Funcţii uniform continue

Ovidiu Bodrogean

Fie $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe E. Atunci pentru orice $x \in E$ si orice $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x' \in E$ cu $|x' - x| < \delta$ avem $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Dacă alegem un alt punct $x'' \in E$, pentru acelasi $\varepsilon > 0$ găsim un alt $\delta(\varepsilon, x'') > 0$, diferit, în general, de $\delta(\varepsilon, x)$. În acest caz, dacă $\delta(\varepsilon, x'') < \delta(\varepsilon, x)$ am putea spune că funcţia f este "mai continuă" în punctul x'' decât în punctul x'. Dacă este posibil ca pentru fiecare $\varepsilon > 0$ să găsim un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ unic, acelaşi pentru toate punctele $x \in E$, adică δ să depindă doar de ε nu şi de x, am putea spune că funcţia f este "la fel de continuă" în toate punctele din E. Astfel putem introduce următoarea noţiune:

Definiţie 1. *O funcţie $f : E \to \mathbb{R}$ se numeşte uniform continuă pe mulţimea E dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încăt oricare ar fi $x', x'' \in E$ cu $|x' - x''| < \delta$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Interpretare geometrică: Dacă funcţia $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţie uniform continuă pe E atunci dacă alegem orice interval pe axa Ox de lungime mai mică decât δ, imaginea sa $f(I)$ are lungimea mai mică decât ε, oriunde s-ar afla I ân mulţimea E.

Observaţie 1. *Funcţia $f : E \to \mathbb{R}$ nu este uniform continuă dacă si numai dacă există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n, y_n \in E$ astfel încât $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ si $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.*

Exemplu 1. *Funcţia $f : [1, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ este uniform continuă pe intervalul $[1, 3]$.*

Într-adevăr trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel incăt pentru orice $x', x'' \in [1, 3]$ cu $|x' - x''| < \delta$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Cum $x', x'' \in [1, 3]$ avem $|x' + x''| \leq 6$ şi cum

$$|f(x') - f(x'')| = \left|(x')^2 - (x'')^2\right| = |x' - x''| \cdot |x' + x''| < 6\delta$$

Atunci trebuie să avem $6\delta \leq \varepsilon$, deci luăm $\delta = \varepsilon/6$, independent de x' şi x''.

Exemplu 2. *Funcţia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ nu este uniform continuă pe intervalul $(0, 1]$.*

Într-adevăr, alegem $x'_n = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$ si $x''_n = \dfrac{2}{(2n+3)\pi}$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\sin\frac{1}{x'_n} - \sin\frac{1}{x''_n} = 2.$$

Având în vedere că $|x'_n - x''_n| < \dfrac{1}{n}$ dar $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 2$ rezultă din Observaţia 1 că funcţia f nu este uniform continuă.

Exemplu 3. *Funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ este o funcţie uniform continuă.*

Într-adevăr, fie $x_1 = x \geq 0$ si $x_2 = x + h$ cu $h > 0$ ales arbitrar. Atunci avem:

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= |f(x_1) - f(x_2)| \\ &= \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \\ &= \frac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} \\ &< \frac{h}{\sqrt{h}} = \sqrt{h} \end{aligned}$$

Dacă luăm $\varepsilon > 0$ şi $\delta = \varepsilon^2 > 0$ atunci pentru orice $0 < h < \delta$ avem $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, deci f este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

Proprietate 1. *Orice funcţie uniform continuă este continuă.*

Demonstraţie. Daca $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţie uniform continuă pe E atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' \in E$ cu $|x' - x''| < \delta$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ Fie $\eta < \delta$. Atunci oricare ar fi $x \in E$ astfel încât $|x - x''| < \eta < \delta$ avem $|f(x) - f(x'')| < \varepsilon$ deci f este continuă ân $x'' \in E$ ales arbitrar, prin urmare f este continuă pe E. □

Proprietate 2. *Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : E \to \mathbb{R}$. Atunci f este uniform continuă dacă si numai dacă pentru orice $x_n, y_n \in E$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$ avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$.*

Demonstraţie. Pentru inceput, să presupunem că $f : E \to \mathbb{R}$ este uniform continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in E$ cu $|x - y| < \eta$ să avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Daca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$ înseamnă că pentru n suficient de mare $|x_n - y_n| < \eta$ deci $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$.

Pentru implicaţia inversă, să presupunem prin reducere la absurd că f nu este uniform continuă. Atunci există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $n \geq 1$ există $x_n, y_n \in E$ cu $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ şi $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ ceea ce contrazice ipoteza. □

Proprietate 3. *Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : E \to \mathbb{R}$ uniform continuă. Atunci pentru orice şir Cauchy $(x_n)_{n\geq 1}$ cu elemente din E avem că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este la rândul său un şir Cauchy.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cum f este uniform continuă există $\eta > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in E$ cu $|x - y| < \eta$ avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Cum şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy, există $N \geq 1$ cu proprietatea că $|x_n - x_m| < \eta$ pentru orice $n, m \geq N$, deci $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Prin urmare $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este un şir Cauchy. □

Corolar 1. *Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ si $f : E \to \mathbb{R}$ uniform continuă. Atunci f are limită finită în fiecare punct de acumulare a lui E.*

Proprietate 4. *Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ si $f : E \to \mathbb{R}$ uniform continuă. Atunci pentru orice $B \subseteq E$ mărginită avem că $f(B)$ este mărginită.*

Teoremă 1. *Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ o multime mărginită si $f : E \to \mathbb{R}$ uniform continuă. Atunci f poate fi prelungită în mod unic la o funcţie uniform continuă $g : \overline{E} \to \mathbb{R}$.*

Teoremă 2. *Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ o multime compactă şi $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe E. Atunci f este uniform continuă.*

Demonstraţie. Vom demonstra prin reducere la absurd. Presupunem că f nu este uniform continuă. Deci există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $n \geq 1$ există $x_n, y_n \in E$, cu $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ astfel încât $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Deoarece multimea E este compactă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are cel puţin un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergent către un punct din $x \in E$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ avem că

$$\lim_{n\to\infty} |x - y_{n_k}| \leq \lim_{n\to\infty} |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n_k} = x$. Trecînd acum la limită în relatia $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ obţinem, tinînd cont de faptul că f este continuă pe E, $|f(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ ceea ce este imposibil.

Prin urmare, avem că f este uniform continuă. □

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este uniform continuă dacă si numai dacă există $a, b \in I$ astfel încât f este uniform continuă pe $I \cap (-\infty, a]$ şi pe $I \cap [b, \infty)$.*

Corolar 3. *Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci următoarele conditii sunt echivalente:*

1. *f este uniform continuă;*
2. *$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ există şi sunt finite;*
3. *există $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă astfel încât $g|_{[a,b]} = f$.*

Observaţie 2. *Corolarul anterior rămîne adevărat si în cazul în care $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Definiţie 2. *Spunem că o funcţie $f : E \to \mathbb{R}$ este funcţie bf lipschitziană pe $E \subset \mathbb{R}$ dacă există $L > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$, pentru oricex, $y \in E$.*

Proprietate 5. *Orice funcţie lipschitziană este uniform continuă.*

Proprietate 6. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică şi continuă, atunci f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Fie $T > 0$ o perioadă a funcţiei f. Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[0, 2T]$, rezultă că f este uniform continuă pe acest interval. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ($\delta(\varepsilon) < T$), astfel încât pentru orice $a, b \in [0, 2T]$ cu $|a - b| < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

Fie acum $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$ şi $y - x < \delta(\varepsilon)$. Alegem $a = x - nT$, $b = y - nT$, unde $n = \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor$. Obţinem $0 \leq a < T$ şi $b - a = y - x < \delta(\varepsilon) < T$. Deci $b < a + T < 2T$.

Rezultă că $a, b \in [0, 2T]$ şi $|a - b| < \delta(\varepsilon)$. Obţinem atunci: $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, de unde $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Deci, f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. □

Bibliografie

[1] Sireţchi Gh.: Calcul Diferential si Integral, Ed. Ştiintifică si Enciclopedică vol I, Bucuresti, 1985.

[2] Gazeta Matematică Nr 1, ianuarie 2009.

How Many Non-combitorialists Does it Take to Solve a Tiling Problem?

Harun Šiljak*

In our case, the answer to the question proposed in the title is *two*: one physicist to start and one number theorist to finish it. In other words, we will combine some elementary physics and (very elementary) number theory and create a technique which can be used to tackle tiling problems.

The tiling problems we are dealing with in this paper are the popular polymino tilings of finite figures consisted of unit squares (*polymino* is a generalization of a domino piece - a figure consisted of unit squares each having at least one common side with another square). This does not mean that the technique presented here is not applicable to other tiling problems, such as tiling with polygons - reader can try applying it to such problems.

Another remark, before we begin with introducing the technique - it is not new, nor it is original. Prasolov used it in [1] for a problem on polymino tiling. Furthermore, Conway and Lagarias in [4] show a much stronger generalization of this technique.

The physics involved Concept of mass centers (centroids/barycenters) is not unfamiliar in mathematics. It is mostly used in geometry (one of the examples are the so-called barycentric coordinates).

The strict definition of centroid would be:

Definition 1. *The centroid of the system of points $X_1, \dots, X_n$ with masses $m_1, \dots, m_n$ respectively (X_i are points in space, and m_i are real numbers) is a point O which satisfies*

$$m_1\overrightarrow{OX_1} + m_2\overrightarrow{OX_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

Note that from equation (1) it is possible to derive

$$\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1} + m_2\overrightarrow{XX_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{XX_n}) \tag{2}$$

*Faculty of Electrical Engineering, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, hsiljak@hotmail.com

In all problems solved in this paper, we have used a special case of equation (1) for $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$:

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} + \cdots + \overrightarrow{OX_n} \tag{3}$$

In the end of the paper, though, we will review the original formulae (1) and (2) and note other possible cases applicable in problem solving.

Mathematicians often insist on proving existence and uniqueness of an analyzed object. Showing that centroid exists for any set of points and that it is unique is quite simple: it follows from equation (2). Since the right-hand side of (2) is well-defined, then there is (are) such point(s) O which satisfy (2). On the other hand, if there was more than one such point (k such points, $O_1, O_2, \ldots, O_k$), if we take $O \equiv O_i$ and $X \equiv O_j$ in (2) we would have $\overrightarrow{O_iO_j} = \overrightarrow{0}$ (from (1)), hence there is only one centroid. Results shown above, combined with the next theorem will be the foundation of our technique:

Theorem 2. *(Mass regrouping) The centroid of a system of points does not change if part of the points are replaced by one point situated in their centroid and whose mass is equal to the sum of their masses.*

Proof. We will show that the centroid of a system of points $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$ with masses $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ respectively coincides with the centroid of points X and Y where X is centroid of X_i and has the mass $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ and Y is centroid of Y_i and has the mass $b = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$. For an arbitrary point Z, from (2) we obtain

$$\overrightarrow{ZX} = \frac{a_1\overrightarrow{ZX_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{ZX_n}}{a} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{ZY} = \frac{b_1\overrightarrow{ZY_1} + \cdots + b_m\overrightarrow{ZY_m}}{b} \tag{5}$$

If O is centroid of points X and Y, then from (2) we have

$$\overrightarrow{ZO} = \frac{a\overrightarrow{ZX} + b\overrightarrow{ZY}}{a+b} \overset{(4),(5)}{=} \frac{a_1\overrightarrow{ZX_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{ZX_n} + b_1\overrightarrow{ZY_1} + \cdots + b_m\overrightarrow{ZY_m}}{a+b} \tag{6}$$

Equations (2) and (6) imply that O is the centroid of the whole initial system, so the claim is proven. □

How can one find centroid of a concrete system in fast and efficient way?

Generally speaking, the basic tool used for finding the centroid is mass regrouping theorem - finding the centroid for a complex system by splitting it in simpler subsystems. From the definition of centroid, it is possible to derive the following useful fact:

Theorem 3. *Centroid of points X_1 and X_2 with masses m_1 and m_2 belongs to segment X_1X_2 and divides it in ratio $m_1 : m_2$.*

Proof. By the definition, if O is the centroid, then $m_1\overrightarrow{OX_1} + m_2\overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{0}$. It follows that O, A and B are collinear, and that $m_1OX_1 = m_2OX_2$, hence, $X_1O : OX_2 = m_2 : m_1$, so both claims are proven (hmmm, that's why the centroid divides the median in ratio 2:1 in a triangle!). □

A minor remark: when we say the mass is assigned to the unit square (and we will always do that in this paper), it is equivalent to putting a mass point in its center, since we consider it homogenous, so its centroid coincides with the intersection of its diagonals.

Now, we will take a random polymino, shown on Fig.1, and find its centroid (with the assumption that squares have the same mass).

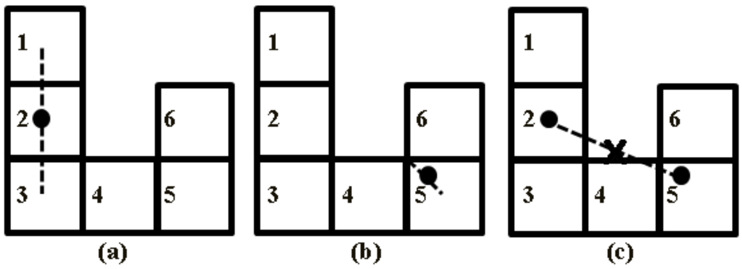


Figure 1: Finding centroid of a random polymino

First, centroid of two squares marked with 1 and 3 is found (Fig.1.a) and marked with a black circle - since the squares have the same mass, the centroid is half way between their centers. Then we find the centroid of that point and square 2 (since they coincide, the centroid does not 'move', it just gains mass). On the other hand, on Fig.1.b, the centroid of squares 4 and 6 is again half way between the centers. Line which connects this centroid and the center of square 5 is half the square diagonal, and we divide it in $2 : 1$ ratio to find the common centroid - the black circle (since the ratio of masses involved is $2 : 1$). Finally, we can find the centroid of system, half the way between centroids for $1, 2, 3$ on one and $4, 5, 6$ on the other side and mark it with the black cross (Fig.1.c). Note that we could have chosen another order in centroid determination and obtain the same results (you can try!). Also, it is worth mentioning that points shown on Fig.1.a and Fig.1.b could have been obtained in a more straightforward way - first one by noting that a centroid of a homogenous rectangle is in the intersection of diagonals, and the second one by noting it is the centroid of an isosceles right triangle.

Now, after making these important conclusions we can reveal the plan to tackle the tiling problem. We will use a general problem as an illustration:

Example 4. *Is it possible to tile a given figure A using polyminos $P_1, P_2, \ldots, P_n$?*

OK, we have a part of plane, divided in unit squares, and an infinite number of polyminos whose shape is defined by the problem proposer. The question is: can the figure A be tiled with those polyminos without overlaps? Favorite combinatorial technique for tackling this kind of problems is coloring (see, for instance, [2] for more details on this popular technique). It is mostly used to show that the requested tiling is impossible, while in cases tiling is possible, constructing such a tiling is enough.

Our technique is in the similar manner: it efficiently proves non-existence of tiling. So, for the sake of illustration, let the answer to the question in example 0 be 'no'.

Our physicist prefers real-world problems, so he assumes that m is the mass of one unit square of material used for tiling. This allows him to find centroids of both the figure being tiled and the polyminos. Now, he assumes that there is a configuration of tiles which covers the figure A. Then by the theorem of mass regrouping centroid of the board coincides with the centroid of a system consisted of polyminos (or their centroids). The physicist cannot prove that the configuration of tiles is possible or not, so he leaves it to the number theorist. But he can prepare the terrain for the number theorical arguments:

Once the centroids are found, it is possible to make a referent coordinate system we will use for further analysis. It is convenient to make the centroid of A the origin of the coordinate system and the axes paralell with unit squares' sides. For convenience (to make the number theoretical job easier) unit length in the new system is selected in the following manner: all tiles used in tiling are divided (if necessary - in most cases it is necessary, though) in squares smaller than the 'old' unit square whose dimension is chosen as the biggest one for which the centroid of a tile is placed in the vertex of such square (see Fig. 2 for such a division). Since such divisions are not the same for each polymino, we take a largest common divisor of side lengths of all these squares. The length obtained that way will be the unit length in our coordinate system.

This unit length provides that all centroids of tiles in a hypothetical tiling configuration are lattice points. This will be important for the number theory part.

Last thing the physicst can say about this problem is:

If the requested tiling configuration exists, both the sum of abscissas and the sum of ordinates of all tiles' centroids for such a configuration has to be zero. That follows from equation (3), since the coordinates are independent vector components.

The number theory involved If one has to use n tiles to tile the figure A, denote with x_i, $i = 1, \ldots, n$ the abscissas and with y_i the ordinates of tiles' centroids in the hypothetical complete configuration, then the previous conclusion can be written as

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \tag{8}$$

This system of Diophantine equations does not look promising in this general case, but in concrete cases parity and other divisibility arguments will be used to show non-existence of its solutions. In fact, almost all examples given here are solved using the fact that sum of even and odd number is odd - that is why we have said in the first paragraph of this paper that the number theory applied here is very elementary. But do not let that fool you - the technique shows more potential than we have shown in the examples here (we have just taken all the problems from a problem-solving book in plane tiling which were solved using coloring and shown that they are solvable using our technique). It is possible that the reader is a bit confused after this theoretical expos. We hope that the following examples will be helpful in clearing possible doubts (source of the examples: Ex. 1-5 are from [1], Ex. 6 is from [2], and Ex. 7 from [3]).

Example 5. *A rectangle is tiled with a set of square and straight tetrominos. Prove that if one tile is replaced with one of the other kind, rectagle cannot be tiled with this new set of tiles.*

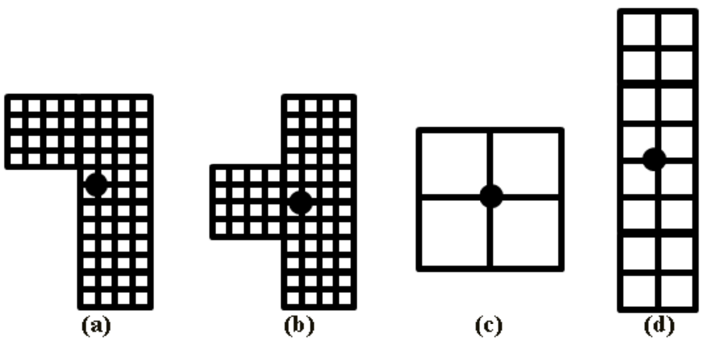


Figure 2: Tetrominos' centroids

Solution. In all examples listed here, tetrominos are used for tiling. All possible tetrominos and the location of their centroids are shown in Figure 2 ((a) is the L-tetromino, (b) is the T-tetromino, (c) is the square tetromino and (d) is the straight tetromino).

The origin of our new coordinate system is placed in the intersection of the rectangle diagonals, while the new unit length selected is half of the original (why? look at the Figure 2.c and Figure 2.d and remember what we have said about choosing the unit length before).

Note that dimensions of the tiled rectangle can be *odd* $\times$ *even* or *even* $\times$ *even* (measured in respect to the original unit squares). Therefore, two cases are considered.

First case, *even* $\times$ *even*: note that both coordinates of square tetrominos in this case are even, and that one coordinate of a straight tetromino is odd, and the other is even. Let us denote the number of straight tiles with odd abscissas ('vertical' tiles) with a, and the number of ones with odd ordinates ('horizontal' tiles) with b. Observing the parity of left-hand sides in equations (7) and (8) we conclude that, since they must be even, both a and b have to be even (in equation (7) (resp. (8)), there are a (resp. b) odd sumands, and all other sumands are even, therefore a and b are even). Adding another straight tile makes this parity unbalanced, hence the new tiling is impossible.

