Probleme de combinatorică pentru gimnaziu

Octavia Potocean

1 Introducere

În ultimii ani combinatorica apare în aproximativ un sfert dintre problemele date la clasele a 7-a şi a 8-a la Olimpiada Naţională de Matematică. Combinatorica apare sub diverse forme, fie ea în probleme de geometrie, de algebră, de divizibilitate sau de mulţimi finite. În acest articol vom parcurge câteva exemple şi metode de abordare a acestor tipuri de probleme.

2 Mulţimi

2.1 Submulţimile unei mulţimi

Deseori, în problemele de olimpiadă, trebuie demonstrată existenţa unei submulţimi cu o anumită proprietate, sau trebuie determinată cea mai mare submulţime cu o anumită proprietate. Vom începe cu un exemplu simplu.

Problemă 1. *Să se determine toate submulţimile $X \subset \mathbb{R}$ având un număr finit de elemente, cu proprietatea că dacă $x \in X$ atunci $x + |x| \in X$*

Demonstraţie. Dacă există $x > 0$ astfel încât $x \in X$ atunci $x + |x| = 2x \in X$, $2x + |2x| = 4x = 2^2x \in X$ deci $2^n x \in X$. Cum n poate lua orice valoare rezultă că mulţimea X nu are un număr finit de elemente. Dacă $x \leq 0$ atunci $x + |x| = 0 \in X$ deci pentru un număr finit de numere negative $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ putem lua $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, 0\}$. □

În unele cazuri este necesară utilizarea cunoştiinţelor din alte domenii ale matematicii pentru a rezolva problemele cu mulţimi. Următoarea problemă a fost dată la Olimpiada Naţională în 2003.

Problemă 2. *Determinaţi numărul maxim de elemente al unei submulţimii $S \subset \{1, 2, \ldots, 2003\}$ astfel încât suma oricăror două elemente din S să nu fie divizibilă cu 3.*

Demonstraţie. Pentru a rezolva această problemă vom lua fiecare element din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2003\}$, îl vom împărţi la 3 şi vom lua resturile obţinute, în ordine:

$$(1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots, 1, 2, 0, 1, 2)$$

(restul împărţirii lui 2003 la 3 este 2). Un număr este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă restul împărţirii la 3 este 0, deci dacă a dă restul 1 şi b dă restul 2 atunci $a + b$ va fi divizibil cu 3. Rezultă că mulţimea S nu poate conţine un număr cu restul 1 şi un număr cu restul 2; deasemenea, S nu poate conţine două numere divizibile cu 3. Deci S poate conţine fie un număr divizibil cu 3 împreună cu toate numerele ce dau restul 1 sau un număr divizibil cu 3 împreună cu toate numerele ce dau restul 2. Deci S are cel mult $1 + 2004/3 = 669$ elemente. □

2.2 Partiţiile unei mulţimi

Fie A o mulţime şi B o submulţime a sa. Mulţimea $A \setminus B$ se numeşte complementara mulţimii B în raport cu mulţimea A. O partiţie a unei mulţimi A este o colecţie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de submulţimi nevide ale lui A, disjuncte două câte două, astfel încât $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Exemplu 1. *Dacă A este o mulţime şi B o submulţime proprie atunci $A = B \cup (A \setminus B)$ este o partiţie a mulţimii A.*

Exemplu 2. *Mulţimea $A = \{-1, 0, 1\}$ are următoarele partiţii posibile*

$$\begin{aligned}
A &= \{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\} \\
A &= \{0, 1\} \cup \{-1\} \\
A &= \{-1, 0\} \cup \{1\} \\
A &= \{-1, 1\} \cup \{0\} \\
A &= \{-1, 0, 1\}
\end{aligned}$$

Să începem cu un exemplu simplu.

Problemă 3. *Să se arate că, oricum am împărţi mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ în două submulţimi disjuncte, una dintre acestea va conţine două elemente a căror diferenţă este un element al aceleiaşi submulţimi.*

Demonstraţie. Presupunem că nu se poate realiza cerinţa problemei. Să căutăm două submulţimi disjuncte care să nu satisfacă cerinţa problemei. $1, 2$ nu pot aparţine în aceaşi submulţime deoarece $2 - 1 = 1$, nici 4 şi 2 rezultă 1 şi 4 sunt în aceaşi submulţime. Dar $4 - 1 = 3$ deci 3 şi 2 sunt în aceaşi submulţime, $5 - 4 = 1$ deci 5 nu poate fi în prima submulţime si $5 - 3 = 2$ deci 5 nu poate fi nici în a doua submulţime. Rezultă presupunerea făcută este falsă. □

Uneori problemele cu partiţii nu se reduc la analize simple, precum problema precedentă. Un exemplu mai complex este următorul.

Problemă 4. *Fie $A = \{2, 3, 4, \ldots, n\}$ Să se determine cea mai mare valoare a lui n, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât A să se poată partiţiona în 4 submulţimi astfel încât în nici una dintre aceste submulţimi să nu existe două numere dintre care unul să fie o putere cu exponent natural a celuilalt.*

Demonstraţie. Cele mai multe puteri în multimea $\{2, 3, \ldots, n\}$ sunt ale lui 2, deci este util să analizam puterile lui 2. Având în vedere că oricum am alege două dintre $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^3}, 2^{2^4}$ unul va fi o putere a celuilalt, rezultă că dacă $n \geq 2^{2^4}$ atunci cel puţin una din cele patru submulţimi din partiţie ar conţine două elemente dintre care unul este o putere a celuilalt. Deci $n \leq 2^{2^4} - 1$.

Să arătăm că $n = 2^{2^4} - 1$, deci trebuie să arătăm că putem partiţionarea mulţimii $A = \{2, 3, \ldots, 2^{16} - 1\}$ în patru submulţimi cu proprietatea cerută. Vom lua A_1 mulţimea numerelor având un divizor prim p care apare la puterea 1 în descompunerea în factori primi. De exemplu $2, 10, 15 \in A_1$ dar $36 \notin A_1$. Vom lua A_2 mulţimea numerelor care nu sunt în A_1 dar care au nu factor prim p care apare la o putere q care este un număr prim. De exemplu $4, 36 \in A_2$ dar $16 \notin A_2$. Fie A_3 mulţimea numerelor care nu sunt în $A_1 \cup A_2$ şi care conţin un factor prim p la o putere $q \cdot r$ care este un produs de două numere prime. Fie A_4 mulţimea numerelor care nu sunt în $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ şi care au un divizor prim p la o putere $q \cdot r \cdot s$ care este un produs de trei numere prime.

Să presupunem că avem două numere x si x^n în A_1. Atunci toţi factorii primi ai numărului x^n apar la o putere $\geq n$ deci nu pot fi în A_1. În mod similar, dacă $x, x^n \in A_2$ si p^q este puterea lui p in x^n conform definiţiei mulţimii A_2, ar rezulta că p^a este divizorul lui x de unde $p^{an} = p^q$. Cum q este un număr prim, ar rezulta că $a = 1$, dar în acest caz am fi avut $x \in A_1$. Deci A_1 şi A_2 satisfac proprietatea cerută şi în mod analog se demonstrează că A_3 şi A_4 au proprietatea cerută. Dar dacă p, q, r, s, t sunt patru numere prime atunci $p^{q \cdot r \cdot s \cdot t} \geq 2^{2^4} > n$ deci $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, obţinând partiţia cerută. □

2.3 Numărul de partiţii ale unei mulţimi

Întrebare 1. *Fie A o mulţime cu n elemente. Câte partiţii are A?*

Răspuns: Fie $B(n)$ numărul de parţitii ale mulţimii A având n elemente. Prin încercări putem vedea că $B(1) = 1$ ($\{0\} = \{0\}$) şi $B(2) = 2$ ($\{0,1\} = \{0,1\}$ si $\{0,1\} = \{0\} \cup \{1\}$) iar din Exemplul 2 vedem că $B(3) = 5$. În general, nu există o formulă simplă pentru $B(n)$ însă, folosind un argument simplu, vom putea calcula $B(n)$ în funcţie de $B(1), B(2), \ldots, B(n-1)$.

Notăm cu $B(n,k)$ mulţimea partiţiilor $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ în exact k mulţimi. Dacă mai adăugăm la partiţia $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ un element x, putem obţine una din următoarele două tipuri de partiţii

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \{x\}$$
$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup (A_i \cup \{x\}) \cup \ldots \cup A_k$$

unde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Deci pornind de la fiecare partiţie cu k submulţimi obţinem k partiţii cu k submulţimi şi o partiţie cu $k+1$ submulţimi, în alte cuvinte, pentru a obţine o partiţie cu k submulţimi a mulţimii $A \cup \{x\}$ putem porni de la o partiţie cu $k-1$ submulţimi adăugând $\{x\}$ sau de la k submulţimi adăugând x la oricare dintre cele k submulţimi din partiţie. Ce putem deduce din această observaţie? Faptul că

$$B(n+1,k) = B(n,k-1) + kB(n,k)$$

Folosind această formulă, putem calcula $B(n) = B(n,1) + B(n,2) + \cdots + B(n,n)$. Să calculăm primele câteva valori ale numărului $B(n)$. Ştim deja că $B(1,1) = 1$ (deci $B(1) = 1$), $B(2,1) = B(2,2) = 1$ (deci $B(2) = 2$), $B(3,1) = B(3,3) = 1$ şi $B(3,2) = 3$ (deci $B(3) = 5$). Din formulă obţinem că

$$\begin{aligned}
B(4,1) &= 1\\
B(4,2) &= B(3,1) + 2B(3,2) = 7\\
B(4,3) &= B(3,2) + 3B(3,3) = 6\\
B(4,4) &= 1
\end{aligned}$$

de unde $B(4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$. În mod similar

$$\begin{aligned}
B(5,1) &= 1\\
B(5,2) &= B(4,1) + 2B(4,2) = 15\\
B(5,3) &= B(4,2) + 3B(4,3) = 25\\
B(5,4) &= B(4,3) + 4B(4,4) = 10\\
B(5,5) &= 1
\end{aligned}$$

deci $B(5) = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$.

În mod similar se pot calcula valorile $B(n)$ în funcţie de valorile $B(1), \ldots, B(n-1)$. Primele câteva valori sunt

$$\begin{aligned}
B(1) &= 1\\
B(2) &= 2\\
B(3) &= 5\\
B(4) &= 15\\
B(5) &= 52\\
B(6) &= 203
\end{aligned}$$

Aceste numere se numesc numerele lui Bell. □

2.4 Numărul de elemente al unei mulţimi

Numărul elementelor unei mulţimi se numeşte cardinalul mulţimii. Dacă A este o mulţime finită, atunci cardinalul său este un număr natural. Cardinalul mulţimii A îl vom nota cu $|A|$. În multe probleme date la gimnaziu la Olimpiadele de Matematică se cere numărarea elementelor cu o anumită proprietate, în alte cuvinte, aflarea cardinalului mulţimii acestor elemente.

Una din proprietăţile de bază ale cardinalului este că dacă A şi B sunt două mulţimi disjuncte atunci $|A \cup B| = |A| + |B|$. În general acest lucru nu este adevărat, din moment ce în reuniunea celor două mulţimi, elementele din intersecţie sunt luate o singură dată. În general avem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Această formulă se numeşte principiul includerii şi excluderii pentru că excludem din $|A| + |B|$ elementele din intersecţie, care au fost numărate de două ori. În mod analog, dacă A, B şi C sunt trei mulţimi atunci

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Dacă A este o mulţime finită, notăm $P(A)$ mulţimea tuturor submulţimilor sale, inclusiv mulţimea vidă. De exemplu $P(\{0,1\})$ are ca elemente submulţimile $\emptyset, \{0\}, \{1\}$ şi $\{0,1\}$. Pentru început, câteva probleme elementare.

Problemă 5. *Câte elemente are mulţimea A dacă se ştie că $A \subseteq B$ si $|P(B)| \leq 50$ şi $|P(A)| \geq 27$?*

Demonstraţie. Din $|P(B)| = 2^{|B|} \leq 50$ rezultă că $|B| \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, iar din $|P(A)| = 2^{|A|} \geq 27$ rezultă că $|A| \in \{5, 6, \ldots\}$. Dar $A \subseteq B$ deci $|A| \leq |B|$ de unde $|A| = 5$. ☐

Problemă 6. *Să se determine $|A|$ si $|A \cap B|$ dacă sunt îndeplinite condiţiile $|A \cup B| = 241, |B \setminus A| = 83, |B| = 164$.*

Demonstraţie. Cum $A \cup B$ este reuniunea disjunctă a mulţimilor A şi $B \setminus A$ rezultă că $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$ de unde $|A| = |A \cup B| - |B \setminus A| = 241 - 83 = 158$. De aici obţinem $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 158 + 164 - 241 = 81$. ☐

Problemă 7. *În urma unui sondaj efectuat pe un grup de tineri privind sporturile practicate s-a constatat că 180 tineri practică fotbalul, 260 practică baschetul, 120 tenisul, 100 şi fotbal ţi tenis, 85 tenis şi baschet, 95 baschet şi fotbal şi 50 tineri practica toate cele trei sporturi. Câti tineri au fost in grup.*

Demonstraţie. Fie A mulţimea elevilor care practică fotbalul, B mulţimea elevilor care practică baschetul şi C multimea elevilor care practică tenisul. Din ipoteza avem $|A \cap B| = 95$, $|A \cap C| = 100$, $|B \cap C| = 85$ si $|A \cap B\ capC| = 50$. Din principiul includerii şi excluderii rezultă $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 310$. ☐

În general, problemele în care se cere determinarea cardinalului unei mulţimi necesită mai multă ingeniozitate.

Problemă 8. *Să se determine numărul fracţiilor ireductibile, pozitive şi subunitare care au proprietatea că suma dintre numărător şi numitor este* 2001.

Demonstraţie. Trebuie să numărăm fracţiile ireductibile $\frac{m}{n}$ cu proprietatea că $0 < m < n$ şi $m + n = 2001$. Pentru o astfel de fracţie, nu neapărat ireductibilă, fie d factorul prin care se simplică, deci $d = (m, n)$. Cum $d \mid m$ si $d \mid n$ rezultă că $d \mid m + n = 2001$ de unde d are ca factor prim pe unul din $\{3, 23, 29\}$. Rămâne să determinăm toate perechile $0 < m < n$ cu $m + n = 2001$ care nu sunt divizibile nici cu 3, nici cu 23 şi nici cu 29.

Pentru o asemenea problemă vom aplica principiul includerii şi excluderii. Fie A_d mulţimea perechilor (m, n) care sunt divizibile cu d, deci A_3 este mulţimea perechilor (m, n) care sunt divizibile cu 3, A_{23} este mulţimea perechilor care sunt divizibile cu 23 si A_{29} este mulţimea perechilor divizibile cu 29. Cum în total sunt 1000 de perechi (m,n) cu $0 < m < n$ si $m+n = 2001$, numărul de fracţii ireductibile va fi

$$2000 - |A_3 \cup A_{23} \cup A_{29}|$$

deci rămâne să calculăm

$$|A_3 \cup A_{23} \cup A_{29} = |A_3| + |A_{23}| + |A_{29}| - |A_3 \cap A_{23}| - |A_3 \cap A_{29}| - |A_{23} \cap A_{29}| + |A_3 \cap A_{23} \cap A_{29}|$$

Dar $A_3 \cap A_{23} = A_{3\cdot 23} = A_{69}$ şi în mod similar $A_3 \cap A_{29} = A_{87}$, $A_{23} \cap A_{29} = A_{667}$ si $A_3 \cap A_{23} \cap A_{29} = A_{2001}$. Dacă $d \mid 2001 = m+n$ atunci numărul perechilor subunitare (m,n) cu $d \mid (m,n)$ este egal cu numărul perechilor subunitare $\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$ astfel încât $\frac{m}{d} + \frac{n}{d} = \frac{2001}{d}$, adica $\frac{1}{2}\left(\frac{2001}{d} - 1\right)$. Deci

$$\begin{aligned}
|A_3| &= \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{3} - 1\right) = 333 \\
|A_{23}| &= \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{23} - 1\right) = 43 \\
|A_{29}| &= \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{29} - 1\right) = 34 \\
|A_{69}| &= \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{69} - 1\right) = 14 \\
|A_{87}| &= \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{87} - 1\right) = 11 \\
|A_{667}| &= \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{667} - 1\right) = 1 \\
|A_{2001}| &= \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{2001} - 1\right) = 0
\end{aligned}$$

de unde $|A_3 \cup A_{23} \cup A_{29}| = 333 + 43 + 34 - 14 - 11 - 1 + 0 = 384$ deci numărul fracţiilor ireductibile este $1000 - 384 = 616$. □

2.5 Numarând în mai multe moduri elementele unei mulţimi

O foarte puternică tehnică de demonstraţie este numărarea în mai multe moduri a elementelor unei mulţimi. Următoarea problemă a fost dată la Olimpiada Naţională de Matematică în anul 2003.

Problemă 9. *La o întâlnire sunt 6 participanţi. Ştiind că în total sunt 7 perechi de prieteni şi că în fiecare grup de 3 participanţi, cel puţin doi sunt prieteni, demonstraţi că*

1. *există un participant cu cel puţin 3 prieteni,*
2. *există trei participanţi, oricare doi dintre ei fiind prieteni.*

Demonstraţie. Dificultatea acestei probleme constă în numărul mare de configuraţii posibile, însa, problema se simplifică mult dacă se numără în două moduri perechile de prieteni. Adunând prietenii fiecărui participant obţinem că

$$\sum_{\text{participant } P} (\text{numărul de prieteni ai lui } P) = 2 \cdot 7$$

este dublul numărului total de perechi de prieteni, pentru că fiecare pereche este numărată de două ori.

Pentru prima parte, să presupunem că fiecare participant are cel mult 2 prieteni. Rezultă că

$$14 = \sum_{\text{participant } P} (\text{numărul de prieteni ai lui } P) \leq \sum_{\text{participant } P} 2 = 12$$

ceea ce este imposibil.

Pentru a doua parte, să presupunem că nu există trei astfel de participanţi. Fie P persoana de la prima parte, cu trei prieteni A, B si C. Din presupunerea noastră, rezultă că nici unul dintre A, B si C nu este prieten cu oricare dintre ceilalti, ceea ce contrazice ipoteza. $\square$

3 Principiul cutiei

Un exemplu de bază a unei proprietăţi combinatorice este principiul cutiei (sau principiul lui Dirichlet):

Teoremă 1 (Principiul cutiei)**.** *Dacă n bile sunt împărţite în k cutii atunci cel puţin o cutie va avea cel puţin $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ elemente, unde $\lceil x \rceil$ reprezintă cel mai mic număr întreg mai mare sau egal cu x.*

Ca aplicaţie clasică a Teoremei 1 dăm următoarea problemă de geometrie în spaţiu (care s-ar potrivi şi la Sectiunea 4), a cărei demonstraţie este la nivelul clasei a 7-a. În această problemă se cere existenţa unei anumite proprietăţi de natură combinatorică a configuraţiei geometrice.

Problemă 10. *Demonstraţi că în orice poliedru există două feţe având acelaşi număr de laturi.*

Demonstraţie. Fie f faţa cu cele mai multe laturi (notăm n numărul acestora) şi fie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ feţele adiacente feţei f. Să ne uităm la numărul de laturi ale feţelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Aceste n feţe au un număr de laturi în mulţimea $\{3, 4, \ldots, n\}$ deoarece o faţă are cel puţin 3 laturi şi cel mult n, din ipoteză. Deci n laturi au un număr posibil de $n-2$ feţe. Folosind principiul cutiei (Teorema 1) rezultă că există două feţe cu acelaşi număr de laturi. $\square$

Un exemplu mai complex este următoarea proprietate a numerelor iraţionale.

