Cl. a VII a

① Se consideră

$$S=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{11}{3\cdot 4}+\frac{19}{4\cdot 5}+\dots+\frac{n^2+n-1}{n(n+1)}\right)(n+1),\ n\in\mathbb{N}^*$$

$$P=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\cdot 2n$$

Să se determine n astfel încât $\frac{3(P-S)}{n+7}\in\mathbb{N}$.

Potrean Octavi, Potrean Ilica

Rez:

$$\frac{S}{n+1}=\frac{1(1+1)-1}{1\cdot 2}+\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3}+\frac{3\cdot 4-1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{1\cdot 2}+1-\frac{1}{2\cdot 3}+1-\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+1-\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=n-\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=n-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=n-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=n-\frac{n+1-1}{n+1}\overset{n+1)}{=}n-\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+n-n}{n+1}=\frac{n^2}{n+1}$$

$$P=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot 2n=\left(\frac{n+1}{2}-\frac{1}{n}\right)\cdot 2n=$$

$$=\frac{n^2+n-2}{2n}\cdot 2n=n^2+n-2$$

$$S=n^2,\quad P=n^2+n-2\Rightarrow P-S=n^2+n-2-n^2=n-2$$

$$\frac{3(P-S)}{n+7}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{3(n-2)}{n+7}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{3n-6}{n+7}\in\mathbb{N}$$

$(n+7)/(3n-6)$

$(n+7)\mid(n+7)\quad |\cdot 3$ $\Rightarrow$ $(n+7)\mid(3n-6)$, $(n+7)\mid(3n+21)$ $(-)$

$(n+7)\mid 27$

$n+7\in D_{27}\Rightarrow n+7\in\{1,3,9,27\},\ n\in\mathbb{N}^*$

$n\in\{2,20\}$

$n=2\Rightarrow\frac{6-6}{2+7}=\frac{0}{9}=0\in\mathbb{N}$

$n=20\Rightarrow\frac{60-6}{20+7}=\frac{54}{27}=2\in\mathbb{N}$

cl VII

② a) Să se arate că $\frac{(\sqrt{2020})^{2n+1} + (-\sqrt{2020})^{2n+1} + xy}{(x+y)\sqrt{xy}} \le \frac{1}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

b) Să se demonstreze:
$$\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{6}{5\sqrt{6}} + \dots + \frac{n^2+n}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Rez

a) $2n+1$ impar $\Rightarrow (-\sqrt{2020})^{2n+1} = -(\sqrt{2020})^{2n+1}$

$\Rightarrow (\sqrt{2020})^{2n+1} + (-\sqrt{2020})^{2n+1} = 0 \Rightarrow \frac{xy}{(x+y)\sqrt{xy}} \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{(x+y)} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{xy} \le x+y \Rightarrow 0 \le x - 2\sqrt{xy} + y$

$\Rightarrow 0 \le (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ adevărat, cu egalitate dacă $x=y$

$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{1\cdot 2}{(1+2)\sqrt{1\cdot 2}} < \frac{1}{2}$ $\qquad 1 \neq 2$

$\frac{6}{5\sqrt{6}} = \frac{2\cdot 3}{(2+3)\sqrt{6}} < \frac{1}{2}$ $\qquad 2 \neq 3$

...

$\frac{n^2+n}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{[n+(n+1)]\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{2}$ $\qquad n \neq n+1$

(+)

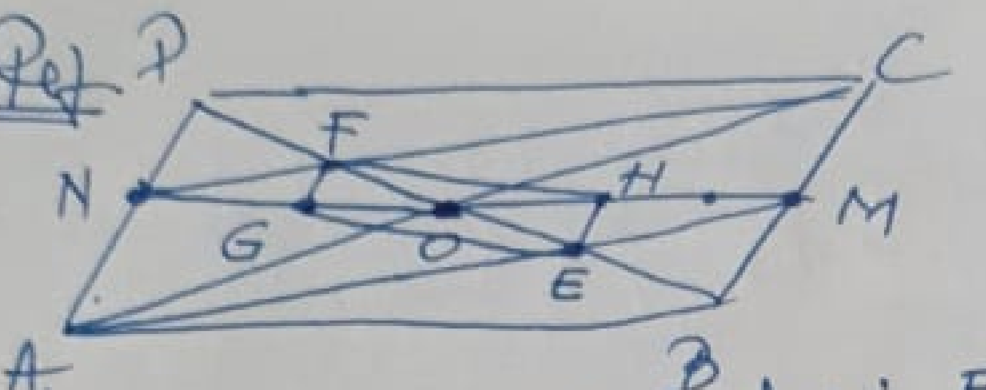
$$\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{6}{5\sqrt{6}} + \dots + \frac{n^2+n}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{n}{2}$$

Cl. a VII-a

(3) Se consideră ABCD un paralelogram, M și N mijloacele laturilor [BC] și [AD], $AM \cap BD = \{E\}$, $CN \cap BD = \{F\}$, G, H centrele de greutate ale triunghiurilor ΔANC, respectiv AMC. Să se determine natura patrulaterului EHFG.

