ALGORITMOS Y PROGRAMACIÓN

Clase 8 Recursión



Temario

Recursión

Función recursiva

Recursión

- Es una técnica que permite resolver un problema en términos de sí mismo
- La recursión es una técnica de programación muy poderosa, en la cual una función realiza llamadas a si misma en pos de resolver un problema.
- Razones para su uso:
 - Reemplazo de estructuras repetición.
 - Problema de naturaleza recursiva.
 - Problemas "casi" irresolubles con las estructuras iterativas.

.

La función factorial es muy usada en probabilidad y estadística.

El factorial de *n* se expresa como *n!* y esta definido para los números naturales como:

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$
 $3!=3*2*1$

De manera matemática el factorial se define como:

$$n!=$$
1, si n=0
 $n\cdot(n-1)!$ si n>0

La sucesión de Fibonacci también es una función definida para los números naturales. Es una secuencia de enteros donde sus elementos subsecuentes son la suma de los dos anteriores.

Recursión

- En un algoritmo recursivo se identifican dos elementos:
- Caso Recursivo: aquí el algoritmo realiza algunas operaciones con las que se reduce la complejidad del problema y luego realiza un llamado a sí mismo (autoinvocación). Puede tener 1 o más casos recursivos.
- Caso Base: Se da cuando el cálculo es tan simple que se puede resolver directamente sin necesidad de hacer una llamada recursiva. Determina el corte del proceso recursivo. Puede tener uno o más casos base.

Recursión

- Cada autoinvocación o llamado recursiva se aplica a un problema de igual naturaleza que el original, pero de menor tamaño.
- Esta reducción nos asegura que, en algún momento, la complejidad del problema será tan simple que su solución será trivial y directa: es lo que llamamos caso base, donde se corta el proceso repetitivo y se asegura encontrar la solución al problema de partida.
- Los algoritmos recursivos funcionan siempre que las llamadas recursivas lleguen en algún momento a uno de los casos bases. En caso contrario, se produce un loop o bucle infinito.

Tipos de Recursión

La recursión puede ser:

Simple: un solo llamado recursivo dentro del algoritmo

Múltiple: dos o mas llamados recursivos dentro del algoritmo

Directa: se autoinvoca dentro del cuerpo del algoritmo

Indirecta: A invoca a B, y B invoca a A

 Definir una función recursiva que reciba un número entero y devuelva la suma desde 1 hasta dicho número.

```
int sumar(int n) → return 1+2+3+....+n
```

Pensemos primero cómo es la solución iterativa:

```
public int sumar(int n)
{ int suma=0;
 for ( int j=1;j<=n; j ++)
      suma=suma + j;
 return suma;
}</pre>
```

Podemos pensarla de otra forma equivalente:

```
int sumar(int n) \rightarrow return n + (n-1) + ...3+2+1
```

Con lo cual la función quedaría:

```
public int sumar(int n)
{ int suma=0;
  for ( int j=n; j>=1; j--)
      suma=suma + j;
  return suma;
}
```

Como planteamos la solución recursiva???

```
int sumar (int n)
      if (n == 1)
            return 1;
      else
            return n + sumar(n-1);
```

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n + sumar(n-1);
}
```

Caso recursivo:

La función se invoca a si
misma para poder devolver
un resultado.

Caso base:
La función finaliza con las
llamadas recursivas.

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return 1.
    else
        return n + sun r(n-1);
}
```

La ejecución del caso base o el caso recursivo depende de una condición.

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n + sum r(n-1);
}
```

Por lo general, las funciones recursivas devuelven un valor. En esos casos debe existir un return tanto en el caso base como en el caso recursivo

 Una función recursiva se invoca desde el Main como a cualquier otra.

int resultado = sumar(5);

 ¿Qué sucede en la memoria de la computadora cuando se ejecuta una función recursiva?

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n + sumar(n-1);
}
```

En nuestro ejemplo n vale 5.
Al ejecutar la función se reserva memoria para la ejecución de la función y poder almacenar esa variable. Se crea un registro de activación (R.A.).

```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                return 1;
        else
                return n + sumar(n-1);
   Con n == 5 se ejecuta el caso
             recursivo.
      ¿Qué tiene que hacer la
      función para obtener el
      resultado a devolver?
```

```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                return 1;
       else
                return n + sumar(n-1);
     La función se invoca a si
       misma con el valor 4.
```

