CLASA a V-a

Produsul a 2 numere naturale este egal cu 1961. Dacă primului număr i se adaugă 63, atunci produsul se măreşte 3339. Aflaţi cele 2 numere.

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Notăm numerele cu a şi b(1). Avem:
1) $a \cdot b = 1961$ (2)
2) $(a + 63) \cdot b = 1961 + 3339 \Leftrightarrow ab + 63b = 5300$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow 1961 + 63b = 5300 \Leftrightarrow 63b = 5300 - 1961 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 63b = 3339 \Leftrightarrow b = 3339 : 63 \Leftrightarrow b = 53$ (4)

(2), (4) $\Rightarrow a \cdot 53 = 1961 \Leftrightarrow a = 1961 : 53 \Leftrightarrow a = 37$ (5)

Numerele sunt 37 şi 53.

CLASA a VI-a

Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$^{7Y)}\frac{1}{x}+{}^{7X)}\frac{1}{y}={}^{XY)}\frac{1}{7}$ (1) $\Leftrightarrow \frac{7y}{7xy}+\frac{7x}{7xy}=\frac{xy}{7xy} \mid \cdot 7xy \Rightarrow 7y + 7x = xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7y + 7x - xy = 0 \Leftrightarrow 7x - 49 - xy + 7y + 49 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7(x - 7) - y(x - 7) + 49 = 0 \Leftrightarrow (x-7)\cdot(7-y) = -49 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow (x-7)\cdot(y-7) = 49$ (2)

(2) $\Rightarrow$ 1) $x - 7 = -49 \Leftrightarrow x = -42$ (3)

$y - 7 = -1 \Leftrightarrow y = 6$

2) $x - 7 = -7 \Leftrightarrow x = 0$ nu corespunde

$y - 7 = -7 \Leftrightarrow y = 0$ nu corespunde

3) $x - 7 = -1 \Leftrightarrow x = 6$ (4)

$y - 7 = -49 \Leftrightarrow y = -42$

4) $x - 7 = 1 \Leftrightarrow x = 8$ (5)

$y - 7 = 49 \Leftrightarrow y = 56$

5) $x - 7 = 7 \Leftrightarrow x = 14$ (6)

$y - 7 = 7 \Leftrightarrow y = 14$

6) $x - 7 = 49 \Leftrightarrow x = 56$ (7)

$y - 7 = 1 \Leftrightarrow y = 8$

(1), …, (7) $\Rightarrow S = \{(-42; 6); (6; -42); (8; 56); (14; 14); (56; 8)\}$ (8)

CLASA a VI-a

Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia:

$(x - 49) \cdot (x - 48) + (y + 2010) \cdot (y + 2011) = 0$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$(x - 49) \cdot (x - 48) + (y + 2010) \cdot (y + 2011) = 0$ (1)

$n(n+1) \geq 0$ (2), $\forall n \in \mathbb{Z}$

(2) $\Rightarrow$ 1) $(x - 49) \cdot (x - 48) \geq 0$ (3)

2) $(y + 2010) \cdot (y + 2011) \geq 0$ (4)

(1), (3), (4) $\Rightarrow$ 1) $(x - 49) \cdot (x - 48) = 0 \Rightarrow$ I) $x - 49 = 0 \Rightarrow x_1 = 49$ (5)

II) $x - 48 = 0 \Rightarrow x_2 = 48$ (6)

2) $(y + 2010) \cdot (y + 2011) = 0 \Rightarrow$ I) $y + 2010 = 0$

$y_1 = -2010$ (7)

II) $y + 2011 = 0$

$y_2 = -2011$ (8)

(1), (5), (6), (7), (8) $\Rightarrow$ S= {(48; -2011); (48; -2010); (49; -2011); (49; -2010)} (9)

CLASA a VI-a

Arătaţi că: $\frac{1}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots+\frac{1959^2+1959-1}{1960!}+\frac{1960!+1960-1}{1961!}<2$,

unde n! = 1·2· … ·n, $n\in \mathrm{N}^*$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Ştim că $\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$ (1)

(1) $\Rightarrow \frac{1}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots+\frac{1959^2+1959-1}{1960!}+\frac{1960^2+1960-1}{1961!}=1-\frac{1}{2!}+1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\ldots+$

$+\frac{1}{1959!}-\frac{1}{1961!}+\frac{1}{1960!}-\frac{1}{1962!}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots+\frac{1959^2+1959-1}{1960!}+\frac{1960^2+1960-1}{1961!}=2-\frac{1}{1961!}-\frac{1}{1962!}$ (1)

$2-\frac{1}{1961!}-\frac{1}{1962!}<2$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \frac{1}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots+\frac{1959^2+1959-1}{1960!}+\frac{1960^2+1960-1}{1961!}<2$ (3)

CLASA a VI-a

Determinaţi numerele naturale x, y şi z ştiind că satisfac simultan condiţiile:

1) $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$

2) $x \cdot y \cdot z = 2xy + xz + 5yz$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

1) $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} = k$ (1)

1) $\frac{x}{5} = k \Leftrightarrow x = 5k$ (2)

2) $\frac{y}{2} = k \Leftrightarrow y = 2k$ (3)

3) $\frac{z}{4} = k \Leftrightarrow z = 4k$ (4)

(2), (3), (4) $\Rightarrow$ 1) $x \cdot y \cdot z = 5k \cdot 2k \cdot 4k \Leftrightarrow x \cdot y \cdot z = 40k^3$ (5)

2) $2xy + xz + 5yz = 2 \cdot 5k \cdot 2k + 5k \cdot 4k + 5 \cdot 2k \cdot 4k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2xy + xz + 5yz = 80k^2$ (6)

$xyz = 2xy + xz + 5yz$ (7)

(5), (6), (7) $\Rightarrow 40k^3 = 80k^2 \mid : 40 \Leftrightarrow k^3 = 2k^2 \Leftrightarrow k^3 - 2k^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k^2(k - 2) = 0$ (8)

(8) $\Rightarrow$ 1) $k^2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0$ (9)
2) $k - 2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 2$ (10)

(2), (3), (4), (9), (10) $\Rightarrow$ avem 2 soluţii:
1) $x = 0, y = 0, z = 0$
2) $x = 10, y = 4, z = 8$

CLASA a VI – a

La o primă sortare de mere, pierderile au fost de 8%. La a doua sortare, pierderile au fost de 4% din cantitatea de mere rezultată din prima sortare.

