Simulering av rullende ball

Dag Nylund,

17. september 2019

Innhold

1 Introduksjon

- Mål: Simulere baller som ruller på en triangulering av terrengmodell fra geodata.
- Delmål: Simulering på et TriangleSurface objekt (drawArrays(), dupliseringer).
- Ser først på en ball på en trekant.
- Ser deretter på rulling over trekantskjøter.

2 Mekanikk repetisjon

- Fysikk/mekanikk: bevegelsesligninger
- Newtons 2. lov
$$\Sigma_i \vec{F}_i = m\vec{a} \tag{1}$$
- Hvilke tilstander kan en ball ha?
  - Stille på et underlag.
  - Fritt fall. Krefter som virker: $\vec{G} = m\vec{g}$ og luftmotstand. I så fall er ikke ballen i kontakt med andre objekter.
  - Altså: kan være i kontakt med annet objekt eller ikke.
  - Når ballen ligger stille på et underlag - hvorfor? Normalkraften $\vec{N}$ fra bordet oppveier tyngdekraften $\vec{G}$. Kreftene er like store og motsatt rettet. $\Sigma_i \vec{F}_i = \vec{G} + \vec{N} = 0$
  - Ballen beveger seg på underlaget. Rulle, med konstant fart eller akselerasjon.
  - Ballen kan treffe en vegg eller kollidere med et annet objekt - altså kan den være i kontakt med flere andre objekter samtidig.
  - Ser først på *en* ball som faller fritt, deretter *en* ball som ruller.
  - Hva slags underlag? En oveflate som består av triangler. Ballen er til enhver tid på et triangel. Vi kan finne ut hvilket. Barysentriske koordinater.

3 Bevegelsesligninger

Bevegelsesligningene som er listet opp nedenfor, er kjent stoff fra fysikk/mekanikk og delvis fra Matematikk 1. Ligningene kan settes opp som skalare ligninger, eller på vektorform.

3.1 Skalare

Skalarligningene for hastighet og tilbakelagt strekning ved konstant akseleasjon er gitt ved

$$v = v_0 + at \tag{2}$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \tag{3}$$

hvor v_0 er initiell hastighet, t er tiden og a er akselerasjonen.

- Enheter:
  - Hastighet: $[v] = \frac{m}{s}$
  - Akselerasjon: $[a] = \frac{m}{s^2}$
  - Enheten for kraft er Newton. $N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$
- Hastighet er endring av posisjon: $s'(t) = v(t)$
- Akselerasjon er endring av hastighet: $v'(t) = a(t)$
- Da blir $a(t) = s''(t)$
- Akselerasjonen er vanligvis konstant eller påvirket av andre variabler enn tiden.

3.2 Eksempel

Vi må kunne bruke disse ligningene til noe praktisk: Et legeme slippes fra 10 meters høyde. Hvor lang tid tar det før legemet treffer bakken, og hvor stor er hastigheten da?

Løsning: Vi kan starte med å prøve oss fram. Siden vi har med fritt fall å gjøre, er det tyngdens akselerasjon som gjelder, så vi erstatter a med g. Det er også vanlig å erstatte s med h ved fritt fall, og likning (3) blir da $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$.

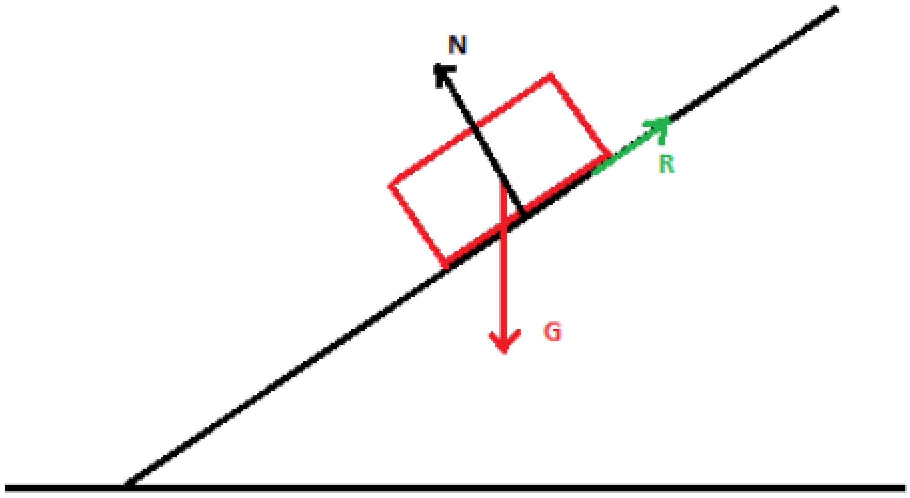
Vi har s=10, og hvis vi setter inn t=1.0 i ligningen, får vi
$h = 0 + \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 1.0\ s^2 = 4.9\ m$.