Potoceanu Octavia, Potoceanu Mircea

Rez.



În ΔADC, $CN \cap BD = \{F\}$, [CN]; [DO] mediane, deci F – centrul de greutate

În ΔABC, $AM \cap BO = \{E\}$ atunci E este centrul de greutate

$\Rightarrow FO = \frac{1}{3} DO$, $EO = \frac{1}{3} BO$, $DO = BO$ (ABCD-p) $\Rightarrow FO = EO$ (1)

În ΔAOD, G – cg al $\Delta AOD \Rightarrow OG = \frac{2}{3} ON$ (2)

În ΔOBC, H – c.g. al $\Delta BOC \Rightarrow OH = \frac{2}{3} OM$

$AN = ND = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} = MC = BM$ $\Rightarrow$ DNMC – p.r.

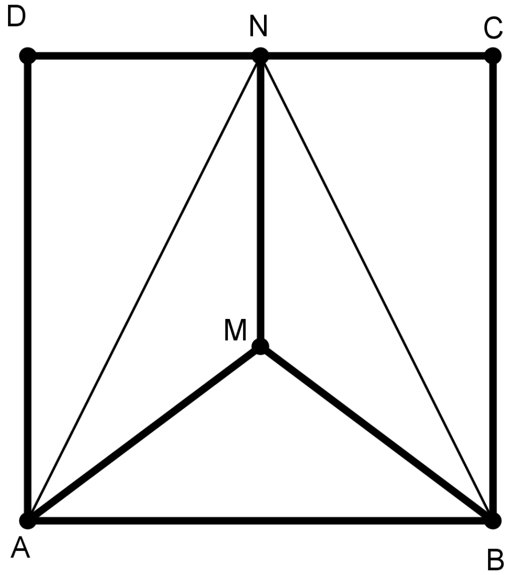
$AD \parallel BC$, $N \in AD$, $M \in BC$ $\Rightarrow DN \parallel CM$, $AN \parallel MC$ $\Rightarrow$ ANCM – p.r.

$NM \cap AC = \{O'\}$, O' mijlocul lui [AC], dar $AC \cap DB = \{O\}$ (ABCD-p), O mij lui [AC] $\Rightarrow O = O'$ $\Rightarrow$ N-O-M coliniare $\Rightarrow ON = OM$

$\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} OG = OH$ (4)

deci $\overset{(1)}{\underset{(4)}{\Longrightarrow}}$ GFHE – p.r. – (diag. se înjumătățesc)

<u>Problema 1: (clasa aVII-a)</u>: Un punct M se află în interiorul pătratului ABCD de latură 12 cm și punctul $N \in (CD)$ astfel încât $MN \perp CD$ și MA=MB=MN. Aflați MA.



<u>Soluție:</u>

Cum MA=MB=MN, rezultă că M este centrul cercului circumscris triunghiului ABN, iar MA este raza acestui cerc.

Din MA=MB, avem că M aparține mediatoarei segmentului (AB) (deci și a lui (DC)). Cum $MN \perp CD$, avem că MN este mediatoarea segmentului (CD), N este mijlocul lui (CD) și NA=NB.

Folosind teorema lui Pitagora obținem NA=NB=$6\sqrt{5}$ cm; aria triunghiului NAB este 72 cm^2. Din formula razei cercului circumscris unui triunghi obținem că AM=7,5 cm.

<u>Problema 2:</u> Fie a un număr natural de două cifre. Răsturnatul lui a este un număr natural b astfel încât b este mai cu p% mai mare decât a. Știind că p este un număr natural impar, aflați valoarea maximă a lui p.

Soluție:

Fie a=$\overline{xy}$ și b=$\overline{yx}$, unde x și y sunt cifre nenule, y>x.

Avem $\overline{yx}=\overline{xy}\left(1+\frac{p}{100}\right)$, de unde $100\overline{yx}=\overline{xy}(100+p)$.

Făcând calculele obținem $900(y-x)=p(10x+y)$.

$y-x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, iar 10x+y este un divizor al lui 900(y-x).

Dacă y-x=1, atunci 10x+y poate fi doar 12 sau 45.

Dacă y-x=2, atunci 10x+y poate fi doar 24.

Dacă y-x=3, atunci 10x+y poate fi doar 25 sau 36.

Dacă y-x=4, atunci 10x+y poate fi doar 15 sau 48.

Dacă y-x=7, atunci 10x+y poate fi doar 18.

Dacă $y-x\in\{5,6,8\}$, atunci 10x+y nu are nici o valoare posibilă.

Din aceste valori doar 12, 24, 36 și 48 dau valori impare pentru p și în fiecare caz această valoare este 75. Deci cea mai mare valoare a lui p este 75.

Autor: prof. Rareș Mihăilescu, Liceul Teoretic Vasile Goldiș Arad