FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 3
- VEŽBA 1 -

NOVI SAD, 2020

Izravnanje po metodi posrednih merenja

- Gaus-Markovljev model izravnanja

$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ – funkcionalni model

$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ – stohastički model

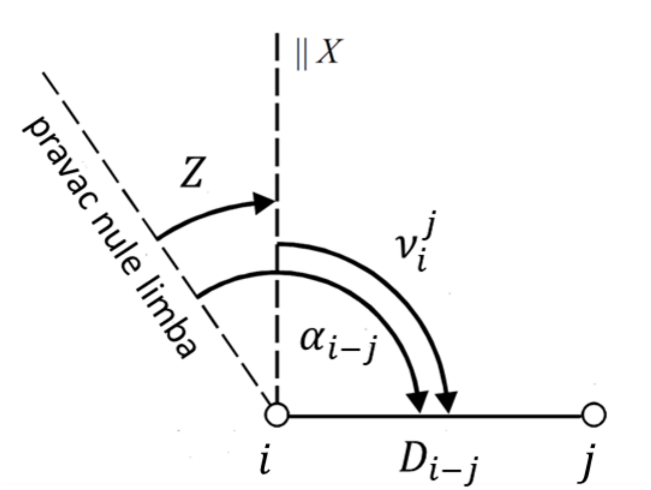
- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Funkcije veze

$$\alpha_{i-j} + v_{\alpha_{i-j}} = \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right) + Z$$ – horizontalni pravci

$$D_{i-j} + v_{D_{i-j}} = \sqrt{(Y_j - Y_i)^2 + (X_j - X_i)^2}$$ – horizontalne dužine



- Funkcije veze linearizuju se razvojem u Tejlorov red u okolini približnih vrednosti nepoznatih parametara, nakon čega se dobijaju jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{i-j}} = a_{ij} \cdot dX_i + b_{ij} \cdot dY_i + a_{ji} \cdot dX_j + b_{ji} \cdot dY_j + dZ + f_{\alpha_{i-j}}$$

$$v_{D_{i-j}} = A_{ij} \cdot dX_i + B_{ij} \cdot dY_i + A_{ji} \cdot dX_j + B_{ji} \cdot dY_j + f_{D_{i-j}}$$

Funkcionalni model

- Slobodni članovi

$$f_{\alpha_{i-j}} = \alpha_{i-j}^0 - \alpha_{i-j}, \quad \alpha_{i-j}^0 = \nu_i^j + Z_0, \quad \nu_i^j = \arctan\left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0}\right)$$

$$f_{D_{i-j}} = D_{i-j}^0 - D_{i-j}, \quad D_{i-j}^0 = \sqrt{(Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (X_j^0 - X_i^0)^2}$$

$Y_j^0, Y_i^0, X_j^0, X_i^0, Z_0$ - približne vrednosti nepoznatih parametara

- Koeficijenti

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = \frac{\rho'' \sin \nu_i^j}{D_{i-j}^0}, \qquad b_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\frac{\rho'' \cos \nu_i^j}{D_{i-j}^0}, \qquad \rho'' = 206265$$

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = -\cos \nu_i^j, \qquad B_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\sin \nu_i^j$$

Funkcionalni model

- **Primer – dvodimenzionalna geodetska mreža**

Za potrebe izgradnje objekta uspostavljena je dvodimenzionalna geodetska mreža koja se sastoji od 4 tačke. U mreži su mereni horizontalni pravci u dva girusa i dužina sa dva ponavljanja. Standard merenja pravaca iznosi 2”, a horizontalnih dužina 2 mm + 2ppm. Izravnati rezultate merenja po funkcionalnom i stohastičkom modelu posrednog izravnanja,

a) Kada je datum definisan na klasičan način tačkama 1 i 3 (Y_1, X_1 i Y_3);
b) Minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ za tačke 2 i 4.

Jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{1-2}} = a_{12} \cdot dX_1 + b_{12} \cdot dY_1 + a_{21} \cdot dX_2 + b_{21} \cdot dY_2 + dZ_1 + f_{\alpha_{1-2}}$$

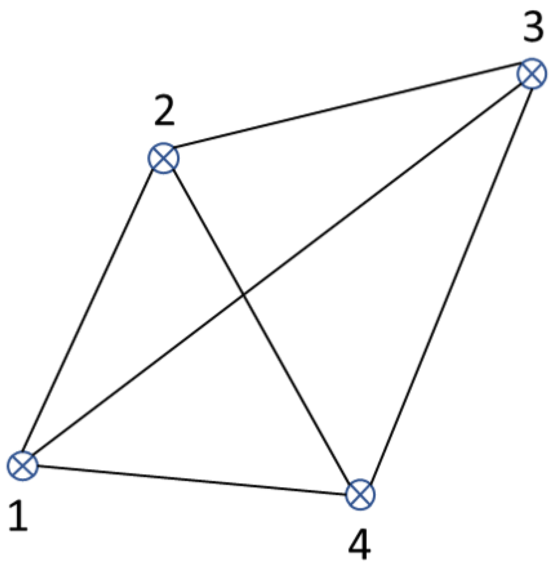
$$\vdots$$

$$v_{\alpha_{2-3}} = a_{23} \cdot dX_2 + b_{23} \cdot dY_2 + a_{32} \cdot dX_3 + b_{32} \cdot dY_3 + dZ_2 + f_{\alpha_{2-3}}$$

$$v_{D_{1-2}} = A_{12} \cdot dX_1 + B_{12} \cdot dY_1 + A_{21} \cdot dX_2 + B_{21} \cdot dY_2 + f_{D_{1-2}}$$

$$\vdots$$

$$v_{D_{4-3}} = A_{34} \cdot dX_3 + B_{34} \cdot dY_3 + A_{43} \cdot dX_4 + B_{43} \cdot dY_4 + f_{D_{4-3}}$$



Funkcionalni model

- **Primer – dvodimenzionalna geodetska mreža**

  Formiranje matrice dizajna $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccccc} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
b_{12} & a_{12} & b_{21} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
b_{13} & a_{13} & 0 & 0 & b_{31} & a_{31} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
b_{14} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{41} & a_{41} & 1 & 0 \\
0 & 0 & b_{24} & a_{24} & 0 & 0 & b_{42} & a_{42} & 0 & 1 \\
b_{12} & a_{12} & b_{21} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & b_{23} & a_{23} & b_{32} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
B_{12} & A_{12} & B_{21} & A_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{13} & A_{13} & 0 & 0 & B_{31} & A_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{14} & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{41} & A_{41} & 0 & 0 \\
0 & 0 & B_{24} & A_{24} & 0 & 0 & B_{42} & A_{42} & 0 & 0 \\
B_{12} & A_{12} & B_{21} & A_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & B_{23} & A_{23} & B_{32} & A_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & B_{34} & A_{34} & B_{43} & A_{43} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & B_{34} & A_{34} & B_{43} & A_{43} & 0 & 0
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} \alpha_{1-2} \\ \alpha_{1-3} \\ \alpha_{1-4} \\ \alpha_{2-4} \\ \alpha_{2-1} \\ \alpha_{2-3} \\ D_{1-2} \\ D_{1-3} \\ D_{1-4} \\ D_{2-4} \\ D_{2-1} \\ D_{2-3} \\ D_{3-4} \\ D_{4-3} \end{array}
\end{array}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{\alpha_{1-2}} \\ f_{\alpha_{1-3}} \\ f_{\alpha_{1-4}} \\ f_{\alpha_{2-4}} \\ f_{\alpha_{2-1}} \\ f_{\alpha_{2-3}} \\ f_{D_{1-2}} \\ f_{D_{1-3}} \\ f_{D_{1-4}} \\ f_{D_{2-4}} \\ f_{D_{2-1}} \\ f_{D_{2-3}} \\ f_{D_{3-4}} \\ f_{D_{4-3}} \end{bmatrix}$$

$$f_{\alpha_{1-2}} = \left(\nu_1^2 + Z_1^0\right) - \alpha_{1-2}$$
$$f_{\alpha_{1-3}} = \left(\nu_1^3 + Z_1^0\right) - \alpha_{1-3}$$
$$f_{\alpha_{1-4}} = \left(\nu_1^4 + Z_1^0\right) - \alpha_{1-4}$$

$$f_{\alpha_{2-4}} = \left(\nu_2^4 + Z_2^0\right) - \alpha_{2-4}$$
$$f_{\alpha_{2-1}} = \left(\nu_2^1 + Z_2^0\right) - \alpha_{2-1}$$
$$f_{\alpha_{2-3}} = \left(\nu_2^3 + Z_2^0\right) - \alpha_{2-3}$$

