Clasa a VIII-a

(1.) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $abc \neq 0$ și $(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c) \neq 0$

Să se arate că

$$3\left(\left|\frac{a}{b+c}\right| + \left|\frac{b}{a+c}\right| + \left|\frac{c}{a+b}\right|\right) + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(|a| + |b| + |c|)$$

Petrean Octavian, Petrean Mircea

Rez: $\left|\frac{a}{b+c}\right| = \frac{|a|}{|b+c|} \geq \frac{|a|}{|b|+|c|} > \frac{|a|}{|a|+|b|+|c|}$

$\left|\frac{b}{a+c}\right| = \frac{|b|}{|a+c|} \geq \frac{|b|}{|a|+|c|} > \frac{|b|}{|a|+|b|+|c|}$

$\left|\frac{c}{a+b}\right| = \frac{|c|}{|a+b|} \geq \frac{|c|}{|a|+|b|} > \frac{|c|}{|a|+|b|+|c|}$ (+)

$$\left|\frac{a}{b+c}\right| + \left|\frac{b}{a+c}\right| + \left|\frac{c}{a+b}\right| > \frac{|a|+|b|+|c|}{|a|+|b|+|c|} = 1$$

$$3\left(\left|\frac{a}{b+c}\right| + \left|\frac{b}{a+c}\right| + \left|\frac{c}{a+b}\right|\right) + a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 + a^2 + b^2 + c^2 =$$

$$= \underbrace{1+|a|^2} + \underbrace{1+|b|^2} + \underbrace{1+|c|^2} \geq 2|a| + 2|b| + 2|c| = 2(|a| + |b| + |c|)$$

cl. a VIII-a

2. Dacă $a,b,c \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $a+b+c=0$ arătați că

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = 3\left|\frac{ab+ac+bc}{a^3+b^3+c^3}\right|$$

Potrean Odarina. Potrean Mircea

Rez:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 - \underbrace{\frac{2(a+b+c)}{abc}}_{0}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \underbrace{(a+b+c)}_{=0}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$$

$$|a^3+b^3+c^3|\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = |3abc|\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| =$$

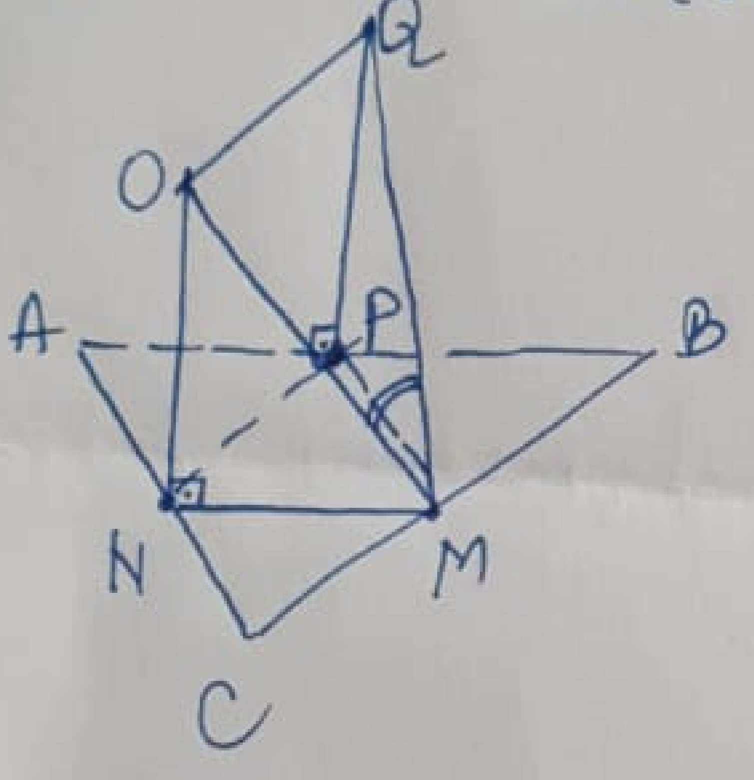
$$= 3\cancel{|abc|}\cdot\frac{|ab+ac+bc|}{\cancel{|abc|}} = 3|ab+ac+bc|$$

cl. a VIII-a

3.) Fie dat triunghiul ABC, M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ respectiv $[AB]$. Dacă $ON \perp (ABC)$, $ON = \frac{AC}{2}$, $QP \perp (ABC)$, $QP = \frac{AB}{2}$ astfel încât O și Q sunt de aceeași parte a planului (ABC). Să se arate că ΔOMQ este triunghi isoscel ascuțitunghic.

Potoceanu Octavian. Potrucea Mircea

Rezolvare



$ON \perp (ABC) \Rightarrow m(\widehat{ONM}) = 90^\circ \xRightarrow{T.P.} OM^2 = ON^2 + NM^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{4}$ (1)

$MN = \frac{AB}{2}$ (l. mij.)

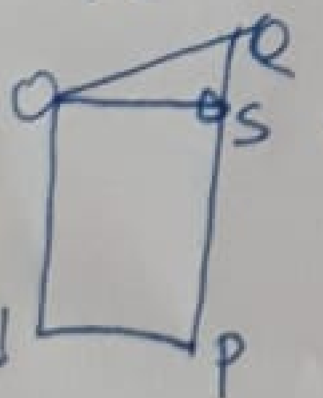
$PM = \frac{AC}{2}$ (l. mij.)

