CURS #6

CONȚINUTUL CURSULUI #6:

III. Interpolarea Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, i.e. $a = x_1 < x_2 < ... < x_{n+1} = b$.
Fie $\mathcal{P}_n$ mulțimea polinoamelor cel mult de grad $n \geq 0$:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ P_n(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + a_{n+1} x^n \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n+1} \right\}$$

Interpolarea Lagrange a funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ constă în determinarea unui polinom $P_n \in \mathcal{P}_n$, numit polinom de interpolare Lagrange, care satisface relațiile:

$$P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{1, n+1} \tag{1}$$

Valorile $x_i, i = \overline{1, n+1}$ se numesc puncte sau noduri de interpolare.

III.1. Metoda directă de determinare a polinomului Lagrange P_n.

Fie $P_n(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + a_{n+1} x^n$ un polinom de interpolare al funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,N+1}}$. Din condițiile $P_n(x_i) = f(x_i)$, $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n+1}$ rezultă următorul sistem de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \ldots + a_{n+1} x_1^n = y_1 \\ a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + \ldots + a_{n+1} x_2^n = y_2 \\ a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3^2 + \ldots + a_{n+1} x_3^n = y_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 + a_2 x_{n+1} + a_3 x_{n+1}^2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1}^n = y_{n+1} \end{cases} \tag{2}$$

sau scris la formă matriceală

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Cum $x_i \neq x_j$, $1 \leq i < j \leq n+1$, rezultă

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \neq 0,$$

deci sistemul de ecuații liniare (3) este un sistem compatibil determinat cu soluția

$$\mathbf{a} = \left[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Din unicitatea soluției rezultă că polinomul Lagrange se determină în mod unic.
Soluția sistemului de ecuații liniare (3) se poate obține, de exemplu, aplicând metoda Gauss cu pivotare totală.
Exemplu 1: Să se afle, prin metoda directă, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
Rezolvare: Fie $P_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$. Din condițiile $P_2(-1) = e^{-2}, P_2(0) = e^0, P_2(1) = e^2$ rezultă sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \cdot (-1) + a_3(-1)^2 = e^{-2} \\ a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 1 \\ a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 = e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} \\ a_3 = \dfrac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} \end{cases} \tag{4}$$

Astfel, $P_2(x) = 1 + \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}x + \dfrac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}x^2$.

III.2. Metoda Lagrange de determinare a polinomului Lagrange P_n.

Se consideră următoarea reprezentare a polinomului Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, y_k, \quad x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

unde $L_{n,k}$ sunt polinoame de gradul n ce urmează să fie determinate. Deoarece P_n interpolează funcția f în nodurile $\{x_i\}_{i=\overline{1,n+1}}$ atunci au loc relațiile, $P_n(x_i) = y_i$, de unde rezultă $L_{n,k}(x_i) = \delta_{ik}$. Deoarece $L_{n,k}$ sunt polinoame de gradul n și $L_{n,k}(x_i) = 0, i \neq k$ rezultă că $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_{n+1}$ sunt n rădăcini, deci $L_{n,k}$ se reprezintă:

$$L_{n,k}(x) = C_k(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_{n+1}), \tag{6}$$

iar din condiția $L_{n,k}(x_k) = 1$, rezultă relația pentru C_k :

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x - x_{n+1})} \tag{7}$$

Se înlocuiesc C_k în (6) și se obțin expresiile

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &= \frac{(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_{n+1})}{(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_{n+1})}, \\ & x \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n+1} \end{aligned} \tag{8}$$

Funcțiile $L_{n,k}$ se numesc funcții de bază pentru interpolarea Lagrange și se vor rescrie sub o formă compactă

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{9}$$

Vom nota în continuare $e_t(x) = f(x) - P_n(x)$ eroarea interpolării în fiecare punct.

