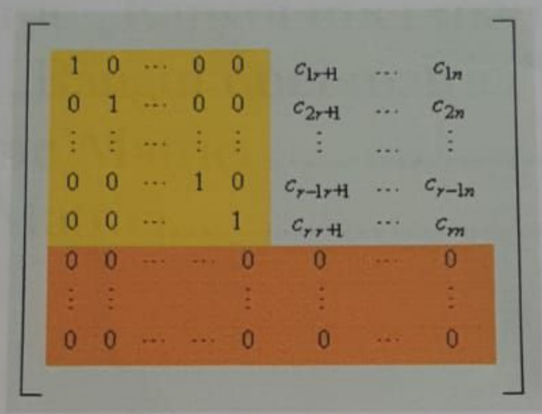
TEOREMA LUI LAPLACE. RANGUL UNEI MATRICI. APLICATII



Octavia Potocean, Colegiul National „Moise Nicoara", Arad

Mircea Potocean, Colegiul National „Moise Nicoara", Arad

Radu Baltean, elev Colegiul National „Moise Nicoara", Arad

CUPRINS

1.Notiuni teoretice

CALCULUL RANGULUI UNEI MATRICE PRIN TRANSFORMĂRI ELEMENTARE

Majoritatea manualelor de matematică pentru clasa a XI-a prezintă la tema „Rangul unei matrice" metoda de calcul a lui Kronecker care constă în calculul unor minori. Deoarece volumul
de calcule uneori este destul de mare, in continuare este prezentat un alt procedeu folosit in determinarea rangului unei matrice.

Definitie. Se numeşte transformare elementară a unei matrice, oricare din următoarele
transformări:

1) schimbarea a două linii (coloane) între ele;
2) înmulţirea elementelor unei linii (coloane) cu un număr nenul;
3) adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor altei linii (coloane) înmulţite cu acelaşi număr.

Propozitie. Transformările elementare nu schimbă rangul unei matrice.
(Se folosesc definiţia rangului şi proprietăţile determinanţilor pentru demonstratie)

Definitie. Matricele A şi B de acelaşi tip se numesc echivalente dacă una din ele se obţine din cealaltă printr-un număr finit de transformări elementare. Se notează A~B.

Observatie. Matricea $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ are forma economica diagonala daca

$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\ldots=a_{rr}=1, r\in\mathbb{N}^*, r\le\min(m,n)$ si $a_{ij}=0$ in rest, adica

$a''_{ij}\ne 0, i=\overline{2,m}, j=\overline{2,n}$

Observatii. 1) Dacă o matrice nenulă are forma canonică diagonală de mai sus, atunci elementele care sunt la intersecţia primelor r linii şi r coloane formează matricea unitate de ordin r.

2) Forma canonică diagonală are avantajul că pe ea „citim" uşor că rangul matricei este r.

Teoremă. Orice matrice nenulă poate fi adusă la forma canonică diagonală prin transformări elementare.

Demonstratie. Cel puţin un element al matricei A este nenul. Prin schimbări de linii sau coloane îl aducem pe linia 1 şi coloana 1, apoi împărţim linia 1 cu elementul respectiv şi obţinem

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & a'_{m3} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Coloana 1 o înmulţim cu $(-a'_{12})$ şi o adunăm la coloana 2; coloana 1 o înmulţim cu $(-a'_{13})$
şi o adunăm la coloana 3 etc. În felul acesta obţinem o matrice echivalentă cu A care are toate elementele de pe linia 1 nule cu excepţia primului. Procedând analog cu liniile

formăm zerouri şi pe coloana 1 (cu excepţia primului element) şi obţinem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \dots & a''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a''_{m2} & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

Daca $a''_{ij} = 0, \forall i = \overline{2,m}, \forall j = \overline{2,n}$ atunci rangul matricei este 1. În caz contrar, există $a''_{ij} \neq 0, i = \overline{2,m}, j = \overline{2,n}$. Procedând ca mai înainte facem (prin transformări echivalente) ca elementul de pe linia 2 şi coloana 2 să fie egal cu 1, apoi anulăm celelalte elemente de pe linia 2 şi coloana 2 etc. După un număr finit de paşi se ajunge la forma canonică diagonală.

Inegalitatea lui Sylvester asupra rangului unei matrici

Fiind date doua matrici patratice X si Y de ordinul n atunci avem inegalitatea :

$rang(X) + rang(Y) - n \leq rang(XY)$.

Teorema produsului

Fiind date doua matrici patratice A si B de ordin n avem ca :

$rang(AB) \leq \min\{rangA, rangB\}$

Notiuni introductive pentru regula lui Laplace :

Inainte de a enunta regula lui Laplace vom defini notiunile de *minor de ordin k* $(k \leq n-1)$, *minor complementar* si *complement algebric* .

Sa alegem o matrice $M \in M_n(A)(n \geq 2)$ si sa fixam k linii $i_1, i_2, ..., i_k$ si k coloane $j_1, j_2, ..., j_k (k \leq n-1)$ distincte .

Elementele ce se afla la intersectia liniilor $i_1, i_2, ..., i_k$ si coloanelor $j_1, j_2, ..., j_k$ formeaza o matrice de ordinul k al carei determinant il vom nota prin $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ si il vom numi *minor de ordin k* pentru $\det(M)$.

Daca eliminam din matricea initiala liniile $i_1, i_2, ..., i_k$ si coloanele $j_1, j_2, ..., j_k$ obtinem o matrice patratica de ordin *n-k* al carei determinant il vom nota prin $\overline{M}_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ si il vom numi *minorul complementar* al lui $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$.

Notam $\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^{k}(i_t + j_t)$ .Numarul $A_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} = (-1)^{\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}} \cdot \overline{M}_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ se va numi complementul algebric al lui $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$.

Regula lui Laplace

)aca $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(A)$ **si fixam liniile** $1\le i_1<i_2<...<i_k\le n (k\le n-1)$ **atunci**

$\det(M)=\sum\limits_{1\le j_1<j_2<...<j_k\le n} M^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}\cdot A^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}$ **(o suma de C_n^k termeni).**

)emonstratie:

)bservam ca pentru $1\le j_1<j_2<...<j_k\le n$, $M^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}$ este o suma de $k!$ termeni, iar $A^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}$
ste o suma de $(n-k)!$ termeni astfel ca daca notam cu S suma din partea dreapta a egalitaii
in enunt atunci S va fi o suma de $k!\cdot(n-k)!\cdot C_n^k=n!$ termeni.
)aca vom arata ca cei $n!$ termeni ce formeaza pe S sunt de fapt termeni distincti din
ezvoltarea lui $\det(M)$ (si au acelasi semn ca si $\det(M)$) atunci avem evident egalitatea din
nunt $\det(M)=S$.
a consideram pentru inceput cazul $i_1=j_1=1, i_2=j_2=2,...,i_k=j_k=k$,
.tunci $M^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}=\sum\limits_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{k\sigma(k)}$, $\begin{bmatrix}1 & 2 & ... & k\\ 1 & 2 & ... & k\end{bmatrix}=2(1+2+...+k)=k(k+1)$;
)eci $A^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}=(-1)^{k(k+1)}\cdot\overline{M}^{12...k}_{12...k}=\overline{M}^{12...k}_{12...k}=\sum\limits_{\tau\in S_k'}\operatorname{sgn}(\tau)a_{k+1,\tau(k+1)}...a_{n,\tau n}$ (unde prin S_k' am notat
ıultimea permutarilor asupra elementelor $k+1,k+2,...,n$) astfel ca
$M^{12...k}_{12...k}\cdot A^{12...k}_{12...k}=\sum\limits_{\substack{\sigma\in S_k\\ \tau\in S_k'}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{k\sigma(k)}a_{k+1,\tau(k+1)}...a_{n,\tau n}$.
)aca notam $\varepsilon=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & k & k+1 & ... & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(k) & \tau(k+1) & ... & \tau(n)\end{pmatrix}\in S_n$, atunci evident
;gn$(\varepsilon)=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$, astfel ca termenii sumei $M^{12...k}_{12...k}\cdot A^{12...k}_{12...k}$ fac parte din termenii lui
et(M) si apar cu acelasi semn ca si in dezvoltarea lui $\det(M)$. Cautam sa gasim un rezultat
milar si pentru un produs general de forma $M^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}\cdot A^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}$. Permutand succesiv liniile si
›loanele vecine putem aduce minorul $M^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}$ in coltul din stanga sus al determinantului
et(M); pentru aceasta sunt necesare
$_1-1)+(i_2-2)+...+(i_k-k)+(j_1-1)+(j_2-2)+...+(j_k-k)=\begin{bmatrix}i_1 & i_2 & ... & i_k\\ j_1 & j_2 & ... & j_k\end{bmatrix}-k(k+1)$
ermutari de linii si coloane.
)aca notam prin N matricea astfel obtinuta avem ca $\det(N)=(-1)^{\begin{bmatrix}i_1 & i_2 & ... & i_k\\ j_1 & j_2 & ... & j_k\end{bmatrix}}\cdot\det(M)$,

$M^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}=N^{12...k}_{12...k}$ iar $\overline{M}^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}=\overline{N}^{12...k}_{12...k}$. Conform celor demonstrate anterior, in $\det(N)$ suma
turor termenilor ale caror prime k elemente inra in minorul $M^{i_1 i_2 ... i_k}_{j_1 j_2 ... j_k}$ este egala cu produsul

$A^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} \cdot \overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$. De aici rezulta ca suma termenilor corespunzatori ai lui $\det(M)$ este egala
ı produsul $(-1)^{\left[\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{smallmatrix}\right]} \cdot M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} \cdot \overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} = M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} \cdot A^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$, cu care inchidem
emonstratia.

lotiuni introductive pentru teorema lui Binet-Cauchy:

e $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $m \leq n$. Daca $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$, prin $S_m(j_1, \dots, j_m)$
›tam multimea permutarilor multimii $\{j_1, \dots, j_m\}$.