Propoziţie 1. *Fie α un număr iraţional şi fie $a > 0$ un număr real pozitiv. Demonstraţi că există două numere întregi m şi n astfel încât $|m\alpha - n| < a$.*

Demonstraţie. Fie $k > \frac{1}{a}$ un număr natural. Atunci numerele $\{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, k\alpha\}$ vor avea partea fracţionară în intervalul

$$[0, 1) = \left[0, \frac{1}{k}\right) \cup \left[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{k-1}{k}, 1\right)$$

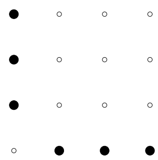
Din principiul cutiei (Teorema 1) rezultă că vor exista două numere $m_1\alpha$ şi $m_2\alpha$ astfel încât părţile lor fracţionare se vor afla în acelaşi interval de tipul $\left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)$. În alte cuvinte, dacă $m = m_1 - m_2$ atunci $|\{m\alpha\}| = |m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor| < \frac{1}{k} < a$, şi $n = \lfloor m\alpha \rfloor$ este un număr întreg. $\square$

4 Combinatorica în geometrie

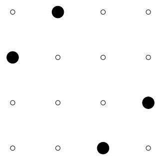
Problemele de combinatorică în geometrie sunt de cele mai multe ori legate de existenţa sau inexistenţa anumitor tipuri de configuraţii geometrice. Un exemplu clasic în acest sens este Problema 10; în continuare vom vedea câteva probleme de la Olimpiada Natională de Matematică.

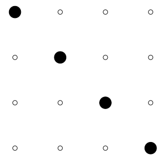
Problemă 11. *Fie $U = \{(i,j) | i,j \in \mathbb{N}, 0 \le i,j \le 3\}$. Demonstraţi că există 6 puncte în U astfel încât să nu existe trei care să fie vârfurile unui triunghi isoscel. Demonstraţi că între oricare 7 puncte din U există trei care să fie vârfurile unui triunghi isoscel. (ONM 2004, clasa a 7-a)*

Demonstraţie. Următoarea figură arată 6 puncte din U, oricare trei fiind vârfurile unui triunghi neisoscel.



Pentru partea a doua, vom colora punctele din U cu alb şi negru, ca o tablă de şah. Folosind principiul cutiei, dacă alegem 7 puncte din U, cel puţin 4 vor avea o aceeaşi culoare. Pentru ca aceste 4 să nu formeze nici un triunghi echilateral, există doar urmatoarele doua posibilitati:





Însă în fiecare din aceste două posibilităţi oricum am adăuga încă un punct, am obţine un triunghi isoscel. □

Următoarea problemă necesită utilizarea informaţiei geometrice date într-un mod esenţial.

Problemă 12. *Un dreptunghi poate fi împărţit în 200 de pătrate congruente şi în 288 de pătrate congruente. Demonstraţi că poate fi împărţit şi în 392 de pătrate congruente. (ONM 2008, clasa a 7-a)*

Demonstraţie. Fie a şi b lungimile laturilor dreptunghiului şi x, respectiv y lungimile laturilor celor două tipuri de pătrate în care poate fi împărţit dreptunghiul dat. Atunci $m = \frac{a}{x}$ şi $n = \frac{b}{x}$ sunt numere naturale cu produsul 200, iar $m' = \frac{a}{y}$ şi $n' = \frac{b}{y}$ sunt numere naturale cu produsul 288. Rezultă că $\frac{y^2}{x^2} = \frac{mn}{m'n'} = \frac{100}{288}$ de unde $\frac{x}{y} = \frac{6}{5}$. Rezultă că $m' = \frac{6m}{5}$ şi $n' = \frac{6n}{5}$ deci $m = 5u$ şi $n = 5v$ în care caz $m' = 6u$ şi $n' = 6v$. Ipoteza $mn = 200$ şi $m'n' = 288$ devine $uv = 8$.

Fie $m'' = 7u$ si $n'' = 7v$. Dacă notăm $z = \frac{5x}{7}$ atunci $\frac{a}{z} = \frac{a}{x}\frac{7}{5} = 7u = m''$ şi în mod analog $\frac{b}{z} = 7v = n''$ deci dreptunghiul poate fi împărţit în $49uv = 392$ pătrate. □

5 Combinatorica în algebră

5.1 Aranjamente

Anumite probleme de combinatorică în algebră cer existenţa unor configuraţii speciale.

Problemă 13. *Pe un cerc se află 2005 de numere naturale având suma 7022. Demonstraţi că există două perechi de numere adiacente pe cerc, fiecare pereche având suma mai mare sau egală cu 8. (ONM 2005, clasa a 7-a)*

Demonstraţie. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2005} \geq 0$ aceste numere. Presupunând prin absurd că există cel mult o astfel de pereche (să zicem (a_{2005}, a_1)) atunci am avea $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{2004} + a_{2005} \leq 7$. Adunând aceste relaţii obţinem că $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2005}) - a_1 - a_{2005} \leq 7 \cdot 2004$ de unde $a_1 + a_{2005} \geq 2 \cdot 7022 - 7 \cdot 2004 = 16$. În acest caz, unul dintre a_1 şi a_{2005} (să zicem a_1) este mai mare sau egal cu 8. Dar atunci $a_1 + a_2 \geq 8$ contrazicând presupunerea făcută. □

Problemă 14. *Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$, mulţimea $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ poate fi împărţită în trei submulţimi disjuncte două câte două, astfel încât suma elementelor din fiecare să fie aceeaşi?*

Demonstraţie. Să presupunem că o asemenea partiţie este posibilă. Atunci $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$; notând suma numerelor din A_1 cu k rezultă că suma numerelor din A este $\dfrac{n(n+1)}{2} = 3k$ deci fie $3 \mid n$ fie $3 \mid n+1$.

Rămâne să construim partiţia cerută pentru aceste numere. Observăm că dacă există o partiţie $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ pentru n, atunci partiţia $(A_1 \cup \{n+1, n+6\}) \cup (A_2 \cup \{n+2, n+5\}) \cup (A_3 \cup \{n+3, n+4\})$ funcţionează pentru $n+6$.

Pentru început, să luăm cazul $3 \mid n$. Este clar că $n = 3$ nu funcţionează. Cum

$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,6\} \cup \{2,5\} \cup \{3,4\}$$
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3,9\} \cup \{4,5,6\} \cup \{7,8\}$$

funcţionează, rezultă din observaţia de mai sus că orice număr $n \geq 6$ divizibil cu 3 va funcţiona.

Să luăm cazul $3 \mid n+1$, $n \geq 5$. Cum

$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,4\} \cup \{2,3\} \cup \{5\}$$
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8\} = \{1,3,8\} \cup \{2,4,6\} \cup \{5,7\}$$

rezultă că orice număr $n \geq 5$ astfel încât $3 \mid n+1$ funcţionează.

□

5.2 Numere întregi şi divizibilităţi

Am văzut în Problema 8 că numărul elementelor din mulţimea $\{1, 2, \dots, n\}$ divizibile cu a este partea întreagă $\left\lfloor \dfrac{n}{a} \right\rfloor$; am văzut deasemenea cum să aplicăm principiul includerii şi excluderii pentru a demonstra că numărul elementelor din $\{1, 2, \dots, n\}$ divizibile fie cu a fie cu b este

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{[a,b]} \right\rfloor$$

unde $[a, b]$ este cel mai mare divizor comun.

O altă aplicaţie a combinatoricii în algebră constă în determinarea exponenţilor numerelor prime în descompunerea în factori primi. Dacă p este un număr prim şi n un număr întreg vom nota $\exp_p(n)$ exponentul lui p în descompunerea în factori primi a lui n. De exemplu $\exp_2(12) = 2$ si $\exp_5(125) = 3$.

Propoziţie 2. *Fie n un număr natural pozitiv şi p un număr prim. Atunci*

$$\exp_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \cdots$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Observaţie 1. *Suma din Propoziţia 2 este finită, deoarece dacă $p^k > n$ atunci* $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

Vom da două aplicaţii tipice ale Propoziţiei 2

Problemă 15. *Fie $n \geq 1$ un număr natural. Determinaţi în câte zerouri se termină numărul* $\left(\frac{5^n-1}{4}\right)!$.

Demonstraţie. Avem $\frac{5^n-1}{4} = 1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}$ deci

$$\begin{aligned}
\exp_5\left(\left(\frac{5^n-1}{4}\right)!\right) &= \left\lfloor \frac{1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}}{5^2} \right\rfloor + \cdots \\
&= (1+5+\cdots+5^{n-2}) + (1+5+\cdots+5^{n-3}) + \cdots + (1+5) + 1 \\
&= \frac{5^{n-1}-1}{4} + \frac{5^{n-2}-1}{4} + \cdots + \frac{5^1-1}{4} + \frac{1-1}{4} \\
&= \frac{5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+5+1-n}{4} \\
&= \frac{5^n-1-4n}{16}
\end{aligned}$$

Având în vedere că $\frac{x}{2^k} \geq \frac{x}{5^k}$ rezultă că $\exp_2(x!) \geq \exp_5(x!)$ deci numărul de zerouri în care se termină $x!$ este dat de $\exp_5(x!)$, care va fi şi puterea lui 10 care divide $x!$. Deci numărul de zerouri căutat este $\frac{5^n-1-4n}{16}$. □

În mod similar se rezolvă următoarea problemă.

Problemă 16. *Determinaţi numerele naturale n pentru care $n!$ care se termină cu exact 1000 zerouri.*

Demonstraţie. Folosind metoda problemei precedente, alegem k astfel încât $5^k \leq n < 5^{k+1}$. Deci

$$\exp_5(n!) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor = 1000$$

Deci $\frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \cdots + \frac{n}{5^k} > 1000$ de unde obţinem că

$$\frac{n}{4}\left(1 - \frac{1}{5^k}\right) > 1000$$

deci $n > 4000$. Cum $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \leq 1000$ rezulta ca $n < 5005$ deci $k = 5$. Atunci

$$1000 \geq \left(\frac{n}{5} - 1\right) + \left(\frac{n}{5^2} - 1\right) + \cdots \left(\frac{n}{5^5} - 1\right) = \frac{n}{4}\left(1 - \frac{1}{5^5}\right) - 5$$

deci $n \leq 4021$. Verificând numerele între 4001 şi 4021 obţinem că doar $n \in \{4005, 4006, 4007, 4008, 4009\}$ satisfac cerinţele problemei. □

5.3 Probleme propuse

1. Câte numere naturale nenule mai mici decât 100 nu sunt divizibile nici cu 2 nici cu 3?
2. În câte moduri poate fi reprezentat numărul natural n sub forma unei sume de două numere naturale nenule dacă reprezentările care difera doar prin ordinea termenilor sunt considerate identice?

3. Fie k un număr natural nenul. Să se arate că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât nici un număr de forma $m!$ nu se termină cu $n, n+1, \ldots, n+k$ zerouri.

4. Locuitorii unei planete vorbesc o limbă cu $n > 1$ litere. Orice două cuvinte de aceeaşi lungime diferă intre ele în cel puţin trei locuri. Să se arate că numărul cuvintelor cu m litere este cel mult $\dfrac{n^m}{m(n-1)+1}$.

Bibliografie

[1] L. Panaitopol, A Gică, *"Probleme de aritmetică si teoria numerelor"* , Ed. Gil

[2] D. Schwarz, G. Popa, *"Probleme de numărare"*

[3] M. Burtea, G. Burtea, *"Matematica (cls. IX)"*

TRIUNGHIURI ASEMENEA ŞI CERCURI CONCURENTE

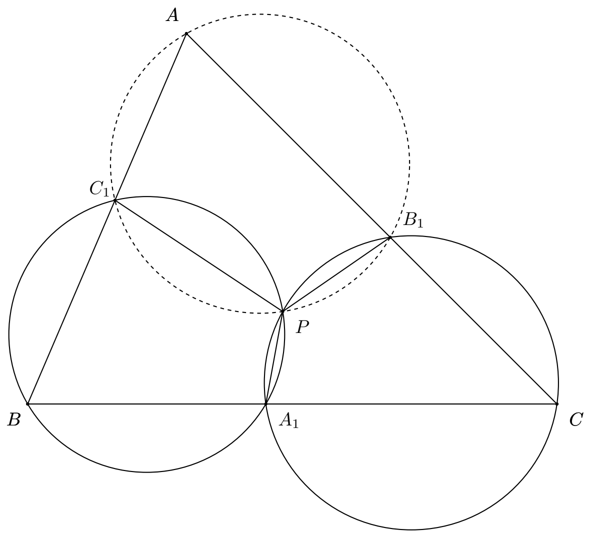
ANDREI JORZA

1. Introducere

1.1 În acest articol vom studia trei cercuri concurente şi utilizarea lor in rezolvarea (elementară) a unor probleme de geometrie plană, inclusiv una de la Olimpiada Internaţională de Matematică din 2005. În cea mai mare parte acest articol este elementar şi poate fi urmărit de elevi de gimnaziu, exceptând eventual problemele care folosesc calcule trigonometrice.

1.2 Configuraţia geometrică care stă la baza articolului este următoarea:

Teoremă 1. *Fie ΔABC un triunghi şi fie A_1, B_1 si C_1 trei puncte pe laturile BC, CA si AB. Atunci cercurile circumscrise triunghiurilor ΔAB_1C_1, ΔBA_1C_1 si ΔCA_1B_1 sunt concurente şi se intersectează într-un punct P.*



Demonstraţie. Fie P intersecţia cercurilor circumscrise triunghiurilor ΔBA_1C_1 şi ΔCA_1B_1. Ajunge sa demonstrăm ca patrulaterul AB_1PC_1 este inscriptibil, în care caz rezultă că al treilea cerc trece prin punctul P. Cea mai eficientă metodă pentru a demonstra inscriptibilitatea unui patrulater este calculul unghiurilor lui, rămâne să calculăm unghiurile din figură.

Având în vedere că patrulaterele BA_1PC_1 şi CA_1PB_1 sunt inscriptibile, rezultă că $\angle A_1PC_1 = 180° - \angle B$ şi $\angle A_1PB_1 = 180° - \angle C$. Deci $\angle B_1PC_1 = 360° - \angle A_1PB_1 - \angle A_1PC_1 = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$. Din această relaţie deducem că patrulaterul AB_1PC_1 este inscriptibil. □

1.3 În Teoremă 1 spunem că triunghiul $\Delta A_1B_1C_1$ este înscris în triunghiul ΔABC iar punctul P este **asociat** triunghiului înscris $\Delta A_1B_1C_1$.

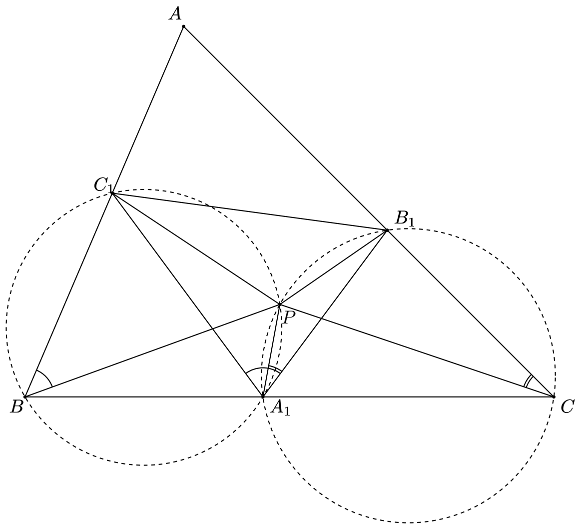
2. Calculul Unghiurilor

2.1 Demonstraţia Teoremei 1 a utilizat într-un mod esenţial faptul că putem calcula unghiurile din figura geometrică într-un mod simplu. Aceasta este metoda pe care o vom folosi pentru a rezolva majoritatea problemelor următoare.

Propoziţie 2. *Dacă P este punctul asociat triunghiului $\Delta A_1B_1C_1$ înscris in ΔABC atunci*

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle PBA + \angle PCA$$
$$\angle BPC = \angle A + \angle A_1$$

Demonstraţie. Vom folosi iar faptul că patrulaterele BA_1PC_1 şi CA_1PB_1 sunt inscriptibile. Rezultă că $\angle PBC_1 \equiv \angle PA_1C_1$ şi $\angle PA_1B_1 \equiv \angle PCB_1$. Deci $\angle B_1A_1C_1 \equiv \angle PBA + \angle PCA$.

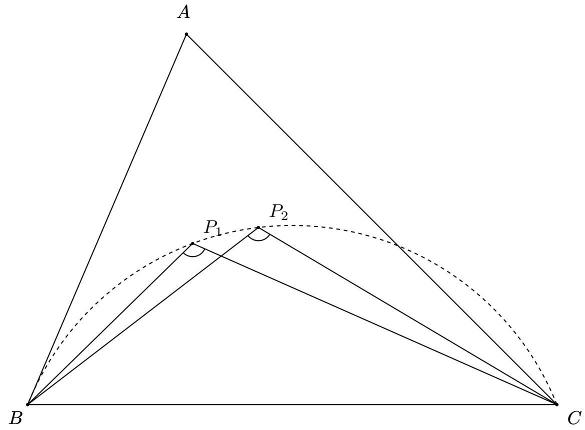


Într-un mod similar putem calcula unghiul $\angle BPC$. Cum $\angle BPA_1 \equiv \angle BC_1A_1$ şi $\angle CPA_1 \equiv \angle CB_1A_1$ rezultă că $\angle BPC = \angle BC_1A_1 + \angle CB_1A_1$. Dar $\angle BC_1A_1 = 180° - \angle B - \angle BA_1C_1$ şi $\angle CB_1A_1 = 180° - \angle C - \angle CA_1B_1$ deci $\angle BPC = 360° - \angle B - \angle C - (180° - \angle A_1) = \angle A + \angle A_1$. □

2.2 Principala concluzie a Propoziţiei 2 este că unghiul $\angle B_1A_1C_1$ nu depinde de triunghiul $\Delta A_1B_1C_1$ ci doar de punctul asociat P. De fapt, putem spune ceva mai mult:

Teoremă 3. *Fie ΔABC un triunghi. Două triunghiuri înscrise $\Delta A_1B_1C_1$ şi $\Delta A_2B_2C_2$ au acelaşi punct asociat P dacă şi numai dacă sunt asemenea: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.*

Demonstraţie. Având în vedere că unghiul $\angle B_1A_1C_1$ depinde doar de punctul asociat P deducem că dacă cele două triunghiuri au acelaşi punct asociat, atunci ele sunt asemenea, având unghiuri două câte două congruente.



Să presupunem, pentru cealaltă implicaţie, că $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$. Fie P_i punctul asociat al triunghiului $\Delta A_iB_iC_i$ pentru $i = 1, 2$. Din Propoziţia 2 rezultă că $\angle BP_iC = \angle A + \angle A_i$ deci $\angle BP_1C \equiv \angle BP_2C$ şi în mod similar $\angle AP_1B \equiv \angle AP_2B$. Rezultă că ABP_1P_2 şi BCP_1P_2 sunt inscriptibile; cum intersecţia a două cercuri conţine cel mult două puncte, unul din ele în acest caz fiind B rezultă că $P_1 = P_2$. □

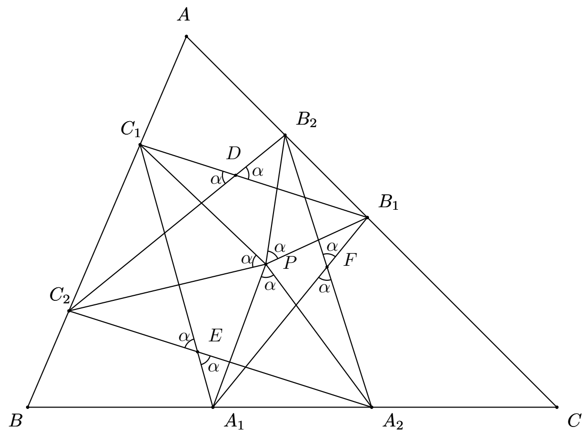
2.3 Fie ΔABC un triunghi iar P un punct în plan. Fie D, E şi F proiecţiile punctului P pe laturile BC, CA şi AB. În acest caz triunghiul ΔDEF se numeşte triunghiul *pedal* al punctului P. Este usor de văzut că punctul P este asociat triunghiului său pedal.

Observaţie 4. *Pentru orice triunghi Δ există un triunghi ΔDEF înscris în ΔABC astfel încât ΔDEF este triunghiul pedal al punctului său asociat.*

Pentru a vedea acest lucru, luăm un triunghi asemenea cu Δ în interiorul triunghiului ΔABC şi îl mărim până când vârfurile ajung pe laturile lui ΔABC. Fie P punctul asociat acestui triunghi înscris iar ΔDEF triunghiul său pedal. Din Teorema 1 rezultă că $\Delta DEF \sim \Delta$.

