

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było wyznaczenie współczynnika sprężystości sprężyn przy użyciu metody statycznej i dynamicznej. Ćwiczenie obejmowało również wyznaczenie współczynnika sprężystości dla układu sprężyn połączonych równolegle i szeregowo. Podczas opracowania przyjęliśmy $\Delta x = 2$ mm chcąc uwzględnić podziałkę linijki oraz drobną oscylację ciężarka, a także $\Delta m = 0$, ponieważ odczytywaliśmy masę z oznaczeń na ciężarkach oraz $\Delta t = 0,5$ s.

2 Metoda statyczna

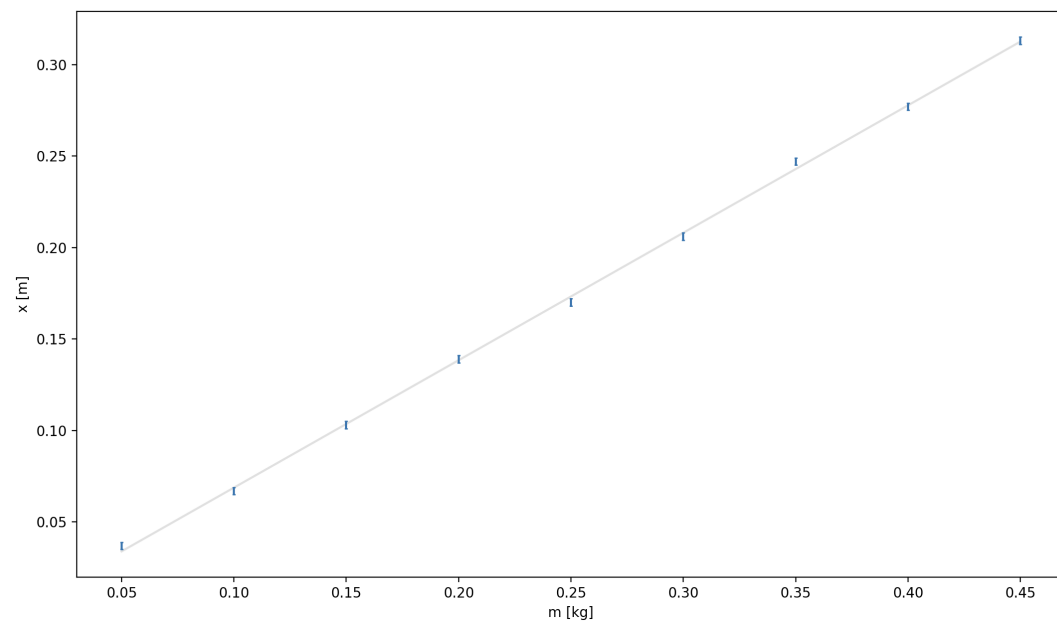
2.1 pomierzone dane

l.p.	m [g]	x_1 [cm]	x_2 [cm]
1	50	3,7	5,1
2	100	6,7	10,3
3	150	10,3	15,5
4	200	13,9	20,6
5	250	17,0	25,8
6	300	20,6	31,0
7	350	24,7	36,1
8	400	27,7	41,3
9	450	31,3	46,4

m - masa zawieszona na sprężynie

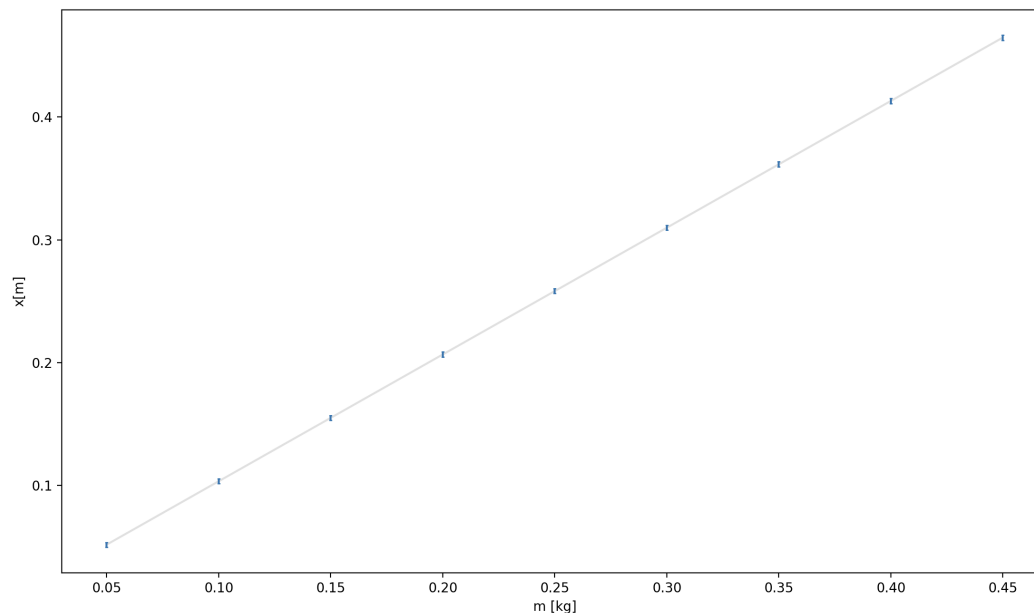
x_i - zmiana wychylenia i -tej sprężyny od wychylenia początkowego po zawieszeniu ciężarków o określonej masie