După a doua sortare au rămas 44,16t mere. Câte tone de mere au fost înainte de prima sortare?

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

1) Notăm cu x cantitatea de mere (1)

După prima sortare rămân (100% - 8%) · x = $\frac{92}{100}$ · x =0,92x (2)

2) după o a doua sortare rămân (100% - 4%) · 0,92x = $\frac{96}{100}$ · 0,92x =

= 0,96 · 0,92x = 0,8832x (3)

88,32%....................................................44,16t

100% ………………………………………….xt

$\frac{88.32}{44.16} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = \frac{44.16x100}{88.32} \Leftrightarrow x = \frac{4416}{88.32} \Leftrightarrow x = 50t$ mere

Înainte de prima sortare au fost 50t de mere.

CLASA a VI – a

Determinaţi mulţimea $M = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - 5| + |y + 6| = 5\}$.

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$M = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - 5| + |y + 6| = 5\}$ (1)

$|x - 5| + |y + 6| = 5 \Rightarrow$ 1) $|x - 5| = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$|y + 6| = 5 \Rightarrow$ I) $y + 6 = -5 \Leftrightarrow y = -11$ (2)

II) $y + 6 = 5 \Leftrightarrow y = -1$ (2)

2) $|x - 5| = 1 \Rightarrow$ I) $x - 5 = -1 \Leftrightarrow x = 4$ (3)

II) $x - 5 = 1 \Leftrightarrow x = 6$ (3)

$|y + 6| = 4 \Rightarrow$ I) $y + 6 = -4 \Leftrightarrow y = -10$ (3)

II) $y + 6 = 4 \Leftrightarrow y = -2$ (3)

3) $|x - 5| = 2 \Rightarrow$ I) $x - 5 = -2 \Leftrightarrow x = 3$ (4)

II) $x - 5 = 2 \Leftrightarrow x = 7$ (4)

$|y + 6| = 3 \Rightarrow$ I) $y + 6 = -3 \Leftrightarrow y = -9$ (4)

II) $y + 6 = 3 \Leftrightarrow y = -3$ (4)

4) $|x - 5| = 3 \Rightarrow$ I) $x - 5 = -3 \Leftrightarrow x = 2$ (5)

II) $x - 5 = 3 \Leftrightarrow x = 8$ (5)

$|y + 6| = 2 \Rightarrow$ I) $y + 6 = -2 \Leftrightarrow y = -8$ (5)

II) $y + 6 = 2 \Leftrightarrow y = -4$ (5)

$$5)\ |x - 5| = 4 \Rightarrow \text{I) } x - 5 = -4 \Leftrightarrow x = 1 \qquad (6)$$

$$\text{II) } x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9 \qquad (6)$$

$$|y + 6| = 1 \Rightarrow \text{I) } y + 6 = -1 \Leftrightarrow y = -7 \qquad (6)$$

$$\text{II) } y + 6 = 1 \Leftrightarrow y = -5 \qquad (6)$$

$$6)\ |x - 5| = 5 \Rightarrow \text{I) } x - 5 = -5 \Leftrightarrow x = 0 \qquad (7)$$

$$\text{II) } x - 5 = 5 \Leftrightarrow x = 10 \qquad (7)$$

$$|y + 6| = 0 \Rightarrow \text{I} y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = -6 \qquad (7)$$

(1), (2), …, (6), (7)$\Rightarrow$

$\Rightarrow$M = {(0; -6); (1; -7); (1; -5); (2; -8); (2; -4); (3; -9); (3; -3); (4; -10); (4; -2); (5; -11); (5; -1); (6; -10); (6; -2); (7; -9); (7; -3); (8; -8); (8; -4); (9; -7);

(9; -5); (10; -6)}

CLASA a VII-a

Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia:

$$|x| + |y| < 3$$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$|x| + |y| < 3$ (1); x, y $\in \mathbb{Z}$

Suma $|x| + |y|$ poate lua 3 valori distincte: 0, 1 şi 2 (2)

(2) $\Rightarrow$ 1) $|x| + |y| = 0$ are o singură soluţie (0; 0) (3)

2) $|x| + |y| = 1$ are 4·1=4 soluţii: (-1; 0); (0; -1); (0; 1) şi (1; 0) (4)

3) $|x| + |y| = 2$ are 4·2=8 soluţii: (-2; 0); (-1; -1); (-1; 1); (0; -2); (0; 2); (1; -1); (1; 1) şi (2; 0) (5)

(1), (2), (3), (4) şi (5) $\Rightarrow$ S= {(-2; 0); (-1; -1); (-1; 0); (-1; 1); (0; -2); (0; -1); (0; 0); (0; 1); (0; 2); (1; -1); (1; 0); (1; 1); (2; 0)} (6)

CLASA a VII-a

Arătaţi că : $|x - 26| + |x - 49| \geq 23$; $\forall x, y \in \Re$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Ştim că: 1) $|x + y| \leq |x| + |y|$; $\forall x, y \in \Re$ (1)

2) $|x| = |-x|$; $\forall x \in \Re$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow |x - 26| + |x - 49| \geq |x - 26 - x + 49| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x - 26| + |x - 49| \geq |23| \Leftrightarrow |x - 26| + |x - 49| \geq 23$; $\forall x \in \Re$ (3)

CLASA a VII-a

Există valori ale numărului real a astfel încât numerele x = $\frac{2a+3}{4}$ şi

y = $\frac{3a-1}{2}$ să fie simultan numere întregi?

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

x = $\frac{2a+3}{4}$ $\Leftrightarrow$ 2a + 3 = 4x $\Leftrightarrow$ 2a = 4x – 3 $\Leftrightarrow$ a = $\frac{4x-3}{2}$ (1)

y = $\frac{3a-1}{2}$ $\Leftrightarrow$ 3a – 1 = 2y $\Leftrightarrow$ 3a = 2y + 1 $\Leftrightarrow$ a = $\frac{2y+1}{3}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $\frac{4x-3}{2} = \frac{2y+1}{3}$ $\Leftrightarrow$ 3(4x - 3) = 2(2y + 1) $\Leftrightarrow$ 12x – 9 = 4y + 2 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 12x – 4y = 2 + 9 $\Leftrightarrow$ 4(3x - y) = 11 imposibil (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ nu există valori ale lui a astfel încât numerele x şi y să fie simultan numere întregi.