Vi ser at legemet bare er ca halvveis nede etter 1.0 sekund. Hastigheten etter 1.0 sekund finner vi av likning (2): $v = 0 + 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 1.0\ s = 9.8 \frac{m}{s}$.

Nå burde vi absolutt kunne bedre enn å prøve (og feile) med formler. Vi kan i stedet løse høydeligningen ovenfor med hensyn på t:

$h = 0 + \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Med $h = 10$ får vi $t = 1.43\ s$ og $v = 0 + 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1.43\ s = 14.0 \frac{m}{s}$.



Figur 1: Krefter som virker på en kloss.

3.3 På vektorform

- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$
- $\vec{p} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2$
- Hastighet er endring av posisjon: $\vec{p}'(t) = \vec{v}(t)$
- Akselerasjon er endring av hastighet: $\vec{v}'(t) = \vec{a}(t)$
- $\vec{a}(t) = \vec{p}''(t)$

Vanlig notasjon er å erstatte vektortegn med fet type. Skalarprodukt/prikkprodukt kalles gjerne indreprodukt, og $\vec{a} \cdot \vec{b}$ er ekvivalent med skrivemåtene $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ og $<\mathbf{a}, \mathbf{b}>$. Både $|\mathbf{x}|$ og $||\mathbf{x}||$ brukes til å angi lengden til $\mathbf{x}$.

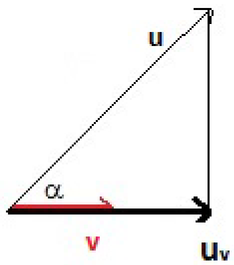
3.4 På vektorform med fet type

- $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}t$
- $\mathbf{p} = \mathbf{v_0}t + \frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot t^2$

3.5 Oppgave

a) Et legeme slippes fra 2 meters høyde. Hvor lang tid tar det før legemet treffer bakken, og hvor stor er hastigheten da?

b) Finn et egnet sted med høyde mellom 5 og 10 meter. Mål høyden, slipp en ball (liten, kompakt sprettball-type), og ta tiden. Kontroller svaret ved å bruke likning (3).



Figur 2: Projeksjonen av en vektor på en annen vektor.

3.6 Oppgave

a) Et AA-batteri slippes øverst på et skråplan med lengde 1.18m og bruker 0.63s på å rulle ned (gjennomsnitt av 8 målinger). Hva er hastigheten når det er nede?

b) I et nytt forsøk senkes skråplanet, og AA-batteriet bruker nå 0.86s på å rulle ned (gjennomsnitt av 5 målinger). Hva er hastigheten når det er nede i dette tilfellet?

e) I det første tilfellet er høyden til skråplanets øverste kant 0.78m og vinkelen med underlaget $\alpha = 41.4°$. I det andre tilfellet henholdsvis 0.44m og 21.9°. Regn ut tyngdekraftens (og tyngdens akselerasjon sin) komponent parallelt med skråplanet i de to forsøkene .

d) Sammenligne svar i c) med svar fra a) og b).

4 Projeksjon av en vektor

Vi vil få bruk for projeksjonen av en vektor på en annen vektor. Gitt to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ hvor vinkelen mellom vektorene er α og $\vec{v}$ er en enhetsvektor, $|\vec{v}| = 1$. figur 2 viser projeksjonen $\vec{u}_{\vec{v}}$ av $\vec{u}$ på $\vec{v}$.