Second case, *odd* $\times$ *even*: without loss of generality, we will assume the odd dimension is paralell with the abscissa. Then, abscissas of square tiles are odd, while the ordinates are even. Both coordinates of 'vertical' tiles are odd, while the coordinates of 'horizontal' ones are even. Let a be the number of square tetrominos, b number of 'vertical' and c number of horizontal straight tiles. Then, the parity argument for equations (7) and (8) implies that a and b have to be even. Parity of a changes when we substitute the tile, hence the tiling is again impossible. $\square$

Example 6. *A* 10×10 *chessboard cannot be covered by* 25 *T-tetrominos.*

Solution. Location of the tiles' centroid is shown in the Figure 2.b. The new division divides our square being tiled in a 40×40 square. Notice that for each T-tetromino, coordinates of its centroid have different parity. Since 25 is odd, number of tiles shown in Figure 3.a and Figure 3.b, or Figure 3.c and Figore 3.d is odd. Since they have an odd abscissa, or ordinate, respectively, sum of abscissas or ordinates is nonzero, which is a contradiction. Hence, the requested tiling does not exist. $\square$

Example 7. *A* 10×10 *board cannot be covered by* 25 *straight tetrominos.*

Solution. As we already said, location of tiles' cetroid is shown in the Figure 2.d. Since the abscissae of ordinate-paralell tiles and ordinates of abscissa-parallel tiles are odd, number of such tiles has to be even. Note that this implies that the total number of tiles has to be even, and since 25 is odd, we conclude that the requested tiling is not possible. $\square$

Example 8. *An* 8×8 *chessboard cannot be covered by* 15 *T-tetrominos and one square tetromino.*

Solution. Using Figure 2.b and Figure 2.c, we come to a conclusion that the square tetromino does not affect the parity of abscissa and ordinate sum, so the sums of coordinates for tetrominos have to be even. As we have already shown in Example 2, for an odd number of T-tetrominos, exactly one of these sums is odd. Hence, the tiling is impossible. $\square$

Example 9. *Consider an* $n \times n$ *chessboard with the four corners removed. For which values of* n *can you cover the board with L-tetrominos?*

Solution. Fig. 2a shows us the position of tiles' centroid. We can notice that both of its coordinates are odd, so the total number of tiles has to be even. Our board is consisted of $n^2 - 4$ original squares, and since we have shown the number of tiles is even, dividing the total number of squares with four gives an even quotient, i.e. $8|n^2 - 4$. It is obvious that n is even, so for $n = 2m$ we have $2|m^2 - 1$, so m is odd, i.e. $m = 2k + 1$, therefore the necessary condition is $n = 4k + 2$. Construction shows this is also a sufficient condition. □

Example 10. *A centrally symmetric figure consists of* n *L-tetrominos and* k *straight tetrominos of size* 1×4*. Prove that* n *is even.*

Solution. It is easy to verify, using Figure 2.a and Figure 2.d, that the number of L-tetrominos has to be even, because an odd number of L-tetrominos would imply that one of the coordinate sums is also odd, hence nonzero. □

Example 11. *Consider an* $n \times n$ *board tiled with T-tetrominos. Let* a, b, c, d *be the number of tetrominos shown in Figure 3.a, Figure 3.b, Figure 3.c, Figure 3.d, respectively. Prove that* $4|(a + b - c - d)$*.*

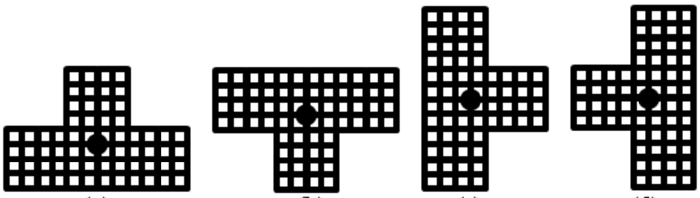


Figure 3: Variants of T-tetromino (Example 7)

Solution. Fig. 3. and the experience gained in the examples above help us to solve this problem in a fast and elegant manner. First of all, we'll show $4|n$. It is obvious that n is even, and if we assume it is even, but not divisible by 4, then for $n = 4m + 2$, $a + b + c + d = \frac{(4m+2)^2}{4} = (2m + 1)^2$tiles are needed (which is odd). Generalizing our analysis in Problem 2, it is clear that both $a + b$ and $c + d$ have to be even. Since $a + b + c + d$ in this case is odd, tiling is not possible. hence, $a + b + c + d$ must be even, i.e. $4|n$. So, $a + b + c + d = \frac{(4m)^2}{4} = 4m^2 \implies 4|(a + b + c + d)$. Since $a + b$ and $c + d$ are even, and their sum is divisible by 4, they are both congruent 0 or both congruent 2 modulo 4, which implies $4|(a + b - c - d)$, and the original claim is proven. □

Afterthoughts These few examples are just the tip of an iceberg, if we take into account the numerous possible applications of this technique. We have already said that equation

(3), which is used in solving all problems in this paper, is a special case of (1), and this implies a wider scope of applications using the general equation (1). If we use equation (1), we can assign different masses to squares in one tile - moving its centroid that way. We can take it one step further, assigning some squares negative masses (that is not possible in real-life physics, but it is perfectly legal in our case).

Another big advantage of this technique is the fact it is easily extended from the plane to higher dimensions (it simply means we need to add more equations to the system (7) and (8)).

For even wider generalization, based on the tile homology group, reader is encouraged to read [4]. It is much more powerful than its special case we demonstrated here - but we have decided to go with this 'centroid-case' since it has a beautiful physical interpretation.

During the revision process of this paper, the set of examples in this paper has been extended in [5], and extended to three dimensions (in the part of [5] contributed by me). Also, a problem proposed by me in [5] has been used for the 2nd Balkan Students Mathematical Competition 2009:

Example 12. *Prove it is possible to fill (completely and without remainder) the box of size* $a \times b \times c$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$ *with cuboids of size* $4 \times 1 \times 1$ *if and only if at least two of the following rectangles:* $a \times b, a \times c, b \times c$*, can be tiled completely and without remainder with tiles of size* 4×1*.*

We will leave it as an exercise for the reader.

References

[1] V.V. Prasolov, *Problems in Plane and Solid Geometry* (trans. by D. Leites) `http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf`, pp. 307–318.

[2] A. Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1997., pp. 25–37.

[3] O. Dobosevych, Problem O117, *Mathematical Reflections* 2/2009

[4] J.H. Conway, J.C. Lagarias, *Tiling with polyominoes and combinatorial group theory*, J. Combinatorial Theory (Ser. A), 53 (1990), no. 2, 183-208.

[5] R.I. Kafov, *One method of solving problems about covering rectangles with polyominoes* (in Bulgarian), 10th Student Conference, UchIMI Plovdiv 2010.

Câteva probleme despre şirul lui Fibonacci

Popescu Mihai şi Popescu Gabriela

Cunoastem cu totii sirul lui Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Acesta este dat de formula de recurenta $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, F_1 = F_2 = 1$. In continuare voi prezenta cateva probleme mai interesante rezolvate despre acest sir:

Exerciţii

1. Sa se gaseasca volumul tetraedrului ale carui varfuri au respectiv coordonatele (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}), $(F_{n+3}, F_{n+4}, F_{n+5})$, $(F_{n+6}, F_{n+7}, F_{n+8})$ si $(F_{n+9}, F_{n+10}, F_{n+11})$.

   Rezolvare. $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ deci trei numere consecutive ale lui Fibonacci satisfac ecuatia $x + y = z$, deci cele patru puncte sunt coplanare, volumul tetraedrului este 0. □

2. Sa se arate ca fiecare al cincilea termen al sirului lui Fibonacci este divizibil cu 5.

   Rezolvare. Aplicand repetat relatia de recurenta obtinem succesiv:

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-3} + F_{n-4} \\ &= F_{n-3} + F_{n-4} + 2F_{n-4} + 2F_{n-5} + F_{n-4} \\ &= 5F_{n-4} + 3F_{n-5} \end{aligned}$$

   Deoarece $F_5 = 5$ rezulta ca fiecare al cincilea termen e divizibil cu 5. □

3. Sa se studieze daca cifra unitatilor termenilor acestui sir formeaza un sir periodic

   Rezolvare. Raspunsul este afirmativ. Sirul al carui termeni sunt cifrele unitatilor sirului lui Fibonacci se obtine prin urmatoarea operatie repetata la nesfarsit: calculam suma a doua cifre, mentinem cifra unitatilor si o adaugam sirului nostru. Deci in sir se succed doua cifre impare si o cifra para. Exista doar $5 \cdot 5$ perechi ordonate de cifre impare si deci dupa cel mult $3 \cdot 25$ sau 75 operatii, una din aceste perechi va reapare si ciclul va fi reluat. Suma si diferenta a doua cifre este unica si deci prima pereche care se repeta va fi chiar prima pereche a sirului. In cazul nostru dupa 60 de operatii incepe din nou acelasi ciclu de 60 de cifre si, prin urmare, sirul este complet determinat de ciclul $112358314594370774156178538190998752796516730336954932572910 11\ldots$. □

4. Cate cifre are $F_{1000000}$?

Rezolvare. Pentru aceasta problema e nevoie de putin mai mult decat doar relatia de recurenta. Relatia de recurenta fiind $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ se poate calcula termenul general F_n folosind ecuatia de grad doi $x^2 - x - 1 = 0$ care are radacinile $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. In acest caz termenul general este

$$F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

unde a si b sunt doua numere reale. Din $F_1 = F_2 = 1$ se calculeaza ca $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ si $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ deci

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Cum ajuta asta la calcularea numarului de cifre? Numarul de cifre al unui numar natural N care nu este o putere a lui 10 este partea intreaga superioara a lui $\log_{10} N$. De exemplu $\log_{10} 987654321 \approx 8.994$ a carei parte intreaga superioara este 9, numarul de cifre a lui 987654321. Deci trebuie sa calculam

$$\begin{aligned}\log_{10} F_{1000000} &= \log_{10} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1000000} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1000000}\right)\\ &= -\log_{10}\sqrt{5} + \log_{10}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1000000} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1000000}\right)\end{aligned}$$

Observam ca $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < \frac{2}{3}$ deci $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^{1000000} < \left(\frac{2}{3}\right)^{1000000} < 10^{-170000}$ care este extrem de mic deci putem calcula numarul de cifre folosind approximatia $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1000000} \approx 0$ atata timp cat $\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1000000} = 1000000 \log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 208987.64$ nu este un numar intreg, ceea ce este cazul. (In acest caz adaugand un numar extrem de mic nu am schimba partea intreaga superioara.) Deci

$$\begin{aligned}\lceil \log_{10} F_{1000000} \rceil &= \left\lceil -\log_{10}\sqrt{5} + 1000000\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\rceil\\ &= 208988\end{aligned}$$

de unde rezulta ca $F_{1000000}$ are 208988 cifre. □

In incheiere mai prezentam (fara demonstratie, aceasta fiind relativ simpla) cateva proprietati:

1. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
2. $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
3. $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

Bibliografie

[1] Trigg, W.Charles – Ingeniozitate si surpriza in matematica, Ed. Enciclopedica Romana, Bucuresti, 1975

[2] Vorobyov, N.N. - The Fibonacci Numbers, The University of Chicago, 1966.

[3] Knot, R., Fibonacci - Numbers and the Golden Section

[4] Fauvel, J., & van Maanen, J. - History in Mathematics Education, Boston, 2000

Puncte cu coordonate întregi

Andrei Jorza

Un punct P in plan avand coordonatele (x, y) se numeste un punct **laticial** daca coordonatele x si y sunt numere intregi. Printre problemele cheie ale matematicii moderne se afla analiza punctelor laticiale aflate pe, sau in interiorul, unor obiecte geometrice, sau in alte cuvinte rezolvarea unor ecuatii (sau inecuatii) diofantice cu solutii in numere intregi. Primele sectiuni sunt elementare si pot fi intelese de elevi de gimnaziu.

Sa incepem cu aplicatia unor metode geometrice elementare la studiul punctelor laticiale. Un prim exemplu este binecunoscuta teorema a lui Pick, care permite determinarea ariei unui poligon numarand punctele laticiale din poligon.

Teorema lui Pick

Teorema 1. *Fie $\mathcal{P} = P_1P_2\dots P_n$ un poligon in plan astfel incat varfurile $P_1, P_2, \dots, P_n$ sunt puncte laticiale. Atunci*

$$Aria(\mathcal{P}) = n_i + \frac{n_\ell}{2} - 1$$

unde n_i reprezinta numarul de puncte laticiale din interiorul lui $\mathcal{P}$ iar n_ℓ reprezinta numarul de puncte laticiale de pe laturile lui $\mathcal{P}$.

Demonstraţie. Aceasta teorema este binecunoscuta demonstratia ei realizandu-se prin inductie. Daca impartim poligonul $\mathcal{P}$ in doua poligoane $\mathcal{P}_1$ si $\mathcal{P}_2$ printr-o dreapta care contine c puncte laticiale atunci

$$\begin{aligned}\text{Aria}(\mathcal{P}) &= \text{Aria}(\mathcal{P}_1) + \text{Aria}(\mathcal{P}_2)\\ &= n_{1,i} + \frac{n_{1,\ell}}{2} - 1 + n_{2,i} + \frac{n_{2,\ell}}{2} - 1\\ &= n_{1,i} + n_{2,i} + c + \frac{n_\ell}{2} - 1\\ &= n_i + \frac{n_\ell}{2} - 1\end{aligned}$$

pentru ca $n_{1,\ell} + n_{2,\ell} = n_\ell + 2c - 2$ si $n_{1,i} + n_{2,i} + c = n_i + 2$. □

Ca aplicatie la teorema lui Pick dam urmatoarea problema

Problema 2. *Demonstrati ca un patrat $n \times n$ in plan nu poate acoperi mai mult de $(n+1)^2$ puncte laticiale.*

Demonstraţie. Numarul total de puncte acoperite de patratul $\mathcal{P}$ de dimensiune $n \times n$ este $n_i + n_\ell$. Cum perimetrul patratului este $4n$ iar distanta intre oricare doua puncte laticiale este cel putin 1 rezulta ca $n_\ell \leq 4n$ deci

$$n_i + n_\ell = n_i + \frac{n_\ell}{2} - 1 + \frac{n_\ell}{2} + 1 = \text{Aria}(\mathcal{P}) + \frac{n_\ell}{2} + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

□

Teorema lui Minkowski

Teorema lui Minkowski, referitoare la puncte cu coordonate intregi in regiuni convexe in plan a dus la numeroase aplicatii in teoria numerelor, dintre care vom da un exemplu.

Teorema 3. *Fie $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ o regiune convexa in plan, simetrica fata de origine (adica daca $(x, y) \in \mathcal{C}$ atunci si $(-x, -y) \in \mathcal{C}$). Daca aria regiunii $\mathcal{C}$ este ≥ 4 atunci $\mathcal{C}$ contine un punct laticial nenul.*

Demonstraţie. Sa consideram functia $f : \mathcal{C} \to [0, 2) \times [0, 2)$ definita prin $f(x, y) = (x \pmod 2, y \pmod 2)$ in care caz aria regiunii $f(\mathcal{C}) \subset [0, 2) \times [0, 2)$ este cel mult 4. Daca functia f ar fi injectiva atunci ariile regiunilor $\mathcal{C}$ si $f(\mathcal{C})$ ar fi egale, ceea ce contrazice ipoteza. Rezulta ca exista doua puncte distincte (x, y) si (x', y') in $\mathcal{C}$ astfel incat $f(x, y) = f(x', y')$ de unde rezulta ca $(x' - x, y' - y) = (2m, 2n)$ pentru doua numere intregi m si n.

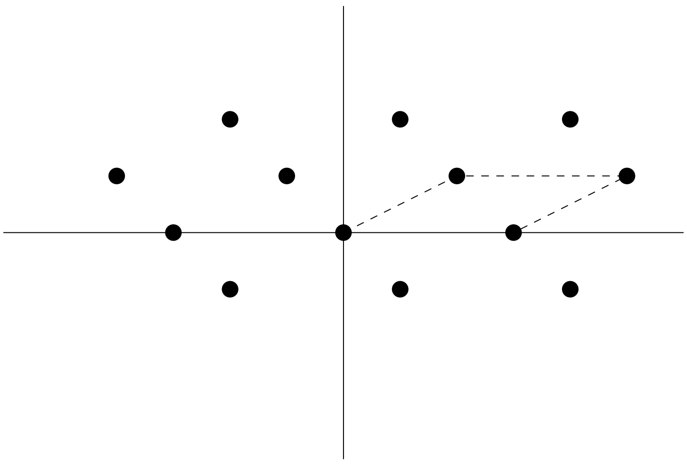
Regiunea $\mathcal{C}$ este simetrica fata de origine deci $(-x, -y) \in \mathcal{C}$ si este convexa deci $((x', y') + (-x, -y))/2 = (m, n) \in \mathcal{C}$ ceea ce era de demonstrat. □

Ca aplicatie a teoremei dam urmatoarea problema de teoria numerelor, insa inainte trebuie sa reformulam teorema intr-un mod mai general si anume: daca L este o latice in $\mathbb{R}^2$ astfel incat aria paralelogramului fundamental este s iar $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ este o regiune convexa simetrica fata de origina cu aria $\geq 4s$ atunci L contine un punct nenul din laticea L.

Problema 4. *Fie $p \equiv 1 \pmod 4$ un numar prim. Demonstrati ca exista doua numere intregi a si b astfel incat $p = a^2 + b^2$.*

Demonstraţie. Este un fapt cunoscut ca daca $u \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ atunci exista $v \in \mathbb{Z}$ astfel incat $v^2 \equiv u \pmod p$ daca si numai daca $u^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$ (in acest caz am avea $u^{(p-1)/2} \equiv v^{p-1} \equiv \pmod p$ din teorema lui Fermat). Cum $(p-1)/2$ este un numar par rezulta ca exista v astfel incat $v^2 \equiv -1 \pmod p$.

Consideram laticea $L = \{(pm + un, m) | m, n \in \mathbb{Z}\}$ pentru care aria paralelogramului fundamental este $s = p$ dupa cum se vede din figura (inaltimea paralelogramului este 1 iar baza este p). Fie $\mathcal{C}$ cercul cu centrul



la origine si raza $2\sqrt{\frac{p}{\pi}}$ avand, implicit, aria $4p$. Din teorema lui Minkowski rezulta ca putem gasit un punct $(a, b) \in L$ in interiorul cercului, deci satisfacand $a^2 + b^2 < \left(2\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right) = \frac{4}{\pi}p$. Cum $a = pm + un$ si $b = n$

rezulta ca $a^2 + b^2 \equiv (u^2 + 1)n^2 \equiv 0 \pmod p$ deci $a^2 + b^2$ este un numar intreg divizibil cu p mai mic decat $\frac{4}{\pi}p$ deci $a^2 + b^2 = p$. $\square$

Puncte laticiale pe curbe

Folosind teorema lui Pick vom putea determina asimptotic numarul de puncte laticiale aflate pe o curba (strict) convexa, obtinand un rezultat surprinzator:

Teorema 5. *Fie $\mathcal{C}$ o curba (strict) convexa in plan, de lungime L. Demonstrati ca numarul n de puncte laticiale care se afla pe curba $\mathcal{C}$ este cel mult*

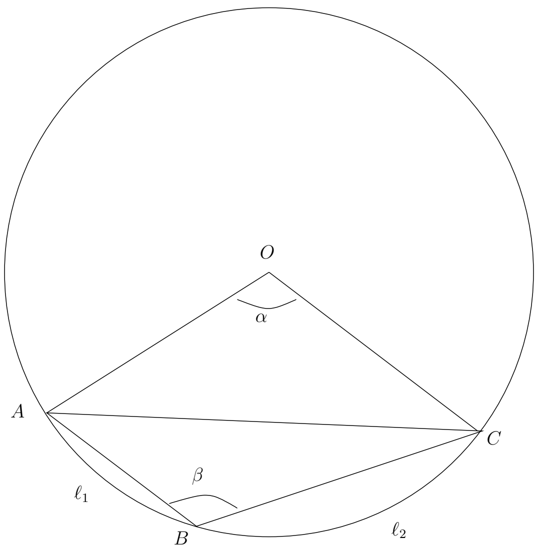
$$2 + \frac{\pi L^{2/3}}{\sqrt[3]{3}}$$

Pentru a demonstra aceasta problema incepem cu o lema:

Lema 6. *Fie ABC un triunghi avand unghiul $\beta = \angle ABC$ obtuz si punctele A, B si C laticiale necolinieare. Atunci*

$$\beta \leq \pi - \frac{24}{\pi^2(AB + BC)^2}$$

Demonstrație. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC ca in figura de mai jos. Vom folosi



faptul ca aria sectorului de cerc intre razele OA si OC este $\frac{1}{2}\alpha R^2$ unde R este raza cercului circumscris. Aria triunghiului OAC este $A_{OAC} = \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$ unde $\alpha = \angle AOC$. Rezulta ca aria segmentului de cerc sub coarda AC este egala cu

$$A_\beta = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha) \leq \frac{1}{12}R^2\alpha^3$$

pentru ca $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ daca $x \in [0, \pi]$.

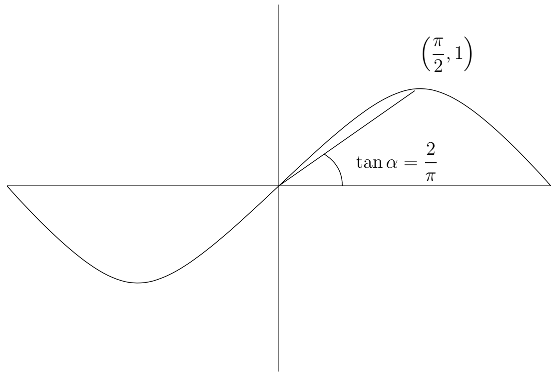
Dar triunghiul ABC are varfurile puncte laticiale deci teorema lui Pick demonstreaza ca $A_{ABC} \geq \frac{1}{2}$ de unde $A_\beta \geq \frac{1}{2}$. Combinand cele doua inegalitati obtinem ca

$$R^2\alpha^3 \geq 6$$

de unde $\alpha \geq \frac{6}{(aR)^2} = \frac{6}{\ell^2}$ unde $\ell = \ell_1 + \ell_2$ este lungimea arcului de cerc ABC. Cum $\alpha = \angle BAC + \angle BCA = \pi - \beta$ obtinem

$$\beta \leq \pi - \frac{6}{\ell^2}$$

Notam $\alpha_1 = \angle AOB$ si $\alpha_2 = \angle BOC$. Obtinem $AB = 2R \sin\frac{\alpha_1}{2}$. Analizand graficul functiei sinus vedem ca pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$. deci $AB = 2R\sin\frac{\alpha_1}{2} \geq \frac{2R}{\pi}\alpha_1 = \frac{2}{\pi}\ell_1$ si analog $BC \geq \frac{2R}{\pi}\alpha_2 = \frac{2}{\pi}\ell_2$



de unde $AB + BC \geq \frac{2}{\pi}\ell$. Concluzia este ca

$$\beta \leq \pi - \frac{6}{\ell^2} \leq \pi - \frac{24}{\pi^2(AB+BC)^2}$$

□

Revenim la teorema initiala.