CLASA a VII-a

Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$x^2 + y^2 - 4018\cdot|x| - 3922\cdot|y| + 7881602 = 0$$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$x^2 + y^2 - 4018\cdot|x| - 3922\cdot|y| + 7881602 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\cdot|x|\cdot 2009 + 4036081 + y^2 - 2\cdot|y|\cdot 1961 + 3845521 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\cdot|x|\cdot 2009 + 2009^2 + y^2 - 2\cdot|y|\cdot 1961 + 1961^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|x| - 2009)^2 + (|y| - 1961)^2 = 0$ (1)

(1) $\Rightarrow$ 1) $(|x| - 2009)^2 = 0 \Rightarrow |x| - 2009 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2009 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ I) $x_1 = -2009$ (2)

II) $x_2 = 2009$ (3)

2) $(|y| - 1961)^2 = 0 \Rightarrow |y| - 1961 = 0 \Leftrightarrow |y| = 1961 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ I) $y_1 = -1961$ (4)

II) $y_2 = 1961$ (5)

(2); (3); (4); (5) $\Rightarrow S = \{(-2009; -1961); (-2009; 1961); (2009; -1961); (2009; 1961)\}$ (6)

CLASA a VII-a

Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$\left[\frac{x+2}{5}\right]=402,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$$\left[\frac{x+2}{5}\right]=402 \Leftrightarrow 402 \le \frac{x+2}{5} < 403 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{5} \ge 402 \,|\cdot 5 \\ \frac{x+2}{5} < 403 \,|\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \ge 2010 \\ x+2 < 2015 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2008 \\ x < 2013 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2008;+\infty)(1) \\ x \in (-\infty;2013)(2) \end{cases}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ x $\in [2008;2013)$ (3)

(3) $\Rightarrow$ S = $[2008;2013) \cap \mathrm{N} \Leftrightarrow$ S = {2008; 2009; 2010; 2011; 2012} (4)

CLASA a VII-a

Arătaţi că 48 + $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+ \ldots + \frac{1}{1960!}+\frac{1}{1961!}$ < 50,

unde n! = 1·2·…·n, $n \in \mathbb{N}^*$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Notăm S = 48 + $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+ \ldots + \frac{1}{1960!}+\frac{1}{1961!}$ (1)

Ştim că:

1) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n} < \frac{1}{\underbrace{1\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{de(n-1)ori}} \Leftrightarrow \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ (2)

2) pentru $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ (3)

(1), (2) $\Rightarrow$ $S < 48 + 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \ldots + \frac{1}{2^{1959}}+\frac{1}{2^{1960}}$ (4)

(3), (4) $\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \ldots + \frac{1}{2^{1959}}+\frac{1}{2^{1960}} = \frac{1-\frac{1}{2^{1961}}}{1-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \ldots + \frac{1}{2^{1959}}+\frac{1}{2^{1960}} = 2 - \frac{1}{2^{1960}}$ (5)

(4), (5) $\Rightarrow$ $S < 48 + 2 - \frac{1}{2^{1960}} \Leftrightarrow S < 50 - \frac{1}{2^{1960}}$ (6)

(1), (6) $\Rightarrow 48 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{1960!} + \frac{1}{1961!} < 50$ (7)

CLASA a VII-a

Arătaţi că: $\left(\frac{2011}{800}\right)^5 + \left(\frac{2011}{1211}\right)^5 > 64$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$\left(\frac{2011}{800}\right)^5 + \left(\frac{2011}{1211}\right)^5 = \left(1+\frac{1211}{800}\right)^5 + \left(1+\frac{800}{1211}\right)^5$ (1)

Folosim inegalitatea $m_a > m_g$ (2)

(2) $\Rightarrow \frac{\left(1+\frac{1211}{800}\right)^5 + \left(1+\frac{800}{1211}\right)^5}{2} > \sqrt{\left(1+\frac{1211}{800}\right)^5 \cdot \left(1+\frac{800}{1211}\right)^5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1211}{800}\right)^5 + \left(1+\frac{800}{1211}\right)^5 > 2\sqrt{\left(1+1+\frac{800}{1211}+\frac{1211}{800}\right)^5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1211}{800}\right)^5 + \left(1+\frac{800}{1211}\right)^5 > 2\sqrt{\left(2+\frac{800}{1211}+\frac{1211}{800}\right)^5}$ (3)

Ştim că $\frac{800}{1211} + \frac{1211}{800} > 2\sqrt{(2+2)^5} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1211}{800}\right)^5 + \left(1+\frac{800}{1211}\right)^5 > 2 \cdot 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1211}{800}\right)^5 + \left(1+\frac{800}{1211}\right)^5 > 64$ (5)

(1), (5) $\Rightarrow \left(\frac{2011}{800}\right)^5 + \left(\frac{2011}{1211}\right)^5 > 64$ (6)

CLASA a VIII-a

Determinaţi valoare minimă a fracţiei

$F(x) = \frac{2011x^2 - 4022x + 8035}{x^2 - 2x + 4}$ şi aflaţi valoarea reală pentru care se obţine.

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$F(x) = \frac{2011x^2 - 4022x + 8035}{x^2 - 2x + 4} = \frac{2011x^2 - 4022x + 8044 - 9}{x^2 - 2x + 4} =$

$= \frac{2011x^2 - 4022x + 8044}{x^2 - 2x + 4} - \frac{9}{x^2 - 2x + 4} = \frac{2011 \cdot (x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4} - \frac{9}{x^2 - 2x + 1 + 3} = 2011 - \frac{9}{(x-1)^2 + 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $F(x) = 2011 - \frac{9}{(x-1)^2 + 3}$ (1)

(1) $\Rightarrow$ valoarea minimă se obţine dacă $(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $F(1) = 2011 - \frac{9}{(1-1)^2 + 3} \Leftrightarrow F(1) = 2011 - 3 \Leftrightarrow F(1) = 2008$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow$ valoarea minimă a fracţiei F(x) este 2008 şi se obţine pentru x = 1.