2.2 wykres $x_1(m)$



$a = 0.7$ - wartość współczynnika kierunkowego prostej otrzymanej metodą regresji liniowej

2.3 wykres $x_2(m)$



$a = 1.0$ - wartość współczynnika kierunkowego prostej otrzymanej metodą regresji liniowej

2.4 obliczenie stałej sprężystości

korzystamy ze wzoru¹

$$k = \frac{g}{a}$$

gdzie $g = 9,815 \frac{N}{kg}$ - przyspieszenie grawitacyjne ziemi
zatem $k_1 = 14,1 \frac{N}{m}$, $k_2 = 9,5 \frac{N}{m}$

2.5 rachunek niepewności

Do wyliczenia niepewności k korzystamy ze wzorów^{2 3}

$$S_a = \sqrt{\frac{n}{n-2} * \frac{\sum y_i^2 - a \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2}}$$
$$S_k = \frac{g S_a}{a^2}$$

¹https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwiczy63_02.pdf (63.15)

²<https://ftims.pg.edu.pl/documents/10673/20436990/wstep.pdf> (42)

³https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwiczy63_02.pdf (63.16)

otrzymujemy $S_{k1} = 0,33 \text{ [N/m]}$, $S_{k2} = 0,10 \text{ [N/m]}$

3 Metoda dynamiczna

3.1 pomierzone dane

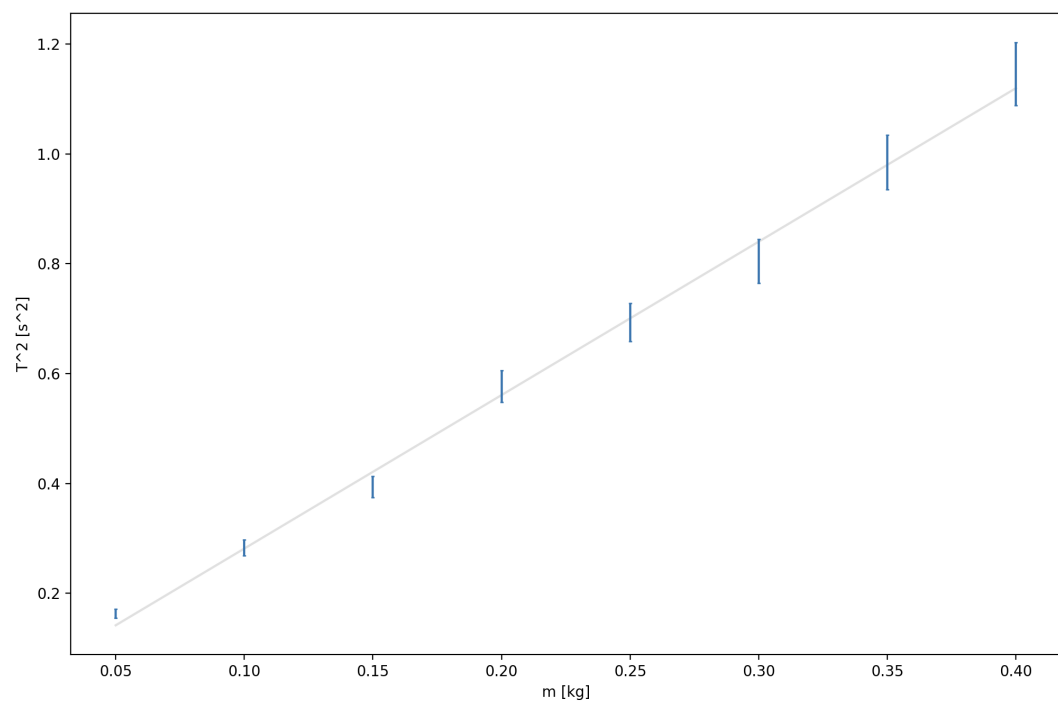
l.p.	m [g]	t_1 [s]	T_1^2 [s^2]	t_2 [s]	T_2^2 [s^2]
1	50	8,07	0,16	9,51	0,23
2	100	10,64	0,28	12,12	0,38
3	150	12,55	0,39	16,03	0,64
4	200	15,19	0,58	18,55	0,86
5	250	16,66	0,69	20, 11	1,01
6	300	17,94	0,80	22, 87	1,31
7	350	19,85	0,99	24, 14	1,46
8	400	21,41	1,15	25,23	1,59