ı consideram $M \in M_{m,n}(A)$ si $N \in M_{n,m}(A)$.
ım $M \cdot N \in M_m(A)$ are sens sa vorbim despre $\det(M \cdot N)$.
ıntru orice $k_1, \dots, k_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ (nu neaparat distincte) notam cu $M., j_1, \dots, j_m$ (respectiv cu
$j_1, \dots, j_m, .$) matricea de tip *(m,m)* avand *m* coloane (respectiv *m* linii) egale in ordine cu
loanele (respectiv liniile) de indici $k_1, \dots, k_m$ ale matricei *M* (respectiv *N*).

ı consideram $k_1, \dots, k_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $k_i \neq k_j$ pentru $i \neq j$ si fie $j_1, \dots, j_m$ o rearanjare a
ementelor $k_1, \dots, k_m$ astfel incat $j_1 < j_2 < \dots < j_m$. Atunci $(k_1, \dots, k_m)$ este o permutare din
$_m(j_1, \dots, j_m)$ si exista o unica permutare $\sigma \in S_m$ astfel incat $k_i = j_{\sigma(i)} (1 \leq i \leq m)$.
efinim *semnul permutarii* $(k_1, \dots, k_m)$ ca fiind $\varepsilon(k_1, \dots, k_m) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

ˌem, tinand cont de notatii:

$\det(N k_1, \dots, k_m, .) = \varepsilon(k_1, \dots, k_m) \cdot \det(N j_1, \dots, j_m, .)$ (analog pentru $\det(M., k_1, \dots, k_m)$)

$\det(M., k_1, \dots, k_m) = \sum\limits_{(k_1, \dots, k_m) \in S_m(j_1, \dots, j_m)} \varepsilon(k_1, \dots, k_m) a_{1k_1} \dots a_{mk_m}$ (analog pentru
$t(N k_1, \dots, k_m, .)$)

eorema lui Binet-Cauchy

**e $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $m \leq n$. Atunci pentru oricare doua matrice $M \in M_{m,n}(A)$ si
$\in M_{n,m}(A)$ are loc egalitatea:**

$$t(M \cdot N) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \det(M., j_1, \dots, j_m) \cdot \det(N j_1, \dots, j_m, .)$$

Demonstratie. **Daca notam** $P = M \cdot N = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq m} \in M_m(A)$ atunci

$$t(M \cdot N) = \det(P) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in S_m} \varepsilon(i_1, \dots, i_m) c_{1i_1} \dots c_{mi_m} =$$

$$\sum_{(\dots, i_m) \in S_m} \varepsilon(i_1, \dots, i_m) \left(\sum_{k_1 = 1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1 i_1} \right) \dots \left(\sum_{k_m = 1}^{n} a_{mk_m} b_{k_m i_m} \right)$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_m \in \{1,2,\ldots,n\}} a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \left(\sum_{(i_1,\ldots,i_m) \in S_m} \varepsilon(i_1,\ldots,i_m) b_{k_1 i_1} \ldots b_{k_m i_m} \right)$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m \in \{1,2,\ldots,n\} \\ k_i \neq k_j, i \neq j}} a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \cdot \det(N k_1,\ldots,k_m,\cdot)$$

m tinut in ordine cont de definitia unui determinant, de faptul ca un determinant cu doua nii identice este nul).

Grupand termenii cu $\{k_1,\ldots,k_m\} = \{j_1,\ldots,j_m\}$ pentru $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n$ arbitrar ati obtinem :

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m \in \{1,2,\ldots,n\} \\ k_i \neq k_j, i \neq j}} a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \cdot \det(N k_1,\ldots,k_m,\cdot) =$$

$$\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le m} a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \cdot \det(N j_1,\ldots,j_m,\cdot) \cdot \left(\sum_{(k_1,\ldots,k_m) \in S_m(j_1,\ldots,j_m)} \varepsilon(k_1,\ldots,k_m) a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \right) =$$

$$\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n} \det(M \cdot, j_1,\ldots,j_m) \cdot \det(N j_1,\ldots,j_m,\cdot)$$, de unde rezulta concluzia.

2. Probleme „Rangul unei matrici”

1. Fie $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Sa se arate ca $rang(A)\le 1$ daca si numai daca exista $x_1,x_2,\dots,x_m\in\mathbb{R}$ si $y_1,y_2,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ asa incat $a_{ij}=x_i y_j$, oricare ar fi $(i,j)\in\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,\dots,n\}$.

2. Fie $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{C})$ o matrice de orinul n $(n\ge 2)$. Sa se demonstreze ca exista numerele $p_i,q_i,r_i,s_i\in\mathbb{C}, i=\overline{1,n}$ astfel incat:

$$a_{ij}=p_i\cdot q_j+r_i\cdot s_j,(\forall)i=\overline{1,n}$$

3. Se considera o matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$, de rang r, unde $n\ge 2$ si $1\le r\le n-1$.
   a) Sa se arate ca exista $B\in M_{n,r}(\mathbb{C}), C\in M_{r,n}(\mathbb{C})$ cu rang B = rang C = r, astfel incat A = BC.
   b) Sa se arate ca matricea A verifica o ecuatie polinomiala de grad r+1, cu coeficienti complecsi.

4. Fie $A\in M_4(\mathbb{C})$ o matrice nenula.
   a) Daca $rang\ (A)=r<4$, sa se arate ca exista $U,V\in M_4(\mathbb{C})$ inversabile, astfel incat :
   $U\cdot A\cdot V=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, unde I_r este matricea unitara de ordin r.
   b) Sa se demonstreze ca daca A si A^2 au acelasi rang k, atunci matricea A^n are rangul k pentru orice $n\ge 3$.

5. Fie $A\in M_{n,p}(\mathbb{C})$ si $B\in M_p(\mathbb{C}), n,p\in\mathbb{N}^*, \det B\ne 0$.
   Demonstrati ca $rang(AB)=rang A$.

6. Fie $A,B\in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sa se arate ca
a) daca $A+B=AB$, atunci $rang A=rang B$;
b) daca $rang A=n-1$ atunci exista $C\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ astfel incat $C\ne O_{n,n}$ si $(A+C)^p=A^p+C^p,(\forall)p\in\mathbb{N}$.

7. Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$. Daca exista $a,b\in\mathbb{R}^*$ astfel incat $AB=aA+bB$, atunci $rang A=rang B$.

8. Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$. Daca $rang A=n-1$, $B\ne O_n, AB=O_n$, sa se demonstreze ca $rang B=1$.

9. Daca $A\in M_{n,p}(\mathbb{C})$, demonstrati ca $rang A=rang\overline{A}$.

10. Daca $A\in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice triunghiulara (are sub diagonala principala sau deasupra ei toate elementele egale cu zero) atunci $rang(A+I_n)+rang(A-I_n)\ge n$.

11. Fie matricile $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ inversabile. Sa se arate ca $rang(A+B) = rang(A^{-1}+B^{-1})$.

12. Daca $A \in M_n(\mathbb{C})$ si $A^2 = I_n$, sa se arate ca $rang(aI_n + bA) = rang(aA + bI_n), a, b \in \mathbb{C}$.

13. Fie $A \in M_{n,k}(\mathbb{R}), B \in M_{k,n}(\mathbb{R}), (2 \le k \le n)$ astfel incat $rang(AB) = k$ si $(AB)^2 = AB$.

a) Sa se arate ca $rang(BA) = k$.

b) Sa se determine BA.

14. Fie matricile $A \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ si $B \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ astfel incat

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sa se determine $\det(BA)$.

3. Solutii „Rangul unei matrici”

1. $(\Rightarrow)$ Sa presupunem ca $rang(A) \le 1$. Daca $rang(A) = 0$, avem $a_{ij} = 0$, $(\forall)(i,j) \in \{1,2,...,m\} \times \{1,2,3,...,n\}$, deci putem lua $x_1 = x_2 = ... = x_m = y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$.
Sa vedem ce se intampla in cazul in care $rang(A) = 1$.

In acest caz exista un element nenul a_{kp}, unde $(k,p) \in \{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\}$, este fixata. Toti minorii de gradul 2 ai matricii sunt nuli. Deoarece $a_{kp} \in \mathbb{R}^*$, putem fixa $x_k \in \mathbb{R}^*, y_p \in \mathbb{R}^*$, asa incat $a_{kp} = x_k \cdot y_p$. Pentru fiecare $i \in \{1,2,...,m\}$ vom nota $x_i = a_{ip} \cdot y_p^{-1}$ si pentru fiecare $j \in \{1,2,...,n\}$ vom nota $y_j = a_{kj} \cdot x_k^{-1}$. Rezulta asadar ca $a_{ip} = x_i \cdot y_p, i \in \{1,2,...,m\}$, respectiv $a_{kj} = x_k \cdot y_j, j \in \{1,2,...,n\}$. Acum sa consideram:
$i \in \{1,2,...,m\} \setminus \{k\}$, $j \in \{1,2,...,n\} \setminus \{p\}$. Scriind ca minorul de ordinul 2 obtinut prin intersectia liniilor k si i cu coloanele p si j este nul, rezulta $a_{kp} \cdot a_{ij} = a_{ip} \cdot a_{kj}$
Egalitatea de mai sus se scrie echivalent $x_k \cdot y_p \cdot a_{ij} = x_i \cdot y_p \cdot x_k \cdot y_j$ si deci, impartind prin $x_k \cdot y_p \in \mathbb{R}^*$, obtinem $a_{ij} = x_i \cdot y_j, (\forall)(i,j) \in \{1,2,...,m\} \times \{1,2,3,...,n\}$.

