ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

Serii de puteri și funcții generatoare

Lect. Dr. Mihai Chiș
Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea de Vest din Timișoara

1. Serii de puteri

Definiție 1.1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale, iar $a \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare fixat. Seria de puteri centrată în a cu coeficienți a_n, $n \in \mathbb{N}$, este

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Mulțimea de convergență a acestei serii este

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n - convergentă \right\}.$$

Observația 1.2. 1) Mulțimea K este nevidă, deoarece $a \in K$.

2) Fie $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ și $\delta = |x_0 - a|$. Folosind criteriile de comparație rezultă atunci că

$$x_0 \in K \Rightarrow (a-\delta, a+\delta) \subseteq K$$

respectiv

$$x_0 \notin K \Rightarrow K \subseteq (a-\delta, a+\delta)$$

Teorema 1.3. (Abel-Cauchy-Hadamard)

Pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ *există un număr real* $R \in [0, \infty]$ *(numit rază de convergență) cu proprietatea că*

$$(a-R, a+R) \subseteq K \subseteq [a-R, a+R].$$

În plus, convergența este absolută și uniformă pe orice interval

$$(a-r, a+r) \subset (a-R, a+R).$$

Raza de convergență R este dată de $R = \frac{1}{\omega}$ *(notațiile sunt „tradiționale”), unde*

$$\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Observație 1.4. 1) Mai sus am folosit convențiile obișnuite $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$

2) Dacă $R = \infty$, atunci $K = \mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie $R\in[0,\infty]$ definit ca în enunțul teoremei. Pentru orice $r < R$ și orice $x\in(a-r,a+r)$ avem că

$$\limsup\sqrt[n]{\left|a_n\left(x-a\right)^n\right|}=\frac{|x-a|}{R}<\frac{r}{R}<1,$$

astfel că, conform criteriului rădăcinii al lui Cauchy, seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n$ este absolut convergentă.

Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus[a-R,a+R]$, atunci

$$\limsup\sqrt[n]{\left|a_n\left(x-a\right)^n\right|}=\frac{|x-a|}{R}>1$$

Astfel că seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n$ este divergentă.

Importanța seriilor de puteri este dată de faptul că valorile funcțiilor cu care lucrăm în mod obișnuit (de obicei funcții elementare, indefinit derivabile pe intervalele din domeniile lor de definiție) sunt aproape întotdeauna aproximate pornind de la dezvoltările acestora în serie de puteri în jurul vreunui punct. Proprietatea de bază este (într-o formulare neriguroasă)

Propoziția 1.5. Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă, și $a\in Int(D)$. Atunci există un interval $I\subseteq D$ centrat în a cu proprietatea că

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots\ ,(\forall)x\in I$$

Observație 1.6. Seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se numește seria Taylor asociată funcției f în punctul a.

Exemplu 1.7. Dezvoltările în punctul $a = 0$ ale câtorva dintre funcțiile cele mai des folosite sunt:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ ,(\forall)x\in\mathbb{R};$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ ,(\forall)x\in\mathbb{R};$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ ,(\forall)x\in\mathbb{R};$$

$$\left(1+x\right)^{r}=1+rx+\frac{r\left(r-1\right)}{2}x^{2}+\ldots+\frac{r\left(r-1\right)\left(r-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(r-n+1\right)}{n!}x^{n}+\ldots\ ,\left(\forall\right)x\in(-1,1);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+\ldots\quad ,\left(\forall\right)x\in(-1,1];$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\cdot\left(x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)\ ,\left(\forall\right)x\in(-1,1);$$

$$arctg(x)=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots(\ )\ ,\left(\forall\right)x\in[-1,1];$$

2. Funcții generatoare

Definiție 2.1. Fie $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. O funcție $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numește funcție generatoare asociată șirului $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\ ,\ (\forall)x\in D$$

Exemplu 2.2. 1) Șirul $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ al puterilor unui număr real a are funcția generatoare $f:\left(-\frac{1}{|a|},\frac{1}{|a|}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1-ax}$;

2) Șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ al inverselor numerelor naturale are funcția generatoare $f:\left[-1,1\right)\to\mathbb{R},\quad f(x)=-\ln(1-x)$

Propoziție 2.3. Fie $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale care verifică relația de recurență liniară de ordin k cu coeficienți constanți

$$a_{n+k}=c_{k-1}a_{n+k-1}+c_{k-2}a_{n+k-2}+\ldots+c_1a_{n+1}+c_0a_n\ ,\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}\qquad(1)$$

Atunci funcția generatoare asociată șirului $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ are forma

$$f:D\subseteq\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{P(x)}{1-\sum_{j=0}^{k-1}c_jx^{k-j}},$$

unde $P\in\mathbb{R}\left[X\right]$ este un polinom de grad cel mult k – 1, ai cărui coeficienți se pot determina în funcție de termenii inițiali a_0, a_1, …, a_{k-1} ai șirului.

Demonstrație. Din relația de recurență și definiția funcției generatoare, notând $Q_j(x)=\sum_{i=0}^{j-1}a_ix^i$, rezultă că

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{i=0}^{k-1}a_ix^i+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}x^{n+k}=Q_k(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k-1}c_ja_{n+j}\right)x^{n+k}=$$

$$=Q_k(x)+\sum_{j=0}^{k-1}c_jx^{k-j}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+j}x^{n+k}\right)=Q_k(x)+\sum_{j=0}^{k-1}c_jx^{k-j}(f(x)-Q_j(x))=$$

Evident P(x) = $\sum_{j=0}^{k-1}c_jx^{k-j}Q_j(x)$ este un polinom de grad cel mult k – 1 și rezultă acum afirmația din enunț.

Observație 2.4. Considerând ecuația

$$r^k-\sum_{j=0}^{k-1}c_jr^j=0, \qquad (2)$$

Numită ecuația caracteristică asociată recurenței liniare cu coeficienți constanți (1), având rădăcinile $r_1, r_2, \ldots, r_l$ cu multiplicitățile $m_1, m_2, \ldots, m_l$, are loc relația

$$1-\sum_{j=0}^{k-1}c_jx^{k-j}=\prod_{i=1}^{l}\left(1-r_ix\right)^{m_i}$$

Corolar 2.5. Expresia funcției caracteristice asociate recurenței (1) are forma

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}\frac{A_i(x)}{\left(1-r_ix\right)^{m_i}}$$

unde $A_i\in\mathbb{R}\left[X\right]$ sunt polinoame de grade $\partial\left(A_i\right)\le m_i-1$.

Observație 2.6. Dezvoltarea în serie de puteri a funcției $g:\left(-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=\frac{1}{\left(1-rx\right)^m}$ este $\frac{1}{\left(1-rx\right)^m}=1+\sum_{n=1}^{\infty}C_{m+n-1}^{n}r^nx^n$

Corolar 2.7. Expresia termenului general a_n al unui șir care verifică relația de recurență (1) este

$$a_n=\sum_{i=1}^{l}P_i(n)r_i^n,$$

unde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice (2) cu multiplicitățile $m_1, m_2, \ldots, m_l$, iar $P_i\in\mathbb{R}\left[X\right]$ sunt polinoame de grade $\partial\left(P_i\right)\le m_i-1$.

Exemplu 2.8. Pentru șirul $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ al lui Fibonacci, definit prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ și $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, funcția generatoare are expresia

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

Ecuația caracteristică $r^2 - r - 1 = 0$ are rădăcinile simple $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Pentru funcția generatoare obținem atunci expresia

$$f(x) = \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \left(\frac{1}{1 - r_1 x} - \frac{1}{1 - r_2 x} \right),$$

Astfel că expresia termenului general al șirului lui Fibnonacci este

$$F_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Exemplu 2.9. Un alt exemplu celebru de șir recurent este șirul $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al numerelor lui Catalan definit prin $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ și $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k}$, $(\forall) n \geq 2$. Numerele lui Catalan modelează, de exemplu, numărul de moduri în care pot fi puse parantezele pentru a grupa factorii unui produs de n factori. Ținând cont de relația de recurență, funcția generatoare f asociată numerelor lui Catalan verifică relația

$$f^2(x) = f(x) - x$$

Cum $f(0) = 0$, expresia funcției generatoare este atunci

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

Identificând coeficienții dezvoltării în serie Taylor a funcției f, obținem atunci că

$$T_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2n-3}{2}\right) \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot 4^n =$$

$$= \frac{(2n-3)!! \cdot 2^n}{2 \cdot n!} = \frac{(2n-2)! \cdot 2^{n-1}}{n! \cdot (2n-2)!!} = \frac{(2n-2)!}{n! \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n} \cdot C_{2n-2}^{n-1}$$

TEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ȘI EXAMENELOR NAȚIONALE

Probleme de calcul integral date la Bacalaureat

prof. Dumitrică Sorin Radu
Colegiul Național ,,Elena Ghiba Birta"Arad

Problemele date la examenele de bacalaureat la matematică - și aici voi discuta doar despre profilul matematică-informatică – au, începând cu anul 2008, un grad sporit de dificultate. Voi face referire în acest articol la analiza matematică de clasa a XII-a, care în majoritatea situațiilor creează dificultăți, în special prin ultimul subpunct.

Problemele ce urmează au enunțurile asemănătoare: se definesc șiruri de numere reale folosind integrale definite și se cere studierea convergenței acestora. Astfel noțiunile teoretice necesare rezolvării respectivelor probleme îmbină elemente ale capitolului șiruri de numere reale studiat în clasa a XI-a cu elemente ale capitolelor primitive, respectiv integrale definite din clasa a XII-a.

Prima problemă a fost dată în sesiunea iunie 2008 și are următorul enunț:

1. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx, (\forall) n \in N^*$.

a) Arătați că $(n+2)\cdot I_n = (n-1)\cdot I_{n-2}, (\forall) n \geq 3$;

b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Soluție: a) O primă soluție folosește integrarea prin părți. Să remarcăm că relația $x^n\sqrt{1-x^2} = \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} = x^{n-1}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)' + x^{n+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'$ e valabilă doar pentru $x \in (0,1)$ astfel, trebuie observată o altă variantă, mai dificilă:

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\cdot\left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx = \int_0^1 x^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)'dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot x^{n-1}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{3}\cdot\int_0^1 x^{n-2}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{n-1}{3}\cdot\left(I_{n-2}-I_n\right),$$

de unde se obține relația ce trebuia demonstrată la punctul b).

O sugestie pentru o soluție alternativă, ceva mai lungă, dar cu calcule mai ușor de observat este următoarea: facem în integrala $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$ schimbarea de variabilă $x = \sin t$ și obținem relația

$$I_n = J_n - J_{n+2}, n \geq 1 \qquad (1)$$

unde $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$. Obținem apoi tot prin integrarea prin părți relația

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)'\cdot\sin^{n-1} t\,dt = (n-1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\cdot\cos^2 t\,dt = (n-1)\cdot\left(J_{n-2}-J_n\right)$$

Rezultă $$J_n = \frac{n-1}{n}\cdot J_{n-2} \qquad (2)$$

Atunci obținem $\left(n+2\right)I_n=\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$ (3)

Pe de altă parte, tot din (1) deducem că

$$I_{n-2}=J_{n-2}-J_n=J_{n-2}-\frac{n-1}{n}\cdot J_{n-2}=\frac{1}{n}\cdot J_{n-2}$$

Și din relația (3) obținem că $\left(n+2\right)I_n=\left(n-1\right)\cdot\dfrac{1}{n}J_{n-2}=\left(n-1\right)I_{n-2}$, $\left(\forall\right)n\geq 3$.

La subpunctul b) avem $0\leq I_n=\int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\leq\int\limits_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}\to 0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

A doua problemă s-a dat în sesiunea iunie 2011 și are următorul enunț :

2. Fie $f:\left[1,2\right]\to R$, $f\left(x\right)=x^2-3x+2$. Să se arate că

$\left(4n+2\right)\int\limits_1^2 f^n\left(x\right)dx+n\int\limits_1^2 f^{n-1}\left(x\right)dx=0,\left(\forall\right)n\in N^*$. (Este vorba doar de ultimul subpunct)

Soluția din barem : $\int\limits_1^2 f^n\left(x\right)dx=\int\limits_1^2\left(x^2-3x+2\right)^n dx=\dfrac{1}{2}\cdot\int\limits_1^2\left(2x-3\right)'\left(x^2-3x+2\right)^n dx=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(2x-3\right)\left(x^2-3x+2\right)^n\Big|_1^2-\frac{n}{2}\int\limits_1^2\left(2x-3\right)^2\left(x^2-3x+2\right)^{n-1}dx=$$

$$=-\frac{n}{2}\cdot\int\limits_1^2\left(4x^2-4x+9\right)f^{n-1}\left(x\right)dx=-\frac{n}{2}\cdot\int\limits_1^2\left[4\left(x^2-3x+2\right)+1\right]f^{n-1}\left(x\right)dx=$$

$=-\dfrac{4n}{2}\int\limits_1^2 f^n\left(x\right)dx-\dfrac{n}{2}\int\limits_1^2 f^{n-1}\left(x\right)dx$ și problema este rezolvată.

Se poate observa totuși că problema se poate reduce la una din problemele întâlnite în cele 100 de variante publicate de Ministerul Educației Naționale pe internet. Notăm $I_n=\int\limits_1^2 f^n\left(x\right)dx$ și facem schimbarea de variabilă $x-1=t$. Atunci $I_n=\int\limits_0^1\left(t^2-t\right)^n dt$ și trebuie să arătăm că șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ verifică relația de recurență $I_n=-\dfrac{n}{4n+2}\cdot I_{n-1},\left(\forall\right)n\geq 2$. Aici am preferat o soluție mai apropiată de exercițiile clasice de integrare prin părți . Avem

$$I_n=\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)^n dx=x\left(x^2-x\right)^n\Big|_0^1-n\cdot\int\limits_0^1 x\left(x^2-x\right)^{n-1}\cdot\left(2x-1\right)dx=$$

$$= -n\cdot\int_0^1 \left(2x^2-x\right)\cdot\left(x^2-x\right)^{n-1}dx = -2n\cdot\int_0^1\left(x^2-x\right)^n dx - n\cdot\int_0^1 x\left(x^2-x\right)^{n-1}dx =$$

$$= -2nI_n - nK_n \qquad (4)$$

unde $K_n = \int_0^1 x\left(x^2-x\right)^{n-1}dx$.

Facem schimbarea de variabilă $t = 1 - x$ și obținem

$$K_n = -\int_1^0 (1-t)\cdot\left(t^2-t\right)^{n-1}dt = I_{n-1} - K_n\text{, deci } K_n = \frac{1}{2}I_{n-1}$$

care înlocuită în relația 4) ne dă $I_n = -2nI_n - \frac{n}{2}I_{n-1}$,

adică $\quad I_n = -\frac{n}{2(2n+1)}I_{n-1} \qquad (5)$

Observație: Putem calcula și limita acestui șir.

Prima variantă este să observăm că $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 0, (\forall) x \in [1,2]$, deci vom avea $0 \le I_{2n} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \to 0$, respectiv $-\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1} \le I_{2n+1} \le 0$ deci și subșirul I_{2n+1} converge la 0, ca și subșirul $\left(I_{2n}\right)$, ceea ce demonstrează că $\lim_{n\to\infty} I_n$=0.