Demonstraţia teoremei. Sa presupunem ca pe curba strict convexa $\mathcal{C}$ avem n puncte laticiale $P_1, \ldots, P_n$ ca in figura urmatoare: Notam $\beta_k = \angle P_{k-1}P_kP_{k+1}$ si aplicand lema precedenta obtinem ca pentru $k = 2, 3, \ldots, n-1$ avem

$$\beta_k \leq \pi - \frac{24}{\pi^2(P_{k-1}P_k + P_kP_{k+1})^2}$$

Notand cu ℓ_k lungimea curbei $\mathcal{C}$ intre P_k si P_{k+1} avem ca $\ell_{k-1} + \ell_k \geq P_{k-1}P_k + P_kP_{k+1}$ deci

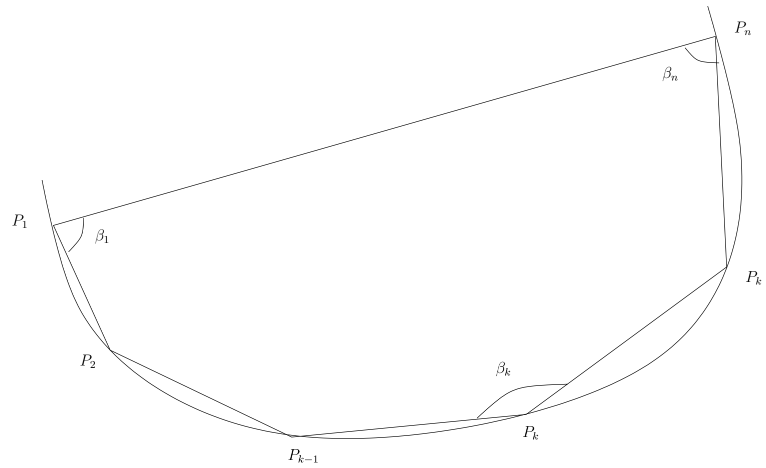
$$\beta_k \leq \pi - \frac{24}{\pi^2(\ell_{k-1}+\ell_k)^2}$$

Adunand aceste inegalitati obtinem ca

$$\sum_{k=2}^{n-1}\beta_k \leq (n-2)\pi - \frac{24}{\pi^2}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{(\ell_{k-1}+\ell_k)^2}$$

Dar $\sum_{k=1}^{n}\beta_n = (n-2)\pi$ pentru ca $P_1P_2\ldots P_n$ este un poligon deci $\sum\limits_{k=2}^{n-1}\beta_k = (n-2)\pi - \beta_1 - \beta_n \geq (n-4)\pi$. Combinand aceste doua inegalitati obtinem ca

$$\frac{24}{\pi^2}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{(\ell_{k-1}+\ell_k)^2} \leq 2\pi$$



in alte cuvine

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{(\ell_{k-1}+\ell_k)^2} \leq \frac{\pi^3}{12}$$

Folosind inegalitatea lui Jensen pentru functia convexa $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ obtinem

$$\frac{1}{n-2}\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{(\ell_{k-1}+\ell_k)^2} \geq f\left(\frac{1}{n-2}\sum_{k=2}^{n-2}(\ell_{k-1}+\ell_k)\right) = \frac{(n-2)^2}{(\sum_{k=2}^{n-2}(\ell_{k-1}+\ell_k))^2}$$

Rezulta ca

$$\frac{\pi^3}{12} \geq \frac{(n-2)^3}{(\sum_{k=2}^{n-2}(\ell_{k-1}+\ell_k))^2} \geq \frac{(n-2)^3}{(2\sum_{k=1}^{n}\ell_k)^2} = \frac{(n-2)^3}{4L^2}$$

Simplificand obtinem

$$n \leq 2 + \frac{\pi L^{2/3}}{\sqrt[3]{3}}$$

□

Puncte laticiale pe curbe speciale

In sectiunea precedenta am studiat numarul de puncte laticiale aflate pe curbe strict convexe oarecare. In anumite cazuri, de exemplu daca ecuatia care descrie curba are coeficienti intregi, se poate demonstra ceva si mai puternic, si anume ca numarul de puncte laticiale este finit. Rezultatul principal in acest domeniu se datoreaza lui Runge din anul 1887.

Teorema 7 (Runge, 1887)**.** *Fie $F(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ un polinom ireductibil cu coeficienti intregi*

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}x^i y^j$$

Daca cel putin una din urmatoarele trei conditii este satisfacuta atunci exista un numar finit de puncte laticiale pe curba $F(x,y)=0$:

1. *coeficientul lui x^m ca polinom in x si coeficientul lui y^n ca polinom in y nu sunt constante;*
2. *exista i si j cu $a_{i,j} \neq 0$ si $ni + mj > nm$;*
3. *polinomul*
$$R_F(x, y) = \sum_{ni+mj=nm} a_{i,j} x^i y^j$$
nu se poate scrie sub forma $cg(x, y)^r$ unde c este o constanta, $r \geq 1$ si g un polinom ireductibil.

Nu vom demonstra aceasta teorema insa vom da cateva exemple care ilustreaza aplicabilitatea celor trei conditii din Teorema lui Runge:

Exemplu 8. *Polinomul $F_1(x, y) = xy - k$ pentru $k \neq 0$ are $m = n = 1$ si este ireductibil. Este satisfacuta prima conditie deci $F(x, y) = 0$ are un numar finit de solutii intregi.*

Desigur, o solutie mult mai simpla este ca daca $xy = k$ atunci x si y sunt divizori ai numarului intreg k. Cum orice numar intreg nenul are un numar finit de divizori rezulta ca ecuatia are un numar finit de solutii intregi.

Exemplu 9. *Polinomul $F_2(x, y) = x^2 + xy + xy^2 + 1$ are $m = n = 2$ si este ireductibil, insa in monomul xy^2 avem $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 > 2 \cdot 2$ deci este satisfacuta a doua conditie.*

Si in acest caz se poate demonstra direct ca exista doar un numar finit de solutii intregi. Intr-adevar, ecuatia poate fi rescrisa $xy^2 + xy + x^2 + 1 = 0$ care are discriminantul $D = x^2 - 4x(x^2 + 1)$. Pentru $|x|$ suficient de mare discriminantul este negativ iar ecuatia nu are solutii nici macar reale. Deci exista doar un numar finit de posibilitati pentru x si implicit si pentru y.

Exemplu 10. *Polinomul $F_3(x, y) = x^4 + 4y^4 + x + y + 1$ are $m = n = 4$ si este ireductibil. Conditia a doua a teoremei nu este satisfacuta insa $R_{F_3}(x, y) = x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$ nu este o constanta inmultita cu puterea unul polinom ireductibil deci conditia a treia este satisfacuta.*

Exemplu 11. *Polinomul $F(x, y) = x^2 - 2y^2 - 1$ este ireductibil insa niciuna din cele trei conditii nu este satisfacuta deoarece x^2 si y^2 au coeficienti constanti, $2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2 \cdot 2$ iar $R_F(x, y) = x^2 - 2y^2$ este ireductibil, deci este o constanta inmultita cu puterea unui polinom ireductibil!*

De fapt ecuatia $F(x, y) = 0$ poate fi scrisa ca $x^2 - 2y^2 = 1$ si este cunoscuta sub numele de ecuatia lui Pell care are o infinitate de solutii numere intregi.

Bibliografie

[1]

Extremal Combinatorics - Turán Type Problems

Corina B. Panda

May 26, 2011

1 Introduction

One of the most important problem in mathematics is concerned with the study of structure that describes mathematical objects. When looking at graphs, one might ask what is the structure that describes them. One approach in describing these structures is trying to look at substructures. Here, the question at hand is the following: given a graph G that does not contain a subgraph F, what is the maximum number of edges that G can have? Turán answered this question in the case of complete subgraphs K_p. However, even if a lot of progres has been done since Turán's results, there are still a lot of unsolved problems in this area.

2 Definitions and Preliminaries

Definition 1. A graph $G = (V,\ E)$ is defined by a set of vertices V and a set of edges E between them. For our purposes, we're only going to work with simple graphs that have no loops (edges that leave and arrive at the same vertex) or paralel edges (more than one edge between two different points).

Definition 2. A complete graph K_p on p vertices is a graph that has all the possible edges between the vertices. Such a K_p graph is called a p-clique. Note that such a complete graph has $p(p-1)/2$ edges.

What we're interested in is finding $ex(n, K_p)$, the maximum number of edges in a graph on n vertices that doesn't contain K_p as a subgraph. Our goal will be to look at Turán theorem and give three different proofs of the result.

But let's first look at a construction example. Given n vertices, divide V into $p-1$ pairwise disjoint subsets such that $V = V_1 \cup ... \cup V_{p-1}$. We then insert edges between 2 vertices if and only if they lie in different subsets. We denote this graph by $K_{n_1,n_2,...n_{p-1}}$ where $|V_i| = n_i$ for all $i \in \{1, ..., p-1\}$. It's not hard to see that in order to maximize the number of edges in this graph we need the sizes of vertex subsets to be as equal as possible, that is $|n_i - n_j| \leq 1$ for all i, j. That's because if we would have two distict indeces say 1 and 2 such that $n_1 \geq n_2 + 1$. We can then move one vertex from V_1 to V_2 and get a graph $K_{n_1-1,n_2+1,...,n_{p-1}}$ that will have $(n_1 - 1)(n_2 + 1) - n_1n_2 \geq 1$ more edges than the initial graph. So we want graphs $K_{n_1,n_2,...n_{p-1}}$ with $|n_i - n_j| \leq 1$ for all i, j. We call such graphs the Turán graphs. Notice that if n is divisible by $p-1$, we're going to have

$$\binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$$

edges. So we've looked at a constructive example that builds a complete $p-1$-partite graph on n vertices that has no p-clique and $\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$ edges. What we're going to show next is a result of Turán's that states that this is actually the upper bound for the maximum number of edges that a graph on n not containing a p-clique can have, that is $ex(n, K_p) = \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$.

3 The Theorem and Three Different Proofs

Theorem 3. *Let $G = (V, E)$ be a graph on n vertices that contains no p-clique, where $p \geq 2$. Then*

$$|E| \leq \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

In the following, we're going to look at three different proofs of this result. The first one due to Turán (1941) is based on an inductive argument, while the other two use ideas from probability theory and a constructive reasoning, respectively.

First Proof. We're going to do induction on the number of vertices n. It is easy to see that the statement is true for $n < p$ because we always have $|E| \leq \binom{n}{2}$ which will be less than $\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$ in this case.

We then now do the inductive step for $n \geq p$. Let G be our graph on n vertices, with no p-clique and maximum number of edges. We then know G must contain a $p-1$-clique A; if this hadn't been the case, we could just insert more edges until we get a $p-1$-clique, but this would contradict the fact that our graph already has a maximum number of edges. We're now going to use the fact that A is a subgraph. Let B be the set of edges of the graph not contained in A and let $e(A)$, $e(B)$ be the sets of egdes of G with both ends in A, and B respectively. We're going to denote the rest of the edges that have an end in A and one in B by $e(A, B)$.

Clearly, $e(A) = \binom{p-1}{2}$. Also, there can't be a vertex in B connected to all vertices in A because our graph can't have a p-clique. Therefore, all the vertices in B are linked to at most $p-2$ vertices in A, so $e(A, B) \leq (p-2)(n+1-p)$. For $e(B)$ we can use the inductive hypothesis since the subgraph on the vertices in B clearly doesn't contain a p-clique , so $e(B) \leq \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{(n+1-p)^2}{2}$. After putting all these together and doing the computations, we'll get exactly what we need

$$|E| = e(A) + e(B) + e(A, B) \leq \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

□

Second Proof. The idea here is to consider a probability distribution $w = (w_1, ...w_n)$ that distributes non-negative weights to the vertices of the graph. So, $w_i \geq 0$ for all i and $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. We're going to define the following function $f(w) = \sum_{v_i v_j \in E} w_i w_j$ and try to maximize its value.

Firstly, let w be any distribution and assume there exist two disjoint, non-adjacent vertices v_i, v_j. Let s_i, s_j be the sum of the weights of vertices adjacent to v_i, and v_j. Without loss of generality, assume $s_i \geq s_j$. We're going to define another distribution w' by moving the weight

w_j from the vertex v_j to the vertex v_i. The weight on v_j will then be 0, while the weight on v_i will be $w_i + w_j$, so looking at the value of our function we'll now have $f(w') = f(w) + w_j s_i - w_j s_j \geq f(w)$. We can thus repeat this process all over again until there are no non-adjacent vertices of positive weights. Therefore, there exists some optimal distribution whose nonzero weights will be distributed on the vertices of a complete graph on, say k vertices, that is, a k-clique.

So we know that having all nonzero weights distributed on a k-clique subgraph maximizes our function. Let's see how we can maximize it even further. Assume there exists two different positive weights w_1 and w_2 that are distinct, say $w_1 > w_2$. Clearly, there will be some $\epsilon > 0$ such that $\epsilon < w_1 - w_2$. This time we're going to modify the probability distibution by moving a weight of ϵ from vertex v_1 to v_2, this giving us a weight of $w_1 - \epsilon$ on v_1 and $w_2 + \epsilon$ on v_2. Therefore, keeping in mind that v_1 and v_2 share an edge, $f(w') = f(w) + (w_1 - \epsilon)(w_2 + \epsilon) - w_1 w_2 = f(w) + \epsilon(w_1 - w_2) - \epsilon^2 > f(w)$. Thus the function gets maximized when the weights on the k-clique have the same value $1/k$.

So, the maximal value of the function is attained when $w_i = 1/k$ if w_i on the k-clique and $w_i = 0$ otherwise. In this case $f(w) = \frac{1}{k^2}\frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ which is maximized when k is maximum and since we can't have a p-clique, the largest value k can have is $p - 1$. Thus, whatever probability distribution w, we have

$$f(w) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right).$$

If we let w be the uniform distribution, $f(w) = \sum_{v_i v_j \in E} w_i w_j = \frac{1}{n^2}|E|$ which will be less or equal then the maximal value $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$. Thus $|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$.

□

Third Proof. Let G be a our graph on n vertices with maximum number of edges that doesn't contain a p-clique.

Claim. G does not contain three vertices u, v, w such that $vw \in E$, but $uv \notin E$, $uw \notin E$.

We're going to assume this can happen and give a proof by contradiction. In order to do that, let $d(v)$, the degree of the vertex v, count the number of neighbours of v. We then distinguish two cases:

Case 1. We either have $d(u) < d(v)$ or $d(u) < d(w)$. Without loss of generality, assume $d(u) < d(v)$. We say we delete a vertex if we remove it from the vertex set of the graph and also remove the edges adjacent to it. We say we copy a vertex v if we introduce a new vertex v' with the same neighbours as v (but no edge between v and v'). Let's then construct a graph G' by deleting u and copying the vertex v into v'. It is easy to see that G' can't contain a p-clique. On the other hand,

$$|E(G')| = |E(G)| + d(v) - d(u) > |E(G)|$$

which contradicts the assumption that G has maximum number of edges.

Case 2. When $d(u) \geq d(v)$ and $d(u) \geq d(w)$, we construct a new graph G' by deleting v and w and make two copies of u into u' and u". The graph G' is again a graph on n vertices that doesn't contain a p-clique (we leave it as an exercise to check this). However,

$$|E(G')| = |E(G)| + 2d(u) - d(v) - d(w) + 1 > |E(G)|$$

which gives us a contradiction once again.

We got contradictions in both cases, which proves the claim. So we know that we can't have a configuration of three vertices u, v, w for which uv is an edge, but uw and vw are not. This actually defines the following equivalence relation:

$$u \sim v \text{ iff } uv \notin E.$$

In order to prove this, one has to check reflexivity, symmetry and transitivity. The first two are rather trivial, so we're only going to look at the third one. If $u \sim v$ and $u \sim v'$ then by definition the edges uv and uv' don't exist. On the other hand, we know there exists an impossible configuration of three points as shown in the proof of the above claim, so it is impossible to have an edge between v and v' which proves the transitivity property.

So we know that two vertices are in the same equivalence class if and only if they don't share an edge. If we consider the equivalence classes as being partitions on the set of vertices of our graph G, the equivalence relation tells us that G must be a complete multipartite graph. Since we want to maximize the number of edges, we want as many subsets as possible and since our graph doesn't contain a p-clique we can only have at most $p-1$ subsets. Finally, by the same reasoning ideas as shown in the construction example from the beginning of the section, we can see that our graph G must be the Turán graph $K_{n_1,\ldots n_{p-1}}$, which clealy proves the boundary needed on the number of edges.

□

Remark. One can notice that the first and the last proof actually imply the stronger result that the Turán graph is actually the unique example that gives the maximum number of edges.

4 A Taste of a More General Picture and Final Remarks

The idea of finding the maximum number of edges that a graph not containing a forbidden configuration can have can be generalized to hypergraphs. A hypergraph $\mathcal{H}$ is a generalized version of a graph, being again defined by a set of vertices $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ and an edge set $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ that is a collection of subsets of the vertex set (this means that an edge doesn't have to be defined by only two vertices as before, it can be defined by any subset of $\mathcal{V}(\mathcal{H})$). In the setting on hypergraphs we're interested in r-uniform hypergraphs, which are hypergraphs where all edges have r elements (the number of edges in a complete r-uniform hypergraph will thus equal $\binom{\mathcal{V}(\mathcal{H})}{r}$).

The problem now becomes the following: given an r-uniform hypergraph $\mathcal{F}$, the Turán number $\mathcal{F}$ is the maximum number of edges in an r-uniform hypergraph on n vertices that does not contain a copy of $\mathcal{F}$. As before, we denote this number by $ex(n, \mathcal{F})$.

In the case r is equal to 2, we deal with the "normal" graphs we defined at the beginning. As we've already seen, the question of finding $ex(n, F)$ (or its order of magnitude) has been solved for complete graphs, as well as for many other instances such as cycles $\mathcal{C}(2k)$ of even length for example (for $k = 2$ we have $ex(n, \mathcal{C}(4)) = \frac{1}{2}n^{3/2} + O(n^{4/3})$). More than that, asymptotic results are known for all non-bipartite graphs. These results are given by the following claim: $\pi(F) := \lim_{n\to\infty} ex(n, F)/\binom{n}{2}$ exists and equals $1 - \frac{1}{r}$ where $r+1 = \chi(F)$ ($\chi(F)$ is the chromatic number of the graph F; notice that if F is bipartite, we're going to have $\chi(F) = 2$ which will give us a limit that goes to 0). The $\pi(F)$ we have defined is called the *coefficient of saturation.*

However, when $r > 2$ little is known. But we know that the coefficient of saturation $\pi(\mathcal{F}) := \lim_{n\to\infty} ex(n, \mathcal{F})/\binom{n}{r}$ still exists, even if its values are not known. And actually this coefficient of saturation, or the so called Turán density, is really important in trying to find the desired bound on the number of edges when we have some forbidden sub-hypergraph.

One of the most famous examples in this sense is Turán's conjecture claiming that $\pi_3(4) = \frac{5}{9}$ where $\pi_3(4) = \lim_{n\to\infty} ex(n, \mathcal{K}_3(4))/\binom{n}{3}$, $\mathcal{K}_3(4)$ being the complete 3-uniform hypergraph on 4 vertices.

Another beautiful example is the Turán number of the Fano plane $PG_2(2)$ which is known to be given by

$$ex(n, PG_2(2)) = \binom{n}{3} - \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{3} - \binom{\lceil n/2 \rceil}{3}$$

for n sufficiently large.

The details of the proof are not the scope of this paper, but a sketch of the general framework of how the proof goes will give us a glimpse of how the above coefficient of saturation can be used in order to determine the Turán number. We first notice that the Fano plane is a 3-uniform hypergraph on 7 vertices and 7 edges (see figure below). The idea of the proof is then based on three steps. First, we know from the density theorem that the coeficient of saturation of the Fano plane exists. Moreover, it has been proved to be exactly 3/4. The second tool needed is a stability result. In general, the idea is to prove an approximate stucture theorem for hypergraphs with density close to the maximum possible one. In our case the stability result roughly states that a 3-uniform hypergraph with density close to 3/4 is approximately 2-colorable. This brings us to the last step which consists in smoothing out the details and finding the exact structure that has the maximum size among the approximate structures. This method provides a nice tool that can give us exact results for the Turán number once we know the coefficient of saturation.

As a closing remark, this last section is mainly meant to entice the reader by only offering a glimpse of what is actually going on. For a more detailed discussion on the subject, one is invited to look up the given references.

Aknowledgements. This paper follows a talk given at Promys, Boston 2010 and was mainly based on a seminar lecture at Princeton University on the same topic. Thus, I'd like to thank Prof. Sergey Norin for the suggested references.

References

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

[2] Z. Furëdi, *Turán Type Problems*, Surveys in Combinatorics. 1991, Proc. of the 13th British Combinatorial Conference, ed. A. D. Keedwell, Cambridge Univ. Press. London Math. Soc. Lecture Note Series 166 (1991), 253-300.

[3] P. Keevash, B. Sudakov, *The Turán Number of the Fano Plane*, at `http://www.springerlink.com/content/g2u53kn62355vt12/`

Probleme cu numere intregi pentru gimnaziu

In ultimii opt ani aproximativ un sfert dintre problemele date la Olimpiada Nationala de Matematica la clasele a 7-a si a 8-a au avut de-a face cu numere intregi. In acest articol vom parcurge aceste probleme incercand sa sintetizam temele majore care apar in problemele cu numere intregi pentru gimnaziu. Includem si problemele cu numere intregi date la clasa a 9-a pentru ca sunt formulate ca ecuatii functionale cu numere intregi, care nu sunt altceva decat probleme despre siruri de numere intregi care satisfac anumite proprietati, pentru rezolvarea lor nefiind necesare cunostinte dincolo de gimnaziu.

Inegalitati

Prima tema este "inegalitati", multe probleme despre numere intregi fiind rezolvabile folosind observatia ca daca m si n sunt numere intregi astfel incat $m < n$ atunci $m \leq n - 1$.