2.4 Teorema 3 spune că două triunghiuri înscrise asemenea au acelaşi punct asociat P, dar mai mult, putem interpreta figura în modul următor: triunghiul $\Delta A_2B_2C_2$ se obţine printr-o rotaţie şi dilataţie (termenul tehnic este omotetie) a triunghiului $\Delta A_1B_1C_1$ în jurul punctului P:

Propoziţie 5. *Fie $\Delta A_1B_1C_1$ şi $\Delta A_2B_2C_2$ două triunghiuri înscrise în ΔABC cu acelaşi punct asociat P (sau, echivalent, asemenea). Fie $D = B_1C_1 \cap B_2C_2$, $E = C_1A_1 \cap C_2A_2$ şi $F = A_1B_1 \cap A_2B_2$. Atunci $\angle A_1EA_2 \equiv \angle A_1PA_2 \equiv \angle A_1FA_2$ şi în mod asemănător pentru celelalte triplete de unghiuri, ca în figură. Mai mult, raportul de asemanare între $\Delta A_1B_1C_1$ şi $\Delta A_2B_2C_2$ este $\dfrac{PA_1}{PA_2}$.*



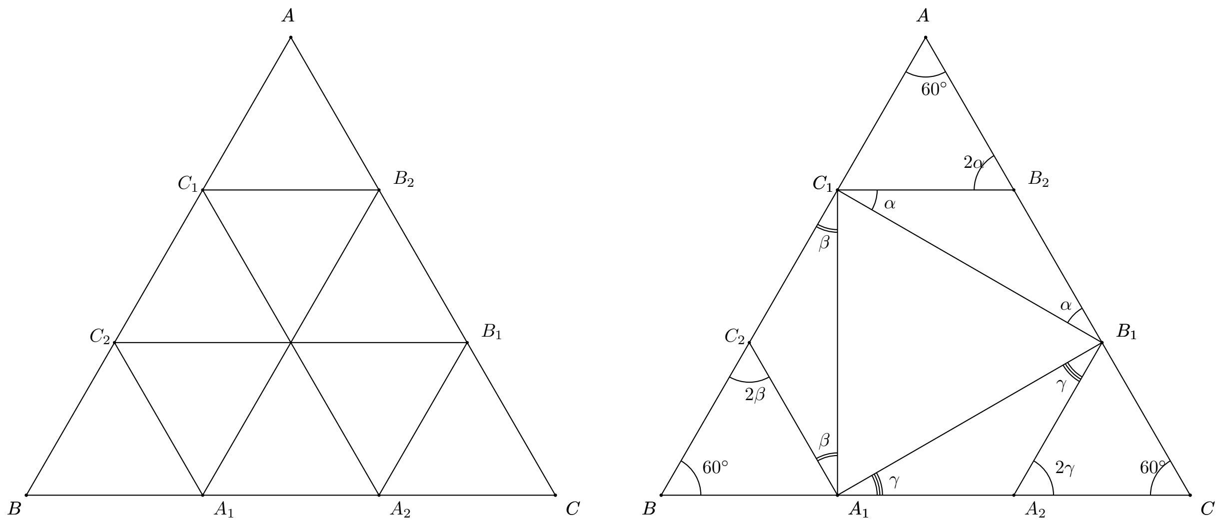
Demonstraţie. Folosind simetria figurii, este de ajuns să arătăm că $\angle A_1PA_2 \equiv \angle A_1FA_2$. Cum patrulaterele A_1CB_1P şi A_2CB_2P sunt inscriptibile rezultă că $\angle PA_1B_1 \equiv \angle PCA \equiv \angle PA_2B_2$. Deci patrulaterul A_1A_2FP este inscriptibil de unde rezultă $\angle A_1PA_2 \equiv \angle A_1FA_2$.

Pentru a deduce a doua parte a problemei, ajunge să observăm că dacă rotim $\Delta A_1B_1C_1$ în jurul punctului P cu unghiul α vom obţine triunghiul $\Delta A_1'B_1'C_1'$ ale cărui laturi sunt paralele cu laturile triunghiului $\Delta A_2B_2C_2$. Raportul de asemănare rezultă din teorema lui Thales. □

2.5 Ca aplicaţie a teoremelor anterioare vom prezenta o problemă de geometrie propusă de Bogdan Enescu la Olimpiada Internaţională de Matematică în 2005.

Problemă 1. *Fie ABC un triunghi echilateral. Pe latura BC se aleg punctele A_1 şi A_2, pe latura CA se aleg punctele B_1 şi B_2 iar pe latura AB se aleg punctele C_1 şi C_2 astfel încât hexagonul $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ este convex şi are laturi de aceeasi lungime. Demonstraţi că diagonalele A_1B_2, A_2C_1 şi B_1C_2 sunt concurente.*

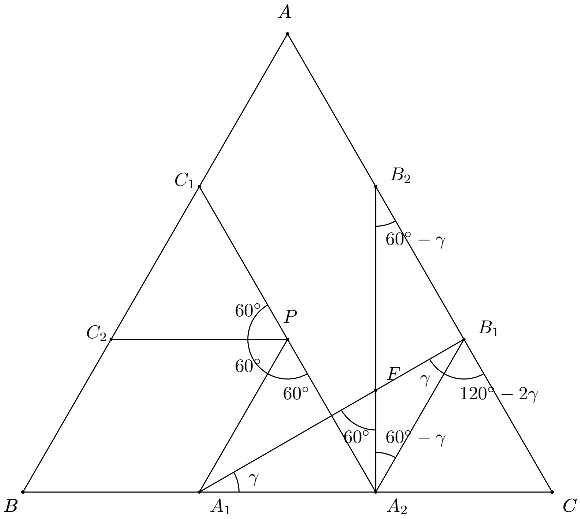
Demonstraţie. Demonstraţia problemei, folosind metodele prezentate anterior, se reduce la calculul unghiurilor din figură. Din ipoteză, triunghiurile $\Delta A_1A_2B_1$, $\Delta B_1B_2C_1$ şi $\Delta C_1C_2A_1$ sunt isoscele deci putem nota $\angle B_1C_1B_2 = \angle B_1B_2C_1 = \alpha$, $\angle C_1A_1C_2 = \angle A_1C_1C_2 = \beta$ şi $\angle B_1A_1A_2 = \angle A_1B_1A_2 = \gamma$. Atunci $\angle B_1A_1C_1 = 180° - \beta - \gamma - \angle BA_1C_2 = 60° + \beta - \gamma$.



În mod similar calculăm unghiul $\angle B_2A_2C_2$. Cum triunghiul $A_1A_2C_2$ este isoscel rezultă că $\angle A_1A_2C_2 = \angle BA_1C_2/2 = 60° - \beta$; similar obţinem $\angle B_2A_2B_1 = 60° - \gamma$. Deci $\angle B_2A_2C_2 = 180° - (60° - \beta) - (60° - \gamma) - 2\gamma = 60° + \beta - \gamma$ de unde

$$\angle B_1A_1C_1 \equiv \angle B_2A_2C_2 = 60° + \beta - \gamma$$

Calculând celelalte perechi de unghiuri obţinem că $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$. Din Teorema 3 şi Propoziţia 5 putem să ne imaginăm că $\Delta A_2B_2C_2$ este o rotaţie şi dilataţie a triunghiulu $\Delta A_1B_1C_1$. Folosind limbajul Propoziţiei 5, dacă P este punctul asociat (comun) triunghiurilor $\Delta A_1B_1C_1$ si $\Delta A_2B_2C_2$ atunci $\angle A_1PA_1 \equiv \angle A_1FA_2$ unde $F = A_1B_1 \cap A_2B_2$.



Dar

$$\begin{aligned}\angle A_1FA_2 &= 180° - \angle FA_1A_2 - \angle FA_2A_1\\ &= 180° - \gamma - (\angle C_2A_2A_1 + \angle B_2A_2C_2)\\ &= 180° - \gamma - (60° - \beta + 60° + \beta - \gamma)\\ &= 60°\end{aligned}$$

de unde obţinem că $\angle A_1PA_2 = \angle B_1PB_2 = \angle C_1PC_2 = 60°$. Cum $\angle A_1PC_1 = 180° - \angle B = 120°$ rezultă că punctele A_2, P si C_1 sunt coliniare. Acelaşi raţionament pentru celelalte diagonale implică concurenţa diagonalelor hexagonului $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ în punctul P. □

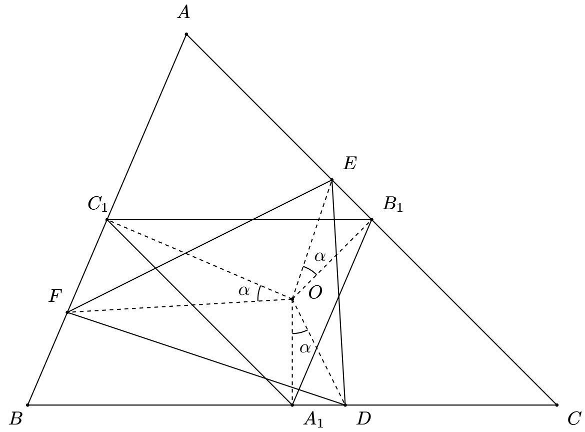
3. Arii şi Calcule trigonometrice

3.1 Folosind trigonometria, calculul unghiurilor din secţiunea precedentă devine mult mai eficient.

Problemă 2. *Fie ΔABC un triunghi şi ΔDEF un triunghi înscris în ΔABC astfel încat cele două triunghiuri sunt asemenea. Demonstraţi că*

$$\frac{Aria(DEF))}{Aria(ABC)} \geq \frac{1}{4}$$

Demonstraţie. Fie A_1, B_1 şi C_1 mijloacele laturilor triunghiului ΔABC. Cum $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC \sim \Delta DEF$ rezultă că ΔDEF si $\Delta A_1B_1C_1$ au acelaşi punct asociat, care este centrul O al cercului circumscris triunghiului ΔABC. Folosind Propoziţia 5 fie $\alpha = \angle A_1OD = \angle B_1OE = \angle C_1OF$ în care caz raportul de asemănare între ΔDEF şi $\Delta A_1B_1C_1$ este $\dfrac{1}{\cos\alpha}$.



Deci

$$\frac{\text{Aria}(DEF)}{\text{Aria}(A_1B_1C_1)} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \geq 1$$

de unde Aria$(DEF) \geq$ Aria$(A_1B_1C_1) =$ Aria$(ABC)/4$. □

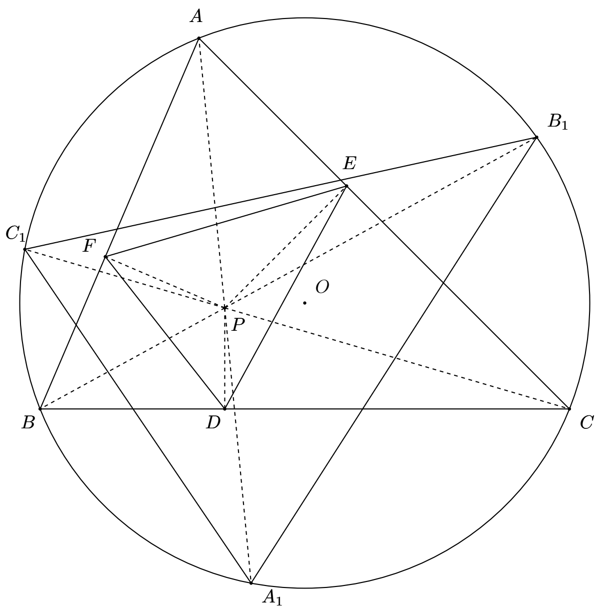
3.2 Demonstraţia problemei precedente arată că dintre toate triunghiurile înscrise având punctul asociat P, cel de arie minimă este cel pedal al lui P. Următoarea lemă calculează aria acestui triunghi pedal.

Lemă 6. *Fie ΔABC un triunghi şi P un punct în interiorul său. Fie ΔDEF triunghiul pedal al lui P. (Reamintim, asta înseamna că $PD \perp BC$, $PE \perp CA$ şi $PF \perp AB$.) Atunci*

$$\frac{Aria(DEF)}{Aria(ABC)} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}$$

unde O şi R sunt centrul respectiv raza cercului circumscris lui ΔABC.

Demonstraţie. Principalul indiciu pentru demonstraţia acestei leme este formula $R^2 - OP^2$, care poate fi recunoscută ca puterea punctului P faţă de cercul $\mathcal{C}$ circumscris lui ΔABC. Reamintim că dacă $X, Y \in \mathcal{C}$ astfel încât $P \in XY$ atunci puterea punctului P faţă de $\mathcal{C}$ este $PX \cdot PY = R^2 - OP^2$. (Cel mai rapid mod de a vedea acest lucru este următorul: dacă X' şi Y' sunt alte două astfel de puncte atunci $\Delta XPY \sim \Delta X'PY'$ deci $XP \cdot YP$ nu depinde de poziţia segmentului XY. Luând XY un diametru se obţine $XP \cdot YP = (R - OP)(R + OP) = R^2 - OP^2$.) Aceasta interpretare sugerează metoda de demonstraţie.



Fie $A_1 = PA \cap \mathcal{C}$, $B_1 = PB \cap \mathcal{C}$ şi $C_1 = PC \cap \mathcal{C}$. Din Propoziţia 2 rezultă că $\angle EDF = \angle ABP + \angle ACP$ iar din faptul că patrulaterele ABA_1B_1 şi ACA_1C_1 sunt inscriptibile rezultă că $\angle ABP + \angle ACP = \angle B_1A_1C_1$. Procedând astfel obţinem că triunghiurile ΔDEF şi $\Delta A_1B_1C_1$ sunt asemenea cu raportul de asemanare $\dfrac{EF}{B_1C_1}$. În mod similar, triunghiurile ΔPBC şi ΔPC_1B_1 sunt asemenea, având raportul de asemănare $\dfrac{PC_1}{PB}$.

Vom folosi formula pentru arie $\text{Aria}(\Delta) = \dfrac{abc}{4R}$. Rezultă că

$$\text{Aria}(DEF) = \frac{DE \cdot EF \cdot FD}{4R_{DEF}}$$

Dar din raportul de asemănare obţinem $\dfrac{EF}{B_1C_1} = \dfrac{R_{DEF}}{R}$ iar $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{PC_1}{PB}$. Deci

$$\begin{aligned}\frac{\text{Aria}(DEF)}{\text{Aria}(ABC)} &= \frac{DE \cdot EF \cdot FD \cdot R}{AB \cdot BC \cdot CA \cdot R_{DEF}}\\ &= \frac{DE \cdot FD \cdot B_1C_1}{AB \cdot CA \cdot BC}\end{aligned}$$

Cum patrulaterul $PDCE$ este inscriptibil rezultă că $\dfrac{DE}{PC} = \sin C = \dfrac{AB}{2R}$ şi în mod similar $\dfrac{DF}{PB} = \sin B = \dfrac{AC}{2R}$ deci

$$\begin{aligned}\frac{\text{Aria}(DEF)}{\text{Aria}(ABC)} &= \frac{PB \cdot PC \cdot B_1C_1}{4R^2 \cdot BC}\\ &= \frac{PC \cdot PC_1}{4R^2} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}\end{aligned}$$

□

3.3 Dacă P este un punct în interiorul triunghiului ΔABC, ΔDEF este triunghiul său pedal iar $\Delta A_1B_1C_1$ este un alt triunghi înscris având punctul asociat P atunci $\text{Aria}(A_1B_1C_1) = \text{Aria}(DEF)/\cos^2 \alpha$ unde $\alpha = \angle A_1PD$.

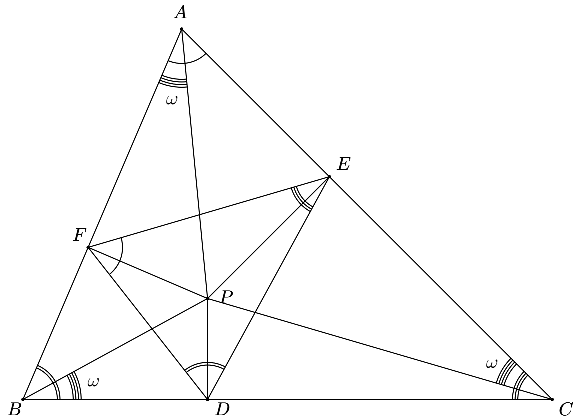
4. Punctul lui Brocard

4.1 O alta aplicaţie a punctelor asociate este construcţia punctului lui Brocard.

Teoremă 7. *Dacă ΔABC este un triunghi ascutitunghic atunci există un unic punct P în interiorul lui astfel încât*

$$\angle PBC = \angle PCA = \angle PAB = \omega$$

Demonstraţie. Folosind Observaţia 4, există un triunghi ΔDEF înscris în ΔABC astfel încât $\Delta DEF \sim \Delta BCA$ (adica $\angle D = \angle B$, $\angle E = \angle C$ şi $\angle F = \angle A$) şi astfel încât dacă P este punctul asociat triunghiului ΔDEF atunci $PD \perp BC$, $PE \perp CA$ şi $PF \perp AB$.



Vom demonstra că P este punctul lui Brocard. Vom folosi Propoziţia 5 pentru triunghiurile asemenea $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEF$ şi $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta BCA$. În acest caz Propoziţia 5 spune că $\angle BPD = \angle CPE = \angle APF$. Cum $\angle PDB = \angle PEC = \angle PFA = 90°$ rezultă că

$$\angle PBC = \angle PCA = \angle PAB = \omega$$

□

4.2 Pentru a analiza unghiul ω putem folosi Lema 6

Propoziţie 8. *Dacă ΔABC este un triunghi iar P este punctul său Brocard având $\angle PBC = \angle PCA = \angle PAB = \omega$ atunc $\omega \le 30°$.*

Demonstraţie. Fie ΔDEF triunghiul pedal al punctului P. Ştim că $\Delta DEF \sim \Delta BCA$ iar dacă $\alpha = \angle BPD = 90° - \omega$ atunci $\text{Aria}(ABC) = \text{Aria}(DEF)/\cos^2\alpha = \text{Aria}(DEF)/\sin^2\omega$; din Lema 6 rezultă că

$$\sin^2\omega = \frac{\text{Aria}(DEF)}{\text{Aria}(ABC)} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}\frac{1}{4}$$

deci $\sin\omega \le 1/2$ de unde $\omega \le 30°$. Egalitatea are loc când $P = O$ adică atunci când ΔABC este echilateral. □

4.3 Următoarele două probleme se rezolvă asemănător:

(1) Fie ΔABC un triunghi ascuţitunghic iar ΔDEF şi $\Delta D'E'F'$ două triunghiuri înscrise asemenea cu ΔABC. Demonstraţi că $\dfrac{DD'}{BC} = \dfrac{EE'}{AC} = \dfrac{FF'}{AB}$ dacă şi numai dacă ΔABC este echilateral.

(2) Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi iar $M_{iu} \in (A_jA_k)$ pentru orice permutare $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ şi orice $u \in \{1,2,3\}$ astfel încât $\Delta M_{1u}M_{2u}M_{3u} \sim M_{1v}M_{2v}M_{3v}$ pentru orice u şi v. Dacă $M_{i1}M_{i2} \cdot M_{i2}M_{i3}$ nu depinde de i, determinaţi unghiurile triunghiurilor $\Delta M_{1u}M_{2u}M_{3u}$.

Grupuri finite

Octavia Potocean

1 Introducere

1.1. În acest articol vom trece în revistă câteva proprietăţi importante ale grupurilor finite şi vom da câteva aplicaţii la probleme clasice de olimpiadă.

1.2. Un grup $(G, \circ)$ se numeşte finit dacă mulţimea G este finită. Pentru un astfel de grup $(G, \circ)$ notăm $\operatorname{ord}(G)$ ordinul grupului G, adică cardinalul mulţimii G. Pentru un element a al grupului G notăm $\langle a \rangle$ subgrupul puterilor lui a, i.e., $\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Cum grupul G este finit şi subgrupul $\langle a \rangle$ este finit; notăm $\operatorname{ord}(a)$ ordinul subgrupului $\langle a \rangle$. În general, dacă G este un grup infinit, elementul a se numeşte de ordin finit sau infinit dacă subgrupul $\langle a \rangle$ are această proprietate.

1.3. Cele mai simple exemple de grup sunt $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ unde operaţia de adunare este luată modulo n şi $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}, \cdot) = \{0 < a < n | (a, n) = 1\}$ unde operaţia de înmulţire este luată modulo n. Dacă un element $a \in G$ are ordin $\operatorname{ord}(a) = n$ atunci $(\langle a \rangle, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

2 Despre ordinul unui grup

2.1. Uneori faptul că un grup G este finit oferă o metodă combinatorică pentru soluţionarea unor probleme de teoria grupurilor.

Exemplu 1. Fie G un grup finit şi $H = \{x \in G, x^n = e\}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$ este un număr impar. Să se arate că H are un număr impar de elemente.