$(\Leftarrow)$ Daca exista sistemul de numere $x_1, x_2, x_3, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n$ asa incat sa avem ca $a_{ij} = x_i \cdot y_j, (\forall)(i,j) \in \{1,2,...,m\} \times \{1,2,3,...,n\}$, se constat usor ca toti minorii de ordinul 2 ai natricii date sunt nuli, deci $rang(A) \le 1$.

2. Consideram sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Deoarece $rangA = 2 < n$, sistemul admite solutii nenule, depinzand de n-2 parametrii.

Putem presupune (eventual renumerotand) ca $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ne 0$.

Alegand d ca minor principal, solutiile sistemului sunt de forma:,

$x_2 = \sum_{j=3}^{n} c_{2j} \cdot x_j, x_j \in \mathbb{C}, j = \overline{3,n}$.Inlocuind in ecuatia $a_{i1} \cdot x_i + ... + a_{n1}x_n = 0$ din sistemul (1), obtinem : $a_{i1} \cdot \sum_{j=3}^{n} c_{1j} \cdot x_j + a_{i2} \cdot \sum_{j=3}^{n} c_{2j} \cdot x_j + \sum_{j=3}^{n} a_{ij} \cdot x_j = 0$ adica avem relatia:

$$\sum_{j=3}^{n} \left(a_{i1} \cdot c_{1j} + a_{i2} \cdot c_{2j} + a_{ij} \right) \cdot x_j = 0, \forall x_3, ..., x_n.$$

ici rezulta, $a_{i1} \cdot c_{1j} + a_{i2} \cdot c_{2j} + a_{ij} = 0, \forall i = \overline{1,n}, \forall j \in \overline{3,n}$. Prin urmare putem lua $a_{i1}, r_i = a_{i2}$ pentru $i = \overline{1,n}; q_j = -c_1, s_j = -c_{2j}$ $j \in \overline{3,n}$ iar $q_1 = 1, q_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 1$. Cu le notatii $a_{ij} = p_i \cdot q_j + r_i \cdot s_j, (\forall) i = \overline{1,n}$.

$rang(A)$, sa alegem r coloane ale matricei A care ... ar r coloane liniar independente). Fie $i_1, i_2, ..., i_n$ indicii acestor coloane si $(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_r}) \in M_{n,r}(\mathbb{C})$. Pentru fiecare $k, k = \overline{1,n}$, sa consideram $B \cdot x = c_k$. Deoarece $(B) = r$ si orice minor caracteristic al sistemului este minor de ordinul $r+1$ al matricei A ci nul, reiese ca aceste sisteme sunt compatibile, avand solutie unica. Consideram $M_{r,1}(\mathbb{C})$ solutia sistemului $B \cdot x = c_k$, $k = \overline{1,n}$ si $C = (x_1, x_2, ..., x_n) \in M_{r,n}(\mathbb{C})$. Rezulta ci ca avem relatiile:
$= B \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (B \cdot x_1, B \cdot x_2, ..., B \cdot x_n) = (c_1, c_2, ..., c_n) = A$
rita faptului ca $r = rang(A) = rang(BC) \le rang(C) \le r$, rezulta ca $rang(C) = r$.

b) Consideram acum $D = C \cdot B \in M_r(\mathbb{C})$. Deoarece polinomul caracteristic al icei D are gradul r rezulta ca exista $a_r, a_{r-1}, ..., a_0 \in \mathbb{C}$ astfel incat sa avem: $D^r + a_{r-1} \cdot D^{r-1} + ... + a_1 \cdot D + a_0 \cdot I_r = O_n$. Prin inmultire la stanga cu B si la dreapta cu C em: $a_r \cdot B \cdot D^r \cdot C + a_{r-1} \cdot B \cdot D^{r-1} \cdot C + ... + a_1 \cdot B \cdot D \cdot C + a_0 \cdot B \cdot C = O_n$. Deci avem: $\cdot C = B \cdot (C \cdot B) \cdot (C \cdot B) \cdot ... \cdot (C \cdot B) \cdot C = (B \cdot C)^{k+1} = A^{k+1}$ si atunci va rezulta $^{r+1} + a_{r-1} \cdot A^r + ... + a_1 \cdot A^2 + a_0 \cdot A = O_n$.

a) Fie $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \ne j, a \in \mathbb{C}^*$. Consideram matricile U_{ij} obtinute din I_4 prin utarea liniilor i si j; $V_i(a)$ obtinuta din I_4 prin inmultirea liniei i cu a; $W_i(a)$ ontinuta prin adunarea liniei J cu linia i inmultita cu a. Aceste matrice sunt inversabile si avem ile: $U_{ij}^{-1} = U_{ij}; V_i^{-1}(a) = V_i\left(\frac{1}{a}\right); W_{ij}^{-1} = W_{ij}(-a)$.

$A \in M_4(\mathbb{C})$, atunci matricea $B = U_{ij} \cdot A$ se obtine din A prin permutarea liniilor i si j; cea $C = A \cdot U_{ij}$ se obtine din A prin permutarea coloanelor i si j; matricea $D = V_i(a) \cdot A$ se e din A prin inmultirea liniei i cu a; matricea $E = A \cdot V_i(a)$ se obtine din A prin tirea coloanei i cu a; matricea $F = W_i(a) \cdot A$ se obtine din A prin adunarea liniei j cu inmultita cu a; matricea $G = A \cdot W_i(a)$ se obtine din A prin adunarea coloanei i cu na j inmultita cu a.

ece $A \ne O_4$ rezulta ca exista un element $a_{ij} \ne 0$. Deoarece printr-o eventuala inmultire ga a matricei A cu $U_{1i}(i \ne j)$ si la dreapta cu $U_{1j}(i \ne j)$ putem presupune ca $a_{11} \ne 1$. De nea, prin inmultirea cu $V_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$ putem presupune ca $a_{11} = 1$. Atunci matricea $_{14}(-a_{14}) \cdot W_{13}(-a_{13}) \cdot W_{12}(-a_{12}) \cdot A$ are prima coloana egala cu prima coloana a lui I_4, iar ea: $C = B \cdot W_{21}(-a_{12}) \cdot W_{13}(-a_{13}) \cdot W_{41}(-a_{14})$ are forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & & \\ 0 & . & & D \end{pmatrix}$.

Repetand acest procedeu obtinem, in final, forma din enunt. Matricile U si V reprezinta produsul matricilor inmultite la stanga, respectiv la dreapta lui A. Atunci U si V sunt inversabile (fiind produse de matrice inversabile) si $U \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ unde k este minimul liniilor nenule din $U \cdot A \cdot V$ iar
$k = rang(U \cdot A \cdot V) \le rangA = r = rang(U^{-1} \cdot (U \cdot A \cdot V) \cdot V^{-1}) \le rang(U \cdot A \cdot V) = k$, rezulta atunci ca $k = r$ si prin urmare avem, $U \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Daca $rang(A) = 4$ atunci $\det(A) \ne 0$, deci $\det(A^n) \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezulta ca $\det(A^n) = 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Fie $k = \det(A) < 4$. Atunci avem, conform punctului a) ca exista matricele $U, V \in M_4(\mathbb{C})$, inversabile astfel incat $U \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C \cdot D$ si unde $C = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{4,k}(\mathbb{C})$,
$D = (I_k, 0) \in M_{k,4}(\mathbb{C})$. Prin urmare $A = U^{-1} \cdot C \cdot D \cdot V^{-1} = E \cdot F$, unde $E = U^{-1} \cdot C \in M_{4,k}(\mathbb{C})$ si $F = D \cdot V^{-1} \in M_{k,4}(\mathbb{C})$, iar $rang(E) = rang(F) = K$. Observam ca, $F \cdot E \in M_k(\mathbb{C})$ si avem relatiile: $k = \min(rang(E), rang(F)) \ge rang(F \cdot E) \ge rang(E \cdot F \cdot E \cdot F) = rang(A^2) = k$, deci $rang(F \cdot E) = k$. Rezulta atunci ca avem
$F \cdot A^n \cdot E = F \cdot (E \cdot F)^n \cdot E = (F \cdot E)^{n+1}$ si deci $rang(F \cdot A^n \cdot E) = k$,In concluzie avem urmatoarele relatii: $k = rang(F \cdot A^n \cdot E) \le rang(A^n) \le rang(A) = k, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5. Se cunoaste ca $rang(AB) \le \min(rangA, rangB)$.
Cum $rangB = n \Rightarrow rang(AB) \le rangA \le n$.
Dar din $A = AB \cdot B^{-1} \Rightarrow rangA = rang(AB \cdot B^{-1}) \le rangAB \le n$ (1)
deoarece $rangB^{-1} = n$. Din (1) $\Rightarrow rang(AB) = rangA$.

6. a) $A + B \Leftrightarrow AB - A - B + I_n = I_n \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n$
$\Rightarrow rang(A - I_n) = rang(B - I_n) = n$. Dar $A = (A - I_n)B \Rightarrow rangA = rang[(A - I_n)B]$, si cum $rang(A - I_n) = n \Rightarrow rangA = rangB$;

b) Determinam $C \in M(\mathbb{Z})$ astfel incat $AC = CA = O_n$.
$AX = O_{n,1}$, unde $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, este un sistem liniar omogen cu $\det A = 0 \Rightarrow (\exists) X \ne O_{n,1}$;
Analog $YA = O_{n,1}$ unde $Y \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ este tot un sistem liniar cu $\det A \ne 0 \Rightarrow (\exists) Y = O_{1,n}$;
Luam $C = XY, B \in M_n(\mathbb{C})$. Avem ca $AC = AX \cdot Y = O_{n,1} Y = O_n$
si ca $CA = XYA = XO_{1,n} = O_n$. Prin inductie se arata ca $A^k C^l = O_n, (\forall) k, l \in \mathbb{N}^*$.
Rezulta ca $(A + C)^p = A^p + C^p$.