Problemă 1. *Pentru un numar intreg n consideram*

$$A_n = \sqrt{49n^2 + 0,35n}.$$

1. *Determinati primele trei cifre dupa virgula ale lui A_1.*
2. *Demonstrati ca pentru orice n primele trei cifre dupa virgula ale lui A_n si A_1 sunt aceleasi.*

(Olimpiada Nationala de Matematica 2003, clasa a 7-a)

Demonstraţie. Ambele subpuncte se bazeaza pe faptul ca pentru a determina primele trei cifre dupa virgula, sa zicem $0,\overline{abc}$ ajunge sa aratam ca $N + 0,\overline{abc} \leq< A_n < N + 0,\overline{abc} + 0,001$ unde N este un numar intreg. Pentru aceasta scriem

$$\begin{aligned}
49n^2 + 0,35n &= (7n)^2 + 0,35n \\
&= (7n)^2 + 2 \cdot 7n \cdot 0,025 \\
&= (7n)^2 + 2 \cdot 7n \cdot 0,025 + 0,025^2 - 0,025^2 \\
&= (7n + 0,025)^2 - 0,025^2 \\
&< (7n + 0,025)^2
\end{aligned}$$

de unde $A_n < 7n + 0,025$. In acelasi timp

$$\begin{aligned}
49n^2 + 0,035n &= (7n + 0,025)^2 - 0,025^2 \\
&> (7n + 0,024)^2
\end{aligned}$$

pentru ca

$$\begin{aligned}
(7n + 0,025)^2 - 0,025^2 - (7n + 0,024)^2 &= (7n + 0,025)^2 - (7n + 0,024)^2 - 0,025^2 \\
&= (7n + 0,025 + (7n + 0,024))(7n + 0,025 - (7n + 0,024)) - 0,025^2 \\
&= 0,001(14n + 0,049) - 0,025^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

deci $A_n > 7n + 0,024$ deci cifrele cautate sunt $,024$. $\square$

Problemă 2. *Fie p, q, r trei numere prime astfel incat $5 \leq p < q < r$. Stiind ca $2p^2 - r^2 \geq 49$ si $2q^2 - r^2 \leq 193$, determinati p, q, r. (Olimpiada Nationala de Matematica 2008, clasa a 7-a)*

Demonstrație. Rescriem inegalitatile ca

$$2q^2 - 193 \leq r^2 \leq 2p^2 - 49$$

de unde rezulta in primul rand ca $r^2 < 2p^2$ si in al doilea rand ca $q^2 \leq p^2 + 72$. Cum p si q sunt numere prime impare si $q > p$ rezulta ca $q \geq p + 2$ deci

$$(p + 2)^2 \leq q^2 \leq p^2 + 72$$

de unde obtinem ca $p \leq 17$.

Daca enumeram numerele prime intre 7 si 23 avem

$$p_1 = 7, p_2 = 11, p_3 = 13, p_4 = 17, p_5 = 19, p_6 = 23$$

daca $p = p_k$ atunci $r \geq p_{k+2}$ iar conditia $p_{k+2}^2 \leq r^2 < 2p^2 = 2p_k^2$ reduce optiunile de la $p \in \{7, 11, 13, 17\}$ la $p \in \{13, 17\}$.

Daca $p = 13$ atunci $q \geq 17$ si inegalitatea $q^2 \leq p^2 + 72$ nu este satisfacuta. Deci $p = 17$ si $19^2 \leq q^2 \leq 17^2 + 72 = 19^2$ de unde $q = 19$ si $2 \cdot 19^2 - 193 \leq r^2 \leq 2 \cdot 17^2 - 49 = 2 \cdot 19^2 - 193 = 23^2$ de unde $r = 23$. $\square$

Problemă 3. *Fie $a, b, c \geq 2$ numere intregi. Aratati ca*

$$a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) \leq (a + b + c - 4)(a + b + c - 5) + 4$$

(Olimpiada Nationala de Matematica 2010, clasa a 8-a)

Demonstrație. Desfacand parantezele se poate rescrie inegalitatea ca

$$4(a + b + c) \leq ab + bc + ca + 12$$

Fara a reduce generalitatea sa presupunem ca $a \leq b \leq c$. Daca $a \geq 4$ atunci $ab + bc + ca \geq 4a + 4b + 4c$ iar inegalitatea este satisfacuta. Ramane sa verificam pentru $a = 2$ si $a = 3$. Daca $a = 2$ inegalitatea devine $8 + 4b + 4c \leq bc + 2b + 2c + 12$ sau echivalent $bc - 2b - 2c + 4 = (b - 2)(c - 2) \geq 0$ care este adevarat. Daca $a = 3$ inegalitatea devine $12 + 3b + 3c \leq bc + 4b + 4c + 12$ sau $bc - b - c = (b - 1)(c - 1) - 1 \geq 0$ care este din nou adevarata.

Desigur, nu este necesara presupunerea ca a, b, c sa fie numere intregi. Intr-adevar, inegalitatea $4a + 4b + 4c \leq ab + bc + ca + 12$ poate fi rescrisa ca

$$\begin{aligned} 4a + 4(b + c) &\leq bc + a(b + c) + 12 \\ 4a - 12 &\leq bc + (a - 4)(b + c) \\ (a - 4)^2 + 4a - 12 &\leq (b + a - 4)(c + a - 4) \\ (a - 2)^2 &\leq (b - 2 + a - 2)(c - 2 + a - 2) \end{aligned}$$

care reiese din $a, b, c \geq 2$. $\square$

Problemă 4. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel incat ecuatia*

$$x^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1)x + ab + bc + cd + da = 0$$

are o solutie numar intreg. Demonstrati ca si cealalta solutie a ecuatiei este un numar intreg si ambele solutii sunt patrate perfect. (Olimpiada Nationala de Matematica 2007, clasa a 9-a)

Demonstraţie. Ecuatia de gradul doi are doua solutii α si β a caror suma este $\alpha+\beta = a^2+b^2+c^2+d^2+1$ deci daca $\alpha \in \mathbb{Z}$ atunci si $\beta \in \mathbb{Z}$. Cum $\alpha\beta = ab+bc+cd+da \geq 1$ rezulta ca numerele α si β sunt naturale (nu doar intregi), in caz contrar unul din $\alpha+\beta$ si $\alpha\beta$ nu ar fi un numar natural nenul.

In acest caz

$$\begin{aligned}2(\alpha+\beta) - 2\alpha\beta &= 2(a^2+b^2+c^2+d^2+1) - 2(ab+bc+cd+da)\\ &= a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+d^2-2cd+d^2+a^2-2da+2\\ &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+2\\ &\geq 2\end{aligned}$$

deci $\alpha\beta-\alpha-\beta+1 = (\alpha-1)(\beta-1) \leq 0$. Rezulta ca unul din numerele $\alpha-1$ si $\beta-1$ este ≤ 0 si cum $\alpha-1, \beta-1 \geq 0$ deducem ca putem presupune $\alpha-1 = 0$ sau $\alpha = 1$. Atunci $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2 = -2(\alpha-1)(\beta-1) = 0$ deci $a = b = c = d$ si atunci

$$\beta = 4a^2+1-\alpha = (2a)^2$$

deci α si β sunt patrate perfecte. □

Problemă 5. *Determinati multimea numerelor naturale n care satisfac*

1. *catul impartirii lui n la 9 este un numar natural cu 3 cifre egale,*
2. *catul impartirii lui $n+36$ la 4 este un numar cu 4 cifre, cifrele fiind 2, 0, 0, 9 nu neaparat in aceasta ordine.*

(Olimpiada Nationala de Matematica 2009, clasa a 8-a)

Demonstraţie. Conditiile problemei sunt

$$\begin{gathered}n = 9\cdot\overline{aaa}+p\\ n+36 = 4\cdot\overline{uvwt}+q\end{gathered}$$

unde $\{u,v,w,t\} = \{2,0,0,9\}$ cu $u \neq 0$ din moment ce al doilea cat are 4 cifre. In acest caz $\overline{uvwt} > 2000$ deci $n+36 > 4\cdot 2000 = 8000$ de unde $n > 7964$. Dar $n = 9\cdot\overline{aaa}+p \leq 9\cdot\overline{aaa}+9$ deci $9\cdot\overline{aaa} \geq n-9 > 7964-9 = 7955$ deci $\overline{aaa} \geq 884$ de unde $a \in \{8,9\}$.

Daca $a = 8$ atunci $n = 9\cdot 888+p = 7992+p$ cu $p \in \{0,1,\ldots,8\}$ deci $n \in [7992, 8000]$ de unde $n+36 \in [8028, 8036]$ deci $\dfrac{n+36}{4} \in [2007, 2009]$ deci catul $\overline{uvwt} \in [2007, 2009]$ si egalitatea $\overline{uvwt} = 2009$ este singura care satisface conditiile problemei si se obtine pentru $n = 8000$.

Daca $a = 9$ atunci $n = 9\cdot 999+p = 8991+p$ cu $p \in \{0,1,\ldots,8\}$ deci $n \in [8991, 8999]$ de unde $n+36 \in [9027, 9035]$ deci $\dfrac{n+36}{4} \in \left[\dfrac{9027}{4}, \dfrac{9035}{4}\right]$ deci catul $\overline{uvwt} \in [2257, 2258]$ care nu satisface cerintele problemei.

Deci $n = 8000$ este singura solutie. □

Problemă 6. *Determinati numarul de numere intregi n astfel incat exista $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $n^2 = a+b$ si $n^3 = a^2+b^2$. (Olimpiada Nationala de Matematica 2004, clasa a 8-a)*

Demonstraţie. Ideea acestei probleme este inegalitatea mediilor. In primul rand $n^3 = a^2+b^2 \geq 0$ deci n este un numar natural. Cum $n^2 = a+b$ rezulta ca $n^4 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Dar $2ab \leq a^2+b^2$ deci

$n^4 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2) = 2n^3$ deci $n \leq 2$ (am pastrat sensul inegalitatii dupa impartire pentru ca $n \geq 0$). Deci $n \in \{0, 1, 2\}$. Fiecare din aceste trei numere poate fi scris ca in problema:

$$0^2 = 0 + 0$$
$$0^3 = 0^2 + 0^2$$
$$1^2 = 1 + 0$$
$$1^3 = 1^2 + 0^2$$
$$2^2 = 2 + 2$$
$$2^3 = 2^2 + 2^2$$

□

1 Divizibilitate

La problemele cu divizibilitate cea mai eficienta metoda de rezolvare este manipularea algebrica a divizibilitatilor si a resturilor obtinute la impartirea cu un anumit numar.

Problemă 7. *Fie m si n doua numere naturale cu $m > 1$ si $2^{2m+1} - n^2 \geq 0$. Demonstrati ca:*

$$2^{2m+1} - n^2 \geq 7.$$

(Olimpiada Nationala de Matematica 2007, clasa a 7-a)

Demonstraţie. Aceasta problema, desi apare sub forma de inegalitate, este de fapt o problema despre divizibilitate pentru ca ceea ce trebuie demonstrat este ca nu exista m si n care sa satisfaca relatia $2^{2m+1} = n^2 + d$ unde $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cum $m > 1$ rezulta ca $2m + 1 > 3$ deci 2^{2m+1} este divizibil cu 8 deci ar trebui ca $n^2 + d$ sa fie divizibil cu 8. Dar restul impartirii lui n^2 la 8 poate sa fie doar 0, 1 sau 4 deci ar trebui ca 8 sa divida numarul d, $1 + d$ sau $4 + d$. Cum $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ singura posibilitate este ca $d = 4$ in care caz ecuatia devine $2^{2m+1} = n^2 + 4$. Dar atunci n are fi par si am avea $n = 2n'$ deci ecuatia ar deveni $2^{2m+1} = 4n'^2 + 4$ sau, simplificand, $2^{2m-1} = n'^2 + 1$. Cum $2m - 1 \geq 3$ (avand in vedere ca $m \geq 2$) rezulta ca mai sus ca aceasta ecuatie nu are solutii, obtinand o contradictie. □

Problemă 8. *Fie a, b doua numere intregi. Aratati ca*

1. $13 \mid 2a + 3b$ *daca si numai daca* $13 \mid 2b - 3a$;
2. *Daca* $13 \mid a^2 + b^2$ *atunci* $13 \mid (2a + 3b)(2b + 3a)$.

(Olimpiada Nationala de Matematica 2005, clasa a 7-a)

Demonstraţie.

1. Ideea de baza a acestei probleme este ca daca $d \mid x$ si $d \mid y$ atunci $d \mid x \pm y$. Sa presupunem ca $13 \mid 2a + 3b$ atunci $13 \mid 7(2a + 3b) = 14a + 21b$. Dar $13 \mid 13a + 13b$ deci $13 \mid a + 8b$ de unde $13 \mid -3(a + 8b) = -3a - 24b$. Cum $13 \mid 26b$ rezulta ca $13 \mid -3a + 2b$. Lasam cititorului placerea de a demonstra implicatia reciproca.
2. Pentru acest subpunct este util sa analizam mai intai expresia $(2a+3b)(2b+3a)$ pentru a putea vedea cum sa incepem problema. Observam ca $(2a + 3b)(2b + 3a) = 6a^2 + 6b^2 + 13ab$. Cum $13 \mid a^2 + b^2$ rezulta ca $13 \mid 6(a^2 + b^2)$ si cum $13 \mid 13ab$ rezulta ca $13 \mid 6a^2 + 6b^2 + 13ab$ de unde rezulta ceea ce trebuia demonstrat.

□

Problemă 9. *Fie $\mathcal{A}$ o multime de numere naturale nenule cu cel putin doua elemente. Se stie ca pentru oricare $a, b \in A$ cu $a > b$, avem $\frac{[a,b]}{a-b} \in \mathcal{A}$, unde $[a, b]$ este cel mai mic multiplu comun. Demonstrati ca $\mathcal{A}$ are exact doua elemente. (Olimpiada Nationala de Matematica 2006 clasa a 7-a)*

Demonstraţie. Fie $a, b \in \mathcal{A}$ astfel incat b sa fie cel mai mic element al multimii $\mathcal{A}$. Fie $d = (a, b)$ in care caz scriem $a = a'd, b = b'd$. Atunci

$$\frac{[a,b]}{a-b} = \frac{a'b'd}{a'd-b'd} = \frac{a'b'}{a'-b'} = k \in \mathcal{A}$$

Vom rescrie aceasta ecuatia ca $a'b' = k(a' - b')$ sau $a'b' - ka' + kb' = 0$. Scazand k^2 obtinem

$$a'b' - ka' + kb' - k^2 = (a' + k)(b' - k) = -k^2$$

Daca $a' + k$ si $b' - k$ are avea un divizor prim comum p atunci $p \mid -k^2$ de unde $p \mid k$ si $p \mid a' + k - k = a'$ si $p \mid b' - k + k = b'$ ceea ce ar contrazice faptul ca a' si b' sunt prime intre ele. Deci $a' + k$ si $b' - k$ sunt prime intre ele. Cum produsul lor este $-k^2$ inseamna ca putem scrie $k = uv$ astfel incat $a' + k = u^2$ si $b' - k = -v^2$. Dar atunci

$$a' = -k + u^2 = u^2 - uv = u(u - v)$$
$$b' = k - v^2 = uv - v^2 = v(u - v)$$

Cum a' si b' sunt prime intre ele rezulta ca $u - v$ care le divide pe ambele trebuie sa fie egal cu 1. Atunci $u = v + 1$ si $a' = u = v + 1 = b' + 1$ deci a' si b' sunt numere naturale consecutive.

Concluzia este ca oricare doua numere in $\mathcal{A}$ pot fi scrise sub forma dm si $d(m + 1)$ unde d este cel mai mare divizor comun al lor. Am presupus ca $b = dm$ este cel mai mic element al multimii $\mathcal{A}$ si am observat ca $\frac{[dm, d(m+1)]}{d} = m(m + 1)\mathcal{A}$. Sa analizam perechea $d(m + 1), m(m + 1)$. Fie $r = (d, m)$ si scriem $d = d'r, m = m'r$. Atunci d' si m' sunt numere naturale consecutive si $d'm' = \frac{[d,m]}{|d-m|} \in \mathcal{A}$. Dar $d'm' = \frac{dm}{r^2}$ trebuie sa fie cel putin la fel de mare ca dm care este cel mai mic element al lui $\mathcal{A}$ deci $(d, m) = 1$ si numerele d si m sunt consecutive deci $d \in \{m - 1, m + 1\}$.

Sa presupunem ca $d = m-1$. Atunci sa analizam perechea $dm, m(m+1)$. Fie $t = (d, m+1) = (m-1, m+1)$ care este 1 daca m este par si 2 daca m este impar. Daca m este par atunci $\frac{d}{t} = m - 1$ si $\frac{m+1}{t} = m + 1$ nu sunt consecutive, obtinand o contradictie. Deci m este impar, $t = 2$ si atunci $\frac{[dm, m(m+1)]}{m(m+1) - dm} = \frac{m^2-1}{4} \in \mathcal{A}$. Dar atunci $\frac{m^2-1}{4} < m(m-1) = dm$ care a fost presupus cel mai mic element al multimii $\mathcal{A}$ de unde obtinem o constradictie.

Rezulta ca $d = m + 1$ deci cel mai mic element al multimii $\mathcal{A}$ este $m(m + 1)$ iar $a = (m + 1)^2$ deci multimea $\mathcal{A}$ are doar doua elemente

$$\mathcal{A} = \{m(m + 1), (m + 1)^2\}$$

□

Problemă 10. *Fie a, b, c, d be numere naturale nenule si fie $p = a + b + c + d$. Daca p este prim, aratati ca $p \nmid ab - cd$. (Olimpiada Nationala de Matematica 2010, clasa a 8-a)*

Demonstraţie. Sa presupunem prin absurd ca $p = a + b + c + d \mid ab - cd$. Atunci $p \mid ab - c(p - a - b - c)$ deci $p \mid ab - cp + ca + cb + c^2$. Cum $p \mid cp$ rezulta ca $p \mid ab + ac + bc + c^2 = (a + c)(b + c)$. Dar p este un numar prim deci fie $p \mid a + c$ fie $p \mid b + c$. Nici una din aceste conditii nu este posibila din moment ce $p = a + b + c + d > a + c, b + c$ cum a, b, c, d sunt numere naturale nenule. □

2 Algebra

Problemele a caror tema este algebra se bazeaza pe anumite manipulari algebrice elementare dar uneori nu evidente.

Problemă 11. *Fie m, n doua numere naturale nenule. Demonstrati ca $5^n + 5^m$ poate fi reprezentat ca suma de doua patrate perfecte daca si numai daca $n - m$ este par. (Olimpiada Nationala de Matematica 2003, clasa a 8-a)*

Demonstraţie. Ideea de baza a acestei probleme este ca daca doua numere se pot scrie ca suma de doua patrate perfecte atunci si produsul lor se poate scrie astfel. Intr-adevar, daca $A = a^2 + b^2$ si $B = c^2 + d^2$ atunci

$$\begin{aligned} AB &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 \\ &= (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2 \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

Daca $n - m$ este un numar par, sa zicem $n - m = 2k > 0$ atunci

$$5^n + 5^m = 5^{m+2k} + 5^m = 5^m((5^k)^2 + 1) = (1 + 2^2)^n((5^k)^2 + 1)$$

care, tinand cont de observatia precedenta, se poate scrie ca suma de patrate perfecte.

In cealalta directie, sa presupunem ca $n - m$ este un numar impar si ca $5^n + 5^m = a^2 + b^2$. Vom analiza restul impartirii lui 5^{2k+1} la 24. In acest caz avem

$$\begin{aligned} 5^{2k+1} - 5 &= 5(5^{2k} - 1) \\ &= 5(25^k - 1) \\ &= 5(25 - 1)(25^{k-1} + 25^{k-2} + \cdots + 5 + 1) \end{aligned}$$

deci $24 \mid 5^{2k+1} - 5$ deci restul impartirii lui 5^{2k+1} la 24 este 5. De aici deducem ca restul impartirii lui 5^{2k} la 24 este 1 deci restul impartirii lui $5^n + 5^m$ la 24 este $5 + 1 = 6$ din moment ce m si n au paritati diferite.

Vom demonstra ca este imposibil ca restul impartirii lui $a^2 + b^2$ la 24 sa fie 6 de unde vom deduce o contradictie. Intr-adevar, restul impartirii lui a^2 la 24 poate sa fie doar $0, 1, 4, 9, 12$ sau 16 iar suma oricaror doua dintre aceste resturi nu va da restul 6 la impartirea cu 24. $\square$

Problemă 12. *Demonstrati ca ecuatia $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2004}$, unde $0 \le x \le y \le z \le t$, are exact doua solutii in $\mathbb{Z}$. (Olimpiada Nationala de Matematica 2004, clasa a 8-a)*

Demonstraţie. Doua solutii ale aceste ecuatii se gasesc usor: $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 2^{1002})$ si $(x, y, z, t) = (2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001})$. Ramane sa aratam ca alte solutii nu exista. De fapt vom arata ca ecuatia $x^2 + y62 + z^2 + t^2 = 2^{2n}$ are doar doua solutii cu $0 \le x \le y \le z \le t$ si anume $(0, 0, 0, 2^n)$ si $(2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1})$.

Fie 2^k cea mai mare putere a lui 2 care divide toate numerele x, y, z, t. Atunci putem scrie $x = 2^k x', y = 2^k y', z = 2^k z', t = 2^j t'$ unde cel putin unul dintre numerele x', y', z', t' este impar. Ecuatia initiala poate fi rescrisa ca $x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2 = 2^{2(n-k)}$. Daca $n-k = 0$ atunci obtinem o singura solutie $(x', y', z', t') = (0, 0, 0, 1)$ care corespunde la $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 2^n)$. Daca $n - k = 1$ atunci exista o singura solutie cu cel putin un termen impar si anume $(x', y', z', t') = (1, 1, 1, 1)$, care corespunde la $(x, y, z, t) = (2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1})$. Sa presupunem ca $n - k \ge 2$ in care caz $8 \mid 2^{2(n-k)}$ deci $8 \mid x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2$. Cum cel putin unul dintre x', y', z', t' este impar fie exact doua sunt impare si doua pare, fie toate sunt impare. Dar restul impartirii unul patrat perfect la 8 este 0, 1 sau 4. In primul caz, daca avem doua numere pare si doua impare, restul impartirii lui $x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2$ la 8 poate fi $1 + 1 + 0, 1 + 1 + 4, 1 + 1 + 8$ in alte cuvinte doar 2, deci $8 \nmid x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2$. Daca toate numerele sunt impare atunci restul impartirii la 8 este $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ deci inca o data $8 \nmid x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2$ ceea ce demonstreaza ca solutiile obtinute anterior sunt singurele posibile. □

Problemă 13. *1. Fie m, n doua numere intregi cu $m > 1$. Aratati ca $m^4 + 4n^4$ nu este prim.*

2. Aratati ca $3^{4^5} + 4^{5^6}$ se descompune intr-un produs de numere intregi mai mari decat 10^{2009}. (Olimpiada Nationala de Matematica 2009, clasa a 7-a)

Demonstraţie. 1. Rezolvarea acestei probleme necesita doar cunostinte de algebra elementara:

$$\begin{aligned} m^4 + 4n^4 &= m^4 + 4m^2n^2 + 4n^4 - 4m^2n^2 \\ &= (m^2 + 2n^2) - (2mn)^2 \\ &= (m^2 + 2mn + 2n^2)(m^2 - 2mn + 2n^2) \end{aligned}$$

Pentru a arata ca m^4+4n^4 nu este prim ajunge sa avem $m^2 \pm 2mn + 2n^2 = (m \pm n)^2 + n^2 > 1$. Aceasta conditie este satisfacuta daca $|n| > 1$ sau daca $|m - n| > 1$ sau daca $|m - n| + |n| > 1$. In caz contrar, am avea $(m, n) \in \{(-1, -1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ ceea ce nu se poate din moment ce $m > 1$.