CLASA a VIII-a

Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $11^{2x} + 13^{2x} + 17^{2x} = 11^x \cdot 13^x + 11^x \cdot 17^x + 13^x \cdot 17^x$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$11^{2x} + 13^{2x} + 17^{2x} = 11^x \cdot 13^x + 11^x \cdot 17^x + 13^x \cdot 17^x$ (1)

Ştim că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, $\forall a, b, c \in \Re$ (2)

Notăm $a = 11^x$, $b = 13^x$ şi $c = 17^x$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow 11^{2x} + 13^{2x} + 17^{2x} \geq 11^x \cdot 13^x + 11^x \cdot 17^x + 13^x \cdot 17^x$ (4)

(2) $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ dacă $a = b = c$ (5)

(3), (5) $\Rightarrow 11^x = 13^x = 17^x \Rightarrow x = 0$ (6)

(6) $\Rightarrow S = \{0\}$

CLASA a VIII-a

Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale inecuaţia:

$$6(x + 3) < 5(x + 6) \le 8(x+2)$$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$6(x + 3) < 5(x + 6) \le 8(x+2)$; $x \in \mathbb{N}$ (1)

$$6(x + 3) < 5(x + 6) \le 8(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x+3) < 5(x+6) \\ 5(x+6) \le 8(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+18 < 5x+30 \\ 5x+30 \le 8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-5x < 30-18 \\ 5x-8x \le 16-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 12 \\ -3x \le -14 \mid \cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 12 \\ x \ge \dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;12) \\ x \in \left[\dfrac{14}{3};+\infty\right) \end{cases} (2)$$

$$(2) \Rightarrow S' = (-\infty;12) \cap \left[\frac{14}{3};+\infty\right) \Leftrightarrow S' = \left[\frac{14}{3};12\right) (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow S = \left[\frac{14}{3};12\right) \cap \mathbb{N} \Leftrightarrow S = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \; (4)$$

CLASA a VIII-a

Determinaţi reprezentarea grafică a funcţiei f: $\Re \to \Re$ ,

f(x) = min (2010x + 1, 2009x - 1), x $\in \Re$ .

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

a) f: $\Re \to \Re$ , f(x) = min (2010x + 1, 2009x - 1) (1)

min(2010x + 1, 2009x - 1) = $\begin{cases} 2010x+1, daca 2010x+1 < 2009x-1 \\ 2009x-1, daca 2009x-1 \le 2010x+1 \end{cases}$ =

= $\begin{cases} 2010x+1, x < -2 \\ 2009x-1, x \ge -2 \end{cases}$ = $\begin{cases} 2010x+1; x \in (-\infty;-2) \\ 2009x-1; x \in [-2;+\infty) \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ min(2010x + 1, 2009x - 1) = $\begin{cases} 2010x+1; x \in (-\infty;-2) \\ 2009x-1; x \in [-2;+\infty) \end{cases}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ f: $\Re \to \Re$ , f(x) = $\begin{cases} 2010x+1; x \in (-\infty;-2) \\ 2009x-1; x \in [-2;+\infty) \end{cases}$ (3)

b) I) 1) f(-2) = -4020 + 1 $\Leftrightarrow$ f(-2) = -4019; A(-2; -4019)

2) f(-3) = -6030 + 1 $\Leftrightarrow$ f(-3) = -6029; B(-3; -6029)

Graficul este semidreapta (AB (4)

II) 1) f(-2) = -4018 – 1 $\Leftrightarrow$ f(-2) = -4019; A(-2; -4019)

2) f(0) = -1 C(0; -1)

Graficul este semidreapta [AC (5)

c) (4), (5) $\Rightarrow$ graficul funcţiei f este (AB $\cup$ [AC (6)

CLASA a VIII-a

Rezolvaţi ecuaţia: $\sqrt{x-1282}$ + $\sqrt{4511-x}$ = 77

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$\sqrt{x-1282}$ + $\sqrt{4511-x}$ = 77 (1)

a) $\begin{cases} x-1282 \geq 0 \\ 4511-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1282 \\ x \leq 4511 \end{cases} \Rightarrow$ x $\in [1282;4511]$ (2)

b) $\sqrt{x-1282}$ + $\sqrt{4511-x}$ = 77 $\Big|^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x – 1282 + 4511 – x + 2$\sqrt{(x-1282)\cdot(4511-x)}$ = 5929 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 3229 + 2$\sqrt{-x^2+5793x-5783102}$ = 5929 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 2$\sqrt{-x^2+5793x-5783102}$ = 2700$\Big|$:2 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{-x^2+5793x-5783102}$ = 1350$\Big|^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $-x^2$ + 5793x – 5783102 = 1822500 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $-x^2$ + 5793x – 7605602 = 0$\Big|$ ·(-1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $x^2$ - 5793x + 7605602 = 0 $\Leftrightarrow$ $x^2$ – 2011x – 3782x + 7605602 = 0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ x(x - 2011) – 3782(x - 2011) = 0 $\Leftrightarrow$ (x - 2011) · (x - 3782) = 0 (3)

c) $\Rightarrow$ 1) x – 2011 = 0 $\Leftrightarrow$ $x_1$ = 2011 (4)

2) x – 3782 = 0 $\Leftrightarrow$ $x_2$ = 3782 (5)

(1), (2), (4), (5) $\Rightarrow$ S = {2011; 3782} (6)

CLASA a VIII-a

Determinaţi funcţiile liniare $f:\Re \to \Re$ care satisfac relaţia:

$f(x) \cdot f(y) – (x+9) \cdot f(y) + (y+2) \cdot f(x) + 1901 = 1961$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$f(x) \cdot f(y) – (x+9) \cdot f(y) + (y+2) \cdot f(x) + 1901 = 1961$ (1)