7. $abI_n = (A - bI_n)(B - aI_n); ab \ne 0$
Rezulta $rang(A - bI_n) = rang(B - aI_n) = n$; dar $AB = aA + bB \Leftrightarrow A(B - aI_n) = bB$
Cum $rang(B - aI_n) = n \Rightarrow rangA = rang(bB) = rangB$.

8. Din inegalitatea lui Sylvester avem:
$rang(AB) \geq rang + rangB - n$ sau $0 \geq n - 1 + rangB - n \Rightarrow rangB \leq 1$.
Dar $B \neq O_n \Rightarrow rangB = 1$.

9. Daca $M \in M_n(\mathbb{C})$ avem ca $\det M = a + ib = 0 \Rightarrow \det \overline{M} = a - ib = 0$. Rezulta ca un determinant de ordin k format cu elemente din A este nul $\Leftrightarrow$ determinantul de ordin k similar, format cu elemente din $\overline{A}$ este nul.
Deci $rangA = rang\overline{A}$.

10. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, a_{ij} = 0$ pentru $1 \leq i, k \leq n$
Daca $rang(A + I_n) = k, 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$, matricea $A + I_n$, avand sub diagonala toate elementele nule, va avea pe diagonala principala k elemente diferite de zero si *(n-k)* elemente egale cu zero, adica matricea A are pe diagonala principala k elemente diferite de -1 si *(n-k)* elemente egale cu -1. Rezulta ca matricea $A - I_n$ va avea pe diagonala principala *(n-k)* elemente egale cu -2 , iar sub diagonala principala toate elementele nule.
$\Rightarrow rang(A - I_n) \geq n - k \Rightarrow rang(A + I_n) + rang(A - I_n) \geq k + n - k = n$

11. $rangA = rangB = n, A + B = A(B^{-1} + A^{-1})B$
$\Rightarrow rang(A + B) = rang\left[A(B^{-1} + A^{-1})B\right] = rang\left[(B^{-1} + A^{-1})B\right] = rang(B^{-1} + A^{-1})$.

12. $A^2 = I_n \Leftrightarrow A = A^{-1}, aI_n + bA = A(aA^{-1} + bI_n) = A(aA + bI_n), rangA = n$
$\Rightarrow rang(aA + bI_n) = rang(aI_n + bA)$.

13. $BA \in M_k(\mathbb{R})$ si $rang(BA) \leq k$
a) Stiind ca $rangAB \leq rangA$ si $rangAB \leq rangB$, din $(AB)^2 = AB$
$\Rightarrow rang(AB)^2 = rangAB = k$;
$k = rangA(BA)B \leq rang(BA) \leq k \Rightarrow rangBA = k$.
b) $(AB)^2 = AB \Rightarrow BA \cdot BA \cdot BA = BA \cdot BA$, dar BA este inversabila de la a) $\Rightarrow BA = I_k$.

14. Observam ca $(AB)^2 = AB$ si $rangAB = 3$ si conform problemei 13 $\Rightarrow rangBA = 3$, deci BA este inversabila , dar $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = B(AB)^2 A = BABA = (BA)^2$
$\Rightarrow BA = I_3 \Rightarrow \det(BA) = 1$.

4.Probleme Matrici

1. Fie A o matrice cu n linii si m coloane $(m < n)$. Se noteza cu A' matricea traspusa (adica matricea obtinuta prin schimbarea liniilor in coloane). Sa se arate ca $\det(AA') = 0$.

2. Se considera o matrice patrata A de ordin n si A' matricea care se obtine prin schimbarea liniilor respective in coloane. Daca suma elementelor matricii AA' este 0, atunci $\det(A) = 0$.

3. Consideram o matrice 3×3 cu elemente initiale necunoscute. Doua persoane A si B dau alternativ cate o valoare reala pentru cate un element al matricii si acea valoare ramane fixata. Sa se arate ca oricare ar fi persoana care incepe jocul, persoana A poate proceda astfel incat matricea finala sa fie singulara.

4. Fie M multimea matricilor patratice de numere reale $A = (a_{ij})$ de ordinul 3 cu proprietatea ca $a_{1i_1} + a_{2i_2} + a_{3i_3} = o$ pentru orice permutare (i_1, i_2, i_3) a multimii $\{1, 2, 3\}$.
a) Sa se arate ca pentru orice $A \in M$ avem $\det A = 0$.
b) Sa se demonstreze ca exista 4 matrici E_1, E_2, E_3, E_4 din multimea M, asa incat orice element A din M se scrie in mod unic sub forma $A = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$, unde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

5. Sa se arate ca oricare ar fi matricea patratica de ordin n cu elemente numere reale are loc inegalitatea $\det(I + A_2) \geq 0$, unde I este matricea unitate de ordinul n.

6. Fie M multimea matricicilor patrate de ordinul 2 cu elemete reale. Pentru orice $A, B \in M$ se noteaza $[A, B] = AB - BA$. Sa se arate ca oricare ar fi $A, B, C, D \in M$, matricea $[A, B]^2$ este de forma λI_2 cu $\lambda \in \mathbb{R}$, I_2 matricea unitate de ordinul 2 si ca $[A, B] \cdot [C, D] + [C, D] \cdot [A, B]$ comuta cu orice matrice din M.

7. Matricile patrate A si B sunt de acelasi ordin si satisfac relatiile $AB - B^2A^2 = U$, $A^3 + B^3 = 0$ unde U este matricea unitate, iar 0 este matricea 0. Sa se arate ca daca una din matricile A sau B este inversabila, atunci relatia $BA - A^2B^2 = U$. Sa se demonstreze ca egalitatea are loc si fara ipoteza de inversabilitate a lui A sau B.

8. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ si $a \in \mathbb{R}$ astfel incat $|a| > n - 1$. Daca $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ este o matrice ale carei elemente sunt definite prin $a_{ij} = a$, daca $i = j$ si $a_{ij} = \varepsilon_{ij}$ daca $i \neq j$, unde $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$, sa se arate ca $\det A \neq 0$.

9. a) Daca I_n este matricea unitate de ordinul n, sa se dea exemplu de matrice patratica A de ordinul 3 neinversabila asa incat $I_2 + A$ sa fie inversabila.

b) Daca A si B sunt matrici patratice de ordinul n si daca matricea $I_n - AB$ este inversabila, sa se demonstreza ca si $I_n - BA$ este inversabila.

10. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$. Sa se arate ca $\det(A+B) \geq 0$ cada si numai daca $\det(A^n + B^n) \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Sa se arate ca :
a) daca $A \in M_n(\mathbb{C})$ este singulara ($\det A = 0$) , atunci exista $B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel incat $AB = BA = 0$.
b) o matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ este singulara daca si numai daca exista o matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$, nenula , astfel incat pntru orice $p \in \mathbb{N}^*$, $(A+B)^p = A^p + B^p$.

12. a) Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Sa se arate ca daca $A^t \cdot A = 0$, atunci $A = 0$.
b) Fie $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. Sa se arate ca daca $BA^tA = CA^tA$, atunci $BA = CA$.
c) Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ cu proprietatea ca exista $A' \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ astfel incat $A \cdot A' \cdot A = A$. Sa se arate ca ecuatia matriciala $A \cdot X = B$, unde $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ este cmpatibila daca si numai daca $AA'B = B$. In acest caz sa se arate ca multimea solutiilor ecuatiei considerate este $\{A'B + Y - A'AY \,/\, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})\}$.

13. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice astfel incat $A^n = \alpha \cdot A$, unde α este un numar real, $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1$. Sa se arate ca matricea $B = A + I_n$ este inversabila.

14. Fie r, s numere naturale relativ prime, impare si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel incat sa avem $AB = BA, A^r = I_n$ si $B^s = I_n$. Sa se arate ca matricea A+B este nesingulara.

15. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel incat $AB + BA = O_n$ si $\det(A+B) = 0$. Sa se arate ca avem relatia $\det(A^3 - B^3) = 0$,

16. Fiind dat numarul natural impar $n \geq 3$, sa se arate ca ecuatia urmatoare, $X^2 - X + I_n + {}^tX \cdot X = O_n$ nu admite solutii in $M_n(\mathbb{R})$.

17. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea ca $AB = BA$ si ${}^tA = A, {}^tB = -B$. Sa se arate ca $\det(A^2 + aB^2) \geq 0, (\forall) a \in \mathbb{R}$.

18. Fie $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$ astfel incat $X + Y = X \cdot Y, (\forall) X, Y \in \{A, B, C, D\}, X \neq Y$.

Sa se arate ca $A + B + C + D = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot D$.

19. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$ si $A_i \in M_n(\mathbb{R}), i = \overline{1,k}$. Sa se arate ca $\det\left(\sum_{i=1}^{k} {}^tA_i \cdot A_i\right) \geq 0$.

e $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ doua matrice astfel incat $\det(AB + BA) \leq 0$. Sa se arate ca avem
tatea $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

e $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$ unde A si C sunt inversabile. Daca $A^k \cdot B = C^k \cdot D, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$,
rate ca $B = D$.

e p un numar natural, $p \geq 2$ si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ o matrice de ordinul n, cu elemente
e intregi. Sa se arate ca oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$ exista o functie
$\dots, n] \to [0,1]$ astfel incat inlocuind elementele $a_{\sigma(1)1}, a_{\sigma(2)2}, \dots, a_{\sigma(n)n}$ din matricea A,
iv cu $a_{\sigma(1)1} + \varepsilon(1), a_{\sigma(2)2} + \varepsilon(2), \dots, a_{\sigma(n)n} + \varepsilon(n)$ determinanul matrcii A_ε astfel obtinuta
e divida cu p.

e A o matrice patratica de ordin impar (cel putin egal cu 3) cu elementele numere
impare. Sa se arate ca daca A este inversabila atunci nu este posibil ca toti minorii
telor unei linii sa aiba modulele egale.

e matricile nenule $A_0, A_1, \dots, A_n \in M_2(\mathbb{R}), n \geq 2$ cu proprietatile:
$I_2, (\forall) a \in \mathbb{R}$ si $A_0 \cdot A_k = A_k \cdot A_0, (\forall) k \in \overline{1,n}$. Sa se arate ca :

$A_k^2 \Big) \geq 0$;

$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \right) = 0$ si $A_2 \neq a \cdot A_1, (\forall) a \in \mathbb{R}$ atunci avem egalitatea, $\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = O_2$.