Demonstraţie. Să presupunem că $H \neq \{e\}$ (în care caz concluzia ar fi clară). Fie $x \in H$ astfel încât $x \neq e$. Dacă $x = x^{-1}$ atunci $x^2 = e$. Dar $x^n = e$ iar n este impar deci obţinem o contradicţie: $x = e$. Rezultă că pentru orice $x \neq e$ din H avem $x \neq x^{-1}$. Cum H este un subgrup, dacă $x \in H$ atunci $x^{-1} \in H$ deci elementele lui $H - \{e\}$ se pot grupa în perechi de tipul $\left(x, x^{-1}\right)$. Rezultă că H are un număr impar de elemente. $\square$

Mai multe probleme de acest gen se afla în sectiunea 4.1.

2.2. Teorema lui Lagrange oferă avantajul unor relaţii de divizibilitate aplicate la grupuri.

Teorema 1 (Lagrange)**.** *Dacă H este un subgrup al grupului finit G atunci $\operatorname{ord}(H) \mid \operatorname{ord}(G)$.*

Din această teoremă se pot deduce numeroase proprietăţi, dintre care enumerăm câteva.

1. Dacă $a \in G$ atunci $\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(G)$, iar dacă $a^n = e$ atunci $\operatorname{ord}(a) \mid n$ şi $a^{\operatorname{ord}(G)} = e$.

2. Grupul $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ are ordinul $\varphi(n)$, care este funcţia lui Euler reprezentând numărul numerelor relativ prime cu n şi mai mici decât n. Rezultă că dacă $(a, n) = 1$ atunci $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. În cazul în care $n = p$ este un număr prim, obţinem una din teoremele lui Fermat şi anume că $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, deoarece $\varphi(p) = p - 1$.

2.3. Din Teorema lui Lagrange se poate obţine un prim rezultat despre structura grupurilor finite

Exemplu 2. Fie G un grup finit de ordin prim p. Să se arate că G este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$.

Demonstraţie. Fie $a \in G, a \neq e$. Din Teorema 1 rezultă că $\mathrm{ord}(a) \mid \mathrm{ord}(G) = p$. Dar p este prim deci $\mathrm{ord}(a) = p$ ceea ce implică $G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

3 Despre structura unui grup

3.1 Grupul permutărilor S_n

3.1.1. Grupul permutărilor S_n are ca elemente permutările mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ iar ca operaţie de înmulţire permutarea $(\sigma \cdot \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$. Acest grup are $n!$ elemente. În general, dacă G este o mulţime oarecare, notăm $S(G)$ grupul permutărilor mulţimii G. Un prim rezultat despre structura grupurilor finite este Teorema lui Cayley:

Teorema 2 (Cayley)**.** *Orice grup finit G este izomorf cu un subgrup al grupului simetric $Sym(G)$.*

Demonstraţie. Demonstraţia acestei teoreme se reduce la observaţia că dacă $g \in G$ atunci funcţia $f_g(x) = gx$ reprezintă o permutare a elementelor grupului G. Deci funcţia $g \mapsto f_g$ reprezintă un morfism injectiv de grupuri de la G la grupul permutărilor $\mathrm{Sym}(G)$. □

3.1.2. În principiu, Teorema lui Cayley implică faptul că pentru a înţelege structura unui grup G este utilă înţelegerea structurii grupului S_n. Pentru aceasta, reamintim definiţia unui grup normal. Un subgrup H al unui grup G se numeşte *normal* dacă pentru orice element $g \in G$ avem $gHg^{-1} = H$. În cazul grupului S_n un exemplu de subgrup normal este subgrupul $A_n \subset S_n$ al permutările pare. (O permutare se numeşte pară dacă are un număr par de inversiuni $i < j$ dar cu $\sigma(i) > \sigma(j)$.) Următoarea teoremă celebră spune că grupul A_n nu are subgrupuri normale proprii pentru $n \geq 5$.

Teorema 3. *Fie H un subgrup normal al grupului A_n al permutărilor pare. Dacă $n = 3$ sau $n \geq 5$ atunci $H = \{e\}$ sau $H = S_n$.*

3.1.3. Rezultă că în cazul grupului finit S_n avem o întelegere bună, deşi nu a tuturor subgrupurilor, cel puţin a celor normale. Ca aplicaţie a acestei observaţii dăm o problemă propusă la Tabăra Naţională de Matematică de la Cluj din 2001.

Exemplu 3. Fie $(A, +)$ un grup abelian. Demonstraţi că dacă $n \geq 2$ atunci $(\mathrm{Hom}(S_n, A), +) \cong A[2]$ unde $A[m] = \{a \in A | ma = 0\}$.

Demonstraţie. Dificultatea acestei probleme constă în faptul că grupul omomorfismelor $\mathrm{Hom}(S_n, A)$ pare misterios, însă folosind Teorema 3 vom putea descrie aceste omomorfisme într-un mod explicit. Fie $f : S_n \to A$ un omomorfism. Atunci $\ker(f) = \{\sigma \in S_n | f(\sigma) = 0\}$ este un subgrup normal al lui S_n deoarece dacă $\sigma \in \ker(f)$ si $\tau \in S_n$ atunci $f(\tau\sigma\tau^{-1}) = f(\tau) + f(\sigma) - f(\tau) = 0$ deci $\tau\sigma\tau^{-1} \in \ker(f)$.

Deci $\ker(f) \cap A_n$ va fi un subgrup normal al lui A_n. Din Teorema 3 rezultă că fie $n \in \{2, 4\}$ sau $\ker(f) \cap A_n \in \{\{e\}, A_n\}$. Vom analiza fiecare din aceste cazuri separat.

1. Fie $\ker(f) \cap A_n = A_n$. Dacă σ şi τ sunt două permutări impare atunci $\sigma\tau^{-1}$ este o permutare pară deci $f(\sigma) = f(\tau)$. Deci omomorfismul f este definit de valoarea $f(\sigma) = a \in A$ şi cum σ^2 este pară rezultă că $2a = 0$ deci $a \in A[2]$.

2. Fie $\ker(f) \cap A_n = \{e\}$. Dacă σ şi τ sunt două permutări pare atunci $f(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) = f(\sigma) + f(\tau) - f(\sigma) - f(\tau) = 0$ deci $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \in \ker(f) \cap A_n$ de unde rezultă că $\sigma\tau = \tau\sigma$. Însă pentru $n \geq 4$ grupul A_n nu este abelian, deci acest caz este exclus dacă $n \geq 4$.

Din analiza de mai sus rezultă că dacă $n \geq 4$ atunci $f \in \mathrm{Hom}(S_n, A)$ poate fi descris de un element $f(\sigma) = a \in A[2]$ deci $\mathrm{Hom}(S_n, A) \cong A[2]$. Rămân trei cazuri speciale $n \in \{2, 3, 4\}$ pe care le lăsăm cititorului. □

3.2 Elemente speciale într-un grup finit

3.2.1. Deseori în demonstraţia unei probleme despre grupuri finite este utilă existenţa unor elemente speciale în grup.

Teorema 4 (Cauchy)**.** *Fie G un grup finit cu $n \geq 2$ elemente. Dacă p este un divizor prim al lui n, atunci există în G un element de ordin p.*

3.2.2. Un exemplu de problemă de olimpiadă la care se poate aplica Teorema lui Cauchy este următoarea problemă de la Olimpiada Naţională de Matematică din 2008:

Exemplu 4. Fie G un grup finit cu n elemente şi fie p cel mai mare divizor prim al lui n. Demonstraţi că există cel mult $n^{n/p}$ omomorfisme $f : G \to G$.

Demonstraţie. Cum $p \mid n$ există un element a de ordin p. Atunci $\langle a \rangle$ este un subgrup de ordin p al lui G si fie $g_1, g_2, \ldots, g_{n/p}$ reprezentanţi în G ai mulţimii $G/\langle a \rangle$. Dacă ştim $f(g_i) = h_i$ atunci pentru orice $a^k \in \langle a \rangle$ avem $f(g_i a^k) = h_i f(a)^k$ deci pentru a defini complet omomorfismul f ajunge să dăm valori $f(a)$ şi $f(g_i)$, mai puţin pentru $g_1 = e$ caz în care $f(e) = e$. Pentru fiecare h_i avem n alegeri şi pentru $f(a)$ avem din nou n alegeri, deci numărul de alegeri pentru omomorfismul f este cel mult $n \cdot n^{n/p-1} = n^{n/p}$. □

3.3 Subgrupuri speciale într-un grup finit

3.3.1. O generalizare a Teoremei lui Cauchy garantează existenţa unor subgrupuri speciale într-un grup G.

Teorema 5 (Sylow)**.** *Fie G un grup finit cu n elemente şi fie p un număr prim astfel încât $p^k \parallel n$ (ceea ce înseamnă că $p^k \mid n$ dar $p^{k+1} \nmid n$). Atunci*

1. *există un subgrup H al lui G cu exact p^k elemente, numit grup Sylow;*
2. *dacă H_1 şi H_2 sunt două subgrupuri Sylow de ordin p^k atunci există $g \in G$ astfel încât $H_2 = gH_1g^{-1}$;*
3. *dacă n_p este numărul de subgrupuri Sylow atunci $n_p \equiv 1 \pmod p$ şi $n_p \mid np^{-k}$.*

3.3.2. Ca aplicaţie a acestei teoreme vom demonstra următoarea problemă clasică:

Exemplu 5. Fie G un grup de ordin pq unde p şi q sunt două numere prime distincte astfel încât $p \nmid q - 1$ şi $q \nmid p - 1$. (De exemplu $pq = 15$.) Demonstraţi că G este ciclic.

Demonstraţie. Cei doi divizori primi ai ordinului pq sunt p şi q. În conformitate cu notaţiile Teoremei lui Sylow, avem $n_p \mid q$ şi $n_p \equiv 1 \pmod p$. Deci $n_p \in \{1, q\}$ şi cum $p \nmid q - 1$ rezultă că $n_p = 1$. În mod similar obţinem $n_q = 1$. Fie S un subgrup Sylow. Dacă $g \in G$ atunci gSg^{-1} va avea acelaşi număr de elemente ca şi S deci va fi tot Sylow, dar cum $n_p = n_q = 1$ rezultă că există un singur subgrup Sylow având un ordin fix, deci $gSg^{-1} = S$ de unde rezultă că S este un subgrup normal în G. Cum S_p şi S_q sunt ciclice şi fiecare este normal în G rezultă că G este ciclic. □

3.4 Grupuri abeliene

3.4.1. În cazul grupurilor abeliene se poate obţine un rezultat mult mai precis:

Teorema 6. *Dacă $(G,+)$ este un grup abelian finit atunci există numere naturale pozitive $n_1, n_2, \dots, n_k$ astfel încât*

$$G \cong (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$$

Observaţie. Pentru a demonstra această teoremă este esenţială observaţia că dacă G este un grup abelian atunci pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ şi $g \in G$ avem $ng \in G$, deci G are structura unui modul peste inelul G. Rezultatul este dedus din structura modulelor finite peste inelul $\mathbb{Z}$.

Exemplu 6. Determinaţi toate grupurile finite G cu numai un automorfism.

Demonstraţie. Dacă $g \in G$ atunci $f_g(x) = gxg^{-1}$ este un automorfism deci $f_g(x) = x$ pentru orice $g, x \in G$ de unde rezultă că grupul G este abelian. Dar comutativitatea înmulţirii în G implică faptul că $f(x) = x^{-1}$ este un automorfism deci $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$. Folosind Teorema 6 rezultă că $G \cong \prod_{i=1}^{k}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$ şi cum fiecare element din G are ordin 2 rezultă că $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 2$. Deci fiecare element $g \in G$ poate fi scris sub forma $g = (x_1, \dots, x_k)$ unde $x_i \in \{0,1\}$. Cum $p(x_1, x_2, \dots) = p(x_2, x_1, \dots)$ este un automorfism al acestui grup, diferit de identitate, rezultă că $G = \{e\}$ sau $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

4 Aplicaţii

4.1 Probleme folosind definiţia ordinului unui grup finit

1. Fie G un grup finit şi $a \in G \setminus \{e\}$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^k = e$.

   Demonstraţie. Fie $a \in G \setminus \{e\}$ deci $a, a^2, a^3, .., a^n \in G$. Cum G este finit rezultă că există $i < j$ astfel încât $a^i = a^j$ de unde $e = a^{j-i} = a^k$. □

2. Fie G un grup comutativ cu n elemente. Să se demonstreze că pentru orice $x \in G$ avem $x^n = e$.

   Demonstraţie. Fie $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şi $x \in G$ arbitrar. Atunci mulţimea $H = \{ax_1, ax_2, \dots, ax_n\}$ are n elemente distincte, $H \subset G$ rezultă $H = G$. Deci $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n = (ax_1) \cdot (ax_2) \cdots (ax_n) = a^n(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n)$ deci $x^n = e$. □

3. Să se arate că orice grup cu trei elemente este comutativ.

   Demonstraţie. Fie $G = \{e, a, b\}$ un grup cu trei elemente. Deci $ab \neq a$,$ab \neq b$ de unde $ab = e$. În mod analog $ba \neq a$, $ba \neq b$ deci $ba = e$. Rezultă că $ab = ba = e$ iar evident $ae = ea = b$ şi $be = eb = b$ deci G este comutativ. □

4. Fie G şi H două grupuri cu cel puţin două elemente şi m şi n două numere întregi nenule, prime între ele. Presupunem că $a^m = e$ pentru orice $a \in H$ şi $b^n = e$ pentru orice $b \in G$ unde notăm cu e elementele neutre ale lui H, respectiv G. Demonstraţi că $H \neq G$.

   Demonstraţie. Dacă există un izomorfism $f : H \to G$ atunci $f(a)^m = f(a^m) = f(e) = e$ pentru orice $a \in H$ deci $b^m = e$ pentru orice $b \in G$. Dar $b^n = e$ pentru orice $\in G$; cum $(m,n) = 1$ rezultă că există $p, q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $pm + qn = 1$ deci $b = b^{pm+qn} = (b^m)^p(b^n)^q = e$ pentru orice $b \in G$, ceea ce contrazice ipoteza că G are cel puţin două elemente. □

4.2 Probleme în care aplicăm Teorema lui Lagrange

6. Fie G un grup cu un număr impar de elemente astfel încât $(xy)^2 = (yx)^2$ pentru orice $x, y \in G$. Să se arate că G este grup abelian.

Demonstraţie. Fie $n = 2k + 1$ ordinul lui G. Cum $(xy)^n = (yx)^n = e$ rezultă că

$$xy = (xy)^{n-2k} = (xy)^{-2k} = \left((xy)^2\right)^{-k} = \left((yx)^2\right)^{-k} = (yx)^{-2k} = (yx)^{n-2k} = yx$$

□

7. Fie G un grup finit cu un număr impar de elemente. Să se arate că mulţimea $M = \{x \in G | x^2 = e\}$ are un singur element.

Demonstraţie. Ordinul oricărui element divide ordinul grupului, care fiind impar nu are divizori pari. Deci doar e are proprietatea $e^2 = e$. □

8. Fie G un grup finit de ordin p, unde p este prim. Să se arate că G nu are subgrupuri proprii.

Demonstraţie. Utilizând Teorema 1, dacă G ar avea un subgrup propriu H atunci $1 < \text{ord}(H) < \text{ord}(G)$ şi $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G) = p$, ceea ce este imposibil, cum p este prim. □

9. Fie G un grup, care conţine un subgrup H, astfel încat $G \setminus H$ are un număr finit de elemente. Să se arate că G este finit.

Demonstraţie. Fie $x \in G \setminus H$. Considerăm funcţia injectivă $g_x : H \to G \setminus H$ definită prin $g_x(a) = xa$. Cum $G \setminus H$ are un număr finit de elemente, rezultă că H are un nr finit de elemente deci $|G| = |H \cup (G \setminus H)| = |H| + |G \setminus H| < \infty$ □

10. Fie G un grup şi x un element de ordin finit în G. Atunci pentru orice întreg n avem $\text{ord}(x^n) \mid \text{ord}(x)$.

Demonstraţie. Elementul x^n aparţine subgrupului ciclic generat de elementul x, subgrup care are ordinul egal cu $\text{ord}(x)$. Conform Teoremei 1, ordinul oricărui element divide ordinul grupului deci $\text{ord}(x^n) \mid \text{ord}(x)$. □

4.3 Probleme în care aplicăm teorema lui Cauchy

12. Fie G un grup abelian finit având ordin un număr natural liber de pătrate. Să se arate că G este ciclic.

Demonstraţie. Fie $|G| = p_1 p_2 \cdots p_n$ cu p_i prime şi distincte două câte două. Din Teorema 4 există un element $x_i \in G$ de ordin exact p_i pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$. Cum G este comutativ rezultă că $\text{ord}(x_1 x_2 \cdots x_n) = p_1 p_2 \cdots p_n$ deci G este ciclic. □

Bibliografie

[1] Ion D. Ion, Nicolae Radu, *Algebră*, E.D.P 1975

[2] Ganga Mircea *"Probleme de algebră şi analiză matematică"*, Ed. Mathpress 1995

[3] Becheanu M, Vraciu C, *"Probleme de teoria grupului"*, T.V. Bucureşti 1982

O axiomatizare a mulţimii şirurilor de numere reale având limita zero

Prof. univ. dr. Gheorghe Halic

Vom nota prin (a_n) şirul având ca termeni numerele reale $(a_n)_{n>0}$.

Vom spune că numărul $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ este un *punct limită al şirului* (a_n) dacă orice vecinătate V a lui ℓ conţine o infinitate de termeni ai şirului, adică

$$\forall\, n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \exists\, n > n_0 \quad a_n \in V$$

(după cum se vede, am extins definiţia şi la cazul în care ℓ nu este finit).

Conceptul *astfel definit* are următoarele proprietăţi, pe care le vom folosi în prezentul articol:

(α) Dacă ℓ este un punct limită al şirului (a_n), atunci există un subşir (a_{i_n}) care are limita ℓ.

(β) Orice şir de numere reale are cel puţin un punct limită (finit sau infinit)

Notăm cu S mulţimea şirurilor de numere reale şi cu S_0, submulţimea sa formată din şirurile având limita zero. Se ştie că S_0 are structură de grup aditiv faţă de adunarea termen cu termen a şirurilor.

În acest articol ne propunem să găsim anumite condiţii pentru o submulţime $M_0 \subset S$, condiţii care adăugate la cea de a fi grup aditiv să individualizeze pe S_0, dintre submulţimile lui S. Dacă fiecare din condiţiile respective este independentă de celelalte, atunci vorbim de o axiomatizare a lui S_0.

Considerăm următoarele axiome pentru $M_0 \subset S$:

Ax. 1. $M_0 \subset S$ este un grup aditiv.

Ax. 2. Dacă şirul staţionar (γ) aparţine lui M_0, atunci $\gamma = 0$.

Ax. 3. Dacă şirul $(a_n) \in M_0$, atunci orice subşir al sau $(a_{i_n}) \in M_0$.

Ax. 4. Dacă şirul $(a_n) \in M_0$, atunci şi şirul $\left(\dfrac{a_n^2}{a_n^2+1}\right) \in M_0$.

Ax. 5. Dacă $M_0' \subset S$ verifică axiomele 1, 2, 3, 4, atunci $M_0' \subset M_0$.

Teoremă 1. *Dacă mulţimea $M_0 \subset S$ verifică axiomele 1, 2, 3, 4, 5, atunci $M_0 = S_0$.*

Demonstraţie. Deoarece S_0 verifică în mod evident axiomele 1, 2, 3, 4, pe baza axiomei 5 rezulta

$$S_0 \subset M_0. \tag{1}$$

Pentru a demonstra incluziunea inversă vom arăta că nici un şir din M_0 nu poate avea punct limită diferit de zero.

Fie $(a_n) \in M_0$ şi ℓ un punct limită *finit* al lui (a_n). Conform proprietăţii (α), există un subşir (a_{i_n}) având limita ℓ, deci $(a_{i_n} - \ell) \in S_0 \subset M_0$. Conform axiomei 3, $(a_{i_n}) \in M_0$. Deoarece

$$(\ell) = (a_{i_n}) - (a_{i_n} - \ell)\,,$$

conform axiomei 1, $(\ell) \in M_0$. Mai departe, din axiomei 2 rezultă că $\ell = 0$.