2. Avem

$$\begin{aligned} 3^{4^5} + 4^{5^6} &= (3^{4^4})^4 + 4 \cdot 4^{5^6-1} \\ &= (3^{4^4})^4 + 4 \cdot (2^{(5^6-1)/2})^4 \end{aligned}$$

care este produs de $(3^{4^4} \pm 2^{(5^6-1)/2})^2 + 2^{(5^6-1)} > 2^{(5^6-1)}$ ca la punctul precedent. Dar $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ si $2^7 = 128 > 100 = 10^2$ deci $10^{2009} = 1000^{667} \cdot 100 < 2^{6677}$. Cum $5^6 - 1 > 6677$ rezulta ca fiecare din cei doi factor este mai mare decat 10^{2009}, ceea ce trebuia demonstrat.

□

Problemă 14. *Determinati numarul de numere naturale cu patru cifre $\overline{abcd}$ care satisfac $a + b = c + d$ si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. (Olimpiada Nationala de Matematica 2010, clasa a 8-a)*

Demonstraţie. Ridicand la patrat prima egalitate obtinem $(a + b)^2 = (c + d)^2$. Scazand a doua egalitate obtinem $2ab = 2cd$ de unde obtinem $ab = cd$. Deci $a + b = c + d = s$ si $ab = cd = p$ deci ambele perechi a, b si c, d sunt solutii ale ecuatiei de grad doi $x^2 - sx + p$ deci $\{a, b\} = \{c, d\}$.

Ramane sa determinam numarul de numere de patru cifre $\overline{abcd}$ astfel incat $\{a, b\} = \{c, d\}$. Daca $a = b$ atunci $c = d = a = b$ si avem 9 astfel de numere. Daca $a \neq b$ putem alege $a = 1, 2, \ldots, 9$ si $b = 0, 1, \ldots, 9$ distincte in mod aleator in care caz pentru fiecare astfel de pereche sunt exact doua perechi $(c, d) = (a, b)$ si $(c, d) = (b, a)$. Sunt in total sunt 90 de perechei a, b dintre care 9 au fost deja numarate deci raman 81 de perechi cu cate doua optiuni pentru (c, d). Deci numarul total de numere este $9 + 81 \cdot 2 = 171$. □

3 Baza zece

Un numar considerabil de probleme cu numere intregi are de-a face cu reprezentarea numerelor intregi in baza zece. Astfel de probleme sunt legate de obicei de cifrele numerelor intregi si de obicei nu exista nicio metoda universala de atacare a acestor probleme, fiecare necesitand ideea ei.

Problemă 15. *Pentru un numar natural nenul n, scris in baza zece, notam cu $p(n)$ produsul cifrelor sale.*

1. *Demonstrati ca $p(n) \leq n$;*
2. *Determinati toate numerele naturale nenule n astfel incat*
$$10p(n) = n^2 + 4n - 2005.$$

(Olimpiada Nationala de Matematica 2005, clasa a 8-a)

Demonstraţie. 1. Vom demonstra prin inductie aceasta inegalitate. Cazul initial este daca n are o singura cifra in care caz $p(n) = n \leq n$. Pentru pasul de inductie sa presupunem ca avem un numar $n = \overline{xy}$ unde y are n cifre, deci $y < 10^n$. Atunci $p(\overline{xy}) = p(x)p(y) \leq xy$ din ipoteza de inductie. Dar $y < 10^n$ deci $xy \leq x \cdot 10^n + y = \overline{xy}$ deci $p(n) \leq n$.

2. Din primul punct trebuie sa fie satisfacuta inegalitatea
$$p(n) = \frac{n^2 + 4n - 2005}{10} \leq n$$
care poate fi rescrisa ca $n^2 - 6n - 2005 \leq 0$. Echivalent avem $(n-3)^2 - 2014 \leq 0$ sau $(n-3)^2 \leq 2014$ de unde $n - 3 \leq 44$ si $n \leq 47$.

Numarul n nu poate avea o singura cifra pentru ca in acest caz am avea $p(n) = n$ iar ecuatia $10n = n^2 + 4n - 2005$ nu are solutii numere intregi. Deci $n = \overline{ab} = 10a + b$ si $p(n) = a \cdot b$. Ecuatia devine
$$\begin{aligned} 10ab &= n^2 + 4n - 2005 \\ 10ab &= (10a + b)^2 + 4(10a + b) - 2005 \\ 10ab &= 100a^2 + 20ab + b^2 + 40a + 4b - 2005 \end{aligned}$$
de unde avem $100a^2 + 10ab + b^2 + 40a + 4b = 2005$ pentru cifre $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ si $b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Singura solutie este $(a, b) = (4, 5)$ deci $10p(n) = n^2 + 4n - 2005$ implica $n = 45$.

$\square$

Problemă 16. *Demonstrati ca pentru orice numar natural nenul n exista un singur numar natural divizibil cu 5^n care in baza zece poate fi scris folosind exact n cifre din multimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. (Olimpiada Nationala de Matematica 2005, clasa a 9-a)*

Demonstraţie. Exista numeroase solutii ale acestei probleme, cea mai simpla bazandu-se pe principiul cutiei. Ideea de baza este ca exista 5^n numere cu n cifre din multimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Daca am putea demonstra ca oricare doua dau resturi diferite la impartirea cu 5^n atunci exact unul din aceste numere ar da restul 0, deci ar fi un multiplu cu n cifre al lui 5^n.

Sa presupunem prin absurd ca doua numere a si b cu n cifre $1, 2, 3, 4, 5$ dau acelasi rest la impartirea cu 5^n deci $5^n \mid a - b$. Sa zicem $a - b = m5^n$. Daca m ar fi par, sa notam cu d puterea lui 2 in m in care caz $a - b = 10^d 5^{n-d} m'$ unde $m = 2^d m'$. Atunci ultimele d cifre ale lui a si b ar fi aceleasi. Cum 5^{n-d} se termina in cifra 5 rezulta ca $5^{n-d} m'$ se termina in cifra 5 (din moment de m' este impar. Dar atunci a $d + 1$ cifra a lui a ar fi egala cu a $d + 1$ cifra a lui b plus 5 ceea ce contrazice alegerea lui a si b. Deci m este un numar impar in care caz $a - b = m5^n$ se termina in cifra 5 contrazicand faptul ca ultima cifra a lui a si b pot fi doar $1, 2, 3, 4, 5$. $\square$

Problemă 17. *Demonstrati ca numarul 10^{10} nu poate fi scris ca un produs de numere care nu contin cifra 0 in scrierea lor zecimala. (Olimpiada Nationala de Matematica 2007, clasa a 8-a)*

Demonstraţie. Sa scriem $10^{10} = a \cdot b$ ca produs de doua numere naturale. Daca 2 si 5 divid pe acelasi numar a sau b atunci 10 divide acest numar si acest numar se va termina intr-un zero. In caz contrat am avea $a = 2^{10}$ si $b = 5^{10}$. Dar $a = 2^{10} = 1024$ care contine cifra 0. $\square$

4 Functii

Am inclus in acest capitol cateva probleme cu functii care iau valori numere intregi, desi ele apar date la olimpiada la clasa a 9-a, motivul fiind ca ele pot fi formulate fara a recurge la notiunea de functie, sau ecuatie functionala, in care caz ar putea aparea la gimnaziu. De exemplu, o problema care invoca o functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ poate fi reformula ca o problema despre numerele intregi $f_1, f_2, \ldots$ care satisfac anumite proprietati. Speram ca aceste probleme sa consolideze temele prezentate anterior.

Problemă 18. *Determinati functiile strict crescatoare $f : \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, \ldots, 100\}$ astfel incat $x + y$ divide $xf(x) + yf(y)$ pentru orice $x, y \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. (Olimpiada Nationala de Matematica 2004, clasa a 9-a)*

Demonstraţie. Daca $y = x + 1$ atunci conditia din problema devine $x + y = 2x + 1 \mid xf(x) + (x + 1)f(x + 1)$. Cum $2x + 1 \mid (2x + 1)f(x)$ rezulta ca $2x + 1 \mid (x + 1)(f(x + 1) - f(x))$. Dar $(2x + 1, x + 1) = 1$ deci $2x + 1 \mid f(x + 1) - f(x)$. Acum vom folosi faptul ca functia f este strict crescatoare de unde vom deduce ca $f(x + 1) - f(x) > 0$ iar din divizibilitate vom deduce ca $f(x + 1) - f(x) \geq 2x + 1$. Pentru a putea gasi functia va trebui folosit faptul ca imaginea functiei este in $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Vom realiza acest lucru adundand inegalitatile

$$\begin{aligned} f(1) &\geq 1 \\ f(2) - f(1) &\geq 3 \\ &\vdots \\ f(10) - f(9) &\geq 19 \end{aligned}$$

de unde rezulta ca $f(10) \geq 1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = 100$. Cum $f(10) \leq 100$ rezulta ca in toate inegalitatile de mai sus are loc egalitate si deducem ca $f(x) = x^2$. □

Problemă 19. *Fie $P(n)$ numarul functiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, with $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$ care au proprietatea ca $f(x) = 0$ are doar solutii numere intregi. Demonstrati ca $n < P(n) < 2n^2$ pentru orice $n \geq 4$. (adaptat din Olimpiada Nationala de Matematica 2004, clasa a 9-a)*

Demonstraţie. Pentru inegalitatea $P(n) \geq n$ ajunge sa aratam ca exista n ecuatii diferite cu solutii numere intregi. Acestea sunt $(x+1)(x+k) = x^2 + (k+1)x + k$ pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$ pentru $k^2 \leq n$. Cum $n \geq 4$ exista cel putin 2 ecuatii de al doilea tip care impreuna cu cele $n - 2$ ecuatii de primul tip dau cel putin n ecuatii.

Pentru a doua inegalitate observam ca ecuatia $ax^2+bx+c = 0$ are solutiile $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ unde $\Delta = b^2 - 4ac$. Pentru ca $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ este nevoie in primul rand ca $\Delta = d^2$ in care caz

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-b - d}{2a} \\ \beta &= \frac{-b + d}{2a} \end{aligned}$$

deci $2a \mid b \pm d$. In plus $b^2 - 4ac = d^2$ poate fi rescris ca $b^2 - d^2 = 4ac$.

Pentru a numara tripletele (a, b, c) cerute ajunge sa numaram b, d si solutiile ecuatiei $4ac = b^2 - d^2$ astfel incat $2a \mid b \pm d$. Cum $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$ si $4 \mid b^2 - d^2$ rezulta ca b si d au aceeasi paritate. Mai mult, cum $2a \mid b + d$ si $2a \mid b - d$ rezulta ca $2a \mid 2b$ si $2a \mid 2d$ de unde $a \mid (b, d) = k$.

Deci numarul total de alegeri al coeficientilor (a,b,c) este cel mult $\frac{n^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_0(k)}{k^2}$ pentru ca odata fixat $k \mid (b,d)$ avem $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{k}\right)^2$ alegeri pentru b si d de aceeasi paritate si $\sigma_0(k)$ alegeri pentru $a \mid k$ unde $\sigma_0(k)$ reprezinta numarul de divizori ai numarului natural k.

Lasam cititorului placerea de a arata ca $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_0(k)}{k^2} < 4$ de unde rezulta inegalitatea a doua. □

Problemă 20. *Gasiti functiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel incat $f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y$ pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$. (Olimpiada Nationala de Matematica 2008, clasa a 9-a)*

Demonstraţie. Punand $x = 0$ obtinem $f(f(y)) = y$; punand $y = f(y)$ obtinem $f(x^2+f(f(y))) = f(x^2+y) = xf(x) + f(y)$. In aceasta relatie inlocuim $x = 1$ si obtinem $f(1 + y) = f(1) + f(y)$; repetand obtinem ca pentru orice numar natural n avem

$$f(n) = f(1) + f(n-1) = \ldots = nf(1)$$

si inlocuind inca o data in ecuatia functionala obtinem $f(1) = 1$ deci $f(x) = x$. □

Problemă 21. *Fie $\mathcal{F}$ multimea functiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel incat*

$$f(a^2 - b^2) = f^2(a) - f^2(b)$$

pentru oricare doua numere naturale $a \geq b$.

1. *Determinati multimea $\{f(1) : f \in \mathcal{F}\}$.*

2. *Aratati ca daca $f(1) = 0$ atunci $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{N}$.*

(adaptat din Olimpiada Nationala de Matematica 2010, clasa a 9-a)

Demonstraţie. 1. Punand $a = b$ obtinem ca $f(0) = 0$. Punand $b = 0$ obtinem $f(a^2) = f^2(a)$ si pentru $a = 1$ avem $f(1) = f^2(1)$ de unde $f(1) \in \{0, 1\}$.

2. Daca $a \geq b$ atunci $f^2(a) - f^2(b) = f(a^2 - b^2) \geq 0$ deci functia f este crescatoare. Cum $f(1) = 0$ avem $f(2^2 - 1^1) = f(2^2) - f(1) = f(4)$ deci $f(3) = f(4)$. Mai mult, avem $4^2 - 3^2 = 7$ deci $f(7) = f(4)^2 - f(3)^2 = 0$. Dar in acest caz $f(7^2) = f(7)^2 = 0$ si $f(7^4) = f(7^2)^2 = 0$ si asa mai departe. Cum f este crescatoare rezulta ca $f(a) = 0$ pentru orice $a \geq 0$. Daca $f(1) = 1$ atunci

□

Matematica în Informatică
Demonstraţii fără divulgare de cunoştinţe

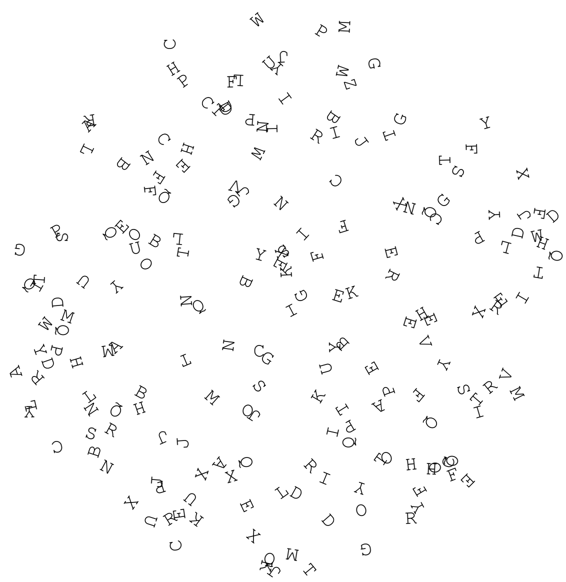
Andrei Jorza

Introducere

Una din cele mai importante aspecte ale securitatii pe Internet este faptul ca este posibil sa demonstrezi ca esti o anumita persoana. Deseori acest lucru se intampla folosind un nume de utilizator si o parola, dar acest lucru poate fi periculos in cazul in care sunt persoane sau programe care asculta comunicatia si intercepteaza parola. Problema principala este ca, pentru a demonstra ca esti o anumita persoana, trebuie sa divulgi un anumit secret pe care poate sa il stie doar persoana respectiva, iar acest lucru poate duce la pierderea secretului respectiv.

Ideal, din acest punct de vedere, este sa exista o procedura (in informatica se numeste "protocol") prin care se poate dovedi detinerea unui secret fara a divulga nimic. Acest fenomen poate aparea paradoxal insa presupune ceva mai strict decat apare la inceput: protocolul trebuie sa nu divulge nimic nu numai despre secretul in cauza, dar si despre orice altceva.

Cum ar putea ceva de genul acesta sa existe? Prezentam mai jos un exemplu extrem de simplu. Pe o foaie sunt scrise 200 de litere aleatoare dintre care o singura litera Z. Daca aratam desenul cuiva pentru o secunda desigur persoana respectiva nu are timp sa constientizeze nicio informatie din figura.



Cum am putea sa demonstram respectivei persoane ca litera Z apare in figura fara sa divulgam nici o alta informatie? Cea mai simpla solutie este sa luam o foaie cu o mica gaura si sa o pune deasupra figurii astfel incat gaura sa lase vazuta doar litera Z. (Lasam cititorului placerea de a gasi unica litera Z in figura.)

O astfel de procedura am dori si in cazul comunicarii pe Internet unde din pacate nu putem apela la foi gaurite si va trebui sa recurgem la cateva observatii ingenioase legate de impartirea cu rest a doua numere naturale.

1 Un sistem de securitate simplu

Cheie publica

Sistemele de criptografie cu cheie publica se bazeaza pe faptul ca fiecare destinatar al unui secret are o cheie publica care permite codarea secretului si o cheie privata care permite decodarea secretului. Idea de baza a acestei paradigme este imposibilitatea de a deduce cheia privata din cheia publica. Cea mai raspandita sursa pentru chei publica/private este urmatoarea: pentru doua numere prime distincte p si q foarte mari (de ordinul 2^{1024}) cheia publica reprezinta numarul $n = pq$ iar cheia privata perechea (p, q). Cum nu exista niciun algoritm rapid pentru descompunerea in factori primi a numarului n, este imposibil de a deduce p si q din n.

Codarea $x^2 \pmod n$

Unul dintre primele sisteme de criptografie cu cheie publica pe Internet se baza pe urmatorul protocol de codare. Sa presupunem ca dorim sa codam un numar x (reprezentand fiecare simbol al alfabetului printr-un numar orice secret poate fi interpretat ca un numar) vom calcula $y = x^2 \pmod n$ care va fi codarea secretului x. Desigur, x si $n-x$ dau acelasi cod y deci este nevoie de anumite precizari pentru ca destinatarul secretului sa poata sa decodeze y.

In primul rand, destinatarul B alege numerele prime p si q astfel incat $p \equiv q \equiv 1 \pmod 4$. In al doilea rand A, cel care trimite secretul, alege sa trimita doar secrete $x < \frac{n}{2}$. Acest lucru este intotdeauna posibil, daca de exemply $x > \frac{n}{2}$; notand $x = \overline{x_1 \dots x_k}$ atunci A transmite doua secrete $x' = \overline{x_1 \dots x_{k/2}}$ si $x'' = \overline{x_{k/2+1} \dots x_k}$, fiecare din ele fiind $< \frac{n}{2}$.

Pentru a doua conditie e nevoie de putina notatie din teoria numerelor. Vom spune ca y este un rest patratic modulo n daca exista x astfel incat $y \equiv x^2 \pmod n$. Pentru un numar prim p definim $\left(\frac{y}{p}\right)$ ca fiind 1 daca y este rest patratic si -1 daca nu este rest patratic. Definim simbolul lui Jacobi ca fiind $\left(\frac{y}{n}\right) = \left(\frac{y}{p}\right)\left(\frac{y}{q}\right)$ daca $n = pq$. Vom presupune ca B va trimite doar secrete x astfel incat $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$.

Decodarea

Destinatarul B primeste y si doreste sa calculeze $x < \frac{n}{2}$ astfel incat $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$, avand in vedere ca B stie ca secretul x trimis are aceste doua proprietati. Practic ce trebuie B sa faca este sa calculeze "$\sqrt{y}$" $\pmod n$. Sa presupunem pentru inceput ca B trebuie sa calculeze $\sqrt{y} \pmod p$ pentru un numar prim $p \equiv 3 \pmod 4$. Atunci lucrurile se deduc din teorema lui Fermat si anume daca $u = y^{(p+1)/4} \pmod p$ atunci

$$u^2 \equiv y^{(p+1)/2} \equiv x^{p+1} \equiv x^{p-1}x^2 \equiv x^2 \pmod p$$

deci $u \equiv \pm x \pmod p$.

Deci strategia lui B este urmatoarea: mai intai B calculeaza $u = y^{(p+1)/4} \pmod p$ si $v = y^{(q+1)/4} \pmod q$ astfel incat $u^2 \equiv y \pmod p$ si $v^2 \equiv y \pmod q$. Din Teorema Chineza a Resturilor rezulta existenta unui $x_{u,v}$ astfel incat $x_{u,v} \equiv u \pmod p$ si $x_{u,v} \equiv v \pmod q$. (In mod practic acest lucru se face folosind algoritmul Euclidian pentru a gasi a si b astfel incat $ap + ba = 1$ in care caz $x = ubq + vap$.) Atunci $x_{u,v}^2 \equiv u^2 \equiv y \pmod p$ si $x_{u,v}^2 \equiv v^2 \equiv y \pmod q$ deci $x_{u,v}^2 \equiv y \pmod n$.

Desigur, oricare din $\pm u$ si $\pm v$ va da un $x_{\pm u, \pm v}$ ca solutie a ecuatiei $x^2 \equiv y \pmod n$. Aceste patru solutii vin in perechi de forma $(a, n-a)$ deci doar doua din cele patru vor fi $< \frac{n}{2}$ iar din aceste doua doar una va avea proprietatea ca $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$ deci acesta este secretul al carui cod este y.

Securitatea codarii

Am dori sa demonstram ca acest sistem de securitate este sigur, adica faptul ca nu exista nici un algoritm care sa poata determina x din y. Sa presupunem ca exista un astfel de algoritm $\mathrm{AL}(y) = x$. Vom demonstra ca in acest caz putem calcula numerele p si q vazand doar n, ceea ce este imposibil la momentul actual.

