

Układy równań liniowych

Dominik Lau

28 marca 2023

1 Wstęp

Celem projektu była implementacja i przeanalizowanie metod rozwiązywania układów równań liniowych

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Rozważane metody to metoda faktoryzacji LU, metoda Jacobiego i metoda Gaussa-Seidla. Do implementacji wykorzystano język *Python* oraz bibliotekę *matplotlib*.

2 Teoria

Metoda faktoryzacji LU

Jest to metoda bezpośredniego rozwiązywania układu równań. Pierw rozbijamy macierz \mathbf{A} na dwie macierze trójkątne: dolną \mathbf{L} i górną \mathbf{U}

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

następnie rozwiązujemy dwa układy równań dla macierzy trójkątnych

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

powyższe równanie rozwiązujemy dla \mathbf{y} , następnie rozwiązujemy dla \mathbf{x} korzystając z zależności

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

Metoda Jacobiego

Jest to metoda iteracyjnego rozwiązywania układu równań. Pierw rozbijamy \mathbf{A} na macierz \mathbf{D} (diagonalną), \mathbf{L} (trójkątną dolną) oraz \mathbf{U} (trójkątną górną).

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

następnie iterujemy poniższe przybliżenie

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(0)} &= \vec{0} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)})\end{aligned}$$

do momentu uzyskania żądanej dokładności.

Metoda Gaussa-Seidla

Jest to metoda bazująca na metodzie Jacobiego, też rozbijamy macierz \mathbf{A} na $\mathbf{D}, \mathbf{L}, \mathbf{U}$. Zmienia się postać iteracji

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(0)} &= \vec{0} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)})\end{aligned}$$

Norma residuum

Do oceny ilościowej dokładności metod iteracyjnych liczy się normę wektora residuum. Wektor residuum

$$\mathbf{res} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

W projekcie wykorzystano zwykłą normę euklidesową

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{x \in \mathbf{x}} x^2}$$

3 Rozwiązania

A Tworzenie testowego układu równań

W testowanym układzie równań

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sin(9 \cdot 1) \\ \sin(9 \cdot 2) \\ \dots \\ \sin(9 \cdot n) \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathbf{A} = 997 \times 997$$

gdzie $a_1 = 11, a_2 = a_3 = -1$ (nr indeksu 188697). Dla tak dobranych parametrów macierz \mathbf{A} jest przekątniowo dominująca co gwarantuje zbieganie się algorytmów iteracyjnych (**kryterium silnej dominacji w wierszach**).

B Działanie metody Jacobiego i Gaussa-Seidla

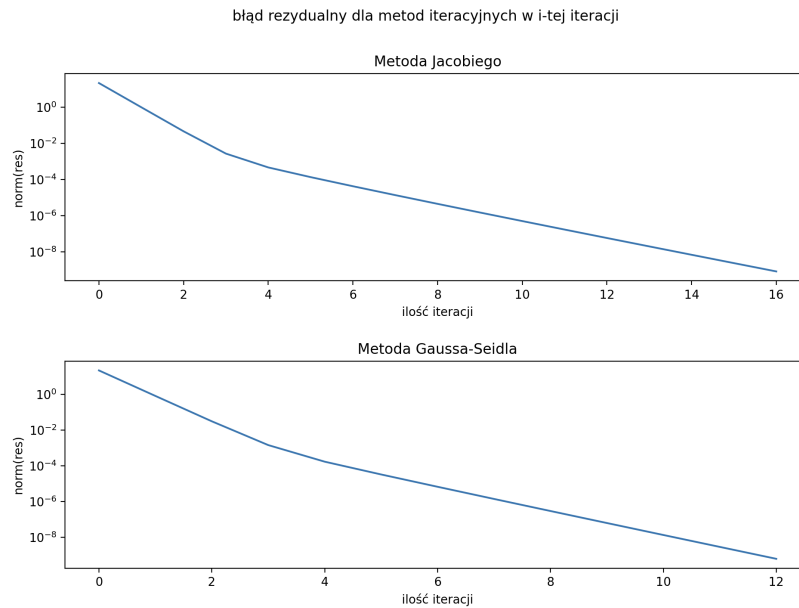
metoda	czas [ms]	iteracje	$norm(res)$
Jacobiego	2947	16	$8,06 \cdot 10^{-10}$
Gaussa-Seidla	2034	12	$6,41 \cdot 10^{-10}$