$$f_{D_{1-2}} = D_{1-2}^0 - D_{1-2}$$
$$\vdots$$
$$f_{D_{4-3}} = D_{4-3}^0 - D_{4-3}$$

$$Z_{1,1} = \alpha_{1-2} - \nu_1^2$$
$$Z_{1,2} = \alpha_{1-3} - \nu_1^3$$
$$Z_{1,3} = \alpha_{1-4} - \nu_1^4$$
$$Z_1^0 = \frac{Z_{1,1} + Z_{1,2} + Z_{1,3}}{3}$$

$$Z_{2,1} = \alpha_{2-4} - \nu_2^4$$
$$Z_{2,2} = \alpha_{2-1} - \nu_2^1$$
$$Z_{2,3} = \alpha_{2-3} - \nu_2^3$$
$$Z_2^0 = \frac{Z_{2,1} + Z_{2,2} + Z_{2,3}}{3}$$

Stohastički model

- **Primer – dvodimenzionalna geodetska mreža**

Računanje standardnih devijacija pravaca i dužina:

$$\sigma_{\alpha_{i-j}} = 2“ \qquad \sigma_{D_{i-j}} = 2\ \mathrm{mm} + \frac{2\ \mathrm{mm}}{\mathrm{km}} D_{i-j}[km]$$

$$\sigma_{\alpha_{i-j}} = \frac{\sigma_{\alpha_{i-j}}}{\sqrt{G}}, G - \text{broj girusa} \qquad \sigma_{D_{i-j}} = \frac{\sigma_{D_{i-j}}}{\sqrt{P}}, P - \text{broj ponavljanja}$$

Homogenizacija težina:

Za σ_0 usvojiti vrednost **1**!

$$P_{\alpha_{i-j}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\alpha_{i-j}}^2}$$

$$P_{D_{i-j}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{D_{i-j}}^2}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} P_{\alpha_{1-2}} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & P_{\alpha_{2-3}} & & & \\ & & & P_{D_{1-2}} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & P_{D_{4-3}} \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \alpha_{1-2} \\ \vdots \\ \alpha_{2-3} \\ D_{1-2} \\ \vdots \\ D_{4-3} \end{array}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-$ ili $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:
$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T\mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{n}^T\hat{\mathbf{x}}$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

$f = n - u + d$, n – broj merenja, u – broj nepoznatih parametara,
d – defekt mreže

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u. U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

Merene veličine	**Datumski parametri**			
	Translacije		Rotacija	Razmera
	t_Y	t_X	r_Z	s
Dužine	✗	✗	✗	✓
Pravci	✗	✗	✗	✗
Uglovi	✗	✗	✗	✗
Azimuti	✗	✗	✓	✗
GNSS 2D vektori	✗	✗	✓	✓

Klasičan način definisanja datuma geodetske mreže

- Kod klasičnog načina definisanja datuma fiksira se neophodan (minimalan) broj koordinata tačaka/repera mreže.
- **Primer – dvodimenzionalna geodetska mreža**

U mreži je planirano merenje pravaca i dužina, pa defekt datuma geodetske mreže iznosi 3 (definisana je razmera geodetske mreže). Shodno tome, fiksiramo koordinate Y_1, X_1 i Y_3.

Matrica datumskih uslova:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \end{array} \\
\mathbf{R}^T = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} t_Y \\ t_X \\ r_Z \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^- & (\mathbf{R}^-)^T \\ \mathbf{R}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-
$$

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Kod ovog načina definisanja datuma sve tačke mreže koje učestvuju u definiciji datuma imaju jednak tretman.

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \end{array} \\ \mathbf{B}^T = & \begin{bmatrix} {}^1/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1/_{\sqrt{m}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1/_{\sqrt{m}} & 0 & 0 \\ -\xi_1 & \eta_1 & -\xi_2 & \eta_2 & -\xi_3 & \eta_3 & -\xi_4 & \eta_4 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \xi_1 & \eta_2 & \xi_2 & \eta_3 & \xi_3 & \eta_4 & \xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} t_Y \\ t_X \\ r_Z \\ s \end{array} \end{array}$$

$$\xi_i = \frac{X_i - \bar{X}_0}{g}, \eta_i = \frac{Y_i - \bar{Y}_0}{g}$$

$$\bar{X}_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \bar{Y}_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$$

$$g = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_0)^2 + \sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_0)^2}$$

m – broj tačaka koje učestvuju u definiciji datuma geodetske mreže

Kontrola računanja:

$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{E}$,

gde je $\mathbf{E}$ jedinična matrica.

