CURS #1

CONȚINUTUL CURSULUI #1:

0.Erori

0.1. Erori de trunchiere

Fie x un parametru reprezentat prin valoarea sa exactă, F o funcție în baza căreia se evaluează exact o formulă matematică și F_t o funcție obținută în urma operației de trunchiere a formulei exacte.

Definiția (0.1.)

Definim $e_t(x) = F(x) - F_t(x)$ și numim eroare de trunchiere.

Teorema (0.1. Dezvoltarea în serie Taylor)

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de infinit ori derivabilă pe intervalul $I, x_0 \in I$ fixat. Atunci,

$$f(x) = \quad f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Teorema (0.1. (reprezentarea restului sub forma Lagrage))

Mai mult, dacă f este derivabilă de $n+1$ ori, pentru orice $x \in I$, $\exists\, \xi$ cuprins între x_0 și x, astfel încât:

$$f(x) = \quad f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Exemplul #1

Fie $x = e$, numărul Euler și formula matematică exactă de calcul a valorii acestui număr, obținută în baza dezvoltării în serie Taylor a funcției e^x în jurul punctului $x_0 = 0$ și evaluată în $x = 1$.
Întrucat, derivata funcției e^x rămâne la fel, dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = e^x$ în jurul punctului x_0 este:

$$e^x \quad = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k$$

Notăm cu $F(x)$ formula exactă prin intermediul căreia se evaluează valoarea e^x pentru un x dat, astfel $e = F(1)$ sau

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Fie $F_t(x)$ formula trunchiată de forma:

$$F_t(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k \tag{1}$$

deci, numărul e poate fi aproximat cu

$$e \approx F_t(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Eroarea de trunchiere a acestei aproximări se determină prin formula:

$$e_t(1) = F(1) - F_t(1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

sau, folosind formula de reprezentare Lagrange a restului din dezvoltarea Taylor, obținem: $e_t(1) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ cu ξ între 0 și 1.

Exemplul $\#2$ Fie $g \in C^2([a,b])$, $x \in (a,b)$ și $h > 0$ astfel încât $x + h$ rămâne în intervalul (a,b). Conform formulei de dezvoltare în serie Taylor, cu reprezentarea restului sub forma Lagrange, putem scrie:

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + g''(\xi)\frac{h^2}{2},\ \xi \in (x, x+h)$$

Din expresia de mai sus, putem deduce o formulă prin intermediul căreia se poate calcula prima derivată

$$g'(x) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g''(\xi)\frac{h^2}{2}$$

Întrucât, nu întotdeauna putem calcula analitic derivata funcției, formula de mai sus poate fi trunchiată la:

$$g'(x) \approx \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

cu eroarea de trunchiere $e_t(x) = -g''(\xi)\frac{h^2}{2}$

0.2. Erori de rotunjire

Un *număr mașină* poate fi reprezentat în baza 10 cu virgulă mobilă normalizată sub forma:

$$x^* = \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n \tag{2}$$

$$0 \le d_1, d_2, \ldots, d_k \le 9,\ \ d_1 \ne 0 \tag{3}$$

cifrele $d_1, d_2, \ldots, d_k$ se numesc cifre semnificative.
Observație: Reprezentarea se numește normalizată deoarece cifra care precede virgula este zero.
Un număr real x, din punct de vedere matematic, se reprezintă cu o infinitate de cifre semnificative

$$x = \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \ldots \times 10^n \tag{4}$$

Acest număr poate fi asimilat cu numărul mașină cu k cifre semnificative după următoarea regulă:

$$x^* = \begin{cases} \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n, \text{ dacă } d_{k+1} < 5 \\ \pm 0.d_1 d_2 \ldots (d_k + 1) \times 10^n, \text{ dacă } d_{k+1} \ge 5 \end{cases} \tag{5}$$

Exemplul $\#3$ Să se afle numărul mașină cu 5 cifre semnificative al numărului $\pi = 3,14159265\ldots$
Numărul π scris în reprezentarea normalizată are forma

$$\pi = +0.31415965\ldots \times 10^1$$

iar numărul mașină cu 5 cifre semnificative asociat este

$$+0.31416 \times 10^1$$

Definiția (0.2.)