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n + sumar(n-1);
}
```

Al ejecutar la función por segunda vez se reserva memoria para almacenar la variable n.

Notar que NO es la misma posición de memoria, hay dos posiciones de memoria distintas para la variable n.

Cada llamada de la función tiene su propio ámbito (R.A.) donde almacena sus variables.

n = 4

```
int sumar (int n){
       if (n == 1)
               return 1;
       else
               return n + sumar(n-1);
     Nuevamente la función se
      invoca a si misma con
              n==3
```

n = 4

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n + sumar(n-1);
}
```

Una nueva reserva de

Memoria. Se apila un

nuevo R.A.

n = 3

n = 4

```
int sumar (int n){
       if (n == 1)
               return 1;
       else
               return n + sumar(n-1);
     Nuevamente la función se
      invoca a si misma con
              n==2
```

n = 3

n = 4

```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                return 1;
       else
                return n + sumar(n-1);
                                                              n = 2
                                                              n = 3
       Una nueva reserva de
                                                              n = 4
       Memoria. Se apila un
            nuevo R.A.
                                                              n = 5
```

```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
               return 1;
       else
                return n + sumar(n-1);
     Nuevamente la función se
      invoca a si misma con
              n == 1.
```

n = 2

n = 3

n = 4

```
int sumar (int n){
       if (n == 1)
               return 1;
       else
                                                             n = 1
               return n + sumar(n-1);
                                                             n = 2
                                                             n = 3
                                                             n = 4
        Una nueva reserva de
              memoria
                                                             n = 5
```

consecutivas donde se almacena

el estado de la función en cada

una de sus ejecuciones.

```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
               return 1;
       else
               return n + sumar(n-1);
  Esto es lo que se conoce como
        pila de ejecución.
      Reservas de memoria
```

n = 1

n = 2

n = 3

n = 4

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n + sumar(n-1);
}
```

n = 2

n = 1

n = 3

n = 4

n = 5

¿Qué sucede cuando n vale 1?

```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                return 1;
        else
                 return n + sumar(n-1);
        Se ejecuta el caso base.
    Finalizan las llamadas
    recursivas y retorna el valor 1 a
    quien la invocó.
```

n = 1

n = 2

n = 3

n = 4

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n + sumar(n-1);
```

En este caso la función devuelve el valor 1. Este valor lo recibe el estado de la función sumar que hizo la llamada.

Al finalizar se libera la memoria reservada para su ejecución.



n = 2

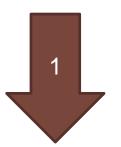
n = 3

n = 4

```
int sumar (int n){
       if (n == 1)
              return 1;
       else
              return n + sumar(n-1);
```

En este punto se recibe el valor 1. Por lo tanto, sabiendo el valor devuelto por la función sumar, ya puede realizar la operación y devolver el resultado de la suma.

Acá n= 2
$$\rightarrow$$
 2+1=3



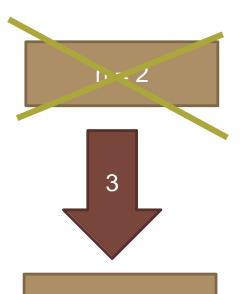
$$n = 2$$

$$n = 3$$

$$n = 4$$

$$n = 5$$

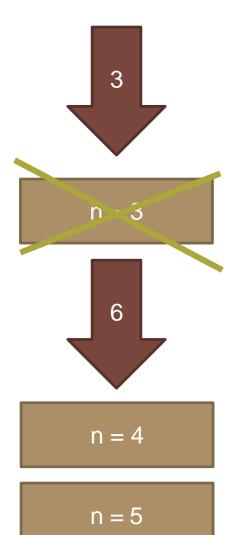
```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                return 1;
        else
                return n + sumar(n-1);
        El resultado de esta suma lo
       recibe el estado anterior de la
                 función.
```



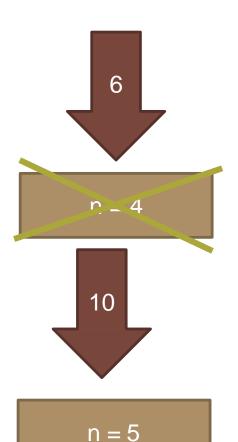
n = 3

n = 4

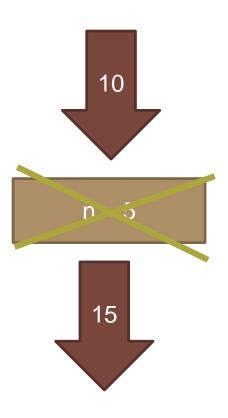
```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                return 1;
        else
                return n + sumar(n-1);
       En este estado n vale 3, se le
      suma 3 (el valor recibido como
     resultado) y se devuelve la suma
                3 + 3 = 6
```