A doua variantă este să aplicăm criteriul raportului pentru șirul $\left(\left|I_n\right|\right)_{n\ge1}$;

avem că $\left|\frac{I_n}{I_{n-1}}\right| \stackrel{(5)}{=} \frac{n}{4n+2} \to \frac{1}{4} \in (0,1) \Rightarrow \left|I_n\right| \to 0$, deci și $I_n \to 0$.

A treia problemă a fost dată la simularea examenului de bacalaureat în anul 2014 și are următorul enunț :

3. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$.

a) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}, (\forall) n \in N^*$;

b) Să se arate că $\lim_{n\to\infty}(n+1)I_n = \frac{1}{2}$.

Evident $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{x+1}dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$.

Acest subpunct ne ajută la calculul limitei !

Observând că șirul $\left(I_n\right)_{n\ge1}$ este descrescător , pentru că $x^n \ge x^{n+1}, (\forall) x \in [0,1]$ și

$(\forall)n \geq 1$, deci vom deduce $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq 2I_{n+1} \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{2n}$, respectiv $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} \leq 2I_n \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$.

Atunci $\frac{n+1}{2n} \leq (n+1) \cdot I_n \leq \frac{1}{2}$

și din teorema cleștelui $\Rightarrow (n+1) \cdot I_n \to \frac{1}{2}$.

Invit pe elevii dornici să-și testeze abilitățile să rezolve și o generalizare a acestei probleme, cunoscută de altfel din diferite culegeri de probleme:

Fie $a,b > 0$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{ax+b} dx, (\forall) n \in N^*$. Să se arate că $aI_{n+1} + bI_n = \frac{1}{n+1}$, $(\forall)n \geq 1$ și apoi să se calculeze $\lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot I_n$.

Trebuie să remarcăm că limita de la punctul c) se poate calcula și altfel :

$$(n+1) \cdot I_n = \int_0^1 (n+1) \cdot \frac{x^n}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}\right)' \cdot \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^{n+1}}{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} + H_n,$$

unde $H_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} dx$ este un șir ce converge la 0 (se demonstrează ușor cu criteriul majorării $H_n \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}$) deci limita este $\frac{1}{2}$.

Câteva comentarii metodice:

Se observă existența a două tipuri de limite de șiruri ce trebuie determinate.

- $\lim_{n\to\infty} I_n$ care din cele arătate mai sus sunt toate nule ;
- $\lim_{n\to\infty} n \cdot I_n$, respectiv $\lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot I_n$ care sunt nedeterminări de tipul $0 \cdot \infty$.

Acestea pot fi rezolvate în general prin 2 metode: cu teorema cleștelui sau folosind metoda integrării prin părți și apoi criteriul majorării.

În Gazeta Matematică nr. 12 din anul 1999, prof. Moanță Cristian din Craiova a propus următoarea problemă:

Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} n \cdot \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$.

Cred că ea poate fi considerată prima dintr-un lung șir de probleme, în care nedeterminarea $0 \cdot \infty$ se rezolvă în acest mod:

$$n\cdot\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 2n\cdot x^{2n-1}\frac{x}{1+x}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\left(x^{2n}\right)'\cdot\frac{x}{1+x}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{x+1}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{x^{2n}}{\left(x+1\right)^2}dx=$$

$\frac{1}{4}-L_n$,

unde $0\le L_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{\left(1+x\right)^2}dx\le\int_0^1 x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}\to 0$. Astfel , $\lim_{x\to\infty}n\cdot\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx=\frac{1}{4}$.

La final, 2 probleme pentru temă :

1) *Fie șirul* $\left(I_n\right)_{n\ge1}$ *dat de* $I_n=\int_0^2\left(2x-x^2\right)^n dx,\left(\forall\right)n\in N^*$.

a) Să se arate că $\left(2n+1\right)\cdot I_n=2n\cdot I_{n-1}$

b) Să se determine $\lim_{n\to\infty}I_n$.

2) *Fie șirul* $\left(I_n\right)_{n\ge1}$ *definit prin* $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx, n\ge1$

a) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}I_n$ *;*

b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}n\cdot I_n$.

Probleme pentru examene naționale,GM nr 12/2016

Bibliografie :
[1] Ghid metodic Bacalaureat 2009 – Editura GIL
[2] Matematică pentru examenul de bacalaureat – Editura ART , 2012
[3] Colecția Gazetei Matematice seria B
[4] Analiză Matematică – E.D.P. 1980
[5] www.mateinfo.ro

O aplicaţie a teoremei lui Rolle

Prof. Maria Toader
Colegiul Național „Moise Nicoară” Arad

Teorema lui Rolle:

Fie o funcţie $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ cu $a,b\in\mathbb{R}$, a < b.

Dacă f este continuă pe [a, b], derivabilă pe (a, b) şi f(a) = f(b), atunci există cel puţin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

Problema nr. 1

Se dă funcţia $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ continuă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}$. Să se arate că

$(\exists)\alpha \in (0,1)$ astfel încât $f(\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha}$.

Soluţie: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$

Considerăm $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - f(x)$, continuă pe [0,1] ca diferenţă de funcţii continue pe [0,1]. Cum g continuă pe[0,1] rezultă că g admite primitive pe [0,1]; Fie G o primitivă a sa pe [0,1].

Funcţia g continuă pe [0,1] rezultă că g integrabilă pe [0,1] şi $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = G(1) - G(0)$

$\Rightarrow$ G(1) – G(0) = 0.

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 f(x)dx = 0$$

Deci G(1) = G(0).
Dar G derivabilă pe [0,1], deci şi continuă pe [0,1].
Din teorema lui Rolle pentru funcţia G pe [0,1], rezultă că $(\exists)\alpha \in (0,1)$ astfel încât G'(α)=0.
$G'(x) = g(x), (\forall)x \in (0,1)$ rezultă că

$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+\alpha^2} - f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha^2}$

Pornind de la această problemă putem formula şi altele:

Problema nr. 2

Fie funcţia $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ continuă cu proprietatea că $\displaystyle\int_0^1 x^{2012} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$

Să se arate că $(\exists)\alpha \in (0,1)$ astfel încât $\alpha^{2014} \cdot f(\alpha) + \alpha^{2012} \cdot f(\alpha) - 1 = 0$.

Soluţie:

Considerăm $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - x^{2012} f(x)$, continuă pe [0,1] (produs, respectiv diferenţă de funcţii continue pe[0,1]); rezultă că g admite primitive pe [0,1] şi fie G o primitivă a sa.
Cum g continuă pe [0,1] rezultă că g integrabilă pe [0,1] şi

$\displaystyle\int_0^1 g(x)dx =$ G(1) – G(0) $\Rightarrow$ G(1) – G(0) = 0.

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 x^{2012} f(x)dx = 0$$
.

G derivabilă pe [0,1] $\Rightarrow$ G continuă pe [0,1].

Aplicând teorema lui Rolle, funcţiei G, pe [0,1] $\Rightarrow (\exists)\alpha \in (0,1)$ astfel încât G'(α)=0.

Dar $G'(x) = g(x), (\forall) x \in [0,1]$ rezultă că $g(\alpha) = 0$, deci $(\exists)\alpha \in (0,1)$ astfel încât

$$\frac{1}{1+\alpha^2} - \alpha^{2012} f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^{2014} f(\alpha) + \alpha^{2012} f(\alpha) - 1 = 0$$

În anul 1982, la etapa finală a Olimpiadei de matematică Marcel Chiriţă a propus următoarea problemă:

Problema nr. 3

Fie funcţia $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ continuă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că

$(\exists) x_0 \in (0,1)$ astfel încât $\frac{1}{1+x_0} < f(x_0) < \frac{1}{2x_0}$.

Soluţie:

Considerăm $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2} - f(x)$. Am demonstrat (folosind

teorema lui Rolle) în problema nr. 1 că $(\exists) x_0 \in (0,1)$ astfel încât $f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}$.

Cum $x_0 \in (0,1)$ rezultă că $x_0 > x_0^2 \Leftrightarrow 1 + x_0 > 1 + x_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x_0} < \frac{1}{1+x_0^2}$ adică

$\frac{1}{1+x_0} < f(x_0)$.

Dar $(1-x_0)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 + x_0^2 > 2x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x_0^2} < \frac{1}{2x_0}$ adică $f(x_0) < \frac{1}{2x_0}$.

Sugerăm elevilor pasionaţi să încerce să propună şi alte probleme pornind de la problema nr. 1.

Bibliografie

[1] Lupu T.: Probleme de analiză matematică. Calcul integral.Editura GIL, Zalău, 1996

[2] Andreescu T.; Botineţu M.D.; Maftei V.I.;Ţena M. Soluţiile problemelor date la Concursul de Matematică, Etapa finală, Galaţi,1982,

[3] Gazeta Matematică nr. 4/1983.

SUBIECTE - OLIMPIADE ȘI CONCURSURI ȘCOLARE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 25.02.2017 –

CLASA A V-A

1. Fie numărul $a=12345678910...999$, unde cifrele sunt obținute scriind numerele naturale de la 1 la 999. Care este a 2017-a cifră?

(Manual clasa a V-a, Editura Radical, enunț modificat)

2. a) Să se afle restul împărțirii numărului $a=2017+2(1+2+...+2016)$ la 2016.

b) Să se arate că suma primelor 2017 numere impare este pătrat perfect.

c) Să se scrie numărul 2017^2 ca suma a 2017 numere naturale consecutive.

(Prof. Cristina Pîrvuță, Olimpiadele și Concursurile de Matematică V-VIII, 2016, Editura Bîrchi)

3. Ștefan va împlini x ani în anul x^2. Care este anul de naștere al lui Ștefan, dacă se știe că s-a născut în secolul XX?

(Olimpiadele și Concursurile de Matematică V-VIII, 2016, Editura Bîrchi, enunț modificat)

4. Câte numere de forma $\overline{abc}$ cu a, b, c cifre distincte există, dacă :
$\overline{aaa}+\overline{bbb}+\overline{ccc}$ +a+b+c =2016

(Gazeta Matematică, nr.10, an 2016, E : 14992, pag. 470)

CLASA A VI-A

1. Numărul $\overline{aaa8}$ împărțit la un număr de două cifre dă restul 98. Aflați numărul.

(Florin Antohe, Galați, problema E15012, GM 5/2016)

2. Fie numerele $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}$ și $b=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{1996}{1997}$.

a) Arătați că $a<b$.

b) Determinați media aritmetică a numerelor a și b.

c) Demonstrați că $a<999$ și $b>999$.

(Manual Matematică pentru clasa a 6-a, Editura Radical)

3. Punctele A, B, C, D aparțin dreptei d, astfel încât $3 \cdot AB = 2 \cdot BC$, $AB + BC = 15cm$, iar $[BC] \equiv [BD]$. Calculați distanța dintre mijlocul segmentului $[AD]$ și mijlocul segmentului $[BC]$.

(Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2016, Editura Bîrchi)

4. Fie semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$ și $[OD$, astfel ca unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente, respectiv unghiurile $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ de asemenea sunt adiacente. Se consideră semidreapta $[OE$ bisectoarea $\sphericalangle AOB$, semidreapta $[OF$ bisectoarea $\sphericalangle COD$ și semidreapta $[OS$ în prelungirea semidreptei $[OA$. Știind că unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt suplementare:

a) determinați măsura $\sphericalangle EOF$;
b) demonstrați că unghiurile $\sphericalangle DOS$ și $\sphericalangle BOC$ sunt congruente.

(Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2016, Editura Bîrchi)

CLASA A VII-A

1. Arătați că numărul:

$$p = n \cdot \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

2.este natural, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

(Manual Matematică pentru clasa a VII-a, Editura Teora)

2. Să se arate că dacă numerele strict pozitive $a, b, c \in \mathbb{Q}$ verifică relația $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$, atunci:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$.

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(Olimpiadele şi concursurile de matematică V-VIII 2016, Editura Bîrchi)

3. Fie $ABCD$ trapez dreptunghic, cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$, $AB < CD$ și $AC \perp BD$. Punctele M și N sunt simetricele punctelor D și C față de punctul de intersecție a diagonalelor, iar $MP \perp DC$, $P \in AC$.

a) Arătați că $MADP$ este romb;
b) Demonstrați că $AM \perp ND$ și $BP \perp DP$.

(Romanța Ghiță și Ioan Ghiță,Blaj, problema E:14999, GM 4/2016)

4. Punctele A, D, C și B sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $[AD] \equiv [DC] \equiv [CB]$. Punctul E este exterior dreptei AB, O este mijlocul segmentului $[AB]$, iar F este simetricul punctului E față de O. Dacă $FC \cap EB = \{M\}$, $MD \cap AF = \{N\}$ și $NC \cap EB = \{P\}$, arătați că :

a) $EB = 8PB$;

b) $A_{AFBE} = 48A_{CPB}$.

(Olimpiadele şi concursurile de matematică V-VIII 2016, Editura Bîrchi)

CLASA A VIII-A

1. a) Arătaţi că:

$$x = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}\right)\left(\sqrt{2017}+1\right)$$

este număr natural.

b) Să se afle x şi y astfel încât:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4000004} + \sqrt{y^2 - 6y + 298} = 2017$$

(Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII, 2016)

2. Determinaţi numerele reale x, y, z ştiind că $x + y + z = \frac{3}{2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$.

(Gazeta Matematică, nr.4, E 14907, pag.201)

3. Pe planul pătratului ABCD se ridică perpendicularele AA', BB', CC' astfel încât A', B', C' se aflǎ de aceeaşi parte a planului pătratului şi [AA'] ≡ [BB'] ≡ [CC']. Să se arate că planele (AB'C) şi (A'DC') sunt paralele.

(Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII, 2016)

4. Fie a, b, c dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic cu diagonala de $\sqrt{3}$ cm. Să se demonstreze că: $\sqrt{a}(b+c) + \sqrt{b}(c+a) + \sqrt{c}(a+b) \le 6$.

(Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII, 2016)

CLASA A IX-A

1. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $a, n \in \mathbb{N}$ au loc:

a) $|x+a| + |x-a^2| \ge a^2 + a$;

b) $|x+1|+|x+2|+\cdots+|x+n|+|x-1^2|+|x-2^2|+\cdots+|x-n^2| \geq \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(Etapa locală, Bihor, 2016)

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dacă $a_1 = 1, a_n = 2^{n-1}$, să se determine $a_k \in (0,\infty)$, $k \in \{2,3,\dots,n-1\}$, știind că

$$\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+\frac{a_4^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq 2^{n+1}-4$$

(G.M., 2016)

3. a) Arătați că în orice triunghi ABC are loc relația $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului, iar H este ortocentrul triunghiului.

b) Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O și care are diagonalele AC și BD perpendiculare. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD și ABC, arătați că $\overline{BH_2} = \overline{DH_1}$.