Rămâne de arătat că nici un şir din M_0 nu poate avea punct limită *infinit*. Presupunem prin absurd că ar exista un şir $(a_n) \in M_0$ având ca punct limită pe $-\infty$ sau pe ∞. Conform proprietăţii (α) există un subşir (a_{i_n}) al său având limita infinită respectivă. Conform axiomei 3, $(a_{i_n}) \in M_0$. Deoarece $a_{i_n}^2 \to \infty$, rezulta ca

$$\frac{a_{i_n}^2}{a_{i_n}^2+1} \to 1. \text{ Dar conform axiomei 4, } \left(\frac{a_{i_n}^2}{a_{i_n}^2+1}\right) \in M_0,$$

ceea ce contravine faptului deja demonstrat că şirurile din M_0 nu pot avea punct limită *finit* diferit de zero.

Astfel am arătat ca nici un şir din M_0 nu poate avea punct limit ă diferit de zero. Ţinând cont şi de proprietatea (β), are loc

$$M_0 \subset S_0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă concluzia teoremei.

□

Vom arăta acum că fiecare din cele cinci axiome este independentă de celelalte patru.

Ax. 1 este independentă de celelalte. Pentru a arăta aceasta, considerăm mulţimea $M_1 \subset S$, formată din toate şirurile **strict** descrescătoare de numere reale **pozitive**. M_1 nu verifică axioma 1, însă le verifică pe celelalte. Verificarea axiomelor 2 şi 5 este banala iar cea a axiomei 3 rezultă din tranzitivitatea relaţiei de ordonare. Pentru verificarea axiomei 4, obsevăm că

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{implică} \quad \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2+1} < \frac{a_n^2}{a_n^2+1}$$

deci din $(a_n) \in M_1$ rezultă $\left(\frac{a_n^2}{a_n^2+1}\right) \in M_1$.

Ax. 2 este independentă de celelalte. Pentru a arăta aceasta, considerăm mulţimea $M_2 \subset S$, formată din toate şirurile convergente. M_2 nu satisface axioma 2, deoarece conţine şi şiruri staţionare (γ), cu $\gamma \neq 0$. Axioma 5 este satisfăcută în mod banal, iar axiomele 1, 3 şi 4 se verifică cu uşurinţă.

Ax. 3 este independentă de celelalte. Pentru a arăta aceasta, considerăm mulţimea $M_3 \subset S$, a tuturor şirurilor (a_n), unde $a_n = \frac{\gamma}{2}\left(1 + (-1)^n\right), \quad \gamma \in \mathbb{R}$. Axioma 3 nu este satisfăcută, deoarece pentru $\gamma \neq 0$, subşirul $(a_{2n}) \notin M_3$, primul termen al acestui subşir nefiind nul. Axioma 5 este satisfăcută în mod banal, iar axiomele 1 şi 3 se verifică uşor. Axioma 2 este de asemenea verificată, căci un şir staţionar (γ) poate aparţine lui M_3, numai dacă $\gamma = 0$.

Ax. 4 este independentă de celelalte. Pentru a arăta aceasta, considerăm mulţimea $M_4 \subset S$, formată din toate combinaţiile liniare cu coeficienţi întregi ale subşirurilor şirului (a_n), unde $a_n = 2^n$. Un subşir al lui (a_n) este de forma (a_{i_n}), cu $a_{i_n} = 2^{i_n}$, în care (i_n) este un şir **strict** crescător de numere naturale. Un element din M_4 este de forma

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \, 2^{i_n^{(k)}}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{Z}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, p\} \quad i_1^{(k)} < i_2^{(k)} < \ldots < i_n^{(k)} < \ldots \tag{3}$$

Axioma 4 nu este satisfăcută deoarece toate şirurile din M_4 au ca termeni numere întregi, iar $\frac{a_n^2}{a_n^2+1}$ nu este întreg. Axioma 5 este satisfăcută în mod banal. Verificarea axiomei 1 rezulta direct din definiţia lui M_4. Verificarea axiomei 3 rezultă din faptul că un subşir al unei combinaţii liniare de subşiruri este la rândul său tot o combinaţie liniară de subşiruri. Pentru verificarea axiomei 2, vom proceda prin reducere la absurd. Presupunem că M_4 ar conţine un şir staţionar (γ), cu $\gamma \neq 0$, adică

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \; 2^{i_n^{(k)}} = \gamma. \tag{4}$$

Evident, γ este număr întreg. Fie m, cel mai mare număr natural cu proprietatea că 2^m divide pe γ. Din inegalităţile (3) rezultă că există un rang n^*, astfel ca oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, p\}$, pentru $n > n^*$ să aibă loc $i_n^{(k)} > m$. Pentru un asemenea n, egalitatea (4) nu poate avea loc, deoarece membrul întâi se divide cu 2^{m+1} iar membru doi, nu are această proprietate.

Ax. 5 este independentă de celelalte. Vom arăta că există o mulţime $M_5 \subset S$ care verifică axiomele 1, 2, 3, 4, dar care nu verifică axioma 5. Vom lua ca M_5, mulţimea tuturor şirurilor (a_n) cu proprietatea $\lim\,(n\; a_n) = 0$. Verificarea axiomelor 1 şi 2 este imediată. Pentru verificarea axiomei 4, observăm că din $\lim\,(n\; a_n) = 0$ rezultă $\lim\; a_n = 0$, apoi

$$\lim\, \left(n\; \frac{a_n^2}{a_n^2+1}\right) = \lim\,(n\; a_n)\;\; \lim\, \frac{a_n}{a_n^2+1} = 0, \quad \text{deci} \quad \left(\frac{a_n^2}{a_n^2+1}\right) \in M_5.$$

Rămâne să verificăm axioma 3. Din $(a_n) \in M_5$ rezultă

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* \qquad \forall\, n > n_0 \qquad |a_n| < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{5}$$

Dacă (a_{i_n}) este un subşir al lui (a_n), atunci şirul de numere naturale (i_n) este **strict** crescător, deci

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}^* \qquad \forall\, n > n_1 \qquad i_n > n_0. \tag{6}$$

Din (5) şi (6) rezultă că pentru $n > n_1$ are loc $|a_{i_n}| < \frac{\varepsilon}{n}$, deci $(a_{i_n}) \in M_5$.

M_5 nu verifică axioma 5, adică nu include orice submulţime a lui S, care verifică axiomele 1, 2, 3, 4. Astfel mulţimea S_0 a tuturor şirurilor cu limita zero, deşi verifica axiomele 1, 2, 3, 4, totuşi nu e inclusă în M_5. De exemplu, şirul $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ aparţine lui S_0 dar nu aprţine lui M_5.

Astfel am arătat că cele cinci axiome, găsite pentru a caracteriza mulţimea şirurilor având limita zero, sunt independente.

Problema tratată în prezentul articol a fost propusă spre rezolvare de catre prof. univ. dr. docent Elena Popoviciu.

Bibliografie

[1] Gussi G., Stănăşilă O., Stoica T.: *Elemente de analiză matematică. Manual pentru clasa a XI-a.* Ed. DP, Bucureşti, 1980.

[2] Halic E.: *Logică şi teoria numerelor.* Ed. UAV, Arad, 2006.

[3] Halic G.: *Matematici II, Funcţii de o variabilă reală* Ed. IPT, Timişoara, 1980.

[4] Megan M. et al., *Bazele analizei matematice, prin exerciţii şi probleme*, Ed. Helicon, Timişoara, 1996.

Asupra unui tip de primitive complementare

Ramona Tudoran

1 Introducere

Observăm adesea, în încercarea de a calcula anumite primitive aşa zise "nonstandard", că asocierea unei primitive "convenabil aleasă" urmată de anumite combinaţii liniare între aceasta şi primitiva de calculat, conduc la primitive "standard". Astfel primitiva de calculat precum şi cea auxiliară sunt obţinute prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebric .

Scopul acestui articol este de a introduce o clasă de astfel de primitive "nonstandard" şi a prezenta o metodă de calcul a acestora.

2 O familie de polinoame "standard"

În această secţiune introducem o familie de polinoame cu coeficienţi reali, familie care defineşte primitivele "standard" la care vom reduce clasa de primitive "nonstandard" care face obiectul studiului acestui articol.

Convenţie: Pe parcursul întregului articol, pentru a nu îngreuna notaţiile, vom folosi aceeaşi notaţie atât pentru polinom cât şi pentru funcţia sa polinomială.

Propoziţie 2.1. *Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Atunci*

$$a^{2n} + \frac{1}{a^{2n}} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \left(a^{2n-2} + \frac{1}{a^{2n-2}}\right) - \left(a^{2n-4} + \frac{1}{a^{2n-4}}\right)$$

Demonstraţie. Prin calcul direct. Daca notăm $A_n = a^{2n} + \frac{1}{a^{2n}}$ şi $\xi = a^2 + \frac{1}{a^2}$, atunci expresia de mai sus devine

$$A_n = \xi A_{n-1} - A_{n-2} \tag{1}$$

Cum $A_1 = \xi$ şi $A_2 = \xi^2 - 2$, din recurenţa de mai sus, obţinem că A_n are o expresie polinomială de gradul n în raport cu ξ, şi anume există $P_n \in R[X]$, de grad n, astfel încât $A_n = P_n(\xi)$.

Exemple: $P_3 = X^3 - 3X$; $P_4 = X^4 - 4X^2 + 2$; $P_5 = X^5 - 5X^3 + 5X$; $P_6 = X^6 - 6X^4 + 9X^2 - 2$; etc. □

Remarcă 2.2. *Din recurenţa (1) cu condiţiile iniţiale $A_1 = \xi$ şi $A_2 = \xi^2 - 2$, se poate obţine utilizând formula recurenţei de ordinul al doilea, o formula explicită pentru A_n.*

Remarcă 2.3. *Observam că $\xi = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2 \mp 2$.*

Propoziţie 2.4. *In ipotezele anterioare, exista două polinoame cu coeficienţi reali, de gradul 2n, P_{2n}^+, $P_{2n}^- \in R[X]$ astfel încât:*

$$A_n = P_n(\xi) = P_{2n}^+\left(a + \frac{1}{a}\right) = P_{2n}^-\left(a - \frac{1}{a}\right).$$

Demonstraţie. Considerăm $P_{2n}^{+}(X)=P_n(X^2-2)$, respectiv $P_{2n}^{-}(X)=P_n(X^2+2)$. Astfel avem că pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, există $P_n^{\pm} \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{grad}\big(P_{2n}^{\pm}\big) = 2n$ şi

$$a^{2n} + \frac{1}{a^{2n}} = P_{2n}^{+}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$
$$a^{2n} + \frac{1}{a^{2n}} = P_{2n}^{-}\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

□

3 O familie de primitive complementare

În această secţiune introducem o clasă de primitive complementare şi dăm o metodă de reducere a calculului acestora la primitive "standard", raţionale.

Teoremă 3.1. *Fie $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ o funcţie de clasă C^1 pe intervalul real I, astfel incat $Im\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = J_\varphi$ sa fie un interval real care nu contine nicio rădăcină reală a polinoamelor $P_{2n}^{\pm} \in \mathbb{R}[X]$. Atunci*

$$I_n = \int \frac{\varphi^{2n} \cdot \varphi'}{\varphi^{4n}+1} = \frac{1}{2}\left[G_+ \circ \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) + G_- \circ \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)\right] + \mathcal{C}$$
$$J_n = \int \frac{\varphi^{2(n-1)} \cdot \varphi'}{\varphi^{4n}+1} = \frac{1}{2}\left[G_- \circ \left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right) + G_+ \circ \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)\right] + \mathcal{C}$$

unde $G_\pm : J_\varphi \to \mathbb{R},\ G_\pm \in \int \frac{1}{P_{2n}^{\pm}}$.

Demonstraţie. Observăm că putem rescrie $I_n \pm J_n$ sub forma

$$I_n + J_n = \int \frac{\left(1 + \frac{1}{\varphi^2}\right) \cdot \varphi'}{\varphi^{2n} + \frac{1}{\varphi^{2n}}} = \int \frac{\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)'}{\varphi^{2n} + \frac{1}{\varphi^{2n}}}$$
$$I_n - J_n = \int \frac{\left(1 - \frac{1}{\varphi^2}\right) \cdot \varphi'}{\varphi^{2n} + \frac{1}{\varphi^{2n}}} = \int \frac{\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)'}{\varphi^{2n} + \frac{1}{\varphi^{2n}}}$$

Utilizând rezultatele din secţiunea anterioară, avem că

$$I_n + J_n = \int \frac{\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)'}{P_{2n}^{-}\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)}$$
$$I_n - J_n = \int \frac{\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)'}{P_{2n}^{-}\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)}$$

Astfel, aplicând teorema schimbării de variabilă la integrala nedefinită, pentru $u : I \to J_\varphi$ cu $u = \varphi + \frac{1}{\varphi}$

o funcţie derivabila pe I şi $g_{\pm} : J_{\varphi} \to \mathbb{R}$ cu $g_{\pm} = \dfrac{1}{P_{2n}^{\pm}}$ două funcţii primitivabile pe J_{φ}, obţinem

$$I_n + J_n = G_{-} \circ u + \mathcal{C} \tag{2}$$
$$I_n - J_n = G_{+} \circ u + \mathcal{C} \tag{3}$$

unde $G_{\pm} \in \displaystyle\int \frac{1}{P_{2n}^{\pm}}$. Din relaţiile (2) şi (3) obţinem imediat concluzia. $\square$

4 Exemple de primitive complementare

În această secţiune prezentăm câteva exemple de primitive complementare din familia celor introduse în secţiunea anterioară, prin prezentarea în fiecare caz a expresiei funcţiei φ, respectiv a numărului, date in Teorema 3.1.

1. $I = \displaystyle\int \frac{x^{3r-1}}{x^{4r}+1}dx, J = \int \frac{x^{r-1}}{x^{4r}+1}dx$, $n = 1$, $\varphi(x) = x^r, r \in \mathbb{Q}$.
2. $I = \displaystyle\int \frac{e^{5rx}}{e^{8rx}+1}dx$, $J = \displaystyle\int \frac{e^{3rx}}{e^{8rx}+1}dx$, $n = 2$, $\varphi(x) = e^{rx}, r \in \mathbb{Q}$.
3. $I = \displaystyle\int \frac{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}dx$, $J = \displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}dx$, $n = 2$, $\varphi(x) = \tan x$.

PROLEGOMENE
CONVOLUŢII ŞI TRANSFORMĂRI FOURIER

ANDREI JORZA

1. Introducere

1.1. În acest articol vom studia convoluţia a două funcţii de unde vom deduce formula de inversiune a lui Möbius şi noţiunea de transformare Fourier. Formula de inversiune o vom aplica la o problemă propusă la Olimpiada Internaţională de Matematică iar transformarea Fourier o vom aplica la o problemă de baraj. Vom folosi limbajul algebrei abstracte, însă acesta este doar o convenienţă, articolul necesitând doar cunoştinţe elementare de clasa a 9a.

2. Convoluţia a două funcţii

2.1. Fie $(R, \bullet)$ un monoid comutativ cu unitate, ceea ce înseamnă că R este o mulţime cu o operaţie $\bullet$ care satisface toate proprietăţile adunării şi înmulţirii. Această noţiune este doar un mod concis de a spune că vom analiza următoarele exemple: $(\mathbb{N}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ şi $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$. Cititorul poate să pretindă că R este una din aceste exemple în restul articolului.

2.2. Tot pentru convenienţă vom defini $N = 1$ dacă mulţimea R este infinită (deci $R = \mathbb{N}^*$) şi $N = |R|$ numărul de elemente al lui R dacă mulţimea R este finită (deci $N = n$ dacă $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $N = nm$ dacă $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$).

2.3. Dacă $f, g : R \to \mathbb{C}$ sunt două funcţii cu valori numere complexe, vom defini produsul de convoluţie al celor două funcţii ca fiind $f * g : R \to \mathbb{C}$ astfel încât

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{u \bullet v = x} f(u)g(v) \right)$$

2.4. În mod concret, dacă $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sau $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ împreună cu operaţia de adunare, atunci $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_u f(u)g(x-u)\right)$ iar dacă $R = \mathbb{N}^*$ împreună cu înmulţirea, atunci $(f*g)(x) = \sum_{u|x} f(u)g\left(\frac{x}{u}\right)$ (in acest caz $N = 1$).

2.5. Fie e elementul unitate în R. Asta înseamnă că $e = 0$ dacă operaţia este adunarea, şi $e = 1$ dacă operaţia este înmulţirea. Funcţia $\delta(x) = \begin{cases} \sqrt{N}, x = e \\ 0, x \neq e \end{cases}$ are proprietatea că pentru orice funcţie f avem

$$f * \delta = \delta * f = f$$

pentru că $(f * \delta)(x) = \sum_{u \bullet v = x} f(u)\delta(v) = f(x)$. Deci funcţia δ joacă rolul unei unităţi în "produsul" de convoluţie.

3. Formula de inversiune a lui Möbius

3.1. În această secţiune vom lua $R = \mathbb{N}^*$ cu operaţia de înmulţire. Reamintim cititorului că în acest caz $N = 1$.

3.2. Funcţia lui Möbius este definită în modul următor. Dacă $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ este un număr natural liber de pătrate atunci $\mu(n) = (-1)^k$, unde k este numărul de factori primi. În caz contrar $\mu(n) = 0$.

3.3. Această funcţie este importantă pentru următorul motiv. Dacă $\nu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ este funcţia unitate $\nu(x) = 1$ pentru orice x atunci

$$(\nu * \mu)(x) = \sum_{u|x} \nu(u)\mu\left(\frac{x}{u}\right) = \sum_{u|x} \mu\left(\frac{x}{u}\right) = \sum_{u|x} \mu(u)$$

Dacă $x = 1$ rezultă că $(\nu * \mu)(x) = 1$ iar dacă $x = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ atunci

$$(\nu * \mu)(x) = \sum_{i_j \le n_j} \mu(p_1^{i_1} \cdots p_k^{i_k}) = \sum_{i_j \in \{0,1\}} \mu(p_1^{i_1} \cdots p_k^{i_k}) = \sum_{i_j \in \{0,1\}} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k} = (1 + (-1))^k = 0$$

de unde rezultă că $\nu * \mu = \mu * \nu = \delta$ deci μ este "inversa" funcţiei $\nu \equiv 1$ faţă de produsul de convoluţie (am văzut că δ este "unitate" pentru acest produs).

3.4. Din aceste observaţii putem deduce uşor formula de inversiune a lui Möbius. Considerăm doua şiruri a_n şi b_n cu proprietatea că

$$a_n = \sum_{d|n} b_d$$

Un alt mod de a spune acest lucru este că avem două funcţii a şi b astfel încât

$$a = b * \nu$$

unde $\nu \equiv 1$ este funcţia identic egală cu 1, definită anterior. Dar am văzut că funcţia lui Möbius μ este "inversa" funcţiei ν deci $a = b * \nu$ implică

$$a * \mu = b * \nu * \mu = b * \delta = b$$

3.5. Această formulă poate fi rescrisă sub forma

$$b_n = \sum_{d|n} a_d \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

care este formula lui Möbius.

3.6. La Olimpiada Internaţională de Matematică din 1989 a fost propusă (dar nu inclusă) următoarea problemă:

Problemă 1. *Fie* $(a_n)_{n \ge 1}$ *un şir de numere întregi cu proprietatea că* $2^n = \sum_{d|n} a_d$ *pentru orice* $n \ge 1$. *Demonstraţi că* $n \mid a_n$ *pentru orice* $n \ge 1$.

Demonstratie:
Din formula de inversiune rezultă că $a_n = \sum_{d|n} \mu(d)\, 2^{n/d}$. Restul demonstraţiei constă în utilizarea teoremei lui Euler, care spune că $x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ pentru orice număr x relativ prim cu n. Fie p un număr prim şi $n = p^k m$ cu $p \nmid m$. Atunci

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{d|n} \mu(d)\, 2^{n/d} \\ &= \sum_{p|d|n} \mu(d)\, 2^{n/d} + \sum_{p \nmid d|n} \mu(d)\, 2^{n/d} \\ &= \sum_{p \nmid \frac{d}{p} | \frac{n}{p}} \mu(d)\, 2^{n/d} + \sum_{d|m} \mu(d)\, 2^{n/d} \end{aligned}$$

Notând $d' = d/p$ obţinem

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{d'|m} \mu(d) 2^{n/d} + \sum_{d|m} \mu(d) 2^{n/d} \\ &= \sum_{d'|m} \mu(d'p) 2^{n/d} + \sum_{d|m} \mu(d) 2^{n/d} \\ &= \sum_{d|m} \mu(d) \left(2^{\frac{mp^k}{d}} - 2^{\frac{mp^{k-1}}{d}} \right) \end{aligned}$$

Dar din teorema lui Euler rezultă că $2^{\frac{mp^k}{d}} \equiv 2^{\frac{mp^{k-1}}{d}} \pmod{p^k}$ deoarece $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ deci $p^k \mid a_n$ pentru orice $p^k \mid n$. Rezultă că $n \mid a_n$.

