Olimpiada Națională Gazeta Matematica
– Faza pe școală –
20.02.2021

Clasa a VI-a

1) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:
   $2xy - 3x - 5y = 4$
2) Determinați cel mai mic număr natural de trei cifre, care împărțit la 8, 12 și 15 dă resturile 5, 9 respectiv, 12.
3) Trei unghiuri formate în jurul punctului O au măsurile x, y, z (exprimate în grade). Dacă x și y sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar y și z sunt invers proporționale cu 0,1(6) și 0,2, determinați măsurile celor trei unghiuri.
4) Fie A, B, C, D puncte coliniare astfel încât AC = 8cm, BC = 7cm și AD = 9cm. Calculați lungimea segmentului BD.

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7.
Timp de lucru 120 minute.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ 2020-2021

Faza pe școală

20 februarie 2021

Clasa a 7-a

1. Arătați că $\sqrt{2017\cdot 2018+\sqrt{2017\cdot 2018+\sqrt{2017\cdot 2018+\sqrt{2017\cdot 2018}}}}<2018$

2. Să se calculeze perimetrul unui triunghi ale cărui laturi *a, b, c* satisfac inegalitatea $\sqrt{a^2-4\sqrt{3}a+21}+\sqrt{b^2-2\sqrt{3}b+28}+\sqrt{c^2-6c+25}\le 12$.

3. Se consideră trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$, $AB<CD$ și $AC\perp BD$. Dacă *N* este un punct oarecare pe $[OC]$, unde $AC\cap BD=\{O\}$ și *P* este intersecția perpendicularei din *C* pe *DN* cu dreapta *BD*, arătați că $BN\perp AP$.

4. Din punctul *O*, centrul rombului *ABCD* ducem perpendicularele $OP\perp AD$ și $OQ\perp AB$, $P\in AD$ și $Q\in AB$. Știind că $PQ=\frac{AC}{2}$ arătați că ABCD este pătrat.

Fiecare subiect se puncteaza cu 7 puncte. Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ 2020-2021

Faza pe școală

20 februarie 2021

Clasa a 8-a

1. Fie $E(x)=16x^2-32x+25,\ x\in\mathbb{R}$.
   a) Dacă $m=\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\sqrt{3}-3$ arătați că $E(m)\in\mathbb{Z}$.
   b) Dacă $a\in\mathbb{Z}$ scrieți numărul $E(a)$ ca sumă de două pătrate.
   c) Pentru $x\in\mathbb{N}$ determinați valoarea maximă a expresiei $F\left(x\right)=10-E(x)$.

2. Se consideră numerele $x,y\in\mathbb{R}$, $x\in\left[-8,-2\right]$ și $y=x+5.$ Arătați că expresia $E(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+16x+6y+73}+\sqrt{x^2+y^2+4x-6y+13}$ este constantă.

3. Calculați sumele:
   a) $S=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}}+\frac{1}{\sqrt{9+2\sqrt{20}}}$
   b) $S=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

4. În piramida patrulateră regulate *VABCD,* cu baza pătratul *ABCD*, *G* este centrul de greutate al ΔVAC, *F* este centrul de greutate al ΔABD și *M* este mijlocul segmentului $\left[BG\right]$. Demonstrați că $FM \parallel \left(VDC\right)$.

Fiecare subiect se puncteaza cu 7 puncte. Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ 2020-2021

Faza pe școală – 20 februarie 2021

Clasa a IX-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left[\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{[x]+1},$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

2. a) Fie $a,b\in[1,+\infty]$. Arătați că $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{1+ab}$.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n^2+4n}\in\mathbb{N}$.

3. a) Demonstrați că $2^2+5^2+8^2+...+(3n-1)^2=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ fixat, determinați $a_1, a_2, a_3, ..., a_n\in\mathbb{R}$ care satisfac inegalitatea:

$$2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2\right)-4\left[2a_1+5a_2+8a_3+...+(3n-1)a_n\right]+n\left(6n^2+3n-1\right)\le 0.$$

4. Pe laturile paralelogramului ABCD se consideră punctele $M\in(AB), N\in(BC), P\in(DC)$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{DP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Arătați că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe AC.

