ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

Mulțimi conexe

Prof. Dr. Teodor Bulboacă
Facultatea de Matematică și Informatică,
Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca
email: bulboaca@math.ubbcluj.ro

În manualele de liceu și în cursurile elementare de topologie *mulțimile conexe* (sau așa-numitele mulțimi *dintr-o bucată)* sunt uneori tratate superficial, fără a se face o prezentare într-un cadru cât mai general al acestui concept precum și a proprietăților sale imediate. Aparatul matematic utilizat în continuare este elementar, iar articolul poate fi ușor înțeles de oricine posedă cunoștințe elementare de topologie sau dacă cititorul va căuta într-un dicționar de matematică, pe măsură ce apar, noțiunile necunoscute care intervin.

Principalele notații folosite în cele ce urmează sunt:

τ - elementele (adică mulțimile deschise) spatului topologic (X, τ);

$\bar{A}$ - închiderea mulțimii A; A^c - complementara mulțimii A;

A^b - frontiera mulțimii A; $f^{-1}(y)$ - contraimaginea elementului y;

$f^{-1}(A)$ - contraimaginea mulțimii A.

Definiția 1 În spațiul topologic X mulțimile nevide A și B se numesc ***separate*** dacă

$$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset.$$

Recomandăm rezolvarea următoarelor probleme, care sunt consecințe imediate ale definiției de mai sus:

Problema 1 *Demonstrați că submulțimile nevide ale două mulțimi separate sunt separate.*

Problema 2 *Orice mulțime deschisă A care conține o mulțime data M se numește vecinătate deschisă a acelei mulțimi, adică*

$$U \supset M : U \in \tau$$

Demonstrați că două mulțimi nevide sunt separate dacă și numai dacă pentru oricare din ele există o vecinătate deschisă care nu o intersectează pe cealaltă.

Problema 3 *Două mulțimi A și B se numesc* ***separabile prin mulțimi deschise****, dacă există două vecinătăți deschise ale acestora care sunt disjuncte, adică*

$$\exists\, U, V \in \tau : U \supset A,\ V \supset B \text{ și } U \cap V = \emptyset.$$

Demonstrați că orice două mulțimi separabile prin mulțimi deschise sunt separate.

Problema 4 În topologia uzuală euclidiană din $\mathbb{R}$, fie mulțimile $A = (a,b)$, $B = (b,c)$, $C = [b,c)$, $a < b < c$. Determinați care din ele sunt separate și care nu sunt separate.

Definiția 2 Submulțimea M a spațiului topologic X se numește ***conexă,*** dacă nu se poate scrie ca reuniunea a două mulțimi nevide și separate. Dacă spațiul topologic X este o mulțime conexă, atunci X se va numi ***spațiu topologic conex,*** adică

$$M \subset X \text{ este conexă } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \nexists\, A,B \subset X : X = A \cup B \text{ și } A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Problema 5 În spațiul topologic (X, τ) submulțimea $M \neq \emptyset$ este conexă dacă și numai dacă spațiul topologic (M, τ_M) este conex, unde $\tau_M = \{M \cap G : G \in \tau\}$ este topologia indusă de τ în M.

Teorema 1 (teorema de caracterizare a spatiilor topologice conexe) Într-un spațiu topologic (X, τ), următoarele afirmații sunt echivalente:

1. spațiul topologic X este conex;
2. X nu se poate scrie ca reuniunea a două submulțimi nevide, deschise și disjuncte;
3. X nu se poate scrie ca reuniunea a două submulțimi nevide, închise și disjuncte;
4. nu există nici o submulțime proprie A a spațiul topologic X (adică $\emptyset \neq A \neq X$) care să fie deschisă și închisă în același timp;
5. orice submulțime proprie A a lui X are frontiera nevidă, adică $A^b = \bar{A} \cap \overline{A^c} \neq \emptyset.$

Demonstrație. **1.** $\Rightarrow$ **2.** Dacă presupunem că $X = U \cup V$, unde $U \cap V = \emptyset$, $U,V \in \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$, atunci $U = V^c$ este și închisă, deci $\overline{U} = U$, și similar $\overline{V} = V$. Rezultă că U și V sunt mulțimi separate, deci mulțimea X nu este conexă.

2. $\Rightarrow$ **3.** Dacă A și B sunt mulțimi nevide, închise și disjuncte, astfel încât $X = A \cup B$, atunci $A = B^c$ și $B = A^c$ sunt mulțimi nevide, deschise și disjuncte, ceea ce contrazice ipoteza.

3. $\Rightarrow$**4**. Dacă A este o submulțime proprie a lui X care este deschisă și închisă, atunci A^c va fi la fel, adică deschisă și închisă. Deci $X = A \cup A^c$, unde A și A^c sunt mulțimi nevide, închise și disjuncte, ceea ce contrazice ipoteza 3.

4. $\Rightarrow$ **5.** Fie A o submulțime proprie a lui X, astfel încât $A^b = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \emptyset$. Deoarece $B = A^c \neq \emptyset$, rezultă că B este submulțime proprie. Fiindcă $\overline{A} \cup \overline{B} = X$ și $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, avem $\overline{A} = \overline{B}^c$, deci A este deschisă. Întrucât $\overline{A}$ este și închisă în X obținem o contradicție cu ipoteza 4.

5. $\Rightarrow$ **1.** Dacă presupunem neadevărată concluzia punctului 1, atunci X se poate scrie ca reuniunea a două mulțimi separate A și B. Deci $A \cap \overline{B} = \emptyset$ iar $X = A \cup \overline{B}$, de unde rezultă că $A = \overline{B}^c$ este o mulțime deschisă și $B = A^c$ este închisă (deoarece $X = A \cup B$). Similar se arată că și mulțimea A este închisă, deci obținem $A^b = \overline{A} \cap \overline{A^c} = A \cap B = \emptyset$, ceea ce contrazice ipoteza 5

Corolarul 1 Fie $Y = \{0, 1\}$ mulțimea formată din numerele 0 și *1* din $\mathbb{R}$. Spațiul topologic X nu este conex dacă și numai dacă există o funcție continuă și surjectivă de la *X* la *Y*.

Demonstrație. Dacă X nu este conexă, atunci conform punctului 2 al Teoremei 1 avem $X = A \cup B$, unde A și B sunt deschise, nevide și disjuncte. Fie funcția $f : X \to Y$ definită prin relațiile $f(x) = 0$, $\forall x \in A$ și $f(x) = 1$, $\forall x \in B$. Deoarece $\{0\}$ și $\{1\}$ sunt singurele submulțimi proprii și deschise ale lui Y, rezultă că f este continuă și surjectivă.

Reciproc, să presupunem că există o funcție $f : X \to Y$ continuă și surjectivă. Atunci, $f^{-1}(0)$ și $f^{-1}(1)$ sunt submulțimi deschise ale lui X, $X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$ și $f^{-1}(0) \cap f^{-1}(1) = \emptyset$. Conform punctului 2 al Teoremei 1 mulțimea X nu este conexă.

Teorema 2 Orice interval al axei reale este o mulțime conexă.

Demonstrație. Metoda 1. Dacă dorim să folosim proprietatea că orice funcție reală și continuă are proprietatea lui Darboux, demonstrația este imediata (reducere la absurd și Corolarul 1).

Metoda 2. Vom da și o demonstrație directă a teoremei, fără a folosi proprietatea de mai sus. Astfel, să presupunem că intervalul considerat este $\mathbb{R}$ și că acesta nu este conex. Atunci există două submulțimi A și B, nevide, închise și disjuncte, astfel încât $\mathbb{R} = A \cup B$.

Fie $a \in A$ și $b \in B$; putem presupune că $a < b$ (sau invers, deoarece $A \cap B = \emptyset$). Dacă $c = \sup[a, b] \cap A$, atunci $c \in [a, b] \cap A$ deoarece mulțimea $[a, b] \cap A$ este închisă. Astfel, $c \in A$ și deci $c \notin B$ (deoarece $A \cap B = \emptyset$), de unde obținem că $c < b$.

Rezultă că $(c, b] \subset B \cap [a, b]$.

Deoarece și $B \cap [a, b]$ este închisă, avem $[c, b] = \overline{(c, b]} \subset B \cap [a, b]$, deci $c \in A \cap B$, ceea ce este o contradicție.

În cazul în care mulțimea $\mathbb{R}$ este înlocuită cu un interval oarecare din $\mathbb{R}$ demonstrația se face asemănător.

Teorema 3 Imaginea unui spațiu topologic conex printr-o funcție continuă este o mulțime conexă.

Demonstrație. Fie X un spațiu topologic conex, fie Y un spațiu topologic oarecare și $f: X \to Y$ o funcție continuă arbitrară. Să presupunem că mulțimea $f(X)$ nu este conexă. Atunci există mulțimile U și V, nevide și disjuncte, care în subspațiul $f(X)$ sunt deschise, astfel încât $f(X) = U \cup V$.

Deoarece funcția f este continuă, submulțimile $f^{-1}(U)$ și $f^{-1}(V)$ din spațiul X sunt nevide, deschise (din continuitatea funcției f) și disjuncte, iar $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, ceea ce contrazice ipoteza că X este un spațiu topologic conex.

Problema 6 Folosind cele două teoreme anterioare, demonstrați că orice funcție reală continuă are proprietatea lui Darboux. (demonstrația este imediată)

Teorema 4 Fie $\{A_i\}_{i\in I} \subset X$ o familie de mulțimi nevide și conexe din spațiul topologic X, astfel încât acestea să nu fie separate două câte două. Atunci $M = \cup_{i\in I} A_i$ este o mulțime conexă.

Demonstrație. Dacă presupunem că mulțimea M nu este conexă, atunci M se poate scrie ca reuniunea a două submulțimi separate ale sale M_1 și M_2, adică $M = M_1 \cup M_2$.

Fie A_1 și A_2 două mulțimi ale familiei date astfel încât $A_1 \cap M_1 \neq \emptyset$ și $A_2 \cap M_2 \neq \emptyset$.

Dacă $A_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, atunci $A_1 = (A_1 \cap M_1) \cup (A_1 \cap M_2)$, unde mulțimile $A_1 \cap M_1$ și $A_1 \cap M_2$ sunt separate deoarece M_1 și M_2 sunt separate, iar $A_1 \cap M_1 \subset M_1$ și $A_2 \cap M_2 \subset M_2$. Aceasta contrazice faptul că A_1 este conexă, deci $A_1 \cap M_2 = \emptyset$, de unde obținem că $A_1 \subset M_1$.

Analog se arată că $A_2 \subset M_2$, iar atunci A_1 și A_2 sunt separate (fiindcă M_1 și M_2 sunt separate), ceea ce contrazice ipoteza.

Corolarul 2 Fie $\{B_i\}_{i\in I} \subset X$ o familie de mulțimi nevide și conexe din spațiul topologic *X*, astfel încât $\cap_{i\in I} B_i \neq \emptyset$. Atunci $\cup_{i\in I} B_i$ *este o* mulțime conexă.

Definiția 3 Componenta conexă a punctului x_0 din spațiul topologic *X este cea mai* mare submulțime conexă $\mathcal{C}$ din *X* care conține punctul x_0.

Din Corolarul 2 rezultă că $\mathcal{C}$ este de forma

$$\mathcal{C} = \cup \{M \subset X : M \textit{ este conexă, } x_0 \in M\} .$$

Mulțimea $\mathcal{C}$ este și componenta conexă a oricărui punct ce-i aparține, de aceea o vom numi ***componenta conexă a spațiului*** *X*.

Teorema 5 Dacă $\mathcal{C}$ este o componenta conexă a spațiului topologic *X* iar *M* verifică incluziunea $\mathcal{C} \subset M \subset \overline{\mathcal{C}}$, atunci mulțimea *M* este conexă.

Demonstrație. Dacă presupunem că mulțimea M nu este conexă, atunci M se poate scrie ca reuniunea a două mulțimi A și B, nevide, disjuncte, pentru care $M = A \cup B$, $\bar{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Dacă vom nota cu $A_1 = \mathcal{C} \cap A$ și cu $B_1 = \mathcal{C} \cap B$, atunci $\mathcal{C} = A_1 \cup B_1$. Dacă $A_1 \neq \emptyset$ și $B_1 \neq \emptyset$, atunci A_1 și B_1 vor fi mulțimi separate, deoarece A și B sunt separate, însă aceasta contrazice faptul că $\mathcal{C}$ este conexă.

Dacă $A_1 = \emptyset$, atunci $\mathcal{C} = B_1 \subset B$ și $\bar{\mathcal{C}} \subset \bar{B}$. Astfel obținem că $M \subset \bar{B}$, ceea ce contrazice faptul că $M = A \cup B$, $A \neq \emptyset$ și $A \cap \overline{B} = \emptyset$. În ambele situații se ajunge la o contradicție, deci presupunerea că mulțimea M nu este conexă este falsă.

Definiția 4

1. Fie X un spațiu topologic și fie intervalul $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Funcția continuă $\gamma : [0,1] \to X$, cu $a = \gamma(0)$ și $b = \gamma(1)$, se numește ***drum din** X **care leagă punctele** a **și*** b.
2. Spațiul topologic X se numește *conex prin arce* dacă pentru orice două puncte ale sale există cel puțin un drum din X care leagă aceste puncte.

Teorema 6 Orice spațiu topologic **conex prin arce** este un spațiu topologic conex.

Demonstrație. Fie X un spațiu topologic conex prin arce și fie $x_0 \in X$ un punct arbitrar. Vom nota cu γ_x drumul din X care leagă punctul x_0 cu x. Din Teorema 3 avem că mulțimea $\gamma_x([0,1])$ este conexă, iar $x_0, x \in \gamma_x([0,1])$. Deoarece X este conexă prin arce, avem $X \subset \cup_{x\in X}, \gamma_x([0,1]) \subset X$, de unde, conform Corolarului 2 rezultă că și mulțimea X este conexă.

Observația 1 Reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată, după cum ne arată următorul exemplu.

Fie $X \subset \mathbb{R}^2$ mulțimea definită prin

$$X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} \ (\{1/n\} \times [0,1])) \cup (\{0\} \times \{1\}),$$

și vom considera topologia lui X ca fiind topologia indusă în X de către topologia euclidiană din $\mathbb{R}^2$. *Vom demonstra că* X *este un spațiu topologic conex, dar că nu este un spațiu topologic conex prin arce.*

Notând cu $A = X \setminus (\{0\} \times \{1\})$, se observă imediat că mulțimea A este conexă prin arce, deci conform Teoremei 6 ea va fi conexă.

Dacă presupunem că spațiul topologic X nu este conex, atunci, conform Corolarului 1 există o funcție continuă și surjectivă $f : X \to Y$, unde $Y = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$. Din Teorema 3 deducem că mulțimea $f(A)$ este conexă, și astfel aceasta va fi sau $\{0\}$ sau $\{1\}$.

Dacă, de exemplu, f (A) = {0}, atunci f ({0} x {1}) = {1}. Însă orice vecinătate a punctului {0} x {1} intersectează mulțimea A, ceea ce contrazice continuitatea funcției f în punctul {0} x {1}. În concluzie, X este un spațiu topologic conex.

Însă mulțimea X nu este conexă prin arce, deoarece punctul {0} x {1} nu poate fi legat printr-o curbă continuă din X cu nici un punct al mulțimii A.

Bibliografie

[1] Bourbaki, N.: *General Topology. Fundamental Structures,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[2] Nemeth, A. B.: *Altalanos topologia,* Babes-Bolyai Tudomanyegyetem, Kolozsvar, 1995.

[3] *Vulikh, B. Z.:* A Brief Course in the Theory of Funcțions of a Real Variable, *Mir Publishers, Moskow, 1976.*

Aspecte metodice privind rezolvarea unor probleme de conciclicitate

Prof. Nicolae Daniela

Liceul Atanasie Marienescu Lipova

1. Elemente de teorie

Definiţie. Spunem că punctele A_1, A_2, ..., A_n sunt **puncte conciclice** dacă există un punct O astfel încât $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ (adică dacă există un cerc care să conţină toate aceste puncte).

Cercul lui Euler: Mijloacele laturilor, picioarele înălţimilor şi mijloacele segmentelor AH, BH, CH, unde H este ortocentrul unui triunghi, sunt conciclice.

Definiţie. Spunem că un patrulater este **inscriptibil** dacă există un cerc care să conţină toate vârfurile sale (adică toate vârfurile sale sunt puncte conciclice).

Teoremă: Orice patrulater inscriptibil este patrulater convex.

În cazul patrulaterelor convexe pot fi stabilite condiţii de inscriptibilitate specifice, şi anume:

Teorema 1: Dacă un patrulater este inscriptibil atunci orice unghi determinat de o diagonală şi o latură este congruent cu unghiul determinat de cealaltă diagonală cu latura opusă primei laturi.

Reciproc, dacă un patrulater este convex şi un unghi determinat de o latură şi o diagonală este congruent cu unghiul determinat de latura opusă primei laturi şi cealaltă diagonală, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Teorema 2: Dacă un patrulater este inscriptibil atunci suma măsurilor a două unghiuri opuse este 180^0.

Reciproc, dacă suma măsurilor a două unghiuri opuse dintr-un patrulater convex este 180^0, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Teorema lui Ptolemeu: Dacă ABCD este un patrulater inscriptibil atunci produsul lungimilor diagonalelor este egal cu suma produselor lungimilor celor două perechi de laturi opuse.

Reciproc, dacă produsul lungimilor diagonalelor unui patrulater este egal cu suma produselor lungimilor celor două perechi de laturi opuse atunci patrulaterul este inscriptibil.

2. Aspecte metodice

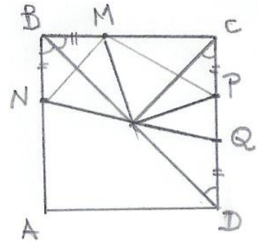
Elevii se întâlnesc prima dată cu noţinile de conciclicitate şi patrulater inscriptibil în clasa a VII-a, dar au nevoie de aceste noţiuni şi în clasa a VIII-a, de exemplu la poligoanele regulate: *Într-o piramidă cu muchiile laterale congruente poligonul de bază are vârfurile situate pe un cerc*. Problemele din manual se referă în special la calculul laturii şi apotemei unui poligon regulat cu 3, 4 sau 6 laturi. Totuşi, pentru elevii capabili de performanţă considerăm că este necesară o abordare diferenţiată a acestei teme şi am încercat o sistematizare a metodelor de abordare a problemelor de conciclicitate.

Aşadar, în cele ce urmează, pornind de la aceste teoreme şi fără a avea pretenţia că am sistematizat toate situaţiile posibile, prezentăm şi exemplificăm câteva ***metode de rezolvare a problemelor de conciclicitate.***

Vom încheia cu un set de probleme rezolvate având un nivel de dificultate mai ridicat, ultima fiind o problemă pregătitoare pentru olimpiada internaţională de matematică din anul 1981, publicată în Gazeta matematică nr. 9 / 1981.

Metoda 1: **Dacă trebuie să arătăm că un patrulater este inscriptibil vom demostra că există un punct în plan egal depărtat de vârfurile acelui patrulater** (definiţia conciclicităţii).

Exemplificare: Dacă ABCD este un pătrat, $M \in [BC]$, $N \in [AB]$, iar $P, Q \in [CD]$, cu BN=BM=CP=DQ, atunci MNQP este patrulater inscriptibil.



