf{R}^3\setminus 0$ равенством

$$\omega=\frac{x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

а) Показать, что ω замкнута.

б) Показать, что

$$\omega(p)(v_p, w_p)=\frac{\langle v\times w, p\rangle}{|p|^3}.$$

Пусть $r > 0$ и $S^2(r) = \{x \in \mathbf{R}^3: |x| = r\}$. Показать, что сужение ω на касательную плоскость к $S^2(r)$ есть элемент объема, умноженный на $1/r^2$, и что $\int\limits_{S^2(r)} \omega = 4\pi$. Вывести отсюда, что форма ω не точна. Тем не менее обозначим ω через $d\Theta$, поскольку, как мы увидим, $d\Theta$ является аналогом формы первой степени $d\theta$ на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$.

в) Показать, что если v_p — такой касательный вектор, что $v = \lambda p$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$, то $d\Theta(p)(v_p, w_p) = 0$ для всех w_p.

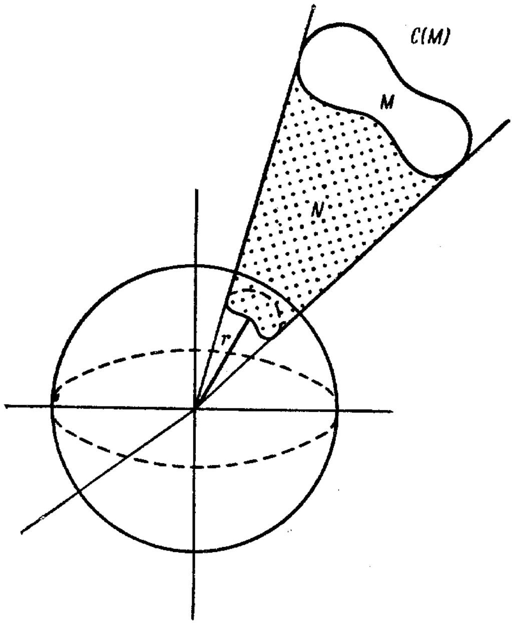


Рис. 5.10.

Показать, что если двумерное многообразие M в $\mathbf{R}^3$ является частью обобщенного конуса, т. е. объединением отрезков лучей, исходящих из нуля, то $\int\limits_M d\Theta = 0$.

г) Пусть $M \subset \mathbf{R}^3 \setminus 0$ — такое компактное двумерное многообразие с краем, что любой луч, исходящий из 0, пересекает M не более одного раза (рис. 5.10). Объединение всех исходящих из 0 лучей, пересекающих M, образует телесный угол $C(M)$. За *телесный угол*, стягиваемый многообразием M, принимается площадь $C(M)\cap S^2$ или, что то же, площадь $C(M)\cap S^2(r)$ при любом $r>0$, деленная на r^2. Доказать, что телесный угол, стягиваемый многообразием M, равен $\left|\int\limits_M d\Theta\right|$. (Указание: выбрать r столь малым, чтобы существовало трехмерное многообразие с краем N (как на рис. 5.10), имеющее в качестве ∂N объединение M, $C(M)\cap S^2(r)$ и части обобщенного конуса. (В действительности N будет многообразием с углами; см. замечания в конце следующего параграфа.).)

5.32. Пусть $f, g\colon [0, 1]\to \mathbf{R}^3$ — непересекающиеся замкнутые кривые. Определим *коэффициент зацепления* $l(f, g)$ кривых f и g формулой (ср. задачу 4.34)

$$l(f, g)=\frac{-1}{4\pi}\int\limits_{c_{f,g}} d\Theta.$$

а) Показать, что если (F, G) — гомотопия непересекающихся замкнутых кривых, то $l(F_0, G_0)=l(F_1, G_1)$.

б). Показать, что если $r(u, v)=|f(u)-g(v)|$, то

$$l(f, g)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{1}{|r(u, v)|^3}A(u, v)\,du\,dv,$$

где

$$A(u, v)=\det\begin{pmatrix}(f^1)'(u) & (f^2)'(u) & (f^3)'(u)\\ (g^1)'(v) & (g^2)'(v) & (g^3)'(v)\\ f^1(u)-g^1(v) & f^2(u)-g^2(v) & f^3(u)-g^3(v)\end{pmatrix}.$$

в) Показать, что если обе кривые f и g лежат в плоскости x, y, то $l(f, g)=0$. Кривые на рис. 4.5, *б* задаются формулами $f(u)=(\cos u, \sin u, 0)$ и $g(v)=(1+\cos v, 0, \sin v)$. Читатель может легко убедиться в том, что здесь вычисление $l(f, g)$ с помощью указанного интеграла — занятие безнадежное. Следующая задача показывает, как находить $l(f, g)$ без прямого вычисления.