m - masa zawieszona na sprężynie

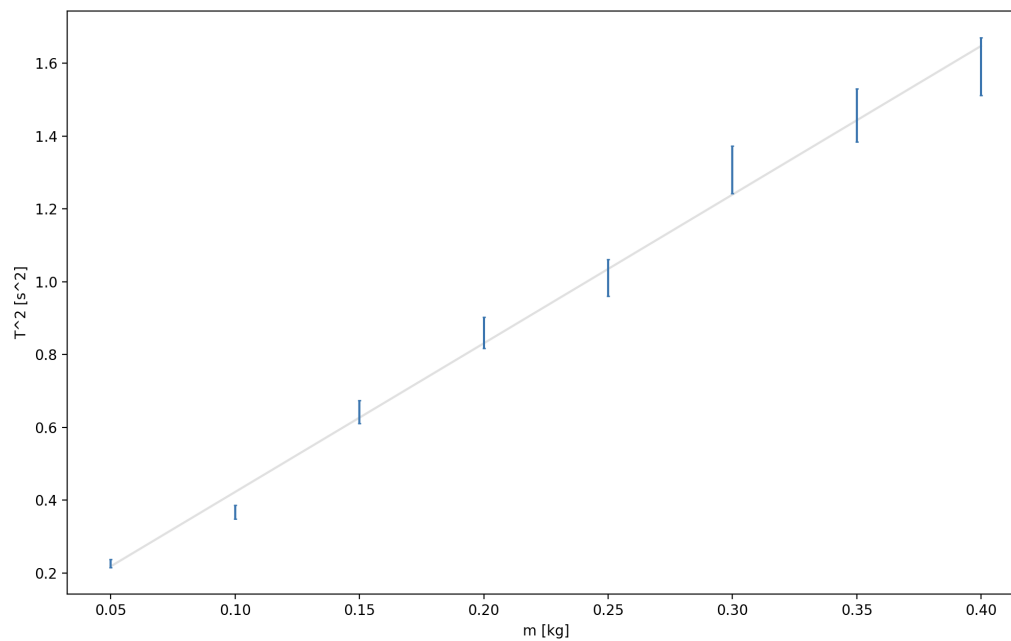
t_i - pomierzony czas 20 okresów

$t_i = 20T_i$

3.2 wykres $T_1^2(m)$



3.3 wykres $T_2^2(m)$



3.4 obliczenie stałej sprężystości

korzystamy ze wzoru⁴

$$k = \frac{4\pi^2}{a}$$

otrzymujemy $k_1 = 14,14 \frac{N}{m}$, $k_2 = 9,67 \frac{N}{m}$

3.5 rachunek niepewności

przyjeliśmy $\Delta t = 0,5s \rightarrow \Delta T = 0,025s$
do wyliczenia niepewności korzystamy ze wzoru⁵

$$S_k = \frac{4\pi^2 S_a}{a^2}$$

co daje nam $S_{k1} = 0,32$, $S_{k2} = 0,46$

⁴https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63_02.pdf (63.17)

⁵https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63_02.pdf (63.18)

4 Moduł sztywności

4.1 pomierzone dane

dana	wartość ₁
r	0,35mm
R	7,05mm
N	80 zwojów

r - promień drutu sprężyny

R - promień sprężyny

N - liczba zwojów sprężyny

zmierzaliśmy sprężynę 1

4.2 obliczenie modułu sztywności

korzystamy ze wzoru⁶

$$G = \frac{4NR^3k}{r^4}$$

przyjmując $k = k_{d1} - k_1$ z metody dynamicznej
otrzymujemy $G = 105,62 \text{ GPa}$