$x = y = 1$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow f(1) \cdot f(1) – (1 + 9) \cdot f(1) + (1 + 2) \cdot f(1) + 1901 = 1961 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(1) - 10 f(1) + 3 f(1) - 1901 – 1961 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(1) - 7 f(1) – 60 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(1) + 5 f(1) - 12 f(1) – 60 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(1) \cdot [f(1)+5] - 12 \cdot [f(1)+5] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [f(1)+5] \cdot [f(1)-12] = 0$ (3)

(3) $\Rightarrow$ 1) $f(1) + 5 = 0 \Leftrightarrow f(1) = -5$ (4)

2) $f(1) - 12 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 12$ (5)

I) $f(1) = -5$ (4)

$y = 1$ (6)

(1), (6) $\Rightarrow f(x) \cdot f(1) – (x + 9) \cdot f(1) + (1 + 2) \cdot f(x) + 1901 = 1961 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot f(1) – (x + 9) \cdot f(1) + 3f(x) - 60 = 0$ (7)

(4), (7) $\Rightarrow$ f(x) · (-5) – (x + 9) · (-5) + 3f(x) - 60 = 0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ -2f(x) + 5x – 15 = 0 $\Leftrightarrow$ 2f(x) = 5x – 15 $\Leftrightarrow$ f(x) = $\frac{5x-15}{2}$ (8)

(8) $\Rightarrow$ $f_1$: $\Re \to \Re$; $f_1(x) = \frac{5x-15}{2}$ (9)

II) f(1) = 12 (5)

y = 1 (6)

(1), (6) $\Rightarrow$ f(x) · f(1) – (x + 9) · f(1) + (1 + 2) · f(x) + 1901 = 1961 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f(x) · f(1) – (x + 9) · f(1) + 3f(x) - 60 = 0 (7)

(4), (7) $\Rightarrow$ f(x) · 12 – (x + 9) · 12 + 3f(x) - 60 = 0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 15f(x) - 12x – 168 = 0 $\Leftrightarrow$ 15f(x) = 12x + 168 $\vert$ :3 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 5f(x) = 4x + 56 $\Leftrightarrow$ f(x) = $\frac{4x+56}{5}$ (10)

(10) $\Rightarrow$ $f_2$: $\Re \to \Re$; $f_2(x) = \frac{4x+56}{5}$ (11)

(9), (11) $\Rightarrow$ avem 2 soluţii:

1) $f_1$: $\Re \to \Re$; $f_1(x) = \frac{5x-15}{2}$

2) $f_2$: $\Re \to \Re$; $f_2(x) = \frac{4x+56}{5}$

PROBLEMĂ PRODUSĂ PENTRU CL. a VIII$^{a}$

Găsiți $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel ca $2f(-x+3)+3f(x) = -2x-7$,
unde $f$ este liniară pt. $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA.

Soluție

Pentru $x \to -x$ obținem $2f(x+3)+3f(-x) = 2x-7$

dar pentru $x=0$ obținem:

$$\begin{cases} 2f(3)+3f(0) = -7 \\ 3f(3)+2f(0) = -13 \end{cases}$$ și pentru $x=-3$ obținem:

Înmulțind prima ecuație cu 2 și a II$^{a}$ cu $-3$ obținem

$$\begin{cases} 4f(3)+6f(0) = -14 \\ -9f(3)-6f(0) = 39 \end{cases}$$

$$-5f(3) = 25 \Leftrightarrow f(3) = -5.$$

$$\Rightarrow 3(-5)+2f(0) = -13 \Leftrightarrow 2f(0) = -13+15$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 1$$

Din $f$ liniară $\Rightarrow f(x) = y = ax+b$

Din $f(0)=1 \Rightarrow$

Din $f(3)=-5 \Rightarrow$ $\begin{cases} a\cdot 0+b = 1 \\ 3a+b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ 3a=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} a=-2 \\ b=1 \end{matrix}$ deci $\underline{f(x) = -2x+1}$

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA

PROBLEMA PROPUSĂ PENTRU CLASA a 8-a

Găsiți numerele naturale $\overline{aac}$, $\overline{caa}$, $\overline{de}$ astfel încât să avem $\sqrt{\overline{aac}} - \sqrt{\overline{caa}} = \sqrt{a \cdot c \cdot a} + \sqrt{\overline{de}}$

**Soluție**

Trebuie ca $\overline{aac}$, $\overline{caa}$, $\overline{de}$ să fie pătrate perfecte. Pătrate perfecte de forma $\overline{aac}$ și $\overline{caa}$ sunt numai numerele 144 și 441.

Avem $\sqrt{441} - \sqrt{144} = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 4} + \sqrt{\overline{de}} \Leftrightarrow$

$21 - 12 = 4 + \sqrt{\overline{de}} \Leftrightarrow 5 = \sqrt{\overline{de}} \Leftrightarrow \overline{de} = 25.$

Deci $\overline{aac} = 441$

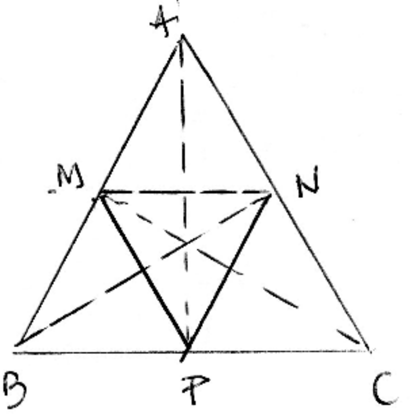
$\overline{caa} = 144$

$\overline{de} = 25.$

PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU Cls. a VI-a (VII-a)

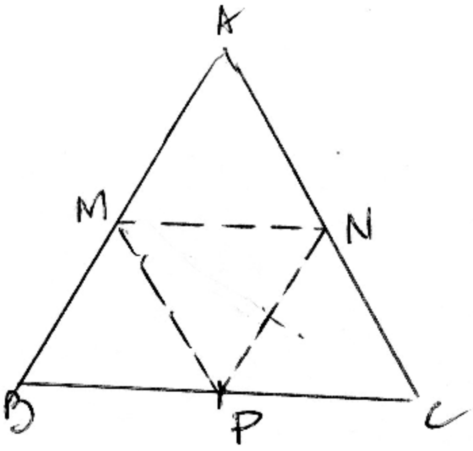
Se dă un triunghi echilateral ABC cu M, N mijloacele laturilor [AB] și [AC]. Folosind o riglă negradată construiți liniile mijlocii ale triunghiului.