$A \in M_2(\mathbb{C})$ si $C(A) = \{B \in M_2(\mathbb{C}) \mid A \cdot B = B \cdot A\}$. Sa se arate ca avem relatia
$B)| \geq |\det B|$ pentru orice $B \in C(A)$, daca si numai daca $A^2 = O_2$.

A o matrice patrata de ordinul 3 cu elemente reale. Sa se arate ca :
f este un polinom cu coeficienti reali, care nu are radacini reale, atunci $f(A) \neq O_3$;
a un numar natural nenul n astfel incat $\left(A + A^*\right)^{2n} = A^{2n} + \left(A^*\right)^{2n}$ daca si numai daca
0.

5.Solutii Matrici

1. Se adauga matricei A un numar de n-m coloane formate din elemente egale cu 0 si matricei A', n-m linii formate din zerouri, obtinandu-se matricele patrate B, B'. Avem $AA' = BB'$, deci $\det(AA') = \det(BB') = \det B \cdot \det B' = 0$.

2. Daca $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, avem inegalitatea:

$$AA' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot a_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot a_{nk} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot a_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \cdot a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \cdot a_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 \end{pmatrix}$$

Vom insuma elementele matricii produs intr-un anumit fel. Adunam pe fiecare coloana primii termeni din sumele care reprezinta elemenetele respective si obtinem

pe prima coloana : $a_{11} \cdot (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})$

pe a doua coloana : $a_{21} \cdot (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})$

$\vdots$

pe a n-a coloana : $a_{n1} \cdot (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})$.

Facand suma acestor elemente (pentru toate coloanele) obtinem urmatoarea relatie :

$a_{11} \cdot (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + a_{21} \cdot (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + \dots + a_{n1} \cdot (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) = (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})^2$

Daca vom lua acum pe fiecare coloana cel de-al doilea termen din sumele respective si sumam pe coloane, iar apoi rezultatele le sumam intre ele, vom obtine analog

$(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2})^2$ etc.

Facand suma acestor sume, vom obtine suma tutturor elementelor matricii AA'.

Asadar, aceasta suma este

$(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})^2 + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2})^2 + \dots + (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn})^2$ si, deducem din ipoteza ca valoarea sa este zero ca avem:

$a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} = 0; a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} = 0; \dots; a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} = 0.$

Pentru calculul lui $\det(A)$, adunam la prima linie toate celelalte linii si vom obtine (in baza egalitatilor precedente) o linie numai cu zerouri. Rezulta ca $\det(A) = 0$.

3. Strategia cu care A ajunge singur la castig se va baza pe plasarea de zerouri astfel incat sa realizeze o linie (coloana) de zerouri sau un minor de ordinul 2 format din zerouri, caci in aceste cazuri determinantul matricii patrate de ordinul 3 este nul.

Presupunem ca jocul este inceput de B. Atunci A va plasa un un zero pe linia sau coloana pe care a fost situat primul zero si care ramane neocupata de B. Persoana B este fortata sa plasese un numar pe aceasta linie sau coloana, in scopul de a-l impiedica pe A sa-si plaseze cel de-al treilea zero (care duce la anularea determinantului). In acest fel, B a plasat doua din cele trei numere de pana acum , pe o aceeasi linie sau coloana. Inseamna ca ramane o linie sau o coloana pe care b nu are plasat nici un numar. Atunci A plaseaza pe acasta un zero si la pasul urmator are siguranta ca ii va aparea o linie (coloana) de zerouri, sau un minor de ordinul 2 format din zerouri, ceea ce inseamna ca va duce la obtinerea unei matrici singulare.

Exemplu : fie matricea $(a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ si consideram jocul:

1) B ocupa a_{22}, iar A plaseaza zero in a_{13};

2) B ocupa a_{33}, iar A plaseaza zero in a_{11};

3) B ocupa a_{12}, iar A plaseaza zero in a_{21};

In felul acesta A si-a creat perspectiva de a plasa un zero in a_{31} sau in a_{23}. Daca jocul ar fi inceput de A, dupa plasarea unui prim zero, acesta va continua dupa strategia de mai inainte.

4. a) Daca notam $a_{11}=a, a_{12}=b, a_{13}=c, a_{22}=d$, atunci din proprietatea enuntata gasim ca $a_{31}=-c-d, a_{33}=-a-d$, apoi ca $a_{21}=a-b+d, a_{23}=d-b+c$ si $a_{32}=b-c-a-d$. Rezulta ca matricea A se poate scrie sub forma urmatoare :

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a-b+d & d & d-b+c \\ -c-d & b-c-a-d & -a-d \end{pmatrix}$$ si calculand determinantul acestei matrici gasim ca $\det A=0$.

b) Matricea A se poate scrie : $A=a\cdot E_1+b\cdot E_2+c\cdot E_3+d\cdot E_4$, unde

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sa presupunem ca matricea A ar avea doua moduri de scriere, adica:
$A=x_1\cdot E_1+x_2\cdot E_2+x_3\cdot E_3+x_4\cdot E_4$ si $A=y_1\cdot E_1+y_2\cdot E_2+y_3\cdot E_3+y_4\cdot E_4$.
Atunci din egalitatea lor, rezulta imediat ca $x_1=y_1, x_2=y_2, x_3=y_3, x_4=y_4$ si deci scrierea este unica.

5. Avem,
$\det(I+A^2)=\det(I+i^2\cdot A^2)=\det((I+i\cdot A)(I-i\cdot A))=\det(I+i\cdot A)\cdot\overline{\det(I-i\cdot A)}\ge 0$.
Generalizare. Daca $A,B\in M(\mathbb{R})$ atunci daca $AB=BA$ are loc inegaliatea $\det(A^2+B^2)\ge 0$.

6. Se observa usor ca daca $X=\begin{pmatrix} u & v \\ t & w \end{pmatrix}\in M$, atunci exista inegalitatea matriciala (1),
$X^2-(u+w)X+(u\cdot w-v\cdot t)I_2=O_2$, unde prin O_2 am notat matricea nula. Fie
$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ atunci

$$[A,B]=AB-BA=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1b_1+a_3b_2 & a_2b_1+a_4b_2 \\ a_1b_3+a_3b_4 & a_2b_3+a_4b_4 \end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 & a_1b_2+a_2b_4-a_2b_1-a_4b_2 \\ a_3b_1+a_4b_3-a_1b_3-a_3b_4 & a_3b_2-a_2b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, unde am facut urmatoarea notatie : $a=a_2b_3-a_3b_2, b=a_1b_2+a_2b_4-a_2b_1-a_4b_2, c=a_3b_1+a_4b_3-a_1b_3-a_3b_4$. Luand $X=[A,B]$ avem $u=a, v=b, t=c, w=-a$, asa ca din (1) rezulta $X^2=(v\cdot t-u\cdot w)I_2$, adica avem $[A,B]^2=\lambda\cdot I_2$, unde $\lambda=v\cdot t-u\cdot w=bc+a^2$.

Pentru partea a doua a problemei, consideram ca si mai inainte $[A,B]=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ si in plus fie

$[C,D]=\begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}$.

Luand $X=[A,B]+[C,D]=\begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & -a-p \end{pmatrix}$ si atunci cu notatiile initiale vom avea:

$u=a+p, v=b+p, t=c+r, w=-a-p$. Prin urmare conform (1) putem scrie:

$X^2=\mu I_2 \Leftrightarrow ([A,B]+[C,D])([A,B]+[C,D])=\mu I_2$

$\Leftrightarrow [A,B]^2+[A,B]\cdot[C,D]+[C,D]\cdot[A,B]+[C,D]^2=\mu I_2$; dar conform primei parti

Avem ca $[A,B]^2=\lambda I_2, [C,D]^2=\alpha I_2$ si Atunci deducem ca

$[A,B]\cdot[C,D]+[C,D]\cdot[A,B]=\beta I_2$ si aceasta matrice comuta cu toate matricile din M.

7. Din faptul ca $A^3+B^3=0$ rezulta ca avem $A^3=-B^3$. Totodata, avem si $-B=B^2\cdot(-B^3)=(-B^3)\cdot B^2$, de unde daca tinem seama ca $-B^3=A^3$, obtinem ca avem (1), $B^2A^3=A^3B^2$. Presupunem ca A este inversabila, adica exista A^{-1} si atunci din (1), prin inmultire la stanga cu A^{-1}, deducem (2), $A^{-1}B^2A^3=A^2B^2$. Conform enuntului avem $AB-B^2A^2=U=A^{-1}$ si deci, inmultind aceasta relatie la stanga cu A^{-1} si la dreapta cu A, rezulta ca $BA-A^{-1}B^2A^3$, de unde tinand seama de (2) si obtinem ca $BA-A^2B^2=U$. Daca B este inversabila se procedeaza analog si obtinem enuntul. Vom arata acum ca relatia din enunt exista si fara ipoteza de inversabilitate a lui A sau B. Avem deci ca:

$$(B+i\cdot A^2)(A+i\cdot B^2)=BA-A^2B^2+i\cdot(A^3+B^3)=U+i\cdot O=U,$$

de unde rezulta ca matricea $B+i\cdot A^2$ nu este singulara, are inversa si inversa sa este $A+i\cdot B^2$. Prin urmare avem relatiile:

$(A+i\cdot B^2)\cdot(B+i\cdot A^2)=U \Leftrightarrow AB-B^2A^2+i\cdot(A^3+B^3)=U \Leftrightarrow AB-B^2A^2=U$, ceea ce demonstreaza enuntul.