Rezolvare:
Avem $\Delta BON \equiv \Delta BOM \equiv \Delta COP \equiv \Delta DOQ\ (caz\ LUL)$,

deoarece OB=OC=OD (jumătate de diagonală în pătrat), BN=BM=CP=DQ (din ipoteză) şi

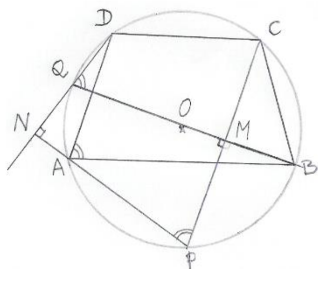
$$m(N\hat{B}O) = m(M\hat{B}O) = m(P\hat{C}O) = m(Q\hat{D}O) = 45^\circ.$$

Deci ON = OM = OP = OQ $\Longrightarrow$ MNQP este patrulater inscriptibil. *q.e.d.*

Metoda 2: **Arătăm că suma măsurilor a două unghiuri opuse este 180º.**

Exemplificare: Fie ABCD un trapez isoscel cu laturile paralele AB şi CD iar P un punct oarecare pe cercul de centru O circumscris trapezului. Să se demonstreze că perpendiculara din B pe CP intersectează perpendiculara din D pe AP într-un punct situat pe cercul de centru O.

Rezolvare: Fie Q punctul de intersecţie al dreptelor BM şi DN, unde $BM \perp CP$ şi $DN \perp AP$. Atunci patrulaterul PMQN este inscriptibil pentru că are două unghiuri opuse drepte (deci suma măsurilor a două unghiuri opuse este 180º).



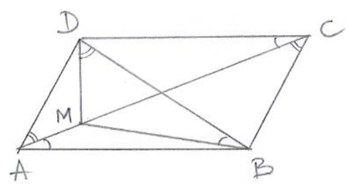
De aici avem că $N\hat{P}M \equiv D\hat{Q}M$ (1). Cum ABCD este trapez isoscel cu AB$\parallel CD$ şi AD = BC, avem că $m(\widehat{AD}) = m(\widehat{BC})$, deci:

$$m(A\hat{P}C) = \frac{m(\widehat{DA}) + m(\widehat{DC})}{2} = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{DC})}{2} = \frac{m(\widehat{BCD})}{2} = m(D\hat{A}B) \quad (2).$$

Din (1)şi (2) avem că $N\hat{P}M \equiv A\hat{P}C \equiv D\hat{A}B$, deci punctul Q se află pe arcul capabil de unghiul A, descris pe $[BD]$, adică Q aparţine arcului BPAD al cercului de centru O. *q.e.d.*

Metoda 3: **Arătăm că unghiul format de o diagonală şi o latură este congruent cu unghiul determinat de cealaltă diagonală cu latura opusă acesteia.**

Exemplificare: Se dă paralelogramul ABCD cu diagonalele AC şi BD, unde AC > BD. Pe diagonala AC se consideră un punct M astfel încât patrulaterul BCDM să fie inscriptibil. Să se demonstreze că BD este o tangentă comună exterioară a cercurilor circumscrise triunghiurilor AMB şi AMD.

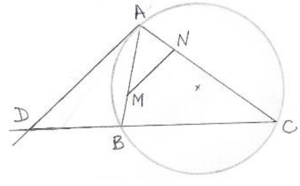


Rezolvare: Cum patrulaterul BMDC este inscriptibil avem că $M\hat{B}D \equiv M\hat{C}D$. Deoarece $AB \parallel CD$ avem că $M\hat{C}D \equiv B\hat{A}M$ (alterne interne). Din aceste relaţii rezultă că $M\hat{A}B \equiv M\hat{B}D$, deci BD este tangentă cercului circumscris triunghiului ABM.

Analog, din patrulaterul BMDC inscriptibil avem că $B\hat{D}M \equiv M\hat{C}B \left(\equiv D\hat{A}M\right)$, deci BD este tangentă şi pentru cercul circumscris triunghiului AMD. *q.e.d.*

Metoda 4: **Arătăm că un unghi exterior al patrulaterului este congruent cu unghiul interior neadiacent lui** (derivă din metoda 1).

Exemplificare: Tangenta în punctul A la cercul circumscris ΔABC întâlneşte dreapta BC în D. Se consideră o paralelă MN la AD astfel încât M aparţine dreptei AB şi N aparţine dreptei AC. Să se arate că patrulaterul BMNC este inscriptibil.



Rezolvare: Avem $MN \parallel AD$ şi AB secantă,

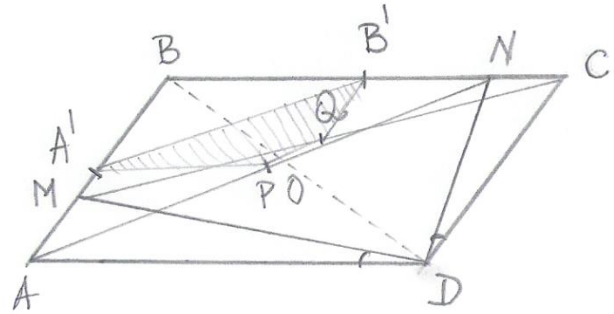
deci $D\hat{A}M \equiv A\hat{M}N$ (alterne interne).

Dar $m\left(D\hat{A}B\right)=\dfrac{m\left(A\overset{\frown}{B}\right)}{2}=m\left(A\hat{C}B\right)$, deci $D\hat{A}B\equiv B\hat{C}N$, primul fiind unghi exterior iar al doilea fiind unghi interior al patrulaterului BCNM, neadiacent lui $\Rightarrow$ patrulaterul BCNM este inscriptibil. *q.e.d.*

***Metoda 5: Reciproca puterii punctului faţă de un cerc*: Dacă $MA\cdot MB=MC\cdot MD$ atunci patrulaterul ABCD este un patrulater inscriptibil.**

Exemplificare: Fie ABCD un paralelogram şi punctele M şi N situate pe [AB], respectiv [BC], astfel încât $A\hat{D}M\equiv C\hat{D}N$. Dacă A' este mijlocul lui [AB], B' este mijlocul lui [BC], P este mijlocul lui [AN] şi Q este mijlocul lui [MC] arătaţi că punctele A' , B' , P şi Q sunt conciclice.

Rezolvare: $A'P$ este linie mijlocie în ΔABN şi ea trece şi prin mijlocul lui [AC], adică prin centrul paralelogramului, O. Analog, $B'Q$ este linie mijlocie în ΔCBM , deci şi ea trece prin O. Să încercăm reciproca puterii punctului O.



Avem: $OP\cdot OA'=\dfrac{NC}{2}\cdot\dfrac{AD}{2}$

şi

$OQ\cdot OB'=\dfrac{AM}{2}\cdot\dfrac{CD}{2}$, iar

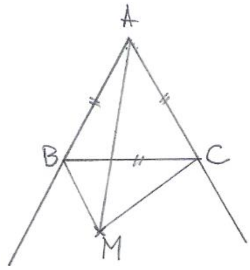
din asemănarea ΔADM cu $\Delta DNC\ (cazul\ UU)$ avem că $\dfrac{NC}{AM}=\dfrac{DC}{AD}\Rightarrow NC\cdot AD=AM\cdot DC$.

Rezultă imediat că $OP\cdot OA'=OQ\cdot OB'$, deci patrulaterul $PQB'A'$ este inscriptibil. *q.e.d.*

***Metoda 6: Reciproca teoremei lui Ptolemeu*: Un patrulater convex ABCD în care are loc relaţia $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$ este patrulater inscriptibil.**

Exemplificare: Fie ABC un triunghi echilateral şi punctul M situat în interiorul unghiului $B\hat{A}C$ astfel încât MA=MB+MC. Să se arate că patrulaterul ABMC este inscriptibil.

Rezolvare: Notăm latura triunghiului echilateral cu a. Înmulţim relaţia dată în ipoteză cu a şi obţinem: $MA \cdot a = MB \cdot a + MC \cdot a \quad \Rightarrow$ $MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$, adică reciproca teoremei lui Ptolemeu.



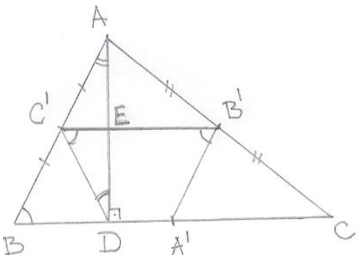
În concluzie, patrulaterul ABMC este inscriptibil. *q.e.d.*

3. Alte probleme rezolvate

1) În triunghiul ABC punctele A', B', C' sunt mijloacele laturilor triunghiului, iar D este piciorul înălţimii din A. Să se arate că punctele A', B', C' şi D sunt conciclice.

Rezolvare: Cum $B'C'$ este linie mijlocie în ΔABC avem $B'C' \| BC$, deci $A'B'C'D$ este trapez.

În paralelogramul $BA'B'C'$ avem $C'\hat{B}'A' \equiv \hat{B}$. Cum $AD \perp BC$ avem şi $AD \perp B'C'$. Fie E punctul de intersecţie al dreptelor AD şi $B'C'$. Avem $\Delta C'ED$ dreptunghic şi $C'DE \equiv C'AD$ (pentru că $\Delta C'AD$ este isoscel).



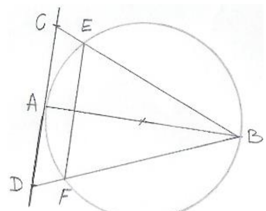
Din ΔADB dreptunghic avem relaţiile:

$$m\left(B'\hat{C}'D\right) = 90^\circ - m\left(C'\hat{D}E\right) = 90^\circ - m\left(B\hat{A}D\right) = m\left(\hat{B}\right) \quad \Rightarrow$$

$m\left(C'\hat{B}'A'\right) = m\left(\hat{B}\right) = m\left(B'\hat{C}'D\right) \Rightarrow$ trapezul $A'B'C'D$ este isoscel, deci este un patrulater inscriptibil. *q.e.d.*

2) În cercul $\mathcal{C}$ (O, R) se duce diametrul [AB] şi tangenta în A pe care se iau două puncte oarecare C şi D astfel încât A separă punctele C şi D. Dreptele CB şi DB

intersectează cercul $\mathcal{C}$ (O, R) în E şi F. Să se arate că patrulaterul CDFE este inscriptibil.

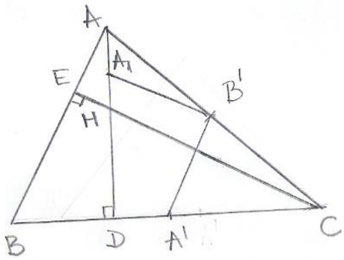


Rezolvare: Avem $m\left(B\hat{E}F\right)=\frac{m\left(\widehat{BF}\right)}{2}$, ca unghi înscris, $m\left(C\hat{E}F\right)+m\left(B\hat{E}F\right)=180^\circ$, ca unghi exterior ΔBEF şi $m\left(C\hat{D}F\right)=\frac{m\left(\widehat{AEB}\right)-m\left(\widehat{AF}\right)}{2}=\frac{180^\circ-m\left(\widehat{AF}\right)}{2}=\frac{m\left(\widehat{BF}\right)}{2}$.

$\Rightarrow B\hat{E}F\equiv C\hat{D}F \quad \Rightarrow m\left(C\hat{E}F\right)+m\left(C\hat{D}F\right)=180^\circ \quad \Rightarrow$ CDFE este patrulater inscriptibil. *q.e.d.*

3) Fie ABC un triunghi, A', B' mijloacele laturilor [BC] şi [AC], D piciorul înălţimii duse din A, H ortocentrul, iar A_1 mijlocul segmentului [AH]. Să se arate că punctele A', B', A_1 şi D sunt situate pe un cerc, în fiecare din cazurile:

a) $H\in(AD)$; b) H=D; c) $A\in(HD)$.



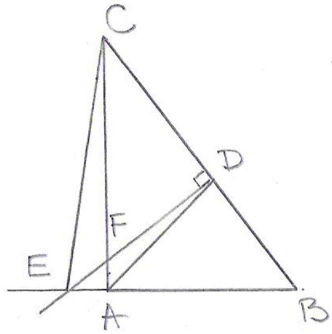
Rezolvare: În fiecare din cazurile a), b) şi c) se face acelaşi raţionament, adică se arată că $m\left(A_1\hat{B}'A'\right)=90^\circ$.

Avem $A'B'$ linie mijlocie în ΔABC şi A_1B' linie mijlocie în ΔAHC, deci $A'B'\parallel AB$ şi $A_1B'\parallel HC \Rightarrow$

$m\left(A_1\hat{B}'A'\right)=180^\circ-m\left(A\hat{B}'A_1\right)-m\left(C\hat{B}'A'\right)=180^\circ-m\left(A\hat{C}E\right)-m\left(\hat{A}\right)=m\left(A\hat{E}C\right)=90^\circ$

Deci $m\left(\hat{D}\right)+m\left(\hat{B}'\right)=90^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow$ patrulaterul $A'B'A_1D$ este inscriptibil. *q.e.d.*

4) Într-un triunghi ABC dreptunghic în A ducem bisectoarea unghiului A care întâlneşte pe BC în D iar prin D ducem perpendiculara pe BC care taie pe AB în E şi pe AC în F. Să se arate că: a) BD = DF şi CD = DE; b) $B\hat{E}F\equiv B\hat{C}F$ şi $AE\cdot BF=AF\cdot CE$

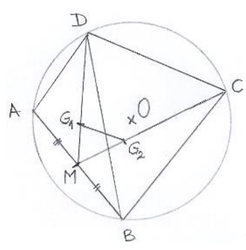


Rezolvare: a) Patrulaterul ABDF este inscriptibil pentru că două unghiuri opuse ale sale, $\hat{A}$ şi $\hat{D}$ sunt unghiuri drepte. Cum (AD este bisectoare avem că $m(B\hat{A}D) = m(D\hat{A}F) = 45^\circ \Rightarrow m(\widehat{BD}) = m(\widehat{DF})$, deci BD = DF. Patrulaterul ADCE este şi el inscriptibil pentru că are două unghiuri formate de diagonale cu laturi, unghiuri drepte, anume $E\hat{D}C$ şi $C\hat{A}E \Rightarrow m(D\hat{E}C) = m(C\hat{A}D) = 45^\circ$, deci ΔDEC este dreptunghic isoscel şi deci CD=DE.

b) Avem $m(B\hat{E}F) = 90^\circ - m(\hat{B})$, din ΔBED dreptunghic şi $m(B\hat{C}F) = 90^\circ - m(\hat{B})$, din ΔBAC dreptunghic, deci $B\hat{E}F \equiv B\hat{C}F$. Deoarece şi ABDF este inscriptibil şi ADEC este inscriptibil avem $A\hat{B}F \equiv A\hat{D}F \equiv A\hat{C}E$ şi deci triunghiurile dreptunghice ABF şi ACE sunt asemenea.

Din $\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC}$ rezultă $AE \cdot BF = AF \cdot CE$ *q.e.d.*

5) Să se arate că ortocentrele triunghiurilor formate de câte două laturi şi o diagonală ale unui patrulater inscriptibil sunt vârfurile unui alt patrulater congruent cu acesta.



Rezolvare: Notăm cu ABCD patrulaterul convex, cu G_1, G_2, G_3 şi G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ABC, CDB şi respectiv, CDA. Vom demonstra mai întâi că patrulaterele $G_1G_2G_3G_4$ şi ABCD sunt asemenea. Notăm cu M mijlocul laturii [AB]. Avem $\frac{MG_1}{MD} = \frac{1}{3}$ şi $\frac{MG_2}{MC} = \frac{1}{3}$ deci $\frac{MG_1}{MD} = \frac{MG_2}{MC}$, iar din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $G_1G_2 \| CD$ şi deci $\frac{G_1G_2}{CD} = \frac{1}{3}$. Analog pentru celelalte. Deci patrulaterele $G_1G_2G_3G_4$ şi ABCD au laturile respectiv paralele şi proporţionale $\Longrightarrow$ ele sunt asemenea având raportul de asemănare $\frac{1}{3}$.

Vom folosi mai departe, în demostraţie, **dreapta lui Euler**: **Într-un triunghi ABC punctele H, G şi O sunt coliniare (în această ordine).**

Considerăm dreptele Euler ale triunghiurilor ABD, ABC, CDB, şi respectiv, CDA. Ele sunt concurente în punctul O, centrul cercului circumscris patrulaterului ABCD (care este inscriptibil din ipoteză) pentru că, de fapt, punctul O aparţine fiecărei drepte considerate mai sus. Notăm cu H_1, H_2, H_3 şi respectiv, H_4, ortocentrele triunghiurilor de mai sus. Se ştie că H_1, G_1 şi O sunt coliniare şi situate în această ordine (aparţin dreptei Euler a triunghiului respectiv), deci avem $\frac{OG_i}{OH_i} = \frac{1}{3}$, pentru i=1, 2, 3, 4 $\Longrightarrow G_1G_2 \| H_1H_2$ şi $\frac{G_1G_2}{H_1H_2} = \frac{1}{3}$ şi analoagele lor. Aceste relaţii arată că patrulaterele $G_1G_2G_3G_4$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt asemenea, având raportul de asemănare tot $\frac{1}{3}$. Rezultă din toate cele de mai sus că patrulaterele ABCD şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt asemenea, cu raportul de asemănare 1, adică ele sunt congruente. *q.e.d.*

În concluzie, considerăm că această lucrare este utilă atât elevilor capabili de performanţă cât şi profesorilor de matematică, pentru pregătirea unor examene de specialitate.

Bibliografie:

1) Metodica predării matematicii – note de curs (prof. L. Panaitopol)
2) G. Turcitu, ş.a. – Manual de matematică pentru clasa a VII-a, Ed. Radical, 1999
3) Manual de geometrie pentru clasa a IX-a, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
4) N. Teodorescu, ş.a. – Probleme din gazeta matematică. Ediţie selectivă şi metodologică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1984

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „TRAIAN LALESCU”

Clasa a V-a

1. Dat n un număr natural nenul, vom nota prin n! produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (spre exemplu, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$). Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ cu $a,b,c \neq 0$, având proprietatea ca $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

2. Literele *A,B,C,D,E,F,G,H* și I notează numerele naturale de la 1 la 9 într-o anumită ordine. Dacă

$$A + B + C = C + D + E = E + F + G = G + H + I$$

și suma acestor patru numere egale este cea mai mare posibilă, aflați valoarea lui E.

3. Alin are o ascunzătoare secretă în care a strâns 35 monede, 38 cartonașe cu fotbaliști și 39 bomboane. Fratele lui mai mic, Cosmin, are propria ascunzătoare secretă în care strânge monede, cartonașe cu fotbaliști și bomboane, dar asta nu îl împiedică să "împrumute" și din lucrurile lui Alin. De fiecare dată, Cosmin ia de la Alin două obiecte de tipuri diferite (așa încât numărul lor să nu scadă prea repede și fratele sau să observe) și pune înapoi un obiect de al treilea tip. După o vreme, Alin își vizitează ascunzătoarea și constată că toate obiectele care se mai află acolo sunt de același tip. Ce fel de obiecte i-au mai rămas?

4. Din șirul numerelor naturale $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ se elimină toate numerele care conțin cifrele 3, 6 sau 9. Pe ce poziție în șirul rămas se va afla 2017?

Rezolvare:

1. Deoarece $6! = 720$, prezența unei cifre mai mari sau egale cu 6 ar implica $abc > 720$. În consecință, am avea $a > 7$, fapt imposibil deoarece $7! > 1000$.