Teorema (III.1. Estimarea erorii de interpolare)

Fie $n \geq 1$, funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a.i. $f \in C^{n+1}[a, b]$ și diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ a intervalului $[a, b]$. Atunci: $\forall\, x \in [a, b]$, $\exists\, \xi \in (a, b)$ astfel încât

$$e_t(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)$$

unde

$$\pi_{n+1}(x) := (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n+1}), \quad x \in [a, b]$$

Mai mult, are loc următoarea estimare a erorii de interpolare:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{\zeta \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\zeta)|}{(n+1)!} |\pi_{n+1}(x)|, \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Exemplu 2: Să se afle, prin metoda Lagrange, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ a funcţiei $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
Rezolvare: Polinomul $P_2(x)$ conform metodei Lagrange este $P_2(x) = L_{2,1}(x)y_1 + L_{2,2}(x)y_2 + L_{2,3}(x)y_3$, unde

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2-x}{2}$$
$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = 1-x^2$$
$$L_{2,3}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2+x}{2}$$

Astfel,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{x^2-x}{2}\cdot e^{-2} + (1-x^2) + \frac{x^2+x}{2}\cdot e^2 \\ &= 1 + \frac{e^2-e^{-2}}{2}x + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}x^2 \end{aligned}$$

III.3. Metoda Newton de determinare a polinomului Lagrange P_n.

Se consideră următoarea reprezentare a polinomului Lagrange

$$P_n(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + c_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

sau

$$P_n(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{n+1} c_i \prod_{j=1}^{i-1}(x-x_j) \tag{10}$$

Condiţiile $P_n(x_i) = y_i, i = \overline{1, n+1}$ ne furnizează sistemul de ecuaţii liniare necesar pentru determinarea coeficienţilor $c_i, i = \overline{1, n+1}$

$$\begin{cases} c_1 & = y_1 \\ c_1 + c_2(x_2-x_1) & = y_1 \\ c_1 + c_2(x_3-x_1) + c_3(x_3-x_1)(x_3-x_2) & = y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1 + c_2(x_{n+1}-x_1) + c_3(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2) + \ldots + & \\ + \ldots + c_{n+1}(x_{n+1}-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_n) & = y_{n+1} \end{cases} \tag{11}$$

Sistemul (11) este un sistem inferior triunghiular şi se rezolva conform metodei substituţii ascendente. Componentele matricei A asociată

sistemului sunt determinate conform relaţiilor:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 1, \quad i = \overline{1, n+1} \\ a_{ij} &= \prod_{k=1}^{j-1}(x_i - x_k), \quad i = \overline{2, n+1},\ j = \overline{2, i} \end{aligned} \tag{12}$$

Exemplu 3: Să se afle, prin metoda Newton, polinomul de interpolare Newton $P_2(x)$ a funcţiei $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
Rezolvare: Polinomul $P_2(x)$ conform metodei Newton se reprezintă sub forma: $P_2(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2)$. Din condiţiile $P_2(-1) = e^{-2}, P_2(0) = 1, P_2(1) = e^2$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} c_1 & = e^{-2} \\ c_1 + c_2 & = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 & = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 & = e^{-2} \\ c_2 & = 1 - e^{-2} \\ c_3 & = \dfrac{e^{-2}+e^2-2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= e^{-2} + (1-e^{-2})(x+1) + \frac{e^{-2}+e^2-2}{2}x(x+1) \\ &= 1 + \frac{e^2-e^{-2}}{2}x + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}x^2. \end{aligned}$$

III.4. Metoda Newton cu diferenţe divizate de determinare a polinomului Lagrange P_n.

Definiţia (III.1.)

Fie funcţia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ şi o diviziune $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$.