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA




Soluție (1)

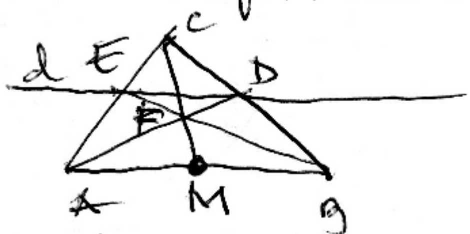
Ținând cont de proprietățile triunghiului echilateral deducem că [CM] și [BN] sunt înălțimi și H este ortocentru, unde $\{H\} = BN \cap CM$.
Înseamnă că AH = înălțime, mediană.
Fie $AH \cap BC = \{P\}$, unde P este mijlocul lui [BC].
Construcția: unim cele trei mijloace M, N, P și obținem cele trei linii mijlocii.




Soluție (2)

Din M, N mijloace de laturi $\Rightarrow$ [MN] este linie mijlocie $\overset{T.l.m.}{\Longrightarrow}$ $MN \parallel BC$.
Este cunoscută problema de construcție numai cu rigla: să se găsească mijlocul unui segment dat paralel cu o dr.
Deci se află mijlocul lui [BC], P și se unește cu M și N.

Iată sol. problemei numai cu rigla, știind că $d \parallel [AB]$. Să aflăm mijlocul lui [AB]. Fie C, ca în fig. alăturată. Ducem CB. Fie $\{D\} = CB \cap d$. Fie $\{F\} = AD \cap BE$, Fie $\{M\} = CF \cap AB$, unde M este mijlocul lui [AB].




Dem. Din T. Ceva $\Rightarrow \frac{EC}{EA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$ și conf. teoremei lui Thales $\left(\frac{EC}{EA} = \frac{CD}{DB}\right) \Rightarrow \frac{\cancel{CD}}{\cancel{DB}} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{\cancel{BD}}{\cancel{DC}} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$

deci M este mijloc.

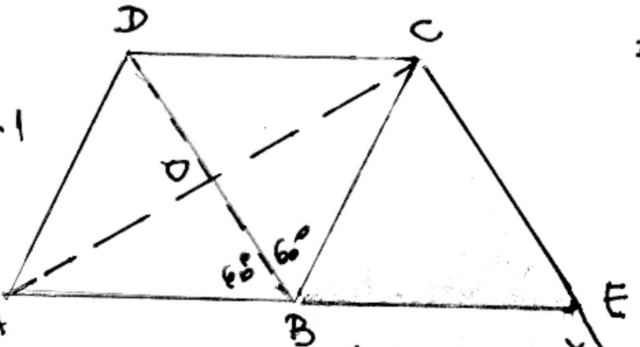
# PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU cls. a VII-a

Se dă un romb ABCD cu $m(\widehat{ABC}) = 120°$. Folosind o riglă negradată construiți un trapez isoscel cu baza mică [DC].

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA

## Soluție

fig. 1



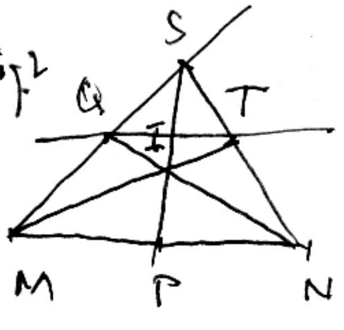

1. Presupunem problema rezolvată

Fie AECD trapezul isoscel cerut. Din ipoteză se deduce că rombul este format din două triunghiuri echilaterale. Din $[AD] \equiv [DB]$ și $[AD] \equiv [CE] \Rightarrow [DB] \equiv [CE]$. $m(\widehat{CBE}) = 180° - 120° = 60°$

$\Rightarrow \Delta BCE$ = echilateral $\Rightarrow m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{BCE}) \Rightarrow CE \parallel DB$.

Am descoperit 2) CONSTRUCȚIA; se duce prin C paralela la [DB], cu mijlocul O. Se folosește problema tipică de construcție cu rigla negradată. Se dă [MN] cu mijlocul P. Să ducem paralela prin Q la MN. Construcție: pe (MQ luăm S (fig. 2)

fig. 2




Ducem SN, SP, QN. Fie $\{I\} = QN \cap SP$. și $\{T\} = MI \cap SN$, unde $QT \parallel MN$.

Demonstrație (pt. probl. tipică)

Din T. CEVA $\Rightarrow \dfrac{SQ}{QM} \cdot \dfrac{PM}{PN} \cdot \dfrac{NT}{ST} = 1$ și din

$MP = PN \Rightarrow \dfrac{SQ}{QM} \cdot 1 \cdot \dfrac{NT}{ST} = 1 \Rightarrow \dfrac{SQ}{QM} = \dfrac{ST}{TN}$

R.T. THALES $QT \parallel MN$.

3) Dem. problemei propuse. După ce se duce $CE \parallel DB$ cu $\{E\} = AB \cap (Cx$ deducem ținând cont că ABCD este romb format din două $\Delta$ echilaterale că $CE = AD$ și $AE \parallel DC$ că trapezul AECD este isoscel.

Obs. Dacă ducem paralela prin A la DB obținem un trapez isoscel dar cu baza mică [AB].

## PROBLEMA PROPUSĂ PENTRU CL. a VI$^{a}$

Numerele $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ sunt direct proporționale cu respectiv numerele:

$1, 6, 7, 17, 18, 23, 2, 3, 11, 13, 21, 22$

Arătați că: $a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3+a_6^3 = b_1^3+b_2^3+b_3^3+b_4^3+b_5^3+b_6^3$

MĂȘCHEICU NICOLAE, CRAIOVA

### Soluție

Avem $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{6}=\frac{a_3}{7}=\frac{a_4}{17}=\frac{a_5}{18}=\frac{a_6}{23}=\frac{b_1}{2}=\frac{b_2}{3}=\frac{b_3}{11}=\frac{b_4}{13}=\frac{b_5}{21}=\frac{b_6}{22}=k$, de unde $a_1=k$, $a_2=6k$, $a_3=7k$, $a_4=17k$, $a_5=18k$, $a_6=23k$, $b_1=2k$, $b_2=3k$, $b_3=11k$, $b_4=13k$, $b_5=21k$, $b_6=22k$.