(Etapa locală, Vâlcea, 2016)

4. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere pozitive cu suma 1. Să se arate că:

a) $\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}+\frac{a_2a_3}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_na_1}{a_n+a_1} \leq \frac{1}{2}$;

b) $\sqrt{a_1(a_2+a_3+\cdots+a_n)}+\sqrt{a_2(a_1+a_3+\cdots+a_n)}+\cdots+$
$+\sqrt{a_n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})} \leq \frac{n}{2}$.

(Manual cls. a IX-a, Marius Burtea, Georgeta Burtea, Ed. Carminis)

CLASA A X-A

1. Fie $a \in [-1,1]$. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax} = x$. Discuție.

(Manual cls. a X-a, Marius Burtea, Georgeta Burtea, Ed. Carminis)

2. Determinați funcțiile $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ care verifică relația

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f(x\sqrt{y})}, (\forall)x,y \in (0,\infty).$$

(Olimpiada locală, Suceava, 2016)

3. Aflați perechile (x,y) de numere strict pozitive pentru care $x+y \leq xy$ și $(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2 \leq 2$.

(Eugen Radu, București, Suplimentul Gazetei Matematice, nr. 1/2016)

4. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se determine valoarea minimă a lui $|z|$, dacă $|z-3i|+|z-4|=5$.

(Călin Ciprian, Reșița, Olimpiada locală, Caraș-Severin, 2016)

CLASA A XI-A

1. Fie matricea $A=\left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2=O_3$. Să se arate că

$a_{12}a_{21}+a_{23}a_{32}+a_{13}a_{31} \leq a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2$.

(Victor Marinescu, Craiova, GMB, nr.11/2016)

2. Să se arate că funcția $f:\left(\frac{1}{2},1\right) \cup (1,2) \to \mathbb{R},\ f(x)=tg\,\frac{\pi}{2x}$ nu are limită în punctul $x_0=1$.

(Manual cls. a XI-a, Marius Burtea, Georgeta Burtea, Ed. Carminis)

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $tr(A) \neq 0$ și $det(A^2+(detA+x)I_2) \geq 0\ (\forall)x \in \mathbb{R}$. Arătați că $4det(A) \geq (trA)^2$.

(Olimpiada locală, Bihor, 2016)

4. Se dă șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=1$ și $x_{n+1}=\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+x_n+1}}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot x_n$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot x_n$.

(Sorin Dumitrică, Arad)

CLASA A XII-A

1. Calculaţi: $\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\frac{(x+1)sinx}{2-sin^2x}dx$.

(C. d. p.)

2. Determinaţi funcţia f : ℝ → ℝ care admite primitive şi verifică, pentru orice număr real x , egalitatea $f(x)-F(x)=|x-1|$, unde F : ℝ → ℝ este o primitiva a lui f.

(Prof. Eugen Jecan, C.N. „A. Muresanu” Dej, Olimpiada Locală, Cluj)

3. Fie (G,·) un grup cu *2n+1* elemente cu proprietatea că există o funcţie *f:G → G* cu proprietatea că: $f(x\,f(xy))=y\,f(x^2),\ \forall\, x,y \in G$. Să se arate că G este grup abelian.

(Mihai Opincaru, Brad, Hunedoara, GMB nr.6)

4. a) Fie (G,·) un grup comutativ cu 2015 elemente, iar e elementul său neutru. Să se arate că dacă $x \in G$ și $x^2 = e$, atunci $x = e$.

b) Fie (G,*) și (G′,∘) două grupuri cu 2016 respectiv 2015 elemente. Să se determine toate morfismele de grup de la G la G′.

(Olimpiada locală, Dolj, 2016)

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „*Adolf Haimovici*" Etapa pe centru – 24.02.2017

Clasa a IX-a
Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 5$ și rația r = 3.
   a) Determinați termenul general al progresiei aritmetice.
   b) Precizați rangul termenului egal cu 101.
   c) Arătați că șirul $(a_{2n})_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică și calculați $a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}$.

2. a) Să se arate că: $\frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right]$, $\forall\, k \in N,\ k \geq 2$

b) Să se demonstreze că: $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$, $\forall\, n \in N$

3. a) Să se rezolve în R inecuația: $|x-1| \cdot (7 - |x+4|) > 0$.

b) Fie numărul $a = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$, $n \geq 1$. Să se determine $n \in N^*$ astfel încât $\{a\} = 0{,}999$.

c) Fie a, b, c > 0 cu abc = 1. Să se arate că $(a+1)(b+2)(c+8) \geq 32$.

4. Un credit bancar de 900 de lei este rambursat în 5 rate cu valori strict crescătoare, care formează o progresie aritmetică. Dacă primele două rate totalizează cât un sfert din totalul celorlalte trei rate, să se determine valoarea fiecărei rate.

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

1. Fie numerele $a = 7 - 4\sqrt{3}$ și $b = 7 + 4\sqrt{3}$.
   a) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.
   b) Calculați $a^2 + b^2 - ab$.
   c) Arătați că numărul $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ este natural.

2. a) Să se calculeze: $\left[\sqrt{2017}\right] + 3 \cdot \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

b) Să se rezolve în R ecuația: $\left||x-3|-4\right| = 2$.

c) Fie $a \in (-\infty, 0)$, $x < a$. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E(x) = |a+x| + \sqrt{(a-1)^2} - 2|a| + x.$$

3. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care a_3= 11 și a_7= 3.

a) Să se calculeze primul termen și rația progresiei.
b) Să se determine termenul de rang 2017 și suma primilor 2017 termeni.
c) Studiați dacă numărul -185 este termen al progresiei.

4. Bogdan primește cadou un clasor în care pot fi așezate 4372 de timbre. În prima zi el cumpără 4 timbre, apoi zilnic își achiziționează triplul numărului de timbre din ziua precedentă.

a) Câte timbre cumpără în a cincea zi ?
b) În câte zile reușește să completeze clasorul ?

Filieră tehnologică: profil tehnic

1. Fie numerele: a = $\frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}}$ și b = $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{2}\right)^2$.

a) Să se aducă numerele a și b la o formă mai simplă și să se compare aceste numere.
b) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ și progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$.

a) Știind că a_3 = 5 și a_6 = 11 să se calculeze a_{2017} și S_{2017}.
b) Știind că b_1= 3 și $b_2 - b_1 = 3$ să se calculeze termenul de rang 7.
c) Să se verifice dacă triunghiul cu lungimile laturilor egale cu $a_3,\ b_3\ și\ a_7$ este dreptunghic.

3. a) Să se calculeze: $\left[\sqrt{2017}\right] + 3 \cdot \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

b) Să se rezolve ecuația: $\left||x-3|-4\right| = 2$.

c) Fie $a \in (-\infty, 0)$. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E(a) = |a-2| + \sqrt{(a-1)^2} - 2|a|.$$

4. Bogdan primește cadou un clasor în care pot fi așezate 4372 de timbre. În prima zi el cumpără 4 timbre, apoi zilnic își achiziționează triplul numărului de timbre din ziua precedentă.

a) Câte timbre cumpără în a cincea zi ?
b) În câte zile reușește să completeze clasorul ?

Filieră teoretică: profil umanist-filologie şi ştiinţe sociale

1. Fie numerele: a = $\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}$ și b = $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})-(\sqrt{2})^2$.

a) Să se aducă numerele a și b la o formă mai simplă și să se compare aceste numere.

b) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

2. Fie mulțimile A = $\{x \in R/\ |2x+3| \leq 5\}$ și B = $\{x \in R\ /\ 3(x-1) < 4x-2\}$.

a) Să se determine mulțimile A și B.

b) Să se calculeze A ∪ B, A ∩ B, A – B, $C_R(A)$.

c) Să se calculeze suma și produsul elementelor mulțimii A ∩ Z.

3. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ și progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$.

a) Știind că a_3 = 5 și a_6 = 11 să se calculeze a_{2017}.

b) Știind că b_1= 3 și $b_2 - b_1 = 3$ să se calculeze termenul de rang 7.

c) Să se verifice dacă triunghiul cu lungimile laturilor egale cu $a_3,\ b_3$ $și$ a_7 este dreptunghic.

4. Bogdan primește cadou un clasor în care pot fi așezate 4372 de timbre. În prima zi el cumpără 4 timbre, apoi zilnic își achiziționează triplul numărului de timbre din ziua precedentă.

a) Câte timbre cumpără în a cincea zi ?

b) În câte zile reușește să completeze clasorul ?

Clasa a X-a

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

1. Fie $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}$ şi

$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{2017\sqrt{2016}+2016\sqrt{2017}}$.

a) Arătați că $S_1 < \sqrt{2017}$;

b) Calculați S_2 ;

c) Demonstrați că $\left[\frac{S_1}{S_2}\right] = 44$.

2. Se dă numărul complex z = $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^6$.

a) Arătați că |z|=1

b) Calculaţi suma $S = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{2017}$;

c) Demonstrați că $2P = S^2$, unde $P = 1 \cdot z \cdot z^2 \cdot \ldots \cdot z^{2017}$.

3. Demonstrați:

a) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}<5$;

b) $\left(b^{\frac{\log_{100}a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100}b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}=a+b$, $a, b \in (0;\infty)-\{1\}$;

c) $\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_{13}3}<3<\frac{2}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_7 3}$.

4. Fie ecuaţia $x^2 - x + 1 = 0$.

a) Arătați că $\frac{1}{x_1^{2017}}+\frac{1}{x_2^{2017}}=1$;

b) Calculaţi $\frac{x_1^4+3x_1^3+2}{x_1^2}+\frac{x_2^4+3x_2^3+2}{x_2^2}$.

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

1. Fie $S_n=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$;

b) Calculaţi $\log_2 S_1+\log_2(\sqrt{3}-1)$;

c) Găsiţi cel mai mare număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care are loc inegalitatea $\log_2 S_n \le \frac{1}{2}$.

2. Fie $z_n=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculaţi z_{2017} ;

b) Calculaţi $\overline{z_n}$;

c) Arătați că $z_n \in \mathbb{R}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

3. Se consideră expresia $E(x)=\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{x^4}+\frac{1}{\log_{3x^2}3}+\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}}x^4-2\log_3\sqrt{3}$.

a) Calculaţi E(3) ;

b) Arătați că $E(x)=2\log_3 x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$;

c) Demonstrați că $E(x+1)-E(x)>0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

4. Fie ecuaţia $x^2 + mx + m + 6 = 0$.

a) Determinați valorile reale ale lui m astfel încât $\frac{1}{x_1+2}+\frac{1}{x_2+2}=\frac{1}{2}$;

b) Pentru $m=-2$ arătaţi că $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2$ este cub perfect .

Filieră tehnologică: profil tehnic

1. Se dau numerele a = $\frac{\log_2 10}{\log_{20} 2} - \frac{\log_2 5}{\log_{40} 2}$ şi b = $\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$ +1

a) Arătați că a = 2 ;

b) Calculați b ;

c) Demonstraţi că (lg a + lg b) + $(\lg a + \lg b)^2$ + … + $(\lg a + \lg b)^n$ = n, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se dă numărul complex $\propto = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

a) Arătați că $\propto^3 = 1$;

b) Aflaţi Re $\left(\frac{\propto -1}{\propto +1}\right)$;

c) Demonstraţi că $\propto$ este soluţie a ecuaţiei $x^{2017} + x^2 + 1 = 0$.

3. Fie expresia $E(x) = \frac{2}{4^x + 2}$, $x \in \mathbb{Q}$.

a) Calculați $E(-1)$ şi $E\left(\frac{1}{2}\right)$;

b) Demonstraţi că $E(1-x) + E(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{Q}$;

c) Folosind punctul b), calculaţi suma $E(-99) + E(-98) + \cdots + E(100)$

4. Fie ecuaţia $x^2 + mx + m + 6 = 0$.

a) Determinați valorile reale ale lui m astfel încât $x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)$;

b) Pentru m=-2 arătați că $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 5$ este pătrat perfect .

Filieră teoretică: profil uman - filologie şi ştiinţe sociale

1. Fie a = $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ şi b = $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

a) Aflaţi a + b şi a · b ;

b) Calculaţi $(a-b)^2$;

c) Arătați că $a^{-1} - b^{-1} + 5$ este pătrat perfect .

2. Calculaţi :

a) $\frac{4^n \cdot 3^{n+1} + 3^n \cdot 4^{n+1} + 13 \cdot 12^n}{2^n \cdot 6^{n+1} + 6^n \cdot 2^{n+1} + 12^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) $\log_{2017}\frac{1}{2} + \log_{2017}\frac{2}{3} + \ldots + \log_{2017}\frac{2016}{2017}$;

c) $(5+\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}}\right)$.

3. Fie expresia $E(x)=\log_{x+2}(16-x^2)$.

a) Determinaţi mulţimea D a elementelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care expresia E(x) este definită ;

b) Calculaţi $E(0)+2E(1) - \log_3 225$;

c) Aflaţi $x \in D$ pentru care $E(x) = 2$.

4. a) Se dă $2^x = 31$ şi $31^y = 64$. Aflaţi produsul $x \cdot y$;

b) Calculaţi $\frac{a}{b}$ dacă $a = \log_{x^4} 5$ şi $b = \log_x 125$.

Clasa a XI-a

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

1. Fie $\left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x & x-\frac{x^2}{2} \\ -x & x+1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbb{R}$;

b) Demonstraţi că $\det A^{2017}(1)$ este pătrat perfect ;

c) Calculați $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right) \cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right) \cdot \ldots \cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)$.

2. Se consideră determinantul $d(x\,;y) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & y \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât distanţa de la punctul $B(n\,;n+1)$ la dreapta determinată de punctele $A_1(x_1\,;3)$ şi $A_2(x_2\,;-1)$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $d(x\,;2) = 0$, $x_1 < x_2$, să fie $\sqrt{5}$;

b) Arătaţi că există $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ pentru care $d(x\,;y) = d(y\,;x)$;

c) Determinaţi cel mai mic număr natural y pentru care $d(x\,;y) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

3. a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m, n \in \mathbb{N}-\{0\}$;

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}\cdot e^{tg(x-1)} - \sqrt{6}}{\sin(x^2-1)}$;

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right), x \geq 2$;

4. Fie $f_a(x) = \frac{ax^2+(a-1)x}{x+1}$, $x \neq -1$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care f_a are asimptotă orizontală ;

b) Arătaţi că asimptotele oblice ale familiei $f_a(x)$ trec printr-un punct fix .

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & 4x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvaţi ecuaţia $\det A(x) = 2x - x^2$;

b) Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbb{R}$;

c) Calculaţi produsul $P = A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right) \cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right) \cdot \ldots \cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)$.

2. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n^2 - 1; 2n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculaţi aria triunghiului $A_0A_1A_2$;

b) Verificaţi dacă $(\exists)n \in \mathbb{N}$ pentru care aria triunghiului $A_oA_1A_n$ să fie egală cu 2 ;

c) În ce condiţii punctele A_n, A_m, A_p sunt coliniare ?

3. a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2}$;

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a\sqrt{x^2 - x + 1} + b\sqrt{x^2 + x + 1}\right)$ dacă $a + b = 0$, $a,b\in\mathbb{R}^*$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 5)}{\ln(x^8 - x + 3)}$.

