座位号 姓名 密 学号 封 教学班号（课序号） 线 年级 专业

《线性代数(I)》考试试卷（第一套）（A 卷）

课程号 2515650030 考试时间 100 分钟

适用专业年级（方向）： 2020 年秋全校选修此门课程的所有专业学生

考试方式及要求： 闭卷，所有题目都在答题纸上解答，在试卷上解答无效

一、单项选择题【每小题 3 分，共 18 分】

1、设 A 是实数域 R 上的 n 阶矩阵（$n>1$），则下列命题**正确**的是

(A) 对任意 $A\neq\mathbf{0}$，且 $A\neq E$，都有 $A^2\neq A$

(B) 对任意 $A\neq E$，且 $A\neq -E$，都有 $A^2\neq E$

(C) 对任意 $A\neq E$，且 $A^2=E$，都有 $|A+E|\neq 0$

(D) 对任意 $A\neq\mathbf{0}$，且 $A^2=\mathbf{0}$，都有 $|A+E|\neq 0$

2、设向量组 α_1，α_2，α_3 **线性无关**，则下列向量组中也线性**无关**的是

(A) α_1，$\alpha_2-2\alpha_3$，$\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$　　(B) $\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_3$

(C) $\alpha_1-2\alpha_2$，$\alpha_2-2\alpha_3$，$\alpha_1-4\alpha_3$　　(D) α_1，$\alpha_2-2\alpha_3$，$2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$

3、设 A 是实数域 R 上的 n 阶**非零**矩阵（$n\geq 3$），且满足 $A^*=A^T$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，则下列结论**不正确**的是

(A) $|A|=-1$　　(B) $|A|=1$　　(C) $A^{-1}=A^T$　　(D) $AA^*=E$

4、设 A，B，C 都是实数域 R 上的 n 阶矩阵（$n>1$），则下列命题中**不正确**的是

(A) 若 $|A|\neq 0$，且 $A^TB=\mathbf{0}$，则 $B=\mathbf{0}$

(B) 若 $BA^T=\mathbf{0}$，且 $B\neq\mathbf{0}$，则 $|A|=0$

(C) 若 $R(A^2B)<R(B)$，则 $R(A)\neq n$

(D) 若 $AB=CA$，且 $R(A)=n$，则 $B=C$

5、对于非齐次线性方程组 $AX=B$，下列命题**正确**的是

(A) 如果方程组 $AX=B$ **有无穷组解**，那么方程组 $AX=\mathbf{0}$ **可能没有**非零解

(B) 如果方程组 $AX=\mathbf{0}$ **有非零解**，那么方程组 $AX=B$ **不可能**有唯一解

(C) 如果方程组 $AX=\mathbf{0}$ **只有零解**，那么方程组 $AX=B$ **不可能**无解

(D) 如果方程组 $AX=B$ **有唯一解**，那么方程组 $AX=\mathbf{0}$ **可能有**无穷组解

6、矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&a&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&b\end{bmatrix}$ **相似**，则有

(A) $a=3$，$b=-2$　　(B) $a=2$，$b=-3$

(C) $a=-3$，$b=2$　　(D) $a=-2$，$b=3$

二、填空题【每小题 4 分，共 20 分】

1、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，则 $\left|(AA^T)^2\right|-\left|A^TA\right|^2=$________.

2、设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}$，则 $\left|A^2+2A-3E\right|=$________.

3、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&\lambda\\0&1&9\\3&0&0\end{bmatrix}$，满足 $AB=\mathbf{0}$，且 $B\neq\mathbf{0}$，则常数 $\lambda=$________.

4、设 $\alpha=(1,0,0,0)^T$，$\beta=(0,2,0,0)^T$，$\gamma=(0,0,\lambda,0)^T$，若在实数域 R 上的一个向量空间 $V=\left\{x\alpha+y\beta+z\gamma\,\middle|\,x,y,z\in R\right\}$ 的**维数**是 2，则 $\lambda=$________.

5、设向量组 $\alpha_1=(0,1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-3,0,\lambda,1)^T$，已知 α_1 与 α_2 **正交**，则常数 $\lambda=$________.

三、【10 分】 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\2&3&0\\-2&-4&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&-2&-3\\2&4&9\end{bmatrix}$，计算 $\left|-\frac{1}{2}A^TB^2\right|$ 和 $\left|E+A^{-1}B\right|$.

四、【12 分】 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&6&5\\5&6&3\end{bmatrix}^T$，且矩阵 X 满足方程 $X=AX+B$，求矩阵 X.

五、【12 分】 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)$，$\alpha_2=(2,1,0,1)$，$\alpha_3=(1,1,-1,2)$，$\alpha_4=(4,4,2,7)$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的**秩**与一个**极大线性无关组**，并用这个极大线性无关组来**线性表出**该向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中**其余**的向量.

六、【14 分】 问 a，b 为何值时，下列线性方程组**无解**？有**唯一解**？有**无穷多组解**？有无穷多组解时，求出其**通解**.

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2\\x_1+2x_3-x_4=0\\2x_1+2x_2+(a+2)x_3+2x_4=b+2\\3x_1+4x_2+2x_3+(a+5)x_4=4\end{cases}$$

七、【14 分】 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+4x_2x_3$$

（1）写出二次型 f 对应的实**对称**矩阵 A；

（2）求正交线性变换 $X=PY$，化二次型 f 为**标准形**，并写出**正交**矩阵 P，其中 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$；

（3）判定该二次型 f **是否**为**正定**二次型.