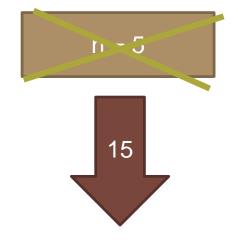
```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                return 1;
        else
                return n + sumar(n-1);
       En este estado n vale 4, se le
      suma 6 (el valor recibido como
     resultado) y se devuelve la suma
                4 + 6 = 10
```



```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                return 1;
        else
                return n + sumar(n-1);
       En este estado n vale 5, se le
      suma 10 (el valor recibido como
     resultado) y se devuelve la suma
               5 + 10 = 15
```



```
int sumar (int n){
        if (n == 1)
                 return 1;
        else
                return n + sumar(n-1);
        Este estado es el último en
        ejecutarse. Notar que fue el
     primero en ejecutarse. El valor de
      retorno se devuelve a donde se
          hizo la primer llamada.
```



Llamada original a la función sumar

int resultado = sumar(5),

El valor recibido (15) se almacena en la variable "resultado".

int resultado = 15;

Llamada original a la función sumar

```
int sumar (int n)
{
      if (n == 1)
          return 1;
      else
          return n + sumar(n-1);
}
```

Veamos el paso a paso de nuevo sin las pilas:

```
resultado=sumar(5)=?
sumar \rightarrow n=5
        → 5+ sumar(4)
Sumar n=4
        \rightarrow 4+ sumar(3)
Sumar n=3
        \rightarrow 3 + sumar(2)
Sumar n=2
        \rightarrow 2+ sumar(1)
Sumar n=1
        → Sumar=1
```

```
int sumar (int n)
{
     if (n == 1)
          return 1;
     else
          return n + sumar(n-1);
}
```

```
resultado=sumar(5)=
sumar \rightarrow n=5
        → 5+ sumar(4)
Sumar n=4
        \rightarrow 4+ sumar(3)
Sumar n=3
        \rightarrow 3 + sumar(2)
Sumar n=2
        \rightarrow 2+ sumar(1)
Sumar n=1
        → Sumar=1
```

```
int sumar (int n)
{
     if (n == 1)
         return 1;
     else
         return n + sumar(n-1);
}
```

```
resultado=sumar(5)=
sumar \rightarrow n=5
        → 5+ sumar(4)
Sumar n=4
        \rightarrow 4+ sumar(3)
Sumar n=3
        \rightarrow 3 + sumar(2)
Sumar n=2
        \rightarrow 2+ sumar(1)=2+1
Sumar n=1
        → Sumar=1
```

```
int sumar (int n)
{
     if (n == 1)
          return 1;
     else
          return n + sumar(n-1);
}
```

```
resultado=sumar(5)=
sumar \rightarrow n=5
        → 5+ sumar(4)
Sumar n=4
        \rightarrow 4+ sumar(3)
Sumar n=3
       \rightarrow 3 + sumar(2)
Sumar n=2
       \rightarrow 2+ sumar(1)=2+1=3
Sumar n=1
        → Sumar=1
```

```
int sumar (int n)
{
      if (n == 1)
          return 1;
      else
          return n + sumar(n-1);
}
```

```
resultado=sumar(5)=
sumar \rightarrow n=5
        \rightarrow 5+ sumar(4)
Sumar n=4
        → 4+ sumar(3)
Sumar n=3
        \rightarrow 3 + sumar(2)=3+ \frac{3}{3}=
Sumar n=2
        \rightarrow 2+ sumar(1)=2+1=3
Sumar n=1
        → Sumar=1
```

```
int sumar (int n)
{
     if (n == 1)
          return 1;
     else
          return n + sumar(n-1);
}
```

```
resultado=sumar(5)=
sumar \rightarrow n=5
        → 5+ sumar(4)
Sumar n=4
        \rightarrow 4+ sumar(3)
Sumar n=3
        \rightarrow 3 + sumar(2)=3+ \frac{3}{6}
Sumar n=2
        \rightarrow 2+ sumar(1)=2+1=3
Sumar n=1
        → Sumar=1
```

```
int sumar (int n)
{
     if (n == 1)
         return 1;
     else
         return n + sumar(n-1);
}
```

```
resultado=sumar(5)=
sumar \rightarrow n=5
        → 5+ sumar(4)
Sumar n=4
       \rightarrow 4+ sumar(3)=4+ 6= 10
Sumar n=3
        \rightarrow 3 + sumar(2)=3+ \frac{3}{6}
Sumar n=2
       \rightarrow 2+ sumar(1)=2+1=3
Sumar n=1
        → Sumar=1
```

```
int sumar (int n)
                                       Sumar n=4
       if (n == 1)
                return 1;
        else
                                       Sumar n=3
                return n + sumar(n-1);
                                       Sumar n=2
```

```
resultado=sumar(5)=
sumar \rightarrow n=5
          \rightarrow 5+ sumar(4)= 5 + \frac{10}{10}= \frac{15}{15}
          \rightarrow 4+ sumar(3)=4+ \frac{6}{10}
          \rightarrow 3 + sumar(2)=3+ \frac{3}{6}
          \rightarrow 2+ sumar(1)=2+1=3
Sumar n=1
          → Sumar=1
```

```
resultado=sumar(5)=15
sumar \rightarrow n=5
         \rightarrow 5+ sumar(4)= 5 + \frac{10}{10}= \frac{15}{10}
Sumar n=4
         \rightarrow 4+ sumar(3)=4+ \frac{6}{10}
Sumar n=3
         \rightarrow 3 + sumar(2)=3+ \frac{3}{6}
Sumar n=2
         \rightarrow 2+ sumar(1)=2+1=3
Sumar n=1
          → Sumar=<mark>1</mark>
```