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ za deo tačaka mreže

Datum mreže definišu tačke 2 i 4. Budući da je u mreži planirano merenje pravaca i dužina, definisana je razmera geodetske mreže, pa matrica datumskih uslova ima sledeći oblik:

$$\mathbf{B}^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^{1}/_{\sqrt{m}} & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\sqrt{m}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\sqrt{m}} & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\sqrt{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & \eta_2 & 0 & 0 & -\xi_4 & \eta_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} t_Y \\ t_X \\ r_Z \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^+ & (\mathbf{B}^+)^T \\ \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ protiv $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

  pri čemu je $\sigma^2 = M\left(m_0^2\right)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

  $$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,f,\infty}$$

  Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ → **FINV($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{f}$,10000)**

  Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

  Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Defintivna kontrola izravnanja

Izravnate koordinate:

$$\hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\hat{Z} = Z_0 + dZ$$

Merene veličine iz izravnatih koordinata:

$$\hat{\alpha}_{i-j} = \hat{\nu}_i^j + \hat{Z}, \qquad \hat{\nu}_i^j = \arctan\left(\frac{\hat{Y}_j - \hat{Y}_i}{\hat{X}_j - \hat{X}_i}\right)$$

$$\hat{D}_{i-j} = \sqrt{(\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2}$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\alpha_{i-j}} = \hat{\alpha}_{i-j} - \alpha_{i-j}$$

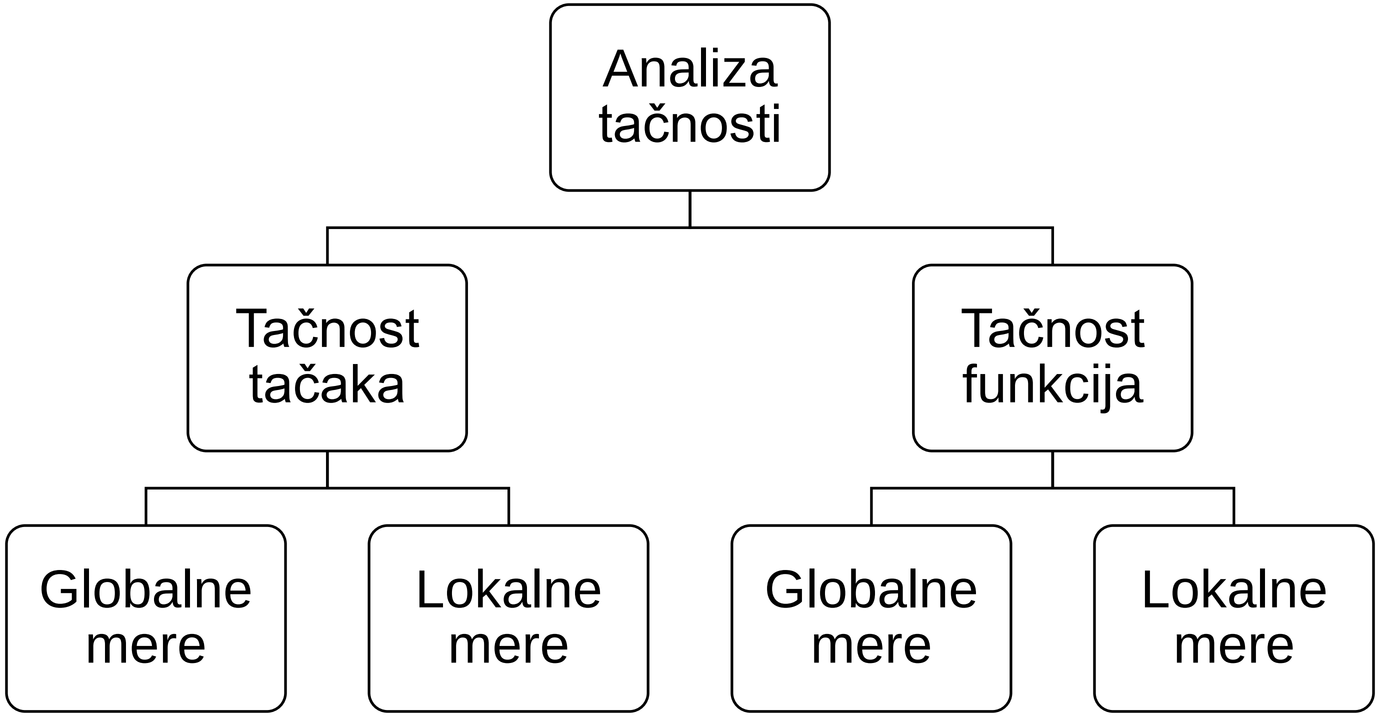
$$u_{D_{i-j}} = \hat{D}_{i-j} - D_{i-j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\alpha_{i-j}} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{D_{i-j}} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Na ovaj način se kontrolišu sve moguće greške u postupku izravnanja.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Ocena tačnosti može biti globalna ako se određuje jedna vrednost kao reprezent za ceo skup veličina u geodetskoj mreži ili lokalna ocena tačnosti ako se ona odnosi na pojedine veličine.



Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacije koordinata tačaka

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{Y}_1\hat{Y}_1} & Q_{\hat{Y}_1\hat{X}_1} & \cdots & \cdots \\ Q_{\hat{X}_1\hat{Y}_1} & Q_{\hat{X}_1\hat{X}_1} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & Q_{\hat{Y}_m\hat{Y}_m} & Q_{\hat{Y}_m\hat{X}_m} \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{X}_m\hat{Y}_m} & Q_{\hat{X}_m\hat{X}_m} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_{Y_i} = \sigma_0\sqrt{Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}}\,,\quad \hat{\sigma}_{X_i} = \sigma_0\sqrt{Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i}}$$

σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}$, $Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Standardne devijacije položaja tačaka

$$\hat{\sigma}_{P_i} = \sqrt{\hat{\sigma}_{Y_i}^2 + \hat{\sigma}_{X_i}^2}$$

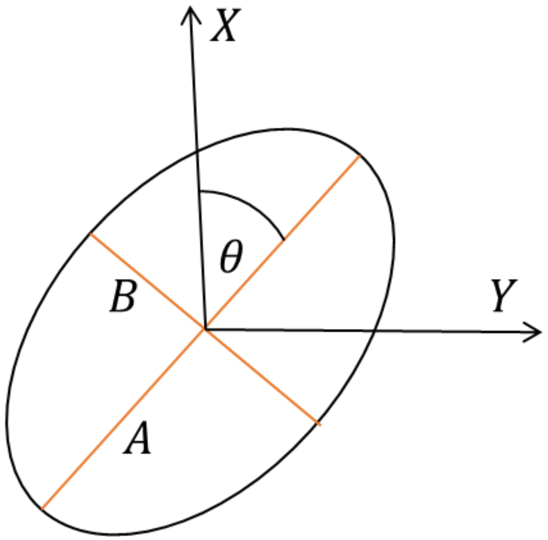
Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Elementi apsolutnih elipsi grešaka

$$\lambda_{1,i} = \frac{1}{2}(Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} + k), \quad \lambda_{2,i} = \frac{1}{2}(Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} - k)$$

$$k = \sqrt{(Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i})^2 + 4Q^2_{\hat{X}_i\hat{Y}_i}}$$

$$A_i = \sigma_0\sqrt{\lambda_{1,i} \cdot \chi^2_{1-\alpha,f}}, \quad B_i = \sigma_0\sqrt{\lambda_{2,i} \cdot \chi^2_{1-\alpha,f}}$$



$\chi^2_{1-\alpha,f}$ - kvantil χ^2 raspodele za nivo značajnosti α i broj stepeni slobode f