4.3 rachunek niepewności

do wyliczenia niepewności korzystamy ze wzoru⁷

$$|\Delta G| = G * (|\frac{\Delta N}{N}| + |\frac{3\Delta R}{R}| + |\frac{4\Delta r}{r}| + |\frac{\Delta k}{k}|)$$

gdzie przyjmujemy $\Delta R = \Delta r = 0.05mm$, $\Delta N = 5$, $\Delta k = 3S_k$
 $\Delta G = 80$

⁶https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63_02.pdf (63.19)

⁷https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63_02.pdf (63.20)

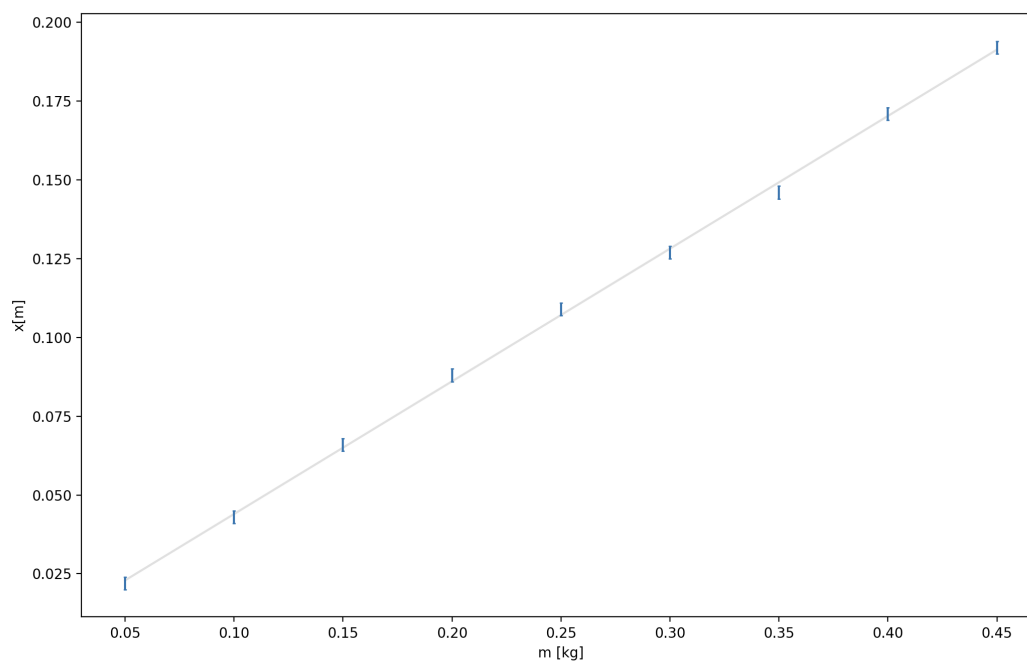
5 Układ sprężyn połączony równolegle

5.1 pomierzone dane

l.p.	Δx [cm]	m [g]	t[s]	T^2 [s ²]
1	2,2	50	5,18	0,07
2	4,3	100	8,95	0,20
3	6,6	150	10,66	0,28
4	8,8	200	11,65	0,34
5	10,9	250	13,14	0,43
6	12,7	300	14,49	0,53
7	14,6	350	15,56	0,61
8	17,1	400	16,92	0,67
9	19,2	450	17,39	0,76

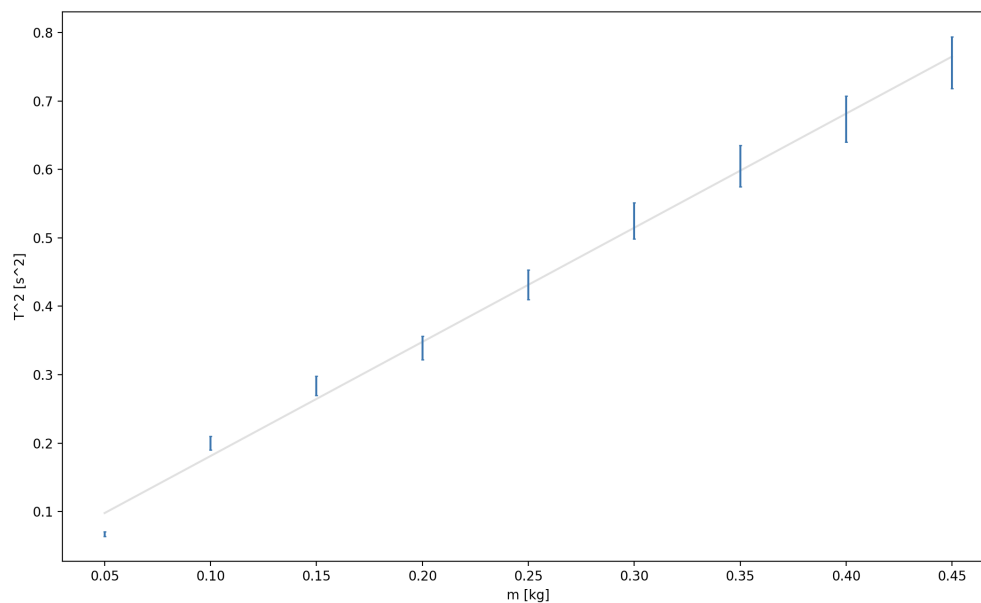
oznaczenia jak w pozostałych podpunktach

