

CONȚINUTUL CURSULUI #7:

IV. Interpolarea cu funcții spline.

IV.1. Interpolare cu funcții spline liniare.

IV.2. Interpolare cu funcții spline pătratice.

IV. Interpolarea cu funcții spline.

IV.1. Interpolare cu funcții spline liniare.

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $(x_i)_{i=\overline{1, n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, i.e. $a = x_1 < \dots < x_{n+1} = b$. Fie $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ cu $\bar{I}_j = [\overline{x_j}, \overline{x_{j+1}}]$, $I_n = \bar{I}_n = [x_n, x_{n+1}]$.

Definiția (IV.1.)

Funcția $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcție spline liniară pentru funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dacă:

• S este liniară pe porțiuni:

$$S(x) = S_j(x), \quad \forall x \in I_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (1)$$

unde

$$S_j : \bar{I}_j \rightarrow \mathbb{R}, \quad S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j), \quad j = \overline{1, n} \quad (2)$$

cu $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, ce trebuie determinate.

Definiția (IV.1. (continuare))

(b) S interpolează f în x_j , $j = \overline{1, n+1}$:

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n+1} \quad (3)$$

(c) S este continuă în nodurile interioare, i.e. x_{j+1} , $j = \overline{1, n-1}$:

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \quad (4)$$

Relațiile (3)–(4) ne furnizează sistemul de ecuații liniare, i.e. $2n$ ecuații liniare pentru necunoscutele $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$.

Conform condiției (b) și ținând cont de faptul că $x_j \in I_j$, $j = \overline{1, n}$ rezultă

$$S(x_j) = S_j(x_j) = f(x_j), \quad \text{deci} \quad a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n}$$

Nodul $x_{n+1} \in I_n$, deci

$$\begin{aligned} S(x_{n+1}) &= S_n(x_{n+1}) \Rightarrow a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}) \Rightarrow \\ b_n &= \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \end{aligned} \quad (5)$$

Conform condiției (c) se obțin succesiv următoarele relații:

$$\begin{aligned} (a_j + b_j(x - x_j))|_{x=x_{j+1}} &= (a_{j+1} + b_{j+1}(x - x_{j+1}))|_{x=x_{j+1}} \\ a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) &= a_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \\ b_j &= \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}, \quad j = \overline{1, n-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Rezultă următoarea schemă numerică de determinare a coeficienților a_j, b_j , $j = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), & j = \overline{1, n} \\ b_j = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}, & j = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (7)$$

ALGORITM (Interpolarea spline liniară)**Date de intrare:** $X; Y; x;$ **Date de ieșire:** $y;$ 1: Determină $n;$ 2: for $j = 1 : n$ do

$$a_j = Y_j; \quad b_j = \frac{Y_{j+1} - Y_j}{X_{j+1} - X_j};$$

endfor

3: for $j = 1 : n$ doif $x \in [X_j, X_{j+1}]$ do

$$S = a_j + b_j(x - X_j);$$

STOP

endif

endfor

 $y = S;$

Obs.: Vectorul X conține nodurile de interpolare x_1, \dots, x_{n+1} , iar vectorul Y conține valorile funcției în nodurile de interpolare, $f(x_1), \dots, f(x_{n+1})$.

Exemplul # 1: Să se afle funcția spline liniară pentru funcția $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$.

Rezolvare:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x), & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

unde $S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1)$ și $S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2)$. Se obține astfel

$$S(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x + 1), & x \in [-1, 0] \\ a_2 + b_2x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Deoarece S interpolează f în cele trei noduri rezultă

$$S(x_1) = f(x_1), S(x_2) = f(x_2), S(x_3) = f(x_3)$$

echivalent:

$$S_1(-1) = e^{-2}, \quad S_2(0) = 1, \quad S_2(1) = e^2$$

de unde $a_1 = e^{-2}$, $a_2 = 1$, $a_2 + b_2 = e^2$, deci $b_2 = e^2 - 1$.

Pe de altă parte, S este continuă în nodul $x_2 \in (-1, 1)$, i.e.

$S_1(x_2) = S_2(x_2)$ sau $S_1(0) = S_2(0)$, deci $a_1 + b_1 = a_2$, de unde rezultă $b_1 = 1 - e^{-2}$. Obținem astfel, următoarea reprezentare:

$$S(x) = \begin{cases} e^{-2} + (1 - e^{-2})(x + 1), & x \in [-1, 0] \\ 1 + (e^2 - 1)x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + (1 - e^{-2})x, & x \in [-1, 0] \\ 1 + (e^2 - 1)x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

IV.2. Interpolare cu funcții spline pătratice.**Definiția (IV.2.)**

Funcția $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcție spline pătratică pentru funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dacă:

① S este pătratică pe porțiuni:

$$S(x) = S_j(x), \quad \forall x \in I_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (8)$$

unde

$$S_j : I_j \rightarrow \mathbb{R},$$

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2, j = \overline{1, n} \quad (9)$$

cu $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, ce trebuie determinate.

(b) S interpolează f în x_j , $j = \overline{1, n+1}$:

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n+1} \quad (10)$$

Definiția (IV.2. (continuare))

(c) S este continuă în nodurile interioare x_{j+1} , $j = \overline{1, n-1}$:

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \quad (11)$$

(d) S' este continuă în nodurile interioare x_{j+1} , $j = \overline{1, n-1}$:

$$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \quad (12)$$

(e) Una din următoarele condiții este satisfăcută

$$(e)_1: S'(x_1) = f'(x_1)$$

$$(e)_2: S'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$$

Conform condiției (b) rezultă

$$a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \quad (13)$$

$$a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + c_n(x_{n+1} - x_n)^2 = f(x_{n+1}) \quad (14)$$

Conform condiției (c) rezultă

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 = a_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \quad (15)$$

sau

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 = f(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \quad (16)$$

Relațiile (14) și (16) pot fi cuplate și rescrise ca o singură relație pentru $j = \overline{1, n}$.

