座位号　姓名　学号　教学班号（课序号）　年级　专业

密　封　线

《线性代数(I)》考试试卷（第一套）（A 卷）

课程号 2515650030　　考试时间 100 分钟

适用专业年级（方向）：2021 年秋季学期（前）各相关专业学生

考试方式及要求：闭卷，所有题目都在答题纸上解答，在试卷上解答无效

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、设 A 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵（$n>1$），则下列命题中不正确的是　【　　】

(A) 若 $A^2=E$，则一定有 $A^{-1}=A$

(B) 若 $A^2=E$，则一定有 $|A|=-1$ 或 $|A|=1$

(C) 若 $|A^2|=0$，则一定有 $R(A)=0$

(D) 若 $|A^2|\neq 0$，则一定有 $R(A)\neq 0$

2、设 A，B 都是实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶矩阵（$n>1$），则下列等式中一定成立的是【　　】

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　(B) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(C) $R(A+B)=R(A)+R(B)$　　(D) $(A+B)^*=A^*+B^*$

3、设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，则下列向量组中线性相关的是　【　　】

(A) $-\alpha_1, -2\alpha_2, 3\alpha_3$　　(B) $\alpha_1, \alpha_1-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1-2\alpha_2, \alpha_1-2\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3$

4、设 A 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵（$n>1$），矩阵 B 是 A 经过若干次初等变换所得的矩阵，则下列命题不一定正确的是　【　　】

(A) 若 $|A|>0$，则 $|B^2|>0$　　(B) 若 $|A|<0$，则 $|B^2|>0$

(C) 若 $|B^2|>0$，则 $|A|>0$　　(D) 若 $|B^2|=0$，则 $|A|=0$

5、对于非齐次线性方程组 $AX=B$，下列命题不正确的是　【　　】

(A) 如果方程组 $AX=0$ 只有零解，那么方程组 $AX=B$ 不可能有无穷组解

(B) 如果方程组 $AX=0$ 有非零解，那么方程组 $AX=B$ 可能有唯一解

(C) 如果方程组 $AX=B$ 无解，那么方程组 $AX=0$ 可能有唯一解

(D) 如果方程组 $AX=B$ 有唯一解，那么方程组 $AX=0$ 不可能有非零解

6、设矩阵 $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，矩阵 A 与 B **相似**，则 $R(A+E)+R(A-E)=$【 】

(A) 2 (B) 5 (C) 4 (D) 3

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\pi&0\\\pi&0&1\end{bmatrix}$，则 $\left|(A-A^T)^2\right|=$________.

2、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}\pi&0&1\\1&-\pi&0\end{bmatrix}$，则 $\left|A^TA\right|^2=$________.

3、设 $A=\begin{bmatrix}0&0&\lambda\\0&1&\mu\\1&\mu&\lambda\end{bmatrix}$，且 $\begin{bmatrix}\lambda\\\mu\\1\end{bmatrix}$ 是线性方程组 $A^2X=\mathbf{0}$ 的**解**，则 $\lambda\cdot\mu=$________.

4、设向量 $\alpha=(\sin\theta,\ \cos\theta,\ 1,\ 0)^T$，$\beta=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0,\ 1)^T$，则在实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间 $V=\left\{x\alpha+y\beta \middle| x,y,\theta\in\mathbb{R}\right\}$ 的**维数**是________.

5、设 A 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 4 阶**对称**矩阵，已知向量 $\alpha_1=(\lambda,\ -4,\ -1,\ -1)^T$，$\alpha_2=(\lambda,\lambda,-4,0)^T$，且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，则常数 $\lambda=$________.

三、（10 分）解矩阵方程 $AX=X+A^T$，其中 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}$.

四、（12 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\1&-3&0\\-1&-4&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$，计算 $\left|-\frac{1}{6}A^3B^T\right|$ 和 $\left|E+A^{-1}B\right|$.

五、（12 分）求向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2=(2,3,4,5)^T$，$\alpha_3=(3,4,5,6)^T$，$\alpha_4=(4,5,6,7)^T$，$\alpha_5=(5,6,7,8)^T$ 的**秩**与一个**极大线性无关组**，并用这个极大线性无关组来**线性表出**该向量组中**其余**的向量.

座位号 姓名 学号 教学班号（课序号） 年级 专业

密 封 线

六、（14 分） 问 a，b 为何值时，下列线性方程组无解？有唯一解？有无穷多组解？有无穷多组解时，求出其通解.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+(a+4)x_4-2=0 \\ x_2+ax_3+2x_4+b-3=0 \\ x_1+2x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4-1=0 \end{cases}$$

七、（14 分） 已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$，其中 $b>0$，已知二次型的对称矩阵 A 的三个特征值的和等于 1，三个特征值的乘积等于-12.

（1）写出二次型 f 对应的对称阵 A（可以带有参数 a 和 b）；

（2）求常数 a，b 的值；

（3）求正交线性变换 $X=PY$，化二次型 f 为标准形，并写出正交矩阵 P，其中 $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$；

（4）判定该二次型 f 是否为正定二次型.