4. Transformarea Fourier

4.1. În această secţiune vom presupune că $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sau $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ cu operaţia de adunare. Reamintim cititorului că aceasta înseamnă că, în primul caz $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ iar operaţia de adunare este $x + y \pmod n$, iar în al doilea caz, ca $R = \{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{0, 1, \ldots, m-1\}$ iar operaţia de adunare este $(x, y) + (x', y') = (x + x' \bmod n, y + y' \bmod m)$.

4.2. Vom defini o funcţie $e : R \to \mathbb{C}$ in modul următor. Dacă $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ atunci

$$e(k) = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$$

care are proprietatea că $e(0) = 1$ si $e(k + \ell) = e(k)e(\ell)$. Dacă $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ atunci

$$e(k, \ell) = e^{2\pi i \left(\frac{k}{n} + \frac{\ell}{m}\right)}$$

care are proprietatea că $e(0, 0) = 1$ si $e((k, \ell) + (k', \ell')) = e(k, \ell)e(k', \ell')$.

4.3. Este important de observat că funcţia e definită mai sus are proprietatea că

$$\sum_{x \in R} e(xy) = \begin{cases} N, y = 0 \\ 0, y \neq 0 \end{cases}$$

care se poate demonstra pe rând pentru $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Lăsăm cititorului demonstraţia acestui fapt.

4.4. Dacă $f : R \to \mathbb{C}$ este o funcţie oarecare vom defini **transformata Fourier** ca fiind funcţia $\widehat{f} : R \to \mathbb{C}$ definită prin

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{y \in R} f(y) e(-xy) \right)$$

(reamintim că N este numărul de elemente al lui R).

5. Proprietăţi ale transformării Fourier

5.1. Dacă $f : R \to \mathbb{C}$ este o funcţie oarecare iar $\widehat{f} : R \to \mathbb{C}$ este transformarea Fourier putem să considerăm transformarea Fourier a funcţiei $\widehat{f}$. În acest caz

$$\begin{aligned}
\widehat{(\widehat{f})}(x) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{y\in R}\widehat{f}(y)e(-xy)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{y\in R}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{z\in R}f(z)e(-yz)\right)e(-xy)\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{z\in R}f(z)\sum_{y\in R}e(-y(x+z))\right)\\
&= f(-x)
\end{aligned}$$

pentru că $\sum_{y\in R} e(-y(x+z))$ este N dacă $z = -x$ şi 0 în caz contrar, după cum am observat mai sus.

5.2. Deci $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ de unde rezultă că funcţia f se poate deduce din transformarea Fourier $\widehat{f}$ aplicând încă o dată transformarea Fourier. Ţinând cont de această metodă de a trece de la o funcţie f la transformarea Fourier $\widehat{f}$ şi înapoi, putem transforma o întrebare complicată despre f într-una mai simplă despre $\widehat{f}$, după cum reiese din exemplul următor.

5.3. Unul din motivele principale ale utilităţii transformării Fourier este că simplifică calculul produsului de convoluţie. Dacă f si g sunt două funcţii atunci

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$$

deci operaţia de convoluţie $f * g$ devine, după transformarea Fourier, într-o simplă operatie de înmulţire. Am transformat o convoluţie, care este o operaţie complicată, în ceva mult mai simplu.

5.4. Vom demonstra formula de mai sus.

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(x) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{y\in R}(f*g)(y)e(-xy)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{y\in R}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{z\in R}f(z)g(y-z)\right)e(-xy)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{z\in R}f(z)e(-xz)\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{y\in R}g(y-z)e(-x(y-z))\right)\right)\\
&\overset{y'=y-z}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{z\in R}f(z)e(-xz)\right)\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{y'\in R}g(y')e(-xy')\right)\\
&= \widehat{f}(x)\cdot\widehat{g}(x)
\end{aligned}$$

6. O problemă de baraj

6.1. Vom folosi faptul că transformarea Fourier simplifică operaţia de convoluţie pentru a demonstra următoarea problemă, propusă de Ciprian Manolescu, la barajul pentru selecţia echipei României la IMO in 1998.

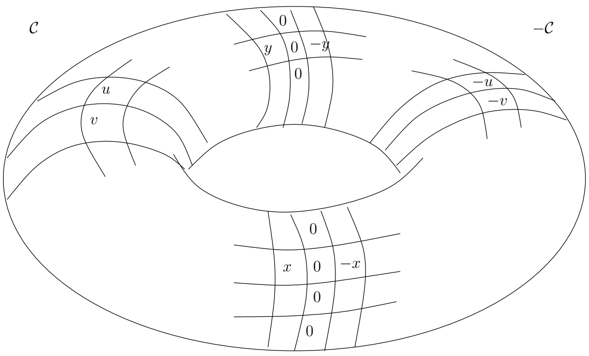
Problemă 2. *Considerăm un tabel cilindric cu m linii şi n coloane. În fiecare căsuţa se scrie un număr complex, nu toate 0, astfel încât fiecare număr este egal cu suma numerelor din căsuţele adiacente. Demonstraţi* *că o astfel de configuraţie este posibilă dacă şi numai dacă există două numere naturale k, ℓ astfel încât*

$$\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Demonstratie:

6.2. Vom reformula această problema ca fiind una în care apare produsul de convoluţie[1]. Având în vedere că tabelul este cilindric cu m linii şi n coloane, putem reprezenta tabelul ca fiind o funcţie $f : \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Problema cu această formulare este că în mulţimea $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ nu avem o operaţie de adunare, pentru că a $(m+1)$-a linie nu este identificată cu prima linie, aşa cum a $(n+1)$-a coloană este identificată cu prima coloană.

6.3. Putem repara această lipsă de simetrie în modul următor. Punem un rând de 0-uri deasupra tabelului şi obţinem tabelul cilindric $\mathcal{C}$. Notăm prin $-\mathcal{C}$ un cilindru identic cu $\mathcal{C}$ dar în care fiecare număr apare cu semn schimbat. Se lipesc capetele cilindrului $\mathcal{C}$ cu cele ale cilindrului $-\mathcal{C}$ şi se obţine un tor astfel încât numărul din fiecare căsuţa este egal cu suma numerelor din căsuţele adiacente.



6.4. Acest tabel sub formă de tor va avea cele n coloane din tabelul iniţial dar va avea $2m+2$ linii. Deci putem reprezenta tabelul ca o funcţie $f : (\mathbb{Z}/(2m+2)\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$. Ipoteza că numărul înscris în orice căsuţa să fie egal cu numerele din căsuţele adiacente se poate scrie ca $f(u, v) = f(u-1, v) + f(u, v-1) + f(u+1, v) + f(u, v+1)$.

6.5. Dacă $g : \mathbb{Z}/(2m+2)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definit prin $g(0, 0) = -1$, $g(0, 1) = g(1, 0) = g(0, -1) = g(-1, 0) = 1$ şi $g(u, v) = 0$ în rest atunci putem rescrie condiţia de mai sus asupra lui f în modul următor. Pentru orice u si v avem

$$(f * g)(u, v) = 0$$

6.6. Am transformat condiţia complicată asupra căsuţelor tabelului într-o condiţie asupra produsului de convoluţie $f*g$. A priori, această reformulare nu oferă nici o informaţie nouă, fiind doar o scriere avantajoasă a aceleaşi condiţii. Însă am observat că produsul de convoluţie devine un simplu produs după transformarea Fourier.

6.7. Deci

$$0 = \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

ceea ce înseamnă că pentru orice u si v avem $\widehat{f}(u, v) \cdot \widehat{g}(u, v) = 0$.

6.8. Dacă $\widehat{f}(u, v) = 0$ pentru orice u si v atunci $\widehat{f} \equiv 0$ deci $f(-x) = \widehat{\widehat{f}}(x) = 0$ ceea ce înseamnă că toate numerele în tabel sunt egale cu 0. Deci putem presupune că există k si ℓ astfel încât $\widehat{f}(k, \ell) \neq 0$ ceea ce implică ca $\widehat{g}(k, \ell) = 0$. Rămane să arătăm că această condiţie este echivalentă cu cea cerută în problemă.

[1]Această soluţie a fost dată de Michael Hamburg care i-a comunicat-o autorului la MOP 2002.

6.9. Avem

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k,\ell) &= \frac{1}{\sqrt{mn}}\left(\sum_{u,v} g(u,v)e(-(ku,\ell v)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{mn}}\left(-e(0,0)+e(k,0)+e(-k,0)+e(0,\ell)+e(0,-\ell)\right)\end{aligned}$$

care este 0 dacă şi numai dacă $e(k,0)+e(-k,0)+e(0,\ell)+e(0,-\ell)=e(0,0)=1$ adica dacă

$$\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right)+\cos\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

7. Transformarea cosinus

7.1. Transformata Fourier a unei funcţii este o funcţie care ia valori complexe, însă des în aplicaţii in lumea reala, cum ar fi aplicaţiile la stocarea pe calculator a imaginilor şi sunetelor, este nevoie de transformări care iau valori funcţii reale. Un astfel de exemplu este transformarea cosinus, pe care o descriem mai jos şi care este utilizată, de exemplu, în fisierele JPEG.

7.2. Fie $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu valori reale, unde n este un număr par. (Această presupunere nu are importantă, în exemple importante acest lucru poate fi presupus.) Ştim că transformata Fourier $\widehat{f}$: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ia valori complexe, însă am dori o funcţie cu valori reale. Pentru aceasta vom construi o funcţie $g : \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definita în modul următor: $g(k)=f(2k)$ pentru $0 \le k \le n/2-1$ şi $g(k)=f(2(n-k)-1)$ pentru $n/2 \le kleqn-1$. Pentru această funcţie vom calcula transformata Fourier $\widehat{g} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ astfel:

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\ell) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} g(k)e(k\ell)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n/2-1} g(k)e(k\ell)+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n/2}^{n-1} g(k)e(k\ell)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n/2-1} f(2k)e(k\ell)+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n/2}^{n-1} f(2(n-k)-1)e(k\ell)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{2|k} f(k)e\left(\frac{k\ell}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{2\nmid k} f(k)e\left(\left(n-\frac{k+1}{2}\right)\ell\right)\\ &= \frac{e^{\frac{\pi\ell i}{2n}}}{\sqrt{n}}\left(\sum_{2|k} f(k)\exp\left(-\frac{\pi\ell i}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)+\sum_{2|k} f(k)\exp\left(\frac{\pi\ell i}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

7.3. Dacă notăm $h(\ell)=\widehat{g}(\ell)e^{-\frac{\pi\ell i}{2n}}$ rezultă că $h(n-\ell)=i\overline{h(\ell)}$ deci

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(h(\ell)) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\cos\left(\frac{\pi\ell}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\\ \operatorname{Im}(h(\ell)) &= \operatorname{Re}(h(n-\ell))\end{aligned}$$

deci pentru a determina funcţia $h(\ell)$ este de ajuns să cunoaştem funcţia

$$\widetilde{f}(\ell)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\cos\left(\frac{\pi\ell}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$$

care este definită $\widetilde{f} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ şi ia valori reale. Această funcţie se numeşte **transformata cosinus**.

7.4. Cunoscând transformata cosinus $\widetilde{f}$ se poate determina funcţia iniţială f in modul următor. Ştim că

$$h(\ell) = \mathrm{Re}\,(h(\ell)) + i\mathrm{Im}\,(h(\ell)) = \widetilde{f}(\ell) + i\widetilde{f}(n-\ell)$$

de unde $\widehat{g}(\ell) = h(\ell)e^{-\frac{\pi \ell i}{2n}}$ iar funcţia g se poate recupera din transformata ei Fourier $\widehat{g}$, de unde putem deduce funcţia originală f. Acest calcul poate fi scurtat folosind următoarea formulă, a carei demonstraţie o lăsăm cititorului.

$$f(k) = \frac{\widetilde{f}(0)}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=1}^{n-1} \widetilde{f}(\ell) \cos\left(\frac{\pi\ell}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Putem interpreta valorile $\widetilde{f}(\ell)$ ca fiind coeficienţii undelor $\cos\left(\frac{\pi\ell}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$, de diverse frecvenţe, a căror combinaţie liniară dă funcţia originală f. Această interpretare este esenţială pentru aplicaţiile transformării cosinus.

Bibliografie

[1] Narasimha, M. şi Peterson, A., *On the Computation of the Discrete Cosine Transform*, IEEE Transactions on Communications, 1978, pp. 934-936

Teorema zilei

Maria Toader

1 Teoremă

Considerăm trei puncte distincte A, B şi C, reprezentate in plan de numerele complexe a,b şi c. Atunci triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

Demonstraţie:

Dacă triunghiul ABC este echilateral atunci $AB = BC = CA$ şi $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB$ de unde rezultă că $|b-a| = |c-b| = |a-c|$ şi $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$. Deducem că numerele complexe $\frac{a-b}{c-b}$ şi $\frac{b-c}{a-c}$ au acelasi modul (egal cu 1) şi acelasi argument, de unde rezultă că ele sunt egale, deci $\frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c}$ de unde rezultă concluzia $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Reciproc, dacă presupunem că $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ atunci $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$. Dacă notăm $a - b = x$, $b - c = y$, $c - a = z$, atunci $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ şi $x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$. Cum $x = -y - z$ ridicănd la pătrat obtinem $x^2 = y^2 + z^2 + 2yz$; dar $y^2 + z^2 = -x^2$ deci $x^2 = -x^2 + 2yz$ de unde $x^2 = yz$ şi $x^3 = xyz$. În mod analog $y^3 = xyz$ şi $z^3 = xyz$ deci $x^3 = y^3 = z^3$ de unde rezulta ca $|x| = |y| = |z|$, în alte cuvinte $|a - b| = |b - c| = |c - a|$ deci triunghiul ABC este echilateral.

2 Aplicaţii:

Problemă 1. *Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte.*

1. *z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă*

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$$

2. *z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă*

$$\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} = 0$$

Demonstraţie. 1. $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$ dacă şi numai dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$.

2. $\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} = 0$ dacă şi numai dacă $(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) + (z_1 - z_2)(z_3 - z_1) + (z_1 - z_2)(z_2 - z_3) = 0$ care este echivalent cu $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$

□

Problemă 2. *Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.*

Demonstraţie. Din $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ rezulta $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$. Cum $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ rezultă că $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0$ deci

$$\frac{z_1\overline{z_1}}{z_1} + \frac{z_2\overline{z_2}}{z_2} + \frac{z_3\overline{z_3}}{z_3} = 0$$
$$\frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2} + \frac{r^2}{z_3} = 0$$

Deci $r^2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 0$; cum $r > 0$ rezultă $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$. Dar $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 0$ deci $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ de unde deducem că triunghiul este echilateral. $\square$

Bibliografie

[1] Andrei,Gh.,Cucurezeanu,I.,Caragea,C.,Bordea,Gh. 1993, *Probleme de algebră pentru concursuri de admitere şi olimpiade şcolare*;

[2] Nicula,V., 1993 *Numere complexe; Probleme şi exerciţii pentru clasa a X-a*;

[3] Dan,V., Astra Matematică,1990 *Conditia ca trei numere complexe să fie afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.*

MATEMATICA ÎN INFORMATICĂ
DE LA IMAGINI BMP LA IMAGINI JPG

ANDREI JORZA

1. Introducere

1.1. Formatul ubicuu de stocare a pozelor pe Internet este cel “.jpg” care a fost creat de J(oint) P(hotographic) E(xperts) G(roup) în anul 1992. În contrast cu formatul simplu “.bmp” care, pentru fiecare pixel al pozei, stochează culoarea şi intensitatea acelui pixel, rezultând în poze de dimensiuni foarte mari, formatul JPG are dimensiuni mici, cu putină pierdere a calităţii vizuale.

1.2. La baza acestui format stă observaţia psihologică că ochiul uman percepe variaţii ale intensităţii luminoase pe suprafeţe întinse (de frecvenţă joasă) mult mai uşor decât variaţii rapide pe suprafeţe mici (de frecvenţă mare). Rezultă că, în principiu, se pot stoca la rezoluţie mare frecvenţele mari şi la rezoluţie mică frecvenţele mici pentru a obţine poze de calitate vizuală mare. Ceea ce permite catalogarea frecvenţelor într-o poză este **transformata cosinus**, care a fost introdusă în articolul *Prolegomene: Convoluţii şi transformări Fourier* din acest număr al revistei.

2. Reprezentarea matematica a unei imagini

2.1. Pentru simplitatea notaţiilor să presupunem că avem de a face cu imagini alb-negru. În acest caz, o imagine poate fi reprezentată matematic sub forma unei matrici $A = (a_{i,j})$ cu m rânduri şi n coloane unde elementul $a_{i,j} \in \{0, 1, \ldots, 255\}$ (în cazul imaginilor de 8 biti, unde $255 = 2^8 - 1$) reprezintă nuanţa culorii gri a pixelului aflat la poziţia (i, j) a imaginii. Pentru o asemenea imagine dimensiunea fişierului ar fi $8mn$ biti, iar scopul oricărui format de imagini este crearea unei noi matrici B, din care să poată reconstrui o aproximare a matricii A, dar care să ocupe un spaţiu mai mic.

2.2. Cum diverse imagini au diverse rezoluţii $m \times n$ este util să se impartă matricea A a imaginii în blocuri 8×8, adică $A = (A_{i,j})$ de dimensiuni $\left(\dfrac{m}{8}\right) \times \left(\dfrac{n}{8}\right)$ unde fiecare matrice $A_{i,j}$ are dimensiunea 8×8. Pentru o astfel de reprezentare, algoritmul JPG acţionează asupra fiecărui bloc $A_{i,j}$ în parte, transformându-l într-un bloc $B_{i,j}$; aceste blocuri împreună dau matricea $B = (B_{i,j})$. În ceea ce urmează, vom presupune de la început că avem o matrice 8×8 care reprezintă un astfel de bloc al imiaginii iniţiale.

Exemplu 1. *De exemplu, imaginea de mai sus îl reprezintă pe matematicianul român Traian Lalescu. Imaginea are* 200 *de rânduri şi* 144 *de coloane de pixeli, care corespund la* 25×16 *de matrici de dimensiune* 8×8*. Alegând blocul* $A_{11,9}$ *(în jurul ochiului din stânga imaginii) obţinem matricea*

$$A_{11,9} = \begin{pmatrix} 71 & 69 & 71 & 71 & 74 & 91 & 101 & 93 \\ 67 & 66 & 71 & 78 & 82 & 86 & 92 & 97 \\ 59 & 53 & 41 & 38 & 39 & 33 & 39 & 59 \\ 34 & 31 & 18 & 15 & 25 & 28 & 37 & 59 \\ 26 & 27 & 23 & 23 & 29 & 32 & 33 & 37 \\ 38 & 22 & 21 & 20 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 32 & 2 & 27 & 56 & 26 & 5 & 19 & 26 \\ 27 & 0 & 58 & 119 & 73 & 18 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

FIGURA 1. Traian Lalescu

3. Transformarea cosinus şi frecvenţele unei imagini

3.1. În introducere am văzut că o metodă de construcţie a unei astfel de matrici B este de a descompune matricea A în undele componente şi de a stoca în special undele de frecvenţa joasă, ochiul uman fiind mai susceptibil faţă de variaţiile acestora.

3.2. Reamintim definiţia transformatei cosinus. Dacă $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ este o funcţie cu valori reale, unde n este un număr par, putem defini funcţia $\widetilde{f} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ din care se poate recupera funcţia originală f şi a cărei valori $\widetilde{f}(\ell)$ pot fi interpretate ca fiind coeficienţii undelor componente ale funcţiei iniţiale f. Pentru o introducere în această transformare cosinus vă invităm să consultaţi articolul [1] din acest număr al revistei. Reamintim definiţia transformatei $\widetilde{f}$ şi a formulei de inversiune

$$\widetilde{f}(\ell) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \cos\left(\frac{\pi\ell}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$f(k) = \frac{\widetilde{f}(0)}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=1}^{n-1} \widetilde{f}(\ell) \cos\left(\frac{\pi\ell}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

3.3. Revenind la modelarea matematică a imaginilor, blocul 8×8, pe care l-am reprezentat sub forma unei matrici $A_{i,j}$, reprezintă o funcţie $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, 255\}$, de acum vom lua $n = 8$. Pentru aplicabilitatea formulelor matematice este util să înlocuim funcţia f cu funcţia $f - 128$ care ia valori în mulţimea $\{-128, \ldots, 0, \ldots, 127\}$, motivul principal fiind necesitatea de a avea valoarea medie a funcţiei egale cu 0.