Cum $S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j)$, atunci conform condiției (d) rezultă

$$b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) = b_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \quad (17)$$

Conform condiției (e) rezultă

$$S'_1(x_1) = f'(x_1) \Rightarrow b_1 = f'(x_1) \quad (18)$$

sau

$$S'_n(x_{n+1}) = f'(x_{n+1}) \Rightarrow b_n + 2c_n(x_{n+1} - x_n) = f'(x_{n+1}) \quad (19)$$

Dacă în (19) considerăm $b_{n+1} = f'(x_{n+1})$ atunci relațiile (19) și (17) pot fi cuplate și rescrise ca o singură relație pentru $j = \overline{1, n}$.

Curs #7

June 1, 2023

9 / 15

Curs #7

June 1, 2023

10 / 15

Fie $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = \overline{1, n}$ lungimea fiecărei subinterval $[x_j, x_{j+1}]$.

Obținem astfel, sistemele complete de ecuații necesare pentru determinarea coeficienților b_j, c_j :

$$\begin{cases} a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = f(x_{j+1}), & j = \overline{1, n} \\ b_1 = f'(x_1) \\ b_j + 2c_j h_j = b_{j+1}, & j = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (20)$$

sau

$$\begin{cases} a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = f(x_{j+1}), & j = \overline{1, n} \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ b_j + 2c_j h_j = b_{j+1}, & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (21)$$

Din (20)₁ rezultă

$$c_j = \frac{1}{h_j^2} (f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j), \quad j = \overline{1, n} \quad (22)$$

Introducând (22) în (20)₃ obținem

$$b_{j+1} + b_j = \frac{2}{h_j} (f(x_{j+1}) - f(x_j)), \quad j = \overline{1, n-1} \quad (23)$$

Rezultă schemele numerice de calcul a coeficienților $b_j, c_j, j = \overline{1, n}$

$$\begin{cases} b_1 = f'(x_1) \\ b_{j+1} = \frac{2}{h_j} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) - b_j, & j = \overline{1, n-1} \\ c_j = \frac{1}{h_j^2} (f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j), & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (24)$$

sau

$$\begin{cases} b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ b_j = \frac{2}{h_j} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) - b_{j+1}, & j = \overline{n, 1} \\ c_j = \frac{1}{h_j^2} (f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j), & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (25)$$

Curs #7

June 1, 2023

11 / 15

Curs #7

June 1, 2023

12 / 15

Exemplul #2: Să se afle funcția spline pătratică pentru funcția $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$.

Rezolvare:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x), & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

unde

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$$

și

$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$$

Se obține astfel

$$S(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x + 1) + c_1(x + 1)^2, & x \in [-1, 0) \\ a_2 + b_2x + c_2x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Deoarece S interpolează f în cele trei noduri rezultă

$$S(x_1) = S_1(x_1) = f(x_1), S(x_2) = S_2(x_2) = f(x_2), S(x_2) = S_2(x_3) = f(x_3)$$

echivalent

$$S_1(-1) = e^{-2}, S_2(0) = 1, S_2(1) = e^2$$

de unde $a_1 = e^{-2}$, $a_2 = 1$, $a_2 + b_2 + c_2 = e^2$, deci

$$b_2 + c_2 = e^2 - 1. \quad (26)$$

Pe de altă parte, S este continuă în nodul $x_2 \in (-1, 1)$, i.e.

$S_1(x_2) = S_2(x_2)$ sau $S_1(0) = S_2(0)$, deci $a_1 + b_1 + c_1 = a_2$, de unde rezultă

$$b_1 + c_1 = 1 - e^{-2}. \quad (27)$$

Derivatele funcțiilor S_1 și S_2 sunt:

$S'_1(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1)$, $S'_2(x) = b_2 + 2c_2(x - x_2)$. Funcția S' se exprimă prin formula

$$S'(x) = \begin{cases} b_1 + 2c_1(x + 1), & x \in [-1, 0) \\ b_2 + 2c_2x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Derivata S' a funcției spline pătratică este continuă în nodul interior x_2 ,

i.e. $S'_1(x_2) = S'_2(x_2)$ sau $S'_1(0) = S'_2(0)$ de unde rezultă

$$b_1 + 2c_1 = b_2 \quad (28)$$

Considerăm în plus satisfăcută condiția $S'(x_1) = f'(x_1)$ sau

$S'_1(-1) = f'(-1)$, de unde $b_1 = 2e^{-2}$. Din relația (27) rezultă

$c_1 = 1 - 3e^{-2}$, iar din (28) rezultă $b_2 = 2 - 4e^{-2}$. În final, din relația (26)

rezultă $c_2 = e^2 + 4e^{-2} - 3$. Obținem astfel, următoarea reprezentare a

funcției spline pătratice S :

$$S(x) = \begin{cases} e^{-2} + 2e^{-2}(x + 1) + (1 - 3e^{-2})(x + 1)^2, & x \in [-1, 0) \\ 1 + (2 - 4e^{-2})x + (e^2 + 4e^{-2} - 3)x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$