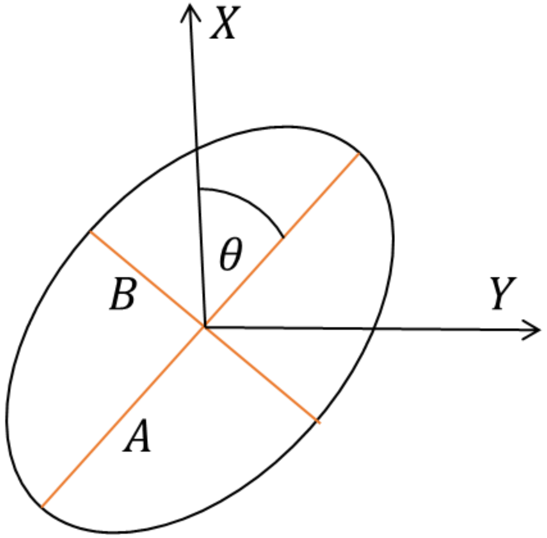
Za α usvojiti vrednost 0.05, broj stepeni slobode f iznosi 2 jer kod 2D mreža tačke imaju dve koord.

$\chi^2_{0.95,2} = 5.99$, za $\alpha = 0.05$ i $f = 2$.

Excel: $\chi^2_{1-\alpha,f} \rightarrow$ **CHIINV(α, f)**

Analiza tačnosti geodetskih mreža

$$\theta_i = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{2Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_i}}{Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}}\right) + KV\right)$$



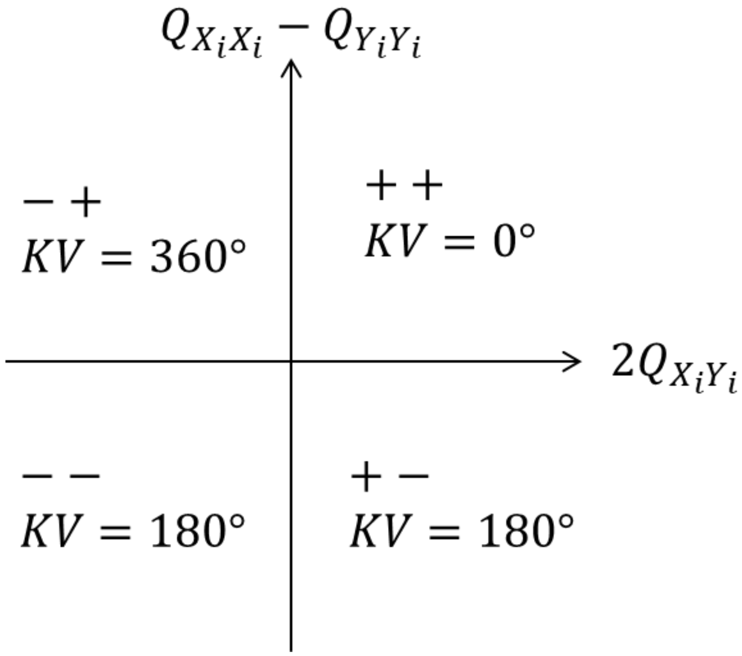
Primer:

$2Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_i} = -2$

$Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} = -2$

$KV = 180°$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{-2}{-2}\right) + KV\right) = \frac{1}{2}(45° + 180°)$$



Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacija izravnatih merenih veličina