Exemplu 2. *Funcţia asociată blocului $A_{11,9}$ din Exemplul 1 este reprezentată de matricea*

$$f = \begin{pmatrix} -57 & -59 & -57 & -57 & -54 & -37 & -27 & -35 \\ -61 & -62 & -57 & -50 & -46 & -42 & -36 & -31 \\ -69 & -75 & -87 & -90 & -89 & -95 & -89 & -69 \\ -94 & -97 & -110 & -113 & -103 & -100 & -91 & -69 \\ -102 & -101 & -105 & -105 & -99 & -96 & -95 & -91 \\ -90 & -106 & -107 & -108 & -122 & -128 & -123 & -125 \\ -96 & -126 & -101 & -72 & -102 & -123 & -109 & -102 \\ -101 & -128 & -70 & -9 & -55 & -110 & -111 & -109 \end{pmatrix}$$

unde $f(u, v)$ fiind elementul matricii de pe rândul u şi coloana v.

3.4. Pentru a determina frecvenţele componente ale funcţiei (translatate) $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \{-128, \ldots, 0, \ldots, 127\}$ rămâne să definim şi să determinăm transformata cosinus. Funcţia f are două dimensiuni iar transformata ei o putem defini ca fiind transformata cosinus în fiecare direcţie în parte, în modul următor:

$$\widetilde{f}(u,v) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(k,\ell)\cos\left(\frac{\pi u}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi v}{n}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\right)$$

Observaţie. *În descrierea standardului JPG se foloseşte o altă formulă pentru transformata cosinus, din motive de eficienţă a algoritmului. Matematic, cele două formule sunt echivalente, am inclus-o pe cea de sus pentru continuitatea prezentării. Formula utilizată în standardul JPG este*

$$\widetilde{f}(u,v) = \frac{\alpha(u)\alpha(v)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(k,\ell)\cos\left(\frac{\pi u}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi v}{n}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\right)$$

unde $\alpha(0) = 1$ *iar* $\alpha(u) = \sqrt{2}$ *dacă* $u \neq 0$. *Când u si v sunt nenule, observăm că diferenţa dintre cele două formule este un factor* 2.

Exemplu 3. *Pentru blocul* $A_{11,9}$ *din exemplele precedente funcţia* $\widetilde{f}$ *este reprezentată de matricea*

$$\widetilde{f} = \begin{pmatrix} -679.4 & -11.5 & -5.0 & -16.0 & 35.5 & 19.8 & -0.1 & -0.1 \\ 144.0 & -42.5 & 56.1 & 19.8 & -38.9 & -27.9 & 0.0 & 0.0 \\ 104.9 & -6.8 & -55.5 & -12.4 & 20.0 & 28.6 & 0.0 & -0.2 \\ -14.1 & -0.5 & 22.1 & 14.9 & -25.5 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 17.5 & -21.6 & -18.6 & 0.0 & -0.4 & -0.4 & -0.4 & -0.2 \\ -35.9 & 0.0 & 28.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.0 \\ -24.6 & 32.0 & -0.5 & 0.2 & -0.8 & -0.6 & -0.6 & 0.2 \\ 0.0 & -0.4 & -0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.4 \end{pmatrix}$$

3.5. Una din observaţiile principale legate de transformata cosinus $\widetilde{f}$, deja vizibilă în Exemplul 3, este că valorile absolute ale elementelor matricii sunt cele mai mari în colţul stânga sus şi cele mai mici în colţul dreapta jos. De exemplu

$$\widetilde{f}(0,0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(k,\ell)$$

măsoară nuanţa medie de gri, pe când pe măsură ce u si v cresc, în formula care defineşte $\widetilde{f}(u,v)$ se anulează termenii din sumă din cauza frecvenţelor din ce în ce mai mari.

4. Cuantizarea imaginilor şi controlul calităţii

4.1. Am văzut că valorile transformatei cosinus $\widetilde{f}(u,v)$ reprezintă coeficienţii diverselor frecvenţe în descompunerea imaginii în spaţiul frecvenţelor. Ştiind $\widetilde{f}$ putem să reconstruim imaginea originală, deci pentru a avea o aproximare a imaginii iniţiale ajunge să găsim o aproximare a funcţiei $\widetilde{f}$.

4.2. Metoda JPG pentru aproximare este de a alege o constantă de calitate $Q_{u,v}$ şi de a calcula partea întreagă

$$b_{u,v} = \left\lfloor \frac{\widetilde{f}(u,v)}{Q_{u,v}} \right\rfloor$$

în care caz aproximarea va fi $\widetilde{f}(u,v) \sim b_{u,v}Q_{u,v}$. Dacă am stoca valorile $\widetilde{f}(u,v)$ am putea reconstrui imaginea iniţială, însă am utiliza prea mult spaţiu; calculând însă valorile $b_{u,v}$ vom putea reconstrui o aproximare a imaginii iniţiale, însă utilizând un spaţiu semnificativ mai mic, care depinde de mărimea constantelor de calitate $Q_{u,v}$. Cu cat $Q_{u,v}$ este mai mic, cu atât aproximarea $\widetilde{f}(u,v) \sim b_{u,v}Q_{u,v}$ este mai bună şi calitatea imaginii JPG este mai mare; reciproc, cu cât $Q_{u,v}$ este mai mare, scade calitatea imaginii JPG.

4.3. Acest proces se numeşte *cuantizarea imaginii* pentru că înlocuim valoarea a priori continuă a lui $\widetilde{f}(u,v)$ şi o înlocuim cu una din cuantele $0, Q_{u,v}, 2Q_{u,v}, 3Q_{u,v}\ldots$. Astfel putem să comprimăm imaginea iniţială

$(a_{i,j})$ cu matricile cuantelor $(b_{u,v})$ care, fiind numere întregi de dimensiune mai mică (reprezentând multipli calitaţilor $Q_{u,v}$), ocupă un spaţiu semnificativ mai mic.

4.4. Alegerea constantelor de calitate $Q_{u,v}$ este, după cum am teoretizat la începutul articolului, una bazată pe psihologia percepţiei vizuale. Dacă într-adevăr ochiul uman percepe variaţiile frecvenţelor joase (colţul stânga sus al matricii $\widetilde{f}$) mai repede decât variaţiile frecvenţelor înalte (colţul dreapta jos al matricii $\widetilde{f}$), ar trebui ca frecvenţele joase să fie aproximate folosind $Q_{u,v}$ mic (pentru o calitate mai mare) iar frecvenţele înalte să fie aproximate folosind $Q_{u,v}$ mare (pentru o calitate mai mică). Într-adevăr, un exemplu al matricii $Q = (Q_{u,v})$ bazat pe experimente vizuale este

$$Q = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 & 17 & 18 & 21 & 24 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 17 & 19 & 22 & 25 \\ 16 & 16 & 17 & 18 & 20 & 22 & 25 & 29 \\ 16 & 16 & 18 & 21 & 24 & 27 & 31 & 36 \\ 17 & 17 & 20 & 24 & 30 & 35 & 41 & 47 \\ 18 & 19 & 22 & 27 & 35 & 44 & 54 & 65 \\ 21 & 22 & 25 & 31 & 41 & 54 & 70 & 88 \\ 24 & 25 & 29 & 36 & 47 & 65 & 88 & 115 \end{pmatrix}$$

Exemplu 4. *Cuantizarea funcţiei $\widetilde{f}$ din Exeplul 3 folosind matricea constantelor de calitate Q definită mai sus este dată de matricea $B = (b_{u,v})$*

$$B = \begin{pmatrix} -42 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 4 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricea $(b_{u,v})$ conţine numere întregi mult mai mici şi care variază mai puţin decât matricea f, de aceea se poate reduce semnificativ mărimea imaginilor. Dacă în loc de matricea Q am fi folosit matricea $2Q$, calitatea imaginii reconstruite ar fi scăzut, deoarece am fi folosit aproximări mai puţin bune.

4.5. În mod practic, fişierul JPG conţine o comprimare eficientă a matricii B. Accesând fişierul JPG, sistemul de operare calculează matricea B după care aproximarea $(b_{u,v}Q_{u,v})$ a transformatei cosinus $\widetilde{f}$ de unde calculează o aproximare a funcţiei f, aproximare care pe urmă este afişată pe ecran.

Bibliografie

[1] Andrei Jorza, *Prolegomene: Convoluţii şi transformări Fourier*, Jurnalul Matematic Arădean, 2010 (1).
[2] L.-W. Chang, C.-Y. Wang şi S.-M. Lee, *Designing JPEG quantization tables based on human visual system*, International Conference on Image Processing, 1999 (2) pp. 376-380.

Matematica în fizică
Analiza matematică în probleme de mecanică

Andrei Jorza

1 Introducere

Principiul de bază al mecanicii Newtoniene este că se poate prezice evoluţia unui sistem fizic analizând echilibrul forţelor ce acţionează asupra sistemului, folosind observaţia lui Newton că forţa este proporţională cu acceleraţia unui obiect. Vom vedea această dinamică în cazul a două sisteme fizice studiate clasic: sfoara suspendată şi căderea liberă în aer. În urma analizei forţelor se obţine o **ecuaţie diferenţială**, care se poate rezolva folosind metode elementare de clasa a 11-a.

2 Sfoara suspendată

2.1. Fie A şi B două puncte aflate la aceeaşi înalţime. Problema fizică este de a determina forma unei sfori de lungime l legată la capete de A şi B.

2.2. Analiza forţelor se reduce la următoarele două observaţii:

1. Componenta orizontală a tensiunii din fir, notată T, nu depinde de poziţia pe fir.
2. Componenta verticală a tensiunii din fir trebuie să fie egală cu greutatea sforii.

Dacă $f(x)$ este poziţia sforii la distanţa x de origine, iar T_x reprezintă tensiunea din fir la punctul x atunci

$$\begin{aligned} mg &= T_x \sin\alpha \\ T &= T_x \cos\alpha \end{aligned}$$

unde m este masa porţiunii de sfoară între 0 şi x.

Daca densitatea sforii este k iar $S(x)$ reprezintă lungimea sforii între 0 şi x atunci $m = k \cdot S(x)$ de unde obţinem ecuaţia funcţională.

$$\frac{kgS(x)}{T} = \tan(\alpha) = f'(x) \tag{1}$$

2.3. Pentru a obţine o ecuaţie diferenţială din ecuaţia (1) trebuie să gasim o relaţie între $S(x)$ şi $f(x)$. Dar din fig 3 şi Teorema lui Pitagora reiese că $S'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ deci

$$f''(x) = \frac{kgS'(x)}{T} = \frac{kg}{T}\sqrt{1 + (f'(x))^2} \tag{2}$$

Vom rezolva această ecuaţie diferenţială mai târziu.

3 Cădere liberă în aer

3.1. O particulă de masa m cade liber in aer. În absenţa oricaror forţe de frecare, ecuaţia mişcării ar fi dată de acceleraţia constantă g. În prezenţa forţei de frecare, legea lui Newton va da o ecuaţie diferenţială mai complexă.

3.2. Forţa de frecare cu aerul poate fi modelată prin ecuaţia $F_f = \alpha \cdot v$ unde α este o constantă care depinde de aer şi de particulă iar v este viteza particulei. Deci legea lui Newton dă $mg - \alpha \cdot v = ma$ unde a este acceleraţia particulei.

3.3. Daca $h(x)$ este înalţimea particulei la timpul t atunci $v = h'(t)$ şi $a = h''(t)$ deci obţinem ecuaţia diferenţiala

$$mh''(x) = mg - \alpha \cdot h'(x) \tag{3}$$

4 Rezolvarea unor ecuatii diferentiale

4.1. Cea mai eficientă metodă de a rezolva o ecuaţie diferenţială se reduce la observaţia că dacă $f'(x) = g(x)$ atunci orice altă funcţie $h(x)$ cu proprietatea că $h'(x) = g(x)$ va fi egală cu $f(x)+C$ unde C este o constantă. Pentru mai multe informaţii, vă invităm să vedeţi secţiunea 2 din [1].

4.2. De exemplu, ecuaţia diferenţială

$$af(x) + f'(x) = b$$

poate fi rezolvată cu ajutorul observaţiei că

$$(e^{ax} f(x))' = e^{ax}(af(x) + f'(x))$$

deci $(e^{ax} f(x))' = be^{ax}$. Cum $\left(\frac{b}{a}e^{ax}\right)' = be^{ax}$ rezultă că $e^{ax} f(x) = \frac{b}{a}e^{ax} + C$ unde C este o constantă. Deci $f(x) = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$.

4.3. Aplicând această metodă la ecuaţia (3)

$$\frac{\alpha}{m}h'(x) + h''(x) = g$$

obţinem

$$h'(x) = \frac{gm}{\alpha} + Ce^{-\alpha x/m}$$

Constanta C poate fi determinată pentru că $h'(0) = v(0) = 0$ deci $C = -\frac{gm}{\alpha}$ de unde

$$v(x) = \frac{gm}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x/m})$$

Concluzia este ca în prezenţa forţei de frecare, viteza va tinde spre $\frac{gm}{\alpha}$, un fenomen radical diferit de cazul clasic, unde viteza creşte liniar cu timpul.

4.4. Într-un mod similar putem rezolva şi ecuaţia (2). Rescriem $f''(x) = \frac{hg}{T}\sqrt{1 + (f'(x))^2}$, şi obţinem

$$\frac{f''}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = \frac{kg}{T}$$

Dar daca $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ atunci $(\operatorname{arcsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ deci

$$(\operatorname{arcsinh} f'(x))' = \frac{f''}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = \frac{kg}{T} = \left(\frac{kgx}{T}\right)'$$

Deducem ca

$$\operatorname{arcsinh} f'(x) = \frac{kgx}{T} + C$$

Cum $f'(0) = 0$ (pentru că la origine tangenta la sfoară este orizontală) rezultă că $C = 0$ deci $f'(x) = \sinh\left(\dfrac{kgx}{T}\right)$.

Notând $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ obţinem $\left(\dfrac{T}{kg} \cdot \cosh\left(\dfrac{kgx}{T}\right)\right)' = \sinh\left(\dfrac{kg}{T}x\right)$ deci

$$f(x) = \frac{T}{kg}\cosh\left(\frac{kgx}{T}\right) + C'$$

4.5. Deducem că forma sforii legate la capete este descrisă de graficul funcţiei

$$\cos h\left(\frac{kgx}{T}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{hgx/T} + e^{-hgx/T}\right)$$

Din nefericire determinarea precisă a tensiuni T şi constantei C' în functie de lungimea sforii şi a distanţei dintre punctele A şi B este mult mai grea şi necesită cunoştinţe avansate de analiză matematică.

Bibliografie

[1] Octavia Potocean, *Ecuaţii Funcţionale cu Primitive*, Jurnalul Matematic Arădean 2009 (1).

Despre numerele mari

Doba Francisc

Scrierea poziţională a numerelor a revoluţionat aritmetica, şi calculul practic. Cercetările au arătat că trei civilizaţii au ajuns la scrierea numerelor sub această formă:

- babilonienii aproximativ la 2000 înaintea erei noastre
- civilizaţia Maya din peninsula Yucatan, la începutul erei noastre
- civilizaţia hindusă în secolele VII-VIII

Această ultimă variantă a ajuns în Europa prin mijlocire arabă, şi în timp a ajuns la forma utilizată astăzi. Transformările au fost lungi şi lente. În India existau mai multe sisteme de simboluri pentru cifre. Arabii au preluat aritmetica indiană, pe lânga cuceririle ştiiţifice ale popoarelor cu care au ajuns în contact. Aceste rezultate au ajuns prin intermediul lor şi în Europa (de exemplu Elementele lui Euclid). În Europa de vest scrierea numerelor a ajuns la forma de astăzi, în est cu 2-300 de ani mai târziu. Apariţia tiparului a unificat simbolurile pentru cifre. În Europa medievală scrierea numerelor şi calculul aritmetic era partea esenţială a aritmeticii. În forma scrisă, pentru a uşura citirea numerelor, cifrele erau grupate câte trei (triada).

Denumirile numerelor şi scrierea lor nu s-au dezvoltat concomitent. În viaţa curentă nu se utilizau numere mai mari de 1000, ca atare nu au apărut denumiri pentru numere mai mari.

În secolul XIV a apărut în Italia denumirea de milion (atribuită lui Marco Polo, "millione" semnificând mii de mii de oameni). În aritmetica lui Luca Pacioli, tipărită în 1494 este definit milionul în accepţiunea de astăzi. Termenul s-a raspândit încet şi în restul Europei.

Tot din Italia a apărut cuvântul "billion" , provenind de la " bis-million" adica un milion de milioane, cu semnificaţia 10^{12}. Denumirea nu e universal acceptată: în SUA semnifică 10^9, iar în Franţa tot pentru 10^9 se foloseşte termenul de bilion şi de miliard (provenit din cuvântul mille). În realitate numerele mai mari nu se utilizează practic, de aceea denumirile lor nu fac obiectul unor convenţii universale. Utilizarea lor e mai mult şocantă, decat utilă: de pildă distanţa de la Terra la nebuloasa Andromeda este 14 000 000 000 000 000 000 km. Evident e mai comod $14 \cdot 10^{18}$ km, şi mai ales kilometrul nu e unitate de masura uzuală în astronomie, iar evaluarea e aproximativă şi folosim de prea multe ori cifra 0 .

Exista două curente în privinta acestor denumiri:

A - Germania, Anglia ($\leq$ 1974), Polonia			B-Franţa, SUA, Rusia, Anglia ($>$ 1974)		
Număr de cifre	Denumire	Exprimare ca putere	Număr de cifre	Denumire	Exprimare ca putere
10	Milliard	10^9	10	Milliard	10^9
13	Billion	10^{12}		Billion	
19	Trillion	10^{18}	13	Trillion	10^{12}
25	Cvadrillion	10^{24}	16	Cvadrillion	10^{15}
31	Cvintillion	10^{30}	19	Cvintillion	10^{18}
37	Sextillion	10^{36}	22	Sextillion	10^{21}
43	Septillion	10^{42}	25	Septillion	10^{24}
49	Oktilion	10^{48}	28	Oktilion	10^{27}

Bibliografie

[1] *"Mica enciclopedie matematică"* , Editura tehnică Bucureşti 1980

[2] *"Istoria matematicii"*, Nicolae Mihăileanu

[3] *"Gazeta matematică"*

Banda lui Möbius

Liliana Negrilă

1 Introducere

Banda lui Möbius i-a fascinat atât pe matematicieni cât şi pe nespecialisti încă din secolul al XIX-lea, când a fost descoperită si prezentată de autorul ei ca un subiect de interes pur matematic.

Cum obtinem această banda? Foarte usor: tăiem o bandă de hârtie, îi răsucim doar un capăt şi apoi lipim capetele. O analizăm cu mare atenţie. Ajungem la concluzia că are o singură faţă şi o singură muchie! Un corp bidimensional, într-un spaţiu tridimensional!

Tăiem banda lui Möbius pe jumătate şi cu stupoare constatăm că obţinem o singură bandă, nu două, cum ne-am fi aşteptat. Totul pare ireal! Toată logica e parcă fără sens! şi totuşi e adevărat. O mai tăiem pe jumătate şi cu stupoare constatăm că obţinem două benzi, nu una, cum ne-am fi aşteptat. Totul pare ireal! Toată logica e parcă fără sens! şi totuşi e adevărat.

Tăiem banda lui Möbius la o treime de margine (respectiv două treimi de cealaltă margine) şi cu stupoare constatăm că obţinem două benzi, nu una, cum ne-am fi aşteptat. Totul pare ireal! Toată logica e parcă fără sens! şi totuşi e adevărat.

Concluzia e clară: banda aceasta este *magică*!