Obținem deci $a, b, c < 5$

Vom avea $abc < 5! + 5! + 5! = 360$, de unde $a < 3$

Daca $a, b, c < 4$, atunci $abc < 4! + 4! + 4! = 72$ - nu convine. Prin urmare, cel puțin una dintre cifrele b și c va fi egală cu 5

Se analizează pe rând cazurile $a = 1, b = 5$; $a = 1, c = 5$; $a = 2, b = 5$; $a = 2, c = 5$; $a = 3, b = 5$ si $a = 3, c = 5$. Se găsește soluția unică $a = 1, b = 4, c = 5$, deci $\overline{abc} = 145$

2. Deoarece numărul $A + B + C + C + D + E + E + F + G + G + H + I$ este suma a patru numere naturale egale, el va fi multiplu de 4

Avem A + B + C + C + D + E + E + F + G + G + H + I = 45 + C + E + G. Valoarea maxima a sumei se atinge pentru C, E și G fiind 6, 8 si 9, deci A + B + C = C + D + E = E + F + G = G + H + I =17

Dacă C = 6 rezulta E + G = 17, deci F = 0 - nu convine

Dacă C = 8 rezultă E = 6, G = 9, deci D = 3, F = 2, si A + B = 9, H + I = 8 (configurare care se poate obţine de exemplu cu A = 4, B = 5, H = 1, I = 7).

Dacă C = 9 rezultă E = 6, G = 8, deci D = 2, F = 3, si A + B = 8, H + I = 9 (configurare care se poate obţine cu A = 1, B = 7, H = 4, I = 5)

3. Fie m numărul de monede, c numărul de cartonase și b numărul de bomboane aflate la un moment dat în ascunzătoare. Inițial, m + c = 73, m + b =74, c + b =77 .

La fiecare vizită, una din aceste sume scade cu 2, în timp ce celelalte două nu se modifică.

Deoarece m + c si c + b sunt impare, singura suma care poate ajunge la 0 după mai mulți pași este m + b, deci Alin va mai avea în final doar cartonașe cu fotbaliști.

Soluţie alternativă:

Dacă la un moment dat Alin are un număr par de obiecte de un anumit tip, după următoarea vizită numărul acestor obiecte va fi impar şi viceversa

După efectuarea unui anumit număr de vizite, sau m şi b vor fi pare şi c impar, sau m și b vor fi impare și c par. Situaţia ca două dintre numerele m, c și b să fie simultan 0 se poate obţine doar dacă acestea sunt m și b, deci c va fi impar și prin urmare nenul

4. În cazul numerelor de cel mult trei cifre din șir există câte 7 posibilități pentru cifra unităților, zecilor și sutelor, deci vom avea 73 = 343 astfel de numere.

Deducem că în șir se vor afla 343 numere de patru cifre cu cifra miilor 1. Între 2000 și 2017 inclusiv mai sunt încă 13 numere cu proprietatea cerută. Prin urmare, 2017 se va afla pe poziția 2 · 343 + 13 = 699

Clasa a VI-a

1. Mulțimea numerelor naturale pozitive se împarte în grupe astfel:

1; 2, 3; 4,5, 6; 7, 8,9,10; 11,12,13,14,15; 16,17,18,19, 20, 21;...

(prima grupa conține primul număr, a doua următoarele două, a treia următoarele trei, s.a.m.d.). Scriind numerele din fiecare grupă în ordine, unul după altul și fără spatii între ele, se obține șirul de numere: 1, 23, 456, 78910, 1112131415, 161718192021, ...

a) Cu ce cifră se termină cel de-al 100-lea număr din șir?

b) Care este numărul din șir în care apare pentru prima oară secvența 2017? De exemplu, secvența 121 apare pentru prima oară în al cincilea număr: 11**121**31415.

2. Spunem că un număr natural n este superdivizibil dacă se divide cu fiecare din cifrele sale. De exemplu, 936 este superdivizibil. Notăm cu M mulțimea numerelor superdivizibile de 6 cifre, care au ultima cifră egală cu 3.

a) Aflați cel mai mic și cel mai mare număr din mulțimea M.

b) Câte cifre distincte poate avea un număr din M? De exemplu, un număr din M poate avea două cifre distincte, deoarece numărul 113133 aparține mulțimii M și are două cifre distincte.

3. Fie A mulțimea numerelor de 3 cifre $\overline{abc}$ cu următoarea proprietate: cifra *a* este egală cu numărul divizorilor de o cifră ai numărului $\overline{abc}$, cifra b este egală cu numărul divizorilor de doua cifre ai numărului $\overline{abc}$, iar cifra c este egală cu numărul divizorilor de trei cifre ai numărului $\overline{abc}$. De exemplu, numărul 202 aparține mulțimii A (divizorii lui 202 sunt 1, 2, 101 și 202).

a) Câte numere prime conține mulțimea A?

b) Baronul Münchhausen afirmă că în mulțimea A există numere cu toate cifrele impare. Decideți (cu justificare) dacă baronul are sau nu dreptate.

c) Aflați numerele din A care au toate cifrele pare.

4. Considerăm triunghiul ABC în care $m(\sphericalangle ABC) = 30°$ și $m(\sphericalangle ACB) = 45°$. Mediatoarea laturii [BC] intersectează bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ în P și latura [AB] în Q. Demonstrați că:

a) [CP este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCQ$.

b) $[BP] = [AC]$.

Rezolvare:

1. Se cere de fapt ultima cifră a celui de-al (1+2+...+100)-lea număr natural. Cum $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$, aceasta cifră este 0. Secvența 2017 nu se poate obține dintr-un număr terminat în 2, urmat de unul care începe cu 017, deci vom căuta numere din șir care conțin o succesiune dintre un număr care se termină în 20 și unul care începe cu 17. Prima astfel de succesiune este 1720, 1721.
Deoarece $1 + 2 + \ldots + 58 = 1711$ și $1 + 2 + \ldots + 59 = 1770$, succesiunea 1720, 1721 face parte din cel de-al 59-lea număr din șir. Răspuns: secvența 2017 apare pentru prima oară în numărul 17121713 ... 17201721... 1770 (care este al 59-lea număr din șir)

2. a) Numerele din M sunt impare, deci nu au niciun divizor par și deoarece sunt superdivizibile, toate cifrele lor sunt impare. De asemenea, ele nu conțin cifra 5, deoarece nu se divid cu 5. Cel mai mare număr din M are la început cifre de 9, și nu se poate ca primele sale 5 cifre să fie 9 (999993 nu se divide cu 9). El nu poate începe nici cu 4 cifre de 9 deoarece în caz contrar, notând cu x cifra rămasă, ar trebui ca 3 + x să se dividă cu 9, deci x = 6, ceea ce am văzut că nu se poate. Numerele din M care încep cu trei de 9 nu conțin cifra 7 (în caz contrar, notând cu x cifra rămasă, ar trebui ca 10 + x să se dividă cu 9, deci x = 8, imposibil). Cum 999333 aparține mulțimii M, deducem că cel mai mare element al acestei mulţimi este 999333

În mod asemănător obținem și cel mai mic număr din M: 111333

b) Am văzut că un număr din M are toate cifrele impare și nu conține cifra 5, deci are cel mult 4 cifre distincte. Așadar, numerele din M pot avea eventual una, două, trei sau patru cifre distincte.

În M există și numere cu trei cifre distincte, de exemplu 911133

În M există numere cu o cifră și cu două cifre distincte, de exemplu 333333 și 111333

Numerele din M cu patru cifre distincte conţin toate cifrele 1, 3, 7, 9. Dacă $n = \overline{abcde3}$ este un asemenea număr, atunci trei dintre cifrele a,b,c,d,e sunt 1, 7, 9. Să notăm cu x,y celelalte două cifre. Atunci x și y se află printre cifrele 1, 3, 7, 9 și în plus $1 + 7 + 9 + 3 + x + y$ se divide cu 9, deoarece n se divide cu 9. Rezultă că $x + y = 7$ sau $x + y = 16$, de unde obținem că $\{x, y\} = \{7, 9\}$, deci n are două cifre de 9, două cifre de 7, o cifră 1 și o cifră (ultima) 3

Deoarece putem aranja cele șase cifre astfel încât să obținem un multiplu de 7 (de exemplu, numărul 979713 se divide cu 7), rezultă că în M există și numere cu patru cifre distincte

Remarca. Pentru ultima parte a soluției este util următorul criteriu de divizibilitate cu 7, 11 sau 13, bazat pe egalitatea $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$: $\overline{abcdef}$ se divide cu 7 (11, 13) dacă și numai daca $\overline{abc} - \overline{def}$ se divide cu 7 (11, 13).

3. a) Un număr prim are doar divizori improprii, deci mulțimea A poate conține cel mult un număr prim p, pe 101 (prima cifră este 1, deoarece 1 este singurul divizor de o cifră al lui p, a doua cifră este 0, deoarece p nu are divizori de două cifre, iar a treia cifră este 1, deoarece p este singurul divizor de trei cifre al său.) Deoarece 101 este prim, deducem ca A conține un singur număr prim

b) Vom arăta că mulțimea A nu conține numere cu toate cifrele impare, deci baronul nu are dreptate. Observăm mai întâi că dacă $\overline{abc}$ aparține mulțimii A, atunci el are $a + b + c$ divizori

Daca $\overline{abc} \in A$ are toate cifrele impare, atunci $a + b + c$ este impar, deci $\overline{abc}$ este pătrat perfect (are un număr impar de divizori)

În plus, prima cifră a lui $\overline{abc}$ este cel mult 5, deoarece divizorii de o cifră ai lui $\overline{abc}$ se află printre numerele 1, 3, 5, 7, 9. Însă nici unul dintre pătratele perfecte impare de trei cifre mai mici decât 600 nu are toate cifrele impare: $11^2 = 121$, $13^2 = 169$, $15^2 = 225$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$, $21^2 = 441$, $23^2 = 529$. (De fapt, penultima cifră a oricărui pătrat perfect impar este întotdeauna pară!)

c) Dacă $\overline{abc} \in A$, atunci $c > 1$ ($\overline{abc}$ este un divizor de trei cifre al lui $\overline{abc}$) și $c < a$, deoarece fiecărui divizor d de trei cifre al lui $\overline{abc}$ îi corespunde divizorul , care are o singură cifră. De asemenea, un număr $\overline{abc} \in A$ nu poate începe cu cifra 8, deoarece atunci cei 8 divizori de o cifră ai săi sunt 1 , 2 , 3, 4, 6, 7, 8 și 9, deci el s-ar divide cu $23 \cdot 32 \cdot 7 = 504$, ceea ce este imposibil. Așadar dacă $\overline{abc}$ are toate cifrele pare, atunci $a \in \{2,4, 6\}$, $c \in \{2, 4, 6\}$ și $c < a$

Dacă $a = 2$, atunci $c = 2$, iar $\overline{abc}$ trebuie căutat printre numerele 202, 242, 262 (am exclus numerele 222 și 282, deoarece se divid cu 3, pe când cei doi divizori de o cifră ai lui $\overline{abc}$ sunt 1 și 2). Ştim că numărul 202 este bun. Numerele $242 = 2 \cdot 11^2$ și $262 = 2 \cdot 131$ nu aparțin mulțimii A: primul nu are decât 2 divizori de două cifre, iar al doilea nu are niciun divizor de două cifre

Dacă $a = 6$, atunci 3 se află printre cei șase divizori de o cifră a lui $\overline{abc}$. Rezultă că $a + b + c = 12$ sau $a + b + c = 18$, deci trebuie sa verificam numerele 606, 624, 642, 666 și 684. Nici unul dintre ele nu aparține însă mulțimii A: $606 = 2 \cdot 3 \cdot 101$ nu are decât 4 divizori de o cifră (sau are doar 8 divizori), $624 = 2^4 \cdot 3 \cdot 13$ are mai mult de doi divizori de două cifre (sau are 20 divizori), $666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$ are 5 divizori de o cifră (sau are doar 12 divizori) $684 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19$ are 7 divizori de două cifre.

Dacă $a = 4$, atunci $c = 2$ sau $c = 4$, iar printre divizorii de o cifră ai lui $\overline{abc}$ se află sau 3 sau 4 (în caz contrar ar lipsi 0, 3, 4, 5, 6, 8 și 9) deci avem de verificat doar numerele: 402, 462, 404, 424, 444, 464, 484. Cum $402 = 2 \cdot 3 \cdot 67$ are cel puţin un divizor de două cifre, $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ are 5 divizori de o cifră, $404 = 2^2 \cdot 101$ nu are decât 3 divizori de o cifră, $424 = 2^3 \cdot 53$ nu are decât un divizor de două cifre, $444 = 2^2 \cdot 3 \cdot 37$ are 5 divizori de o cifră, $464 = 2^4 \cdot 29$ are doar 3 divizori de două cifre, $484 = 2^2 \cdot 11^2$ are doar 3 divizori de o cifră, nici unul dintre aceste numere nu se află în A

Așadar singurul număr din A cu toate cifrele pare este 202.

4. a) Notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$. Din $\Delta BQM \equiv \Delta CQM$ (CC) rezultă că $\sphericalangle BQM \equiv \sphericalangle CQM$, deci [QM este bisectoare în triunghiul BQC. Rezultă că punctul P este intersecția a două dintre bisectoarele triunghiului BQC, deci este punctul de intersecție a bisectoarelor acestui triunghi, de unde deducem că [CP este bisectoarea unghiului C al triunghiului BCQ

Alternativ, se demonstrează că $\sphericalangle PBM \equiv \sphericalangle PCM$ și $\sphericalangle QBM \equiv \sphericalangle QCM$ (din $\Delta PBM \equiv \Delta PCM$ și $\Delta QBM \equiv \Delta QCM$ sau folosind triunghiurile isoscele BPC și

BQC), deci toate cele patru unghiuri, $\sphericalangle QBP$, $\sphericalangle PBM$, $\sphericalangle MCP$ și $\sphericalangle PCQ$ sunt congruente.

b) Deoarece triunghiul *QBM* este dreptunghic rezultă că măsura unghiului *BQM* este 60°

Deoarece [QM este bisectoarea unghiului *Q* al triunghiului *BQC*, rezultă că $m(\sphericalangle MQC)= 60°$, deci $m(\sphericalangle BQM) = m(\sphericalangle MQC) = m(\sphericalangle CQA) = 60°$

Din punctul a) deducem că $m(\sphericalangle PCM) = m(\sphericalangle PCQ) = 15°$, deci $m(\sphericalangle PCQ) = m(\sphericalangle QCA) = 15°$.

Rezultă că triunghiurile *PQC* și *AQC* sunt congruente (ULU), deci $AC = PC$, și cum $PC = BP$ obț inem că $BP = AC$

(Alternativ, $\Delta QBP \equiv \Delta QCA$ (ULU).)

Consecință. Într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°, lungimea bisectoarei unghiului de 30° este de două ori mai mare decât lungimea bisectoarei unghiului drept.

Clasa a VII-a

1. Arătați, fără a extrage radicalii, că:

(a) $\{7\sqrt{3}\} > \frac{3}{25}$

(b) $\{3\sqrt{7}\} > \frac{14}{15}$

(c) $[7\sqrt{3} + 3\sqrt{7}] = 20$

2. Fie p un număr prim și x un număr întreg astfel încât

$$p \mid x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$$

Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele $x^4 + x^3\ \ x^2 + x + 1$, $x^{10} + x^5 + 1$ este di vizibil cu p.

3. Fie ABC un triunghi având lungimile laturilor AB=4, BC=20, AC=17. Notam cu D piciorul bisectoarei unghiului $\sphericalangle BAC$, cu E mijlocul segmentului AD, cu F intersecția dreptelor AC și BE. Calculați lungimile segmentelor (BD) și (AF).

4. (a) Considerăm un triunghi ABC și fie D un punct pe latura (BC). Se

formează astfel 3 triunghiuri: ABC, ABD și ACD. Demonstrați că dacă cele 3 triunghiuri sunt asemenea între ele, atunci unghiul $\sphericalangle BAC$ este drept și $AD \perp BC$.

(b) Considerăm un patrulater ABCD și fie O intersecția diagonalelor sale. Demonstrați că dacă 7 dintre cele 8 triunghiuri formate sunt asemenea între ele, atunci toate cele 8 triunghiuri sunt asemenea între ele.

Rezolvare:

1. $7\sqrt{3} = \sqrt{147} \in (12,13)$

deci $[7\sqrt{3}] = 12$

și $\{7\sqrt{3}\} = 7\sqrt{3} - 12 = \sqrt{147} - 12 = \frac{147-144}{\sqrt{147}+12} > \frac{3}{13+12} = \frac{3}{25}$

$3\sqrt{7} = \sqrt{63} \in (7, 8)$

deci $\left[3\sqrt{7}\right] = 7$

și $\left\{3\sqrt{7}\right\} = 3\sqrt{7} - 7 = 1 - \left(8 - 3\sqrt{7}\right) = 1 - \frac{64-63}{8+\sqrt{63}} > 1 - \frac{1}{8+7} = \frac{14}{15}$

$20 < 12 + 7 + \frac{79}{75} = 12 + \frac{3}{25} + 7 + \frac{14}{15} < 7\sqrt{3} + 3\sqrt{7} < 13 + 8 = 21$

deci $\left[7\sqrt{3} + 3\sqrt{7}\right] = 20$

2. p | $x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 = (x^3)^4 + (x^3)^3 + (x^3)^2 + x^3 + 1 = \frac{(x^3)^5-1}{x^3-1} =$

$\frac{(x^5)^3-1}{x^3-1} = \frac{(x^5-1)\left((x^5)^2+x^5+1\right)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{10}+x^5+1)}{x^2+x+1}$

deci p divide cel puțin unul dintre factorii numărătorului

3. Din teorema bisectoarei obținem succesiv

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{AB}{AB+AC}$, $\quad BD = \frac{AB \cdot BC}{AB+AC} = \frac{80}{21}$

Aplicăm teorema lui Menelaos triunghiului ADC și transversalei BF:

$$\frac{AE}{ED} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

de unde rezultă succesiv

$\frac{AF}{FC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{80}{21}}{20} = \frac{4}{21}$

$\frac{AF}{AF+FC} = \frac{4}{25}$

$AF = \frac{68}{25}$

4. Fiind unghi exterior triunghiului *ABD*, unghiul $\sphericalangle ADC$ nu poate fi congruent nici cu unghiul $\sphericalangle ABD$, nici cu unghiul $\sphericalangle BAD$. Rămâne doar posibilitatea $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ADB$, adică $AD \perp BC$

Toate cele 3 triunghiuri sunt deci dreptunghice, iar singurul unghi al triunghiului *ABC* care poate fi drept este $\sphericalangle BAC$

Triunghiurile *AOB*, *BOC*, *COD* și *DO A* le numim "mici", iar triunghiurile *ABC*,....... *ACD*, *ABD* și *BCD* le numim "mari". Cele 7 triunghiuri asemenea între ele sunt sau 4 "mici" și 3 "mari" (cazul i.), sau 3 "mici" și 4 "mari" (cazul ii.)

