CLASA A-IX-A

Rezolvați ecuația $x+[x]=15\cdot\{x\}$, $x\in\mathbb{Q}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă și $\{x\}$ partea fracționară a lui.

Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare

$x+[x]=15\cdot\{x\}$ (1)

$x=[x]+\{x\}$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow [x]+\{x\}+[x]=15\{x\} \Leftrightarrow 2[x]=15\{x\}-\{x\} \Leftrightarrow 14\cdot\{x\}=2\cdot[x] \;|:2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7\cdot\{x\}=[x]$ (3)

(3) $\Rightarrow x=0$ este soluție (4)

$[x]\in\mathbb{Z}$ (5)

$\{x\}\in[0,1)$ (6)

(3),(5),(6) $\Rightarrow 7\cdot\{x\}\in[0,7)\cap\mathbb{Z}$ (7)

(6),(7) $\Rightarrow$ 1) $7\{x\}=1 \Leftrightarrow \{x\}=\dfrac{1}{7}$ (8)

$[x]=1$ (9)

(8),(9) $\Rightarrow x=1+\dfrac{1}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{7}$ (10)

2) $7\{x\}=2 \Leftrightarrow \{x\}=\dfrac{2}{7}$ (11)

$[x]=2$ (12)

(11),(12) $\Rightarrow x=2+\dfrac{2}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{16}{7}$ (13)

3) $7\{x\}=3 \Leftrightarrow \{x\}=\dfrac{3}{7}$ (14)

$[x]=3$ (15)

(14),(15) $\Rightarrow x=3+\dfrac{3}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{24}{7}$ (16)

4) $7\{x\}=4 \Leftrightarrow \{x\}=\dfrac{4}{7}$ (17)

$[x]=4$ (18)

(17),(18) $\Rightarrow x=4+\dfrac{4}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{32}{7}$ (19)

5) $7\{x\}=5 \Leftrightarrow \{x\}=\dfrac{5}{7}$ (20)

$[x]=5$ (21)

(20),(21) $\Rightarrow x=5+\dfrac{5}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{40}{7}$ (22)

6) $7\{x\}=6 \Leftrightarrow \{x\}=\dfrac{6}{7}$ (23)

$[x]=6$ (24)

(23),(24) $\Rightarrow x=6+\dfrac{6}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{48}{7}$ (25)

(4),(10),(13),(16),(19),(22),(25) $\Rightarrow S=\left\{0;\dfrac{8}{7};\dfrac{16}{7};\dfrac{24}{7};\dfrac{32}{7};\dfrac{40}{7};\dfrac{48}{7}\right\}$ (26)

CLASA A-XI-A

Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel

încât $X^2 = x \cdot X + y \cdot I_2$.

Doina Stoica și Mircea Marius Stoica, Arad

Rezolvare

$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ (1)

(1) $\Rightarrow X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 84 \\ 112 & 148 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 64 & 84 \\ 112 & 148 \end{pmatrix}$ (2)

(1) $\Rightarrow x \cdot X + y \cdot I_2 = x \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+y & 6x \\ 8x & 10x+y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot X + y \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 4x+y & 6x \\ 8x & 10x+y \end{pmatrix}$ (3)

$X^2 = x \cdot X + y \cdot I_2$ (4)

$(2),(3),(4) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4x+y & 6x \\ 8x & 10x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 84 \\ 112 & 148 \end{pmatrix}$ (5)

$(5) \Rightarrow \begin{cases} 4x+y = 64 \\ 6x = 84 \;|:6 \\ 8x = 112 \;|:8 \\ 10x+y = 148 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ 4 \cdot 14 + y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 8 \end{cases}$ (6)

$(6) \Rightarrow x = 14$ și $y = 8$ (7)

CLASA A-$\overline{XI}$-A

Rezolvați ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 3931 & 4187 \\ 2133 & 2272 \end{pmatrix}$, unde $X \in M_2(\mathbb{Z})$.

Doina Stoica și Mircea Marius Stoica, Arad.

Rezolvare:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3931 & 4187 \\ 2133 & 2272 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = X \cdot X \Leftrightarrow X^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + tz & yz + t^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 3931 \\ xy + yt = 4187 \\ xz + tz = 2133 \\ yz + t^2 = 2272 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + yz - yz - t^2 = 3931 - 2272 \\ y \cdot (x+t) = 4817 \\ z \cdot (x+t) = 2133 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-t) \cdot (x+t) = 1659 \\ y \cdot (x+t) = 4817 \\ z \cdot (x+t) = 2133 \end{cases} \quad (3)$$

$$1659 = 21 \cdot 79 \; ; \; 4187 = 53 \cdot 79 \; ; \; 2133 = 27 \cdot 79 \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow I) \begin{cases} x-t = -21 \\ x+t = -79 \\ y = -53 \\ z = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -50 \\ y = -53 \\ z = -27 \\ t = -29 \end{cases} \quad (5)$$

$$II) \begin{cases} x-t = 21 \\ x+t = +79 \\ y = 53 \\ z = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 53 \\ z = 27 \\ t = 29 \end{cases} \quad (6)$$

$(5),(6) \Rightarrow$ avem 2 soluții:

$$1) \; X_1 = \begin{pmatrix} -50 & -53 \\ -27 & -29 \end{pmatrix} \; ; \; 2) \; X_2 = \begin{pmatrix} 50 & 53 \\ 27 & 29 \end{pmatrix}$$