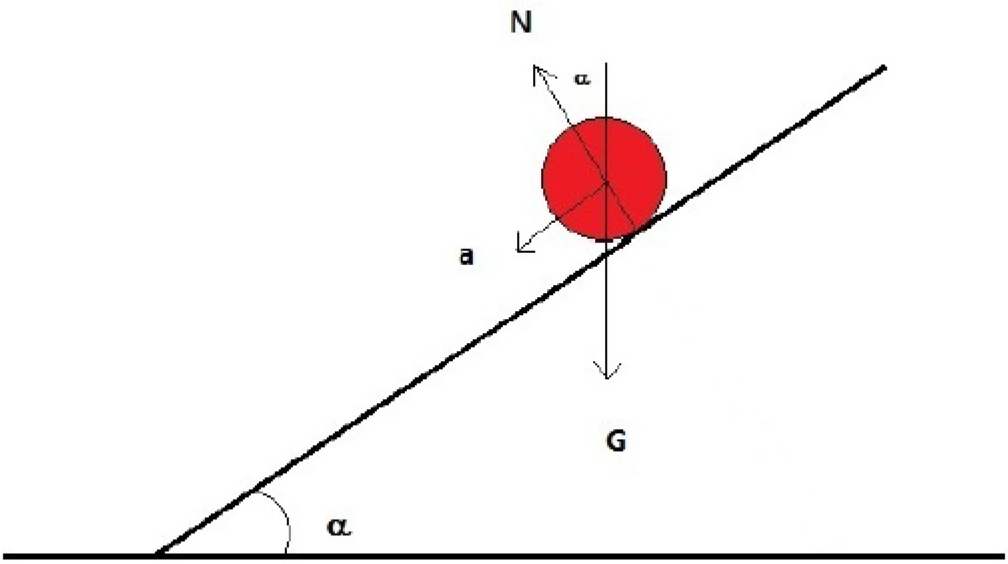
Vi har $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = |\vec{u}| \cdot 1 \cdot \cos\alpha$. Høyresiden her er $\vec{u}_{\vec{v}}$ og vi skal skalere $\vec{v}$ med dette tallet, slik at

$$\vec{u}_{\vec{v}} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \tag{4}$$

4.1 Øving

Vis at vinkelen α mellom underlaget og skråplanet på figur 3 er den samme som mellom normalvektoren og en vertikal linje (enhetsvektoren $\vec{k} = [0, 0, 1]$.

Bevis: Trekk en hjelpelinje i forlengelsen av normalvektoren, helt til den treffer underlaget. Vi får da en rettvinklet trekant hvor den siste vinkelen er $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Trekk en hjelpelinje i forlengelsen av $\vec{G}$. Vi ser da at den øverste vinkelen i denne er α. Siden den er komplementærvinkel til vinkelen mellom $\vec{N}$ og $\vec{k}$, er denne også α.



Figur 3: Kreftene som virker på en ball på et plan når vi ikke har friksjon.

5 Simulering av rullende ball

Vi ser her på en ball som ruller på et plan uten friksjon. (Dog er det såpass friksjon at den ruller.)

Gitt $\vec{G}$ og en normalvektor til planet, $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]$ hvor $|\vec{n}| = 1$. Normalvektoren $\vec{n}$ kan beregnes ved kryssprodukt når vi kjenner vertexene til det aktuelle trianglet. Da blir kraften som virker fra planet på kula projeksjonen av $\vec{G}$ på $\vec{n}$:

$$\vec{N} = |\vec{G}| \cdot \vec{n} \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot [n_x, n_y, n_z] \cdot \cos\alpha \tag{5}$$

Her er α vinkelen mellom planet og xy-planet, eller ekvivalent vinkelen mellom planets normalvektor $\vec{n}$ og xy-planets normalvektor $\vec{k} = [0, 0, 1]$. Det er lett å finne α. Siden

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = |\vec{n}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos\alpha$$

og

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = [n_x, n_y, n_z] \cdot [0, 0, 1] = n_z$$

følger at

$$\cos\alpha = n_z \tag{6}$$

Ballens retning i xy-planet er projeksjonen av $\vec{n}$ på xy-planet: $[n_x, n_y, 0]$ og tyngdens akselerasjonskomponent parallelt med planet er $\vec{g} \cdot \sin\alpha$.