5.33. а) Для точки $(a, b, c)\in\mathbf{R}^3$ положим

$$d\Theta_{(a, b, c)}=\frac{(x-a)\,dy\wedge dz+(y-b)\,dz\wedge dx+(z-c)\,dx\wedge dy}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}.$$

Далее, для компактного двумерного многообразия с краем M в $\mathbf{R}^3$ и точки $(a, b, c)\notin M$ положим

$$\Omega(a, b, c)=\int\limits_M d\Theta_{(a, b, c)}.$$

Пусть (a, b, c) — точка, лежащая по ту же сторону от M, что и внешняя нормаль, и (a', b', c') — точка, лежащая по противоположную сторону. Показать, что, выбирая (a, b, c) и (a', b', c') достаточно близкими, можно сделать $\Omega(a, b, c) - \Omega(a', b', c')$ сколь угодно близким к -4π. (Указание: сначала показать, что если $M = \partial N$, то $\Omega(a, b, c) = -4\pi$ при $(a, b, c) \in N \setminus M$ и $\Omega(a, b, c) = 0$ при $(a, b, c) \notin N$.)

б) Пусть $f([0, 1]) = \partial M$ для некоторого компактного ориентированного двумерного многообразия с краем M. (Если f не имеет самопересечений, такое M всегда существует, даже если f заузлено, см. [13, стр. 138].) Предположим, что g — кривая, обладающая тем свойством, что касательный вектор v к g в точках x, где g пересекает M, не лежит в M_x. Пусть n^+ — число тех пересечений, для которых вектор v направлен в сторону внешней нормали, n^- — число остальных пересечений и $n = n^+ - n^-$. Показать, что

$$n = \frac{-1}{4\pi} \int_g d\Omega.$$

в) Доказать, что

$$D_1\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(y-b)\,dz - (z-c)\,dy}{r^3},$$

$$D_2\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(z-c)\,dx - (x-a)\,dz}{r^3},$$

$$D_3\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(x-a)\,dy - (y-b)\,dx}{r^3},$$

где $r(x, y, z) = |(x, y, z)|$.

г) Показать, что число n из б) равно интегралу задачи 5.32, б, и, используя этот результат, показать, что $l(f, g) = 1$ для кривых f и g, изображенных на рис. 4.6, *б*, и $l(f, g) = 0$ для кривых f и g на рис. 4.6, *в*. (Эти результаты были известны Гауссу [3]. Намеченные здесь доказательства взяты из [7]; см. также [8].)

КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Теперь подготовлен весь аппарат, необходимый для формулирования и доказательства классических теорем „стоксовского типа". Мы разрешим себе несколько классических обозначений, имеющих очевидный смысл.

5.7. Теорема Грина. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^2$ — компактное двумерное многообразие с краем. Предположим, что*

α, β : $M \to \mathbf{R}$ дифференцируемы. Тогда

$$\int_{\partial M} \alpha dx + \beta dy = \int_M (D_1\beta - D_2\alpha)\, dx \wedge dy =$$

$$= \iint_M \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

где на M задана стандартная ориентация, а на ∂M — индуцированная ориентация, известная также как „обход против часовой стрелки“.

Доказательство. Это весьма специальный случай теоремы 5.5, поскольку

$$d(\alpha dx + \beta dy) = (D_1\beta - D_2\alpha)\, dx \wedge dy\, . \blacksquare$$

5.8. Теорема Гаусса — Остроградского. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^3$ — компактное трехмерное многообразие с краем, n — орт внешней нормали на ∂M и F — дифференцируемое векторное поле на M. Тогда*

$$\int_M \operatorname{div} F dV = \int_{\partial M} \langle F, n \rangle\, dA.$$

Это равенство записывается также в виде

$$\iiint_M \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) dV = \iint_{\partial M} (n^1\alpha + n^2\beta + n^3\gamma)\, dS,$$

где α, β, γ : $M \to \mathbf{R}$ — тройка дифференцируемых функций.