4. Fie funcţia

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(a+1)x}{a^2x}, & x \in (-\infty; 0) \\ \ln(x + e^2), & x \in [0; e^2) \\ bx + 3, & x \in [e^2; \infty) \end{cases}$$

a) Determinați a, b $\in \mathbb{R}$ pentru care funcția f are limită în punctele 0 şi e^2 ;

b) Pentru $b = -1$ aflaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei .

Filieră tehnologică: profil tehnic

1. Se dau matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-x} \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvaţi ecuaţia $\det(2I_3 - A(x)) = 0$;

b) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitate $A^2(x) = A(x^2)$;

c) Calculați $[A(1)]^{2017}$.

2. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(1; 1) şi $B_n(n; n+1)$, $n \in \mathbb{N}$

a) Scrieţi ecuaţia dreptei B_1B_2 ;

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care aria triunghiului AB_1B_n este egală cu 2

c) Demonstraţi că punctele B_n, B_m, B_p sunt coliniare, $(\forall) n, m, p \in \mathbb{N}$ numere distincte .

3. a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+2x)^3 - (1+3x)^2}{x^2}$;

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} (a\sqrt{x^2 - x + 1} + b\sqrt{x^2 + x + 1})$ dacă $a + b = 0$, $a,b \in \mathbb{R}^*$;

c) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{3x + 1}$.

4. Fie funcţia

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(a+1)x}{a^2 x}, & x \in (-\infty; 0) \\ \ln(x + e^2), & x \in [0; e^2) \\ bx + 3, & x \in [e^2; \infty) \end{cases}$$

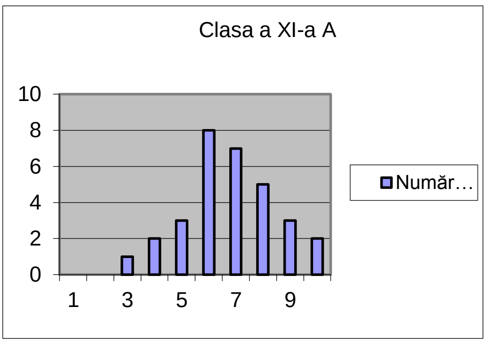
a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f are limită în punctele 0 şi e^2 ;

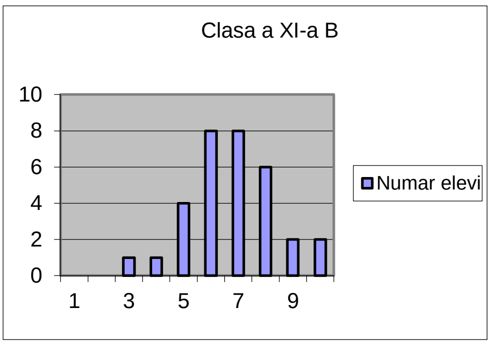
b) Pentru $b = -1$ aflaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei .

Filieră teoretică: profil uman - ştiinţe sociale

1. Într-un an de recesiune economică, produsul intern brut în unele ţări a scăzut cu 20%, iar în anul următor a scăzut cu 6%. În al treilea an, produsul intern brut a ajuns la acelaşi nivel ca înainte de recesiune. Cu cât a crescut produsul intern brut în al treilea an?

2. Histogramele de mai jos exprimă notele obţinute la un test de elevii din două clase.





a) Scrieţi seriile statistice corespunzătoare.

b) Care clasă este mai bună?

c) Care clasă este mai omogenă?

3. Pentru alcătuirea unei echipe de gimnastică ritmică sunt selecţionate după aptitudini, fete care au următoarele înălţimi: 1,75; 1,72; 1,74; 1,68; 1,73; 1,72; 1,75; 1,73; 1,74; 1,72; 1,69; 1,71; 1,71; 1,72; 1,75. Pentru ca echipa să fie cât mai omogenă se impun următoarele condiţii:

- media înălţimii echipei $\overline{x}$ să fie cuprinsă între $[1,65;1,75]$;
- abaterea medie pătratică $\sigma \leq 2,5cm$;
- proporţia de fete din afara intervalului $\left[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma\right]$ să nu depăşească 35%.

  Se poate forma echipa?

4. Un comerciant are portocale de calitatea I cu 5 lei kilogramul şi calitatea a II-a cu 3,80 lei kilogramul. Câte kilograme de portocale de calitatea I trebuie amestecate cu 10 kilograme de portocale de calitatea a II-a pentru a obţine un amestec pe care să-l vândă cu 4,70 lei kilogramul?

Clasa a XII-a
Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

1. Pe R se definește legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$, oricare ar fi $x, y \in R$ și funcția f : R→ R, f(x) = x – 1.

a) Arătați că $(1, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”.

b) Demonstrați că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in R$.

c) Rezolvați în R ecuația $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ 10\ ori\ x} = 1025$.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} / \ x \in R \right\}$.

a. Să se arate că $(M, \ \cdot)$ este monoid comutativ.

b. Să se determine elementele simetrizabile ale monoidului.

3. Se consideră funcția f : R →R, $f(x) = e^x(x^2 + x + a)$, $a \in R$ și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f.

a) Determinați a știind că F este crescătoare.

b) Determinați a știind că $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{F(x) - F(1)}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{4}$.

c) Determinați a știind că funcția F are două puncte de extrem de semne contrare.

4. Să se calculeze:

a) $\int xarctgxdx$, $\quad x \in R$

b) $\int \frac{x+x^3}{1+x^4} dx$, $\quad x \in R$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{arcsinx} dx$, $\quad x \in (-1, 1)$

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

1. Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^x \end{pmatrix},\ x \in R \right\}.$

a) Arătați că A(x)$\cdot A(y)$ $\in$ G, oricare ar fi A(x), A(y)$\in$ G.

b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordinul trei.

c) Arătați că funcția f : R $\to G$, f(x) = A(x) este izomorfism de la grupul (R,+) la grupul (G, $\cdot$)

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x * y = (x-4)(y-4)+4$$

a) Să se determine elementul neutru al legii.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

c) Să se determine două numere $a, b \in Q - Z$ astfel încât $a * b \in N$.

3. Se consideră funcţiile f : R → R, $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1$ și g : R → R, $g(x) = x^3$.

a) Să se calculeze $\int (f(x) - 3x^2 - 1)dx$.

b) Să se calculeze $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx,\quad x > 0$.

c) Să se determine primitiva F a funcției f care îndeplinește condiția F(-1) = 2017.

4. Se consideră funcţiile $f_n: R \to R,\ f_n(x) = x^n e^x$, n∈N.

a) Calculați $\int f_0(x)dx$ și $\int \big(f_0(x) + f_1(x)\big)dx$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f_3 este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f_4 este concavă pe intervalul (- 4, 0).

SOLUȚII

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ 25.02.2017

Clasa a V-a

Subiectul 1

$1, 2, 3, ..., 9 \to 9\ cifre$

$10, 11, 12, ..., 99 \to (99-9) \cdot 2 = 180\ (cifre)$

$\Rightarrow$ mai avem nevoie de $2017 - (9 + 180) = 1828$ (cifre).

Dar $1828 = 3 \cdot 609 + 1$

$100, 101, 102, ..., 708 \rightarrow 708 - 99 = 609$ (numere de trei cifre)

Cifra căutată este prima cifră a lui 709, adică 7.

Subiectul 2

a) Fie $A = 1 + 2 + ... + 2016 = \left[(1+2016)\cdot 2016\right] : 2 = 2017 \cdot 1008$

$\Rightarrow a = 2017 + 2017 \cdot 2016 = 2017(1+2016) = 2017^2$

$a = (2016+1)^2 = M_{2016} + 1^2 = M_{2016} + 1.$

În concluzie, restul împărțirii lui a la 2016 este 1.

b) $B = 1 + 3 + 5 + ... + x$, $1 = 2\cdot 1 - 1, 3 = 2 \cdot 2 - 1, ..., x = 2 \cdot 2017 - 1 = 4033$

$B = \left[(1+4033)\cdot 2017\right] : 2 = 2017 \cdot 2017 = 2017^2 \Rightarrow$ B este pătrat perfect.

c) Notăm numerele cu $a, a+1, a+2, ... a+2016$.

$a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+2016) = 2017^2$

$2017a + (1+2+...+2016) = 2017^2 \Rightarrow 2017a + \left[(1+2016)\cdot 2016\right] : 2 = 2017^2$

$2017a + 2017 \cdot 1008 = 2017^2 \,|: 2017 \quad \Rightarrow a + 1008 = 2017 \Rightarrow a = 1009$

$\Rightarrow 2017^2 = 1009 + 1010 + 1011 + ... + 3025$.

Subiectul 3

Anul nașterii lui Ștefan este $x^2 - x$ și $1901 \le x^2 - x \le 2000$

$43^2 = 1849 < 1900; 44^2 = 1936; 45^2 = 2025; 46^2 = 2116$

$44^2 - 44 = 1936 - 44 = 1892 < 1900$ nu convine

$45^2 - 45 = 2025 - 45 = 1980; 1900 < 1980 < 2000$ convine

$46^2 - 46 = 2116 - 46 = 2070 > 2000$ nu convine

Concluzie: Ștefan s-a născut în anul 1980.

Subiectul 4

$\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc}$ + a + b + c = 2016

Descompunem : 100a +10a+a+100b+10b+b+100c+10c+c+a+b+c= 2016

112a + 112b +112c = 2016

112(a+b+c) = 2016

a+b+c = 18

Cum a, b, c sunt cifre distincte şi nenule avem posibilităţile : 9+8+1=18, 9+7+2=18, 9+6+3=18, 9+5+4=18, 8+7+3=18, 8+6+4=18, 7+6+5=18. Pentru fiecare avem 6 cazuri, deci în total sunt 7·6 =42 numere.

Clasa a VI-a

Subiectul 1

Deoarece restul este mai mic decât împărțitorul și împărțitorul are două cifre, deducem că împărțitorul este 99. Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem $\overline{aaa8} = 99 \cdot c + 98$. Adunând 1 în fiecare parte a egalității avem $\overline{aaa9} = 99 \cdot c + 99 = 99 \cdot (c+1)$.

De aici deducem că $11 \mid \overline{aaa9} = a \cdot 1100 + \overline{a9}$. Cum $11 \mid a \cdot 1100 \Rightarrow 11 \mid \overline{a9}$, de unde avem $a = 9$. Numărul căutat este 9998.

Subiectul 2

a) Fiecare din cele două numere este format din câte o sumă ce conține 1997 termeni. Comparând termenii celor două sume astfel: primul cu primul, al doilea cu al doilea, ... și ultimul cu ultimul obținem $1=1,\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}<\frac{2}{3},\ \frac{1}{4}<\frac{3}{4},\ \dots\ \frac{1}{1997}<\frac{1996}{1997}.$

Observăm că primii doi termeni ai celor două sume sunt egali, iar începând cu al treilea fiecare termen al primei sume este mai mic decât termenul corespunzător al celei de a doua. Prin însumare, membru cu membru, obținem $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{1997}<1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots+\frac{1996}{1997} \Leftrightarrow a<b.$

b) $$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{1997}+1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots+\frac{1996}{1997}}{2}=$$

$$=\frac{(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{1997}+\frac{1996}{1997}\right)}{2}=$$

$$=\frac{2+\overbrace{1+1+1+\dots+1}^{de\,1996\,ori}}{2}=\frac{1998}{2}=999$$

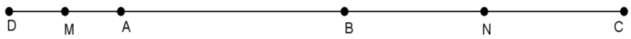
c) Din $a<b$ prin adunarea lui a în fiecare membru a inegalității obținem $2a<a+b.$ Împărțind la 2 ultima inegalitate avem $a<\frac{a+b}{2}=999.$

Din $a<b$ prin adunarea lui b în fiecare membru a inegalității obținem $a+b<2b.$ Împărțind la 2 ultima inegalitate avem $\frac{a+b}{2}<b \Leftrightarrow b>999.$

Subiectul 3

Avem $AB+BC=15cm \ \big|\cdot 2 \Leftrightarrow 2AB+2BC=30cm$, (1). Cum $3\cdot AB=2\cdot BC$, relația (1) devine $2AB+3AB=30 \Leftrightarrow 5AB=30 \Leftrightarrow AB=6cm$. De unde $BC=9cm$.

Cazul I Ordinea punctelor $D-A-B-C$



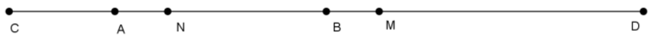
Avem $AD = BD - AB = 9cm - 6cm = 3cm$.

Fie $M \in [AD], AM = MD = \frac{AD}{2} = \frac{3}{2} = 1,5cm$ și $N \in [BC]$,

$BN = NC = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2} = 4,5cm$.

$MN = MA + AB + BN = 1,5cm + 6cm + 4,5cm = 12cm$

Cazul II Ordinea punctelor $C - A - B - D$



Avem $AD = AB + BD = 6cm + 9cm = 15cm$.

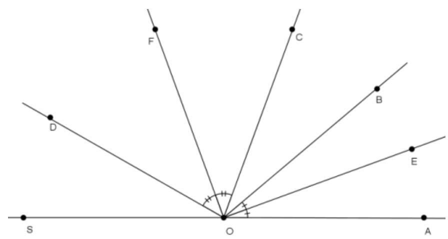
Fie $M \in [AD], AM = MD = \frac{AD}{2} = \frac{15}{2} = 7,5cm$ și $N \in [BC]$,

$BN = NC = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2} = 4,5cm.$

Din $BC = BD = 9cm$ avem $AC = BC - AB = 9cm - 6cm = 3cm,$

$AN = NC - AC = 4,5cm - 3cm = 1,5cm$ si $MN = AM - AN = 7,5cm - 1,5cm = 6cm.$

Subiectul 4



a) Din $[OE$ bisectoarea $\sphericalangle AOB$ avem

$m(\sphericalangle AOE) = m(\sphericalangle EOB) = \frac{m(\sphericalangle AOB)}{2} = x$

$\Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 2x.$

Din $[OF$ bisectoarea $\sphericalangle COD$ avem

$m(\sphericalangle COF) = m(\sphericalangle FOD) = \frac{m(\sphericalangle COD)}{2} = y$

$\Rightarrow m(\sphericalangle COD) = 2y.$

Cum $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt suplementare avem:

$m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOD) = 180^0$

$\Leftrightarrow m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^0$

$\Leftrightarrow\ m(\sphericalangle AOB) + 2m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^0$

$\Leftrightarrow\ 2x + 2m(\sphericalangle BOC) + 2y = 180^0 |: 2$

$\Leftrightarrow\ x + m(\sphericalangle BOC) + y = 90^0$

$\Leftrightarrow\ m(\sphericalangle EOB) + m(\sphericalangle BOC) +\ m(\sphericalangle COF) = 90^0.$

Cum $m(\sphericalangle EOF) = m(\sphericalangle EOB) + m(\sphericalangle BOC) +\ m(\sphericalangle COF)$ avem $m(\sphericalangle EOF) = 90^0.$

b) Avem [OS și [OA semidrepte opuse de unde

$m(\sphericalangle AOS) = 180^0 \Leftrightarrow$

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle DOS) = 180^0, (1).$

Din a) avem $m(\sphericalangle AOB)+2m(\sphericalangle BOC)+m(\sphericalangle COD)=180^0$, (2). Scăzând membru cu membru cele două egalități obținem $m(\sphericalangle DOS)-m(\sphericalangle BOC)=0^0$ de unde avem $m(\sphericalangle DOS)=m(\sphericalangle BOC)$.