Vi kan da sette inn uttrykket fra likning (5) i likning (1) og vi får da

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \\
&= \frac{1}{m}(\vec{N}+\vec{G}) \\
&= \frac{1}{m}\left([n_x, n_y, n_z]\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha + m\cdot[0,0,-g]\right) \\
&= [n_x, n_y, n_z]\cdot g\cdot n_z + [0,0,-g] \\
&= [n_x\cdot g\cdot n_z, n_y\cdot g\cdot n_z, n_z^2\cdot g] + [0,0,-g] \\
&= g\,[n_x\cdot n_z, n_y\cdot n_z, n_z^2 - 1]
\end{aligned} \tag{7}$$

figur 3 viser kreftene som virker på ballen når det ikke er friksjon i henhold til Newtons 2. lov.

6 Implementering

6.1 Algoritme

- Beregn normalvektoren i kontaktpunktet med underlaget
- Beregn akselerasjonsvektoren til kula etter ligning 7
- Oppdater ballens hastighet
- (Beregn ballens rotasjonsvektor)
- (Beregn ballens rotasjon)
- Oppdater ballens posisjon

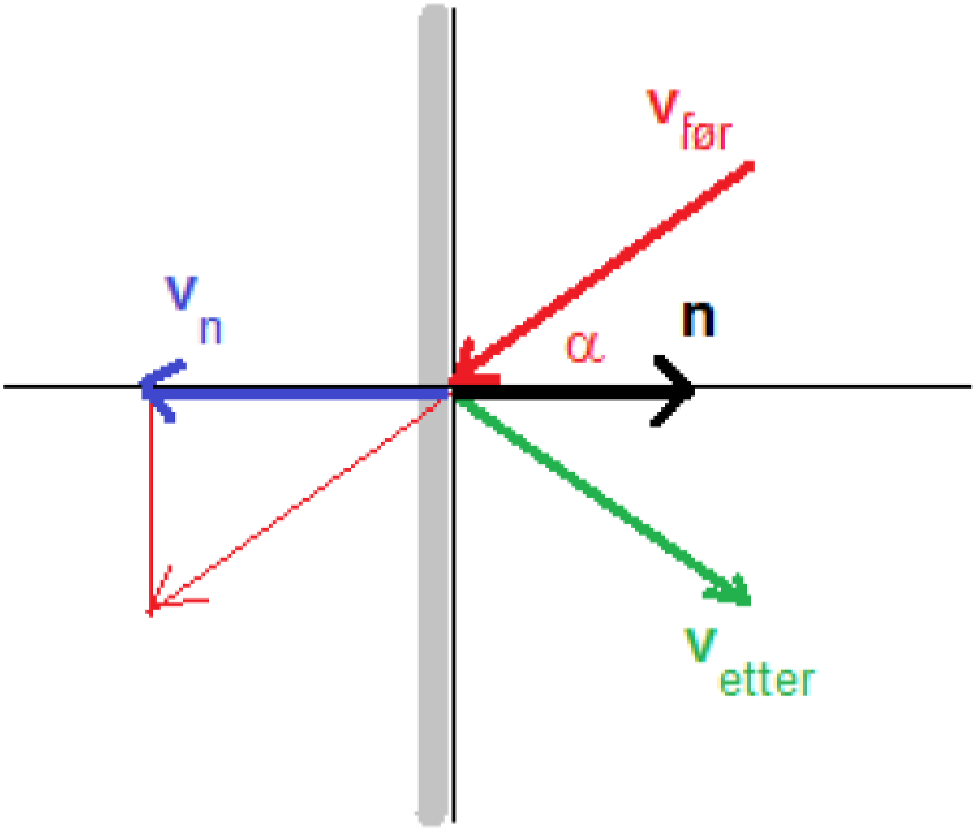
6.2 Hvordan beregne riktig normal?

- Identifiser hvilken trekant ballen er på (med barysentriske koordinater)
- Trenger hjørnene (vertices) i rekkefølge mot urviseren v_0, v_1, v_2
- Normalvektor $\vec{N} = v_0\vec{v}_1 \times v_0\vec{v}_2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\times(\vec{v}_2 - \vec{v}_0)$
- Normaliser

7 Kollisjoner

- Hva er en kollisjon?
- Kolliderer ballen med underlaget hele tiden når den ruller?
- Kollisjon mellom bevegelig og statisk objekt.
- Kollisjon mellom to bevegelige objekter.

Vi skal først studere kollisjon ball-vegg, eller mer generelt kollisjon av et bevegelig objekt og et statisk objekt.