$$\hat{\sigma}_{l_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}}$$

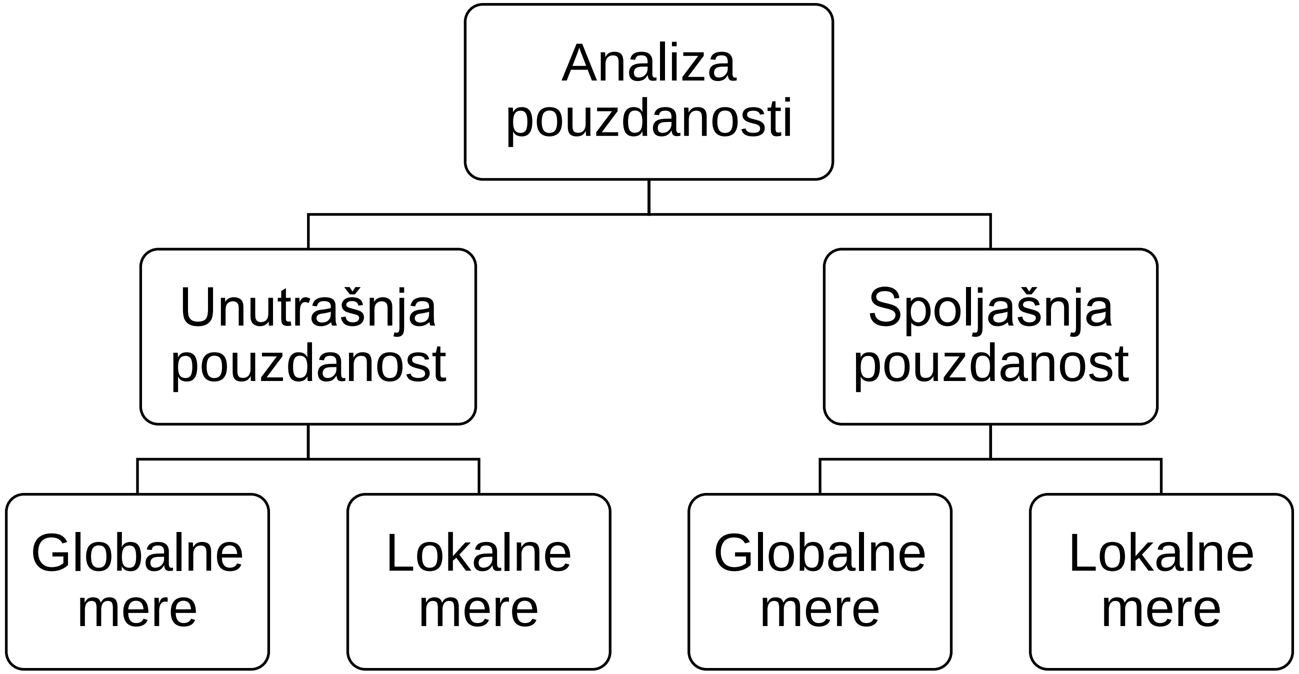
σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

Analiza pouzdanosti geodetskih mreža

- Pouzdanost geodetske mreže predstavlja kvalitet predloženog rešenja sa aspekta mogućnosti otkrivanja grubih grešaka u merenjima (unutrašnja pouzdanost), i sa aspekta uticaja neotkrivenih grubih grešaka na ocene traženih veličina (spoljašnja pouzdanost).



Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina
$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$ - kofaktorska matrica popravaka merenih veličina

$r_i = Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i} \cdot P_i$
$Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}$ – i-ti dijagonalni element matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$
P_i – i-ti dijagonalni element matrice težina $\mathbf{P}$

Kontrola:

$$\sum ri = f,$$

$f = n - u + d$ – broj stepeni slobode.

Koeficijent r_i predstavlja uticaj grube greške i-tog opažanja na i-tu popravku.
Verovatnoća otkrivanja grube greške je veća ukoliko je koeficijent r_i veći.
$r_i < 0.3$ – nepouzdano merenje, $r_i \geq 0.3$ – pouzdano merenje

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- **Marginalna gruba greška koja se može otkriti *Data snooping* testom**

$G_i = \frac{\sigma_0\sqrt{\lambda_0}}{P_i\sqrt{Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}}}$, $\sqrt{\lambda_0}$ - parametar necentralnosti

$\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha_0/2}$

$t_{1-\beta_0}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojenu moć testa

$t_{1-\alpha_0/2}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojeni nivo značajnosti

$\sqrt{\lambda_0} = 0.842 + 1.96 = \mathbf{2.802}$, za $1 - \beta_0 = 0.80$ i $\alpha_0 = 0.05$.

Marginalna greška G_i predstavlja vrednost grube greške koja se može otkriti *Data snooping* testom, pod pretpostavkom postojanja samo jedne grube greške.

Transformacija rešenja

- Transformacija rešenja iz datuma definisanog na klasičan način u datum definisan minimalnim tragom

  $\hat{\mathbf{x}}_{trans} = \mathbf{N}^{+}\mathbf{N}\tilde{\mathbf{x}}$

  $\tilde{\mathbf{x}}$ - vektor nepoznatih parametara iz klasičnog načina definisanja datuma

  Kontrola: $\hat{\mathbf{x}}_{trans} - \hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0}$

- Transformacija rešenja iz datuma definisanog minimalnim tragom u datum definisan na klasičan način

  $\tilde{\mathbf{x}}_{trans} = \mathbf{N}^{-}\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}}$

  $\hat{\mathbf{x}}$ - vektor nepoznatih parametara iz rešenja kada datum definisan min. tragom

  Kontrola: $\tilde{\mathbf{x}}_{trans} - \tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0}$