Clasa a VII-a
Subiectul 1

$$p=n\cdot\left[\left({}^{2)}1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left({}^{3)}1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left({}^{n)}1+\frac{1}{n}\right)-\left({}^{2)}1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left({}^{3)}1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left({}^{n)}1-\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=n\cdot\left[\left(\frac{2+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)-\left(\frac{2-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3-1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$=n\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)}{n}\right)$$

$$=n\cdot\left(\frac{{}^{n)}n+1}{2}-\frac{{}^{2)}1}{n}\right)=n\cdot\frac{n\cdot(n+1)-2}{2n}=\frac{n\cdot(n+1)-2}{2}$$

Cum $n\in\mathbb{N}^*$ avem n și $n+1$ numere consecutive. Știm că produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2 de unde rezultă $n\cdot(n+1)\,\vdots\,2$ și cum $2\,\vdots\,2$ avem $n\cdot(n+1)-2\,\vdots\,2$.

Deducem că $p=\dfrac{n\cdot(n+1)-2}{2}\in\mathbb{N}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul 2

Din $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}2a=b+c\\2b=a+c\\2c=a+b\end{cases}$. Se deduce că $a=b=c$.

Avem că:

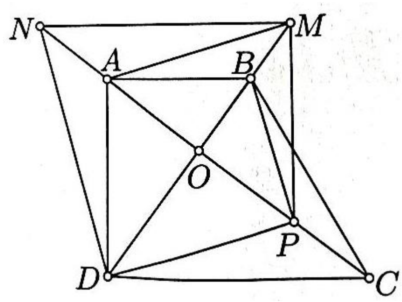
a) $$\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}}=\sqrt{\frac{2a}{6a}+\frac{2a}{6a}+\frac{2a}{6a}}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{3}}=1\in\mathbb{Q}.$$

b) $$\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}}=\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

Subiectul 3

a) Din $MP\perp DC$ și $AD\perp DC$ rezultă $AD\parallel MP$ și atunci $\sphericalangle ADM\equiv\sphericalangle PMD$, (1), ca unghiuri alterne interne.

Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Din ipoteză avem $DM \perp AP \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle POM) = 90^0$, (2). Cum punctul M este simetricul punctului D față de punctul O avem $[DO] \equiv [OM]$, (3). Din (1), (2) și (3) avem $\Delta AOD \equiv \Delta POM$ (CU) de unde rezultă că $[AO] \equiv [PO]$, (4). Din (3) și (4) avem $MADP$ paralelogram și datorită faptului că $DM \perp AP$, $MADP$ romb.



b) Punctul N este simetricul punctului C față de punctul O de unde avem $[NO] \equiv [OC]$ (5). Din (3) și (5) avem $DCMN$ paralelogram de unde avem $MN \parallel DC$.

În ΔDMN avem NO înălțime din ipoteză, iar AD înălțime deoarece
$\left.\begin{matrix} AD \perp DC \\ DC \parallel MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp MN$ Cum $NO \cap AD = \{A\}$ avem A ortocentrul ΔDMN, rezultă MA este înălțime, de unde $MA \perp ND$.

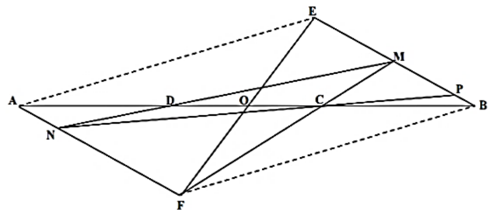
Din $MADP$ romb avem $[AD] \equiv [DP] \Rightarrow \Delta ADP$ isoscel și atunci $m(\sphericalangle DAP) = m(\sphericalangle DPA)$, (6).Cum MD este mediatoarea $[AP]$ și $B \in MD$ avem $[BA] \equiv [BP] \Rightarrow \Delta BAP$ isoscel și atunci $m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle BPA)$, (7). Folosind (6) și (7) avem:

$$m(\sphericalangle DPB) = m(\sphericalangle DPA) + m(\sphericalangle BPA) = m(\sphericalangle DAP) + m(\sphericalangle PAB) = m(\sphericalangle DAB) = 90^0.$$

De aici concluzia $BP \perp DP$.

Subiectul 4

a) Din O mijlocul segmentului $[AB]$ avem $[AO] \equiv [OB]$ iar din F simetricul punctului E față de punctul O avem $[EO] \equiv [OF]$ de unde deducem că $AFBE$ este paralelogram (diagonalele se înjumătățesc).



În ΔEFB avem $[BO]$ mediană, $C \in [BO]$ și $BC = \frac{1}{3} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot 2BO = \frac{2}{3} BO$ de unde C este centru de greutate.

Din $AN \parallel PB$ avem $\Delta PBC \sim \Delta NAC \Rightarrow \frac{PB}{NA} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, (1).

Din $AN \parallel MB$ avem $\Delta AND \sim \Delta BMD \Rightarrow \frac{AN}{BM}=\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$, (2).

Din $[FM]$ mediană în ΔEFB avem $\frac{MB}{EB}=\frac{1}{2}$, (3).

Înmulțind relațiile (1), (2) și (3) avem $\frac{BP}{NA}\cdot\frac{AN}{MB}\cdot\frac{MB}{EB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{BP}{EB}=\frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow EB=8BP$.

b) În ΔECB avem $\frac{BP}{EB}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{A_{PCB}}{A_{ECB}}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow A_{PCB}=\frac{1}{8}\cdot A_{ECB}$, (4). Din C centru de greutate în ΔEFB avem $A_{ECB}=\frac{1}{3}\cdot A_{EFB}$, (5).Avem $\Delta BEF\equiv\Delta AFE$ de unde

$A_{BEF}=A_{AFE}\Rightarrow A_{BEF}=\frac{1}{2}A_{AFBE}$, (6)

Din relațiile (4), (5) și (6) avem

$A_{PCB}=\frac{1}{8}\cdot A_{ECB}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot A_{EFB}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A_{AFBE}\Leftrightarrow A_{PCB}=\frac{1}{48}\cdot A_{AFBE}$ de unde deducem $A_{AFBE}=48A_{PBC}$.

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Raţionalizând numitorii obţinem:

$$x=\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{2017}-\sqrt{2016}\right)\left(\sqrt{2017}+1\right)$$

$$x=\left(\sqrt{2017}-1\right)\left(\sqrt{2017}+1\right)=2017-1=2016$$

x = 2016, care este număr natural

b) Relaţia este echivalentă cu:

$$\sqrt{(x-2)^2+2000^2}+\sqrt{(y-3)^2+17^2}\geq 2000+17=2017$$

cu egalitate pentru x = 2 şi y = 3.

Subiectul 2

Avem : $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2zx+2yz \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2zx+2yz=\frac{9}{4}$

$\frac{3}{4}+2xy+2zx+2yz=\frac{9}{4}$

$xy+zx+yz=\frac{3}{4}\Rightarrow xy+zx+yz=x^2+y^2+z^2 |\cdot 2$

$2xy+2zy+2xz=2x^2+2y^2+2z^2$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

$y-z=0 \Rightarrow y=z$

$z-x=0 \Rightarrow z=x$

x = y = z , dar x + y + z = $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ x = y = z = $\frac{1}{2}$

Subiectul 3

AA'$\perp$(ABCD) , CC'$\perp$(ABCD) $\Rightarrow$ AA' ∥ CC' , dar [AA']$\equiv$ [CC'] $\Rightarrow$ AA'C'C paralelogram $\Rightarrow$

AC ∥ A'C' , AC$\subset$ (AB'C) , A'C' $\subset$ (A'DC') (1)

BB'$\perp$ (ABCD), CC'$\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ BB' ∥ CC' , dar [BB']$\equiv$[CC'] $\Rightarrow$ BB'C'C paralelogram $\Rightarrow$

B'C' ∥ BC , B'C'= BC ,

Dar BC=AD, BC ∥ AD $\Rightarrow$ B'C' ∥ AD, B'C' =AD $\Rightarrow$ ADC'B' paralelogram $\Rightarrow$

AB' ∥ C'D , AB'$\subset$ (AB'C), C'D$\subset$ (A'DC') (2)

Din (1) + (2) $\Rightarrow$ (AB'C) ∥ (A'DC').

Subiectul 4

Diagonala paralelipipedului este $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}$

$$A=\sqrt{a\cdot 1}(b+c)+\sqrt{b\cdot 1}(c+a)+\sqrt{c\cdot 1}(a+b)\le \frac{a+1}{2}(b+c)+\frac{b+1}{2}(c+a)+\frac{c+1}{2}(a+b)$$

$=ab+bc+ca+a+b+c.$ Folosind inegaliatea mediilor $(m_{geo}\le m_{aritm}\le m_{patratica})$

obţinem: $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2=3$ si $\frac{a+b+c}{3}\le \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=1$

$\Rightarrow A\le 3+3=6$

Clasa a IX-a

Subiectul 1

a) $|x+a|+|x-a^2|=|x+a|+|a^2-x|\ge |x+a+a^2-x|=a+a^2$.

b) Membrul stâng al relației se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}(|x+k|+|x-k^2|)\ge \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Subiectul 2

Deoarece $(a_k-2a_{k-1})^2\ge 0$, rezultă că $\frac{a_k^2}{a_{k-1}}\ge 4(a_k-a_{k-1}), \forall a_{k-1}>0, \forall k\in \mathbb{N}, k\ge 2$.

Prin adunarea a $n-1$ inegalități, obținute pentru $k\in\{2,3,\dots,n\}$, vom avea

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k^2}{a_{k-1}}\ge 4\left(\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})\right)$$

Dar $4\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = 4(a_n - a_1) = 4(2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 4$

Folosind ipoteza, rezultă că toate inegalitățile precedente devin egalități, adică $a_k = 2a_{k-1}$. Rezultă că $a_2 = 2, a_3 = 2^2, \dots, a_{n-1} = 2^{n-1}$.

Subiectul 3

a) Egalitatea este relația lui Sylvester.

Fie D punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului, iar P mijlocul laturii BC. Patrulaterul $BHCD$ este paralelogram, pentru că laturile opuse sunt paralele, deci HD și BC au același mijloc, punctul P. Din triunghiul AHD, se obține $\overline{AH} = 2\overline{OP}$ și apoi

$\overline{OB} + \overline{OC} = 2\overline{OP}$. Rezultă că $\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH} - \overline{OA}$, iar în final $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH}$.

b) Aplicăm relația de la $a)$ în triunghiurile ACD și ABC. Se obține $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OH_1}$ și $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH_2}$. Prin scădere, avem $\overline{OH_1} - \overline{OH_2} = \overline{OD} - \overline{OB}$, sau $\overline{H_2H_1} = \overline{BD}$. Dar punctele B, D, H_1 și H_2 sunt pe aceeași dreaptă, deci $\overline{BH_2} = \overline{DH_1}$.

Subiectul 4

a) Fie $S = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2a_3}{a_2+a_3} + \dots + \frac{a_na_1}{a_n+a_1}$.

Ţinând cont de inegalitatea mediilor $m_h \le m_g \le m_a$, obţinem:

$$S \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \dots + \sqrt{a_na_1}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_2+a_3}{2} + \dots + \frac{a_n+a_1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\sqrt{a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \sqrt{a_2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots +$$
$$\sqrt{a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})} =$$

$$= \sqrt{a_1(1-a_1)} + \sqrt{a_2(1-a_2)} + \dots + \sqrt{a_n(1-a_n)} \le$$

$$\le \frac{a_1 + 1 - a_1}{2} + \frac{a_2 + 1 - a_2}{2} + \dots + \frac{a_n + 1 - a_n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{de\ n\ ori} = \frac{n}{2}$$

Clasa a X-a

Subiectul 1

Dacă $a = 0 \Rightarrow x = 0$

Presupunem $a \neq 0$. C.E : $\begin{cases} 1 + ax \ge 0 \\ 1 - ax \ge 0 \end{cases}$.

Ecuaţia este echivalentă cu $2\sqrt{1 - a^2x^2} = 2 - x^2$.

Notând $x^2 = t \Rightarrow t^2 + 4t(a^2 - 1) = 0$.

Rezultă $x^2 = 4(1 - a^2)$, deci $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{1 - a^2}$
Se verifică C.E., adică $-1 \leq ax_{1,2} \leq 1$.

Subiectul 2

Dacă $y = 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{f(1)}\right) = \frac{x}{f(x)}$. Notăm $f(1) = a \Rightarrow f\left(\frac{x}{a}\right) \cdot f(x) = x, (\forall)x > 0$ (1).
Pentru $x = a$, din relația (1) avem că $f(a) = 1$.
Dăm în relația din enunț valorile $x = \sqrt{a}$, $y = a$ și obținem că $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, iar dacă $y = a \Rightarrow f(x) \cdot f(x\sqrt{a}) = x$, de unde pentru $x = 1 \Rightarrow f(1) \cdot f(\sqrt{a}) = 1 \Rightarrow a = 1$
Atunci din relația (1) avem $f^2(x) = x$, cu soluția unică $f(x) = \sqrt{x}$,$(\forall)x > 0$.

Subiectul 3

Notăm $\log_2 x = a,\ \log_2 y = b$ și condițiile devin $\begin{cases} 2^a + 2^b \leq 2^{a+b} \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases}$.
Din inegalitatea mediilor avem $\frac{2^a+2^b}{2} \geq \sqrt{2^a \cdot 2^b}$, deci $2^{a+b} \geq 2^a + 2^b \geq 2^{1+\frac{a+b}{2}}$, de unde obținem că $a + b \geq 2$.
Dar $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, deci $(a + b)^2 \leq 4$, de unde $-2 \leq a + b \leq 2$.
Atunci $a + b = 2$ și $a^2 + b^2 = 2$. Se obține $a = b = 1$ și atunci $x = y = 2$.

Subiectul 4

Notăm $P(z), B(3i)$ și $A(4)$. Atunci $PB = |z - 3i|,\ BA = |3i - 4| = 5, PA = |z - 4|$.
Conform enunțului, $PB + PA = AB \Rightarrow P \in [AB]$.
Deci $\min|z| = \min_{P\in[AB]} OP$, care se obține pentru $OP \perp AB$.
Obținem că $|z|_{min} = \frac{12}{5}$.

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Din $A^2 = O_3 \Rightarrow a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} = 0$ (1)
$a_{22}^2 + a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} = 0$ (2)
și $a_{33}^2 + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23} = 0$ (3)
Din relațiile (1),(2),(3) $\Rightarrow a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31} \leq 0$ (4)
Relația de demonstrat devine:
$a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31} \leq -2 \cdot (a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31})$,
care e adevărată datorită relației (4).