Presupunem că x^* reprezintă aproximarea numărului x. Notăm cu

$$e_a := |x - x^*|$$

și numim eroarea absolută a aproximării. Notăm cu

$$e_r := \frac{|x - x^*|}{|x|}$$

și numim eroarea relativă.

Exemplul $\#4$ Să se determine erorile absolută și relativă, dacă x este aproximarea lui x^*, unde $x = 0,3000 \times 10^4$, $x^* = 0,3100 \times 10^4$.
Eroarea absolută $e_a = 0,01 \times 10^4 = 100$, iar eroarea relativă $e_r = \dfrac{100}{3 \times 10^3} = 0,1$.
Eroarea absolută nu este un indice suficient pentru stabilirea exactității calculului, pentru că acesta ne dă doar abaterea fără a ține cont de ordinul mărimilor implicate în calcul. Pentru a determina exactitatea calculului, eroarea absolută se raportează la mărimea valorii exacte, obținându-se eroarea relativă, sau dacă se dorește să se exprime în procente, aceasta se înmulțește cu 100%.

Definiția (0.3.)

Spunem că numărul x^* aproximează numărul x cu k cifre semnificative, dacă k este cel mai mare număr cu proprietatea

$$e_r = \frac{|x - x^*|}{|x|} \le 5 \times 10^{-k} \tag{6}$$

Observație: Dacă x^* este numărul mașină asociat numărului x după regula (5), atunci are loc estimarea (6). Într-adevăr, fie $x = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k ... \times 10^n$ și x^* definit prin:

$$x^* = \begin{cases} \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} < 5 \\ \pm 0.d_1 d_2 ... (d_k + 1) \times 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} \geq 5 \end{cases}$$

Vom considera cele două cazuri separat.

Cazul 1. $d_{k+1} < 5$:

$$\begin{aligned} \frac{|x - x^*|}{|x|} &= \frac{|0.0 \cdots 0 d_{k+1} \cdots| \times 10^n}{|0.d_1 d_2 \cdots d_k \cdots| \times 10^n} \leq \frac{d_{k+1} \times 10^{-(k+1)}}{0.1} \\ &= d_{k+1} \times 10^{-k} \leq 5 \times 10^{-k} \end{aligned} \tag{7}$$

Cazul 2. $d_{k+1} \geq 5$: (sau, echivalent $d'_{k+1} := 10 - d_{k+1} \leq 5$)

$$\begin{aligned} \frac{|x - x^*|}{|x|} &= \frac{|0.0 \cdots 0(10 - d_{k+1}) \cdots| \times 10^n}{|0.d_1 d_2 \cdots d_k \cdots| \times 10^n} \leq \frac{d'_{k+1} \times 10^{-(k+1)}}{0.1} \\ &= d'_{k+1} \times 10^{-k} \leq 5 \times 10^{-k} \end{aligned} \tag{8}$$

I. Metode de aproximare a soluțiilor ecuațiilor neliniare

I.1. Metoda bisecției

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Atunci $\exists x^* \in (a, b)$, astfel încât $f(x^*) = 0$.

Metoda bisecției generează un șir de aproximări $(x_k)_{k \geq 0}$ convergent către soluția exactă x^* a ecuației $f(x) = 0$ (i.e. $lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, unde x^* verifică ecuația $f(x) = 0$).

Metoda bisecției constă în înjumătățirea la fiecare pas k a intervalului $[a, b]$ și selectarea acelui interval notat prin $[a_k, b_k]$ în care se află x^*.

Șirurile $(a_k)_{k \geq 0}$, $(b_k)_{k \geq 0}$ și $(x_k)_{k \geq 0}$ se construiesc conform schemei:

$$(a_k, b_k, x_k) = \begin{cases} a_k = a_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = x_{k-1}, & \text{dacă} \quad f(x_{k-1}) = 0 \\ a_k = a_{k-1}, b_k = x_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}, & \text{dacă} \quad f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ a_k = x_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}, & \text{dacă} \quad f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0, \end{cases} \tag{9}$$

unde $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

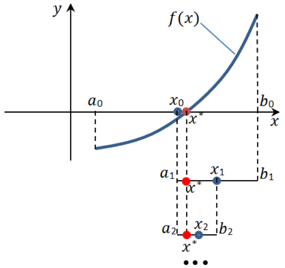

Figure: Metoda bisecției

Teorema (I.1.)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, $f(a)f(b) < 0$. Dacă f admite soluție unică $x^* \in (a, b)$ atunci șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ este convergent la x^* și

$$|x^* - x_k| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}, \forall k \geq 0 \tag{10}$$

