

## VIII. 1. Regresie liniară

Fie dat următorul tabel de date :

$x_i$	$y_i$
1	1,3
2	3,5
3	4,2
4	5
5	7
6	8,8
7	10,1
8	12,5
9	13,0
10	15,6

Reprezentarea grafică a punctelor  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, 10}$  se poate vedea în Fig. 1.

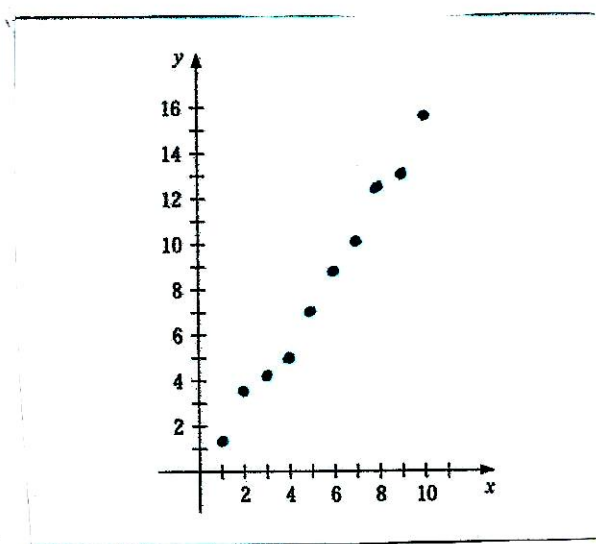


Fig. 1

Conform graficului se observă că relația dintre  $x$  și  $y$  este una liniară. Motivul pentru care aceste puncte nu se află pe dreaptă este acela că datele experimentale au fost obținute cu o marjă de eroare.

În acest caz nu este indicat să se construiască o funcție care să interpoleze datele, ci mai degrabă să le aproximeze.

Prin interpolare, cum ar fi interpolarea Lagrange se introduc oscilații care nu sunt naturale. De exemplu, reprezentarea grafică a polinomului  $P_9(x)$  care interpoalează setul de date de mai sus este dată în Fig. 2.

Vom construi în continuare o dreaptă de ecuație  $y = ax + b$  care trece cel mai aproape de punctele date. Coeficienții  $a$  și  $b$  sunt necunoscuți și urmează a fi calculați.

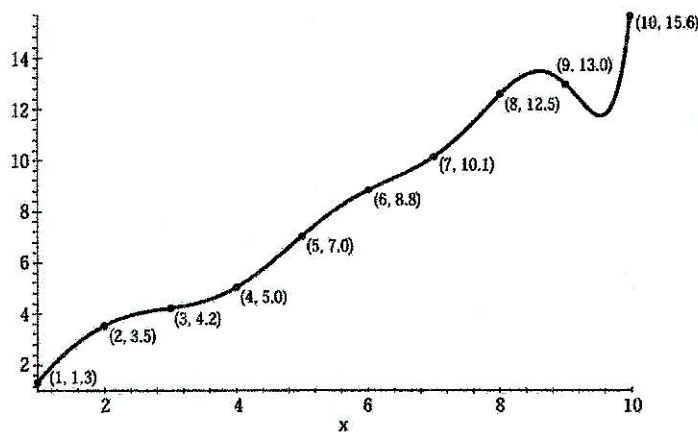


Fig. 2

Distanța pe verticală dintre punctul  $(x_i, y_i)$  și cel situat pe dreaptă,  $(x_i, ax_i + b)$  este  $|y_i - (ax_i + b)|$ .

Fie vectorii  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  și  $\bar{y} = (ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b)$ .

Coefficienții  $a$  și  $b$  îi vom calcula minimizând funcția:

$$E(a, b) = \|y - \bar{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

Precizăm că  $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ , unde  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Minimizând funcția  $E$  se obține poziția optimă a dreptei  $y = ax + b$  față de punctele  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Funcția  $E$  admite un punct de minim care este și punct staționar. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) \cdot (y_i - (ax_i + b))'_a = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) \cdot (y_i - (ax_i + b))'_b = 0 \end{cases}$$

