《线性代数(I)》参考答案及评分标准（A 卷）

一、选择题 【3 分×6 = 18 分】

D　B　A　　D　B　A

二、填空题 【4 分×5 = 20 分】

9　0　9　　0　0

三、

解 $|A|=-6$ －－－－－－－－－－ 2 分

$|B|=-4$ －－－－－－－－－－ 4 分

$$\left|-\frac{1}{2}A^TB^2\right|=(-\frac{1}{2})^3|A||B|^2$$

$$=-\frac{1}{8}\times(-6)\times16=12$$ －－－－－－－－－－ 7 分

$$|E+A^{-1}B|=|A^{-1}(A+B)|=\frac{|A+B|}{|A|}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-3\\0&0&11\end{vmatrix}=-\frac{11}{6}$$ －－－－－－－－－ 10 分

四、

解 $(E-A)X=B$

对矩阵$[E-A\quad B]$进行初等行变化如下

$$(E-A\quad B)=\begin{bmatrix}1&1&0&3&5\\1&1&1&6&6\\0&1&1&5&3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&3&5\\0&1&1&5&3\\0&0&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&0&2&2\\0&0&1&3&1\end{bmatrix}$$ －－－－－－－－－－－－－－ 8 分

所以$E-A$可逆，且

$$X=(E-A)^{-1}B$$ －－－－－－－－－－－－－－ 10 分

$$=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix}$$ －－－－－－－－－－－－－－ 12 分

五、

解 解 对矩阵 $A=[\alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \alpha_3^T \quad \alpha_4^T]$ 进行初等行 变换如下

$$A=[\alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \alpha_3^T \quad \alpha_4^T]$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&1&4\\2&1&1&4\\3&0&-1&2\\4&1&2&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&-3&-1&-4\\0&-6&-4&-10\\0&-7&-2&-9\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&3&1&4\\0&0&-2&-2\\0&-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ - - - - - - - - 6 分

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3； - - - - - - - - - - - - 8 分

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$； - - - - - - - - 10 分

且 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ - - - - - - - - - - - - - - - 12 分

六、

解 对增广矩阵 $\overline{A}=[A \ B]$ 进行初等行变化如下

$$\overline{A}=[A \ B]=\begin{bmatrix}2&2&2&2&2\\1&0&2&-1&0\\2&2&a+2&2&b+2\\3&4&2&a+5&4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&1&-2&-1\\0&0&a&0&b\\0&1&-1&a+2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&a&0&b\\0&0&0&a&0\end{bmatrix}$$ - - - - - - 4 分

（1）当 $a=0, b\neq 0$ 时，$R(A)=2$，$R(\overline{A})=3$，线性方程组无解； - - - - - - 6 分

（2）当 $a\neq 0$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=4$，线性方程组有唯一解； - - - - - - 8 分

（3）当 $a=b=0$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=2<4$，线性方程组有无穷组解； - - - - - - 10 分

此时，等价方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+x_4\\x_2=x_3-2x_4+1\end{cases}$$，一个基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ - - - - - - - - - 12 分

原方程组的一个特解为 $\eta=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ - - - - - - - - - - - - - - - - 13 分

即原方程的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ k_1,k_2\in R$$ －－－－－－－－－ 14 分

七、

解 （1） $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&2\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=X^TAX$

得二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&2\\0&2&2\end{bmatrix}$ －－－－－ 4 分

（2）由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&5-\lambda&2\\0&2&2-\lambda\end{vmatrix}$

$=-(\lambda-1)^2(\lambda-6)$

有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$ －－－－－ 6 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解 $(A-E)X=0$，得基础解系

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ －－－－－ 8 分

当 $\lambda_3=6$ 时，解 $(A-6E)X=0$，得基础解系

$$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$ －－－－－ 9 分

显然 ξ_1，ξ_2，ξ_3 已正交，将其单位化，得

令 $\alpha_1=\dfrac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\dfrac{\xi_2}{|\xi_2|}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$， －－－－－ 10 分

当 $X=PY$ 时，可得二次型 f 的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2+6y_3^2,$$ －－－－－ 12 分

（3） 因为特征值 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$

所以该二次型是正定二次型 －－－－－－ 14 分