2 O scurtă istorie

Descoperirea pe care acum o numim banda lui Möbius a fost făcută publică în 1865 de August Ferdinand Möbius (1790-1868) printr-un articol intitulat "Despre determinarea volumului unui poliedru". Aşa cum se întâmplă în cazul multor mari realizări matematice şi ştiinţifice, Möbius a descoperit banda care-i poartă numele simultan cu un alt savant contemporan, matematicianul german Johann Benedict Listing (1808-1882). Lucrând independent, Listing s-a "ciocnit" de suprafaţa cu pricina în iulie 1858, publicându-şi descoperirile în 1861. Oricum, se pare că Möbius a urmărit firul ideii mai departe decât Listing, analizând mai îndeaproape conceptul de orientabilitate în raport cu suprafeţele de tip Möbius. De asemenea, Möbius a luat în considerare numeroase suprafeţe cu o singură faţă care, după cum spunea, aveau "extraordinara" proprietate de a da naştere unor obiecte cu volum egal cu zero.

De când a fost creeată, banda lui Möbius a pus probleme mari matematicienilor care vroiau să explice proprietăţile ei mecanice. Cea mai mare problemă a fost găsirea unei formule analitice care să definească structura şi tensiunea mecanică în banda lui Möbius, odată ce aceasta este torsionată. Acest lucru a fost însă realizat de un grup de doi cercetători de la University College din Londra, Gert van der Heijden şi Eugene Starostin. "Ceea de determină forma benzii lui Möbius este energia mecanică înmagazinată în procesul de torsiune", spun ei. Locurile în care banda este torsionată mult au cea mai mare cantitate de energie mecanică înmagazinată. în schimb locurile din bandă care sunt mai plane şi mai puţin torsionate înmagazinează mai putină energie. Dacă lărgimea benzii se modifică, se modifică şi distribuţia de energie din bandă, ceea ce face ca banda lui Möbius să ia o altă formă. Toate aceste procese sunt desigur descrise de ecuaţia recent găsită de cei doi autori.

3 Banda lui Möbius în lumea reală

3.1 Solenoidul

Banda lui Möbius constituie o trambulină pentru alte aventuri matematice. Una dintre acestea este *solenoidul*, o forma ciudată, încolăcită ca un covrig.

Pentru realizarea unui solenoid se porneşte de la un tor solid, care va suferi o transformare neobisnuită. Această transformare comprimă torul la o jumătate din diametrul iniţial, îi dublează lungimea şi îl încolăceşte de două ori în interiorul său. Cele două spire rezultate din această dublă încolăcire stau una lângă alta, nu una peste alta, adică exact aşa cum ar sta încolăcit un furtun. Torul e semirăsucit când face o buclă, iar după două bucle se uneşte cu sine.

Aceste bizare corpuri pot fi răsucite continuu. Exact ca la o masină automată de fabricat acadele, dar fără buton de oprire, operaţiunea de întindere, întoarcere şi răsucire poate fi repetată la nesfârşit.

Acest fenoment se produce şi în natură: molecula de ADN are structura unui solenoid. Este un altfel de cerc care pare că se închide încontinuu în el însuşi. El poate fi considerat a fi un simbol al întoarcerii spre sine.

3.2 Jocuri

Banda lui Möbius apare în foarte multe brevete. O întâlnim în artă (gravuri, sculpturi), în arhitectură, în jocurile pe calculator, în jocurile LEGO, în puzzle-uri şi labirinturi. Gândiţi-vă la trenuleţele montagne-russe de mare viteză!

Trenuleţul chinezesc Möbius poate împodobi pomul de Crăciun, făcând slalomuri în jurul ramurilor şi printre jucăriile lui. El călătoreşte pe o linie în formă de bandă Möbius susţinută de suporţi aşezaţi pe podea. Sunt folosite două şine paralele, pentru ca trenul să intre în contact cu suprafeţele "superioară" şi "interioară". Pentru reglarea intensităţii curentului din şine şi a puterii se foloseşte un reostat, iar roţile sunt din magneţi permanenţi care sunt atraşi de sine.

3.3 Sticla lui Klein

Două benzi Möbius pot fi ataşate de-a lungul marginilor lor comune, pentru a forma o suprafaţă neorientabilă numită sticla lui Klein, după descoperitorul său, Felix Klein. Acestă sticlă e o suprafaţă cu o singură faţă, fără margini. Spre deosebire de o sticlă obişnuită, "gâtul" ei este întors, trece prin suprafata sticlei şi se îmbină cu corpul acesteia venind din interior.

3.4 Biologie

Vorbim despre "boala lui Möbius" atunci când diferite organe apar inversate. Persoanele suferind de această boală apar ca nişte imagini în oglindă atunci când sunt supuse unor examene radiografice.

Sindromul Möbius este o afecţiune genetică rară, caracterizată de o paralizie a cărei cauză este absenţa sau subdezvoltarea a doi nervi cranieni ce controlează mişcările ochilor şi expresia facială. Persoanele afectate de acest sindrom nu pot zâmbi sau înghiti, ori nu pot clipi şi mişca ochii dintr-o parte în alta.

3.5 Fizică

Unii cosmologi consideră că universul nostru e suprafaţă unei imense sfere, a unei hipersfere. Se mai vorbeşte despre existenţa unor universuri multiple şi a unor găuri negre. De altfel, la Science Museum din Londra un etaj întreg este dedicat benzilor Möbius.

3.6 Chimie

în 1982, David Walba, Rodney Richards şi R. Curtis Haltiwanger de la University of Colorado, din Boulder, au descoperit un mijloc eficient de sintetizare pentru prima moleculă de tip Möbius obţinută vreodată pe cale artificială.

3.7 Muzică

Johann Sebastian Bach a compus muzică inspirată de conceptul Möbius: "Canonul crabului". Piesa îi cere interpertului să cânte bucata de la început până la sfârşit, apoi să răstoarne partitura şi să cânte din nou. "Şi în viaţă se întâmplă uneori ca exteriorul să se transforme în interior, iar interiorul în exterior". Banda lui Möbius devine astfel simbolul înţelepciunii, al maturizării treptate şi al capacităţii de a împăca obligaţiile contradictorii.

Există teoria suprafeţelor Möbius: o răsucire în structura spaţiului, unde timpul devine o buclă închisă din care nu poţi să ieşi.

3.8 Artă

În literatură şi mitologie se fac aluzii la Möbius atunci când un erou se întoarce în timp sau spaţiu cu puncte de vedere modificate, deoarece banda lui Möbius are interesanta proprietate de a inversa obiectele care îi parcurg suprafaţa.
O glumă drăguţă:

Furnica vorbi neamului furnicesc:
ăsta-i periplul cel mai prostesc:
M-am rotit şi m-am rotit,
Dar tot ce-am descoperit
E că...alta faţă nu găsesc!

Cameron Brown (limerick-uri Möbius)

Magicienii profesionişti utilizează magia benzii lui Möbius pentru a întări credinţa în Dumnezeu şi pentru a-i atrage pe cei mici către Iisus. Se folosesc de "trucul benzilor afgane". Acest truc se foloseşte, de asemenea, la predarea unor lecţii despre prietenie şi dragoste.

Astăzi banda lui Möbius s-a transformat într-un element decorativ comun al bijuteriilor şi eşarfelor. Există coafuri în stil Möbius, bere Möbius care "vă menţine în formă toată noaptea" şi chiar "flip Möbius", o figură din probele de schi acrobatic, care presupune un salt combinat cu o răsucire în aer.

Banda lui Möbius este peste tot. Ea a devenit un simbol al transformării, miracolului, răsturnărilor de situaţie şi refacerii. Este o imagine a nemuririi. Mai mult, în zilele noastre, banda lui Möbius este simbolul omniprezent al reciclării, reprezentând în acest caz procesul de transformare al reziduurilor materiale în resurse utile.

Banda lui Möbius este simbolul suprem pentru acele lucruri simple, dar cu semnificaţii profunde. Banda lui Möbius reprezintă magia şi misterul, este o imagine care ne stimulează mereu să visăm ceva nou şi să căutăm adâncimi chiar şi acolo unde totul pare să fie la suprafaţă.

Bibliografie

[1] Clifford A. Pickover, *Banda lui Möbius*, Ed. Humanitas, Bucuresti, 2006.

Probleme propuse [2]

Elevii sunt invitaţi să trimită soluţii ale problemelor propuse (minim 4 probleme) prin email la jurnalulmatematic@gmail.com (cu subiectul mesajului "probleme rezolvate") sau prin poştă la adresa: Colegiul Naţional "Moise Nicoară" , Piaţa Moise Nicoară Nr. 1, Arad (cu menţiunea JURNALUL MATEMATIC ARĂDEAN–Probleme Rezolvate). Se acceptă soluţii şi la problemele clasei precedente celei urmate precum şi celor superioare acesteia. Vă rugăm să treceţi la expeditor numele, localitatea, şcoala, clasa şi profesorul de la clasă.

Pentru acest număr soluţiile se pot trimite până la data de 9 septembrie 2009 (data poştei).

Clasa a 5a

6. Fie $A = (1 + 2008)(1 + 2008^2)(1 + 2008^3)\cdots(1 + 2008^{2009})$
   (a) Să se calculeze ultima cifră a lui A.
   (b) Să se demonstreze că $1435 \mid A$

Aurel Sasu, Ineu

7. Fie produsul a trei cuburi perfecte $P = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3$
   (a) Să se scrie P ca sumă de trei cuburi perfecte.
   (b) Să se scrie P ca sumă de trei pătrate perfecte.

Vasile Peita, Curtici

8. Să se determine restul impărţirii numărului $N = 2^{2010}$ la 11.

Ramona Tudoran

9. Un crescător de struţi lasă moştenire celor şase copii ai săi 291 struţi, în următoarele condiţii: primul copil primeşte o treime, al doilea copil o şesime, al treilea copil o optime, al patrulea copil o noime, al cincilea copil a 24 parte, iar al şaselea copil 11 struţi. Cât au primit primii cinci copii?

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

10. Fie a si b doua numere pozitive. Arătaţi că

$$\frac{a + 2^{6025}}{a + 3^{4017}} < \frac{b + 4^{7847}}{b + 5^{5885}}$$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

11. Să se arate că oricare ar fi numărul natural nenul n, unul din numerele: $7^n - 2, 7^n - 1, 7^n + 1, 7^n + 2$ este divizibil cu 5.

Gheorghe Iov

Clasa a 6a

5. (a) Scrieţi numărul 2009 ca sumă de două pătrate perfecte nenule distincte.
   (b) Scrieţi 2009^2 ca sumă de două pătrate perfecte nenule distincte.
   (c) Arătaţi că 2009^n poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte nenule distincte oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vasile Peita, Curtici

6. Să se determine numerele naturale a,b şi c, ştiind că $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ şi că $a^2 + b^2 + c = 13440$.

Aurel Sasu, Ineu

7. Să se determine restul împărţirii numărului $N = \overline{abbaa}$ la 11.

Simona Tudoran

8. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia
$$x \cdot y^2 - 7y^2 = 360$$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

9. Să se determine perechile de numere naturale prime ştiind că diferenţa pătratelor acestor numere este un număr natural prim.

Gheorghe Iov

10. Fie mulţimea $A = \left\{ 7, 77, 777, 7777, \ldots, \overbrace{77\ldots7}^{2010 \text{ cifre}} \right\}$. Determinaţi cardinalul mulţimii $B = \{x \in A : 2009 \mid x\}$.

Anico Mureşan şi Rareş Mihăilescu

Clasa a 7a

8. Să se determine $x, y \in \mathbb{N}^*$ care să verifice egalitatea
$$\left\lfloor \sqrt{x+y+2} \right\rfloor = \frac{x+y-6}{2}$$
unde $\lfloor x \rfloor$ este partea întreagă a numărului real x.

Alfred Eckstein şi Viorel Tudoran

9. Pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$ fie $E(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 153}$.
   (a) Să se determine toate numerele întregi x pentru care $E(x) \in \mathbb{N}$.
   (b) Să se arate că există o infinitate de numere raţionale astfel încât $E(x) \in \mathbb{Q}$.

Aurel Sasu, Ineu

10. Fie ABC un triunghi cu $BC = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC}$. Să se arate că dacă O este un punct în interiorul triunghiului atunci
$$OA + OB + OC < BC + \max(AB, AC)$$

Aurel Sasu, Ineu

11. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC ştiind că

$$\sqrt{a^2 - 4016a + 4032064} + |b - 1004\sqrt{3}| = -c^2 + 2008c - 1008016$$

unde a,b şi c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC.

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

12. Pe o dreaptă se dau două puncte A şi B. Fie M mijlocul segmentului AB, iar N un punct exterior dreptei AB. Să se construiască folosind numai rigla negradată o paralela la dreapta AB prin punctul N.

Gheorghe Iov

13. Să se determine numerele reale pozitive x, y, z care satisfac relaţia

$$\left\lfloor \frac{x^2 + 4y^2 + 9z^2}{2xy + 3xz + 6yz} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \right\rfloor = 2$$

unde $\lfloor a \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

Gheorghe Iov

Clasa a 8a

7. Fie ABC un triunghi dreptunghic şi fie AA' inălţimea din punctul A. Se îndoaie planul triunghiului ABC după dreapta AA' până când $(AA'B) \perp (AA'C)$. Să se afle volumul piramidei $ABCA'$ în funcţie de $AA' = a$.

Octavia Potocean

8. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $a + b + c = 1$ demonstraţi că

$$\frac{a+b}{c+ab} + \frac{b+c}{a+bc} + \frac{c+a}{b+ca} \geq 4,5$$

Vasile Peita, Curtici

9. Fie $a \in \mathbb{Q}^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ si $A = \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = a\right\}$.

   (a) Să se arate că $\frac{x^4}{x^8 + x^4 + 1} \in \mathbb{Q}^*$ pentru orice $x \in A$.

   (b) Să se studieze dacă există valori ale lui $a \in \mathbb{Q}^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, pentru care $\frac{x^3}{x^6 + x^3 + 1} \in \mathbb{Q}^*$.

Aurel Sasu, Ineu

10. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că $\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)+1} = n^2 + 2n + 66$.

Rareş Mihăilescu

11. Arătaţi că nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) + f(1961 - x) = -3x$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

12. Fie $a = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2011$ si $b = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(\frac{1}{1005} + \frac{1}{1006}\right)$. Demonstraţi că $\frac{a \cdot b}{2^{2012}} > \frac{1}{4}$.

Anico Mureşan şi Rareş Mihăilescu

Clasa a 9a

9. Să se determine o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termeni numere întregi, în care numai primii şase termeni sunt numere naturale, pentru care are loc relaţia $a_3 \cdot a_7 \cdot a_{29} = a_4 \cdot a_9 \cdot a_{15}$.

Aurel Sasu, Ineu

10. Fie a şi b două numere reale pozitive. Fie x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3 - x^2 + ax - b = 0$. Demonstraţi că
$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(1 + \frac{1}{x_3}\right) \geq 64$$

Alfred Eckstein şi Viorel Tudoran

11. Arătaţi că
$$\mathrm{cosec}6^\circ \cdot \sec 12^\circ \cdot \mathrm{cosec}42^\circ \cdot \sec 24^\circ = 16$$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

12. Arătaţi că
$$\mathrm{cotan}1^\circ \cdot \mathrm{cotan}2^\circ \cdots \mathrm{cotan}88^\circ \cdot \mathrm{cotan}89^\circ = 1$$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

13. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{Z}^*$ care satisfac
$$x\lfloor nx\rfloor + n\{x\} - nx\lfloor x\rfloor = \frac{\{x\}\lfloor nx\rfloor}{\lfloor x\rfloor}$$

Octavia Potocean

14. Fie şirul $(F_n)_{n\geq 0}$ şirul lui Fibonacci definit prin $F_0 = F_1 = 1$ şi $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Să se arate ca daca $n \geq 2$ atunci
$$\sqrt[n]{F_{n+2}} + \sqrt[n]{F_{n-1}} \leq 2\sqrt[n]{F_{n+1}}$$

Mihaela Vizental

Clasa a 10a

6. Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Să se arate că
$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)\cdots(1+\varepsilon^{2009}) = 2^{401}$$

Aurel Sasu, Ineu

7. Fie $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x_k}{2}\right)}(\sin x_k) + \log_{\sqrt{2}\cos\left(\frac{x_k}{2}\right)}(\sin x_k)\right] > 4n$$

Aurel Sasu, Ineu

8. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ ştiind că

$$2008^x + 2009^x = 4017^x$$

Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica, Arad

9. Fie ABC un triungi şi AM, BN, CP trei ceviene concurente astfel încât $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NA}$. Demonstraţi că există o constantă $\alpha > 0$ astfel încât dacă triunghiul MNP este echilateral, atunci $AC \leq \alpha AB$.

Andrei Jorza

Clasa a 11a

6. Să se calculeze limita şirului cu termenul general:

$$a_n = \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n^{2n}}{k}\right)^{1/n}$$

Octavia Potocean

7. Se consideră şirul (a_n) de numere reale care satisface recurenţa $a_{n+2} - \lfloor a_{n+1} \rfloor = \{a_n\}$. Să se determine a_n şi limita şirului

$$b_n = \{a_n\} + \lfloor 2a_n \rfloor - \left\lfloor a_n + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Octavia Potocean

8. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1}^2 - x_{n-1} = nx_n$ pentru $n \geq 2$. Să se calculeze limita şirului

$$y_n = \frac{n[x_n]}{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}$$

Octavia Potocean

9. Demonstraţi că

$$\begin{vmatrix} 1 & \log 2 & \log 3 & \log 5 \\ \log 2 & 1 & \log 5 & \log 3 \\ \log 3 & \log 5 & 1 & \log 2 \\ \log 5 & \log 3 & \log 2 & 1 \end{vmatrix} < 1$$

Aurel Sasu, Ineu

10. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue în $x_0 = -1$ astfel încât

$$1 + f(3x + 2) = f(x) + x^2$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Aurel Sasu, Ineu

11. Dacă matricile $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ satisfac $A+B = AB$, demonstraţi că $\det(5A^2+5B^2+6AB-4A-4B) \geq 0$.

Aurel Sasu, Ineu

Clasa a 12a

5. Să se arate că pentru $n > 1$ are loc inegalitatea

$$\sqrt[n]{2} \leq \frac{4n^2 + 3n + 1}{4n^2}$$

Alfred Eckstein şi Viorel Tudoran

6. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ. Să se arate, că dacă există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât pentru orice $x, y \in G$

   (a) $(xy)^{18a+27b+31} = (yx)^{18a+27b+31}$ şi

   (b) $(xy)^{4a+6b+7} = (yx)^{4a+6b+7}$,

   atunci $(G, \cdot)$ este un grup abelian.

Aurel Sasu, Ineu

7. Fie p un număr prim şi $n \geq 2$ un număr natural. Fie G mulţimea (finită) matricilor $n \times n$ inversabile modulo p şi $B \subset G$ mulţimea matricilor având elementele sub diagonală egale cu 0. Demonstraţi că B este un subgrup al grupului G faţă de operaţia de înmulţire. Determinaţi numărul de elemente al multţimii G/B şi determinaţi reprezentanţi în G pentru clasele din G/B.

Andrei Jorza

8. Demonstraţi că există o constantă $\alpha > 0$ astfel încât pentru orice funcţie continuă $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ să avem

$$\int_0^1 f(\log x)dx \leq \alpha \int_0^1 f\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

Andrei Jorza

9. Pentru un număr real pozitiv r determinaţi

$$\int \frac{x^{5r-1}}{x^{8r} + 1} dx$$

Ramona Tudoran

Probleme de aritmetica si teoria numerelor - Laurentiu Panaitopol, Alexandru Gica, Editura Gil - 2006

Octavia Potocean

Cu un citat superb ”Problemele sunt inima matematicii” (Paul Halmos), această carte se adresează tuturor celor pasionaţi de teoria numerelor, elevi, profesori, studenţi.

Se ştie că teoria numerelor este una din cele patru ramuri ale matematicii uzate de problemele de la OIM. De asemenea ca profesoară cu mai multă experienţă am observat că este bine să-i familiarizăm pe elevii dotati la matematică cu acest tip de probleme, începând din clasele mici.

Fiecare capitiol începe cu câteva rezultate teoretice care vor fi necesare în abordarea problemelor din carte.

Cartea oferă idei şi metode ingenioase de rezolvare a problemelor.

Sunt întru totul de acord că autorii când au spus ”Problemele sunt mediul natural în care se miscă un matematician. Aici este bucuria cea mai pură a unuia din branşă. Incărcând să rezolvi probleme clasice, retrăieşti istoria matematicii. Gândindu-te la problemele nerezolvate încă, ai vrea să contribui şi tu, după puterile tale, la edificiul matematicii.”