Calculăm $a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3+a_6^3 =$

$= k^3+(6k)^3+(7k)^3+(17k)^3+(18k)^3+(23k)^3 =$

$= k^3+216k^3+343k^3+4913k^3+5832k^3+12167k^3 =$

$= 23472k^3$

Calculăm și $b_1^3+b_2^3+b_3^3+b_4^3+b_5^3+b_6^3 =$

$= (2k)^3+(3k)^3+(11k)^3+(13k)^3+(21k)^3+(22k)^3 =$

$= 8k^3+27k^3+1331k^3+2197k^3+9261k^3+(10648k)^3 =$

$= 23872k^3.$

Deci $a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3+a_6^3 = b_1^3+b_2^3+b_3^3+b_4^3+b_5^3+b_6^3$

# PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU CLS. a VI-a

Arătaţi că dacă numerele naturale $a, b, c, d, e, f$ sunt direct proporţionale cu numerele 5, 5, 3, 2, 1, 8 atunci avem $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2$.

IVĂSCHESCU NICOLAE, CRAIOVA

## Soluţie

Avem $\frac{a}{5}=\frac{b}{5}=\frac{c}{3}=\frac{d}{2}=\frac{e}{1}=\frac{f}{8}=k \Rightarrow$

$a=5k,\ b=5k,\ c=3k;\ d=2k,\ e=k,\ f=8k.$

Obţinem $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(5k)^2+(5k)^2+(3k)^2+(2k)^2+k^2=$

$=25k^2+25k^2+9k^2+4k^2+k^2=64k^2=(8k)^2$, adică

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2$$

PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU CL. a VI-a

Comparați numerele $A$ și $B$ știind că:

$$A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots + \frac{1}{2011\cdot 2012} \text{ și}$$

$$B = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012}$$

Nic. Năstăsescu, Craiova

Soluție

Calculăm $A$, ținând cont de $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ și obținem:

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012}\right) =$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{1006} =$$

$$= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} = B.$$

Deci, $A = B$.

## Problemă propusă pentru cls. a V-a

Găsiți numerele naturale $\overline{abc}$ astfel ca

$$\overline{ab}+\overline{ba}=\overline{ab}(a+b+c)$$

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA

### Soluție

Avem $10a+b+10b+a=\overline{ab}(a+b+c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11(a+b)=\overline{ab}(a+b+c) \Rightarrow 11 / \overline{ab}(a+b+c)$

Dacă $11 / a+b+c \Rightarrow$ trebuie ca $11 / a+b$. Dacă $a=9$ și $b=2 \Rightarrow 11 / 9+2$, dar $\overline{ab}=92$ și am avea

$$11(9+2)=92\cdot(9+2+0) \Rightarrow \text{fals.}$$

Dacă $11 / \overline{ab} \Rightarrow \overline{ab}=11$ pt. a fi adevărată egalitatea deci $c=0$, $a=b=1$ și avem

$$11+11=11(1+1+0) \Rightarrow 22=11\cdot 2$$

Problemă propusă pentru cls. a VI-a

Aflați numerele prime distincte $a, b, c$ astfel ca numărul $11a+13b+17c$ să fie cel mai mic pătrat perfect posibil.

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA

Soluție

Pentru a obține cel mai mic pătrat perfect trebuie alese cele mai mici numere prime.

Avem $(a,b,c) \in \{(2,3,5),(2,5,3),(3,2,5),(3,5,2),(5,3,2),(5,2,3)\}$

| | $(a,b,c)$ | $11a+13b+17c$ |
|---|---|---|
| 1. | $(2,3,5)$ | $11\cdot2+13\cdot3+17\cdot5=146 \neq$ p.p. |
| 2. | $(2,5,3)$ | $11\cdot2+13\cdot5+17\cdot3=138 \neq$ p.p. |
| 3. | $(3,2,5)$ | $11\cdot3+13\cdot2+17\cdot5=33+26+85=144=12^2$ |
| 4. | $(3,5,2)$ | $11\cdot3+13\cdot5+17\cdot2=132 \neq$ p.p. |
| 5. | $(5,3,2)$ | $11\cdot5+13\cdot3+17\cdot2=128 \neq$ p.p. |
| 6. | $(5,2,3)$ | $11\cdot5+13\cdot2+17\cdot3=132 \neq$ p.p. |

Deci dacă $a=3, b=2, c=5$ avem

$$11\cdot a+13\cdot b+17\cdot 5=11\cdot3+13\cdot2+17\cdot5=$$

$$=33+26+85=144=12^2$$

## PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU CL. a $V^a$

Arătați că fracția $\dfrac{\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b}}{1+2^1+2^2+\dots+2^{62}}$

este reductibilă.

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA

## Soluție

Avem $\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b} = 100a+10b+4+100a+10b+a+$
$+100a+10+b = 301a+21b+14 = 43\cdot 7a+3\cdot 7b+7\cdot 2=$
$=7\cdot(43a+3b+2)$, deci $\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b}=7\cdot(43a+3b+2)$

Numitorul $1+2^1+2^2+\dots+2^{62}=(1+2^1+2^2)+(2^3+2^4+2^5)+\dots+$
$+(2^{60}+2^{61}+2^{62})=(1+2^1+2^2)+2^3(1+2^1+2^2)+\dots+2^{60}(1+2^1+2^2)=$
$=(1+2^1+2^2)(1+2^3+\dots+2^{60})=7\cdot(1+2^3+\dots+2^{60})$,

adică $1+2^1+2^2+\dots+2^{62}=7\cdot(1+2^3+\dots+2^{60})$

Fracția se mai scrie $\dfrac{\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b}}{1+2^1+2^2+\dots+2^{62}}=$

$$=\frac{7\cdot(43a+3b+2)}{7\cdot(1+2^3+\dots+2^{60})}=\frac{43a+3b+2}{1+2^3+\dots+2^{60}}$$

PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU cls a V-a

Demonstrați că $A=5+5^2+5^3+\dots+5^{2013}$ se divide cu 31.

