CONȚINUTUL CURSULUI #2:

La pasul k, aproximarea x_k a soluției exacte x^* a ecuației $f(x) = 0, x \in [a, b]$ se obține prin intersecția cu axa Ox a secantei AB la graficul lui f, prin punctele $A\big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$ și $B\big(x_{k-2}, f(x_{k-2})\big)$. Prin urmare, nu se mai folosește tangenta la graficul lui f, deci nu mai este necesar caculul derivatei lui f.

$$AB : \frac{x - x_{k-1}}{x_{k-2} - x_{k-1}} = \frac{y - f(x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} \tag{1}$$

$$\{x_k\} = AB \cap Ox \Rightarrow \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-2} - x_{k-1}} = -\frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} \Rightarrow$$

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

sau

$$x_k = \frac{x_{k-2}f(x_{k-1}) - x_{k-1}f(x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, k \geq 2 \tag{2}$$

unde $x_0, x_1 \in [a, b]$

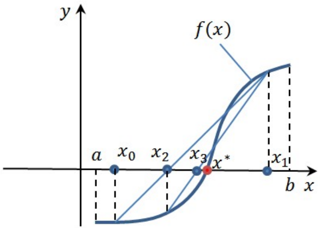

Figure: Metoda secantei

Teorema ((I.3.) Convergența metodei secantei)

Presupunem că $f \in C^1([a, b]), f(a)f(b) < 0, f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$. *Atunci* $\exists! x^*$ *astfel încât* $f(x^*) = 0$. *Mai mult,* $\exists \delta > 0$, *astfel încât, dacă* $x_0, x_1 \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \subseteq [a, b]$, *atunci șirul* $(x_k)_{k \geq 0}$ *construit prin metoda secantei rămâne în intervalul* $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ *și converge către* x^*.

Din punct de vedere computațional valorile inițiale x_0, x_1 se aleg din vecinătatea soluției x^*, astfel încât la fiecare iterație se testează ca termenul x_k să rămână în intervalul $[a, b]$. Pentru optimizarea metodei se va alege intervalul maxim $[a, b]$ pe care funcția f este definită, nu-și schimbă monotonia (i.e. $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$) și $f(a)f(b) < 0$.

ALGORITM (Metoda secantei)

Date de intrare: $f, a, b, x_0, x_1, \varepsilon$;
Date de ieșire: x_{aprox};

1. Se aleg $x_0, x_1 \in [a, b]$; $k = 1$;
2. while $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \geq \varepsilon$ do

    $k = k + 1$;

    $x_k = \dfrac{x_{k-2}f(x_{k-1}) - x_{k-1}f(x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$;

    if $x_k < a$ or $x_k > b$ then

        OUTPUT('Introduceţi alte valori pentru x_0, x_1');

        STOP.

    endif

   endwhile;
3. $x_{aprox} = x_k$.

I.4. Metoda poziției false

Metoda poziției false construiește șirurile $(a_k)_{k\geq 0}, (b_k)_{k\geq 0}, (x_k)_{k\geq 0}$ conform următoarei scheme grafice: la pasul k, aproximarea x_k a soluției exacte x^* a ecuației $f(x) = 0$ se obține prin intersecția dreptei AB cu axa Ox, unde $A(a_k, f(a_k)), B(b_k, f(b_k))$. Intervalul $[a_k, b_k]$ se construiește conform metodei bisecției.

$$AB : \frac{x - a_k}{b_k - a_k} = \frac{y - f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \tag{3}$$

$$\{x_k\} = AB \cap Ox \Rightarrow \frac{x_k - a_k}{b_k - a_k} = \frac{-f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \Rightarrow \tag{4}$$

$$x_k = a_k - f(a_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \tag{5}$$

sau

$$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \tag{6}$$

Avem astfel următoarea schemă generală:

$$(a_k, b_k, x_k) \tag{7}$$

$$= \begin{cases} a_k = a_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = x_{k-1}, \text{ dacă } f(x_{k-1}) = 0 \\ a_k = a_{k-1}, b_k = x_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}, \text{ dacă } f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ a_k = x_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}, \text{ dacă } f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0, \end{cases} \tag{8}$$

unde $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$.

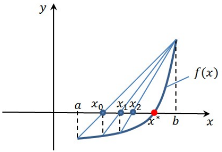

Figure: Metoda poziției false

Teorema (I.4. Teorema de convergență a metodei poziției false)

Presupunem că $f \in C^2([a, b]), f(a)f(b) < 0$ și f', f'' nu se anulează pe $[a, b]$. Atunci ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x^* \in (a, b)$, iar șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ construit prin metoda poziției false converge la x^*.

ALGORITM (Metoda poziției false)

Date de intrare: f, a, b, ε; **Date de ieșire:** x_{aprox};

1. $k = 0; a_0 = a; b_0 = b; x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$;
2. do

    $k = k + 1$;

    if $f(x_{k-1}) = 0$ then

      $x_k = x_{k-1}$;

      STOP.

    elseif $f(a_{k-1}) f(x_{k-1}) < 0$ then

      $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$;

    elseif $f(a_{k-1}) f(x_{k-1}) > 0$ then

      $a_k = x_{k-1}$; $b_k = b_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$;

    endif

  while $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \geq \varepsilon$;

3. $x_{aprox} = x_k$.