Demonstrație:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2}|a_k - b_k| = \begin{cases} \frac{1}{2}|a_{k-1} - x_{k-1}|, f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ \frac{1}{2}|x_{k-1} - b_{k-1}|, f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0 \end{cases} \tag{11}$$

Constatăm că

$$\frac{1}{2}|a_{k-1} - x_{k-1}| = \frac{1}{2}|a_{k-1} - \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}| = \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| \tag{12}$$

Analog

$$\frac{1}{2}|x_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| \tag{13}$$

Astfel că, din (11) rezultă

$$0 \leq |x^* - x_k| \leq \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{8}|a_{k-2} - b_{k-2}| = ... = \frac{1}{2^{k+1}}|a_0 - b_0| \tag{14}$$

sau $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}}|a - b|$ de unde rezultă $lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. □

Criteriul de oprire: Fiind dat $\varepsilon > 0$, se caută $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow N > log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1 \Leftrightarrow N = \left[log_2(\frac{b-a}{\varepsilon})\right]$;

ALGORITM (Metoda bisecţiei)

Date de intrare: f, a, b, ε;

Date de ieşire: x_{aprox};

1. $a_0 = a$; $b_0 = b$; $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$;
   $N = \left[log_2(\frac{b-a}{\varepsilon})\right]$;
2. `for` $k = 1 : N$ `do`
   - `if` $f(x_{k-1}) = 0$ `then`
     - $x_k = x_{k-1}$;
     - `break`
   - `elseif` $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ `then`
     - $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;
   - `elseif` $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0$ `then`
     - $a_k = x_{k-1}$; $b_k = b_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;
   - `endif`

   `endfor`

   $x_{aprox} = x_k$.

I.2.Metoda Newton-Raphson

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda N-R presupune construcţia şirului $(x_k)_{k\geq 0}$ conform următoarei scheme grafice: la pasul k, aproximarea x_k a soluţiei exacte x^* a ecuaţiei $f(x) = 0$ se obţine prin intersecţia cu axa Ox a tangentei T la graficul funcţiei f în punctul $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$.

$$T : y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) \quad (15)$$

$$\{x_k\} = T \cap Ox \Rightarrow f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad (16)$$

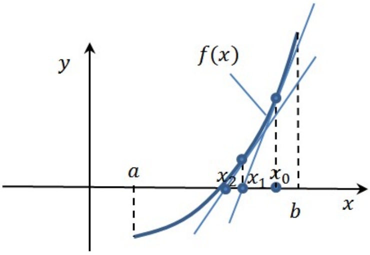

Figure: Metoda Newton

Teorema (I.2)

Presupunem că $f \in C^2([a,b])$, f', f'' nu se anulează pe $[a,b]$ și $f(a)f(b) < 0$. Fie $x_0 \in [a,b]$ astfel încât să aibă loc condiția

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \tag{17}$$

Atunci ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x^* \in (a,b)$, iar șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ construit prin metoda Newton-Raphson, rămâne în $[a,b]$ și converge la x^*.

Deoarece f', f'' nu se anulează pe intervalul $[a,b]$, atunci funcția trebuie să fie monotonă (crescătoare sau descrescătoare) și să nu-și schimbe concavitatea pe intervalul dat.

Strategie de lucru: Din punct de vedere computațional se alege conform graficului funcției un interval în care funcția să fie monotonă și să nu-și schimbe concavitatea. Valoarea x_0 se alege în modul următor:

1. Dacă f este convexă ($f''(x_0) > 0$), atunci $f(x_0) > 0$;
2. Dacă f este concavă ($f''(x_0) < 0$), atunci $f(x_0) < 0$.

Pentru metoda N-R ca și criteriu de oprire vom alege una din următoarele condiții:

- $|f(x_k)| < \varepsilon$;
- $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon$.

ALGORITM (Metoda Newton-Raphson)

Date de intrare: f, f', x_0, ε;
Date de ieșire: x_{aprox};

1. $k = 0$;
2. do

    $k = k + 1$;

    $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$;

   while $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \geq \varepsilon$;

   $x_{aprox} = x_k$.