Putem presupune că cele 3 triunghiuri "mari" asemenea sunt *ABC, ACD* și

ABD. Aplicând fiecăruia concluzia de la punctul (a) rezultă că patrulaterul *ABCD* are 3 unghiuri drepte și diagonalele perpendiculare, deci este un pătrat. Toate cele 8 triunghiuri formate sunt asemenea, fiind dreptunghice isoscele

Putem presupune că cele 3 triunghiuri "mici" asemenea sunt *AOB, BOC* și *COD.* Aplicând triunghiurilor *ABC* și *BCD* concluzia de la punctul (a) rezultă că patrulaterul *ABCD* are doua unghiuri drepte ($\sphericalangle$B și $\sphericalangle C$) și diagonalele perpendiculare.

Triunghiul ABD este și el dreptunghic, cu unghiurile $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle ADB$ ascuțite (fiecare dintre acestea face parte dintr-un triunghi "mic" dreptunghic), deci neapărat unghiul $\sphericalangle$A al patrulaterului este drept. Patrulaterul *ABCD* este astfel un pătrat și cele 8 triunghiuri formate sunt toate asemenea.

Clasa a VIII-a

1.Fie M și N mijloacele muchiilor [BB'], respectiv [CD], ale cubului ABCDA'B'C 'D'.

a) Arătați că dreptele A'M și C'N sunt perpendiculare.

b) Dacă PQ, cu P ∈ A'M și Q ∈ C'N, este perpendiculara comună a dreptelor A'M și C'N, aflați raportul $\frac{A'P}{PM}$.

2. a) Rezolvați ecuația

$$\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x+1}{5}\right]+\left[\frac{x+2}{5}\right]+\left[\frac{x+3}{5}\right]+\left[\frac{x+4}{5}\right]+\left[\frac{x+5}{5}\right]=2017$$

b) Determinați mulțimea valorilor pe care le ia expresia

$$\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x+1}{5}\right]+\left[\frac{x+2}{5}\right]+\left[\frac{x+3}{5}\right]+\left[\frac{x+4}{5}\right]+\left[\frac{x+5}{5}\right]$$

când $x>0$.

3.Pe muchiile laterale ale cubului ABCDA'B'C'D' de latură 2 m se consideră punctele $P_1, P_5, \ldots, P_{97} \in [AA']$, $P_2, P_6, \ldots, P_{98} \in [BB']$, $P_3, P_7, \ldots, P_{99} \in [CC']$ și P_4,

P_8,. . . , P_{100} ∈ [DD'] astfel încât d(P_k, (ABCD)) = k cm, oricare ar fi k ∈ {1, 2,..., 100}.

Câte plane distincte determină cele 100 puncte?

4. Pentru x, y, z ∈ [1, 3] notăm E(x, y, z) = xyz + (4 – x)(4 – y)(4 – z).

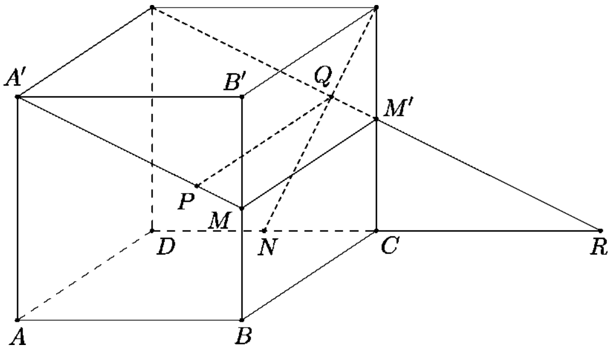
a) Demonstrați că $(x-2)(y-2) \leq 1 - |x-y|$, ∀ x, y ∈ [1, 3].

b) Folosind eventual subpunctul anterior, determinați maximul expresiei E(x,y,z).

c) Arătați că E(x, y, z) ≥ min{E(x, y, 1), E(x, y, 3)}, ∀ x, y, z ∈ [1, 3].

d) Demonstrați că E(x,y,z) ≥ 12, ∀ x,y, z ∈ [1, 3]. Când are loc egalitatea?

Rezolvare:



1. a) Fie M' mijlocul lui [CC']. Atunci A'MM'D' este dreptunghi. Este suficient atunci să demonstrăm că C'N ⊥ D'M'. Acest lucru rezultă din congruența triunghiurilor D'C'M' și C'CN (CC). Atunci m(∢NC'D') = 90° – m(∢NC'C) = 90° – m(∢C'D'M'), de unde concluzia

b) Fie {Q} = D'M' ∩ C'N și P ∈ (A'M) astfel încât A'P = D'Q. Evident, A'D'QP este dreptunghi, deci PQ || A'D', adică PQ ⊥ (CDD'C'). Deducem că PQ ⊥ C'N și PQ ⊥ D'M', deci PQ ⊥ A'M. Prin urmare, PQ este perpendiculara comună a dreptelor A'M și C'N.

Daca {R} = CD ∩ D'M', avem CR = C'D', deci

$$\frac{D'Q}{QR} = \frac{C'D'}{NR} = \frac{2}{3}$$

Obținem că:

$$\frac{D'Q}{D'R} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{D'Q}{D'M'} = \frac{4}{5}, \qquad \frac{A'P}{PM} = \frac{D'Q}{QM'} = 4$$

2. a) Dacă $\left[\frac{x}{5}\right] = k \in \mathbb{N}$ atunci $\left[\frac{x+5}{5}\right] = k + 1$, deci fiecare din numerele $\left[\frac{x+1}{5}\right], \left[\frac{x+2}{5}\right], \left[\frac{x+3}{5}\right], \left[\frac{x+4}{5}\right]$ este egal cu k sau cu k+1.

Atunci suma dată va fi egală cu 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4 și 6k + 5.

Cum $2017 = 6 \cdot 336 + 1$ rezultă că k = 336.

Dar și faptul că $\left[\frac{x+4}{5}\right] = k = 336$, deci $\frac{x+4}{5} < 337 \leq \frac{x+5}{5}$.

Deducem că $x \in [1680{,}1681)$. Orice x din acest interval satisface condiția din enunț.

b) Din cele de mai sus se vede ca valorile care se obțin sunt numere naturale nedivizibile cu 6. Pe de altă parte toate aceste numere se obțin:

Dacă $x = 5n$, $n \in \mathbb{N}$, expresia este $6n + 1$; dacă $x = 5n + 1$, expresia este $6n + 2$, ş.a.m.d., dacă $x = 5n + 4$, expresia este $6n + 5$.

3. Un plan este determinat de trei puncte necoliniare. Daca două dintre cele trei puncte de află pe o aceeași muchie și un al treilea se afla pe o alta muchie, cele trei puncte determină fie una dintre fețe, fie unul dintre cele două plane diagonale verticale. Obținem 6 asemenea plane. Mai rămân planele determinate de trei puncte aparținând unor muchii diferite. Exista $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 4 = 62500$ asemenea plane. Putem alege cele trei muchi pe care se afla punctele în 4 moduri, iar fiecare punct de pe respectiva muchie în cate 25 de moduri. Mai rămâne să demonstrăm ca toate aceste plane sunt distincte.

Presupunând ca punctele $P_a \in [AA']$, $P_b \in [BB']$, $P_c \in [CC']$ şi $P_d \in [DD']$ ar fi coplanare, dacă notăm cu $\{O\} = AC \cap BD$ şi cu O' intersecţia perpendicularei în O pe planul (ABCD) cu planul $(P_aP_bP_cP_d)$, atunci [OO'] este linie mijlocie în trapezele AP_aP_cC şi BP_bP_dD, deci $2OO' = AP_a + CP_c = BP_b + DP_d$, deci $a + c = b + d$.

Dar $a \equiv 1 \pmod 4$, $b \equiv 2 \pmod 4$, $c \equiv 3 \pmod 4$, $d \equiv 0 \pmod 4$, deci $a + c \equiv 0 \pmod 4$, iar $b + d \equiv 2 \pmod 4$, prin urmare egalitatea $a + c = b + d$ nu poate avea loc, deci punctele nu pot fi coplanare.

4. a) Datorită simetriei, putem presupune $x \leq y$. Inegalitatea de demonstrat devine
$xy - y - 3x + 3 \leq 0$, adică $(x - 1)(y - 3) \leq 0$,
ceea ce este adevărat deoarece $x - 1 \geq 0$ și $y - 3 \leq 0$

b) Avem $(x - 2)(y - 2) \leq 1 - |x - y| \leq 1$
și, analog, $(y - 2)(z - 2) \leq 1$ și $(z - 2)(x - 2) \leq 1$.
Adunând aceste relații obținem că $xy + yz + zx - 4(x+y+z) \leq -9$.
Dar $E(x, y, z) = 4[xy + yz + zx - 4(x + y + z)] + 64 \leq 4 \cdot (-9) + 64 = 28$
Pe de alta parte, pentru $x = y = z = 1$ (sau $x = y = z = 3$) această valoare chiar se atinge, deci maximul căutat este 28

c) Avem
$E(x,y,z) - E(x,y, 1) = xy(z -1) + (4 - x)(4 - y)(1 - z) = 4(z - 1)(x + y - 4)$ și
$E(x, y, z) - E(x, y, 3) = xy(z - 3) + (4 - x)(4 - y)(3 - z) = 4(z - 3)(x + y - 4)$.
Dacă $x + y \geq 4$, atunci $E(x, y, z) \geq E(x, y, 1)$,
iar daca $x + y \leq 4$, atunci $E(x, y, z) \geq E(x, y, 3)$

d) Avem succesiv: $E(x,y,z) \geq \min\{E(x,y, 1),E(x,y, 3)\} \geq$
$\geq \min\{E(x, 1,1), E(x, 3,1), E(x, 1, 3), E(x, 3, 3)\} \geq$
$\geq \min\{E(1,1,1),E(3,1,1),E(1,3,1),E(3,3,1),E(1,1, 3), E(3,1, 3),E(1, 3, 3),E(3, 3, 3)\}$
$= \min\{28,12\} = 12$.
Egalitate în inegalitatea de la c) avem dacă $z =1$, $z = 3$ sau daca $x + y = 4$.
În final, egalitate avem dacă una din variabile este egală cu 1, iar o a doua este egală cu 3. (A treia variabila poate lua orice valoare.)

Clasa a IX-a

1. Un număr de 1042017 de becuri sunt conectate la 1042017 comutatoare, astfel încât comutatorul cu numărul *i* este conectat la becul cu numărul *j* dacă și numai dacă $i \mid j$. Prin acționarea unui comutator se schimbă starea tuturor becurilor conectate la acesta. Presupunem că inițial toate becurile sunt stinse.

a) Dacă sunt acționate toate comutatoarele într-o anumită ordine, fiecare o singură dată, arătați că starea finală a fiecărui bec este independentă de ordinea în care sunt acționate comutatoarele.

b) Care becuri rămân aprinse după acționarea tuturor comutatoarelor câte o singură dată? Câte sunt aceste becuri?

2. Fie *ABC* un triunghi ascuțitunghic, $[AA_1]$, $[BB_1]$ și $[CC_1]$ înălțimile sale, iar *M*, *N* și respectiv *P*, mijloacele segmentelor $[B_1C_1]$, $[C_1A_1]$, respectiv $[A_1B_1]$. Arătați că dreptele *AM*, *BN* și *CP* sunt concurente.

3. Fie $a,b,c > 0$ cu proprietatea ca $a + b + c = 1$. Arătați că

$$9abc \le ab + ac + bc \le a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \le a^2 + b^2 + c^2.$$

4. a) Fie *ABC* un triunghi, *O* centrul cercului său circumscris, *R* raza cercului circumscris, iar *r* raza cercului înscris triunghiului *ABC*. Arătați că

$$\varepsilon_A \cdot d(O,BC) + \varepsilon_B \cdot d(O,CA) + \varepsilon_C \cdot d(O,AB) = R + r,$$

unde $\varepsilon_X = \mathrm{sgn}(90 - m(X))$.

b) Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil, iar r_A, r_B, r_C, r_D razele cercurilor înscrise în triunghiurile *BCD, CDA, DAB,* respectiv *ABC*. Arătați că

$$r_A + r_C = r_B + r_D.$$

c) Formulați o generalizare a proprietății de la b) pentru poligoane inscriptibile oarecare.

Rezolvare:

1. a) Se arată că starea finală a unui bec depinde doar de paritatea numărului divizorilor săi. Un bec rămâne aprins dacă și numai dacă are un număr impar de divizori

b) Numerele cu un număr impar de divizori sunt exact pătratele perfecte. Numărul acestora este $\left[\sqrt{1042017}\right] = 1020$

2. Laturile triunghiului ortic sunt antiparalele laturilor triunghiului în raport cu unghiurile sale. Mediana AM a triunghiului AB_1C_1 este izogonala medianei corespunzătoare laturii [BC] a triunghiului ABC (si analoagele)

Ca drepte suport ale simedianelor triunghiului ABC, AM, BN ș i CP sunt concurente

3. Ținând cont de condiția $a + b + c = 1$, inegalitățile de demonstrat sunt echivalente cu

$$9abc \leq (a + b + c)(ab + ac + bc) \leq a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \leq$$

$$\leq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

După reducerea termenilor, prima ș i ultima inegalitate sunt echivalente cu $6abc \leq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$,

Care rezultă din inegalitatea mediilor

Inegalitatea din mijloc se rescrie

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$$

sau

$$a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0 ,$$

care este inegalitatea lui Schur

4. a) *(var.1)* Are loc ε_A: $d(O,BC) = R \cdot \cos(A)$ și analoagele

Deoarece $\sum \cos(A) = 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) = 1 + \frac{r}{R} = 1$

rezultă relaț ia din enunț

(var.2) Fie M, N, P mijloacele laturilor triunghiului și d_a, d_b, d_c distanțele centrului O la laturile [BC], [CA], respectiv [AB]. Dacă ABC este ascuțitunghic, atunci $O \in Int(ABC)$, și din inscriptibilitatea patrulaterelor $OMCN$, $ONAP$, $OPBM$ rezultă că

$$d_a \cdot \frac{b}{2} + d_b \cdot \frac{a}{2} = R \cdot \frac{c}{2} \quad , \qquad (1)$$

$$d_b \cdot \frac{c}{2} + d_c \cdot \frac{c}{2} = R \cdot \frac{a}{2} \quad , \qquad (2)$$

$$d_c \cdot \frac{a}{2} + d_a \cdot \frac{c}{2} = R \cdot \frac{b}{2} \quad , \qquad (3)$$

Deoarece $\mathcal{A}$[OBC] + $\mathcal{A}$ [OCA] + $\mathcal{A}$ [OAB] = $\mathcal{A}$ [ABC], are loc

$$d_a \cdot \frac{a}{2} + d_b \cdot \frac{b}{2} + d_c \cdot \frac{c}{2} = r \cdot p \quad , \qquad (4)$$

Adunând relaţiile (1) - (4) și împărţind prin semiperimetrul p se obţine atunci

$$d_a + d_b + d_c = R + r$$

Dacă triunghiul *ABC* este obtuzunghic, cu unghiul obtuz în vârful A, relațiile (1), (3) si (4) se înlocuiesc cu

$$-d_a \cdot \frac{b}{2} + d_b \cdot \frac{a}{2} = R \cdot \frac{c}{2} \ , \qquad (1')$$

$$d_c \cdot \frac{a}{2} - d_a \cdot \frac{c}{2} = R \cdot \frac{b}{2} \ , \qquad (3')$$

$$-d_a \cdot \frac{a}{2} + d_b \cdot \frac{b}{2} + d_c \cdot \frac{c}{2} = r \cdot p \ , \qquad (4')$$

Se obține atunci

$$-d_a + d_b + d_c = R + r$$

b) Conform punctului a), au loc egalitățile

$$\varepsilon_{\sphericalangle BCD} \cdot d(O,BD) + \varepsilon_{\sphericalangle CBD} \cdot d(O,CD) + \varepsilon_{\sphericalangle BDC} \cdot d(O,BC) = R + r_A,$$

$$\varepsilon_{\sphericalangle BAD} \cdot d(O,BD) + \varepsilon_{\sphericalangle ABD} \cdot d(O,AD) + \varepsilon_{\sphericalangle ADB} \cdot d(O,AB) = R + r_C.$$

Deoarece $\varepsilon_{\sphericalangle BCD} \cdot d(O,BD) + \varepsilon_{\sphericalangle BAD} \cdot d(O,BD) = 0$,

rezultă că

$r_A + r_C = \varepsilon_{\sphericalangle ADB} \cdot d(O,AB) + \varepsilon_{\sphericalangle BDC} \cdot d(O,BC) + \varepsilon_{\sphericalangle CBD} \cdot d(O,CD) + \varepsilon_{\sphericalangle ABD} \cdot d(O,AD)$

și analog $r_B + r_D = \varepsilon_{\sphericalangle ACB} \cdot d(O,AB) + \varepsilon_{\sphericalangle BAC} \cdot d(O,BC) + \varepsilon_{\sphericalangle CAD} \cdot d(O,CD) + \varepsilon_{\sphericalangle ACD} \cdot d(O,AD)$

de unde rezultă concluzia.

c) Are loc proprietatea mai generală:

Dacă un poligon inscriptibil este împărţit în triunghiuri de diagonale care nu au puncte interioare comune, suma razelor cercurilor înscrise în aceste triunghiuri nu depinde de împărţirea efectuată. Mai precis, dacă $A_1A_2 \ldots A_n$ este înscris în cercul C(O, R), suma razelor cercurilor înscrise în cele n – 2 triunghiuri ale unei triangulări a poligonului este

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{d(O, A_k A_{k+1})} - (n-2)R$$

Clasa a X-a

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Comparați numerele A(n) și B(n), unde

$$A(n) = \frac{2^{\sqrt{\log_2 3}} + 2^{\sqrt[3]{\log_2 3}} + \cdots + 2^{\sqrt[n]{\log_2 3}}}{n-1}$$

$$B(n) = 3^{\frac{\sqrt{\log_3 2} + \sqrt[3]{\log_3 2} + \cdots + \sqrt[n]{(\log_3 2)^{n-1}}}{n-1}}$$

2. Fie n un număr natural fixat. Aflați partea întreagă a numărului N(n), unde

$$N(n) = \sum_{k=0}^{n} \log_{2^{2^k}} \left[\left(1 + 2^{2^k}\right)^{2^k}\right]$$

3. Fie $\mathcal{M} = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}: |z_1 + z_2| = \left|z_1^2 + z_2^2\right| = 2\right\}$. Determinați $\min\limits_{(z_1,z_2)\in\mathcal{M}} \left|z_1^3 + z_2^3\right|$.

4. Determinați toate funcțiile $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu $f(0) = 0$ și $f(n) = f\left(\left[\frac{n}{2017}\right]\right) + 1, (\forall) n \geq 1$, unde prin [x] am notat partea întreagă a numărului real x.

Rezolvare:

1. Pentru n = 2 observăm că $A(2) = 2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}} = B(2)$.

Se demonstrează că pentru orice $k \geq 2$ are loc egalitatea $2^{\sqrt[k]{\log_2 3}} = 3^{\sqrt[k]{(\log_3 2)^{k-1}}}$

Se rescrie A(n) sub forma:

$$A(n) = \frac{3^{\sqrt{\log_3 2}} + 3^{\sqrt[3]{(\log_3 2)^2}} + \cdots + 3^{\sqrt[n]{(\log_3 2)^{n-1}}}}{n-1}$$

Se observă că $3^{\sqrt{\log_3 2}} > 0$, $3^{\sqrt[3]{(\log_3 2)^2}} > 0, \ldots, 3^{\sqrt[n]{(\log_3 2)^{n-1}}} > 0$, apoi se aplică inegalitatea mediilor ($m_a \geq m_g$) și obținem A(n) ≥ B(n).

