# Układy równań liniowych

Dominik Lau

23 marca 2023

## 1 Wstęp

Celem projektu była implementacja i przeanalizowanie metod rozwiązywania układów równań liniowych

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Rozważane metody to metoda faktoryzacji LU, metoda Jacobiego i metoda Gaussa-Seidla. Do implementacji wykorzystano język Python oraz bibliotekę matplotlib.

## 2 Teoria

### Metoda faktoryzacji LU

Jest to metoda bezpośredniego rozwiązywania układu równań. Pierw rozbijamy macierz $\mathbf{A}$ na dwie macierze trójkątne: dolną $\mathbf{L}$ i górną $\mathbf{U}$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$$

następnie rozwiązujemy dwa układy równań dla macierzy trójkątnych

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$$

powyższe równanie rozwiązujemy dla $\boldsymbol{y}$, następnie rozwiązujemy dla $\boldsymbol{x}$ korzystając z zależności

$$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$$

### Metoda Jacobiego

Jest to metoda iteracyjnego rozwiązywania układu równań. Pierw rozbijamy $\boldsymbol{A}$ na macierz $\boldsymbol{D}$ (diagonalną), $\boldsymbol{L}$ (trójkątną dolną) oraz $\boldsymbol{U}$ (trójkątną górną).

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$$

następnie iterujemy poniższe przybliżenie

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \vec{0}$$
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)})$$

do momentu uzyskania żądanej dokładności.

### Metoda Gaussa-Seidla

Jest to metoda bazująca na metodzie Jacobiego, też rozbijamy macierz $\boldsymbol{A}$ na $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$. Zmienia się postać iteracji

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \vec{0}$$
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)})$$

### Norma residuum

Do oceny ilościowej dokładności metod iteracyjnych liczy się normę wektora residuum. Wektor residuum

$$\boldsymbol{res} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$$

W projekcie wykorzystano zwykłą normę euklidesową

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\Sigma_{x \in \boldsymbol{x}} x^2}$$

# 3 Analiza

## A Tworzenie testowego układu równań

W testowanym układzie równań

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} sin(8 \cdot 1) \\ sin(8 \cdot 2) \\ ... \\ sin(8 \cdot n) \end{pmatrix}$$

gdzie $a_1 = 11, a_2 = a_3 = -1$ (nr indeksu 188697). Dla tak dobranych parametrów macierz $\boldsymbol{A}$ jest przekątniowo dominująca co gwarantuje zbieganie się algorytmów iteracyjnych (**kryterium silnej dominacji w wierszach**).

## B Działanie metody Jacobiego i Gaussa-Seidla

| metoda | czas [ms] | iteracje | $norm(res)$ |
|---|---|---|---|
| Jacobiego | 2947 | 17 | $6,83 \cdot 10^{-10}$ |
| Gaussa-Seidla | 2034 | 13 | $4,17 \cdot 10^{-10}$ |

Warto zauważyć, że metoda Gaussa-Seidla zbiega się w tym przypadku w mniejszej ilości iteracji i osiąga lepszy czas.

## C Metody iteracyjne na zmienionym układzie równań

Zamieniamy teraz elementy leżące na głównej przekątnej macierzy $\boldsymbol{A}$ na 3. Macierz nie jest już przekątniowo dominująca zatem nie mamy gwarancji zbieżności metod iteracyjnych. Rzeczywiście, metody nie zbiegają się.

## D Działanie faktoryzacji LU dla zmienionego układu równań

## E Zależności działania metod od czasu

# 4 Podsumowanie

# 5 Źródła


- Wikipedia-Jacobi
- Macierz- przekatniowo-dominujaca