Warto zauważyć, że metoda Gaussa-Seidla zbiega się do oczekiwanej dokładności w mniejszej ilości iteracji i osiąga lepszy czas. Porównując to z metodą bezpośrednią

metoda	czas [ms]	$norm(res)$
LU	32511	$2,87 \cdot 10^{-15}$

obserwujemy, że uzyskany wynik jest zdecydowanie lepszy niż z metod iteracyjnych ($\approx 10^5$ razy mniejszy błąd), natomiast sama metoda ma dużo wyższą złożoność obliczeniową i trwa nie kilka (jak w przypadku metod iteracyjnych) a kilkadziesiąt sekund. Jest to głównie spowodowane działaniem rozbicia macierzy na dwie macierze trójkątne - operacja ta ma złożoność $O(n^3)$ i trwa ≈ 32450 ms.

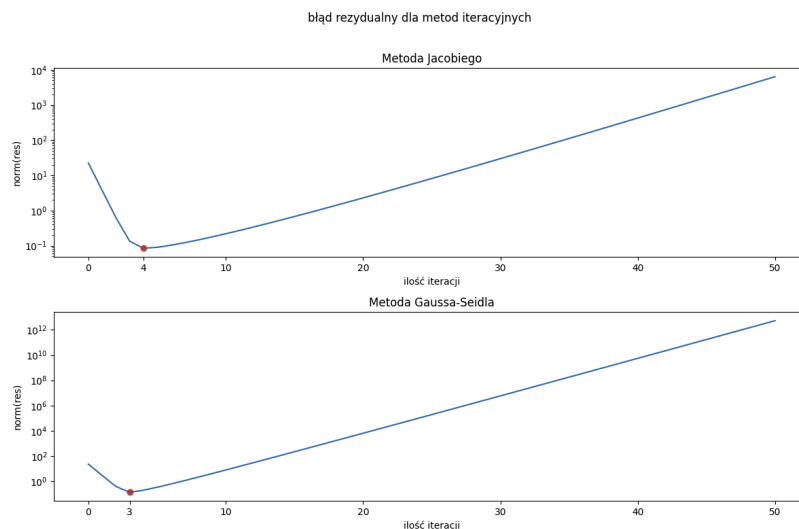
Poniższy wykres ilustruje zbieganie się metod Jacobiego i Gaussa-Seidla w kolejnych iteracjach.



Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami, metoda Gaussa-Seidla gwarantuje podobne wartości normy wektora residuum parę iteracji wcześniej niż metoda Jacobiego. W obu przypadkach błędy maleją w przybliżeniu wykładniczo (prosta na wykresie w skali logarytmicznej).

C Metody iteracyjne na zmienionym układzie równań

Zamieniamy teraz elementy leżące na głównej przekątnej macierzy \mathbf{A} na 3. Macierz nie jest już przekątniowo dominująca zatem nie mamy gwarancji zbieżności metod iteracyjnych.



Rzeczywiście, metody nie zbiegają się. Obie osiągają minimum w okolicach 3,4 iteracji a następnie wartość błędu rezydualnego zaczyna wzrastać wykładniczo. Obie metody nie są zatem uniwersalne i mogą nigdy nie osiągnąć wyniku o oczekiwanej dokładności. Warto zwrócić uwagę na to, że metoda Gaussa-Seidla rozbiega się szybciej niż Jacobiego.