Subiectul 2

Din teorema lui Heine, funcția f nu are limită în punctul $x_0 = 1$ dacă există două șiruri $(x_n)_{n\geq 1}$,$(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n \to 1, y_n \to 1$ și $f(x_n) \to L_1, f(y_n) \to L_2$ cu $L_1 \neq L_2$.
Fie $x_n = \frac{n}{n+1} \to 1$ și $f(x_n) = tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = -ctg\frac{\pi}{2n} \to -\infty$.
Fie $y_n = \frac{\pi}{2 \cdot arctg\, n} \to 1$, iar $f(y_n) = tg\frac{\pi}{2y_n} = tg(arctg\, n) = n \to \infty$.

Subiectul 3

Din $A^2 - trA \cdot A + detA \cdot I_2 = O_2$, avem $det(A^2 + (detA + x)I_2) = det(trA \cdot A + xI_2)$.

Dar $det(trA \cdot A + xI_2) = x^2 + (trA)^2 \cdot x + (trA)^2 \cdot detA$.

Relația din enunț este echivalentă cu

$x^2 + (trA)^2 \cdot x + (trA)^2 \cdot detA \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$,

de unde obținem că $\Delta = (trA)^4 - 4(trA)^2 \cdot detA \leq 0$.

Subiectul 4

$x_n > 0, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + x_n + 1}} < 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ descrescător.

Trecem la limită în relația de recurență şi $\Rightarrow x_n \to 0$.

Fie $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{x_n}}$. Atunci $L^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$ și folosind teorema Stolz-Cesaro se obține $L^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{x_n^2 + x_n + 1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_n} = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + x_n + 1} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x_n^2 + x_n + 1} + 1}{x_n + 1} = 2.$$

Clasa a XII-a

Subiectul 1

$I = \int_0^{\pi} \frac{(x+1)sinx}{2 - sin^2 x} dx = I_1 + I_2$, unde $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{xsinx}{2 - sin^2 x} dx$ și $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{sinx}{2 - sin^2 x} dx$.

Avem: $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{xsinx}{2 - sin^2 x} dx = -\int_0^{\pi} (\pi - x - \pi) \frac{sin(\pi - x)}{2 - sin^2(\pi - x)} dx =$

$= -\int_0^{\pi} (\pi - x) \frac{sin(\pi - x)}{2 - sin^2(\pi - x)} dx + \pi \int_0^{\pi} \frac{sin(\pi - x)}{2 - sin^2(\pi - x)} dx = -\int_0^{\pi} t \frac{sint\, dt}{2 - sin^2 t} + \pi \int_0^{\pi} \frac{sinx}{2 - sin^2 x} dx =$

$= -I_1 + \pi I_2$.

Deci $I_1 = \frac{\pi}{2} I_2$,

Dar $I_2 = -\int_0^{\pi} \frac{(cos\,x)' dx}{1 + cos^2 x} = -arctg(\cos x)\Big|_0^{\pi} = -arctg(-1) + arctg(1) = \frac{\pi}{2}$.

Deci, $I = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$.

Subiectul 2

Înmulţind egalitatea dată cu e^{-x} obţinem $f(x)e^{-x} - F(x)e^{-x} = |x - 1|e^{-x}$, care se mai poate scrie $(F(x)e^{-x})' = \begin{cases} (-x+1)e^{-x}, x < 1 \\ (x-1)e^{-x}, x \geq 1 \end{cases}$

Integrând, ajungem la $F(x)e^{-x} = \begin{cases} xe^{-x} + c_1, x < 1 \\ -xe^{-x} + c_2, x \geq 1 \end{cases}$.

Condiţia de continuitate este: $c_2 = \frac{2}{e} + c_1$.

Obţinem: $F(x) = \begin{cases} x + ce^x, x < 1 \\ -x + \left(\frac{2}{e} + c\right) e^x, x \geq 1 \end{cases}$, care prin derivare conduce la

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ce^x, x < 1 \\ -1 + \left(\frac{2}{e} + c\right) e^x, x \geq 1 \end{cases}$$

Subiectul 3

Pentru x = e obţinem $f(f\ (y)) = y\, f\ (e),\ \forall\, y \in G$. Vom demonstra că f este injectivă.

Fie y_1, $y_2 \in G$ cu $f(y_1) = f(y_2)$ de unde $f(f(y_1)) = f(f(y_2))$, deci $y_1 f(e) = y_2 f(e)$ în $(G,\cdot)$, care este grup, din care se obține $y_1 = y_2$, deci f este injectiva.

Pentru y = e în relaţia din enunţ, rezultă că $f(x\ f(x)) = f(x^2)$, iar din injectivitatea lui f obţinem $x\ f(x) = x^2$, deci $f(x) = x$, $\forall\, x \in G$.

În aceste condiţii, egalitatea din ipoteza devine $x^2 y = y\, x^2$, $\forall\, x, y \in G$.

Pentru $x \rightarrow x^{n+1}$ se obţine: $x^{2n+2} y = y\, x^{2n+2}$, $\forall\, x, y \in G$ şi cum $x^{2n+1} = e$, obţinem $x\, y = y\, x$, $\forall\, x, y \in G$.

Subiectul 4

a) Dacă $x \neq e$, atunci ord(x) = 2, dar $|G| = 2015 \Rightarrow 2|2015$ contradicție $\Rightarrow x = e$.

b) Fie e elementul neutru al lui G și e' elementul neutru al lui G'

Dacă $f: G \rightarrow G'$ morfism de grupuri, atunci $\underbrace{f(x) \circ f(x) \circ ... \circ f(x)}_{2015\ ori} = e'$

$$\Rightarrow e' = f(e) = f(\underbrace{x * x * ... * x}_{2016\ ori}) = \underbrace{f(x) \circ f(x) \circ ... \circ f(x)}_{2016\ ori}$$

$\Rightarrow e' = e' \circ f(x) \Rightarrow f(x) = e'$.

Soluții la Concursul Naţional de Matematică Aplicată *Adolf Haimovici*" Etapa pe centru – 24.02.2017

Clasa a IX-a

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

a) $a_n = 3n + 2$

b) $a_n = 101 \Rightarrow n = 33$

c) $a_{2n+2} - a_{2n} = 6$, $\forall\, n \geq 1$ deci șirul este progresie aritmetică cu rația 6

$a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 7750$

SUBIECTUL al II -lea

a) Se verifică prin calcul direct

b) $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k^3}) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k} = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{4}$

SUBIECTUL al III –lea

a) $|x-1| \geq 0$, oricare ar fi $x \in R$, $=> |x-1| \neq 0$ deci $x \neq 1$

$|x+4| < 7$, $x \in (-11, 3) - \{1\}$

b) a = $\frac{n}{n+1}$

$\{a\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{n}{n+1}$

n = 999

c) Se aplică inegalitatea mediilor: $a + 1 \geq 2\sqrt{a}$, $b + 2 \geq 2\sqrt{2b}$, $c + 8 \geq 2\sqrt{8c}$

$(a+1)(b+2)(c+8) \geq 32$

SUBIECTUL al IV –lea

Notează cele 5 rate cu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 900$

$a_1 + a_2 = \frac{1}{4}(a_3 + a_4 + a_5)$

Determină $a_1 = 60$ și r = 60

Găsește ratele: 60, 120, 180. 240, 300 lei

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

SUBIECTUL I

a) $m_a = 7$, $m_g = 1$

b) $a^2 + b^2 - ab = 193$

c) $7 + 4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$, $7 - 4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = 4 \in N$

SUBIECTUL al II -lea

a) $44^2 < 2017 < 45^2 \;=>\; [\sqrt{2017}] = 44$

$\left\{-\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$

$[\sqrt{2017}] + 3\left\{-\frac{1}{3}\right\} = 46$

b) $x \in \{-3,1,5,9\}$

c) $x < a < 0$ E(x) = 1

SUBIECTUL al III –lea

a) $a_1 = 15$, $r = -2$

b) $a_{2017} = -4017$ $S_{2017} = -2001 \cdot 2017$

c) $a_n = -185 \;=>\; n = 101$

Da este termen al progresiei

SUBIECTUL al IV –lea

a) $b_1 = 4,\ q = 3,\ b_5 = 324$

b) $S_n = 4372 \ => \ 3^n = 2187 \ => n = 7,$ 7 zile

Filieră tehnologică: profil tehnic

SUBIECTUL I

a) a = $\frac{1}{2}$

b= 2

a < b

b) $m_a = \frac{5}{4},\ m_g = 1$

SUBIECTUL al II -lea

a) $a_1 = 1,\ r = 2$

$a_{2017} = 4033$

$S_{2017} = 2017^2$

b) q = 2 , $b_7 = 192$

c) $a_3 = 5,\ b_3 = 12,\ a_7 = 13$

$5^2 + 12^2 = 13^2$.

Conform reciprocei Teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic

SUBIECTUL al III –lea

a) $44^2 < 2017 < 45^2 \ => \ [\sqrt{2017}] = 44$

$\left\{-\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$

$[\sqrt{2017}] + 3\left\{-\frac{1}{3}\right\} = 46$

b) $x \in \{-3,1,5,9\}$

c) E(a) = 3

SUBIECTUL al IV –lea

a) $b_1 = 4,\ q = 3,\ b_5 = 324$

b) $S_n = 4372 \ => \ 3^n = 2187 \ => n = 7,$ 7 zile

Filieră teoretică: profil umanist-filologie şi ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

a) a = $\frac{1}{2}$

b= 2

a < b

b) $m_a = \frac{5}{4},\ m_g = 1$

SUBIECTUL al II -lea

a) A=$[-4,1]$, $B = (-1, \infty)$

b) $A \cup B = [-4, +\infty)$, $A \cap B = (-1,1]$

$A - B = [-4, -1]$, $C_R(A) = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

c) A$\cap Z = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$, S = - 9, P = 0

SUBIECTUL al III –lea

a) $a_1 = 1,\ r = 2$

$a_{2017} = 4033$

$S_{2017} = 2017^2$

b) q = 2 , $b_7 = 192$

c) $a_3 = 5,\ b_3 = 12,\ \ a_7 = 13$

$5^2 + 12^2 = 13^2$.

Conform reciprocei Teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic

SUBIECTUL al IV –lea

a) $b_1 = 4,\ q = 3,\ \ b_5 = 324$

b) $S_n = 4372\ \ => 3^n = 2187\ \ => n = 7$, 7 zile

Clasa a X-a

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

a) $S_1 = \sqrt{2017} - 1 < \sqrt{2017}$

b) Se amplifică fiecare fracţie cu expresia conjugată a numitorului şi se foloseşte relaţia $(k + 1)^2k - k^2(k+1) = k(k+1)$

$S_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2017}}$

c) $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{2017} \in (44; 45)$, rezultă că $\left[\frac{S_1}{S_2}\right] = 44$

SUBIECTUL al II -lea

a) Se aplică proprietăţile modulului

b) z = $-$ i

S = 1 – i

c) P = $-$ i

Se verifică $S^2 = 2P$

SUBIECTUL al III –lea

a) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} < \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + 3}} = \sqrt{6 + 3} = 3$

$\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}} < \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{8}}} = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + 2}} = \sqrt[3]{6 + 2} = 2$

Prin însumarea celor două relaţii se obţine inegalitatea cerută

b) $\left(b^{\frac{\log_{100}a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100}b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)} = \left(b^{\frac{\frac{\lg a}{2}}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\frac{\lg b}{2}}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)} = (ab)^{\log_{ab}(a+b)} = a + b$

c) Inegalitatea este echivalentă cu $\log_3 26 < \log_3 3^3 < \log_3 28$, adică $26 < 27 < 28$

SUBIECTUL al IV –lea

a) $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$ şi $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = 1$

$\frac{1}{x_1^{2017}} + \frac{1}{x_2^{2017}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$

b) $x_1^3 = -1$, $x_2^3 = -1$, $x_1^2 + x_2^2 = -1$

$\frac{x_1^4 + 3x_1^3 + 2}{x_1^2} + \frac{x_2^4 + 3x_2^3 + 2}{x_2^2} = 0$

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

SUBIECTUL I

a) Se ridică egalitatea la pătrat

b) $S_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

$\log_2 S_1 + \log_2(\sqrt{3} - 1) = \frac{1}{2}$

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k + \sqrt{4k^2 - 1}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})$

Se obţine $S_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2n+1} - 1)$

Inegalitatea $\log_2 S_n \leq \frac{1}{2}$ este echivalentă cu $n \leq 4$,

deci cel mai mic număr natural este $n = 4$

SUBIECTUL al II -lea

a) Se amplifică fracţiile cu expresia conjugată a numitorului şi se obţine

$z_{2017} = i^{2017} + (-i)^{2017} = 0$

b) $\overline{z_n} = z_n$

c) $\overline{z_n} = z_n \Rightarrow z_n \in \mathbb{R}$

SUBIECTUL al III –lea

a) $E(3) = 2$

b) Se scriu logaritmii în baza 3: $E(x) = \frac{1}{2}(-4\log_3 x) + \log_3(3x^2) + 2\log_3 x - 1$

Se aplică proprietăţile logaritmilor

Finalizare

c) $\log_3(x+1) > \log_3 x \Leftrightarrow 2\log_3(x+1) > 2\log_3 x \Leftrightarrow E(x+1) > E(x)$

SUBIECTUL al IV –lea

a) $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = m + 6$

$\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 x_2 = 4$

$m + 6 = 4 \Rightarrow m = -2$

b) $S = 2, P = 4$

$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = 1 = 1^3$

Filieră tehnologică: profil tehnic

SUBIECTUL I

a) $a = \log_2 10 \cdot \log_2 20 - \log_2 5 \cdot \log_2 40 = \log_2(2 \cdot 5) \cdot \log_2(2^2 \cdot 5) - \log_2 5 \cdot \log_2(2^3 \cdot 5)$

Se aplică proprietăţile logaritmilor

Finalizare

b) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 2$ şi $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$

$b = 5$

c) $\lg a + \lg b = \lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$

Finalizare

SUBIECTUL al II -lea

a) Se verifică prin calcule

b) $\frac{\propto -1}{\propto +1} = \sqrt{3}$ i

Re $\frac{\propto -1}{\propto +1} = 0$

c) $\propto^3 = 1 \Leftrightarrow (\propto -1)(\propto^2 + \propto + 1) = 0 \Rightarrow \propto^2 + \propto + 1 = 0 \ (\propto -1 \neq 0)$

$\propto^{2017} + \propto^2 + 1 = \propto + \propto^2 + 1 = 0$

SUBIECTUL al III –lea

a) $E(-1) = \frac{8}{9}$ şi $E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

b) $E(1 - x) = \frac{2}{4^{1-x} + 2} = \frac{2 \cdot 4^x}{2(2 + 4^x)} = \frac{4^x}{2 + 4^x}$