¿ Qué sucede con esta llamada?

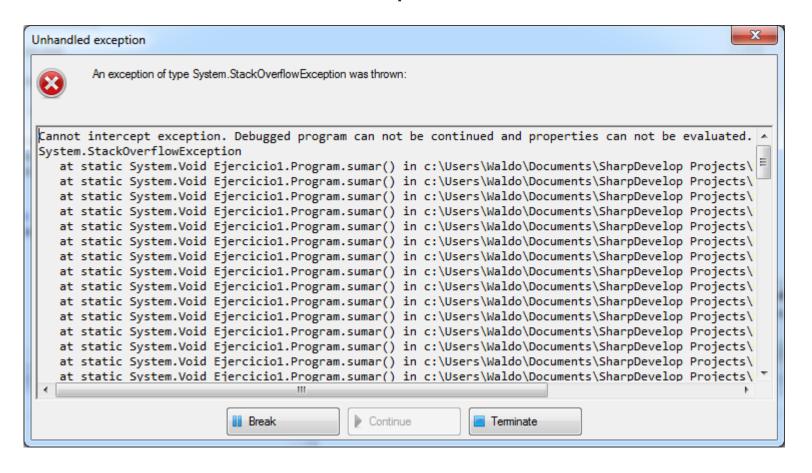
int resultado = sumar (-1);

```
int sumar (int n){
    if (n == 1)
        return n;
    else
        return n + sumar(n-1);
}
```

- Si una función recursiva no alcanza nunca el caso base, seguirá haciendo llamadas recursivas para siempre y nunca terminaría.
- Esta circunstancia se conoce como recursión infinita, y produce error de ejecución.

- En realidad el verdadero problema de la recursión es la cantidad máxima de memoria con la cual cuenta un programa para su ejecución.
- Si una función recursiva hace muchas llamadas, como cada llamada reserva memoria, ésta podría acabarse.
- Además, si cada estado o R.A. de una llamada recursiva debe almacenar muchos datos, la memoria también podría acabarse con pocas llamadas.

 Cuando la memoria se llena .NET levanta una excepción llamada StackOverflowException



Ventajas y desventajas del uso de recursión

Ventajas

Permite desarrollar:

- Soluciones elegantes.
- Soluciones más simples

Desventajas

En cuanto a la eficiencia la recursion:

- ocupa más memoria que la misma solución interativa,
- demanda mayor tiempo de ejecución debido al tiempo de apilado y desapilado de cada R.A.