Metoda este urmatoarea: alegem la intamplare un numar $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ astfel incat $\left(\frac{x}{n}\right) = -1$. La momentul de fata nu exista nici un algoritm deterministic care sa ne dea un astfel de x, dar alegand la intamplare x de multe ori, probabilitatea ca sa nu obinem un astfel de x este exponential de mica.

Daca $(x, n) \neq 1$ atunci p si q sunt (x, n) si $n/(x, n)$. Daca nu, calculam $y = x^2 \pmod n$ si $x' = \mathrm{AL}(y)$. Daca $x + x' \equiv 0 \pmod p$ si $x + x' \equiv 0 \pmod q$ atunci $x' = -x$ deci $\left(\frac{x'}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\frac{x}{n}\right)$ ceea ce contrazice presupunerea. Deci fara a reduce generalitatea putem presupune ca $x \equiv x' \pmod p$ in care caz $p = (x - x', n)$ si $q = n/p$.

Aici am folosit faptul ca daca $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$ atunci $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) = -1$ pentru ca $(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{(q-1)/2} = -1$ iar daca -1 ar fi rest patratic, sa zicem $w^2 \pmod p$ atunci am avea $(-1)^{(p-1)/2} \equiv w^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Deci $\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^2 = 1$.

2 Cum demonstram ca suntem destinatarul unui secret?

Sa zicem ca o persoana A doreste sa comunice cu persoana B despre care stie doar cheia publica n. Cum poate sa afle A daca B intr-adevar este persoana care detine cheia privata (p, q)? Desigur, sectiunea precedenta ne spune ca A nu poate pur si simplu sa il roage pe B sa decodeze un anumit secret x pentru ca x poate fi ales intr-un mod in care A, vazand raspunsul lui B, ar putea deduce la randul sau cheia privata (p, q). Deci este necesara o interactiune mai complicata care sa ii permita lui A sa se convinga de faptul ca B este detinatorul cheii privata fara ca B sa ii divulge vreun lucru despre cheia privata: pe scurt, este nevoie de un protocol de demonstratie fara divulgare de cunostinte.

Protocolul de verificare a detinerii cheii private consta intr-o serie de comunicari intre A si B in care destinatarul B ii va demonstra lui A ca poate sa decodeze secretul x din mesajul codat y, fara sa ii divulge nimic despre x (altfel A ar putea determina p si q alegand y strategic). Fiecare comunicare este descrisa in diagrama urmatoare:

$$
\begin{aligned}
B &\xrightarrow{\quad w=u^2 \pmod n \quad} A \\
B &\xleftarrow{\quad c\in\{0,1\} \quad} A \\
B &\xrightarrow{\quad v \quad} A
\end{aligned}
$$

in prima etapa a comunicarii B alege aleator un numar u si ii trimite lui A numarul $w = u^2 \pmod{n}$; in a doua etapa A alege aleator un numar $c \in \{0, 1\}$ dupa care B ii trimite $v = u$ daca $c = 0$ si ux daca $c = 1$. Cum A primeste doar una din u si ux in fiecare etapa, B nu poate sa deduca x.

Aceasta serie de comunicari se repeta de k ori

$$\begin{array}{ccccccc}
B \xrightarrow{w_1} A & \quad & B \xrightarrow{w_2} A & \quad & & \quad & B \xrightarrow{w_k} A \\
B \xleftarrow{c_1} A & & B \xleftarrow{c_2} A & & \cdots & & B \xleftarrow{c_k} A \\
B \xrightarrow{v_1} A & & B \xrightarrow{v_2} A & & & & B \xrightarrow{v_k} A
\end{array}$$

Cum se poate convinge A ca intr-adevar B poate decoda mesajul y? Le fiecare comunicare A verifica faptul ca intr-adevar $v^2 \equiv w \pmod{n}$ daca $c = 0$ si $v^2 \equiv xw \pmod{n}$ daca $c = 1$. Ramane doar ca A sa fie convins ca daca B nu stie sa calculeze x din y atunci probabilitatea este extrem de mica sa reuseasca sa treaca cu bine cele k verificari.

Sa presupunem ca B este un trisor si de fapt nu poate sa calculeze x. Atunci la fiecare comunicare are doua optiuni:

1. B alege u aleator si trimite $w = u^2 \pmod{n}$ in care caz daca A alege $c = 1$ (cu probabilitate $1/2$) atunci A nu poata sa trimita raspunsul corect ux;

2. B alege $v = ux$ aleator si trimite $w = v^2/y \pmod{n}$ in care caz poata sa raspunda corect lui A daca acesta alege $c = 1$ dar nu daca $c = 0$.

Deci la fiecare comunicare B nu trece testul cu probabilitate $\dfrac{1}{2}$ deci probabilitatea ca B sa treaca testul cu k comunicari fara sa detina x este $\dfrac{1}{2^k}$ ceea ce este neglijabil cand k este mare.

3 Am divulgat ceva?

In urma protocolului descris in sectiunea precedenta A poate sa se convinga cu probabilitiate foarte mare ca intr-adevar B detine cheia privata (p, q) si poate sa calculeze secretul x. Intrebarea este daca acest protocol a divulgat vreo informatie despre cheia privata (p, q). Raspunsul este nu, desigur, pentru ca la fiecare pas A primeste doar un numar aleator v (fie u fie ux) dar, neavand cheia privata (p, q) nu are acces la cealalta valoare posibila, deci nu poate sa calculeze x.

Bibliografie

[1] M. Rabin, *Digitalized Signatures and Public-Key Functions as Intractable as Factorization,* MIT, 1979.

[2] O. Goldreich, S. Micali, A. Wigderson, *Proofs that yield nothing but their validity,* JACM, v. 38 (3), 1991.

Despre triunghiurile diofantice

Nicoară Ştefan

Diofant ($\Delta\iota o\phi\alpha\nu\tau o\varsigma$) din Alexandria a trăit în sec. III e.n. Se ştie despre el doar că a decedat la vârsta de 84 de ani. El este cunoscut pentru lucrările sale de algebra şi teoria numerelor. Una din principalele sale lucrări se intituleaza Arithmetica, care s-a păstrat doar pe jumatate (primele 6 cărţi din cele 13). Cartea este remarcabilă şi se ocupă cu rezolvarea unor ecuaţii algebrice nedeterminate pentru care se caută soluţii numere naturale sau întregi, cunoscute astăzi sub numele de "ecuaţii diofantice".

Cea mai cunoscută ecuaţie în care necunoscutele nu sunt liniare este cea pitagoreică, adică: $x^2+y^2=z^2$. Ecuaţia a fost studiată de Pitagora în legătură cu triunghiurile dreptunghice cu laturi numere naturale. Pentru ecuaţia dată, dacă tripletul (x_0, y_0, z_0) este soluţie a ecuaţiei, atunci (kx_0, ky_0, kz_0)cu $k \in \mathbb{Z}$ este de asemenea soluţie, deci este suficient să determinăm triplete în care elementele componente sunt prime între ele. În acest sens dăm următoarea teoremă, împreună cu două soluţii:

Teoremă 1. *Orice soluţie (x, y, z) a ecuaţiei $x^2+y^2=z^2$ cu componente prime între ele este de forma $x=m^2-n^2, y=2mn, z=m^2+n^2$, cu m şi n două numere intregi prime între ele.*

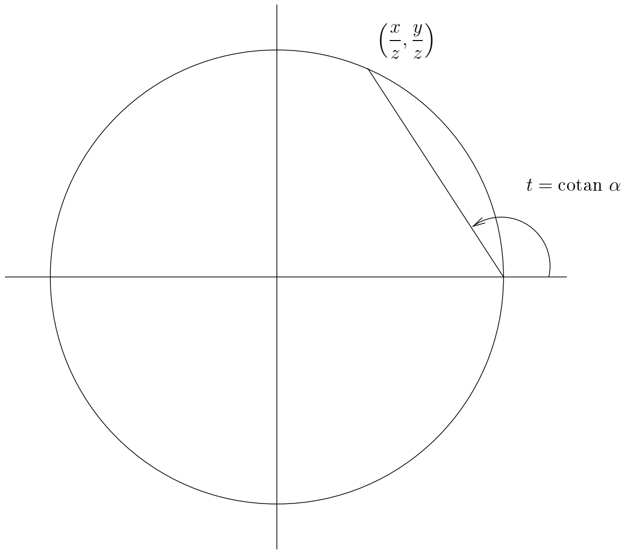
Demonstraţia algebrică. Să începem prin a verifica că tripletele date sunt într-adevăr soluţii ale ecuaţiei: Fie $x=m^2-n^2, y=2mn, z=m^2+n^2$; atunci $x^2+y^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2=z^2$, deci este soluţie. Să arătăm că $(x, y, z)=1$. Numerele x, y nu pot fi ambele impare, deoarece dacă sunt impare, atunci : $x^2+y^2=4k+2$, iar z par , rezultă deci ca $z^2=4p$ (contradicţie), ca atare unul dintre numerele x, y este par. Dacă $d=(x, y, z)$, rezultă $d|(m^2+n^2)+(m^2-n^2)$, deci $d|2m^2$ si $d|2n^2$ şi cum $(m, n)=1$, rezultă că $d \mid 2$ şi astfel m^2+n^2 este par, dar m, n sunt de parităţi diferite, deci $d=1$.

Reciproc, dacă $(x, y, z)=1$ şi este soluţie, $y=2a$, rezultă că x şi z sunt impare. Deci $z+x, z-x$ sunt pare, şi atunci : $z+x=2b$, $z-x=2c$. Avem astfel $(b, c)=1$ deoarece $(z, x)=1$. Mai avem : $4a^2=y^2=z^2-x^2=(z-x)(z+x)=4bc$, rezultă deci că $a^2=bc$ şi $b=m^2$, $c=n^2$, deoarece $(b, c)=1$. Obţinem : $x=b-c=m^2-n^2$,$y=2mn$, $z=b+c=m^2+n^2$ care este o soluţie cu componentele prime între ele. □

Demonsatraţia geometrică. O mult mai intuitivă demonstraţie se poate vedea geometric.

Un triplet pitagoreic (x, y, z) dă un punct $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ cu coordonate întregi pe cercul cu rază 1 având centrul la origine, deoarece $\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=1$. Fie t inversa pantei dreptei care uneşte punctul $(1,0)$ cu punctul $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$; daca $x'=\frac{x}{z}$ şi $y'=\frac{y}{z}$ atunci $t=\frac{1-x'}{y'}$ deci $x'=-ty'+1$. În acest caz ecuaţia pitagoreică se scrie $(x')^2+(y')^2=(-ty'+1)^2+(y')^2=1$ de unde $((y')^2(t^2+1)-2y't=0$ din care deducem $y'=\frac{2t}{t^2+1}$ şi $x'=\frac{t^2-1}{t^2+1}$. Cum t este la rândul său un număr raţional, poate fi scris sub forma $t=\frac{m}{n}$ de unde rezultă formulele din teoremă. □

Corolar 1. *Soluţia generală a ecuaţiei pitagorice $x^2+y^2=z^2$ este : $x=2rmn$, $y=r(m^2-n^2)$, $z=r(m^2+n^2)$ cu $r, m, n \in Z$.*



În continuare vom defini conceptul de triunghi dreptunghic fundamental.

Definiţie 1. *Numim triunghi dreptunghic fundamental sau de bază acel triunghi dreptunghic în care laturile sunt numere prime între ele.*

Cu numele lui Diofant suntem deja familiarizaţi. Printre numeroasele probleme rămase moştenire de la el se regăseşte următoarea.

Problemă 1. *Să se determine un triunghi dreptunghic cu laturile numere întregi astfel încât diferenţa dintre ipotenuză şi oricare dintre cele două catete să fie cubul unui număr natural.*

După câte am aflat dintr-o carte de istorie a matematicii, Diofant a determinat numai un singur triunghi cu proprietăţile impuse. Acest triunghi are dimensiunile:

$$a = 104, b = 96, c = 40,$$

unde a reprezintă lungimea ipotenuzei, iar b şi c reprezintă lungimile celor două catete. Într-adevăr, $104^2 = 96^2 + 40^2$, iar $104 - 96 = 2^3$ şi $104 - 40 = 4^3$. Problema lui Diofant a fost reluată în zilele noastre de mai mulţi matematicieni prinşi în vraja numerelor naturale, printre aceştia, apărând şi matematicianul sovietic S.I. Zetel.

El reuşeşte să rezolve o problemă extrem de interesantă şi anume:

Problemă 2. *Să se determine triunghiurile pitagoreice astfel încât diferenţa dintre ipotenuză şi oricare dintre catete este puterea a n-a a unui număr natural, pentru n natural impar (pentru $n = 3$ se obţine problema lui Diofant).*

Soluţie. Dupŷ cum am văzut deja, laturile unui triunghi pitagoreic fundamental se exprimă astfel:

$$a = x^2 + y^2, b = x^2 - y^2, c = 2xy$$

unde x şi y sunt numere întregi.

Condiţia problemei este $a-b=u^n$ şi $a-c=v^n$. Înlocuind a şi b obţinem

$$\begin{aligned} a-b &= 2y^2 = u^n \\ a-c &= (x-y)^2 = v^n \end{aligned}$$

Cum n este un număr impar rezultă că u trebuie să fie de forma $u=2p^2$ iar v de forma $v=q^2$ de unde obţinem

$$\begin{aligned} y &= 2^{(n-1)/2}p^n \\ x-y &= q^n \end{aligned}$$

de unde $x=2^{(n-1)/2}p^n+q^n$. Deci tripletele pitagoreice cătutate sunt

$$\begin{aligned} a &= \left(2^{(n-1)/2}p^n+q^n\right)^2+\left(2^{(n-1)/2}p^n\right)^2 \\ b &= \left(2^{(n-1)/2}p^n+q^n\right)^2-\left(2^{(n-1)/2}p^n\right)^2 \\ c &= 2^{(n+1)/2}p^n\left(2^{(n-1)/2}p^n+q^n\right) \end{aligned}$$

Dintre aceste soluţii, cele cu $(2p,q)=1$ correspund tripletelor fundamentale. $\square$

În încheiere vom prezenta două exemple concrete de triunghiuri pitagorice fundamentale:

1. $p=1, q=3, n=3$ dă $y=2, x=29$ deci $a=845$, $b=837$ şi $c=116$ cu $a-b=2^3, a-c=9^3$.
2. $p=2, q=3, n=5$ dă $y=2^7=128, x=2^7+3^5=371$ deci $a=154025$, $b=121257$ şi $c=94976$ cu $a-b=8^5, a-c=9^5$.

Bibliografie

[1] Viorel GH. Voda, Surprize în matematica elementară, Edit. Albatros, Bucureşti, 1981

[2] Adrian C.Albu, Istoria Matematicii, Vol. I, Edit. Mirton, Timişoara, 1997

Asupra unor inegalităţi

Hălmăgean Eugen, Tudoran Ramona

Scopul acestui articol este de a reaminti câteva inegalităţi din algebră şi analiza matematică atribuite marelui matematician român Tiberiu Popoviciu.

Pentru început să reamintim conceptul de funcţie convexă (respectiv concavă), precum şi anumite proprietăţi fundamentale ale acestora.

Definiţie 1. *Fie $I \subseteq R$, un interval (nevid) al dreptei reale.*

O funcţie $f : I \to R$ se numeşte *convexă* (respectiv *concavă*) dacă pentru orice $x, y \in I$ şi orice $t \in [0,1]$ are loc inegalitatea $f(t\cdot x+(1-t)y) \leq t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)$ (respectiv $f(t\cdot x+(1-t)y) \geq t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)$).

Propoziţie 1. *O funcţie $f : I \to R$ este convexă dacă şi numai dacă $-f : I \to R$ este concavă.*

Propoziţie 2 (Jensen)**.** *O funcţie $f : I \to R$ este convexă dacă şi numai dacă pentru orice număr natural $n \geq 2$, numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ şi $t_1, t_2, \ldots, t_n \in (0,\infty)$ cu proprietatea că $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ are loc inegalitatea:*

$$f(t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2 + \cdots + t_n \cdot x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(t_2) + \cdots + t_n f(t_n)$$

Propoziţie 3. *Dacă $f : I \to R$ este convexă, atunci f este continuă pe interiorul lui I.*

Propoziţie 4. *Dacă $f : I \to R$ este de două ori derivabilă pe I, atunci f este convexă dacă şi numai dacă f'' este pozitivă.*

Demonstraţiile se pot găsi, fie în manualele de clasa a XI-a de liceu, fie în lucrarea [1].

Teoremă 1 (inegalitatea lui Popoviciu)**.** *Fie $f : I \to R$, o funcţiee convexă. Atunci pentru orice $x, y, z \in I$ are loc inegalitatea:*

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{2}{3}\cdot\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right)$$

Demonstraţie. Se observă uşor simetria inegalităţii în raport cu x, y şi z. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $x \leq y \leq z$. Atunci avem două cazuri:

1. $\dfrac{x+y+z}{3} \leq y \leq z,$
2. $y \leq \dfrac{x+y+z}{3} \leq z.$

În primul caz, din $x \leq y \leq z$ şi $\dfrac{x+y+z}{3} \leq y \leq z$, deducem că:

$$x \leq \frac{x+z}{2} \leq \frac{x+y+z}{3} \text{ şi } x \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

Prin adunare, există $s, t \in [0,1]$ astfel încât :

$$\frac{x+z}{2} = sx + (1-s)\frac{x+y+z}{3} \text{ şi } \frac{x+y}{2} = tx + (1-t)\frac{x+y+z}{3}$$

De aici, adunând membru cu membru, deducem: $\dfrac{2x-y-z}{6} = (s-t)\dfrac{2x-y-z}{3}$ de unde $s+t=\frac{1}{2}$.

Dar $f : I \to R$ este convexă deci

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) = f\left(sz + (1-s)\frac{x+y+z}{3}\right) \leq sf(x) + (1-s)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

şi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(tx + (1-t)\frac{x+y+z}{3}\right) \leq tf(x) + (1-t)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

Şi, în fine $f\left(\dfrac{y+z}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}f(y) + \dfrac{1}{2}f(z)$

Adunăm membru cu membru inegalităţile (ţinând cont că $s+t=\frac{1}{2}$) , găsim:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{2} + \frac{3}{2}\cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

De aici deducem

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{2}{3}\cdot\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right)$$

ceea ce trebuia să demonstrăm.

Al doilea caz se tratează analog. □

Nu putem încheia aceste consideraţii fără a aminti aici o frumoasă generalizare a inegalităţii lui Popoviciu, datorată lui Burkill:

Teoremă 2. *Dacă $f : [a,b] \to R$ este convexă, atunci oricare ar fi $p, q, r > 0$, are loc inegalitatea:*

$$(p+q+r)f\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) + pf(x) + qf(y) + rf(z) \geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) + (q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right) + (r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right)$$

(Pentru demonstraţie se poate consulta [4] Nr 2/1998, Pag. 5).

Observaţie 1. *Dacă $p = q = r = 1$, se obţine inegalitatea lui Popoviciu.*

Pentru numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ definim media aritmetică şi geometrică

$$A_k = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$$
$$G_k = \sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_k} = (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k}$$

Atunci are loc:

Teoremă 3 (Popoviciu). *1.* $0 = A_1 - G_1 \leq 2(A_2 - G_2) \leq 3(A_3 - G_3) \leq \ldots \leq n(A_n - G_n)$

2. $1 = \dfrac{G_1}{A_1} \geq \left(\dfrac{G_2}{A_2}\right)^2 \geq \left(\dfrac{G_3}{A_3}\right)^3 \geq \ldots \geq \left(\dfrac{G_n}{A_n}\right)^n$

Demonstraţie. 1. Pentru fiecare $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ considerăm funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită astfel:

$$f(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x}{k} - (x_1 x_2 \cdots x_{k-1} x)^{1/k}$$

Evident, f este continuă, derivabilă pe $(0, \infty)$ şi avem:

$$f'(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \cdot \left(G_{k-1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot x^{\frac{1-k}{k}} = \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \left(\frac{G_{k-1}}{x}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)$$

iar $f'' = \dfrac{k-1}{k^2} \cdot \left(\dfrac{G_{k-1}^{k-1}}{x^{2k-1}}\right)^{\frac{1}{k}}$. Se observă de aici că: $f'(G_{k-1}) = 0$ şi $f''(x) > 0$.

Avem tabelul de variaţie:

x	0	G_{k-1}	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Deci, pentru $x \in (0, \infty)$, avem că $f(x) \geq f(G_{k-1})$. În particular avem şi $f(x_k) \geq f(G_{k-1})$, dar

$$f(G_{k-1}) = \frac{(k-1)A_{k-1} + G_{k-1}}{k} - (G_{k-1}^{k-1} \cdot G_{k-1})^{\frac{1}{k}} = \frac{(k-1)A_{k-1} + G_{k-1}}{k} - G_{k-1} = \frac{(k-1)(A_{k-1} - G_{k-1})}{k}$$

iar $f(x_k) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} - (x_1 \cdot x_2 \cdots x_k)^{\frac{1}{k}} = A_k - G_k$ de unde rezultă că $A_k - G_k \geq \frac{k-1}{k} \cdot (A_{k-1} - G_{k-1})$, sau echivalent: $(k-1) \cdot (A_{k-1} - G_{k-1}) \leq k \cdot (A_k - G_k)$.