Fiecare subiect se punctează cu 7p.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore

BAREM

1. $\left[\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{[x]+1}=k,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+1\in\{\pm1\}$ **(1p)**

I. $\begin{cases}[x]=0\\ \left[\frac{1}{x+1}\right]=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[0,1)\\ x\in\left(-\frac{1}{2},0\right]\end{cases}\Rightarrow x=0$ **(2,25p)**

II. $\begin{cases}[x]=-2\\ \left[\frac{1}{x+1}\right]=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-2,-1)\\ x\in(-\infty,-2]\end{cases}\Rightarrow x=-2$ **(2,25p)**

Din I și II $\Rightarrow S=\{0,-2\}$ **(0,5p)**

2. a) $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{1+ab},\quad a,b\in[1,+\infty)$

Prin calcul direct se obține: $\underbrace{(a-1)}_{\ge0}\underbrace{(b-1)}_{\ge0}\underbrace{(ab-1)}_{\ge0}\ge0\ (A),\ \forall a,b\in[1,+\infty)$ **(2,75p)**

Avem egaliatate dacă a=1 sau b=1. **(0,25p)**

b) $\sqrt{n^2+4n}=k\in\mathbb{N}\Rightarrow(n+2-k)\underbrace{(n+2+k)}_{>0}=4$

$(n+2-k,\ n+2+k)\in\{(4,1),(2,2),(1,4)\}\Rightarrow 2n+4=4\Rightarrow n=0$ **(3p)**

3. a) Inducție matematică **(3p)**

b) Din a) avem:

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2-2\left[2a_1+5a_2+8a_3+...+(3n-1)a_n\right]+2^2+5^2+8^2+...+(3n-1)^2\le0$ **(0,5p)**

$\left(a_1^2-2a_1+2^2\right)+\left(a_2^2-2\cdot5a_2+5^2\right)+...+\left[a_n^2-2(3n-1)a_n+(3n-1)^2\right]\le0$ **(1p)**

$\underbrace{(a_1-2)^2}_{\ge0}+\underbrace{(a_2-5)^2}_{\ge0}+...+\underbrace{(a_n-3n+1)^2}_{\ge0}\le0\Rightarrow\begin{cases}a_1=2\\ a_2=5\\ ....\\ a_n=3n-1\end{cases}$. **(1p+0,5p)**

4. Fie $PE=EN,\ E\in(PN)\Rightarrow G\in(ME),\ MG=\frac{2}{3}\cdot ME$, unde G este ecentrul de greutate al ΔMNP.

$$\overrightarrow{ME}=\frac{\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MN}}{2}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}}{2}=\frac{-\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\cdot\overrightarrow{BC}}{2}=$$

$$=\frac{-\overrightarrow{AB}+11\overrightarrow{BC}}{12}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{2\left(-\overrightarrow{AB}+11\overrightarrow{BC}\right)}{36}$$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MG}=\frac{11}{18}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{11}{18}\overrightarrow{AC}\Rightarrow G\in(AC)$ **(6p)**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ 2020-2021

Faza pe școală

20 februarie 2021

Clasa a10-a

1. Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, demonstrați că $\dfrac{3abc}{ab+ac+bc}\le\sqrt[3]{abc}\le\dfrac{a+b+c}{3}$.

2. Dacă $a=\log_{15}4$ și $b=\log_6 15$ exprimați în funcție de *a* și *b* numărul $c=\log_{10}25$.

3. Arătați că pentru orice $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ au loc relațiile:
   a) $\left|1+\overline{z_1}z_2\right|^2+\left|z_2-z_1\right|^2=\left(1+\left|z_1\right|^2\right)\left(1+z_2\overline{z_2}\right)$
   b) $\left|1-\overline{z_1}z_2\right|^2\ge\left(1-\left|z_1\right|^2\right)\left(1-\left|z_2\right|^2\right)$

4. Arătați că nu există funcții injective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care, pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}$, satisfic relația $f\left(3^x\right)+f\left(5^x\right)=8$.

Fiecare subiect se puncteaza cu 7 puncte. Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională Gazeta Matematica
– Faza pe școală –
20.02.2021

Clasa a XI-a

1) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$

2) Fie șirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ și $(y_n)_{n\geq 0}$ care verifică relațiile:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3}x_n - y_n \\ y_{n+1} = \sqrt{3}y_n + x_n \end{cases}, \forall n \geq 0 \text{ și } x_0 = a,\ y_0 = b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$$

Să se afle x_n, y_n în funcție de a și b

3) Se dă triunghiul ABC, unde A(m+3, m+2), B(2, 3), C(–3, 4)
   a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât aria triunghiului ABC este 8
   b) Pentru m = – 2 să se calculeze lungimea înălțimii din A

4) a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$
   b) Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$a_n = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx}{\sin^2 (n+1)x + \sin^2 (n+2)x + \ldots + \sin^2 2nx}$$

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7.
Timp de lucru 180 minute.