Pentru n ≥ 3 se observă că numerele ce intervin în inegalitatea mediilor nu sunt toate egale (mai mult, acestea sunt toate diferite), de unde rezultă că A(n) > B(n).

2. Se observă că pentru orice k ≥ 0 are loc egalitatea

$$\log_{2^{2^k}} \left[\left(1 + 2^{2^k}\right)^{2^k}\right] = \log_2 \left(1 + 2^{2^k}\right)$$

De unde $N(n) = \log_2 \left[\prod_{k=0}^{n} \left(2^{2^k} + 1\right)\right]$.

Se obține succesiv:

$$N(n) = \log_2 \left[(2-1) \prod_{k=0}^{n} \left(2^{2^k} + 1\right)\right] =$$

$$= \log_2\left[\left(2^{2^0} - 1\right)\left(2^{2^0} + 1\right)\left(2^{2^1} + 1\right) \ldots \left(2^{2^n} + 1\right)\right] =$$

$$= \log_2\left[\left(2^{2^1} - 1\right)\left(2^{2^1} + 1\right) \ldots \left(2^{2^n} + 1\right)\right] = \ldots = \log_2\left[\left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right)\right] =$$

$$= \log_2\left(2^{2^{n+1}} - 1\right)$$

Se demonstrează că pentru orice n ≥ 0 are loc dubla inegalitate

$$2^{n+1} - 1 < \log_2\left(2^{2^{n+1}} - 1\right) < 2^{n+1}$$

De unde rezultă că $[N(n)] = 2^{n+1} - 1$

3. Se observă că pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ are loc identitatea

$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2)$

Dar $z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = \frac{1}{2}[3(z_1^2 + z_2^2) - (z_1 + z_2)^2]$

Și se deduce astfel că pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ are loc identitatea

$\left|z_1^3+z_2^3\right|=\dfrac{1}{2}|z_1+z_2|\left|3(z_1^2+z_2^2)-(z_1+z_2)^2\right|$

Utilizând inegalitatea $|u-v|\geq\left||u|-|v|\right|,\ (\forall)u,v\in\mathbb{C}$ se obține

$\left|z_1^3+z_2^3\right|\geq\dfrac{1}{2}|z_1+z_2|\left|3\left|z_1^2+z_2^2\right|-|z_1+z_2|^2\right|,(\forall)z_1,z_2\in\mathbb{C}$

Astfel, pentru orice $z_1,z_2\in\mathcal{M}$ se obține că

$\left|z_1^3+z_2^3\right|\geq\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot|3\cdot 2-2^2|=2$

Rezultă că $\min\limits_{(z_1,z_2)\in\mathcal{M}}\left|z_1^3+z_2^3\right|=2.$

4. Se observă că $(\forall)n\in\mathbb{N}$ cu $1\leq n<2017$ avem $\left[\frac{n}{2017}\right]=0$ și astfel, cum f(0) = 0, se obține

$f(n)=f\left(\left[\frac{n}{2017}\right]\right)+1=f(0)+1=1$ (1)

Dar $(\forall)n\in\mathbb{N}$ cu $2017\leq n<2017^2$ avem $1\leq\left[\frac{n}{2017}\right]<2017$ și astfel din relația (1) se obține $f\left(\left[\frac{n}{2017}\right]\right)=1$

În consecință, se obține că $(\forall)n\in\mathbb{N}$, cu $2017\leq n<2017^2$ avem

$f(n)=f\left(\left[\dfrac{n}{2017}\right]\right)+1=1+1=2$

Se demonstrează prin inducție că

$(\forall)k\in\mathbb{N}^*$ și $(\forall)n\in\mathbb{N}$ cu $2017^{k-1}\leq n<2017^k$ avem $f(n)=k$

Se obține $f(n)=[\log_{2017}n]+1$, pentru orice $n\geq 1$ și $f(n)=0$ pentru n = 0 din ipoteză, funcție ce verifică condiția din enunț.

Clasa a XI-a

1. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții astfel încât g este continuă și pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem

$$f(x)\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow f\big(g(x)\big)\notin\mathbb{Q}$$

Arătați că funcția f are cel puțin un punct de discontinuitate.

2. (a) Fie $\lambda>1$ un număr real și $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale cu proprietatea că șirul $(\lambda x_{n+1}-x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este de asemenea convergent.

(b) Fie $(y_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale cu proprietatea că șirul $(6y_{n+2}-5y_{n+1}+y_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Arătați că șirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este de asemenea convergent.

3. Fie $A\in\mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ două matrice cu proprietatea că

$$AB=\begin{bmatrix}4&2&-2&-4\\-2&0&1&3\\-2&-2&1&1\\2&2&-1&-1\end{bmatrix}$$

(a) Arătați că $(AB)^2 = 2AB$ și că rang(AB) = 2.

(b) Arătați că $BA = 2I_2$.

4. (a) Arătați că nu există numere întregi a, b, c astfel încât $n^3 + an^2 + bn + c$ este pătrat perfect pentru orice număr natural n.
(b) Fie a, b, c numere întregi, $a \neq 0$ astfel încât $an^2 + bn + c$ este pătrat perfect pentru orice număr natural nenul n, adică există un șir de numere naturale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $an^2 + bn + c = x_n^2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(b$_1$) Arătați că șirul $(x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și determinați limita acestui șir.
(b$_2$) Arătați că există numerele întregi u, v astfel încât $a = u^2$, $b = 2uv$, $c = v^2$.

Rezolvare:

1. Se observă că funcția f nu este constantă.
Presupunem contrariul: f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci și $f \circ g$ este continuă pe $\mathbb{R}$.
Considerăm funcțiile $h, k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin
$h(x) = f(g(x)) + f(x)$,
$k(x) = f(g(x)) - f(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$
Se observă că $h(x), k(x) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, adică $h(\mathbb{R}), k(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
Deoarece $h(\mathbb{R}), k(\mathbb{R})$ sunt intervale (eventual mulțimi cu un singur element) se deduce că funcțiile h și k sunt constante
Se deduce că funcția $f = \frac{1}{2}\cdot(h-k)$ este constantă – contradicție
De unde rezultă că f are cel puțin un punct de discontinuitate.

2. (a) Șirul $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ este strict crescător și are limita $+\infty$.
$$\lambda x_{n+1} - x_n = (\lambda - 1)\cdot\frac{\lambda^{n+1}x_{n+1} - \lambda^n x_n}{\lambda^{n+1} - \lambda^n}$$
Din teorema lui Cesaro-Stolz rezultă că șirul $\frac{\lambda^n x_n}{\lambda^n} = x_n$, este convergent.
(b) Se scrie $t \coloneqq 6y_{n+2} - 5y_{n+1} + y_n = 3(y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) =$
$= 3z_{n+1} - z_n$
unde am notat $z_n \coloneqq 2y_{n+1} - y_n$
Aplicând de două ori rezultatul de la punctul (a) pentru șirurile (t_n), respectiv (z_n) se deduce că șirul (y_n) este convergent.

3. (a) Dacă se notează C:= AB, se calculează $C^2 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 & -8 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & -4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ și se observă că $C^2 = 2C$,
de asemenea se obține că rang(C) = 2
(b) Se observă că $\text{rang}(C^2) = 2$
Din $C^2 = (AB)^2 = A(BA)B$ rezultă că $2 = \text{rang}(C^2) \leq \text{rang}(BA) \leq 2$
De unde rang(BA) = 2, deci matricea BA este inversabilă.
$(BA)^2 = BABA = BCA$,
$(BA)^3 = BABABA = B(AB)^2A = BC^2A = 2BCA = 2(BA)^2$ și din BA inversabilă rezultă concluzia.

4. (a) Presupunem contrariul.
Dacă se notează f(n):= $n^3 + an^2 + bn + c$, atunci
f(3) – f(1) = 26 + 8a + 2b și
f(4) – f(2) = 56 + 12a + 2b
sunt diferențe de pătrate perfecte având aceeași paritate, diferențe care sunt prin urmare multipli de 4
din prima egalitate rezultă b impar, iar din a doua că b este par – contradicție
(b_1) Se observă că a > 0 și prin calcul direct se obține

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} - \sqrt{an^2 + bn + c} =$$
$$= \frac{2an + a + b}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} - \sqrt{an^2 + bn + c}} \to \sqrt{a}\ (n \to \infty)$$

(b_2) Șirul $(x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ este un șir convergent de numere întregi, de unde rezultă că este șir constant de la un rang N ∈ $\mathbb{N}^*$ încolo.
Fie u această constantă întreagă; rezultă $\sqrt{a} = u$, adică a = u^2.
Rezultă imediat că $x_n = x_N + (n - N)u$ pentru orice $n \geq N$, de unde
$(x_N + (n + N)u)^2 = u^2n^2 + bn + c$, pentru orice $n \geq N$.
Prin identificare directă a coeficienților rezultă c = $(x_N - Nu)^2$ și
b = 2u$(x_N - Nu)$, de unde se obține concluzia, alegând v = $x_N - Nu$.

Clasa a XII-a

1. Dacă $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ este continuă și $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 0$, atunci f are cel puțin două rădăcini distincte în intervalul (0, 1).

2. Se consideră funcția $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{2^{2k+1}}, \frac{1}{2^{2k}}\right],\ k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & în\ rest \end{cases}$$

Arătați că f este integrabilă pe [0,1] și calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

3. Fie (G, ·) un grup finit cu elementul neutru e.
(i) Arătați că există un număr impar de elemente x ∈ G astfel încât x^3 = e.
(ii) Arătați că există un număr par de elemente x ∈ G astfel încât $x^2 \neq$ e.

4. (i) Arătați că toate grupurile cu trei elemente sunt izomorfe între ele.
(ii) Demonstrați că grupul $(\mathbb{Q}_+^*,\cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}, +)$.

Rezolvare:

1. Din condiția f continuă și $\int_0^1 f(x)dx = 0$ rezultă că f are cel puțin o rădăcină în intervalul (0,1). Presupunem că această rădăcină este unică și o vom nota cu ∝.
Mai presupunem că *f(x)* > 0, $\forall x \in (0, \propto)$ și *f(x)* < 0, $\forall x \in (\propto, 1)$
Fie $F: [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. F este o primitivă a lui f.

F are proprietățile 0 = F(0) = F(1), F este strict crescătoare pe $(0, \propto)$ și strict descrescătoare pe $(\propto, 1)$ prin urmare F(x)≥ 0, $\forall x \in [0,1]$

Avem $0 = \int_0^1 xf(x)dx = xF(x)|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = -\int_0^1 F(x)dx$

În condițiile de mai sus, egalitatea $\int_0^1 F(x)dx = 0$ este imposibilă.

2. Funcția f este monotonă pe porțiuni, deci este integrabilă.

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{2k+1}}}^{\frac{1}{2^{2k}}} 1dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{6}$$

3. (i) Pentru orice x∈ G, $x \neq$e, cu x^3 = e, avem $(x^2)^3 = x^6$ =e.

Deci x, x^2 sunt elemente de ordinul 3 și x ≠ x^2.

Orice element x de ordinul 3 generează un alt element de ordinul 3, și anume x^2.

Astfel, elementele de ordinul 3 formează perechile (x, x^2), (y, y^2), …

Deoarece e^3 = e rezultă că numărul elementelor care satisfac x^3 = e este impar.

(ii) Fie x∈ G, $x \neq$e cu proprietatea $x^2 \neq$ e. Rezultă $x \neq x^{-1}$ și $(x^{-1})^2$ = e.

Prin urmare, elementele care satisfac $x^2 \neq$ e sunt perechile (x, x^{-1}), (y, y^{-1}), … deci numărul acestor elemente este par.

4. a) Tabla legii de compoziție pentru un grup cu 3 elemente se construiește în mod unic

b) Presupunem că există $f: (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ izomorfism de grupuri. Există $y \in \mathbb{Q}$ cu *f(y)* = 2.

Dar $f(y) = f\left(\frac{y}{2} + \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{y}{2}\right) \cdot f\left(\frac{y}{2}\right) = \left(f\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2 = 2$

Rezultă $f(y) \notin \mathbb{Q}$.

REZOLVAREA PROBLEMELOR PROPUSE DIN NUMĂRUL ANTERIOR

Ciclu primar

1. Reconstituiți adunarea:

$$\begin{array}{ccccc} M & A & R & I & O \; + \\ & A & R & I & O \\ & & R & I & O \\ & & & I & O \\ & & & & O \\ \hline 7 & 5 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

Rezolvare:

$$\begin{array}{cccccc} M & A & R & I & O & + \\ & A & R & I & O & \\ & & R & I & O & \\ & & & I & O & \\ & & & & O & \\ \hline 7 & 5 & 0 & 5 & 0 & \end{array} \qquad (1)$$

5· O are ultima cifră 0. Obținem O ∈ {0; 2; 4; 6; 8}

(i) O = 0 (2)

4·I are ultima cifră 5. Nu corespunde.

(ii) O = 2 (3)

4·I + 1 are ultima cifră 5. Obținem I ∈ {1; 6}

a) I = 1 (4)

I) 3·R are ultima cifră 0. Obținem R = 0 (5)

II) 2·R are ultima cifră 5. Nu corespunde.

b) I = 6 (6)

3·R + 2 are ultima cifră 0. Obținem R = 6 care nu corespunde.

(iii) O = 4 (7)

4·I + 2 are ultima cifră 5. Nu corespunde.

(iv) O = 6 (8)

4·I + 3 are ultima cifră 5. Obținem I ∈ {3; 8}

a) I = 3 (9)

I) 3·R + 1 are ultima cifră 0. Obținem R = 3 care nu corespunde

b) I = 8 (10)

I) 3·R + 3 are ultima cifră 0. Obținem R = 9 (11)

II) 2·A + 3 are ultima cifră 5. Obținem A ∈ {1; 6}

A) A = 1 și M = 7 (12)

B) A = 6 nu corespunde

(v) O = 8 (13)

4·I + 4 are ultima cifră 5. Nu corespunde.

Din (8),(10),(11),(12) ⇒

$$\begin{array}{r} 71986+ \\ 1986 \\ 986 \\ 86 \\ 6 \\ \hline 75050 \end{array}$$

2. Suma a cinci numere naturale este 4090. Dacă la fiecare se adună același număr se obțin numerele 2029, 2031, 2054, 3961 și 4015. Aflați cele cinci numere naturale.

Rezolvare:

Notăm numerele naturale cu x, y, z, t și u (1)

Avem:

$x + y + z + t + u = 4090$ (2)

$x + a = 2029$ (3)

$y + a = 2031$ (4)

$z + a = 2054$ (5)

$t + a = 3961$ (6)

$u + a = 4015$ (7)

Adunăm (3),(4),(5),(6) și (7) obținem:

$x + y + z + t + u + 5a = 14090$ (8)

(2),(8) $\Rightarrow 4090 + 5a = 14090 \Leftrightarrow 5a = 14090 - 4090 \Leftrightarrow 5a = 10000$

$\Leftrightarrow a = 10000 : 5 \Leftrightarrow a = 2000$ (9)

(3),(9) $\Rightarrow x + 2000 = 2029 \Leftrightarrow x = 2029 - 2000 \Leftrightarrow x = 29$ (10)

(4),(9) $\Rightarrow y + 2000 = 2031 \Leftrightarrow y = 2031 - 2000 \Leftrightarrow y = 31$ (11)

(5),(9) $\Rightarrow z + 2000 = 2054 \Leftrightarrow z = 2054 - 2000 \Leftrightarrow z = 54$ (12)

(6),(9) $\Rightarrow t + 2000 = 3961 \Leftrightarrow t = 3961 - 2000 \Leftrightarrow t = 1961$ (13)

(7),(9) $\Rightarrow u + 2000 = 4015 \Leftrightarrow u = 4015 - 2000 \Leftrightarrow u = 2015$ (14)

(1),(10),(11),(12),(13),(14) $\Rightarrow$ numerele sunt 29, 31, 54, 1961 și 2015.

3. Într-un depozit sunt bile roșii, galbene și albastre. 2364 bile nu sunt albastre și 3976 bile nu sunt roșii. Numărul bilelor roșii este de 5 ori mai mic decât numărul bilelor albastre. Aflați numărul bilelor de fiecare culoare.

Rezolvare:

Notăm numărul bilelor roșii, galbene și albastre cu r, g și a (1)

Avem

$r + g = 2364$ (2)

$g + a = 3976$ (3)

(2),(3) $\Rightarrow a - r = 3976 - 2364 \Leftrightarrow a - r = 1612$ (4)

$a = 5r$ (5)

(4),(5) $\Rightarrow 5r - r = 1612 \Leftrightarrow 4r = 1612 \Leftrightarrow r = 1612 : 4 \Leftrightarrow r = 403$ (6)

(5),(6) $\Rightarrow a = 5\cdot 403 \Leftrightarrow a = 2015$(7)

(2),(6) $\Rightarrow 403 + g = 2364 \Leftrightarrow g = 2364 - 403 \Leftrightarrow g = 1961$ (8)

Deci numărul bilelor roșii este 403, numărul bilelor galbene este 1961 și numărul bilelor albastre este 2015.

4. Determinați toate numerele naturale care împărțite la 1961 dau restul de 400 de ori mai mare decât câtul.

Rezolvare:

$d = i \cdot c + r$ (1)

$r < i$ (2)

$i = 1961$ (3)

$(2),(3) \Rightarrow r < 1961 \Leftrightarrow r \in \{0; 1; 2; \dots; 1958; 1959; 1960\}$ (4)

$r = 400 \cdot c$ (5)

$(4),(5) \Rightarrow c \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ (6)

$(1),(3),(4),(5),(6) \Rightarrow d_1 = 1961 \cdot 0 + 0 \Leftrightarrow d_1 = 0$ (7)

$d_2 = 1961 \cdot 1 + 400 \Leftrightarrow d_2 = 2361$ (8)

$d_3 = 1961 \cdot 2 + 800 \Leftrightarrow d_3 = 4722$ (9)

$d_4 = 1961 \cdot 3 + 1200 \Leftrightarrow d_4 = 7083$ (10)

$d_5 = 1961 \cdot 4 + 1600 \Leftrightarrow d_5 = 9444$ (11)

$(7),(8),(9),(10),(11) \Rightarrow S = \{0; 2361; 4722; 7083; 9444\}$

5. Produsul a 2 numere naturale este 2068. Dacă se scade 14 dintr-un factor, atunci produsul se micșorează cu 658. Determinați cele 2 numere.

Rezolvare:

Notăm numerele cu a și b.

Avem:

$a \cdot b = 2068$ (1)

$(a - 14) \cdot b = 2068 - 658 \Leftrightarrow a \cdot b - 14b = 1410$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow 2068 - 14b = 1410 \Leftrightarrow 14b = 2068 - 1410 \Leftrightarrow 14b = 658$

$\Leftrightarrow b = 47$ (3)

$(1),(3) \Rightarrow a \cdot 47 = 2068 \Leftrightarrow a = 2068 : 47 \Leftrightarrow a = 44$ (4)

$(3),(4) \Rightarrow$ numerele a și b sunt 44 și 47

6. Aflați suma a 6 numere naturale consecutive știind că două dintre ele sunt 50 și 52.

Rezolvare:

Avem 4 soluții:

a) $50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 = 315$

b) $49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54 = 309$

c) $48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 53 = 303$

d) $47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 = 297$

7. Un cioban are 2009 miei, oi și capre. Numărul mieilor și oilor este 1508, iar numărul mieilor și caprelor este 751. Aflați numărul mieilor, oilor și caprelor.