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA

Soluție

Constatăm că $5+5^2+5^3=155=5\cdot 31$.

Realizând grupe de câte trei termeni obținem:

$A=(5+5^2+5^3)+(5^4+5^5+5^6)+\dots+(5^{2011}+5^{2012}+5^{2013})=$

$=(5+5^2+5^3)+5^3(5+5^2+5^3)+\dots+5^{2010}(5+5^2+5^3)=$

$=(5+5^2+5^3)(1+5^3+\dots+5^{2010})=155(1+5^3+\dots+5^{2010})\Rightarrow$

$\Rightarrow A=5\cdot 31\cdot(1+5^3+\dots+5^{2010})\Rightarrow$

$A \vdots 31$.

Problemă propusă pentru cls a V^a

Găsiți numerele naturale $\overline{baa}$ astfel încât

$a+a^2+a^3=\overline{baa}$.

Ivăncheșcu Nicolae, Craiova

Soluție.

Pentru a obține un număr de trei cifre trebuie ca $a \geq 5$.

Pentru $a=5 \Rightarrow 5+5^2+5^3=5+25+125=155=\overline{baa}$

Pentru $a=6 \Rightarrow 6+6^2+6^3=258 \neq \overline{baa}$

Pentru $a=7 \Rightarrow 7+7^2+7^3=399 \neq \overline{baa}$

Pentru $a=8 \Rightarrow 8+8^2+8^3=584 \neq \overline{baa}$

Pentru $a=9 \Rightarrow 9+9^2+9^3=819 \neq \overline{baa}$

Deci $\overline{baa}=155$.

IVĂȘCHESCU NICOLAE, CRAIOVA

PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU CLS.a V.-a

Găsiți numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care avem:

$a^b+b^c+c^a+b^a+c^b+a^c=\overline{bc}+a$, $a\neq b\neq c$.

Soluție.

Cel mai mare $\overline{bc}$ este 98 și din $a\neq b\neq c \Rightarrow$

$a,b,c<5$.

Fie $a=2, b=3, c=4 \Rightarrow$

$2^3+3^4+4^2+3^2+4^3+2^4\neq 34+2$

Fie $a=1, b=2, c=3 \Rightarrow$

$1^2+2^3+3^1+2^1+3^2+1^3=23+1 \Rightarrow \overline{abc}=123.$

$(1+8+3+2+9+1=24)$

Fie $a=2, b=1, c=3 \Rightarrow$

$2^1+1^3+3^2+1^2+1^3+2^3\neq 13+2$ $(2+1+9+1+1+8\neq 15)$

Fie $a=3, b=1, c=2 \Rightarrow$

$3^2+1^2+2^3+2^3+2^1+3^2\neq 12+3$

Deci singurul număr este $\overline{abc}=123$

## PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU CLASA A V-A

Arătați că numărul $A \vdots 2013$ unde

$$A = 2013\underbrace{00\ldots0}_{q}1^{n} + 2012\underbrace{99\ldots99}_{p}{}^{m}, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$$

Ivășcheicu Nicolae, Craiova

Soluție

Avem $2013\underbrace{00\ldots0}_{q}1^{n} = (2013\underbrace{00\ldots00}_{q} + 1)^{n} = (2013 \cdot 10^{q+1} + 1)^{n} = M2013 \cdot 10^{q+1} + 1$

$2012\underbrace{99\ldots99}_{p}{}^{m} = (2013\underbrace{00\ldots0}_{p} - 1)^{m} = (m\,2013 \cdot 10^{p+1} - 1)^{n} = m\,2013 \cdot 10^{p} - 1$

Deci $A = M2013 \cdot 10^{q+1} + \cancel{1} + m\,2013 \cdot 10^{p} - \cancel{1} = M\,2013$

Deci $A \vdots 2013$.

ÎNĂȘCHEIcu NICOLAE, CRAIOVA

Problemă propusă pentru cls. a V-a

Găsiți cel puțin două scrieri ale lui $126^{2011}$ ca sumă de patru pătrate perfecte (nenule și distincte)

SOLUȚIE

Avem că $126 = 1^2+5^2+6^2+8^2$ $(=1+25+36+64)$

$126=2^2+3^2+7^2+8^2$ $(=4+9+49+64)$

$126=2^2+4^2+5^2+9^2$ $(=4+16+25+81)$

Și atunci $126^{2011} = 126^{2010}\cdot 126 =$

$$=(126^{1005})^2(1^2+5^2+6^2+8^2)=(126^{1005}\cdot 1)^2+(126^{1005}\cdot 5)^2+(126^{1005}\cdot 6)^2+(126^{1005}\cdot 8)^2 \quad (1)$$

$$126^{2011}=(126^{1005})^2(2^2+3^2+7^2+8^2)=(126^{1005}\cdot 2)^2+(126^{1005}\cdot 3)^2+(126^{1005}\cdot 7)^2+(126^{1005}\cdot 8)^2 \quad (2)$$

și

$$126^{2011}=(126^{1005})^2(2^2+4^2+5^2+9^2)=(126^{1005}\cdot 2)^2+(126^{1005}\cdot 4)^2+(126^{1005}\cdot 5)^2+(126^{1005}\cdot 9)^2 \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) ⇒ cerința problemei

PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU cl. a V-a

Scrieți numărul 1530 ca o sumă de patru pătrate perfecte. Dați cel puțin două soluții.

ÎNȘCUREACU NICOLAE, CRAIOVA

Soluție

Avem $1530 = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 17$, deci $1530 = 9\cdot 170$

Dar $170 = 2^2+6^2+7^2+9^2$

$170 = 3^2+4^2+8^2+9^2$

$170 = 3^2+5^2+6^2+10^2$

Adică $1530 = 9\cdot 170 = 3^2(2^2+6^2+7^2+9^2) = 6^2+18^2+21^2+27^2$

$1530 = 9\cdot 170 = 3^2(3^2+4^2+8^2+9^2) = 9^2+12^2+24^2+27^2$

$1530 = 9\cdot 170 = 3^2(3^2+5^2+6^2+10^2) = 9^2+15^2+18^2+30^2$