Figur 4: Kollisjon ball-vegg.

7.1 Ball-vegg kollisjon

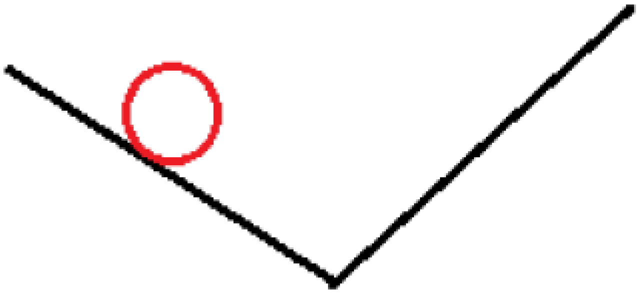
figur 4 viser en ball som ruller på et underlag og kolliderer med en vegg. Hastigheten er en vektor som kan dekomponeres, og situasjonen minner om en lysstråle som reflekteres når den treffer et speil. På figur 4 er det illustrert hvordan vi kan beregne den nye hastighetsvektoren. Vi ser at

$$\begin{aligned} \vec{v}_{etter} &= \vec{v} - 2 \cdot \vec{v}_n \\ &= \vec{v} - 2 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \end{aligned} \tag{8}$$

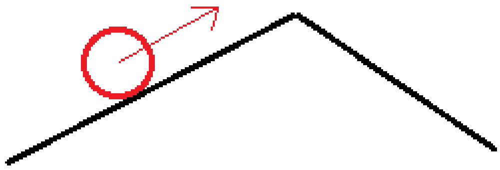
Her har vi utelatt subskripten *før* og vi har brukt likning (4) fra første til andre linje. avsnitt 7.1 er lett å implementere, og vi slipper å bry oss om cosinus og slikt.

8 Rulling på triangler

TriangleSurface består av triangler med ulike normalvektorer. Når ballen ruller på et gitt triangel og kommer i berøring med et annet triangel med en annen normalvektor, kan det betraktes som en kollisjon. Hvis normalvektorene er ulike og det oppstår en kollisjon, skal opplagt ballens hastighetsvektor endre seg.



Figur 5: Overgang fra et triangel til et annet over en felles kant - 1.



Figur 6: Overgang fra et triangel til et annet over en felles kant - 2.

Figurene figur 5 og figur 6 viser to ulike situasjoner. I tillegg kan det oppstå spesialtilfeller.

På figur 5 er ballen på veg nedover et plan, og $\vec{v}$ vil opplagt endre retning når den skal rulle oppover det høyre planet. På figur 6 derimot er ballen på veg oppover planet og det inntreffer ingen kollisjon umiddelbart når den passerer toppen. Den vil falle fritt en liten stund og falle ned igjen - da får vi en kollisjon.

8.1 Hvilket triangel er ballen på?

I begge tilfeller har vi å gjøre med en triangulert overflate, og vi kan bruke barysentriske koordinater til å bestemme hvilket triangel ballen ruller på. Dette kan gjøres på trianguleringen i xy-planet (eventuelt xz-planet), altså på projeksjonen av den triangulerte flaten. Når ballen er nært en felles kant for to triangler, kan tyngdepunktet ligge på et trangel samtidig med at det inntreffer en kollisjon med nabotrianglet. La oss i første omgang se bort fra spesialtilfeller og anta at vinkelen mellom de to nabotrekantene er større enn 90 grader. Da kan ikke ballens tyngdepunkt nå overflaten på den nye trekanten uten at også de barysentriske koordinatene også forteller at ballen beveger seg over den nye trekanten.

8.2

Hvordan skal man avgjøre hvilken situasjon som inntreffer? Gitt to plan π_1 og π_2 med normalvektorer $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ og la α være vinkelen mellom planene.

Indreproduktet $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ er kommutativt og gir ikke noe svar på vinkelen mellom de to planene. Men $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ peker utover/opp hvis $\alpha < \pi$ og innover hvis $\alpha > \pi$.