2. Analog, definim în mod natural funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\frac{(k-1) \cdot A_{k-1} + x}{k}\right)^{k-1} - A_{k-1}^{k-1} \cdot x$$

continuă şi derivabilă pe $(0, \infty)$. Avem

$$f'(x) = \left(\frac{(k-1)A_{k-1} + x}{k}\right)^{k-1} - A_{k-1}^{k-1}$$

şi

$$f''(x) = \frac{k-1}{k} \cdot \left(\frac{(k-1) \cdot A_{k-1} + x}{k}\right)^{k-2}$$

Se observă de aici că: $f'(A_{k-1}) = 0$ şi $f''(x) > 0$. Avem tabelul de variaţie:

x	0	A_{k-1}	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Deci, pentru $x \in (0, \infty)$ avem că $f(x) \geq f(A_{k-1})$, dar

$$f(A_{k-1}) = \left(\frac{(k-1) \cdot A_{k-1} + A_{k-1}}{k} \right)^{k-1} - A_{k-1}^{k-1} \cdot A_{k-1} = 0$$

deci $f(x) \geq 0$, în particular avem şi $f(x_k) \geq 0$, adică: $\left(\frac{(k-1) \cdot A_{k-1} + x_k}{k} \right)^{k} - A_{k-1}^{k-1} \cdot x_k \geq 0$ sau $\left(\frac{k \cdot A_k}{k} \right)^{k} - A_{k-1}^{k-1} \cdot x_k \geq 0$, adică $A_k^k - A_{k-1}^{k-1} \cdot x_k \geq 0$, de unde $\left(\frac{A_{k-1}}{G_{k-1}} \right)^{k-1} \leq \left(\frac{A_k}{G_k} \right)^{k}$, ceea ce încheie demonstraţia.

□

Încheiem aceste consideraţii subliniind faptul că aceste inegalităţi sunt echivalente cu alte inegalităţi clasice celebre ca:

1. $x^n \geq 1 + n(x-1)$ pentru $x \in (0, \infty)$ si $n \in \mathbb{N}$ (Bernoulli)
2. $(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, unde $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, \infty)$ (inegalitatea mediilor)

Bibliografie

[1] Traian Ceauşu, Ana Cristina Muntean, Ioan Stana - Echivalenţa unor inegalităţi clasice, Editura Mirton, Timişoara, 2007

[2] Mihai Onucu Drimbe - Inegalităţ-idei şi metode, Editura Gil, Zalău, 2003

[3] Mircea Becheanu, Bogdan Enescu - Inegalităţi elementare... şi mai puţin elementare, Editura Gil, Zalău, 2007.

[4] Colecţia Revistei de Matematică din Timişoara, 1991-1998.

Teorema zilei

Potocean Octavia, Potocean Mircea

1 Inegalitatea lui Cebîşev aplicată în exerciţiile cu logaritmi

Dacă $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n$ şi $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_n$ (în principiu seturile de numere trebuie să aibă aceaşi monotonie), $n \in \mathbb{Z}$ atunci:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că:

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \leq S(\sigma) \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

unde $S(\sigma) = a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \cdots + a_nb_{\sigma(n)}$ iar mulţimea $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ reprezintă o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Observăm mai întâi că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \geq b, c \geq d$ atunci $ac + bd \geq ad + bc$ de unde deducem că $a(c-d) - b(c-d) \geq 0$ şi $(a-b)(c-d) \geq 0$. De aici rezultă că dacă permutarea σ are o inversiune (ij), ceea ce inseamna că $i < j$ dar $\sigma(i) > \sigma(j)$ atunci pentru permutarea $\sigma' = \sigma \cdot (ij)$ care se obtine din σ schimband $\sigma(i)$ si $\sigma(j)$ intre ele avem

$$S(\sigma') - S(\sigma) = a_ib_{\sigma(j)} + a_jb_{\sigma(i)} - (a_ib_{\sigma(i)} + a_jb_{\sigma(j)}) \geq 0$$

Rezulta ca valoarea lui $S(\sigma)$ scade pe masura ce σ are din ce in ce mai multe inversiuni; valoarea maxima se obtine pentru σ cu numar minim de inversiuni, adica pentru σ permutarea triviala, iar valoarea minima pentru $\sigma(i) = n + 1 - i$ deci

$$a_1b_n + \cdots + a_nb_1 \leq S(\sigma) \leq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

Aplicand aceasta inegalitate pentru permutarile obtinute ca puteri ale ciclului $(12 \ldots n)$ obtinem

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \\
&\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1 \\
&\qquad \ldots \\
&\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1}
\end{aligned}$$

de unde, prin adunare membru cu membru, se obţine inegalitatea lui Cebîşev.

□

Observaţie 1. *Dacă mulţimile de numere au monotonie opusă, inegalitatea lui Cebîşev devine*

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

Observaţie 2. *Cazul de egalitate are loc dacă şi numai dacă* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ *sau* $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$

2 Aplicaţii:

Problema 1. *Să se arate că* $(a+b)\log\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge b\log a + a\log b,\ a, b \in (1, \infty)$

Demonstraţie. Din inegalitatea mediilor avem

$$(a+b)\log\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge (a+b)\log\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}(\log a + \log b)$$

Fara a reduce generalitatea presupunem ca $a \le b$ de unde $\log a \le \log b$; aplicand inegalitatea lui Cebîşev obtinem

$$\frac{a+b}{2}(\log a + \log b) \ge b\log a + a\log b$$

□

Problema 2. *Fie* $a, b, c \in (0, \infty)$ *atunci* $(a^ab^bc^c)^2 \ge a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}$ *sau echivalent ca* $(abc)^{(a+b+c)/3} \le a^ab^bc^c$.

Demonstraţie. Aplicăm inegalitatea lui Cebîşev pentru $a \le b \le c$ şi $\ln a \le \ln b \le \ln c$ si obtinem

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} \le \frac{a\ln a + b\ln b + c\ln c}{3}$$

de unde $(a^ab^bc^c)^3 \ge (abc)^{a+b+c}$ deci $(a^ab^bc^c)^2 \ge a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}$. □

Problema 3. *Fie* $x, y, z \in [0, \infty)$ *cu* $x+y+z \ge 1$ *si* $a \in (1, \infty)$. *Să se demonstreze ca* $xa^x + ya^y + za^z \ge \sqrt[3]{a}$.

Demonstraţie. Aplicând inegalitatea lui Cebîşev pentru $x \le y \le z$ si $a^x \le a^y \le a^z$ obţinem:

$$3(xa^x + ya^y + za^z) \ge (x+y+z)(a^x + a^y + a^z) \ge a^x + a^y + a^z \ge 3\sqrt[3]{a^{x+y+z}} \ge 3\sqrt[3]{a}$$

cu egalitate dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$. □

Problema 4. *Fie* $a, b, c \in (0, \infty)$ *cu* $a + b + c = 1$. *Să se demonstreze că*

$$\log_a(a^2 + b^2 + c^2) + \log_b(a^2 + b^2 + c^2) + \log_c(a^2 + b^2 + c^2) \le a\log_a abc + b\log_b abc + c\log_c abc$$

Demonstraţie. Ordonand $0 < a \le b \le c < 1$ obtinem ca $\log_a abc < \log_b abc < \log_c abc$ pentru ca $\log a < \log b < \log c < 0$. Aplicăm inegalitatea lui Cebîşev şi avem

$$\begin{aligned} a\log_a abc + b\log_b abc + c\log_c abc &\ge \frac{a+b+c}{3}(\log_a abc + \log_b abc + \log_c abc) \\ &= \frac{1}{3}(\log_a abc + \log_b abc + \log_c abc) \end{aligned}$$

Aplicăm acum inegalitatea mediilor

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a + b + c)\left(\frac{a + b + c}{3}\right) \geq 1 \cdot \sqrt[3]{abc}$$

de unde deducem ca

$$\log_a(a^2 + b^2 + c^2) + \log_b(a^2 + b^2 + c^2) + \log_c(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{1}{3}(\log_a abc + \log_b abc + \log_c abc)$$

de unde rezulta ceea ce trebuia demonstrat. (Gabriel Popa) $\square$

Problema 5. *Săse ordoneze numerele:*

$$A = \log_2 3 \cdot \log_4 5 + \log_3 4 \cdot \log_5 6$$
$$B = \log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_4 5 \cdot \log_5 6$$
$$C = \log_2 3 \cdot \log_5 6 + \log_3 4 \cdot \log_4 5$$

Demonstraţie. Dacă $a > 1$ atunci funcţia $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, definita prin $f(a) = \log_a(a + 1)$ este strict descrescătoare.

Deci $\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5 > \log_5 6$ de unde rezultă $\log_2 3 > \log_3 4$ si $\log_4 5 > \log_5 6$ de unde aplicând inegalitatea lui Cebîşev obţinem

$$\frac{(\log_2 3 + \log_3 4) \cdot (\log_4 5 + \log_5 6)}{2} < \log_2 3 \cdot \log_4 5 + \log_3 4 \cdot \log_5 6$$

adică $C < A$.

Analog se arată $A < B$ de unde $C < A < B$. $\square$

Bibliografie

[1] Gh. Andrei, C. Caragea, I. Cucurezeanu - Probleme de algebră pentru concursurile de admitere şi olimpiadele de matematică, clasa a-X-a, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1993

[2] Gh. Andrei, C. Caragea - Probleme alese, Editura Gil, Zală, 1999

[3] Gh. Andrei - Exponenţiale şi logaritmi, Editura Gil, Zalău, 2006

[4] Pantelimon George Popescu, I.V. Maftei, Jose Inis Diaz Barrero, Marian Dincă - Inegalităţi matematice, Modele inovatoare, EDP RA, 2007

Generalizarea unor probleme de analiză matematică de la examenele de bacalaureat

Mirela Aldescu

Vom prezenta patru probleme de analiză matematică care sunt generalizări ale unor probleme date la examenele de bacalaureat, specializarea matematică-informatică sau ştiinţe ale naturii, sau care au apărut în variantele pentru bacalaureat în decursul anilor precedenţi.

Enunţuri

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x > 0$,

$$f(x) = (x + a) \cdot (\ln(x + 2a) - \ln x)$$

unde $a > 0$.

   (a) Să se calculeze $f'(x)$.

   (b) Să se determine $f''(x)$.

   (c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

   (d) Să se calculeze $\int_1^e f'(x)dx$.

   (e) Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 0$

$$\left(1 + \frac{2a}{n}\right)^{n+a} > \left(1 + \frac{2a}{n+1}\right)^{n+a+1}$$

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{ax+b}dx$ pentru orice $n \geq 0$, unde $a, b > 0$ sunt două numere naturale.

   (a) Să se calculeze I_0 si I_1.

   (b) Să se arate că $a \cdot I_{n+1} + b \cdot I_n = \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Să se demonstreze inegalitatea $I_n \geq I_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot I_n$.

3. Considerăm şirul de funcţii $I_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit astfel: $I_0(x) = 1$ si pentru $n \geq 1$,

$$I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t)dt$$

(a) Să se calculeze $I_0(1) + I_0(2) + \cdots + I_0(k)$ unde $k \geq 2$ este un număr natural.

(b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n(x)$ unde $x > 0$.

(c) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_0(p) + I_1(p) + \cdots + I_n(p)}{n} = 0$$

unde $p \geq 1$ este fixat.

4. Fie două numere naturale p, q astfel încât $p > q \geq 2$ şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite conform principiului

$$f(x) = \frac{\sin x}{p} + \frac{\cos x}{q}$$
$$g(x) = x - f(x)$$

Pentru un număr real x_0 definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $x_{n+1} = f(x_n)$ pentru orice $n \geq 0$.

(a) Să se calculeze $f'(x)$.

(b) Să se arate că $|f'(x)| \leq \dfrac{p+q}{p\cdot q}$ pentru orice x
^{i}nR.

(c) Să se demonstreze că există un singur număr real u astfel încât $g(u) = 0$.

(d) Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.

Soluţii

1. (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+a)' \cdot (\ln(x+2a) - \ln x) + (x+a) \cdot (\ln(x+2a) - \ln x)' \\ &= \ln(x+2a) - \ln x + (x+a)\left(\frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= \frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x} + (x+a)\cdot\left(\frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x}\right)' \\ &= 2\cdot\left(\frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x}\right) + (x+a)\cdot\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2a)^2}\right) = \frac{-4a}{x(x+2a)} + \frac{(x+a)\left(4ax+4a^2\right)}{x^2\left(x+2a\right)^2} \\ &= \frac{-4a}{x(x+2a)} + \frac{4a(x+a)^2}{x^2(x+2a)^2} = \frac{4a(x^2+2ax+a^2-x^2-2ax)}{x^2(x+2a)^2} \\ &= \frac{4a^3}{x^2(x+2a)^2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f'(x) &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+2a}{x}\right) + \lim_{x\to\infty} \frac{-2a(x+a)}{x(x+2)}\\ &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2a}{x}\right) - 2a\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{2a}{x}}\right)\cdot\frac{1}{x}\\ &= \ln(1+0) - 2a\cdot\frac{1+0}{1+0}\cdot\frac{1}{\infty} = \ln 1 - 0 = 0\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int_1^e f'(x)dx &= f(x)|_1^e = f(e)-f(1)\\ &= (e+a)\cdot(\ln(e+2a)-\ln e) - (1+a)\cdot(\ln(1+2a)-\ln 1)\\ &= (e+a)\cdot\ln\left(\frac{e+2a}{e}\right) - (1+a)\cdot\ln(1+2a)\end{aligned}$$

(e) Aplicând funcţia ln, inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$$(n+a)\ln\left(1+\frac{2a}{n}\right) > (n+a+1)\ln\left(1+\frac{2a}{n+1}\right)$$

sau, folosind $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, inegalitatea devine

$$(n+a)\left(\ln(n+2a)-\ln n\right) > (n+a+1)\left(\ln(n+1+2a)-\ln(n+1)\right)$$

Observăm că inegalitatea este de forma $f(n) > f(n+1)$ pentru funcţia f din problemă; rămâne de demonstrat că funcţia f este descrescătoare.

Având în vedere că $f''(x) = \dfrac{4a^3}{x^2(x+2a)^2} > 0$ pentru orice $x > 0$, obţinem că $f'(x)$ este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$. Dar la punctul (c) am obţinut că $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ deci $f'(x) < 0$ pentru $x > 0$, deoarece $f'(x)$ este o funcţie strict crescătoare. Rezultă că pe intervalul $(0,\infty)$ funcţia f este strict descrescătoare.

Pentru $a = \dfrac{1}{2}$ se obţine o problemă din anul 2006.

2. (a)

$$\begin{aligned}I_0 &= \int_0^1 \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\cdot\ln(ax+b)|_0^1 = \frac{1}{a}\cdot(\ln(a+b)-\ln b) = \frac{1}{a}\cdot\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)\\ I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\cdot\int_0^1\frac{ax+b-b}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\left(\int_0^1 1\cdot dx - b\cdot I_0\right) = \frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}\cdot\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)\right)\end{aligned}$$

(b) Se obţine

$$\begin{aligned}a\cdot I_{n+1} + b\cdot I_n &= \int_0^1 \frac{ax^{n+1}+bx^n}{ax+b}dx = \int_0^1\frac{x^n(ax+b)}{ax+b}dx\\ &= \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}|_0^1 = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

(c) Pentru orice $x \in (0,1)$ şi orice număr natural n avem $x^n > x^{n+1}$ deci, având în vedere că $a, b > 0$, rezultă că $\frac{x^n}{ax+b} \geq \frac{x^{n+1}}{ax+b}$. Integrând obţinem că $I_n \geq I_{n+1}$.

(d) Folosind rezultatele de mai sus obţinem $\dfrac{1}{n+1} = a \cdot I_{n+1} + b \cdot I_n \geq a \cdot I_{n+1} + b \cdot I_{n+1} = (a+b) \cdot I_{n+1}$, de unde $I_{n+1} \leq \dfrac{1}{(a+b)(n+1)}$ pentru orice $n \geq 0$. În mod analog, $\dfrac{1}{n+1} = a \cdot I_{n+1} + b \cdot I_n \leq a \cdot I_n + b \cdot I_n = (a+b) \cdot I_n$ de unde $I_n \geq \frac{1}{(a+b)(n+1)}$ pentru $n \geq 0$. Rezultă dubla inegalitate $\dfrac{1}{(a+b)(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{(a+b)n}$ pentru $n \geq 1$, de unde $\dfrac{n}{(a+b)(n+1)} \leq n \cdot I_n \leq \dfrac{1}{(a+b)}$. Trecând la limita obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot I_n = \dfrac{1}{a+b}$.

Pentru $a = 3$ şi $b = 2$ se obţine o problemă de la Bacalaureat 2006.

3. (a) Cum $I_0(x) = 1$ rezultă că $I_0(1) + \cdots + I_0(k) = k$.

(b) Vom demonstra prin inducţie că $I_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Acest lucru este evident pentru $n = 0$ şi pentru pasul de inducţie observăm că $I_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x I_n(t)dt = \int_0^x \frac{t^n}{n!}dt = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$.

Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)$ observăm că pentru $x > 0$ şirul $(I_n(x))_n$ devine descrescător pentru $n > x$. Într-adevăr, pentru $n > x$ avem $\dfrac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} = \dfrac{x}{n+1} < 1$. Cum $I_n(x) > 0$ rezultă că şirul $(I_n(x))$ este convergent şi vom nota $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)$. Dar $I_{n+1}(x) = \left(\dfrac{x}{n+1}\right) I_n(x)$ deci, la limită, obţinem $\ell = 0 \cdot \ell = 0$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = 0$.

(c) Având în vedere că $I_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, folosind teorema Stolz-Cesaro obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_0(p) + \cdots + I_n(p)}{n} = \frac{1 + p + \frac{p^2}{2!} + \cdots + \frac{p^n}{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Observaţie: pentru $k = 2005$, respectiv $p = 1$, se obţine o problema din anul 2005, de la examenul de Bacalaureat.

4. (a) $f'(x) = \dfrac{1}{p} \cdot (\sin x)' + \dfrac{1}{q} \cdot (\cos x)' = \dfrac{\cos x}{p} - \dfrac{\sin x}{q}$.

(b) Cum pentru orice x avem $|\cos x|, |\sin x| \leq 1$ obţinem $|f'(x)| \leq \left|\dfrac{\cos x}{p}\right| + \left|\dfrac{\sin x}{q}\right| \leq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{p+q}{pq}$.

(c) Observăm că

$$g'(x) = x' - f'(x) = 1 - f'(x) \geq 1 - \frac{p+q}{p \cdot q} = \frac{p \cdot q - p - q}{p \cdot q} = \frac{(p-1)(q-1) - 1}{pq} \geq \frac{1}{pq}$$

deoarece $p \geq 3$ şi $q \geq 2$. Rezultă că funcţia $g(x)$ este crescătoare deci rămâne să demonstrăm că $g(x) = 0$ are cel puţin o soluţie, în care caz această soluţie va fi unică.

Cum $|f(x)| \leq \dfrac{|\sin x|}{p} + \dfrac{|\cos x|}{q} \leq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Cum $g(x)$ este continuă rezultă ăa există $u \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(u) = 0$.

(d) Vom demonstra prin inducţie că pentru $n \geq 0$ avem $|x_n - u| \leq \left(\frac{p+q}{pq}\right)^n |x_0 - u|$. Pentru $n = 0$ inegalitatea este satisfăcută în mod trivial. Pentru pasul de inducţie vom aplica teorema lui Lagrange de unde deducem că există un număr real h între u şi x_n astfel încât

$$\frac{f(x_n) - f(u)}{x_n - u} = f'(h)$$

Cum $|f'(h)| \leq \frac{p+q}{pq}$ rezultă că $|x_{n+1} - u| = |f(x_n) - f(u)| \leq \frac{p+q}{pq}|x_n - u|$. Din ipoteza de inducţie obţinem $|x_{n+1} - u| \leq \left(\frac{p+q}{pq}\right)^{n+1} |x_0 - u|$. Dar $\frac{p+q}{pq} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{p+q}{pq}\right)^n = 0$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - u| = 0$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$.

Pentru $p = 3,\ q = 2$, se obţine o problemă de la examenul de Bacalaureat 2007.

Matematică distractivă

probleme selectate din diverse surse de Mihai Popescu

1=2

Mai jos avem o demonstraţie a egalităţii 1=2 (bineînţeles că aşa ceva nu poate fi adevărat, aşa că: unde e greşeala?)

Fie un număr nenul a

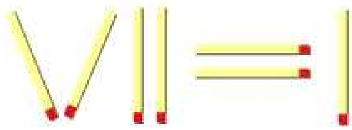
$$\begin{aligned} a &= a && \text{(ridicam la patrat egalitatea)} \\ a^2 &= a^2 && \text{(scadem } a^2\text{)} \\ a^2 - a^2 &= a^2 - a^2 \end{aligned}$$

în stânga vom da factor comun pe a, iar în dreapta aplicăm formula de calcul prescurtat

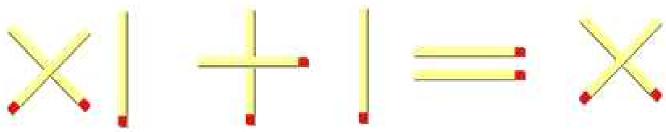
$$\begin{aligned} a(a-a) &= (a-a)(a+a) && \text{împărţim cu } (a-a) \\ a &= a + a \\ a &= 2a && \text{împărţim cu } a \text{ (nenul)} \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

Aventuri cu chibrituri

(a) Mutaţi doar un singur băţ de chibrit pentru a obţine egalitate



(b) Fără a muta sau adăuga vreun băţ arătaţi că operaţia prezentată este adevărată



De ce?

Un bărbat locuieşte la ultimul etaj al unui bloc. În fiecare dimineaţă, el ia liftul până la parter şi părăseşte clădirea. Însă la întoarcere el nu poate urca cu liftul până la etajul său decât dacă plouă. De ce?

Calculaţi !?

Fie numerele $a, b, c, d, \ldots, z \in \mathbb{N}$

Dacă $a = 1!, b = 2!, \ldots, z = 26!$ calculati $(x - a)(x - b) \cdot \ldots \cdot (x - z)$.