Aplicación de la recursión

- Es muy común implementar funciones recursivas que trabajen sobre colecciones de datos: strings, arreglos, ArrayList, Pilas, Colas.
- En estos casos se trabaja siempre sobre la misma idea, resolver solo una parte del problema con un elemento y el resto del problema (los elementos restantes) se resuelven de manera recursiva:
 - En el caso recursivo se debe sacar un elemento de la colección, para tratar el resto de la colección de manera recursiva
 - Por lo general el caso base se da cuando la colección queda vacía o con un único elemento.

 Implementar una algoritmo recursivo que permita imprimir un arreglo de 10 elementos.

```
public static void Main(string[] args)
{
    int [] vec=new int [10];
    int tam=10;
    int pos=0;

    imprime(vec,pos,tam); /*le paso el vector, la posición inicial y el tamaño del vector*/
    .....
}
```

- En este ejemplo el caso base está implícito: cuando se llega a que k==dim, significa que el vector se terminó y no hay nada más que imprimir. No hace nada, por eso no está codificado. Solo retorna la ejecución al estado anterior.
- Observación: es un procedimiento (o una función void que no lleva return)

En este ejemplo el caso base está explícito

Seguimiento de Pila de ejecución (de abajo hacia arriba se lee)

```
v=2,3,6
k=0
dim=3
WriteLine v[0]
```

```
En pantalla se ve:
2
```

Seguimiento de Pila de ejecución (de abajo hacia arriba se lee)

```
V=2,3,6

K=1

Dim=3

WriteLine v[1]
```

```
V=2,3,6

K=0

Dim=3

WriteLine v[0]
```

```
En pantalla se ve:
2
3
```

Seguimiento de Pila de ejecución (de abajo hacia arriba se lee)

```
V=2,3,6

K=2

Dim=3

WriteLine v[2]
```

```
V=2,3,6
K=1
Dim=3
WriteLine v[1]
```

```
V=2,3,6

K=0

Dim=3

WriteLine v[0]
```

```
En pantalla se ve:
2
3
6
```

V=2,3,6 K=3 Dim=3

V=2,3,6

K=2

Dim=3

WriteLine v[2]

V=2,3,6

K=1

Dim=3

WriteLine v[1]

V=2,3,6

K=0

Dim=3

WriteLine v[0]

Seguimiento de Pila de ejecución (de abajo hacia arriba se lee)

Llegó al caso base (k=3), no hace nada. Empieza a desapilar los R.A.

```
En pantalla se ve:
2
3
6
```

V=2,3,6

K=2

Dim=3

WriteLine v[2]

V=2,3,6

K=1

Dim=3

WriteLine v[1]

V=2,3,6

K=0

Dim=3

WriteLine v[0]

En pantalla se ve:

2

3

6

Retorna el control a la caja previa, en el camino de regreso al Main. En pantalla se ve:

2

3

6

V=2,3,6

K=1

Dim=3

WriteLine v[1]

V=2,3,6

K=0

Dim=3

WriteLine v[0]

En pantalla se ve:

2

3

6

V=2,3,6

K=0

Dim=3

WriteLine v[0]

En pantalla se ve:
2
3
6

Recursión – Ejemplo 1 b)

Definir una función recursiva que imprima los elementos pares del vector

```
public static void impriPares ( int [] v, int k, int dim)
      if (k<dim)</pre>
                                     /*condición de repetición */
         if (v[k] \% 2 == 0)
             Console. WriteLine(v[k]);
         impriPares ( v, k+1, dim); /*Ilamado recursivo*/
V=[12,3,56,7,19,22,33]
```

 Implementar una función recursiva que permita cargar un arreglo de 10 elementos.

```
public static void Main(string[] args)
{
    int [] vec=new int [5];
    int tam=5;
    int pos=0;

    cargar(ref vec,pos,tam); /* el vector se pasa por referencia porque se cambia su contenido*/
    .....
}
```

```
• public static void cargar( ref int [] v, int k, int dim)
{
    if (k<dim)
    {
        Console.WriteLine("ingrese un valor entero: ");
        v[k]= int.Parse(Console.ReadLine());
        cargar(ref v, k+1, dim);
    }
}</pre>
```

En este ejemplo otra vez el caso base está implícito.