Rezolvare:

Notăm cu a, b, și c numărul mieilor, oilor și caprelor.

Avem:
a + b + c = 2009 (1)
a + b = 1508 (2)
a + c = 751 (3)
(1),(2) ⇒ 1508 + c = 2009 ⇔ c = 2009 – 1508 ⇔ c = 501 (4)
(1),(3) ⇒ 751 + b = 2009 ⇔ b = 2009 – 751 ⇔ b = 1258
(3),(4) ⇒ a + 501 = 751 ⇔ a = 751 – 501 ⇔ a = 250
Ciobanul are 250 miei, 1258 oi și 501 capre.

8. Diferența a două numere naturale este 1961. Dacă le împărțim obținem câtul 4 și restul 461. Aflați cele două numere.

Rezolvare:
Notăm numerele cu a și b. Avem:
a – b = 1961 ⇔ a = b + 1961 (1)
a = b·4 + 461 ⇔ a = 4b + 461 (2)
(1),(2) ⇒ 4b + 461 = b + 1961 ⇔ 4b – b = 1961 – 461 ⇔ 3b = 1500
⇔ b = 500 (3)
(1),(3) ⇒ a = 500 + 1961 ⇔ a = 2461
Numerele sunt 2461 și 500

9. Aflați numerele naturale $\overline{xyz}$ astfel încât $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 297$.

Rezolvare:
$\overline{xyz} - \overline{zyx} = 297 \Leftrightarrow$
100x + 10y + z – 100z – 10y – x = 297 ⇔
99x – 99z = 297 ⇔
x – z = 3
x = z + 3 (1)
(1) ⇒ x = 4 și z = 1 (2)
x = 5 și z = 2 (3)
x = 6 și z = 3 (4)
x = 7 și z = 4 (5)
x = 8 și z = 5 (6)
x = 9 și z = 6 (7)
(1), …,(7) ⇒ avem 6·10 = 60 de numere. Acestea sunt:
401; …; 491; 502; …; 592; 603; …; 693; 704; …; 794; 805; …
…; 895; 906; …; 986 și 996

10. Determinați numerele naturale nenule care împărțite la 1961 dau câtul de două ori mai mare decât restul.

Rezolvare:

Folosim teorema împărțirii cu rest:

$d = î \cdot c + r$ (1)

$î = 1961$ (2)

$c = 2r$ (3)

$r < 1961$ (4) $\Rightarrow r \in \{1; 2; \dots; 1959; 1960\}$ (5)

(1),(2),(3),(4) $\Rightarrow d = 1961 \cdot 2r + r \Leftrightarrow d = 3923r$ (6)

(5),(6) $\Rightarrow d \in \{3923; 7846; \dots; 7685157; 7689080\}$ (7)

(7) $\Rightarrow S = \{3923; 7846; \dots; 7685157; 7689080\}$

Clasa a V-a

1. Determinați mulțimile X și Y știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $X \cup Y = \{0;1961;1962;1963;1964\}$

ii) $X \setminus Y = \{1962; 1963; 1964\}$

iii) $Y \setminus X = \mathbb{N}^*$

Rezolvare:

Din condiția ii) $\Rightarrow$ $1962 \in X, 1962 \notin Y$

$1963 \in X, 1963 \notin Y$ (1)

$1964 \in X, 1964 \notin Y$

Din condițiile i), ii) și iii) $\Rightarrow 0 \in X, 0 \in Y$ (2)

Din condițiile i), ii) și iii) $\Rightarrow$ I) $1961 \notin X, 1961 \in Y$ (3)

II) $1961 \in X, 1961 \in Y$ (4)

(1),(2),(3),(4) $\Rightarrow$ avem 2 soluții

$X_1 = \{0; 1962; 1963; 1964\}$; $Y_1 = \{0; 1961\}$

$X_2 = \{0; 1961; 1962; 1963; 1964\}$; $Y_2 = \{0; 1961\}$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația: $xy – 1986x – 23y + 45678 = 0$.

Rezolvare:

$x \cdot y – 1986x – 23y + 45678 = 0 \Leftrightarrow$

$x \cdot y – 1986x – 23y – 23 \cdot (–1986) = 0 \Leftrightarrow$

$x \cdot (y – 1986) – 23 \cdot (y – 1986) = 0 \Leftrightarrow$

$(y – 1986) \cdot (x – 23) = 0$ (1)

(1) $\Rightarrow$ 1) $x - 23 = 0 \Leftrightarrow x = 23$

$y \in \mathbb{N}$ (2)

2) $y - 1986 = 0 \Leftrightarrow y = 1986$ (3)

$x \in \mathbb{N} - \{23\}$

(2),(3) $\Rightarrow$ avem soluțiile 1) $x = 23$ și $y \in \mathbb{N}$

2) $x \in \mathbb{N} - \{23\}$ și $y = 1986$

3. Un număr natural x împărțit la 5 dă restul 2 și împărțit la 16 dă restul 8. Ce rest se obține la împărțirea numărului x la 80 ?

Rezolvare:

Folosim teorema împărțirii cu rest. Avem:

$x = 5a + 2;\ a \in \mathbb{N}$ (1)

$x = 16b + 8;\ b \in \mathbb{N}$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow 5a + 2 = 16b + 8 \Leftrightarrow 5a = 16b + 8 - 2 \Leftrightarrow 5a = 16b + 6 \Leftrightarrow a = \frac{16b+6}{5}$

$\Leftrightarrow a = \frac{15b+5}{5} + \frac{b+1}{5} \Leftrightarrow a = 3b + 1 + \frac{b+1}{5}$ (3)

$a \in \mathbb{N}$ (4)

$b \in \mathbb{N} \Rightarrow 3b \in \mathbb{N} \Rightarrow (3b+1) \in \mathbb{N}$ (5)

(3),(4),(5) $\Rightarrow \frac{b+1}{5} \in \mathbb{N}$ (6)

(6) $\Rightarrow \frac{b+1}{5} = c;\ c \in \mathbb{N}$ (7)

(7) $\Rightarrow b + 1 = 5c \Leftrightarrow b = 5c - 1$ (8)

(2),(8) $\Rightarrow x = 16\cdot(5c - 1) + 8 \Leftrightarrow x = 80c - 16 + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 80\cdot(c - 1 + 1) - 16 + 8 \Leftrightarrow x = 80\cdot(c - 1) + 80 - 16 + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 80\cdot(c - 1) + 72$ (9)

(9) $\Rightarrow$ restul împărțirii numărului natural x la 80 este 72.

4. Arătați că ecuația $y^2 + y + 5x = 2013$ nu are soluții în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Rezolvare:

$y^2 + y + 5x = 2013$ (1)

$u(y^2 + y) \in \{0; 2; 6\}$ (2)

$u(5x) \in \{0; 5\}$ (3)

(2),(3) $\Rightarrow u(y^2 + y + 5x) \in \{0; 1; 2; 5; 6; 7\}$ (4)

$u(2013) = 3$ (5)

(1),(4),(5) $\Rightarrow S = \emptyset$

5. Determinați numerele prime de forma $\overline{abcd}$ știind că au suma cifrelor egală cu 10 și $\overline{abcd} = 9 \cdot a^5 \cdot d + 1$.

Rezolvare:

$\overline{abcd}$ = nr. prim ⇒ $\overline{abcd}$ este nr. impar ⇒ cum d este cifră impară atunci $9a^5d$ este număr par ⇒ a este cifră pară, deci a ϵ {2, 4, 6, 8}
Dacă a = 8 atunci a^5 are mai mult de 4 cifre
Dacă a = 6 atunci $9a^5$ are mai mult de 4 cifre
Dacă a = 4 atunci $9a^5$ = 9216, de unde rezultă că d = 1, altfel $9a^5d$, ar avea mai mult de 4 cifre. De unde obținem că $\overline{abcd}$ = 9217 . Dar suma cifrelor acestui număr nu este egală cu 10.
Dacă a = 2 atunci $9a^5$ = 288, deci d poate fi doar 5, 7 sau 9.

d = 5 ⇒ $9a^5d + 1 = 1441$, dar se observă că 1441 ⋮ 11, deci nu este prim
d = 7 ⇒ $9a^5d + 1 = 2017$, care are suma cifrelor 10 și după verificare se obține că este și prim
d = 9 ⇒ $9a^5d + 1 = 2593$, dar acest număr nu are suma cifrelor egală cu 10.

Deci singurul număr care îndeplinește condițiile problemei este 2017

Clasa a VI-a

1. Aflați numerele prime diferite x, y și z știind că x + 4y + 8z = 54.

Rezolvare:

x, y, z – numere prime (1)
$x + 4y + 8z = 54$ (2)
$2 \mid 4y$ (3)
$2 \mid 8z$ (4)
$2 \mid 54$ (5)
(1),(2),(3),(4),(5) ⇒ $x = 2$ (6)
(2),(6) ⇒ $2 + 4y + 8z = 54 \Leftrightarrow 4y + 8z = 52 \;/:4 \Leftrightarrow y + 2z = 13$ (7)
(7) ⇒ $z \leq 6$ (8)
(1),(8) ⇒ $z \in \{2; 3; 5\}$ (9)

$z = 2$ nu corespunde deoarece $x = z = 2$
$z = 3$ (10)
(7),(10) ⇒ $y + 6 = 13 \Leftrightarrow y = 7$ (11)
$z = 5$ (12)
(7),(12) ⇒ $y + 10 = 13 \Leftrightarrow y = 3$

Problema are 2 soluții: 1) $x = 2, y = 7, z = 3$
2) $x = 2, y = 3, z = 5$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$50x^3 - x^2y = 400$$

Rezolvare:

$50x^3 - x^2y = 400$, $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (1)

$50x^3 - x^2y = 400 \Leftrightarrow x^2 \cdot (50x - y) = 400$ (2)

(2) $\Rightarrow$ 1) $x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$ (3)

$50x - y = 400$ (4)

(3),(4) $\Rightarrow$ I) $x = -1, y = -450$ (5)

II) $x = 1, y = -350$ (6)

2) $x^2 = 4 \Rightarrow x \in \{-2; 2\}$ (7)

$50x - y = 100$ (8)

(7),(8) $\Rightarrow$ I) $x = -2, y = -200$ (9)

II) $x = 2, y = 0$ (10)

3) $x^2 = 16 \Rightarrow x \in \{-4; 4\}$ (11)

$50x - y = 25$ (12)

(11),(12) $\Rightarrow$ I) $x = -4, y = -225$ (13)

II) $x = 4, y = 175$ (14)

4) $x^2 = 25 \Rightarrow x \in \{-5; 5\}$ (15)

$50x - y = 16$ (16)

(15),(16) $\Rightarrow$ I) $x = -5, y = -266$ (17)

II) $x = 5, y = 234$ (18)

5) $x^2 = 100 \Rightarrow x \in \{-10; 10\}$ (19)

$50x - y = 4$ (20)

(19),(20) $\Rightarrow$ I) $x = -10, y = -504$ (21)

II) $x = 10, y = 496$ (22)

6) $x^2 = 400 \Rightarrow x \in \{-20; 20\}$ (23)

$50x - y = 1$ (24)

(23),(24) $\Rightarrow$ I) $x = -20, y = -1001$ (25)

II) $x = 20, y = 999$ (26)

(1),(5),(6),(9),(10),(13),(14),(17),(18),(21),(22),(25),(26) $\Rightarrow S = \{(-20; -1001), (-10; -504), (-5; -266), (-4; -225), (-2; -200), (-1; -450), (1; -350), (2; 0), (4; 175), (5; 234), (10; 496), (20; 999)\}$.

3. Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{1961}{|x-22|-6} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Rezolvare:

$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{1961}{|x-22|-6} \in \mathbb{Z}\right\}$ (1)

$\frac{1961}{|x-22|-6} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{|x-22|-6\} \in D_{1961} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{|x-22|-6\} \in \{-1961; -53; -37; -1; 1; 37; 53; 1961\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-22| \in \{-1955;\ -47;\ -31;\ 5;\ 7; 43;\ 59; 1967\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-22| \in \{\ 5;\ 7; 43;\ 59; 1967\}$ (2)

(2) $\Rightarrow$ 1) $|x-22| = 5 \Rightarrow x \in \{\ 17; 27\}$ (3)

2) $|x-22| = 7 \Rightarrow x \in \{\ 15; 29\}$ (4)

3) $|x-22| = 43 \Rightarrow x \in \{\ -21; 65\}$ (5)

4) $|x-22| = 59 \Rightarrow x \in \{\ -37; 81\}$ (6)

5) $|x-22| = 1967 \Rightarrow x \in \{\ -1945; 1989\}$ (7)

(1),(3),(4),(5),(6),(7) $\Rightarrow A = \{-1945;\ -37; -21; 15; 17; 27; 29; 65; 81; 1989\}$

4. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$(x-24)\cdot(x-23) + (y+1986)\cdot(y+1987) = 0$$

Rezolvare:

$(x-24)\cdot(x-23) + (y+1986)\cdot(y+1987) = 0$ (1)

$n\cdot(n+1) \geq 0,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$ (2)

(2) $\Rightarrow$ 1) $(x-24)\cdot(x-23) \geq 0$ (3)

2) $(y+1986)\cdot(y+1987) \geq 0$ (4)

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ 1) $(x-24)\cdot(x-23) = 0 \Rightarrow$ I) $x-24 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 24$ (5)

II) $x-23 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 23$ (6)

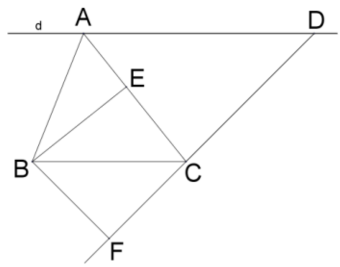
2) $(y+1986)\cdot(y+1987) = 0 \Rightarrow$ I) $y+1986 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -1986$ (7)

II) $y+1987 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -1987$ (8)

(1),(5),(6),(7),(8) $\Rightarrow S = \{(23; -1987), (23; -1986), (24; -1987), (24; -1986)\}$

5. Pe paralela dusă prin vârful A la latura BC a unui triunghi oarecare ABC se alege un punct D astfel încât [AC] ≡ [CD]. Demonstrați că d(B, AC) = d(B, DC).

Rezolvare:



<u>Soluția 1.</u>

$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta DBC}$, pentru că [BC] este latură comună și d(A, BC) = d(D, BC).

Dar $A_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot d(B, AC)}{2}$

$$A_{\Delta DBC} = \frac{DC \cdot d(B, DC)}{2}$$

Cum [AC] ≡ [CD] rezultă că d(B, AC) = d(B, DC).

<u>Soluția 2.</u>

$\Delta ACB \equiv \Delta CAD$ (alterne interne) (1)

Dar [AC] ≡ [CD], deci ΔACD este isoscel

$\Rightarrow \Delta ADC \equiv \Delta CAD$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \Delta ACB \equiv \Delta ADC$

Fie BF = d(B, DC) și BE = d(B, AC)

Atunci $\Delta BCF \equiv \Delta ADC$ (corespondente).

Deci $\Delta ACB \equiv \Delta BCF$

$\Delta BEC \equiv \Delta BFC$ (cf. cazului IU), deci d(B, AC) = d(B, DC)

Clasa a VII-a

1. Fie numerele reale x, y, z și t astfel încât

$$\sqrt{(x-1950)^2}+\sqrt{(1960-y)^2}+\sqrt{(z-1961)^2}+\sqrt{(t-1973)^2}\le 0$$

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$$\sqrt{(x-1950)^2}+\sqrt{(1960-y)^2}+\sqrt{(z-1961)^2}+\sqrt{(t-1973)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$|x-1950|+|1960-y|+|z-1961|+|t-1973|\le 0$ (1)

Din (1) $\Rightarrow |x-1950|=0 \Leftrightarrow x-1950=0 \Leftrightarrow x=1950$ (2)

$\Rightarrow |1960-y|=0 \Leftrightarrow 1960-y=0 \Leftrightarrow y=1960$ (3)

$\Rightarrow |z-1961|=0 \Leftrightarrow z-1961=0 \Leftrightarrow z=1961$ (4)

$\Rightarrow |t-1973|=0 \Leftrightarrow t-1973=0 \Leftrightarrow t=1973$ (5)

$m_a=\frac{x+y+z+t}{4}$

$\Rightarrow m_a=\frac{1950+1960+1961+1973}{4}=\frac{7844}{4}\Rightarrow m_a=1961$

2. Determinați mulțimea X știind că satisface simultan condițiile:

1) card$(X\times X)$ = 16
2) (0; 1) $\in (X\times X)$
3) $X\subset \mathbb{N}$
4) Suma elementelor mulțimii X este mai mică decât 11.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Din condiția 1) ⇒ mulțimea X are 4 elemente (1)

Din condiția 2) ⇒ 0; 1 ∈ X (2)

0 + 1 = 1. Din condițiile 3) și 4) ⇒ elementele trei și patru pot fi: 2 și 3 sau 2 și 4 sau 2 și 5 sau 2 și 6 sau 2 și 7 sau 3 și 4 sau 3 și 5 sau 3 și 6 sau 4 și 5 (3)

Din (2) și (3) ⇒ avem 9 soluții:

$X_1=\{0;1;2;3\}$; $X_2=\{0;1;2;4\}$; $X_3=\{0;1;2;5\}$; $X_4=\{0;1;2;6\}$;
$X_5=\{0;1;2;7\}$; $X_6=\{0;1;3;4\}$; $X_7=\{0;1;3;5\}$; $X_8=\{0;1;3;6\}$
$X_9=\{0;1;4;5\}$

3. Rezolvați ecuația $x + 1961 \cdot \{x\} = [x]$, $x \in \mathbb{Q}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă și $\{x\}$ partea fracționară a lui x.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$x + 1961 \cdot \{x\} = [x], x \in \mathbb{Q}$ (1)

$x = [x] + \{x\}$ (2)

Din (1) și (2) ⇒ $[x] + \{x\} + 1961 \cdot \{x\} = [x] \Leftrightarrow 1962 \cdot \{x\} = [x] - [x] \Leftrightarrow$

$1962 \cdot \{x\} = 0 \Rightarrow \{x\} = 0$ (3)

Din (1) și (3) ⇒ x poate fi orice număr întreg, deci S: $\mathbb{Z}$

Clasa a VIII-a

1. Fie x, y, z numere reale astfel încât $xy + yz + zx = 1$. Demonstraţi că: $5x^2 + 8y^2 + 11z^2 > 7$.

Prof. Moraru Augustini, Arad

Rezolvare:

Avem următoarele inegalități:

$x^2 + 4y^2 \geq 4xy$, egalitate pentru $x = 2y$

$y^2 + 4z^2 \geq 4yz$, egalitate pentru $y = 2z$

$4z^2 + x^2 \geq 4zx$, egalitate pentru $x = 2z$

Prin însumare obținem:

(1) $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 > 4(xy + yz + zx) = 4$

cu egalitate imposibilă din relaţiile de mai sus.

Dar $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 1$, deci prin înmulțire cu 3, obținem:

(2) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \geq 3$, egalitate pentru $x = y = z$

Însumând (1) și (2) obținem: $5x^2 + 8y^2 + 11z^2 > 7$

2. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al cărei grafic este $\sphericalangle BAC$ dacă A(1, –2), B(–4, 8) și C(4,13).