Finalizare

c) Suma are 200 de termeni

$E(-99) + E(100) = 1$

$E(-98) + E(99) = 1$

…………………………

$E(-1) + E(0) = 1$

Prin însumarea egalităţilor se obţine $S = 100$

SUBIECTUL al IV –lea

a) $x_1 + x_2 = -m, \ x_1 x_2 = m + 6$

$m + 6 = -2m \Rightarrow m = -2$

b) $x_1 + x_2 = 2, \ x_1 x_2 = 4$

$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 5 = 4 = 2^2$

Filieră teoretică: profil uman - filologie şi ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

a) $a = \sqrt{5} + 2$ şi $b = \sqrt{5} - 2$

$a + b = 2\sqrt{5}$ şi $a \cdot b = 1$

b) $(a - b)^2 = 16$

c) $a^{-1} = \sqrt{5} - 2$ şi $b^{-1} = \sqrt{5} + 2$

$a^{-1} - b^{-1} + 5 = 1 = 1^2$

SUBIECTUL al II -lea

a) $$\frac{4^n \cdot 3^{n+1} + 3^n \cdot 4^{n+1} + 13 \cdot 12^n}{2^n \cdot 6^{n+1} + 6^n \cdot 2^{n+1} + 12^{n+1}} = \frac{4^n \cdot 3^n(3+4+13)}{2^n \cdot 6^n(6+2+12)} = \left(\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 6}\right)^n = 1$$

b) $\log_{2017}\frac{1}{2} + \log_{2017}\frac{2}{3} + \ldots + \log_{2017}\frac{2016}{2017} = \log_{2017}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2016}{2017}\right) =$

$= \log_{2017}\frac{1}{2017} = -1$

c) $$(5 + \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{20}}\right)$$

$$= (5 + \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)\,\frac{(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5}}$$

$= 4$

SUBIECTUL al III –lea

a) Din condiţiile de existenţă ale logaritmului se obţine

$D = (-2; 4) - \{-1\}$

b) $E(0) = 4$ şi $E(1) = \log_3 15$

$E(0)+2E(1) - \log_3 225 = 4$

c) $\log_{x+2}(16 - x^2) = 2 \Leftrightarrow 16 - x^2 = (x + 2)^2$

Se obţine ecuaţia $x^2 + 2x - 6 = 0$ cu soluţiile $x_1 = -1+\sqrt{7}$ şi $x_2 = -1-\sqrt{7}$

Convine doar x_1 ($x_2 \notin D$)

SUBIECTUL al IV –lea

a) $2^x = 31 \Rightarrow x = \log_2 31$ şi $31^y = 64 \Rightarrow y = \log_{31} 64$

$x \cdot y = \log_2 31 \cdot \log_{31} 2^6 = 6 \cdot \log_2 31 \cdot \log_{31} 2$

$x \cdot y = 6$

b) $a = \frac{\log_x 5}{4}$ şi $b = 3\log_x 5$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{12}$

Clasa a XI-a
Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii
SUBIECTUL I

a) Se calculează A(x)·A(y)= $\begin{pmatrix} 1-(x+y) & x+y & (x+y)-\frac{(x+y)^2}{2} \\ -(x+y) & (x+y)+1 & -\frac{(x+y)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

= A(x+ y)

b) Conform punctului a), $A^{2017}(1) = A(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{de 2017 ori}}) = A(2017)$

det $A^{2017}(1) = 1 = 1^2$

c) $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot2017}\right) = A\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2016\cdot2017}\right)$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{n}{n+1}$

$P = A\left(\frac{2016}{2017}\right)$

SUBIECTUL al II -lea

a) $A_1(1;3)$ şi $A_2(3;-1)$

Ecuaţia dreptei A_1A_2 este $2x + y - 5 = 0$

$d(B; A_1A_2) = \sqrt{5} \Leftrightarrow |3n-4| = 5$ cu soluţia naturală n =3

b) $d(x;y) = d(y;x) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 6x - 6y = 0 \Leftrightarrow$

$(x-y)(x+y-6) = 0$; cum $x \neq y \Rightarrow x + y - 6 = 0$

Un exemplu: x = 1, y = 5

c) $x^2 - 4x + 2y - 1 \neq 0\ (\forall)\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta < 0$

Se obţine $y > \frac{5}{2}$, deci cel mai mic număr natural este 3

SUBIECTUL al III –lea

a) Se dezvoltă $(1 + mx)^n$ şi $(1 + nx)^m$ cu Binomul lui Newton

$C_n^0 = C_m^0$ şi $C_n^1 m = C_m^1 n$

Se obţine limita egală cu $C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2$, adică $\frac{mn(n-m)}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}\cdot e^{tg(x-1)}-\sqrt{6}}{\sin(x^2-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}\cdot e^{tg(x-1)}-\sqrt{6}}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{\sin(x^2-1)}$

$= = \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}\cdot e^{tg(x-1)}-\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{6}}{x^2-1}$

$= \sqrt{6}\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{tg(x-1)}-1}{x^2-1} + \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{6}}{x^2-1} =$

$= \frac{\sqrt{6}}{2} \lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{tg(x-1)} - 1}{x-1} + \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{6})} =$

$= \frac{\sqrt{6}}{2} \lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{tg(x-1)} - 1}{tg(x-1)} \cdot \frac{tg(x-1)}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{6}} =$

$= \frac{2\sqrt{6}}{3}$

c) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x+1}{2x}$

Limita cerută este $\frac{1}{2}$

SUBIECTUL al IV –lea

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_a(x) = a \cdot (\pm\infty)$; limita este finită numai pentru $a = 0$

b) $m = a$ şi $n = -1$

Ecuaţia asimptotelor oblice la $\pm\infty$ este $y = ax - 1$

Cum $a \neq 0$, punctul fix are coordonatele $x = 0$, $y = -1$

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

SUBIECTUL I

a) Ecuaţia devine $1 - 2x + x^2 = 0$

Soluţia este $x = 1$

b) Se calculează $A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1+2(x+y) & 0 & 4(x+y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -(x+y) & 0 & 1-2(x+y) \end{pmatrix} = A(x+y)$

c) $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right) \cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right) \cdot \ldots \cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right) = A\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2016\cdot 2017}\right)$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n}{n+1}$

$P = A\left(\frac{2016}{2017}\right)$

SUBIECTUL al II -lea

a) $A_0(-1; 0)$ $A_1(0; 2)$ $A_2(3; 6)$

Aria triunghiului $A_0A_1A_2$ este egală cu 1

b) Aria$(A_0A_1A_n) = 2$ conduce la ecuaţia $\left|-n^2 + n\right| = 2$

Soluţiile sunt -1 şi 2, dar convine doar $n = 2$

c) Condiţia de coliniaritate este $\begin{vmatrix} n^2-1 & 2n & 1 \\ m^2-1 & 2m & 1 \\ p^2-1 & 2p & 1 \end{vmatrix} = 0$

Se obţine $2(m-n)(p-n)(m-p) = 0 \Rightarrow$

$m = n$ sau $p = n$ sau $m = p$

SUBIECTUL al III –lea

a) Se amplifică fracţia cu expresia conjugată a numărătorului

Se simplifică fracţia cu $x-1$

Se obţine limita egală cu $-\frac{1}{3}$

b) $b=-a$; se obţine $\lim_{x\to\infty} a\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

c) Se amplifică cu expresia conjugată, se dă factor comun forţat x la numitor şi se face simplificarea

Limita cerută este egală cu $-a$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+x+5)}{\ln(x^8-x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^8(1-\frac{1}{x^7}+\frac{3}{x^8})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2+\ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^8+\ln(1-\frac{1}{x^7}+\frac{3}{x^8})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{8\ln x}=\frac{1}{4}$$

SUBIECTUL al IV –lea

a) Din condiţia existenţei limitei în 0 se obţine ecuaţia $\frac{a+1}{a^2}=2$

Soluţiile sunt $a_1=1$ şi $a_2=-\frac{1}{2}$

Din condiţia existenţei limitei în e se obţine ecuaţia $be^2+3=\ln 2+2$, cu soluţia $b=\frac{\ln 2-1}{e^2}$

b) $b=-1\Rightarrow f(x)=-x+3$;

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, deci nu există asimptotă orizontală la ramura ∞

$m=-1$ şi $n=3$

Ecuaţia asimptotei oblice la $+\infty$ este $y=-x+3$

Filieră tehnologică: profil tehnic

SUBIECTUL I

a) $$2I_3-A(x)=\begin{pmatrix}2 & -2^x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2-2^{-x}\end{pmatrix}$$

$\det(2I_3-A(x))=0\Leftrightarrow 2(2-2^{-x})=0$

Soluţia este $x=-1$

b) $$A^2(x)=\begin{pmatrix}0 & 2^x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{-2x}\end{pmatrix} \text{ şi } A(x^2)=\begin{pmatrix}0 & 2^{x^2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{-x^2}\end{pmatrix}$$

Din $A^2(x)=A(x^2)$ se obţin ecuaţiile $x^2=x$ şi $x^2=2x$ cu soluţia comună $x=0$

c) $$A(1)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{-1}\end{pmatrix}$$

Se demonstrează prin inducţie matematică $[A(1)]^n=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{-n}\end{pmatrix}$

$$[A(1)]^{2017} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-2017} \end{pmatrix}$$

SUBIECTUL al II -lea

a) $B_1(1;2)$ $B_2(2;3)$

Ecuaţia dreptei B_1B_2 este $x - y + 1 = 0$

b) Aria$(AB_1B_n) = 2$ conduce la ecuaţia $|-n + 1| = 4$

Soluţiile sunt -3 şi 5, dar convine doar n = 5

c) $\begin{vmatrix} n & n+1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ p & p+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & 1 \\ m+1 & m+1 & 1 \\ p+1 & p+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Deci punctele B_n, B_m, B_p sunt coliniare

SUBIECTUL al III –lea

a) Se fac calculele şi se obţine limita egală cu 3

b) $b = -a$; se obţine $\lim\limits_{x\to\infty} a\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)$

Se amplifică cu expresia conjugată, se dă factor comun forţat x la numitor şi se face simplificarea

Limita cerută este egală cu $-a$

c) Se dă factor comun forţat x şi la numărător şi la numitor şi se face simplificarea

Se obţine limita egală cu $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

SUBIECTUL al IV –lea

a) Din condiţia existenţei limitei în 0 se obţine ecuaţia $\frac{a+1}{a^2} = 2$

Soluţiile sunt $a_1 = 1$ şi $a_2 = -\frac{1}{2}$

Din condiţia existenţei limitei în e se obţine ecuaţia $be^2 + 3 = \ln 2 + 2$, cu soluţia $b = \frac{\ln 2 - 1}{e^2}$

b) $b = -1 \Rightarrow f(x) = -x + 3$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, deci nu există asimptotă orizontală la ramura ∞

$m = -1$ şi $n = 3$

Ecuaţia asimptotei oblice la $+\infty$ este $y = -x + 3$

Filieră teoretică: profil uman - filologie şi ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

În al doilea an de recesiune producţia a scăzut cu $\left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot \frac{6}{100} = 4{,}8\ \%$

În cei doi ani de recesiune producţia a scăzut cu 24,8 %

În al treilea an producţia a crescut cu $\frac{24,8}{75,2}$ % = 32,9 %

SUBIECTUL al II -lea

a) Clasa a XI-a A

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	0	0	1	2	3	8	7	5	3	2

Clasa a XI-a B

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	0	0	1	1	4	8	8	6	2	2

b) $\overline{x_A} = \frac{1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+8\cdot6+7\cdot7+5\cdot8+3\cdot9+2\cdot10}{31} = 6{,}77$

$\overline{x_B} = \frac{1\cdot3+1\cdot4+4\cdot5+8\cdot6+8\cdot7+6\cdot8+2\cdot9+2\cdot10}{32} = 6{,}78 \quad \overline{x_A} < \overline{x_B}$

c) $s_A^2 = \frac{(3-6{,}77)^2\cdot1+(4-6{,}77)^2\cdot2+\ (5-6{,}77)^2\cdot3+(6-6{,}77)^2\cdot8}{31} +$
$\frac{(7-6{,}77)^2\cdot7+(8-6{,}77)^2\cdot5+(9-6{,}77)^2\cdot3+\ (10-6{,}77)^2\cdot2}{31} =$

= 1,67

$s_B^2 = \frac{(3-6{,}78)^2\cdot1+(4-6{,}78)^2\cdot1+\ (5-6{,}78)^2\cdot4+(6-6{,}78)^2\cdot8+(7-6{,}78)^2\cdot8}{32} +$

$+ \frac{(8-6{,}78)^2\cdot6+(9-6{,}78)^2\cdot2+\ (10-6{,}78)^2\cdot2}{32} = 1{,}53$

$s_A^2 > s_B^2$, deci clasa a XI-a B este mai omogenă

SUBIECTUL al III –lea

Se calculează în centimetri

x_i	168	169	171	172	173	174	175
n_i	1	1	2	4	2	2	3
$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	4,4	3,4	1,4	0,4	1,4	2,4	3,4
$(x_i - \overline{x})^2$	19,36	11,56	1,96	0,16	1,96	5,78	11,56

$$\overline{x} = \frac{168\cdot1+169\cdot1+171\cdot2+172\cdot4+173\cdot2+174\cdot2+175\cdot3}{15}$$

= 172,4

$$\sigma^2 = \frac{19{,}36\cdot1+11{,}56\cdot1+1{,}96\cdot2+0{,}16\cdot4+1{,}96\cdot2+5{,}78\cdot2+11{,}56\cdot3}{15}$$

= 5,7

σ = $\sqrt{5{,}7}$ = 2,38

În intervalul [1,70; 1,74] sunt 10 fete, 5 fete sunt în afara intervalului, deci se poate forma echipa

SUBIECTUL al IV –lea

y = cantitatea de portocale adăugată, deci 5y + 10 · 3,80 = (y + 10) · 4,70

Finalizare

Clasa a XII-a

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

a) $\forall\, x, y \in (1, +\infty) => \quad x * y \in (1, +\infty)$

b) $f(x * y) = xy - x - y + 1 = f(x) \cdot f(y)$

c) Fie a = $\underbrace{x * x * \dots * x}_{de\ 10\ ori}$, $f(a) = f(x * x * \dots * x) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \dots f(x)}_{de\ 10\ ori}$

⇨ $a - 1 = (x-1)^{10}$ deci $a = (x-1)^{10} + 1$

⇨ Ecuația devine $(x-1)^{10} = 1024$, $x \in R \quad => \quad x = -1 \ sau \ x = 3$

SUBIECTUL al II-lea

a) $\forall\, A(x), A(y) \in M \quad => A(x) \cdot A(y) = A(x + y - 2xy) \in M$

Verifică asociativitatea și comutativitatea

Găsește A(0) ∈ M elementul neutru

b) $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0) \ => x' = \frac{-x}{1-2x}$ pentru $x \neq \frac{1}{2}$

U(M) = $\left\{A(x), \ x \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$

SUBIECTUL al III –lea

a) $F'(x) = f(x) \geq 0, \ \forall x \in R \quad => x^2 + x + a \geq 0, \qquad \forall x \in R \quad =>$

$\Delta = 1 - 4a \leq 0 \quad => \quad a \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = f(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{e(2+a)}{2} = \frac{1}{4} \ => a = \frac{1-4e}{2e}$

c) $F'(x) = 0$ are două rădăcini diferite de semne contrare => $a \in (-\infty, 0)$

SUBIECTUL al IV–lea

a) $\int x arctgx dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot arctgx dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1} dx =$

