CURS #4

CONȚINUTUL CURSULUI #4:

II. Metode numerice de rezolvare a sistemelor liniare.

II.1. Metode directe de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare.

II.1.5. Sisteme liniare inferior triunghiulare.

II.1.6. Inversarea unei matrice aplicând metodele Gauss cu pivotare. Determinantul unei matrice.

II.1.7. Calculul rangului unei matrice cu ajutorul metodei Gauss cu pivotare parțială.

II.1.5. Sisteme liniare inferior triunghiulare

Definiția (II.2.)

a) *Matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se numește inferior triunghiulară dacă și numai dacă elementele sub diagonala principală sunt nule, i.e.* $a_{ij} = 0, \forall i > j$;

b) *Un sistem liniar a cărui matrice asociată este inferior triunghiulară se numește sistem inferior triunghiular.*

Fie sistemul liniar $Ax = b$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inferior triunghiulară cu $a_{kk} \neq 0, k = \overline{1,n}$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Sistemul inferior triunghiular $Ax = b$ se scrie sub forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 & (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (E_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k & (E_k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & (E_n) \end{cases} \tag{1}$$

Din (E_1) rezultă

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{2}$$

Fie ecuația (E_k): $a_{kk}x_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j = b_k$. Dacă din primele $k-1$ ecuații sunt calculate componentele $x_j, j = \overline{1, k-1}$, atunci din (E_k) rezultă

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right) \tag{3}$$

ALGORITM (Metoda substituției ascendente)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
Date de ieșire: $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

1. $x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} b_1$;
2. `for` $2 : n$ `do`

   $$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right);$$

   `endfor`

Definim în continuare conform Algoritmului (Metoda substituției ascendente) procedura **SubsAsc** având sintaxa $x =$**SubsAsc**(A, b), procedură care returnează soluția x a sistemului $Ax = b$.

II.1.6. Inversarea unei matrice aplicând metodele Gauss cu pivotare. Determinantul unei matrice.

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă și A^{-1} invesa matricei. Inversa A^{-1} verifică relația

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Fie $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n, k = \overline{1,n}$ coloana k a matricei A^{-1}, i.e.,

$$A^{-1} = cols(x^{(1)}, ..., x^{(k)}, ..., x^{(n)}).$$

Deasemenea, fie $e^{(k)} = (0, ..., 1, ..., 0)^T$, cu 1 pe poziția k, coloana k din matricea I_n. Atunci

$$AA^{-1} = I_n \Longleftrightarrow Ax^{(k)} = e^{(k)}, k = \overline{1,n} \tag{4}$$

Am obținut n sisteme liniare în care vectorii necunoscutelor sunt pe rând coloanele inversei și vor fi calculați conform unei metode de pivotare, fie de exemplu, metoda Gauss cu pivotare totală.

Sistemele (4) se pot rezolva și simultan dacă se consideră drept matrice extinsă, matricea formată din matricea A la care se adaugă cele n coloane ale matricei I_n.

Fie $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, ..., a_{n-1,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n-1)}$ pivoții la fiecare etapă din algoritmii Gauss, atunci

$$|A| = (-1)^s a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} a_{n-1,n-1}^{(n-1)} a_{nn}^{(n-1)} \tag{5}$$

unde s este numărul de interschimbări de linii și coloane, în funcție de metodă. Matricea A se modifică pe parcursul iterațiilor, din acest motiv s-a folosit notația cu indici sus pentru a face distincție între elementele matricei A la fiecare pas.

II.1.7. Calculul rangului unei matrice cu ajutorul metodei Gauss cu pivotare parțială.

Definiția (II.3.)

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice nenulă. Spunem că matricea A are rangul r și notăm $rangA = r$, dacă A are un minor nenul de ordin r, iar toți minorii lui A de ordin mai mare decât r sunt nuli.

Fiind dat sistemul

$$Ax = b,$$

cu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $b, x \in \mathbb{R}^n$ se disting următoarele cazuri:

- Sisemul $Ax = b$ este compatibil determinat, i.e. admite o soluție unică dacă și numai dacă $rangA = rang\bar{A} = n$;
- Sistemul $Ax = b$ este compatibil nedeterminat, i.e. admite o infinitate de soluții dacă și numai dacă $rangA = rang\bar{A} < n$;
- Sistemul $Ax = b$ este incompatibil, i.e. nu admite soluții, dacă și numai dacă $rangA \neq rang\bar{A}$.

ALGORITM (Rangul unei matrice folosind metoda de eliminare Gauss cu pivotare parțială)

Date de intrare: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, tol;
Date de ieșire: rang

1. Se iniţializează linia, coloana şi rangul:
   $h = 1, k = 1, rang = 0;$
2. while $h \leq m$ and $k \leq n$ do
   - Se caută pivotul a_{pk} :
     $|a_{pk}| = \max\limits_{j=\overline{h,m}} |a_{jk}|;$
   - if (maximul este mai mic egal decat tol) then
     Se trece la următoarea coloană: $k = k + 1;$
     Se trece la următorul pas al buclei while;
     endif

- `if` $p \neq h$ `then`

  $L_p \leftrightarrow L_h$ `(Se intershimbă liniile);`

  `endif`
- `Se elimină elementele sub pivot:`

  `for` $l = h+1 : m$

  $m_{lk} = \frac{a_{lk}}{a_{hk}}$;

  $L_l \leftarrow L_l - m_{lk} L_h$

  `endfor`
- `Se avansează pe linie`

  $h = h + 1$;
- `Se avansează pe coloană`

  $k = k + 1$;
- `Se creşte rangul`

  $rang = rang + 1$;

`endwhile`

Exemplul # 1

Să se afle rangul matricei A folosind metoda GPP

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Răspuns: Indicație: Se transformă matricea A conform algoritmului de mai sus și se calculează rangul fie numărând liniile nenule, fie conform definiției rangului.

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Am găsit un minor $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, de ordinul 3 nenul, iar unicul minor de ordinul 4, $|A|$, este zero. Concludem că $rang = 3$.