5.2 wykres i opracowanie $x(m)$



$a = 0,4$ zatem $k = 23,3$, co zgadza się z założeniami teoretycznymi $k \approx k_1 + k_2$

5.3 wykres i opracowanie $T^2(m)$



tym razem $a = 1,67$ a zatem $k = 23,75$, co zgadza się z założeniami teoretycznymi $k \approx k_1 + k_2$

5.4 rachunek niepewności dla metody statycznej

do wyliczenia niepewności korzystamy z tych samych wzorów co poprzednio i otrzymujemy $S_k = 1,1$ [N/m]

5.5 rachunek niepewności dla metody dynamicznej

do wyliczenia niepewności korzystamy z tych samych wzorów co poprzednio i otrzymujemy $S_k = 1,52$ [N/m]

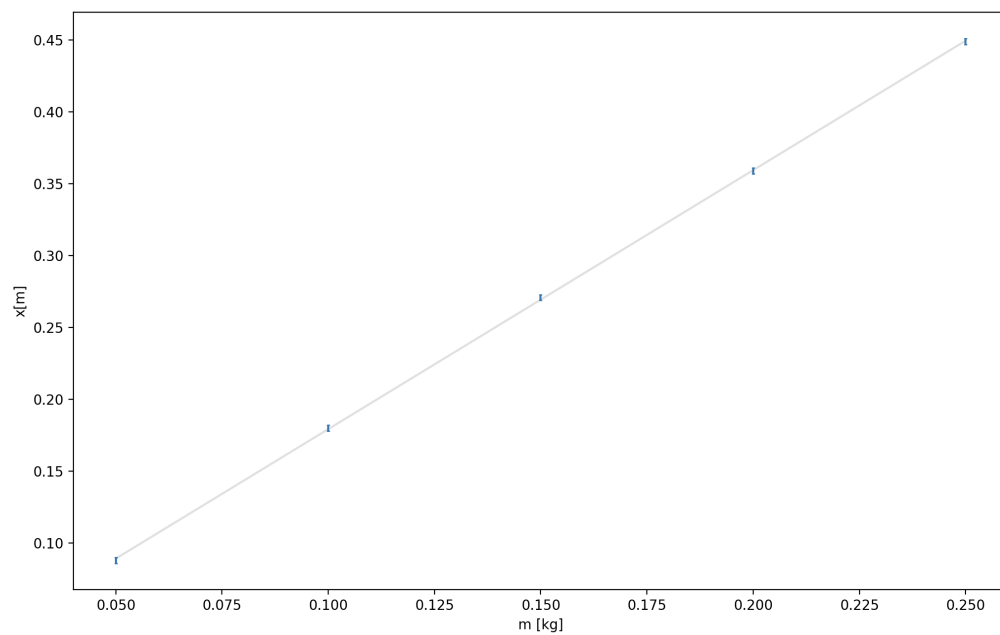
6 Układ sprężyn połączony szeregowo

6.1 pomierzone dane

l.p.	x [cm]	m [g]	t [s]	T^2 [s ²]
1	8,8	50	12,42	0,39
2	18,0	100	17,80	0,79
3	27,1	150	21,13	1,12
4	35,9	200	24,49	1,50
5	44,9	250	26,1	1,70