8. Sa presupunem, prin reducere la absurd ca $\det A=0$. Atunci exista numerele $x_k, k\in\{1,2,...,n\}$. Nu toate nule asa incat (1), $\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot a_{ik}=0, i=\overline{1,n}$. Fie deci $x=\max_{1\le k\le n}\{|x_k|\}$ si $p\in\{1,2,...,n\}$ asa incat $x=|x_p|$. Din relatia (1) rezulta ca $-x_p\cdot a_{pp}=\sum_{j=1}^{n} a_{pj}$ si, prin trecere la module, deducem ca $|x_p|\cdot|a|=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne p}}^{n} x_j\cdot a_{pj}\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne p}}^{n}|x_j|\cdot|a_{pj}|\le x\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\ne p}}^{n}|a_{pj}|=x\cdot(n-1)$.

Deoarece $x>0$ rezulta ca $|a|\leq n-1$, ceea ce este absurd. Prin urmare avem ca $\det A\in\mathbb{R}^*$.

9. a) Este evident ca $\det A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ este neinversabila iar $A+I_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ este inversabila deoarece $\det(A+I_2)=2\in\mathbb{R}^*$.

b) Fie $C=(I_n-AB)^{-1}$ atunci avem :
$C\cdot(I_n-AB)=I_n\Rightarrow C-CAB=I_n$ si atunci rezulta urmatoarele relatii:
$(I_n+BCA)(I_n-BA)=I-BA+BCA-BCABA=I_n-BA+B\cdot(C-CAB)\cdot A=$
$=I-BA+BI_nA=I_n-BA+BA=I_n$ de unde deducem ca matricea I_n-BA este inversabila avand ca inversa matricea urmatoare I_n-BCA.

10. ($\Rightarrow$) Presupunem ca avem, $\det(A+B)\geq 0$ si vom demonstra ca rezulta $\det(A^n+B^n)\geq 0$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Consideram doua cazuri, dupa cum $n\in 2\mathbb{N}$ sau $n\in 2\mathbb{N}+1$

a) $n\in 2\mathbb{N}$. Fie $n=2p$. Avem relatiile :
$A^{2p}+B^{2p}=(A^p)^2+(B^p)^2=(A^p+i\cdot B^p)(A^p-i\cdot B^p)=(A^p+i\cdot B^p)\overline{(A^p+i\cdot B^p)}$ asa ca daca trecem la determinanti, rezulta
$\det(A^{2p}+B^{2p})=(A^p+i\cdot B^p)\overline{(A^p+i\cdot B^p)}=\left|\det(A^p+i\cdot B^p)\right|^2\geq 0$

b) $n\in 2\mathbb{N}+1$. Fie $n=2p+1$. Sa notam cu $x_0=-1,x_1,x_2,\ldots,x_{2p}$ radacinile complexe ale ecuatiei binome (1), $x^{2p+1}+1=0$. Tinand seama de faptul ca matricile A si B comuta, precum si de relatiile lui *Viète* pentru ecuatia (1), putem scrie relatia :

$$\prod_{j=0}^{2p}(A-x_jB)=A^{2p+1}-\left(\sum_{j=0}^{2p}x_j\right)\cdot A^{2p}\cdot B+\left(\sum_{0\leq j\leq k\leq 2p}x_j\cdot x_k\right)\cdot A^{2p-1}\cdot B^2-\ldots+B^{2p}=A^{2p+1}+B^{2p+1}$$

Deoarece $x_0=-1$, iar radacinile $x_1,x_2,\ldots,x_{2p}$ sunt doua cate doua conjugate, putem scrie identitatea obtinuta sub forma urmatoare:

(2) $$(A+B)\cdot\prod_{j=1}^{p}(A-x_j\cdot B)(A-x_j\cdot B)=A^{2p+1}+B^{2p+1}$$

Deoarece A si B au elemente reale, avem pentru fiecare $j\in\{1,2,\ldots,p\}$ ca :
$\det((A-x_j\cdot B)(A-\overline{x_j}\cdot B))=\det(A-x_j\cdot B)\cdot\det(A-\overline{x_j}\cdot B)=\det(A-x_j\cdot B)\cdot\det\overline{(A-x_j\cdot B)}=$
$=\det(A-x_j\cdot B)\cdot\overline{\det(A-x_j\cdot B)}=\left|\det(A-x_j\cdot B)^2\right|\geq 0$ unde trebuie sa mentionam ca am notat $\overline{X}\in M_k(\mathbb{C})$ matricea obtinuta din $X\in M_k(\mathbb{C})$, inlocuind elementele acesteia cu conjugatele complexe ale lor. Deoarece si $\det(A+B)\geq 0$, trecand (2) la determinanti, rezulta ca avem :

$$\det(A^{2p+1}+B^{2p+1})=\det(A+B)\cdot\prod_{j=1}^{p}\det((A-x_j\cdot B)(A-\overline{x_j}\cdot B))\geq 0.$$

11. a) Deoarece A este singulara, sistemul omogen $A \cdot X_n = 0$ admite o solutie nebanala $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Analog, sistemul omogen ${}^tA \cdot Y = O_n$ admite o solutie nebanala : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Fie

$X \cdot {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_i \cdot y_j)_{1 \le i,j \le n}$; Evident ca $B_n \neq 0$. Pe de alta parte ,

$AB = A \cdot (X \cdot {}^tY) = (AX) \cdot {}^tY = O_n$ si $BA = (X \cdot {}^tY) \cdot A = X \cdot {}^t(A \cdot Y) = O_n$. Presupunem ca A este singulara. Fie deci B o matrice nenula cu $AB = BA = 0$. Vom arata prin inductie ca avem :

$(A+B)^p = A^p + B^p, (\forall) p \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $p = 1$ se verifica. Daca $(A+B)^p = A^p + B^p$, atunci avem si relatiile :

$(A+B)^{p+1} = (A+B)^p \cdot (A+B) = A^{p+1} + A^p \cdot B + B^p \cdot A + B^{p+1} =$

$= A^{p+1} + A^{p-1} \cdot (AB) + B^{p-1} \cdot (BA) + B^{p+1} = A^{p+1} + A^{p+1} \cdot O_n + B^{p+1} \cdot O_n + B^{p+1}$

Si deci demonstratia prin inductie este incheiata.

Presupunem acum ca exista B nenula, astfel incat $(A+B)^p = A^p + B^p, (\forall) p \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $p = 1$ se obtine relatia (1) $AB + BA = 0$.

Pentru $p = 2$ avem (2) $A^2B + B^2A = O_n$

Din relatiile (1) si (2) deducem ca $B^2A = -A^2B = A(-AB) = ABA$. Presupunem prin absurd ca A este nesingulara si atunci din ultima relatie prin inmultire la dreapta cu A^{-1}, obtinem (3), $B^2 = AB$. In continuare vom obtine $A^2B = A(AB) = -ABA$ si deci $A^2B^2 = -ABAB = -AB(-AB) = AB^2A$, de unde prin simplificarela stanga cu A deducem (4) $AB^2 = B^2A$. Din relatia (3) rezulta (5), $AB^2 = A(AB) = A^2B$. Pe de alta parte folosind (3), Deducem (6) , $B^2A = (AB)A = -A^2B$. Din relatiile (4), (5) si (6) rezulta ca $A^2B = -A^2B$, adica $A^2B = 0$. Deoarece A este presupusa nesingulara, din ultima relatie obtinem $B = O_n$, contradictie cu ipoteza. Deci matricea A este neaparat singulara.

12. a) Daca $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, atunci matricea A^tA are pe diagonala principala elemente de forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2, i = 1, \dots, n$. Deoarece $A^tA = 0$ si $a_{ij} \in \mathbb{R}$, rezulta $a_{ij} = 0$ pentru $i, j = 1, \dots, n$, deci $A = 0$.

b) Conform punctului precedent, este suficient sa aratam ca $(BA - CA) \cdot {}^t(BA - CA) = 0$.

Dar

$(BA - CA) \cdot {}^t(BA - CA) = (BA - CA) \cdot ({}^tA^tB - {}^tA^tC) = BA^tA^tB - BA^tA^tC - CA^tA^tB + CA^tA^tC = 0$

(prin ${}^tA$ s-a notat transpusa matricii A).

c) Suficienta conditiei. Daca $AA' = B$, atunci $X = A'B$ este solutie a sistemului, deci acesta este compatibil. Necesitatea conditiei. Presupunem ca exista o solutie $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a sistemului. Atunci $B = AX = (AA'A)X = AA'(AX) = AA'B$. Sa aratam acum ca in cazul cand sistemul este compatibil, multimea solutiilor sale este $S = \{A'B + Y - A'AY \mid Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})\}$.

Intr-adevar, pentru orice $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ avem

$A \cdot (A'B + Y - A'AY) = AA'B + AY - AA'AY = B + AY - AY = B, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, si deci orice matrice din S este solutie a sistemului.