Доказательство. Рассмотрим на M форму $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$. Имеем $d\omega = \operatorname{div} F dV$. С другой стороны, применяя теорему 5.6 к ∂M, получаем, что на ∂M

$$n^1\, dA = dy \wedge dz,$$
$$n^2\, dA = dz \wedge dx,$$
$$n^3\, dA = dx \wedge dy,$$

Поэтому на ∂M

$$\langle F, n \rangle\, dA = F^1 n^1\, dA + F^2 n^2\, dA + F^3 n^3\, dA =$$
$$= F^1\, dy \wedge dz + F^2\, dz \wedge dx + F^3\, dx \wedge dy = \omega.$$

Таким образом, в силу теоремы 5.5

$$\int_M \operatorname{div} F\, dV = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle F,\ n\rangle\, dA. \blacksquare$$

5.9. Теорема Стокса. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^3$ — компактное ориентированное двумерное многообразие с краем, n — орт внешней нормали на M, определяемый ориентацией M, и ∂M наделено индуцированной ориентацией. Пусть, далее, T — векторное поле на ∂M, для которого $ds(T) = 1$, и F — дифференцируемое векторное поле в открытом множестве, содержащем M. Тогда*

$$\int_M \langle (\nabla \times F), n\rangle\, dA = \int_{\partial M} \langle F,\ T\rangle\, ds.$$

Это равенство часто записывают в виде

$$\int_{\partial M} \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz =$$

$$= \int_M\int \left[n^1\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + n^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + n^3\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right] ds.$$

Доказательство. Рассмотрим на M форму $\omega = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$. Так как $\nabla \times F$ имеет компоненты $D_2F^3 - D_3F^2$, $D_3F^1 - D_1F^3$, $D_1F^2 - D_2F^1$, то, как и при доказательстве теоремы 5.8, заключаем, что на M

$$\langle (\nabla \times F),\ n\rangle\, dA =$$

$$= (D_2F^3 - D_3F^2)\, dy \wedge dz + (D_3F^1 - D_1F^3)\, dz \wedge dx +$$

$$+ (D_1F^2 - D_2F^1)\, dx \wedge dy = d\omega.$$

С другой стороны, так как $ds(T) = 1$, то на ∂M

$$T^1 ds = dx,$$

$$T^2 ds = dy,$$

$$T^3 ds = dz.$$

(Эти равенства можно проверить применением обеих частей к T_x для $x \in \partial M$, поскольку T_x является базисом для $(\partial M)_x$.) Поэтому на ∂M имеем

$$\langle F, T\rangle\, ds = F^1 T^1\, ds + F^2 T^2\, ds + F^3 T^3\, ds =$$
$$= F^1\, dx + F^2\, dy + F^3\, dz = \omega,$$

Таким образом, в силу теоремы 5.5

$$\int\limits_M \langle (\nabla \times F), n\rangle\, dA = \int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial M} \langle F, T\rangle ds. \blacksquare$$

Теоремы 5.8 и 5.9 служат основанием для обозначений $\operatorname{div} F$ и $\operatorname{curl} F$[1]). Если $F(x)$ — вектор скорости жидкости в точке x (в некоторый момент времени), то $\int\limits_M \langle F, n\rangle\, dA$ есть количество жидкости, „расходящейся" из M. Следовательно, условие $\operatorname{div} F = 0$ выражает тот факт, что жидкость несжимаема. Если M — диск, то $\int\limits_{\partial M} \langle F, T\rangle\, ds$ есть мера количества жидкости, циркулирующей вдоль границы этого диска. Если она равна 0 для всех дисков, то $\nabla \times F = 0$ и течение жидкости называется *безвихревым*.

Эти интерпретации $\operatorname{div} F$ и $\operatorname{curl} F$ принадлежат Максвеллу [8]. В действительности он работал с величиной $-\operatorname{div} F$, которую соответственно называл *конвергенцией*.

Для $\nabla \times F$ Максвелл „с большой неуверенностью" предложил термин „rotation" (вращение) поля F; этим неудачным термином подсказано сокращение $\operatorname{rot} F$, иногда еще встречающееся[2]).

Классические теоремы этого параграфа обычно устанавливаются при несколько более широких условиях, чем было сделано здесь. Например, теорема Грина верна для квадрата, а теорема Гаусса — Остроградского — для куба. Эти два специальных факта можно доказать, аппроксимируя квадрат или куб многообразиями с краем. Полное обобщение

---

[1]) Напомним, что div — сокращение от divergence (расходимость), а curl означает вихрь (англ.). — *Прим. перев.*

[2]) В отечественной математической литературе обозначение rot используется не менее часто, чем curl. — *Прим. перев.*

теорем этого параграфа требует понятия многообразий с углами; это подмножества в $\mathbf{R}^n$, локально диффеоморфные частям $\mathbf{R}^k$, ограниченным кусками $(k-1)$-мерных плоскостей. Строгое определение многообразий с углами и исследование того, как можно обобщить на них результаты всей главы, будут достойными упражнениями для читателя, имеющего к этому вкус.