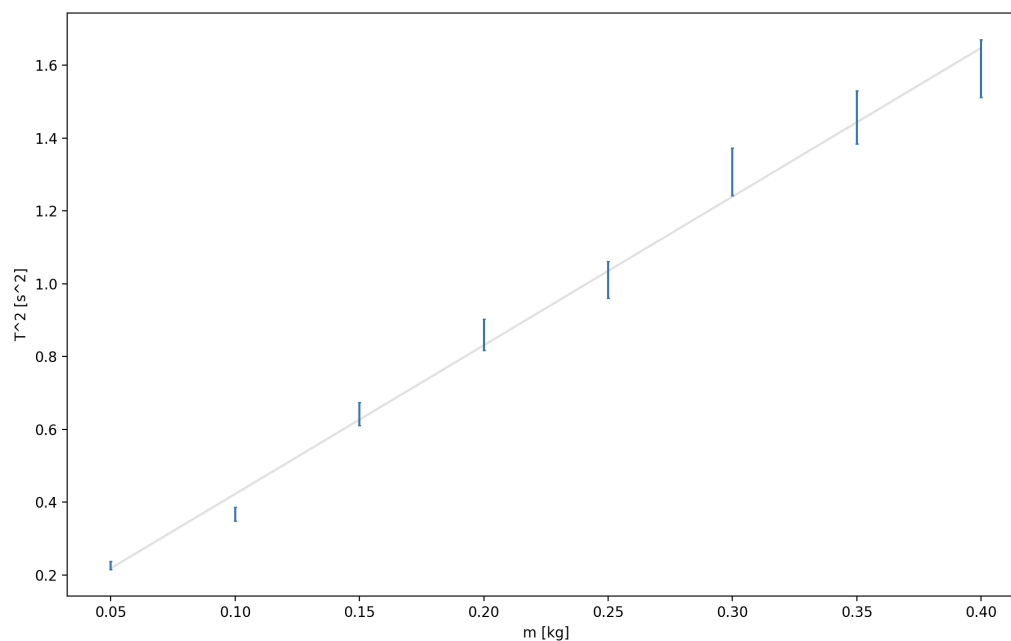
oznaczenia jak w pozostałych podpunktach

6.2 wykres i opracowanie $x(m)$



$a = 1,8$ zatem $k = 5,5$ co zgadza się z teoretycznymi przewidywaniami, bo $1/k \approx 1/k_1 + 1/k_2$

6.3 wykres i opracowanie $T^2(m)$



$a = 6,68$ zatem $k = 5,90$ co zgadza się z teoretycznymi przewidywaniami, bo $1/k \approx 1/k_1 + 1/k_2$

6.4 rachunek niepewności dla metody statycznej

do wyliczenia niepewności korzystamy z wyżej wymienionych wzorów i otrzymujemy $S_k = 0,2$ [N/m]

6.5 rachunek niepewności dla metody dynamicznej

do wyliczenia niepewności korzystamy z tych samych wzorów co poprzednio i otrzymujemy $S_k = 1,01$ [N/m]

7 Wnioski

zadanie	współczynnik sprężystości [$\frac{N}{m}$]
metoda statyczna	14,1 i 9,5
metoda dynamiczna	14,14 i 9,67
układ połączony równolegle	23,3 i 23,75
układ połączony szeregowo	5,5 i 5,90

moduł sztywności $G = 105,62$ GPa

Korzystając z metody statycznej i dynamicznej do wyznaczenia współczynnika sprężystości badanych sprężyn otrzymaliśmy zbliżone do siebie wartości współczynników z obu metod. Z wykresów przedstawiających zależność wychylenia od masy obserwujemy liniowy wzrost wychylenia. Co więcej, w przypadku metody dynamicznej tworząc wykres zależności kwadratu okresu drgań od obciążenia również otrzymujemy zależność liniową. W obu przypadkach zaobserwowaliśmy jedynie zakres stosowności prawa Hook'a, nie doprowadzając tym samym sprężyn do zakresu nieliniowych odkształceń nietrwałych i plastycznych. Taką samą sytuację obserwujemy dla układów sprężyn (szeregowego i równoległego). W połączeniu szeregowym i równoległym sprężyn uzyskujemy wyniki zbliżone do założeń teoretycznych tych połączeń. Współczynnik sprężystości dla układu szeregowego wzrósł, zaś dla układu równoległego zmalał względem współczynnika pojedynczej sprężyny.

W metodzie statycznej głównym czynnikiem wpływającym na błędy był błąd paralaksy, dokładność linijki oraz minimalne drgania podczas odczytu wartości. W metodzie dynamicznej był to czas reakcji przy pomiarach okresu drgań, a przy obliczaniu modułu sztywności dokładność suwmiarki.

Podczas obliczeń przyjęliśmy, że badane sprężyny są nieważkie oraz zaniedbaliśmy opory ruchu. Wszystkie pomiary zostały wykonane w temperaturze pokojowej.