$= \frac{x^2}{2} \cdot arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx) + C$

b) $\int \frac{x + x^3}{1 + x^4} dx = \int \frac{x}{1+x^4} dx + \int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} arctgx^2 + \frac{1}{4} ln(x^4 + 1) + C$

c) I = $\int \left(-\sqrt{1+x^2}\right)' \cdot e^{arcsinx} dx = -\sqrt{1-x^2} e^{arcsinx} + \int e^{arcsinx} dx$

I = $\int x \cdot \left(e^{arcsinx}\right)' dx = x \cdot e^{arcsinx} - \int e^{arcsinx} dx$

Adunând cele două relații se obține I = $\frac{1}{2}\left(xe^{arcsinx} - \sqrt{1-x^2}e^{arcsinx}\right) + C$

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului
SUBIECTUL I

a) A(x)$\cdot A(y) = A(x+y), \quad x+y \in R$

b) Înmulțirea matricilor este asociativă, $I_3 = A(0) \in G$ este elementul neutru și orice element din G este simetrizabil, deci $(G, \cdot)$ este grup.

c) f morfism: $f(x+y) = f(x)\cdot f(y),\ \forall\, x, y \in R$
f injectivă
f surjectivă

SUBIECTUL al II-lea

a) x$* e = e * x = x,\ \forall x \in R$ => $e = 5 \in R$

b) $x * x * x = (x-4)^3 + 4, \quad (x-4)^3 + 4 = x$ =>
(x – 4)(x – 5)(x – 3)= 0, adică $x \in \{3,4,5\}$

c) Exemplu, pentru $a - 4 = \frac{2}{3},\ a = \frac{14}{3}$ și $b - 4 = \frac{3}{2},\ b = \frac{11}{2}$ avem
$a * b = 1 + 4 = 5 \in N$

SUBIECTUL al III –lea

a) $\int (f(x) - 3x^2 - 1)dx = x^4 + C$

b) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = 4x + 3lnx - \frac{1}{2x^2} + C$

c) F(x)= $x^4 + x^3 + x$ +C, F(- 1) = - 1+C = 2017 C=2018
F(x) = $x^4 + x^3 + x + 2018$

SUBIECTUL al IV–lea

a) $\int f_0(x)dx = e^x + C$
$\int \left(f_0(x) + f_1(x)\right)dx = xe^x + C$

b) Fie F o primitivă a lui $f_3,\ F'(x) = f_3(x) < 0,\ x \in (-\infty, 0)$

c) Fie G o primitivă a lui $f_4,\ G''(x) = f_4'(x) = x^3e^x(4+x) < 0,\ \forall x \in (-4,0)$

Filieră tehnologică: profil tehnic
SUBIECTUL I

a) e= -1
$x' = -2 - x$
Simetricul elementului 2017 este - 2019

b) $x^2 + x - 2 \le 0, \quad x \in [-2,1]$

c) $n^2 - n - 6 = 0,\ \ n_1 = 3,\ n_2 = -2,\ \ n \in N^*, n \geq 2\ \ => A=\{3\}$

SUBIECTUL al II-lea

a) Se verifică prin calcul direct

b) Înmulțirea matricelor este asociativă, $I_2 = A(0) \in G$ este element neutru $\forall A(x) \in G, \exists A(x') \in G\ astfel\ \hat{i}nc\hat{a}t\ A(x) \cdot A)(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0),$

$x' = -x$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{2017} = (A(1))^{2017} =$ A(2017)

SUBIECTUL al III –lea

a) $\int (f(x) - 3x^2 - 1)dx = x^4 + C$

b) $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = 4x + 3lnx - \frac{1}{2x^2} + C$

c) F(x)= $x^4 + x^3 + x$ +C, F(- 1) = - 1+C = 2017 C=2018

F(x) = $x^4 + x^3 + x + 2018$

SUBIECTUL al IV–lea

a) Se verifică faptul că f este derivabilă pe $(0, +\infty)$și $f'(x) = g(x),\ \forall x \in (0, +\infty)$

b) $\int f(x)dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + xlnx - x + C$

c) $\int f(x) \cdot g(x)dx = \int f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + C = \frac{(\sqrt{x}+lnx)^2}{2}$ + C

Filieră teoretică: profil umanist-filologie şi ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

a) 3(A + 2B) = $\begin{pmatrix} 18 & 15 & 3 \\ 15 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

b) 2X + $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

X = $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 15 & -3 \\ -5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

SUBIECTUL al II-lea

a) $A^2 = 3A,\ \ \ A^2 - 3A + 2I_2 = 2I_2$

b) $A^n = 3^{n-1}A,\ \forall n \in N^*$

Demonstrație prin inducție matematică

c) B = $A + 3A + 3^2A + \cdots + 3^{2016}A = (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2016})A = \frac{3^{2017}-1}{2}A$

SUBIECTUL al III –lea

a) Verificare prin calcul direct

b) $x^2 - 3x + 2 = 0,\ \ \ x = 1\ \text{și}\ \ x = 2$

c) A(n) = A(1 + 2 + 3 + ...+ 2016) => $n = 2017 \cdot 1008$ care este divizibil cu 2017

SUBIECTUL al IV–lea

a) Verificare prin calcul direct

b) $A^3 = I_2$, n = 3

c) $A^{3k} = I_{2,}$ $A^{3k+1} = A,$ $A^{3k+2} = A^2$

$=> A^{12} + A^{23} + A^{34} = I_2 + A^2 + A = O_2$

PROBLEME PROPUSE

Elevii sunt invitați să trimită soluții ale problemelor propuse prin e-mail la adresa jurnalulmatematic@yahoo.com (cu subiectul mesajului „probleme rezolvate") sau prin poștă la adresa Colegiul Național „Moise Nicoară" , Piața Moise Nicoară Nr.1, Arad (cu mențiunea JURNALUL MATEMATIC ARĂDEAN – Probleme Rezolvate). Se acceptă soluții și la problemele clasei precedente celei urmate, precum și celor superioare acesteia. Vă rugăm să treceți la expeditor numele, localitatea, școala, clasa și profesorul de la clasă.

Pentru acest număr soluțiile se pot trimite până la data de 30 iunie 2017 (data poștei).

Probleme pentru Ciclul primar

1. Reconstituiți adunarea:

$$\begin{array}{ccccc} M & A & R & I & O \\ & A & R & I & O \\ & & R & I & O \\ & & & I & O \\ & & & & O \\ \hline 7 & 5 & 0 & 5 & 0 \end{array} +$$

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

2. Suma a cinci numere naturale este 4090. Dacă la fiecare se adună același număr se obțin numerele 2029, 2031, 2054, 3961 și 4015. Aflați cele cinci numere naturale.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

3. Într-un depozit sunt bile roșii, galbene și albastre. 2364 bile nu sunt albastre și 3976 bile nu sunt roșii. Numărul bilelor roșii este de 5 ori mai mic decât numărul bilelor albastre. Aflați numărul bilelor de fiecare culoare.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

4. Determinați toate numerele naturale care împărțite la 1961 dau restul de 400 de ori mai mare decât câtul.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

5. Produsul a 2 numere naturale este 2068. Dacă se scade 14 dintr-un factor, atunci produsul se micșorează cu 658. Determinați cele 2 numere.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

6. Aflați suma a 6 numere naturale consecutive știind că două dintre ele sunt 50 și 52.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

7. Un cioban are 2009 miei, oi și capre. Numărul mieilor și oilor este 1508, iar numărul mieilor și caprelor este 751. Aflați numărul mieilor, oilor și caprelor.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

8. Diferența a două numere naturale este 1961. Dacă le împărțim obținem câtul 4 și restul 461. Aflați cele două numere.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

9. Aflați numerele naturale $\overline{xyz}$ astfel încât $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 297$.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

10. Determinați numerele naturale nenule care împărțite la 1961 dau câtul de două ori mai mare decât restul.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Probleme pentru gimnaziu

Clasa a V-a

1. Determinați mulțimile X și Y știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $X \cup Y = \{0;1961;1962;1963;1964\}$

ii) $X \setminus Y = \{1962; 1963; 1964\}$

iii) $Y \setminus X = \mathbb{N}^*$

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația: $xy - 1986x - 23y + 45678 = 0$.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

3. Un număr natural x împărțit la 5 dă restul 2 și împărțit la 16 dă restul 8. Ce rest se obține la împărțirea numărului x la 80 ?

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

4. Arătați că ecuația $y^2 + y + 5x = 2013$ nu are soluții în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

5. Determinați numerele prime de forma $\overline{abcd}$ știind că au suma cifrelor egală cu 10 și $\overline{abcd} = 9 \cdot a^5 \cdot d + 1$.

prof. Florica Milaș și Flavius Milaș, Arad

Clasa a VI-a

1. Aflați numerele prime diferite x, y și z știind că $x + 4y + 8z = 54$.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$50x^3 - x^2y = 400$$

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

3. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{196}{|x-22|-6} \in \mathbb{Z} \right\}$

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

4. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$(x - 24) \cdot (x - 23) + (y + 1986) \cdot (y + 1987) = 0$$

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

5. Pe paralela dusă prin vârful A la latura BC a unui triunghi oarecare ABC se alege un punct D astfel încât $[AC] \equiv [CD]$. Demonstrați că $d(B, AC) = d(B, DC)$.

Prof. Milaș Florica și Milaș Flavius, Arad

Clasa a VII-a

1. Fie numerele reale x, y, z și t astfel încât

$$\sqrt{(x-1950)^2} + \sqrt{(1960-y)^2} + \sqrt{(z-1961)^2} + \sqrt{(t-1973)^2} \le 0$$

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

2. Determinați mulțimea X știind că satisface simultan condițiile:

1) $\text{card}(X \times X) = 16$
2) $(0; 1) \in (X \times X)$

3) $X \subset \mathbb{N}$

4) Suma elementelor mulțimii X este mai mică decât 11.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

3. Rezolvați ecuația $x+196\cdot\{x\}=[x], x\in\mathbb{Q}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă și $\{x\}$ partea fracționară a lui x.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Clasa a VIII-a

1. Fie x, y, z numere reale astfel încât $xy + yz + zx = 1$. Demonstraţi că: $5x^2 + 8y^2 + 11z^2 > 7$.

Prof. Moraru Augustini, Arad

2. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al cărei grafic este $\sphericalangle BAC$ dacă A(1, –2), B(–4, 8) și C(4,13).

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

3. Rezolvați ecuația $x+[x]=\{x\}+60$, $x\in\mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă și $\{x\}$ partea fracționară a lui x.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

4. Fie punctele A(–3, 2) și B(4, 3) într-un sistem de axe perpendicular. Determinați poziția punctului C situate pe axa ordonatelor astfel încât Δ ABC să fie isoscel cu baza AB.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

Probleme pentru liceu

Clasa a IX-a

1. Să se arate că $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]^2-16 \vdots 48$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Prof. Sorin Dumitrică, Arad

2. Să se determine $n \in N$ astfel încât $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\right\}=\sqrt{6}-2$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

Prof. Sorin Dumitrică, Arad

3. Fie $x_i\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât să avem relația $tg\, x_1+tg\, x_2+...+tg\, x_n=n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se determine cel mai mare număr natural, pentru care avem relația:

$$\mathrm{tg}\left(x_1-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{tg}\left(x_2-\frac{\pi}{4}\right)+\ ...+\ \mathrm{tg}\left(x_n-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2n^2-15n+7}{2n}$$

prof. Adrian Zico Serban, Ineu

4. Rezolvați ecuația x + [x] = $x+[x]=17\cdot\{x\},\ x\in\mathbb{Q}$, unde [x] reprezintă partea întreagă și {x} partea fracționară a lui x.

Prof. Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad

5. Să se determine funcțiile $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, cu proprietățile $f(g(x))=g(f(x))=x+1$ $(\forall)x\in\mathbb{N}$

Ioan Ucu Crișan, Arad

Clasa a X-a

1. Dacă $\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^y+1}+\frac{1}{e^z+1}=2$, să se arate că

$$\left(e^{\frac{x+y}{2}}+e^{\frac{x+z}{2}}+e^{\frac{y+z}{2}}\right)\leq\frac{3}{2},\ \ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}.$$

prof. Octavia Potocean și Mircea Potocean, Arad

2. Dacă x, y, z > 0, xyz = 1, arătați că $\frac{2}{x^4(y^2+z^2)}+\frac{2}{y^4(x^2+z^2)}+\frac{2}{z^4(x^2+y^2)}\geq3$

prof. Octavia Potocean și Mircea Potocean, Arad

3. Determinați numărul numerelor care în baza 7 se scriu cu n cifre și nu există două cifre vecine egale.

Szocs Andreea

4. La o nuntă cu 1000 de invitați, aceștia au fost așezați la mese rotunde de câte 10 scaune, astfel încât două persoane de același sex să nu stea una lângă cealaltă. Mirii cheamă toți invitații la dans. Știind că o pereche este formată din o fată și un băiat și că fiecare invitat dansează doar cu cei de la masa sa, în câte moduri se pot forma perechile?

Szocs Andreea

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}673 & 672 & 672\\ 672 & 673 & 672\\ 672 & 672 & 673\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Calculați A^{2017}.

Prof. Bodrogean Ovidiu și Prof. Bodrogean Diana, Arad

2. Fie $A, B \in M_n(C)$, cu $A \neq B, A^{2018} = B^{2018}$ și $A^{2017}B = B^{2017}A$. Calculați $\det(A^{2017} + B^{2017})$.

prof. Ramona Tudoran, Arad

3. Fie a > 1. Arătați că ecuația $a^x + x = n$ are o soluție unică notată x_n. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{\log_a n} - 1\right)$.

Szocs Andreea

4. a) Demonstrați că pentru orice $n \in N^*$ ecuația $x \cdot e^{nx} = 1$ admite o soluție unică reală. O notăm x_n.

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător;

c) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ tinde la zero.

Test pt. admiterea la clasa pregătitoare cu profil MPSI, sesiunea iunie 2015

Clasa a XII-a

1. Să se rezolve ecuația $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + 1 = 0$ și să se determine $a < 0$ știind că are toate rădăcinile reale.

Prof. Marcel Camenită, Arad

2. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x^n} dx, n \in N$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot I_n$.

Prof. Sorin Dumitrică, Arad

3. Fie $f = X^4 - aX^3 - X + b$, unde $a, b \in R^*$. Să se arate că, dacă f are toate rădăcinile reale, atunci $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 4$. Să se studieze dacă reciproca este adevărată.

Prof. Sorin Dumitrică , Arad

4. Fie funcția $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă astfel încât: $f(\alpha)=0$ și $f'(x) \geq x^2\sqrt{1 + 4f^2(x)}$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Să se arate că:

$$2f(\beta)+\sqrt{1 + 4f^2(\beta)} \geq \sqrt[3]{e^{2(\beta^3-\alpha^3)}}$$

Prof. Octavia Potocean și prof. Mircea Potocean

5. Determinați $\min\limits_{t\in\mathbb{R}} E(t)$, unde $E(t) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2^{tx}}{3+\cos x} dx$.

Prof. Potocean Octavia și Szocs Andreea