Задачи

5.34. Обобщить теорему Гаусса — Остроградского на случай n-мерного многообразия с краем в $\mathbf{R}^n$.

5.35. Применяя обобщенную теорему Гаусса — Остроградского к множеству $M=\{x\in\mathbf{R}^n\colon |x|\leqslant a\}$ и $F(x)=x_x$, выразить $(n-1)$-мерный объем сферы $S^{n-1}=\{x\in\mathbf{R}^n\colon |x|=1\}$ через n-мерный объем шара $B_n=\{x\in\mathbf{R}^n\colon |x|\leqslant 1\}$ $\left(\text{последний объем равен } \pi^{n/2}\Big/\left(\frac{n}{2}\right)!, \text{ если } n \text{ четно, и } \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot n}, \text{ если } n \text{ нечетно}\right)$.

5.36. Пусть F — векторное поле на $\mathbf{R}^3$, определенное равенством $F(x)=(0, 0, cx^3)_x$, и M — компактное трехмерное многообразие с краем, содержащееся в полупространстве $M\subset\{x\colon x^3\leqslant 0\}$. Поле F можно представить себе как давление жидкости плотности c, заполняющей область $\{x\colon x^3\leqslant 0\}$. Поскольку жидкость оказывает равное давление во всех направлениях, мы будем под *выталкивающей силой*, действующей на M, понимать $-\int\limits_{\partial M}\langle F, n\rangle\, dA$. Доказать *закон Архимеда*: действующая на M выталкивающая сила равна весу жидкости, вытесненной M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфорс (Ahlfors), Complex analysis, New York, 1953.
2. Аусландер и Маккензи (Auslander, MacKenzie), Introduction to differentiable manifolds, New York, 1963.
3. Гаусс (Gauss), Zur mathematischen Theorie der elektrodynamischen Wirkungen, Werke, B.5, Göttingen, 1877.
4. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, изд-во „Мир“, М., 1964.
5. Келли (Kelley), General topology, Princeton, 1955 (русский перевод готовится к печати в изд-ве „Наука“).
6. Кобаяси и Номидзу (Kobayashi, Nomizu), Foundations of differential geometry, New York, 1963.
7. Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. II, ГНТИ, М. — Л., 1931 (перевод последнего переработанного издания готовится к печати в изд-ве «Наука»).
8. Максвелл Дж. К., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, ГИТТЛ, М., 1954.
9. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, ГИТТЛ, М., 1957.
10. Радо (Radó), Length and area, New York, 1948.
11. де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
12. Стернберг (Sternberg), Lectures on differential geometry, Englewood Cliffs, 1964.
13. Форт (Fort), Topology of 3-manifolds, Englewood Cliffs, 1962.
14. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, изд-во „Мир“, М., 1964.
15. Хилтон Дж. и Уайли С., Теория гомологий, изд-во „Мир“, М., 1966.
16. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, изд-во „Мир“, М., 1964.
17. Чезари (Cesari), Surface area, Princeton, 1956.

Литература, добавленная при переводе

18. Бишоп Р., Криттенден Р., Геометрия многообразий, изд-во „Мир“, 1967.
19. Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, изд-во „Мир“, М., 1967.
20. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИЛ, М., 1960.
21. Рудин У., Основы математического анализа, изд-во „Мир“, 1966.
22. Стинрод Н., Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.
23. Телеман К., Элементы топологии и дифференцируемые многообразия, изд-во „Мир“, 1967.
24. Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, ИЛ, М., 1960.
25. Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1, 1948; т. 2, 3, 1958.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

М. Спивак

Математический анализ на многообразиях

Редактор *Л. Б. Штейнпресс*
Художник *Н. Н. Власик*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *И. К. Дерва*

Сдано в производство 10/X 1967 г. Подписано к печати 22/II 1968 г. Бумага типографская № 2. Формат $84\times108^1/_{32}=2{,}56$ бум. л. 8,61 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 7,81. Изд. № 1/4422. Цена 56 к. Зак. 904
Темплан 1968 г. Издательство „Мир", № 20

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29