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Funcția f este o reuniune de 2 funcții g și h

$g: (-\infty; 1] \to \mathbb{R}, g(x) = ax + b$; a, b ∈ $\mathbb{R}$ (1)

$h: (1; +\infty) \to \mathbb{R}, h(x) = cx + d$; c, d ∈ $\mathbb{R}$ (2)

A(1, –2) ∈ g ⇔ g(1) = –2 (3)

Din (1) ⇒ g(1) = a · 1 + b ⇔ g(1) = a + b (4)

Din (3) și (4) ⇒ a + b = –2 (5)

$B(-4; 8) \in g \Leftrightarrow g(-4) = 8$ (6)

Din (1) $\Rightarrow g(-4) = a \cdot (-4) + b \Leftrightarrow g(-4) = -4a + b$ (7)

Din (6) și (7) $\Rightarrow -4a + b = 8$ (8)

Din (5) și (8) $\Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ -4a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 4a - b = -8 \end{cases} \Big| + \Leftrightarrow$

$\overline{5a \quad | = -10}$

$\begin{cases} a + b = -2 \\ 5a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + b = -2 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$ (9)

Din (1) și (9) $\Rightarrow g: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x$ (10)

$A(1, -2) \in h \Leftrightarrow h(1) = -2$ (11)

Din (2) $\Rightarrow h(1) = c \cdot 1 + d \Leftrightarrow h(1) = c + d$ (12)

Din (11) și (12) $c + d = -2$ (13)

$C(4, 13) \in h \Leftrightarrow h(4) = 13$ (14)

Din (2) $\Rightarrow h(4) = c \cdot 4 + d \Leftrightarrow h(4) = 4c + d$ (15)

Din (14) și (15) $\Rightarrow 4c + d = 13$ (16)

Din (13) și (16) $\Rightarrow \begin{cases} c + d = -2 \\ 4c + d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c - d = 2 \\ 4c + d = 13 \end{cases} \Big| + \Leftrightarrow \begin{cases} 3c = 15 \\ c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\overline{3c \quad | = 15}$

$\begin{cases} c = 5 \\ 5 + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ d = -7 \end{cases}$ (17)

Din (2) și (17) $\Rightarrow h: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 5x - 7$ (18)

Din (10) și (18) $\Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -2x; x \in (-\infty; 1] \\ 5x - 7; x \in (1; +\infty) \end{cases}$

3. Rezolvați ecuația $x + [x] = \{x\} + 60$, $x \in \mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă și $\{x\}$ partea fracționară a lui x.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$x + [x] = \{x\} + 60, x \in \mathbb{R}$ (1)

$x = [x] + \{x\}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow [x] + \{x\} + [x] = \{x\} + 60 \Leftrightarrow$

$2 \cdot [x] = 60 + \{x\} - \{x\} \Leftrightarrow$

$2 \cdot [x] = 60$ /:2

$[x] = 30$ (3)

Din (1) și (3) $\Rightarrow$ S: $x \in [30; 31)$

4. Fie punctele A(–3, 2) și B(4, 3) într-un sistem de axe perpendicular. Determinați poziția punctului C situate pe axa ordonatelor astfel încât Δ ABC să fie isoscel cu baza AB.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Notăm punctul C(0; y) (1)

AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$ (F) (2)

A(–3; 2) ⇒ $x_A = -3$ (3)

$y_A = 2$ (4)

Din (2), (3) și (4) ⇒ AC = $\sqrt{(0+3)^2 + (y-2)^2}$ ⇔ AC = $\sqrt{y^2 - 4y + 13}$ (5)

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$ (F) (6)

B(4; 3) ⇒ $x_B = 4$ (7)

$y_B = 3$ (8)

Din (6), (7) și (8) BC = $\sqrt{(0-4)^2 + (y-3)^2}$ ⇔ BC = $\sqrt{y^2 - 6y + 25}$ (9)

AC = BC (10)

Din (5), (9) și (10) ⇒ $\sqrt{y^2 - 4y + 13} = \sqrt{y^2 - 6y + 25}$ ⇒

$$y^2 - 4y + 13 = y^2 - 6y + 25$$

2y = 12

y = 6 (11)

Din (1) și (11) ⇒ punctul C este C(0; 6)

Probleme pentru liceu

Clasa a IX-a

1. Să se arate că $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]^2 - 16 \vdots 48$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prof. Sorin Dumitrică, Arad

Rezolvare:

Avem pentru $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]^2 - 16 = \left(2+\sqrt{3}\right)^{4n+2} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{4n+2} - 14,$$

Să notăm cu $x_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^{4n+2} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{4n+2}, n \in \mathbb{N}^*$

Pentru $n = 1$ avem $\left(2+\sqrt{3}\right)^6 + \left(2-\sqrt{3}\right)^6 - 14 = 2688 = 48 \cdot 56 \vdots 48$.

Vom arăta prin inducție că $x_n = 48p + 14$, unde $p \in N^*$.

Să presupunem că $x_2, x_3, \dots, x_k$ sunt de forma $\mathcal{M}48 + 14$.

Se deduce ușor relația de recurență $x_{n+1} = 192x_n - x_{n-1}$.

Atunci $x_{k+1} = 192x_k - x_{k-1} = 192 \cdot (48p + 14) - 48p_1 - 14 =$

$= 48 \cdot (192p - p_1) - 191 \cdot 14 = 48 \cdot (192p - p_1 - 56) + 14 = \mathcal{M}48 + 14.$

Prin urmare $x_n - 14 \vdots 48$ pentru orice $n \in N^*$.

2. Să se determine $n \in N$ astfel încât $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\right\} = \sqrt{6} - 2$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

Prof. Sorin Dumitrică, Arad

Rezolvare:

Din enunț deducem că $\left[\sqrt{n+\sqrt{n}}\right] = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{6} + 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{6} = k \in \mathbb{Z}$ (1)

Rezultă $n + \sqrt{n} = \left(k + \sqrt{6}\right)^2$ de unde obținem relația

$n - k^2 - 6 = 2\sqrt{6} \cdot k - \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ (2)

Fie $2\sqrt{6} \cdot k - \sqrt{n} = p \in \mathbb{Z}$. Atunci $n = \left(2\sqrt{6} \cdot k - p\right)^2$ de unde rezultă

$n - 24k^2 - p^2 = -4\sqrt{6} \cdot kp$ și cum $n - 24k^2 - p^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$-4\sqrt{6} \cdot kp \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$ sau $p = 0$.

Pentru $k = 0 \Rightarrow n + \sqrt{n} = 6$ cu soluția $n = 4$.

Pentru $p = 0 \Rightarrow n = 24k^2$ și din relația (2) obținem

$$24k^2 - k^2 - 6 = 2\sqrt{6} \cdot k - \sqrt{24k^2} = 2\sqrt{6} \cdot k - \sqrt{24} \cdot |k| = \begin{cases} 0\,, k \geq 0 \\ 4\sqrt{6}k, k < 0 \end{cases}$$

Dacă $k > 0$ obținem $k^2 = \frac{6}{23}$, contradicție cu $k \in \mathbb{Z}$.

Dacă presupunem $k < 0$, se obține din relația (1) că $n + \sqrt{n} < 6$, adică $n < 4$

Prin înlocuire în relația inițială cu $n \in \{0,1,2,3\}$ nu se obține nici o valoare care să verifice enunțul. Prin urmare $n = 4$ este singura valoare acceptabilă.

3. Fie $x_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât să avem relația $tg\, x_1 + tg\, x_2 + ... + tg\, x_n = n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine cel mai mare număr natural, pentru care avem relația:

$$\mathrm{tg}\left(x_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{tg}\left(x_2 - \frac{\pi}{4}\right) + \ ... + \ \mathrm{tg}\left(x_n - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2n^2 - 15n + 7}{2n}$$

prof. Adrian Zico Serban, Ineu

Rezolvare:

$$tg\left(x_i - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\, x_i - tg\frac{\pi}{4}}{1 + tg\, x_i \cdot tg\frac{\pi}{4}} = \frac{tg\, x_i - 1}{1 + tg\, x_i}$$

Relația devine:

$$\frac{tg\, x_1 - 1}{1 + tg\, x_1} + \frac{tg\, x_2 - 1}{1 + tg\, x_2} + \cdots + \frac{tg\, x_n - 1}{1 + tg\, x_n} = \frac{2n^2 - 15n + 7}{2\text{n}}$$

Adun și scad 1 la numărător

$$\frac{(tg\, x_1 + 1) - 2}{1 + tg\, x_1} + \frac{(tg\, x_2 + 1) - 2}{1 + tg\, x_2} + \cdots + \frac{(tg\, x_n + 1) - 2}{1 + tg\, x_n} = \frac{2n^2 - 15n + 7}{2\text{n}}$$

$$n - 2 \cdot \left(\frac{1}{1+tg\, x_1} + \frac{1}{1+tg\, x_2} + \cdots + \frac{1}{1+tg\, x_n}\right) = \frac{2n^2-15n+7}{2\text{n}} \qquad (*)$$

$notez: t_i = 1 + tg\, x_i\, , unde\ t_i > 0, pt.$ că $x_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$t_1 = 1 + tg\, x_1$

$t_2 = 1 + tg\, x_2$

…………………..

$t_n = 1 + tg\, x_n$

și obținem:

$t_{1\,+}\ t_2 + \cdots + t_n = n + (tg\, x_1 + tg\, x_2 + \cdots + tg\, x_n)$

Dar $tg\, x_1 + tg\, x_2 + \ldots + tg\, x_n = n$

deci $t_{1\,+}\ t_2 + \cdots + t_n = 2n$

Relația (*) devine :

$$n - 2 \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) = \frac{2n^2 - 15n + 7}{2\text{n}}$$

Înmulțim egalitatea cu $2n = t_{1\,+}\ t_2 + \cdots + t_n$

$\Rightarrow 2n^2 - 2 \cdot (t_{1\,+}\ t_2 + \cdots + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) = 2n^2 - 15n + 7$

$Dar, (t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) \geq n^2$

Egalitate pentru $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$

$\Leftrightarrow 2n^2 - 2\,(n^2 + \varepsilon) = 2n^2 - 15n + 7 \quad \Leftrightarrow 2n^2 - 15n + 7 \leq 0, \qquad \varepsilon > 0$

cu $n_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225-56}}{4} = \frac{15 \pm 13}{4}$

de unde $n_1 = \frac{1}{2}$ și $n_2 = 7$

$\Rightarrow 2n^2 - 15n + 7 \leq 0$ pentru ca $n \in \left(\frac{1}{2}, 7\right]$ și cum $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n \in [1,7]$, rezultă că cel mai mare număr natural pentru care are loc egalitatea este n=7 și se realizează când toți cei 7 termeni sunt egali, adică :

$tg\left(x_1-\frac{\pi}{4}\right)= tg\left(x_2-\frac{\pi}{4}\right)=\dots= tg\left(x_7-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$7\, tg\left(x_1-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$

$tg\left(x_1-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x_1 = x_2=\dots= x_7=\frac{\pi}{4}$

4. Rezolvați ecuația $x+[x]=17\cdot\{x\}$, $x\in\mathbb{Q}$ unde [x] reprezintă partea întreagă și {x} partea fracționară a lui x.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{r} x+[x]=17\cdot\{x\} \\ x=[x]+\{x\} \end{array}\right\} \Rightarrow 2[x]=16\{x\} \Rightarrow [x]=8\{x\} \quad (1)$$

Dar $\{x\}\in[0,1),\ \forall\, x\in\mathbb{Q}\Rightarrow 8\cdot\{x\}\in[0,8) \overset{(1)}{\Rightarrow} [x]\in[0,8)\cap\mathbb{Z}=\{0,1,2,\dots,7\}$

1. $[x]=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\{x\}=0\Rightarrow x=0$

2. $[x]=1\overset{(1)}{\Rightarrow}\{x\}=\frac{1}{8}\Rightarrow x=1+\frac{1}{8}\Leftrightarrow x=\frac{9}{8}$

3. $[x]=2\overset{(1)}{\Rightarrow}\{x\}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=2+\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$

4. $[x]=3\overset{(1)}{\Rightarrow}\{x\}=\frac{3}{8}\Rightarrow x=3+\frac{3}{8}\Leftrightarrow x=\frac{27}{8}$

5. $[x]=4\overset{(1)}{\Rightarrow}\{x\}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=4+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$

6. $[x]=5\overset{(1)}{\Rightarrow}\{x\}=\frac{5}{8}\Rightarrow x=5+\frac{5}{8}\Leftrightarrow x=\frac{45}{8}$

7. $[x]=6\overset{(1)}{\Rightarrow}\{x\}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=6+\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\frac{27}{4}$

8. $[x]=7\overset{(1)}{\Rightarrow}\{x\}=\frac{7}{8}\Rightarrow x=7+\frac{7}{8}\Leftrightarrow x=\frac{63}{8}$

$\Rightarrow S=\left\{0;\frac{9}{8};\frac{9}{4};\frac{27}{8};\frac{9}{2};\frac{45}{8};\frac{27}{4};\frac{63}{8}\right\}.$

Clasa a X-a

1. Dacă $\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^y+1}+\frac{1}{e^z+1}=2$, să se arate că

$$\left(e^{\frac{x+y}{2}}+e^{\frac{x+z}{2}}+e^{\frac{y+z}{2}}\right)\le\frac{3}{2}, \forall x,y,z\in\mathbb{R}\ .$$

prof. Octavia Potocean și Mircea Potocean, Arad

Rezolvare:

$$\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{e^y}{e^y+1}+\frac{e^z}{e^z+1}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}+\frac{e^y+1-1}{e^y+1}+\frac{e^z+1-1}{e^z+1}=$$

$$=3-\left(\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{e^y}{e^y+1}+\frac{e^z}{e^z+1}\right)=3-2=1$$

Deci aplicând CBS obținem

$$\left(\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{e^y}{e^y+1}+\frac{e^z}{e^z+1}\right)(e^x+e^y+e^z+3)\ge\left(\sqrt{e^x}+\sqrt{e^y}+\sqrt{e^z}\right)^2$$

Egalitatea are loc dacă x = y = z

$$(e^x+e^y+e^z+3)\ge\left(\sqrt{e^x}+\sqrt{e^y}+\sqrt{e^z}\right)^2\Rightarrow$$

$$e^x+e^y+e^z+3\ge e^x+e^y+e^z+2\cdot\left(e^{\frac{x+y}{2}}+e^{\frac{x+z}{2}}+e^{\frac{y+z}{2}}\right)$$

De unde $\left(e^{\frac{x+y}{2}}+e^{\frac{x+z}{2}}+e^{\frac{y+z}{2}}\right)\le\frac{3}{2}$

2. Dacă x, y, z >0, xyz = 1, arătați că $\frac{2}{x^4(y^2+z^2)}+\frac{2}{y^4(x^2+z^2)}+\frac{2}{z^4(x^2+y^2)}\ge 3$

prof. Octavia Potocean și Mircea Potocean, Arad

Rezolvare:

$$\underbrace{\frac{y^4z^4}{y^2+z^2}+\frac{x^4z^4}{x^2+z^2}+\frac{x^4y^4}{x^2+y^2}}_{=E}\ge\frac{3}{2}$$

Aplicăm CBS, forma scurtă și obținem:

$$E\ge\frac{(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2)^2}{(x^2+y^2+z^2)\cdot 2}$$

Aplicând inegalitatea $(a+b+c)^2\ge 3\cdot(ab+ac+bc)$, obținem

$$E\ge\frac{3\cdot(y^2z^2\cdot x^2z^2+x^2z^2\cdot x^2y^2+y^2z^2\cdot x^2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)\cdot 2}=\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{2(x^2+y^2+z^2)}=\frac{3}{2}$$

3. Determinați numărul numerelor care în baza 7 se scriu cu n cifre și nu există două cifre vecine egale.

Szocs Andreea

Rezolvare:

Notăm cu A_n mulțimea numerelor din enunț, $n \geq 2$

Mulțimea A_{n+1} se obține adăugând la finalul fiecărui termen $x \in A_n$ cele 6 cifre diferite de ultima cifră a lui x.

Rezultă $|A_{n+1}| = 6 \cdot |A_n|, \ \forall n \geq 2$.

Prin inducție se obține $|A_n| = 6^{n-2} \cdot |A_2|$

$A_2 = \left\{ \overline{ab} \,|\, a, b \in \{0,1,2,...,6\}, a \neq 0, b \neq a \right\} \Rightarrow |A^2| = 6 \cdot 6 = 36$

Rezultă $|A_n| = 6^n, \ \forall n \geq 2 \Rightarrow$ Pentru $n \geq 2$, numărul căutat este 6^n.

Pentru cazul n = 1 sunt 7 numere.

4. La o nuntă cu 1000 de invitați, aceștia au fost așezați la mese rotunde de câte 10 scaune, astfel încât două persoane de același sex să nu stea una lângă cealaltă. Mirii cheamă toți invitații la dans. Știind că o pereche este formată din o fată și un băiat și că fiecare invitat dansează doar cu cei de la masa sa, în câte moduri se pot forma perechile?

Szocs Andreea

Rezolvare:

La fiecare masă stau 10 persoane și nu pot sta unul lângă celălalt doi băieți sau două fete.

Rezultă că la fiecare masă stau 5 fete și 5 băieți. Aceștia pot forma perechi în 5! moduri.

Sunt 1000 de invitați, câte 10 la masă. $\Rightarrow$ Sunt 100 de mese. Cum alegerea perechilor de la o masă nu o influențează pe cea de la altă masă, perechile se pot forma în $(5!)^{100}$ moduri.

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 673 & 672 & 672 \\ 672 & 673 & 672 \\ 672 & 672 & 673 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculați A^{2017}.

Prof. Bodrogean Ovidiu și Prof. Bodrogean Diana, Arad

Rezolvare:

$$A=\begin{pmatrix}673&672&672\\672&673&672\\672&672&673\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}672&672&672\\672&672&672\\672&672&672\end{pmatrix}+I_3=672\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+I_3=I_3+672\cdot B$$

, unde $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

Arătăm prin inducție matematică că $B^n=3^{n-1}B, \forall n\geq 1$.

Atunci

$$A^{2017}=\left(I_3+672\cdot B\right)^{2017}=$$

$$=I_3+C_{2017}^{1}672\cdot B+C_{2017}^{2}\left(672\cdot B\right)^2+\ldots+C_{2017}^{2017}\left(672\cdot B\right)^{2017}=$$

$$=I_3+B\cdot\left(C_{2017}^{1}672+C_{2017}^{2}672^2\cdot 3+\ldots+C_{2017}^{2017}672^{2017}\cdot 3^{2016}\right)=$$

$$=I_3+\frac{1}{3}B\cdot\left(C_{2017}^{1}672\cdot 3+C_{2017}^{2}672^2\cdot 3^2+\ldots+C_{2017}^{2017}672^{2017}\cdot 3^{2017}\right)=$$

$$=I_3+\frac{1}{3}B\cdot\left[\left(1+672\cdot 3\right)^{2017}-1\right]=$$

$$=I_3+\frac{1}{3}B\cdot\left[2017^{2017}-1\right]$$

Atunci

$$A^{2017}=I_3+\frac{1}{3}B\cdot\left[2017^{2017}-1\right]=\begin{pmatrix}\frac{2017^{2017}+2}{3}&\frac{2017^{2017}-1}{3}&\frac{2017^{2017}-1}{3}\\\frac{2017^{2017}-1}{3}&\frac{2017^{2017}+2}{3}&\frac{2017^{2017}-1}{3}\\\frac{2017^{2017}-1}{3}&\frac{2017^{2017}-1}{3}&\frac{2017^{2017}+2}{3}\end{pmatrix}$$

2. Fie $A, B\in M_n(C)$, cu $A\neq B, A^{2018}=B^{2018}$ şi $A^{2017}B=B^{2017}A$. Calculați $\det(A^{2017}+B^{2017})$.

prof. Ramona Tudoran, Arad

Rezolvare:

Se observă că $(A^{2017}+B^{2017})(A-B)=A^{2018}-A^{2017}B+B^{2017}A-B^{2018}=O_n$.