Reciproc, sa demonstram ca orice solutie a sistemului apartine lui S. Fie X_0 o solutie, deci $AX_0 = B$ sau $A(X_0 - A'B) = 0$, ceea ce arata ca $X_0 - A'B$ este o solutie a sistemului omogen $AX = 0$. Dar daca Y este o solutie oarecare a sistemului omogen, atunci avem $Y = Y - A'AY$ (deoarece $AY = 0$). Deci $X_0 - A'B = Y - A'AY$, unde $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Rezulta ca $X_0 = AB + Y - A'AY \in S$.

13. Deoarece $A = B - I_n$, atunci conditia $A^n = \alpha \cdot A$ devine : $(B - I_n)^n = \alpha \cdot (B - I_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot B^{n-k} = \alpha \cdot B - \alpha \cdot I_n \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot B^{n-k} - \alpha \cdot B = -\alpha \cdot I_n - (-1)^n \cdot I_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B \cdot (B^{n-1} - C_n^1 \cdot B^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot I_n - \alpha \cdot I_n) = I_n((-1)^{n+1} - \alpha)$ de unde deducem ca :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(-1)^{n+1} - \beta} \cdot B \cdot (B^{n-1} - C_n^1 \cdot B^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot I_n - \alpha \cdot I_n) = I_n \qquad (1)$$

Din relatia (1) rezulta ca matricea B este inversa la dreapta si datorita faptului ca B comuta cu orice putere a sa, deducem ca aceasta inversa la dreapta este si inversa la stanga. Prin urmare matricea B este inversabila.

14. Conform enuntului avem $A^m + B^m = 2 \cdot I_n$. Daca $m \in 2\mathbb{N} + 1$ din faptul ca $A \cdot B = B \cdot A$ Deducem ca $A^m + B^m = (A+B)(A^{m-1} - A^{m-2} \cdot B + \ldots + B^{m-1})$. Pentru $m = rs$ obtinem imediat ca $A^m + B^m = (A+B)(A^{m-1} - \ldots + B^{m-1}) = 2 \cdot I_n$ si prin urmare $A + B$ este nesingulara.

15. Avem $(A+B) \cdot (A^2 - AB - B^2) = A^3 - A^2B - AB^2 + BA^2 - BAB - B^3 =$
$= A^3 - B^3 + A \cdot (BA) - (BA) \cdot B - (AB) \cdot A - BAB = A^3 - B^3$ de unde deducem ca
$\det(A^3 - B^3) = \det(A+B) \cdot \det(A^2 - AB - B^2) = 0$.

16. Presupunem ca exista $A \in M_n(\mathbb{R})$ astfel incat avem relatiile :
$A^2 - A + I_n + {}^tA \cdot A = O_n \Leftrightarrow I_n = -A^t \cdot A + A - A^2 = (-A^t + I_n - A) \cdot A$
de unde deducem ca $1 = \det I_n = \det({}^tA + I_n - A) \cdot \det A$ de unde rezulta ca $\det A \in \mathbb{R}_+^*$.
De asemenea $A^2 - A + I_n + {}^tA \cdot A = O_n \Leftrightarrow A^2 - A - I = {}^tA \cdot A$ de unde rezulta ca
$\det(A^2 - A + I_n) = (-1)^n \cdot \det({}^tA \cdot A) = -(\det A)^2$ egalitate imposibila deoarece avem :
$\det(A^2 - A + I_n) \geq 0$ si $-(\det A)^2 < 0$.

17. Daca $a = 0$, atunci $\det(A^2 + a \cdot B^2) = \det A^2 = (\det A)^2 \geq 0$. Daca $a > 0$ atunci $a = b^2$,

$b \in \mathbb{R}^*$ si deci $A^2 + a \cdot B^2 = A^2 + b^2 \cdot B^2 = A^2 + b \cdot B^2$. Prin urmare daca tinem seama ca $\det(X^2 + Y^2) \geq 0, (\forall) X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ cu $X \cdot Y = Y \cdot X$ deducem ca avem $\det(A^2 + aB^2) \geq 0$.

Daca $a < 0$, atunci $a = -c^2$, $c \in \mathbb{R}^*$ si deci avem :
$A^2 + a \cdot B^2 = A^2 - c^2 \cdot B^2 = (A - c \cdot B)(A + c \cdot B)$ de unde rezulta ca
$\det\left(A^2 + a \cdot B^2\right) = \det(A - c \cdot B) = \det(A + c \cdot B)$.
In ultima egalitate tinem seama ca ${}^t(A - c \cdot B) = {}^t A + c \cdot {}^t B$ si atunci rezulta ca
$\det(A - c \cdot B) = \det {}^t(A - c \cdot B) = \det\left({}^t A + c \cdot {}^t B\right) = \det {}^t(A + c \cdot B) = \det(A + c \cdot B)$

Si prin urmare avem : $\det(A^2 + c \cdot B^2)^2 = \left(\det(A^2 + c \cdot B^2)\right)^2 \geq 0$.

18. Sa observam ca : $X \cdot Y = X + Y = Y + X = Y \cdot X$, $(\forall) X, Y \in \{A, B, C, D\}, X \neq Y$ adica $X \cdot Y = Y \cdot X, (\forall) X, Y \in \{A, B, C, D\}$. De asemenea avem relatiile :
$X \cdot Y = Y \cdot X, (\forall) X, Y \in \{A, B, C, D\} \ldots A + B + B + C + C + D + D + A = AB + BC + CD + DA =$
$2 \cdot (A + B + C + D) = A + B + B + C + C + D + D + A = AB + BC + CD + DA = (A + C) \cdot B + C \cdot (A + C) = (A + C) \cdot B + (A + C) \cdot D =$
$= (A + C) \cdot B + D \cdot (C + A) = (A + C) \cdot B + C \cdot (A + C) = (A + C) \cdot B + (A + C) \cdot D =$
$= (A + C) \cdot (B + D) = AC \cdot BD = A \cdot C \cdot B \cdot D = A \cdot B \cdot C \cdot D$.

19. Fie $A = \sum_{i=1}^{k} {}^t A_i \cdot A_i$ si polinomul $P(u) = \det(A - u \cdot I_n)$. Sa presupunem prin absurd ca $\det A < 0$, deci $P(0) < 0$. Deoarece $\lim_{u \to -\infty} P(u) = \infty$ rezulta ca ecuatia $P(u) = 0$ are cel putin o radacina $u_0 \in \mathbb{R}^*$. Rezulta ca sistemul liniar si omogen $(A - u_0 \cdot I_n) \cdot X = 0$ are si solutii nenule . Fie $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ o solutie nenula a sistemului precedent. Rezulta deci ca :

$A \cdot X = u_0 \cdot X \Rightarrow {}^t X \cdot A \cdot X = u_0 \cdot {}^t X \cdot X$ de unde deducem ca avem

$\sum_{i=1}^{k} {}^t(A_i \cdot X)(A_i \cdot X) = u_0 \cdot {}^t X \cdot X$. Deoarece pentru orice vector arbitrar

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ avem relatia ${}^t v \cdot v = \sum_{j=1}^{n} v_j^2 \geq 0$ rezluta ca avem relatia

${}^t(A_i \cdot X)(A_i \cdot X) \geq 0, \forall i = \overline{1, k}$ si ${}^t X \cdot X \geq 0$ de unde rezulta ca $u_0 \geq 0$ ceea ce contrzice alegerea lui $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$.

Asadar presupunerea ca $\det A < 0$ conduce la o contradictie si atunci este adevarat ca $\det A \geq 0$.

20. Pentru orice 2 matrice $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ avem egalitatea:
$\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2\left(\det(X) + \det(Y)\right)$
Consideram functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data prin:
$f(t) = \det(X + t \cdot Y) = \det(Y) \cdot t^2 + a \cdot t + \det(X), a \in \mathbb{R}$. Deoarece
$f(1) + f(-1) = 2\left(\det(X) + \det(Y)\right)$, deducem egalitatea din enunt. Fie $X = A^2 + B^2$ si

$Y = A\cdot B + B\cdot A$. Deoarece, $A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2 = (A+B)^2$ si
$A^2 + A\cdot B - B\cdot A - B^2 = (A-B)^2$ rezulta ca
$\det\left((A+B)^2 + (A-B)^2\right) = 2\cdot\det\left(A^2+B^2\right) + 2\cdot\det(A\cdot B + B\cdot A)$ si atunci avem relatia :
$\det\left(A^2+B^2\right) = \frac{1}{2}\left((\det(A+B))^2 + (\det(A-B))^2 - 2\cdot\det(A\cdot B + B\cdot A)\right)$.
Deoarece $\det(A\cdot B + B\cdot A) \le 0$ rezulta atunci ca $\det\left(A^2+B^2\right) \ge 0$.

21. Consideram matricile $I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}$. Sistemul omogen cu n^2+1 necunoscute si n^2 ecuatii : $x_0 I_n + x_1 A + x_2 A^2 + \dots + x_{n^2} A^{n^2} = 0$ admite si solutii nebanale , deci exista un polinom nenul $f \in C[X]$ astfel incat $f(A) = O_n$. Fie f si g polinoame de grad minim cu proprietatea ca $f(A) = g(C) = O_n$. Atunci avem ca $f(0), g(0) \ne 0$. Intr-adevar, daca $f(0) = 0$, atunci $f(X) = X\cdot f_1(X)$ si deci avem $A\cdot f_1(A) = O_n$.

Deoarece $\det A \ne 0$ rezulta atunci ca $f_1(A) = O_n$ ceea ce contrazice minimalitatea gradului polinomului f. Fie $h \in C[X], h = f\cdot g, h = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot X^k$. Datorita faptului ca $h(A) = h(C) = O_n$ $h(A)\cdot B = h(C)\cdot D$ si prin urmare $\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot A^k \cdot B = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot C^k \cdot D$. Dar , $A^k \cdot B = C^k \cdot D$ pentru $\forall k \in N^*$ si atunci $a_0 \cdot B = a_0 \cdot D$. Deoarece $a_0 = h(0) = f(0) \ne 0$ rezulta ca $B = D$.