D Działanie faktoryzacji LU dla zmienionego układu równań

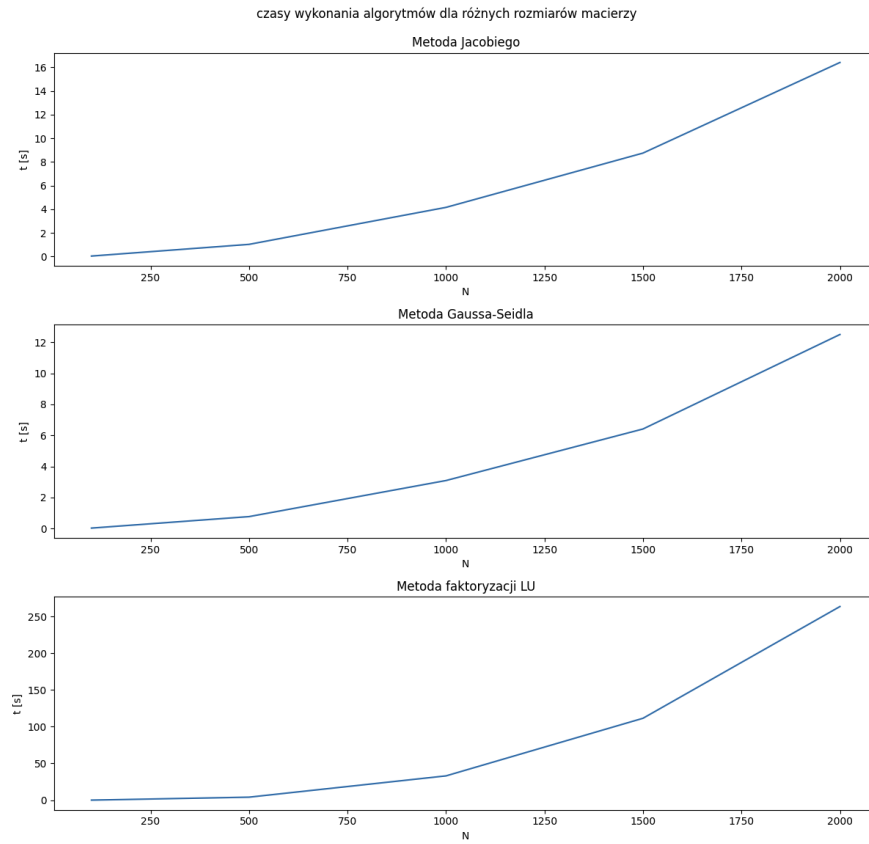
W przeciwieństwie do metod iteracyjnych, rozwiązywanie układu równań metodą bezpośrednią prowadzi do znalezienia dokładnego wyniku:

metoda	czas [ms]	$norm(res)$
LU	33038	$1,03 \cdot 10^{-13}$

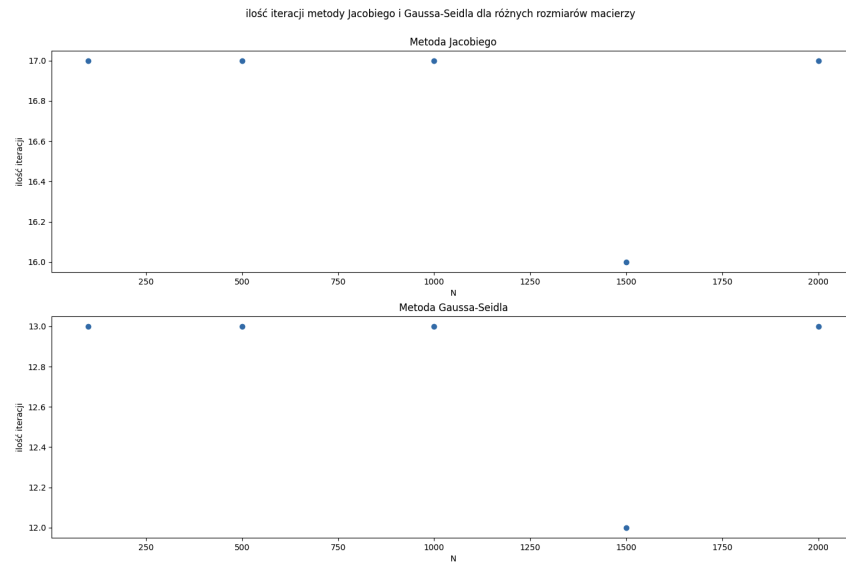
Rozważane w poprzednim podpunkcie metody, choć pozwalają na szybsze znalezienie rozwiązania układu równań o określonej dokładności, w pesymistycznym przypadku się rozbiegają, co ogranicza ich stosowalność. Cechy tej nie ma faktoryzacja LU, natomiast płaci się za to wzrostem złożoności obliczeniowej.