8.3 Kollisjonsdetektering ball-overflate

Vi kan detektere om ballen har kollidert med veggen ved å sammenligne avstanden fra sentrum/tyngdepunkt til overflaten med radius. La ballens radius være r og la koordinatene til ballens tyngdepunkt være $S = (x_1, y_1, z_1)$ og koordinatene til $P = (x_0, y_0, z_0)$. La videre $\vec{r} = S - P$. Da er $\vec{r}_n| \leq r$ hvis vi har en kollisjon og $\vec{r}_n| > r$ ellers. Retningen på $\vec{r}_n$ kan brukes til å avgjøre hvilken side av overflaten ballens tyngdepunkt ligger på. $\vec{r}_n$ kan regnes ut som i likning (4).

Gitt at vi har en situasjon som på figur 5, hvordan skal vi beregne hastigheten over det nye (høyre) trianglet? figur 8 viser situasjonen. Her er $\vec{u}$ hastigheten på venstre triangel med normalvektor $\vec{m}$, $\vec{v}$ hastigheten på høyre triangel med normalvektor $\vec{n}$. Vi er ute etter å fnne et plan som vist med grønt på figur 5, og normalvektoren $\vec{x}$ til dette planet. Da kan vi bruke samme beregning som for kollisjon ball-vegg (avsnitt 7.1) for å finne den nye hastigheten.

8.4 Normalen til kollisjonsplanet

La π betegne kollisjonsplanet som på figur 8, og la $\vec{x}$ være normalvektor til π. Da er

$$\vec{x} = \frac{\vec{m} + \vec{n}}{|\vec{m} + \vec{n}|} \tag{9}$$

Dette er lett å vise:

$$\vec{x} \cdot \vec{m} = \frac{\vec{m} + \vec{n}}{|\vec{m} + \vec{n}|} \cdot \vec{m} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{m} + \vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m} + \vec{n}|} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n} + \vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m} + \vec{n}|} = \vec{x} \cdot \vec{n}$$

siden $\vec{m} \cdot \vec{m} = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$. Vinkelen mellom $\vec{x}$ og hver av normalvektorene er altså den samme.

8.5 Eksempel

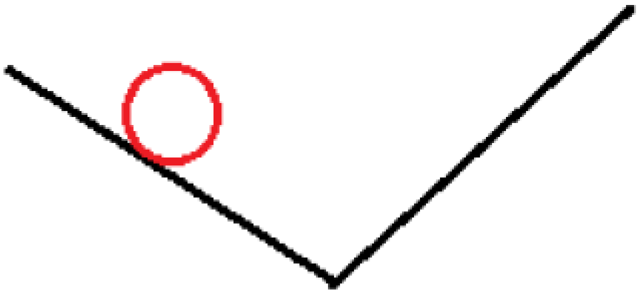
Se figur 9. Her er vinkelen mellom planene $\alpha = \frac{\pi}{4}$, altså 45 grader. Videre er

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\mathbf{n} &= (0, 1) \\
\mathbf{m} + \mathbf{n} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
||\mathbf{m} + \mathbf{n}||^{\mathbf{2}} &= 2 + \sqrt{2} \\
\mathbf{x} &= \frac{\mathbf{m} + \mathbf{n}}{||\mathbf{m} + \mathbf{n}||}
\end{aligned}$$

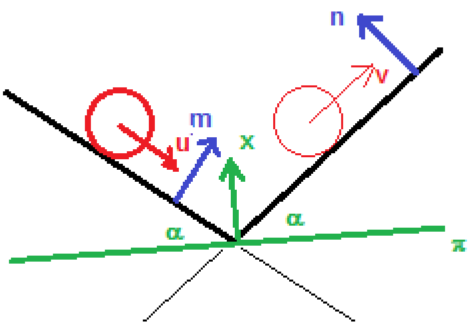
9 Oppgaver

9.1

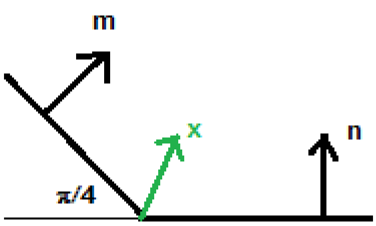
1. Lag minst



Figur 7: Kollisjonsdetektering ved overgang fra et triangel til et annet.



Figur 8: Hastighetsendring ved overgang fra et triangel til et annet.



Figur 9: Normalen til kollisjonsplanet.

9.2

Bruk figur 9 og avsnitt 8.5 til å beregne $\mathbf{x}$.