 Implementar una función recursiva que permita contar los elementos de un ArrayList.

```
public static void Main(string[] args)
      ArrayList lis =new ArrayList();
      int pos,cont;
      string resp;
      Console. WriteLine("ingresa datos (s/n)?");
      resp=Console.ReadLine();
      while (resp=="s")
         Console. WriteLine("ingrese un valor");
         lis. Add( int.Parse(Console.ReadLine()));
         Console. WriteLine("ingresa datos (s/n)?");
        resp=Console.ReadLine();
      pos=0;
      cont=cuenta(lis, pos);
      Console. WriteLine("la cantidad de elementos es: {0} ", cont);
      Console. Write ("Press any key to continue . . . ");
      Console.ReadKey(true);
```

```
public static int cuenta( ArrayList lista, int k)
{
    if (k== lista.Count)
        return 0;
    else
    {
        return 1 + cuenta(lista, k+1);
    }
}
```

```
public static int cuenta( ArrayList lista, int k)
       if (k== lista.Count)
         return 0;
       else
        return 1 + cuenta(lista, k+1);
                               cont=cuenta([2,14,5,18], 0)
                               cuenta([2,14,5,18], 0) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 1)
                               cuenta([2,14,5,18], 1) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 2)
                               cuenta([2,14,5,18], 2) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 3)
                               cuenta([2,14,5,18], 3) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18],4)
                               cuenta([2,14,5,18], 4) \rightarrow 0
```

```
public static int cuenta( ArrayList lista, int k)
       if (k== lista.Count)
         return 0;
       else
        return 1+ cuenta(lista, k+1);
                               cont=cuenta([2,14,5,18], 0) =??
                               cuenta([2,14,5,18], 0) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 1)
                               cuenta([2,14,5,18], 1) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 2)
                               cuenta([2,14,5,18], 2) \rightarrow 1 + cuenta ([2,14,5,18], 3)
                               cuenta([2,14,5,18], 3) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18],4) = 1 + 0= 1
                               cuenta([2,14,5,18], 4) \rightarrow 0
```

```
public static int cuenta( ArrayList lista, int k)
      if (k== lista.Count)
         return 0;
      else
        return 1+ cuenta(lista, k+1);
                               cont=cuenta([2,14,5,18], 0) =???
                              cuenta([2,14,5,18], 0) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 1)
                              cuenta([2,14,5,18], 1) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 2)
                              cuenta([2,14,5,18], 2) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18],3)= 1 + 1= 2
                              cuenta([2,14,5,18], 3) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18],4) = 1 + 0= 1
                              cuenta([2,14,5,18], 4) \rightarrow 0
```

```
public static int cuenta( ArrayList lista, int k)
       if (k== lista.Count)
         return 0;
       else
        return 1+ cuenta(lista, k+1);
                               cont=cuenta([2,14,5,18], 0) =???
                               cuenta([2,14,5,18], 0) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 1)
                               cuenta([2,14,5,18], 1) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 2)= 1 + 2= 3
                               cuenta([2,14,5,18], 2) \rightarrow 1 + cuenta ([2,14,5,18], 3) = 1 + 1 = 2
                               cuenta([2,14,5,18], 3) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18],4) = 1 + 0= 1
                               cuenta([2,14,5,18], 4) \rightarrow 0
```

```
public static int cuenta( ArrayList lista, int k)
      if (k== lista.Count)
         return 0;
      else
        return 1+ cuenta(lista, k+1);
                               cont=cuenta([2,14,5,18], 0) = ???
                              cuenta([2,14,5,18], 0) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 1)= 1 + 3= 4
                              cuenta([2,14,5,18], 1) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 2)= 1 + 2= 3
                              cuenta([2,14,5,18], 2) \rightarrow 1 + cuenta ([2,14,5,18],3)= 1 + 1= 2
                              cuenta([2,14,5,18], 3) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18],4) = 1 + 0= 1
                              cuenta([2,14,5,18], 4) \rightarrow 0
```

```
public static int cuenta( ArrayList lista, int k)
      if (k== lista.Count)
         return 0;
      else
        return 1+ cuenta(lista, k+1);
                               cont=cuenta([2,14,5,18], 0) = 4
                              cuenta([2,14,5,18], 0) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 1) =1 + 3= 4
                              cuenta([2,14,5,18], 1) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 2)= 1 + 2= 3
                              cuenta([2,14,5,18], 2) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18], 3)= 1 + 1= 2
                              cuenta([2,14,5,18], 3) \rightarrow 1 + cuenta([2,14,5,18],4) = 1 + 0= 1
                              cuenta([2,14,5,18], 4) \rightarrow 0
```

