

Układy równań liniowych

Dominik Lau

23 marca 2023

1 Wstęp

Celem projektu była implementacja i przeanalizowanie metod rozwiązywania układów równań liniowych

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Rozważane metody to metoda faktoryzacji LU, metoda Jacobiego i metoda Gaussa-Seidla. Do implementacji wykorzystano język Python oraz bibliotekę matplotlib.

2 Teoria

Metoda faktoryzacji LU

Jest to metoda bezpośredniego rozwiązywania układu równań. Pierw rozbijamy macierz \mathbf{A} na dwie macierze trójkątne: dolną \mathbf{L} i górną \mathbf{U}

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

następnie rozwiązujemy dwa układy równań dla macierzy trójkątnych

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

powyższe równanie rozwiązujemy dla \mathbf{y} , następnie rozwiązujemy dla \mathbf{x} korzystając z zależności

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

Metoda Jacobiego

Jest to metoda iteracyjnego rozwiązywania układu równań. Pierw rozbijamy \mathbf{A} na macierz \mathbf{D} (diagonalną), \mathbf{L} (trójkątną dolną) oraz \mathbf{U} (trójkątną górną).

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

następnie iterujemy poniższe przybliżenie

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(0)} &= \vec{0} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)})\end{aligned}$$

do momentu uzyskania żądanej dokładności.

Metoda Gaussa-Seidla

Jest to metoda bazująca na metodzie Jacobiego, też rozbijamy macierz \mathbf{A} na $\mathbf{D}, \mathbf{L}, \mathbf{U}$. Zmienia się postać iteracji

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(0)} &= \vec{0} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)})\end{aligned}$$

Norma residuum

Do oceny ilościowej dokładności metod iteracyjnych liczy się normę wektora residuum. Wektor residuum

$$\mathbf{res} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

W projekcie wykorzystano zwykłą normę euklidesową

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{x \in \mathbf{x}} x^2}$$

3 Analiza

A Tworzenie testowego układu równań

W testowanym układzie równań

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sin(8 \cdot 1) \\ \sin(8 \cdot 2) \\ \dots \\ \sin(8 \cdot n) \end{pmatrix}$$

gdzie $a_1 = 11, a_2 = a_3 = -1$ (nr indeksu 188697). Dla tak dobranych parametrów macierz \mathbf{A} jest przekątniowo dominująca co gwarantuje zbieganie się algorytmów iteracyjnych (**kryterium silnej dominacji w wierszach**).

B Działanie metody Jacobiego i Gaussa-Seidla

metoda	czas [ms]	iteracje	$norm(res)$
Jacobiego	2947	17	$6,83 \cdot 10^{-10}$
Gaussa-Seidla	2034	13	$4,17 \cdot 10^{-10}$

Warto zauważyć, że metoda Gaussa-Seidla zbiega się w tym przypadku w mniejszej ilości iteracji i osiąga lepszy czas.

C Niezbieganie się metod iteracyjnych dla zmienionego układu równań

D Działanie faktoryzacji LU dla zmienionego układu równań

E Zależności działania metod od czasu

4 Podsumowanie

5 Źródła

- Wikipedia-Jacobi
- Macierz- przekatniowo-dominujaca