9.3

Gitt to andre plan med normalvektorer $\mathbf{m} = [\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}]$ og $\mathbf{n} = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

1. Tegn skisse som på figur 8
2. Regn ut vinkelen mellom planene α
3. Finn $\mathbf{x}$=$\mathbf{m}$+$\mathbf{n}$ og $||\mathbf{x}||$
4. Er $\mathbf{x}$ normal til kollisjonsplanet?

9.4 Obligatorisk oppgave 2 - del 1

Denne oppgaven går ut på simulering på et lite eksempel/datasett. Du skal lage en simulering av en ball som ruller (eller sklir) over to eller flere trekanter og kontrollere ved utregning at simuleringen er riktig. I hovedtrekk går oppgaven ut på å implementere Newton's 2. lov på en triangulær flate. På bakgrunn av det vi har gjennomgått i dette notatet og tidligere, kan vi dele opp oppgaven noe:

1. Bestem koordinatene til to eller flere trekanter og angi passende høydeverdier. Velg enkle tall slik at det blir lett å regne manuelt. Lag manuelt en tekstfil med vertex data og naboinformasjon som i Matematikk3, og les inn data fra fil slik at denne oppgaven kan utvides til et større datasett.
2. Implementer en klasse med navn f.eks GravitasjonsBall/RollingBall som arver OktaederBall (fra 3D-programmering, slik at rendring er impementert) og har en peker til et TriangleSurface objekt.
3. Vi trenger en funksjon som gitt ballens koordinater (senter) finner hvilken trekant ballen befinner seg på (vi trenger vertexene) og normalvektoren. Implementer denne.
4. Implementer rulling fra et triangel over på det neste som på figur 5.
5. Implementer move() funksjonen med oppdatering av hastighet og posisjon (akselerasjon kan være konstant).
6. Tilordne ballen en passende initiell posisjon og hastighet. Simuler rulling over to eller flere trekanter.

Bruk Git.

10 Fasit

Oppgave 3.5

a) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Med $h = 2$ får vi $t = \sqrt{\frac{4.0}{9.8}} = 0.64\ s$ og $v = 0 + 9.81\frac{m}{s^2} \cdot 0.64\ s = 6.3\frac{m}{s}$.

Oppgave 3.6

a) Vi får

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 1.18m}{0.63^2 s^2} = 5.95\frac{m}{s^2}$$

og

$$v = 5.95\frac{m}{s^2} \cdot 0.63s = 3.75\frac{m}{s}$$

b)

$$a = \frac{2 \cdot 1.18m}{0.86^2 s^2} = 3.19\frac{m}{s^2}$$

$$v = 3.19\frac{m}{s^2} \cdot 0.63s = 2.74\frac{m}{s}$$

.

c) Tyngdekraften$\vec{G}$ kan dekomponeres i en komponent vinkelrett på skråplanet (like stor og motsatt rettet $\vec{N}$ og en komponent parallelt med skråplanet, $\vec{G}\sin\alpha$. Akselerasjonen har selvsagt samme retning. Hvis vi ser bort fra friksjonen, blir akselerasjonen parallelt med skråplanet $a = g\sin\alpha = 9.81\sin 41.4^\circ = 9.81 \cdot 0.66 = 6.49$. I det siste tilfellet får vi $a = 9.81\sin 21.9^\circ = 9.81 \cdot 0.37 = 3.66$.

d) Vi har $\frac{5.95}{6.49} = 0.92$ og $\frac{3.19}{3.66} = 0.87$. Vi ser at akselerasjonen i forsøket er ca 10% lavere enn teoretisk akselerasjon uten friksjon.

Oppgave 9.2

Løsning:

$$\mathbf{x} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = (\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2})}}, \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}) = (0.383, 0.924)$$

Vi har $\mathbf{x} \cdot \mathbf{m} = (0.383, 0.924) \cdot (0.707, 0.707) = 0.271 + 0.653 = 0.924$ og $\arccos(0.924) = 22.5$ grader.

Videre $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = (0.383, 0.924) \cdot (0, 1) = 0.924$ og $\arccos(0.924) = 22.5$ grader.

Vinkelen mellom hver av planenes normal og den foreslåtte normalen til kollisjonsplanet er altså som forventet den samme.

Figur 10: Oppgave 9.2