Şiruri logice

Puteţi găsi următorul termen pentru fiecare din şirurile de mai jos:

(a) $M,\ \Omega,\ 8, \ldots$

(b) $1, 3, 6, 11, 18, \ldots$

(c) $1, 2, 6, 15, 31, \ldots$

(d) $2, 5, 12, 26, 49, \ldots$

Răspunsurile le veţi găsi în numărul următor al Jurnalului Matematic Arădean

Probleme Propuse

Elevii sunt invitaţi să trimită soluţii ale problemelor propuse (minim 4 probleme) prin email la jurnalulmatematic@gmail.com (cu subiectul mesajului “probleme rezolvate”) sau prin poştă la adresa: Colegiul Naţtional “Moise Nicoară” , Piaţa Moise Nicoară Nr. 1, Arad (cu menţiunea JURNALUL MATEMATIC ARĂDEAN–Probleme Rezolvate). Se acceptă soluţii şi la problemele clasei precedente celei urmate precum şi celor superioare acesteia. Vă rugăm să treceţi la expeditor numele, localitatea, şcoala, clasa şi profesorul de la clasă.

Pentru acest număr soluţiile se pot trimite până la data de x xxxxx 2011 (data poştei).

Ciclul primar

1. Determinaţi numerele naturale x şi y astfel încât $(x+1)(y+3)=20$.

   Mircea Mario Stoica, Doina Stoica, Arad

2. Aflaţi $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $3x+5y=33$.

   Mircea Mario Stoica, Doina Stoica, Arad

3. Determinaţi numărul natural n ştiind că dacă îl adunăm cu consecutivul numărului 1986 obţinem ca rezultat succesorul numărului 3994.

   Mircea Mario Stoica, Doina Stoica, Arad

4. Să se reconstituie adunarea:

$$\begin{array}{rl} \text{POTO} & + \\ \text{OTO} & \\ \text{TO} & \\ \hline 2968 & \end{array}$$

   Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

5. Suma vârstelor (exprimate prin numere naturale) a trei copii este de 6 ani. Câţi ani are fiecare?

   Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

6. Când eu aveam 13 ani, sora mea avea 3 ani. Acum avem împreuna 66 ani. Câţi ani avem fiecare?

   Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

7. Într-o vitrină sunt 20 de jucării: maşinuţe, păpuşi, jocuri electronice. Ştiind că păpuşi sunt de 6 ori mai multe decât jocuri electronice, să se afle câte jucării de fiecare fel sunt în vitrină.

Clasa a 5a

1. (a) Scrieţi numărul 2010 ca o sumă de patru pătrate perfecte distincte nenule în două moduri
   (b) Scrieţi numărul 2010^2 ca o sumă de patru pătrate perfecte distincte nenule (4 moduri)
   (c) Să se demonstreze că numărul 2010^n ($n \in \mathbb{N}^*$) se poate scrie ca o sumă de patru pătrate perfecte distincte nenule

Peiţa Vasile, Curtici, Arad

2. Determinaţi numerele prime x, y, şi z astfel încât $x \cdot y + z = 25$

Mircea Mario Stoica, Doina Stoica, Arad

3. Arătaţ că numărul

$$X = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 1960 + 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 1961$$

nu este pătrat perfect.

Mircea Mario Stoica, Doina Stoica, Arad

4. Determinaţi mulţimile A şi B, Ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:
   (a) $A \cup B = \{2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013\}$
   (b) $B \setminus \{2008, 2009, 2010, 2011\} = \{2006, 2007, 2012, 2013\}$
   (c) A şi B au câte 4 elemente.

Mircea Mario Stoica, Doina Stoica, Arad

5. Determinaţi numerele naturale x, y, z astfel încât $2^x + 2^y + 2^z = 50$.

Mircea Mario Stoica, Doina Stoica, Arad

6. Determinaţi numerele naturale x, y, şi z astfel încât $\dfrac{200}{x^2 + y^2 + z^2}$ să fie echiunitară.

Mircea Mario Stoica, Doina Stoica, Arad

7. (a) Fie A mulţimea numerelor naturale n pentru care avem $\dfrac{5}{7} < \dfrac{n}{11} < \dfrac{29}{31}$.
   (b) Fie B mulţimea numerelor naturale pentru care avem $\dfrac{3}{4} < \dfrac{11}{n} < \dfrac{31}{17}$.

   Să se afle $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Aurel Sasu, Ineu

8. Să se demonstreze că numărul

$$N = 7 \cdot 247^{4n+3} + 13 \cdot 133^{4n+1} + 19 \cdot 91^{3n+1} + 1729^{2n+2}$$

este divizibil cu 2, 5, 7, 13 si 19.

Aurel Sasu, Ineu

9. Să se afle numerele naturale $\overline{abc}$ astfel încât să aibă loc relaţia:

$$\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc}+\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{cb}=\overline{abc}$$

cu $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$, ştiind că $a+2b+3c\in\{27,35\}$

Aurel Sasu, Ineu

10. Determinaţi numărul de forma $\overline{2011abcd}$ care este pătrat perfect

Don Nelu, Curtici

11. Cometa "Spiral" apare o dată la 9 ani. Când a apărut pentru a 9-a oară suma tuturor aniilor apariţiilor sale este 17334. Aflaţi în ce an a apărut prima data. Va fi cometa vizibilă în 2011?

Popescu Mihai, Popescu Gabriela, Arad

12. (a) Să se arate că produsul a două numere naturale consecutive are ultima cifră 0, 2 sau 6.
    (b) Să se arate că nu există numere naturale a şi b astfel încât $(a+1)^2+a=15b+7$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

13. Se pot împărţi 54 de bomboane la 10 copii fără ca doi dintre ei să primească acelaşi număr de bomboane?

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

14. Să se afle suma cifrelor numărului $10^{2011}+3\cdot 10^{2009}-1$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

15. Dacă $m+n+p=121$, $n+3p=21$ să se calculeze $2(m+2n)+8p$ si $m-2p$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

16. Câte fracţii ireductibile se află în mulţimea

$$A=\left\{\frac{1}{2010},\frac{2}{2010},\frac{3}{2010},\ldots,\frac{2009}{2010},\frac{2010}{2010}\right\}$$

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

17. Aflaţi numerele $\overline{abcdef}$ stiind ca $\overline{abc}\cdot\overline{def}=\overline{abc}+\overline{def}$

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

18. Aflaţi numerele $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=b^{a+b+c}+b$

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

19. Arătaţi că nu există numere prime de forma $\overline{a(a+2)(a+4)}$ (în baza zece)

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

Clasa a 6a

1. Să se demonstreze că:

   (a) $\frac{3}{4} < \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} < \frac{5}{6}$

   (b) $10\frac{1}{6} < \frac{9}{10} + \frac{10}{11} + \frac{11}{12} + \frac{12}{13} + \frac{13}{14} + \frac{14}{15} + \frac{15}{16} + \frac{16}{17} + \frac{17}{18} + \frac{18}{19} + \frac{19}{20} < 10\frac{1}{4}$

Peiţa Vasile, Don Nelu, Curtici, Arad

2. Să se determine numerele naturale a,b,c astfel încât să avem

$$\frac{3}{a} = \frac{7}{b} = \frac{5}{c} = \frac{3a^2 + 5b + 2c}{396}$$

Aurel Sasu, Ineu

3. Să se descompună în sumă de 4 pătrate perfecte numărul $10^n + 25^n,\ n \in N^*$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

4. Se consideră şirul $3, 5, 11, 83, 245, \ldots$. Aflaţi ultima cifră a numărului de pe locul 2011.

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

5. Să se determine suma tuturor numerelor $\overline{ab}$ cu proprietatea că diferenţa dintre el si răsturnatul său este cub perfect.

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

6. Aflaţi numerele naturale a şi b care verifică relaţia $a^5(2b + 1) = 54432$. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $2 \mid (a^n + b^n)$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

7. Găsiţi numărul $\overline{ab}$ ştiind că $\sqrt{\overline{ab}} = 2a$

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

8. Găsiţi numerele naturale $\overline{abc}$, $\overline{dbc}$ astfel încât să avem $\sqrt{\overline{abc}} = \sqrt{\overline{dbc}} + \sqrt{b^{b^b}}$

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

Clasa a 7a

1. Un punct M se află în interiorul pătratulului $ABCD$ de latură 12 cm şi punctul $N \in (CD)$ astfel încât $MN \perp CD$ şi $MA = MB = MN$. Aflaţi MA.

Mihăilescu Rareş, Arad

2. Fie a un număr natural de două cifre. Răsturnatul lui a este un număr natural b astfel încât b este mai cu $p\%$ mai mare decât a. Ştiind că p este un număr natural impar, aflati valoarea maximă a lui p.

Mihăilescu Rareş, Arad

3. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{10^3}<0,25$$

Peiţa Vasile, Curtici, Arad

4. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ demonstraţi că

$$\left(a^2+\frac{1}{a}\right)\left(b^2+\frac{1}{b}\right)\left(c^2+\frac{1}{c}\right)\geq\left(bc+\frac{1}{a}\right)\left(ca+\frac{1}{b}\right)\left(ab+\frac{1}{c}\right)$$

Peiţa Vasile, Curtici, Arad

5. Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ demonstraţi că

$$\frac{1}{x^3+y}+\frac{1}{y^3+x}\leq\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{y^3+y}$$

Peiţa Vasile, Curtici, Arad

6. Scrieţi în 4 moduri numărul 2210 ca o sumă de două pătrate perfecte distincte nenule

Peiţa Vasile, Curtici, Arad

7. Demonstraţi că numărul $A = 2 \cdot (\overline{ab6} - 4 \cdot \overline{ab} + 2) \cdot (3 \cdot \overline{ab} + 7) + 9$ este un pătrat perfect, oricare ar fi cifrele a,b,c în baza 10

Aurel Sasu, Ineu

8. În interiorul triunghiului ABC se consideră un punct D. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor $(AD), (BD), (BC)$ şi respectiv (AC). Determinaţ poziţia punctului D în fiecare din cazurile următoare:
   (a) D să fie centrul de simetrie al patrulaterului $MNPQ$;
   (b) $MNPQ$ să fie dreptunghi
   (c) $MNPQ$ să fie pătrat
   (d) Dacă D este centrul de simetrie al dreptunghiului $MNPQ$, arătaţi că triunghiul ABC este isoscel

Don Nelu, Curtici

9. Să se determine toate perechile de numere naturale x, y care verifică ecuaţia $y^3 = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2(2 - y^3) + x + 1$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

10. Fie ABC un triunghi. $M \in (BC), N \in (AB)$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AB} = k$. Atunci $MN + kAM < kAC + (1-k)AB + k^2 BC$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

11. Aflaţi numerele pozitive a, b, c dacă au loc simultan egalităţile:

$$a = \frac{2c^2}{1+c^2}; b = \frac{2a^2}{1+a^2}; c = \frac{2b^2}{1+b^2}$$

Toader Maria, Arad

12. Aflaţi numerele întregi a, b, c dacă au loc simultan inegalităţile:

$$a\,(a-2) < b - c; \;\; b\,(b-2) < c - a; \;\; c\,(c-2) < a - b$$

Toader Maria, Arad

13. Se dă dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4$ cu lungimea 4 şi lăţimea 1. Prin punctul P situat în interiorul dreptunghiului se duc paralele la laturile dreptunghiului. Arătaţi că unul din dreptunghiurile care conţin vârfurile A_1 şi A_3 are aria cel mult 1.

Toader Maria, Arad

14. Ce fel de triunghi este cel ale cărui laturi a, b, c verifică relaţia $(b-1)(c-1)(c-b) + (c-1)(a-1)(a-c) + (a-1)(b-1)(a-b) = 0$

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

15. Rezolvaţi ecuaţia $\left\lfloor \frac{x+n}{n+1} \right\rfloor = n + 2$, unde $n \in \mathbb{N}$. Câte soluţii sunt?

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

16. Se dă un trapez în care e trasată linia mijlocie. Folosind doar o riglă negradată trasaţi 2010 drepte care să împartă fiecare, trapezul în două trapeze echivalente.

Ivăşchescu Nicolae, Craiova

Clasa a 8a

1. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{2x+4}{3x+1}+\dfrac{2x+8}{7x+1}=\dfrac{2x+5}{4x+1}+\dfrac{2x+7}{6x+1}$

Aurel Sasu, Ineu

2. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{13}}{n\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{13}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{\sqrt{5}+n\sqrt{7}+\sqrt{13}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+n\sqrt{13}}\geq\frac{6}{n+2},\quad n\in\mathbb{N}$$

Pentru ce valori ale lui $n\in\mathbb{N}$ are loc egalitatea?

Aurel Sasu, Ineu

3. Să se arate că $1+2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{2008}+\sqrt{2010})<1006^2$

Aurel Sasu, Ineu

4. Determinaţi intervalul $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ştiind că sunt îndeplinite condiţiile
   (a) $[a,b]\bigcap\mathbb{Z}=\{2\}$
   (b) $|b-a-2|=a^2+b^2-\dfrac{3}{2}a-6b+\dfrac{157}{16}$

   Aflaţi $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\dfrac{|x|}{\sqrt{2010}}\in[a,b]$, unde $[a,b]$ este intervalul determinat mai sus.

Aurel Sasu, Ineu

5. Fie $A=\sqrt{0,a(bc)+0,b(ca)+0,c(ab)}\in Q(1)$ unde $\overline{abc}\in N$ si $a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$
   (a) câte numere naturale $\overline{abc}$ îndeplinesc condiţia (1)
   (b) care este cel mai mic, respectiv cel mai mare numar natural $\overline{abc}$ care satisfac conditia (1)

Aurel Sasu, Ineu

6. Determinaţi domeniul maxim de definiţie $D\subset\mathbb{R}$ al funcţiei $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x+2}$.

Negrilă Liliana, Arad

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|(2x-1)^2-9\right|-4$.
   (a) Care este valoarea minimă a lui f?
   (b) Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ pentru care se obţine această valoare minimă.

Negrilă Liliana, Arad

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4-2x+3x^2$. Câte soluţii întregi are ecuaţia $f(1-2x)=4$?

Negrilă Liliana, Arad

Clasa a 9a

1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci

$$\frac{a^3}{b+c-a}+\frac{b^3}{c+a-b}+\frac{c^3}{a+b-c} \geq a^2+b^2+c^2$$

Peiţa Vasile, Curtici, Arad

2. Dacă $x+y+z=1$, unde $x, y, z \in (0, \infty)$ atunci

$$\frac{x^2}{x+yz}+\frac{y^2}{y+xz}+\frac{z^2}{z+xy} \geq \frac{3}{4}$$

Peiţa Vasile, Curtici, Arad

3. Să se rezolve ecuaţia $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2-n}{3} \right\rfloor = n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Aurel Sasu, Ineu

4. Să se determine progresiile aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termeni numere întregi, pentru care are loc relaţia $a_3 \cdot a_7 + a_5 \cdot a_9 = 12r^2 + 266$, unde r este raţia progresiei aritmetice

Aurel Sasu, Ineu

Clasa a 10a

1. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$. Să se arate că

$$\log_{x_1}\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) \log_{x_2}\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \cdots \log_{x_{n-1}}\left(\frac{x_n+x_1}{2}\right) \log_{x_n}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq 1$$

Aurel Sasu, Ineu

2. Fie $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ numere complexe nenule. Să se demonstreze că numărul:

$$E = \frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}+\ldots+\frac{z_n}{|z_n|}+\frac{|z_1|}{z_1}+\frac{|z_2|}{z_2}+\ldots+\frac{|z_n|}{z_n}$$

este real şi să se arate că există numerele reale $a_1, \ldots, a_n, b$ astfel încât să avem:

$$z_1^n + z_2^n + \ldots + z_n^n = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n + b$$

Aurel Sasu, Ineu

3. Să se arate că nu există numere naturale distincte două câte două a, b, c, d care verifică relaţia

$$a^{a+2} + b^b(a^2+1) - c^c \cdot a^2 - d^d = a^2(d^d - a^{a-2}) + c^c$$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

4. Rezolvaţi sistemul în $\mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} \lg^3 x - \lg^2 y - \lg y = -\lg 1000 \\ \lg^3 y - \lg^2 z - \lg z = -\lg 1000 \\ \lg^3 z - \lg^2 x - \lg x = -\lg 1000 \end{cases}$$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

5. Să se arate că pentru orice numerel natural nenule m, n, t si $1 \leq k \leq t$ astfel incat $mk < t$ numarul $\frac{(2n)!}{(m!)^t(n-tm)}\binom{n+5}{n+2}$ este natural.

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

6. Dacă $x, y, z > 1$ astfel încât $xyz = 10$, să se arate că

$$\frac{\lg xy}{\lg 10z} + \frac{\lg xz}{\lg 10y} + \frac{\lg yz}{\lg 10x} \geq \frac{3}{2}$$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

7. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel incat $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Demonstraţi inegalitatea

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-c^2} > \sqrt{2}$$

Cenadan Gavril, Arad

Clasa a 11a

1. Se dau matricile $A_1, A_2, \ldots, A_n \in M_k(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A_i \cdot A_j = O_k$ daca $i \neq j$. Să se arate că

$$\det\left(2I_k + \sum_{i=1}^{n}(A_i^2 + 2A_i)\right) \geq 0$$

Roveanu Sanda, Arad

2. Fie şirul $x_{n+1} = 3^{\frac{x_n}{(n+2)!}}$ unde $x_1 = 3!$

   (a) Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq1}$

   (b) Calculaţi:

      i. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

      ii. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(n+1)!}$

      iii. $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)! \cdot (x_n - 1)]$

Aurel Sasu, Ineu

3. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+x+1}$ şi şirul $a_{n+1} = f(a_n)$ cu $a_0 > 0$. Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq0}$

Aurel Sasu, Ineu

4. Fie x, y, z unghiurile pe care le face diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu feţele lui şi

$$A = \begin{pmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \sin z & \sin x & \sin y \\ \sin y & \sin z & \sin x \end{pmatrix}$$

   (a) Să se arate că $|\det(A)| < 1$
   (b) Exista valori x, y, z astfel incat $\det(A) \in (-1, 0)$?
   (c) Pentru ce valori ale lui x, y, z avem $\det(A) = 0$?

Aurel Sasu, Ineu

5. Fie $x_1, \ldots, x_n \in [1, \infty)$ astfel incat $x_1 x_2 \cdots x_n = e^n$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\sqrt[n]{\arctan(\ln x_1)\arctan(\ln x_2)\cdots\arctan(\ln x_n)} \leq \frac{\pi}{4}$$

Aurel Sasu, Ineu

6. Fie $n > 4$ un număr natural şi

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{5} + \binom{n}{10} + \cdots$$
$$b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{6} + \binom{n}{11} + \cdots$$
$$c_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{7} + \binom{n}{12} + \cdots$$
$$d_n = \binom{n}{3} + \binom{n}{8} + \binom{n}{13} + \cdots$$
$$e_n = \binom{n}{4} + \binom{n}{9} + \binom{n}{14} + \cdots$$

Notăm $A = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n & e_n \\ e_n & a_n & b_n & c_n & d_n \\ d_n & e_n & a_n & b_n & c_n \\ c_n & d_n & e_n & a_n & b_n \\ b_n & c_n & d_n & e_n & a_n \end{pmatrix}$ si $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon^4 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon & \varepsilon^3 \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon & \varepsilon^4 & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$ unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

   (a) Sa se calculeze $A \cdot X$
   (b) Sa se arate ca $\det A = 2^n$

Aurel Sasu, Ineu

7. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 = (1899)^{2011}$ şi x_{n+1} este suma cifrelor lui x_n. Studiaţi convergenţa acestui şir.

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

Clasa a 12a

1. Fie $f : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ continuă, astfel încât pentru orice x in intervalul de definitie să avem $f(x) + f(-x) = 1$. Să se calculeze $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

Aurel Sasu, Ineu

2. Fie $I = (-1, 3)$ si legea $x \bullet y = \frac{xy+3x+3y-3}{xy-x-y+5}$ pentru orice $x, y \in I$
   (a) Demonstrati ca $(I, \bullet)$ este grup abelian;
   (b) Să se arate că există o funcţie descrescătoare $f : (-1, 3) \to (0, \infty)$ de forma $f(x) = \frac{b - ax}{dx + c}$ cu $a, b, c, d \in R$ si $a \neq 0$ care defineşte un izomorfism între grupul $(I, \bullet)$ şi grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive;
   (c) Calculaţi $\underbrace{x \bullet x \bullet \ldots \bullet x}_{de\ n\ ori}$

Aurel Sasu, Ineu

3. Calculati integralele:
   (a) $I = \int \frac{2(1 - \tan^2 x)(1 + \sin 2x)\cos^2 x}{(2 + \sin 2x)^2} e^{\sin 2x} dx$
   (b) $I = \int \frac{x + 5}{(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + m} dx$ pentru un numar real m.

Aurel Sasu, Ineu

4. Să se determine primitiva funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{2e^x \sin 2x + 2x \ln x + x - x^2 \ln x}{e^x \cos 2x - x^2 \ln x}$

Aurel Sasu, Ineu

5. Calculaţi $\int \frac{x^8 - 1}{x^5} \arctan\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, $x \in (0, \infty)$

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

6. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu proprietatea că există elementele inversabile $x, y \in A$ astfel încât $x + x^{-1} = y^{-1} + x^{-1}y^{-1}$. Să se arate că $x - y + 1$ este inversabil în inelul A

Potocean Octavia, Potocean Mircea, Arad

Recenzii

Octavia Potocean

Exponenţiale şi logaritmi
Gheorghe Andrei, Editura Gil, Zalău, 2006.

O carte care pune în prim plan două operaţii fundamentale cu numere reale: exponenţierea şi logaritmarea este culegerea de exerciţii şi probleme "Exponenţiale şi logaritmi", Gh.Andrei, Editura Gil, Zalău, 2006. Autorul a reuşit să facă în această lucrare o selecţie a celor mai interesante exerciţii în care apar exponenţiale sau logaritmi. Lucrarea conţine 8 capitole cu exerciţii care acoperă întreaga gamă de exerciţii necesară pregătirii elevilor pentru examene şi olimpiade şcolare. Aproape toate problemele au soluţii destul de amănunţite, interesante şi deosebite. Pentru profesori culegerea reprezintă un bogat material didactic, util în pregătirea fiecăruia. Apreciez munca deosebită pe care domnul profesor Gheorghe Andrei a depus-o în selectarea problemelor pe tipuri şi grade de dificultate, dar şi concizia şi rigurozitatea rezolvărilor.