PROBLEMĂ PROPUSĂ PENTRU CLASA A-XI-A

Fie $A, B \in M_3(C)$ şi $C = AB - BA$. Dacă $rang(C) = 2$ şi $Tr(C^*) \neq 0$, să se calculeze $rang(C^2 - Tr(C^*) \cdot I_3)$.

prelucrare , prof. Dumitrică Sorin Radu

Soluție : Fie $p \in C[X]$, polinomul caracteristic al matricei C , $p = (-1)^3 \det(C - X \cdot I_3)$
$\Rightarrow p = X^3 - Tr(C)X^2 + Tr(C^*)X - \det(C)$. Din $rang(C) = 2 \Rightarrow \det(C) = 0$, iar $Tr(C) =$
$= Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$. Din teorema Hamilton-Cayley obținem că
$C^3 - Tr(C^*) \cdot C = O_3 \Rightarrow C(C^2 - Tr(C^*) \cdot I_3) = O_3$. Din inegalitatea lui Sylvester rezultă
$0 = rang(C(C^2 - Tr(C^*) \cdot I_3)) \geq rang(C) + rang(C^2 - Tr(C^*) \cdot I_3) - 3$, de unde deducem că
$rang(C^2 - Tr(C^*) \cdot I_3) \leq 1$.
Să presupunem că $rang(C^2 - Tr(C^*) \cdot I_3) = 0$. Atunci $C^2 - Tr(C^*) \cdot I_3 = O_3$, adică
$C^2 = Tr(C^*) \cdot I_3 \Rightarrow \det^2(C) = Tr^3(C^*) \neq 0 \Rightarrow \det(C) \neq 0$, contradicție cu $rang(C) = 2$.
În consecință , $rang(C^2 - Tr(C^*) \cdot I_3) = 1$.