22. Daca permutam in mod convenabil liniile sau coloanele matricii A_ε, putem considera $\sigma = \varepsilon$, unde schimbam eventual semnul dterminantului $\det A_\varepsilon$. Facem demonstratia prin inductie matematica dupa ordinul n al matricii. Pentru $n = 1$, afirmatia este adevarata. Daca dezvoltam $\det A_\varepsilon$ dupa linia 1, obtinem :
$\det A_\varepsilon = (a_{11} + \varepsilon(1))\cdot\delta_{11} + a_{12}\cdot\delta_{12} + \dots + a_{1n}\cdot\delta_{1n}$

Conform ipotezei de inductie putem presupune ca $\varepsilon(2), \dots, \varepsilon(n)$ sunt alese astfel incat p sa nu divida δ_{11}. Presupunem atunci ca p ar putea divide $\det A_\varepsilon$ pentru ambele alegeri ale lui $\varepsilon(1)$ si atunci avem : $a_{11}\cdot\delta_{11} + a_{12}\cdot\delta_{12} + \dots + a_{1n}\cdot\delta_{1n}$ iar p va divide numarul $(a_{11}+1)\cdot\delta_{11} + a_{12}\cdot\delta_{12} + \dots + a_{1n}\cdot\delta_{1n}$, de unde, prin scadere deducem ca p divde pe δ_{11}, contradictie. Asadar exista o alegere convenabila pentru ε_1, q.e.d

23. Consideram matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2n+1}}, n \in N^*$ unde a_{ij} este impar si notam d_{ij} nimorul elementului a_{ij} in matricea A. Vom presupune ca toti minorii elementelor liniei intai au modulele egale cu d. Deoarece matrciea A este inversabila , daca dezvoltam determinantul matricei A dupa elementele liniei intai rezulta ca $d \ne 0$. Conform relatiei
$a_{21}\cdot\delta_{11} + a_{22}\cdot\delta_{12} + \dots + a_{2,2n+1}\cdot\delta_{1,2n+1} = 0$ obtinem ca avem :

$a_{21}\cdot(-1)^{1+1}\cdot d_{11}+a_{22}\cdot(-1)^{1+2}\cdot d_{12}+...+a_{2,2n+1}\cdot(-1)^{1+2n+1}\cdot d_{1,2n+1}=0$. Deoarece $d_{1j}=\varepsilon_j\cdot d, \varepsilon_j\in\{-1,1\}, (\forall)j=\overline{1,2n+1}$, dupa simplificarea cu d deducem ca $a_{21}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\varepsilon_{11}+a_{22}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\varepsilon_{12}+...+a_{2,2n+1}\cdot(-1)^{1+2n+1}\cdot\varepsilon_{1,2n+1}=0$, egalitate care este imposibila deoarece in stanga avem o suma de $2n+1$ numere impare, deci impara, iar in dreapta 0 care e par.

24. Daca pentru orice $k\in\mathbb{N}$ notam $A_k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ atunci $A_0\cdot A_k=A_k\cdot A_0$ si deci rezulta $\frac{b_k}{b_0}=\frac{c_k}{c_0}=\frac{d_k-a_k}{d_0-a_0}=u_k, (\forall)k\in\mathbb{N}$ si deoarece $A_0\neq a\cdot I_2, b_0, c_0, d_0-a_0$ nu sunt toate egale cu zero, avem $b_k=u_k\cdot b_0, c_k=u_k\cdot c_0, d_k=u_k\cdot d_0+v_k, a_k=u_k\cdot a_0+v_k$ si prin urmare avem $A_k=u_k\cdot A_0+v_k\cdot I_2, k=\overline{1,n}$

a) Daca luam $u_k=0, k=\overline{1,n}$ atunci avem $\sum A_k^2=\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^2\right)\cdot I_2$ si atunci $\left(\sum_{k=1}^{n}A_k^2\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^2\right)^2\geq 0$. Daca vom considera $u=\sum_{k=1}^{n}u_k^2\neq 0$ atunci rezulta ca avem :

$\sum_{k=1}^{n}A_k^2=\left(\sum_{k=1}^{n}u_k^2\right)\cdot A_0^2+2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot v_k\right)\cdot A_0+\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^2\right)\cdot I_2=P(A_0)$ unde P este un polinom de gradul al doilea cu discriminantul $\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot v_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}u_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}v_k^2\leq 0$.

Rezulta atunci ca avem $P(z)=u\cdot(z-z_0)\cdot(z-z_0)$, $z_0\in\mathbb{C}$, de unde deducem ca $P(A_0)=(A_0-z_0\cdot I_2)\cdot(A_0-\overline{z_0}\cdot I_2)$ si deci $\det P(A_0)=u^2\cdot|\det(A_0-z_0\cdot I_2)|^2\geq 0$.

b) Folosind conditia $A_2\notin\{a\cdot A_1 \mid a\in\mathbb{R}\}$, rezulta ca $\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{v_2}{v_1}$ adica $\Delta<0$ prin urmare $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Rezulta atunci ca : $\det P(A_0)=0$ deci $\det(A_0-z_0\cdot I_2)=0$ sau $\det(A_0-\overline{z_0}\cdot I_2)=0$ si prin urmare, z_0 sau $\overline{z_0}$ este radacina a ecuatiei cu coeficienti reali $\det(A_0-z_0\cdot I_2)=0$ si atunci ambele numere sunt radacini.
Deoarece avem : $\det\theta(A_0-z_0\cdot I_2)=z^2-(a_0+d_0)\cdot z+(a_0\cdot d_0-b_0\cdot c_0)$ si totodata $A^2-(a_0+d_0)\cdot A+(a_0\cdot d_0-b_0\cdot c_0)\cdot I_2=O_2\Rightarrow P(A_0)=0$, adica $\sum_{k=1}^{n}A_k^2=O_2$.

25. $(\Rightarrow)$ Sa notam $t_1,t_2\in\mathbb{C}$ radacinile polinomului $P=\det(A-X\cdot I_2)\in C[X]$. Se stie ca $(A-t_1\cdot I_2)\cdot(A-t_2\cdot I_2)=O_2,(*)$. Datorita faptului ca $-t_1\cdot I_2,-t_2\cdot I_2$ sunt in $C(A)\Rightarrow$ avem relatiile : $0=\det(A-t_1\cdot I_2)=|\det(A-t_1\cdot I_2)|\geq|\det(-t_1\cdot I_2)|=|t_1|^2,(\forall)i\in\overline{1,n}$

$(\Leftarrow)$ Demonstram ca $\det(A+B)=\det B$, pentru $(\forall)B\in C(A)$. Fie deci, matricea $B\in C(A)$, B inversabila si $a\in\mathbb{C}$. Atunci avem ca $B^2=B^2-a^2\cdot A^2=(B-a\cdot A)(B+a\cdot A)$

Deducem ca avem $\det(B+a\cdot A)\neq 0$. Asadar, polinomul $Q=\det(B+X\cdot A)\in C[X]$ nu are radacini in $\mathbb{C}$, de unde deducem ca grad $Q<0$. In particular $Q(0)=Q(1)$ si atunci $\det(B)=\det(A+B)$.

Daca B nu este o matrice inversabila atunci exista un sir $(t_n)_{n\geq 1}$ de numere reale nenule convergent la 0 astfel incat matricile $B+t_n\cdot I_2$ sunt inversabile pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Deoarece $B+t_n\cdot I_2\in C(A)$ avem ca $\det(A+B+t_n\cdot I_2)=\det(B+t_n\cdot I_2),(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ de unde deducem ca $\det(A+B)=\det B$.

26. a) Conform enuntului, rezulta ca f are semn constant , deci vom presupune ca $f(x)>0,(\forall)x\in\mathbb{R}$ atunci valoarea minima m a functiei f pe $\mathbb{R}$ este strict pozitiva.

Deoarece polinomul $g=f-\frac{m}{2}$, nu are radacini reale factorii lui ireductibili peste $\mathbb{R}$ sunt de forma $X^2+2a\cdot X+a^2+b^2, b\neq 0$. Datorita relatiilor

$\det\left(A^2+2a\cdot A+\left(a^2+b^2\right)I_3\right)=\det\left(A+(a+b\cdot i)I_3\right)\cdot\det\left(A+(a-b\cdot i)I_3\right)=\left|\det\left(A+(a-b\cdot i)I_3\right)\right|^2\geq 0$

avem relatia : $\det\left(g(A)\right)\geq 0$.

Asadar, daca $f(X)=O_3$ atunci $g(A)=-\frac{m}{2}\cdot I_3$ si atunci $\det g(A)=-\frac{m^2}{8}<0$, ceea ce este in contradictie cu rezultatul obtinut anterior.

Bibliografie:

1) D.M. Batinetu, Maria Batinetu, I.V.Maftei, Augustin Semenescu, I.Tomescu, Florica Vornicescu, *Olimpiadele Nationale de Matematica* pentru liceu 1954-2003, Ed.Enciclopedica, Bucuresti 2004;

2) Colectia *Gazeta Matematica* in format electronic;

3) Dumitru Busneag, Florentina Chites, Dana Piciu, *Complemente de Algebra*, Editura Gil, 2006;

4) Buzeteani, S.Nita, *Determinantul produsului a doua matrice. Regula lui Laplace*

5) Gh.Andrei, C.Caragea, Gh. Bordea, *Algebra pentru concursuri de admitere si olipiade scolare*, Ed. Top AZ, Constanta 1993;

6) http://www.mathlinks.ro.