$QP \perp (ABC) \Rightarrow m(\widehat{QPM}) = 90^\circ \xRightarrow{T.P.} QM^2 = QP^2 + PM^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{4}$ (2)

$\xRightarrow[(2)]{(1)} OM = QM \Rightarrow \Delta OMQ$ - is de vârf M

$\left.\begin{array}{l} QP \perp (ABC) \\ NP \subset (ABC) \\ ON \perp (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} QP \perp NP \\ ON \perp NP \\ NO \parallel PQ \end{array}\right| \Rightarrow ONPQ$ - trapez dreptunghic

Fie $ON < QP$ (analog tratăm problema dacă $ON > QP$)



Ducem $OS \perp PQ \Rightarrow OQ^2 = OS^2 + QS^2 =$

$= NP^2 + (QP - ON)^2$

$= \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + QP^2 + ON^2 - 2QP \cdot ON$

$= \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 - 2\frac{AB}{2} \cdot \frac{AC}{2} =$

$= \frac{BC^2 + AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC}{4} < \frac{(AB+AC)^2 + AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC}{4}$

$= \frac{2(AB^2 + AC^2)}{4} = OM^2 + QM^2 \Rightarrow OQ^2 < OM^2 + QM^2$

In $\Delta OMQ \Rightarrow \cos \widehat{OMQ} = \frac{OM^2 + ON^2 - OQ^2}{2OM \cdot ON} > 0$

$= OM^2 + ON^2 > OQ^2$

$\Rightarrow \sphericalangle OMQ$ ascuțit $\Rightarrow m(\widehat{OMQ}) < 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta OMQ$ - isoscel ascuțitunghic

Probleme propuse

1. In triunghiul ABC , se cosidera un punct D , D∊Int.ΔABC, iar M,N,P,Q mijloacele segmentelor (AD) , (BD) , (BC) si respective(AC). Deteminati pozitia punctului D astfel incat :

a) D sa fie centrul de simetrie al patrulaterului MNPQ;

b) MNPQ sa fie dreptunghi ;

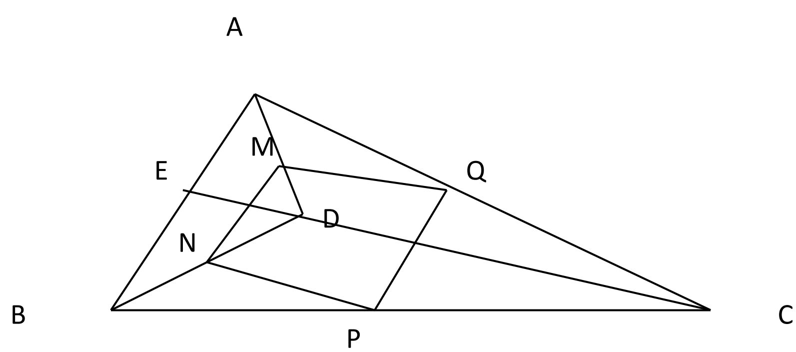
c) MNPQ sa fie patrat ;

d) Daca D este centrul de simetrie al drptunghiului MNPQ , aratati ca triunghiul ABC este isoscel.

Don Nelu,

Grupul Şcolar "Ion Creangă" Curtici

Rezolovare.



a)MN linie mijlocie in ΔADB $\Rightarrow$ MN$\parallel$AB si MN=$\frac{AB}{2}$ (1) ,PQ linie mijlocie in Δ ABC$\Rightarrow$PQ$\parallel$AB si PQ=$\frac{AB}{2}$ (2) .

Din (1) si (2) rezulta ca MNPQ este para lelogram , D fiind centrul de simetrie al paralelogramului rezulta ca {D}=PM $\cap$ NQ , rezulta D,P,M sunt coliniare si DM=DP (3) , M fiind mijlocul (AD) rezulta A,M,D coliniare si AM=MD (4) ,din (3) si (4) rezulta A,M,D,P coliniare ,deci D∊AP (mediana) , AM=MD=DP rezulta D este centu de greutate al Δ ABC .

b) MNPQ dreptunghi $\Rightarrow$MQ $\perp$ MN ,MN$\parallel$ AB (din 1) $\Rightarrow$ MQ $\perp$ AB (5) . MQ linie mijlocie in ΔADC $\Rightarrow$

MQ $\parallel$ CD si MQ =$\frac{CD}{2}$ (6) . Din (5) si (6) rezulta CD$\perp$AB , D este pe inaltimea Δ ABC corespunzatoare laturii AB .

c) MNPQ patrat $\Rightarrow$MNPQ dreptunghi, D se afla pe inaltimea Δ ABC dusa din C (din b). MNPQ patrat rezulta MN=MQ ,iar din (1) si (6) rezulta AB=CD. D se afla situat pe inaltimea ΔABC corespunzatoare laturii AB astel incat CD=AB .

d) D centru de simetrie al dreptunghiului ABCD rezulta din a) ca D este centru de greutate al ΔABC ,

iar din b) D este pe inaltimea Δ ABC corespunzatoare laturii AB rezulta ca [CE] este mediana si inaltime in Δ ABC, rezulta ΔABC isoscel cu baza AB, {E}=CD $\cap$ AB .

Don Nelu,

Grupul Şcolar "Ion Creangă" Curtici

2.Determinati numarul de forma $\overline{2011abcd}$ care este patrat perfect.

Don Nelu,

Grupul Şcolar "Ion Creangă" Curtici

Rezolvare

$\sqrt{20110000} < \sqrt{\overline{2011abcd}} < \sqrt{20119999}$ rezulta 4484,41< $\sqrt{\overline{2011abcd}}$ <4485,53 rezulta

2011abcd=4485^2 =20115225

Don Nelu,

Grupul Şcolar "Ion Creangă" Curtici