E Zależności czasu działania metod od rozmiaru macierzy

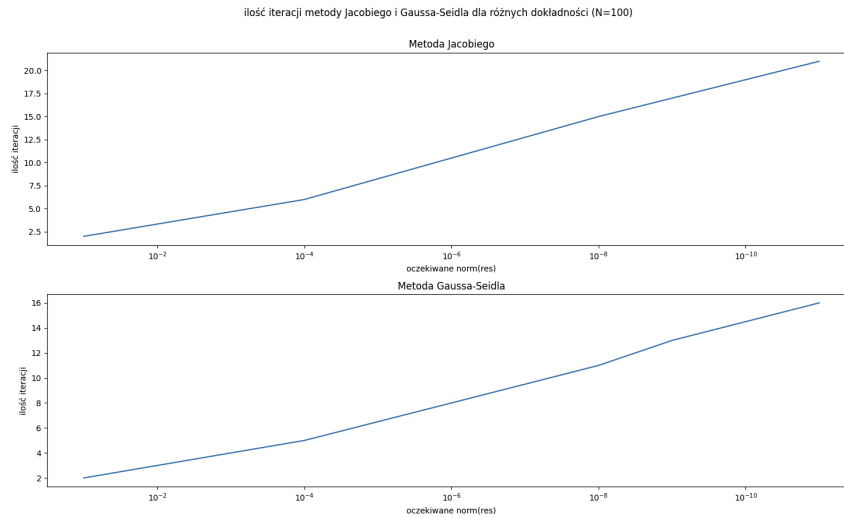
Pomiary czasu wykonania algorytmów wykonano dla macierzy o $N \in \{100, 500, 1000, 1500, 2000\}$.



Na powyższym wykresie potwierdzają się wcześniej postawione hipotezy. Metoda Gaussa-Seidla charakteryzuje się szybszym wykonaniem od metody Jacobiego, dla mniejszych N pierwsza metoda jest mniej więcej półtorakrotnie wolniejsza chociaż wraz ze wzrostem rozmiarów macierzy różnice czasu wykonania ustalają się na poziomie kilku sekund. Obie metody wykonują się szybciej od metody faktoryzacji LU, której czas wykonania zgodnie z oczekiwaniami rośnie proporcjonalnie do N^3 (np. dla $N = 2000$ wykonuje się ok. 8-krotnie dłużej niż dla $N = 1000$).



Z powyższego wykresu wynika, że rozmiar konstruowanej macierzy pasmowej nie ma większego wpływu na ilość iteracji metod Gaussa-Seidla i Jacobiego (natomiast pojedyncze iteracje są dłuższe). Ilość potrzebnych iteracji jest natomiast związana z oczekiwaną precyzją wyniku, co zilustrowano poniżej.



4 Podsumowanie

Reasumując, chociaż metoda faktoryzacji LU daje dokładne wyniki, dzieje się to kosztem wysokiej złożoności obliczeniowej, dla większych macierzy bardziej

opłaca się użyć którejś z metod iteracyjnych. Z drugiej strony, jak wykazaliśmy, metody iteracyjne mogą zawodzić i rozbiegać się. W analizowanych przypadkach metoda Gaussa-Seidla okazywała się być szybsza od metody Jacobiego, co związane było z szybszym zbieganiem się do oczekiwanej złożoności. Należy jednak zwrócić uwagę, że w wypadku rozbieżności, metoda Gaussa-Seidla szybciej osiągała bardzo wysokie wartości błędu rezydualnego.

5 Źródła

- Wikipedia-Jacobi
- Macierz- przekatniowo-dominująca