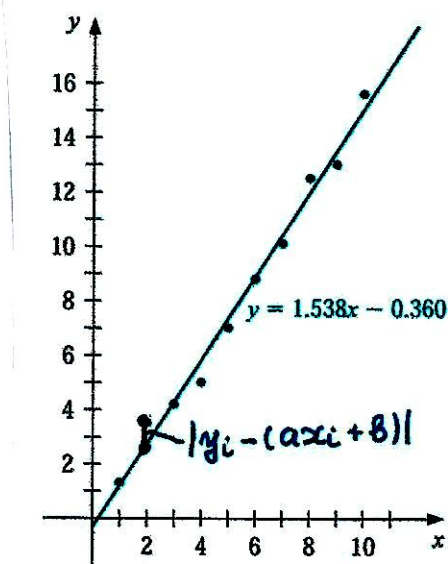


Fig. 3



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) \cdot (-x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sum_{i=1}^n x_i y_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ -\sum_{i=1}^n y_i + a \sum_{i=1}^n x_i + b \underbrace{\sum_{i=1}^n 1}_{n} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Sistemul obținut este un sistem liniar. Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^0}_{n} \end{pmatrix}$$

iar vectorul termenilor liberi

$$W = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

Coeficienții  $a$  și  $b$  se determină în urma rezolvării sistemului  $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = W$ .

Obs: Pentru rezolvarea numerică a sistemului anterior se poate aplica una din metodele de eliminare Gauss.

Pentru exemplul de mai sus funcția liniară  $y = ax + b$  este

$$y = 1,538x - 0,360 \text{ (vezi Fig. 3)}$$

## VIII. 2. Regresie polinomială

Dacă punctele  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  se află pe o curbă polinomială atunci funcția care aproximează datele o putem alege de forma unui polinom de grad  $m$

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Considerăm în continuare cazul  $m=2$ , caz care corespunde regresiei pătratice.

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Minimizând funcția  $E(a, b, c) = \|y - \bar{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$

obținem poziția optimă a parabolei față de punctele  $(x_i, y_i)$ . Aflăm punctul staționar <sup>pentru</sup> funcția  $E$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial c}(a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)) \cdot (-x_i^2) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)) \cdot (-x_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)) \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^2 \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$



În acest caz matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^0 \end{pmatrix}$$

iar vectorul termenilor liberi

$$W = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^0 \end{pmatrix}$$

### VIII. 3. Regresia exponențială

Dacă datele experimentale descriu o funcție exponențială, putem căuta curba  $y = b e^{ax}$  urmînd aceeași strategie.

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - b \cdot e^{ax_i})^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (y_i - b \cdot e^{ax_i}) \cdot (y_i - b \cdot e^{ax_i})'_a = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (y_i - b \cdot e^{ax_i}) \cdot (y_i - b \cdot e^{ax_i})'_b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - b \cdot e^{ax_i}) \cdot (-b e^{ax_i} \cdot x_i) = 0 \\ \sum (y_i - b e^{ax_i}) \cdot (-e^{ax_i}) = 0 \end{cases}$$

Observăm că sistemul obținut nu poate fi rezolvat analitic.

Pentru a determina totuși coeficientii  $a$  și  $b$  vom logaritma expresia  $y = b \cdot e^{ax}$ :  $\ln y = \ln(b \cdot e^{ax}) \Rightarrow \ln y = \ln b + \ln(e^{ax}) \Rightarrow$

$$\ln y = \ln b + a \cdot x \Rightarrow \ln y = b' + a \cdot x, \text{ cu } b' = \ln b$$

Prescriem funcția  $E$  pentru ecuația obținută, care este echivalentă cu cea de la care am pornit

$$E(a, b') = \sum_{i=1}^n (\ln y_i - (b' + ax_i))^2$$

Observăm că  $E$  este similară cazului liniar.

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a}(a, b') = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b'}(a, b') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (\ln y_i - (b' + ax_i)) (x_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (\ln y_i - (b' + ax_i)) \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b' \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (\ln y_i) \cdot x_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b' \cdot n = \sum_{i=1}^n (\ln y_i) \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținem valori pentru  $a$  și  $b'$ .

cum  $b'$  este calculat, din  $b' = \ln b$  rezultă  $\boxed{b = e^{b'}}$

Obs.: Metoda de determinare a funcțiilor care aproximează un set de date, prezentată în cadrul acestui curs se numește metoda celor mai mici pătrate.