《线性代数(I)》参考答案及评分标准（A 卷）

一、选择题 【3 分×6 = 18 分】

C B D　C B D

二、填空题 【4 分×5 = 20 分】

0　0　0　2　2

三、【本题 10 分】

解　$(A-E)X=A^T$ －－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ 1 分

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $A-E$ 可逆，且 $X=(A-E)^{-1}A^T$ －－－－－－1 分

对矩阵 $[A-E\quad A^T]$ 进行初等行变化如下

$$[A-E\quad A^T]=\begin{bmatrix}1&1&1&2&0&1\\0&1&1&1&2&0\\1&0&1&1&1&2\end{bmatrix}$$ －－－－－－－－－－－－－ 2 分

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&-2&1\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&0&3&1\end{bmatrix}$$ －－－－－－－－－－－－－4 分

所以 $X=(A-E)^{-1}A^T=\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&-1&-1\\0&3&1\end{bmatrix}$ －－－－－－－－－－－－－－－ 2 分

四、【本题 12 分】

解　$|A|=6$ －－－－－－－－－－ 2 分

$|B|=12$ －－－－－－－－－－ 2 分

$\left|-\dfrac{1}{6}A^3B^T\right|=(-\dfrac{1}{6})^3|A|^3|B|$ －－－－－－－－－2 分

$=-12$ －－－－－－－－－－ 2 分

$|E+A^{-1}B|=|A^{-1}(A+B)|=\dfrac{|A+B|}{|A|}$ －－－－－－－－－－ 2 分

$=\dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&-1&3\\0&0&10\end{vmatrix}=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$ －－－－－－－－2 分

五、【本题 12 分】

解　对矩阵 $A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5]$ 进行初等行变换如下

$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5]$

$$=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&-1&-2&-3&-4\\0&-2&-4&-6&-8\\0&-3&-6&-9&-12\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ －－－－－－－－－－－－－－ 5 分

向量组α_1, α_2, α_3, α_4, α_5的秩为 2； －－－－－－－－－－ 2 分

向量组α_1, α_2, α_3, α_4, α_5的一个极大线性无关组为α_1, α_2； －－－－－－－－ 2 分

$\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1$ $\quad \alpha_4=3\alpha_2-2\alpha_1$ $\quad \alpha_5=4\alpha_2-3\alpha_1$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ 3 分

六、【本题 14 分】

解 对增广矩阵$\overline{A}=[A\ B]$进行初等行变化如下

$$\overline{A}=[A\ B]=\begin{bmatrix}1&2&0&a+4&2\\0&1&a&2&3-b\\1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&3-b\\0&2&-2&a+5&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&2-b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix}$$ －－－－－－ 4 分

（1）当$a=-1, b\neq 2$时，$R(A)=2$，$R(\overline{A})=3$，线性方程组无解； －－－－－－－ 2 分

（2）当$a\neq -1$时，$R(A)=R(\overline{A})=4$，线性方程组有唯一解； －－－－－2 分

（3）当$a=-1, b=2$时，$R(A)=R(\overline{A})=2<4$，线性方程组有无穷组解；－－－－－－ 2 分

此时，等价方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+x_4\\x_2=x_3-2x_4+1\end{cases},$$

一个基础解系为$\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$；一个特解为$\eta=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ －－－－－2 分

即原方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$，其中$k_1,k_2\in R$ －－－－2 分

七、【本题 14 分】

解 （1） $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=X^{\mathrm{T}}AX$

得二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$ －－－－－－－－－－－－－－－－－－ 2 分

（2）由 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=2(-2a-b^2)=-12$ ， $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2-2=1$ － 2 分

又已知 $b>0$

所以有 $a=1$，$b=2$ －－－－－－－－－－－－－－－－－2 分

（3）由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$=-(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-3$ －－－－－－－－－－－－ 2 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解 $(A-2E)X=0$，得基础解系

$\xi_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_3=-3$ 时，解 $(A+3E)X=0$，得基础解系

$$\xi_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

显然 ξ_1, ξ_2, ξ_3 已正交，将其单位化，得

令 $\alpha_1=\dfrac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$， $\alpha_2=\dfrac{\xi_2}{|\xi_2|}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$， $\alpha_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

令 $P=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$， －－－－－－ 2 分

当 $X=PY$ 时，可得二次型 f 的标准形为

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2,$$ －－－－－－ 2 分

（4）因为特征值 $\lambda_3<0$

所以该二次型不是正定二次型 －－－－－－ 2 分