(i) *S.n. diferenţa divizată (DD) de ordin 0 a lui f în raport cu nodul x_1:*

$$f[x_1] := f(x_1)$$

(ii) *S.n. DD de ordin 1 a lui f în raport cu nodurile x_1, x_2:*

$$f[x_1, x_2] := \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

(iii) *S.n. DD de ordin 2 a lui f în raport cu nodurile x_1, x_2, x_3:*

$$f[x_1, x_2, x_3] := \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

Definiția (III.1. continuare)

(iv) *S.n. DD de ordin n a lui f în raport cu nodurile* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$*:*

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] := \frac{f[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{x_{n+1} - x_1}$$

Teorema (III.2. formula de interpolare a lui Newton cu DD)

Polinomul de interpolare Lagrange de gradul n asociat funcției $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *și nodurilor de interpolare* $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ *este dat de formula*

$$P_n(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + \ldots \tag{13}$$

$$+ f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \tag{14}$$

$$= f[x_1] + \sum_{i=2}^{n+1} f[x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j), \quad x \in [a, b] \tag{15}$$

Construim în continuare următorul tabel cu diferențe divizate:

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2	DD ordin 3	...
x_1	$\boxed{f[x_1] = f(x_1)}$ $\searrow$				
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[x_1, x_2]}$ $\searrow$			
x_3	$f[x_3] = f(x_3)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$f[x_2, x_3]$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3]}$ $\searrow$		
x_4	$f[x_4] = f(x_3)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$f[x_3, x_4]$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$f[x_2, x_3, x_4]$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3, x_4]}$ $\searrow$	
...	...	...	...	...	...

Fie matricea Q, matricea inferior triunghiulară definită astfel:

$$Q_{ij} = f[x_{i-j+1}, ..., x_i] \tag{16}$$

Se observă că elementele matricei coincid cu diferențele divizate din tabel.

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2	DD ordin 3	...
x_1	$\boxed{f[x_1] = Q_{11}}$				
x_2	$f[x_2] = Q_{21}$	$\boxed{f[x_1, x_2] = Q_{22}}$			
x_3	$f[x_3] = Q_{31}$	$f[x_2, x_3] = Q_{32}$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3] = Q_{33}}$		
x_4	$f[x_4] = Q_{41}$	$f[x_3, x_4] = Q_{42}$	$f[x_2, x_3, x_4] = Q_{43}$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3, x_4] = Q_{44}}$	
...	...	...	...	...	...

Au loc următoarele relații:

$$f[x_{i-j+1}, ..., x_i] = \frac{f[x_{i-j+2}, ..., x_i] - f[x_{i-j+1}, ..., x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j+1}}$$

$$= \frac{f[x_{i-(j-1)+1}, ..., x_i] - f[x_{(i-1)-(j-1)+1}, ..., x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j+1}}$$

Obținem astfel o relație de recurență pentru componentele matricei Q:

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}, \quad j = \overline{2, n+1}, i = \overline{j, n+1} \tag{17}$$

Prima coloană a matricei Q se calculează conform formulei:

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}.$$

Exemplu 2: Să se afle, prin metoda Newton cu DD, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.

Rezolvare: Construim tabelul diferențelor divizate:

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2
-1	e^{-2}		
0	1	$1 - e^{-2}$	
1	e^2	$e^2 - 1$	$\frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}$

Pentru reprezentarea polinomului $P_2(x)$ păstrăm din tabel doar elementele de pe diagonala principală, i.e., $e^{-2}, 1 - e^{-2}$ și $\frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}$. Se obține

$$P_2(x) = e^{-2} + (1 - e^{-2})(x + 1) + \frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}(x + 1)x.$$

ALGORITM (Metoda Newton cu diferențe divizate)

Date de intrare: $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}; (y_i)_{\overline{1,n+1}}; x;$
Date de ieșire: $y;$

1: `Se determină matricea` Q

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}$$

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}, i = \overline{2, n+1}, j = \overline{2, i};$$

2: `Determină` $P_n = Q_{11} + \sum_{k=2}^{n+1} Q_{kk}(x - x_1)...(x - x_{k-1})$

3: $y = P_n.$