Astfel $(A^{2017}+B^{2017})(A-B)=O_n$. (*)

Vom demonstra că $\det(A^{2017}+B^{2017})=0$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\det(A^{2017}+B^{2017})\neq 0$. Atunci matricea $A^{2017}+B^{2017}$ este inversabilă; înmulțind la stânga cu inversa ei în relația (*), obținem $A-B=O_n$, ceea ce contrazice ipoteza $A\neq B$.

Deci, presupunerea făcută este falsă, și astfel, $\det(A^{2017}+B^{2017})=0$.

3. Fie a > 1. Arătați că ecuația $a^x + x = n$ are o soluție unică notată x_n. Determinați

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{\log_a n}-1\right).$$

Szocs Andreea

Rezolvare:

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a^x + x$

f – suma de funcții strict crescătoare (1)

f – sumă de funcții continue $\Longrightarrow$ f – continuă (2)

$$\lim_{n\to-\infty} f(x)=0-\infty=-\infty \quad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=+\infty+\infty=+\infty \quad (4)$$

Din relațiile (2), (3), (4) $\Longrightarrow$ f – surjectivă (5)

Din relațiile (1) și (5) $\Longrightarrow$ f – bijectivă, cu inversa strict crescătoare

$x_n = f^{-1}(n)$ unic $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ (6)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{\log_a n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}(a^{x_n}+x_n)\left(\frac{x_n}{\log_a(a^{x_n}+x_n)}-1\right)\overset{(6)}{=}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(a^x+x)\left(\frac{x}{\log_a(a^x+x)}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(a^x+x)(x-\log_a(a^x+x))}{\log_a(a^x+x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a^x+x)}{a^x}\cdot\frac{x}{\log_a(a^x+x)}\cdot\frac{a^x(x-\log_a(a^x+x))}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x(\log_a a^x-\log_a(a^x+x))}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\log_a\left(1+\dfrac{x}{a^x}\right)}{\dfrac{x}{a^x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\log_a(1+x)}{x}=-\frac{1}{\ln a}$$

Deci $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{\log_a n}-1\right)=-\frac{1}{\ln a}$

4. a) Demonstrați că pentru orice $n \in N^*$ ecuația $x \cdot e^{nx} = 1$ admite o soluție unică reală. O notăm x_n.

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător;

c) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ tinde la zero.

Test pt. admiterea la clasa pregătitoare cu profil MPSI, sesiunea iunie 2015

Rezolvare:

a)Se observă că $e^{nx} > 0, (\forall)x \in R$ deci ecuația nu poate avea decât soluții strict pozitive. Considerând funcția $f\colon [0,\infty) \to R, f(x) = x \cdot e^{nx} - 1$ avem $f(0) = -1$ și $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ iar $f'(x) = e^{nx}(1 + nx) > 0$ ceea ce arată că f e strict crescătoare și fiind continuă deducem că există un unic $x(n)$ astfel încât $f\big(x(n)\big) = 0$.

b) Din $x_n \cdot e^{nx_n} = 1$ și $x_{n+1} \cdot e^{(n+1)\cdot x_{n+1}} = 1$ se obține $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{e^{nx_n}}{e^{(n+1)\cdot x_{n+1}}} = e^{n(x_n - x_{n+1})} \cdot e^{-x_{n+1}}$ Din $x_{n+1} > 0 \Rightarrow 0 < e^{-x_{n+1}} < 1$. Atunci $\frac{x_{n+1}}{x_n} < e^{n(x_n-x_{n+1})}$. Să presupunem că $x_n < x_{n+1}$. Rezultă $e^{n(x_n-x_{n+1})} < 1$, deci $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ ceea ce conduce la o contradicție cu presupunerea făcută. Astfel vom avea că $x_n \geq x_{n+1}$ ceea ce arată că șirul este descrescător (de altfel un șir mărginit inferior de 0 și care converge spre 0 nu poate fi decât descrescător !)

c) Din $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot e - 1 < 0 = f(x_n)$ și f strict crescătoare $\Rightarrow x_n > \frac{1}{n}$. Pe de altă parte, din cunoscuta inegalitate $e^x \geq 1 + x$, deducem că $e^{nx_n} \geq 1 + nx_n$, de unde se obține că $1 = x_n \cdot e^{nx_n} \geq x_n \cdot (1 + nx_n)$ adică $nx_n^2 + x_n - 1 \leq 0$. Rezolvând inecuația găsim $x_n \leq \frac{\sqrt{1+4n}-1}{2n}$ .Astfel avem $\frac{1}{n} < x_n \leq \frac{\sqrt{1+4n}-1}{2n}$, $n > 2$. Din teorema cleștelui $x_n \to 0$.

Clasa a XII-a

1. Să se rezolve ecuația $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + 1 = 0$ și să se determine $a < 0$ știind că are toate rădăcinile reale.

Prof. Marcel Camenița, Arad

Rezolvare:

Fie $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$ soluțiile ecuației date.

Atunci $\sum x_i^2 = S_1^2 - 2S_2 = 4^2 - 2 \cdot 6 = 4$ deci $\frac{1}{4} \cdot \sum x_i^2 = \sqrt[4]{\prod x_i^2} = 1$.

Avem egalitate în inegalitatea mediilor d.d. $x_i^2 = 1, i = \overline{1,4}$

Atunci $x_i = \pm 1$ iar din $\sum x_i = 4$ deducem că $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ și atunci evident $a = -S_3 = -4$.

2. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x^n} dx, n \in N$.

a) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$;

b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n \cdot I_n$.

Prof. Sorin Dumitrică, Arad

Rezolvare:

a) $I_n = \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 nx^{n-1} \cdot e^{x^n} \cdot x\, dx$.

Cu schimbarea de variabilă $x^n = t \Rightarrow dt = nx^{n-1}dx$ și

$x = 0 \Rightarrow t = 0 , x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Deci $I_n = \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 e^t \cdot \sqrt[n]{t}dt \le \frac{e}{n} \cdot \int_0^1 \sqrt[n]{t}\, dt = \frac{e}{n+1}$.

Am obținut că $0 < I_n \le \frac{e}{n+1}$ de unde rezultă $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

$n \cdot I_n = \int_0^1 n\, x^n \cdot e^{x^n} dx = \int_0^1 \left(e^{x^n}\right)' \cdot x\, dx = xe^{x^n} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x^n}\, dx = e - \int_0^1 e^{x^n}\, dx$.

Dar $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{x^n}\, dx = 1$ conform unui rezultat teoretic: ,,Fie $f: [0,1] \to R$ o funcție continuă. Atunci $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)$”.

Prin urmare, obținem că $\lim_{n\to\infty} n \cdot I_n = e - 1$

3. Fie $f = X^4 - aX^3 - X + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că , dacă f are toate rădăcinile reale, atunci $\left|\frac{a}{b}\right| \ge 4$. Să se studieze dacă reciproca este adevărată.

Prof. Sorin Dumitrică , Arad

Rezolvare:

Avem $\sum x_1^2 = (\sum x_1)^2 - 2\sum x_1x_2 = a^2$.

Polinomul $g = Y^4 f\left(\frac{1}{Y}\right) = bY^4 - Y^3 - aY + 1$ are rădăcinile $y_i = \frac{1}{x_i}$, $i = \overline{1,4}$. Din $\sum y_1^2 = (\sum y_1)^2 - 2\sum y_1y_2$ și $\sum y_1 = \frac{1}{b}$, $\sum y_1y_2 = 0$ deducem $\sum \frac{1}{x_1^2} = \left(\sum \frac{1}{x_1}\right)^2 - 2\sum \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{b^2}$.

Atunci $\sum x_1^2 \cdot \sum \frac{1}{x_1^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \ge 16$, de unde rezultă $\left|\frac{a}{b}\right| \ge 4$.

Se observă din relația $x_1x_2x_3x_4 = b \in R^*$ că toate rădăcinile lui f sunt nenule.

Pentru reciprocă, fie $f: R \to R, f(x) = x^4 - ax^3 - x + b$.
Atunci $f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 - 1$.
Alegem $a = 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1 = (x-1)(4x^2 + x + 1)$, deci singurul punct critic este $x = 1$.
Avem $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ și conform ipotezei, $|b| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow f(1) = b - 1 < 0$. Atunci din șirul lui Rolle deducem că ecuația $f(x) = 0$ are 2 soluții reale distincte, una în intervalul $(-\infty, 1)$ și cealaltă în intervalul $(1, \infty)$ și 2 soluții complexe.
Deci reciproca este falsă.

4. Fie funcția $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă astfel încât: $f(\alpha)=0$ și $f'(x) \geq x^2\sqrt{1 + 4f^2(x)}$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Să se arate că:

$$2f(\beta)+\sqrt{1 + 4f^2(\beta)} \geq \sqrt[3]{e^{2(\beta^3 - \alpha^3)}}$$

Prof. Octavia Potocean și prof. Mircea Potocean

Rezolvare:

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+4f^2(x)}} \geq x^2, \forall x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{\sqrt{1+4f^2(x)}} dx \geq \int_\alpha^\beta x^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} ln\left(f(x) + \sqrt{\frac{1}{4} + f^2(x)} \right) \Big|_\alpha^\beta \geq \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3}$$

$$2f(\beta) + \sqrt{1 + 4f^2(\beta)} \geq e^{\frac{2(\beta^3 - \alpha^3)}{3}}$$

$$2f(\beta) + \sqrt{1 + 4f^2(\beta)} \geq \sqrt[3]{e^{2(\beta^3 - \alpha^3)}}$$

5. Determinați $\min\limits_{t \in \mathbb{R}} E(t)$, unde $E(t) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2^{tx}}{3 + \cos x} dx$.

Prof. Potocean Octavia și Szocs Andreea

Rezolvare:

$$E(t) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2^{tx}}{3 + \cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{2^{tx}}{3 + \cos x} dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2^{tx}}{3 + \cos x} dx$$

În prima integrală facem schimbarea de variabilă u = –x $\Longrightarrow$ –x = u $\Longrightarrow$ dx = – du

$$x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$$

$x = 0 \Longrightarrow$ u = 0

Atunci

$$E(t)=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{2^{-tu}}{3+\cos(-u)}du+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^{tx}}{3+\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^{-tu}}{3+\cos u}du+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^{tx}}{3+\cos x}dx$$

În prima integrală facem renotația u = x

$$\Rightarrow E(t)=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^{-tx}}{3+\cos x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^{tx}}{3+\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^{tx}+2^{-tx}}{3+\cos x}dx$$

$$2^{tx}+2^{-tx}\overset{I.M.}{\geq}2\sqrt{2^{tx}\cdot 2^{-tx}}=2$$

$$\Rightarrow E(t)\geq\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2}{3+\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2^{0\cdot x}+2^{-0\cdot x}}{3+\cos x}dx=E(0)$$

$\Rightarrow \min\limits_{t\in\mathbb{R}} E(t)=$ E(0)

PROBLEME PROPUSE

Ciclul primar

1. Determinați patru numere naturale consecutive știind că suma dintre dublul primului număr, al doilea număr, triplul celui de al treilea număr și dublul celui de al patrulea număr este 16093.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

2. Fie șirul de numere naturale 11, 61, 111, 161, 211, …

a) Scrieți următorii cinci termeni ai șirului.

b) Este numărul natural 1961 termen al șirului?

c) Scrieți al 2012-lea termen al șirului.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

3. Suma a trei numere naturale este 5008. Dacă din fiecare scădem același număr obținem numerele 100, 1100 și 1108. Aflați cele trei numere.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

4. Aflați numerele naturale de forma $\overline{19ab}$ astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

a) $1961 \leq \overline{19ab} < 1999$

b) $a = b + 5$

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

Clasa a V-a

1. Să se scrie numărul $\underbrace{111\ldots1}_{n\ cifre}\underbrace{555\ldots5}_{n\ cifre}$ în produs de două numere impare consecutive.

O.P.M.

2. Să se determine numărul $\overline{ab}$ astfel încât $a^b = 11\cdot \overline{aa} + 4\cdot a$

O.P.M.

3. Să se determine numărul $\overline{ab}$ dacă $\overline{ab} = \overline{bb} + 5 \cdot a - 10$

O.P.M.

4. Două autoturisme pleacă din aceeași localitate și în aceeași direcție, dar primul cu două ore înaintea celui de-al doilea. Primul autoturism circulă cu 70 km/h iar al doilea autoturism circulă cu 90 km/h. aflați după cât timp al doilea autoturism îl ajunge pe primul. (se folosește relația: distanța = viteza · timpul)

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

Clasa a VI-a

1. Determinați câte numere naturale pare de 2 cifre au exact 4 divizori.

(Milaș Florica și Milaș Flavius, Arad)

2. Determinați toate numerele de 4 cifre care au exact 4 divizori, iar unul dintre divizori este pătrat perfect.

(Milaș Florica și Milaș Flavius, Arad)

3. Aflați numărul $\overline{abcd}$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

(i) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$;

(ii) $\overline{cd}$ este număr prim;

(iii) $\overline{cd} - 1 = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(iv) $\overline{ab} + 7 = 3^m$, $m \in \mathbb{N}$.

(Milaș Florica și Milaș Flavius, Arad)

4. Se consideră numărul natural $A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2018$. Să se demonstreze că $B|A$, unde $B = 53^{39}\cdot 5^{50}$.

O.P.M.

5. Aflați media aritmetică a numerelor a și b dacă:

$a = 2019^{100} - 2018\cdot 2019^{99} - 2018\cdot 2019^{98} - \ldots - 2018\cdot 2019^2 - 2018\cdot 2019$

$b = \frac{19}{20} + \frac{1919}{2020} + \cdots + \frac{191919\ldots19}{\underbrace{202020\ldots20}_{400\ de\ cifre}}$

O.P.M.

Clasa a VII-a

1. Se consideră $x, y, z, t, a, b \in \mathbb{N}^*$

$$a = \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+t} \qquad b = \frac{t}{x+t} + \frac{t}{y+z} + \frac{t}{z+t}$$

Să se calculeze expresia $E = \frac{(a+b)^2 - 3ab}{1+a+b}$.

O.P.M.

2. Arătați că ecuația $y^2 + y = 2010^{z^{2009}} + 2009$ nu are soluții în $\mathbb{Z}^*$.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

3. Rezolvați ecuația $x + 2014\cdot\{x\} = [x]$, $x \in \mathbb{Q}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

4. Determinați x ∈ ℕ astfel încât $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+x}=\frac{4020}{2011}$.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

Clasa a VIII-a

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$astfel încât $x^4-ax^2y^2+y^4=1$.

i) Dacă $a<0$ demonstrați că $|x|<1$ și $|y|<1$;

ii) Dacă $|xy|>1$ demonstrați că $a>0$.

Sorin Dumitrică, Arad

2. Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$, dacă a+b+c=18 și $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=0{,}2$

3. Fie ABCD un dreptunghi cu aria de 36 cm2. O este centrul cercului înscris în ΔABD. Ducem QO || BA, Q ∈ (DC), OP || BC, P ∈ (BC), VT ⊥ (ABC), QP ∩ CO = {T}. Să se calculeze volumul piramidei VQOPC.

(O.P.M.)

4. Fie $f_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x)=(3m-1)x+6m-7$. Arătați că toate graficele funcțiilor $f_m, m \in \mathbb{R}$, trec printr-un punct fix.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

Clasa a IX-a

1. Un dreptunghi de dimensiuni $a \times b$, $a<b$ se înscrie într-un sfert de cerc de rază r astfel încât să aibă 2 vârfuri pe circumferință. Să se arate că are loc relația $r=\sqrt{\frac{2a^2+2ab+b^2}{2}}$.

Sorin Dumitrică, Arad

2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, D∈ $(AB$ astfel încât $BD=AC$ și E∈ $(AC$ astfel încât $CE=AB$. Dacă $CD \cap BE=\{P\}$ și $AP \cap DE=\{M\}$ arătați că $AM=\frac{b+c}{b^2+c^2}\cdot\sqrt{b^4+c^4+bc(b^2+c^2-a^2)}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor ΔABC.

Sorin Dumitrică, Arad

3. Fie a, b, c >0, să se arate că $\frac{(a-1)^2}{c}+\frac{(b-2)^2}{a}+\frac{(c+3)^2}{b} \geq a+b+c$

O.P.M.

4. Dacă a + b + c = 1 cu a, b, c > 0, arătați că

$$\sqrt{a+2b+3c}+\sqrt{b+2c+3a}+\sqrt{c+2a+3b}<4{,}5$$

O.P.M.

Clasa a X-a

1. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{6}} y = 2 \\ \log_{\frac{1}{5}} x \cdot \log_{\frac{1}{6}} y \geq 1 \end{cases}$. Să se arate că $(x \cdot y)^{-1} = 30$.

O.P.M.

2. Să se rezolve ecuația $3^{x-1} + 3^{y-2} + 3^{6-x-y} = 9$ unde x, y, z ∈ ℝ.

O.P.M.

3. Se consideră polinomul f al cărui grad este mai mare decât 2. Polinomul f împărțit la x + 2 dă restul 2010 și împărțit la x – 3 dă restul 12060. Aflați restul împărțirii polinomului f la (x + 2)(x – 3).

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

4. Arătați că $\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1985}} + \frac{1}{\sqrt{1986}}\right] = 88$, unde [x] este partea întreagă a numărului real x.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

Clasa a XI-a

1. Fie n un număr natural nenul. Determinați toate matricele X∈ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care $X^n = \begin{pmatrix} 1+9n^2 & 1-3in \\ 1+3in & 1 \end{pmatrix}$.

C. Bușe

2. Fie șirul definit de $x_0 > 0$ și pentru orice n natural $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^3}{n^2}$

(***)

3. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 61 & 63 \\ 86 & 87 \end{pmatrix}$. Determinați x, y ∈ ℝ, astfel încât $X^2 = x \cdot X + y \cdot I_2$.

(Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad)

Clasa a XII-a

1. Fie legea de compoziție:

$$x * y = e^{kaln\, x - kbln\, y},\ (\forall)x, y > 1 \text{ și } k, a, b \in \mathbb{Z}^*$$

Să se determine k, a, b ∈ $\mathbb{Z}^*$, astfel încât legea să fie asociativă.

(Adrian Colceriu, Arad)

2. Să se demonstreze inegalitatea:

$$I = \int_1^2 \sqrt[n]{ln(x) \cdot ln(2x) \cdot ln(4x) \ldots ln(2^{n-1}x)} < \frac{3 \cdot (2^n - 1)}{2n},\ \ n \geq 2$$

(Adrian Colceriu, Arad)

3. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{\pi}{4} - ln\sqrt{2} \leq \int_0^1 \sqrt{[(x+1)ln(x+1)] \cdot arctg\, x}\, dx \leq \frac{3ln\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi - 3}{8}$$

(Adrian Colceriu, Arad)

4. Să se calculeze:

$$I_n = \int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+n} * dx$$

Adrian Zico Serban Ineu