

## 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było wyznaczenie współczynnika sprężystości sprężyn przy użyciu metody statycznej i dynamicznej. Ćwiczenie obejmowało również wyznaczenie współczynnika sprężystości dla układu sprężyn połączonych równolegle i szeregowo. Podczas opracowania przyjęliśmy  $\Delta x = 2$  mm chcąc uwzględnić podziałkę linijki oraz drobną oscylację ciężarka, a także  $\Delta m = 0$ , ponieważ odczytywaliśmy masę z oznaczeń na ciężarkach oraz  $\Delta t = 0,5$  s.

## 2 Metoda statyczna

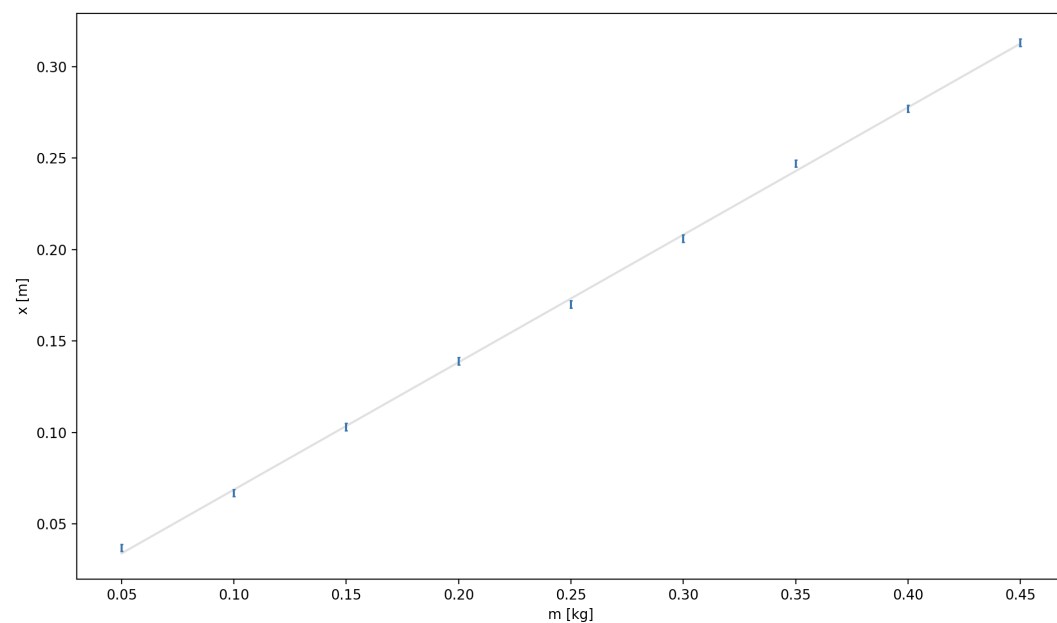
### 2.1 pomierzone dane

l.p.	m [g]	$x_1$ [cm]	$x_2$ [cm]
1	50	3,7	5,1
2	100	6,7	10,3
3	150	10,3	15,5
4	200	13,9	20,6
5	250	17,0	25,8
6	300	20,6	31,0
7	350	24,7	36,1
8	400	27,7	41,3
9	450	31,3	46,4

$m$  - masa zawieszona na sprężynie

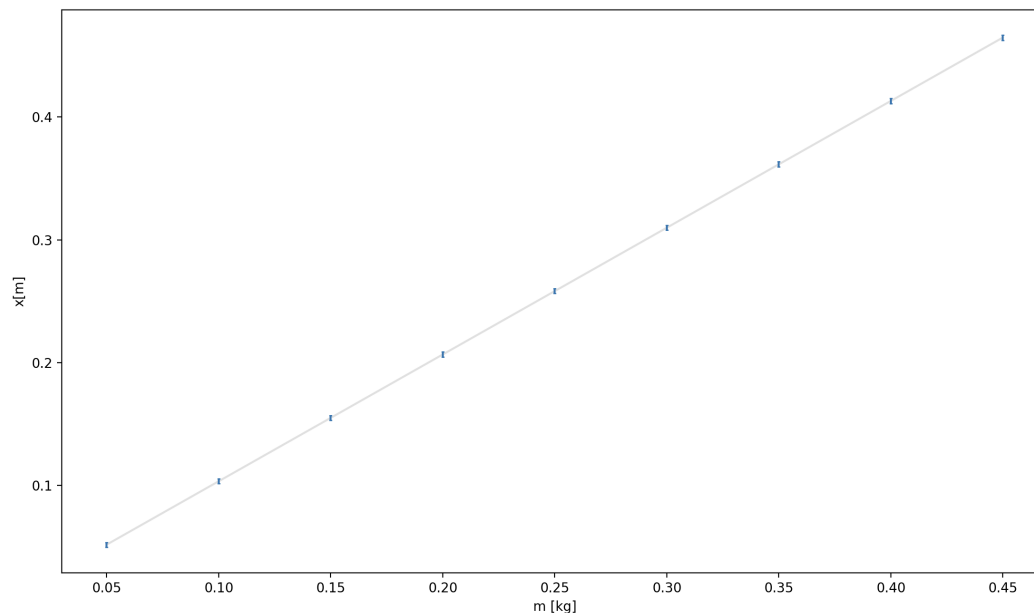
$x_i$  - zmiana wychylenia  $i$ -tej sprężyny od wychylenia początkowego po zawieszeniu ciężarków o określonej masie

## 2.2 wykres $x_1(m)$



$a = 0.69$  - wartość współczynnika kierunkowego prostej otrzymanej metodą regresji liniowej

## 2.3 wykres $x_2(m)$



$a = 1.03$  - wartość współczynnika kierunkowego prostej otrzymanej metodą regresji liniowej

## 2.4 obliczenie stałej sprężystości

korzystamy ze wzoru<sup>1</sup>

$$k = \frac{g}{a}$$

gdzie  $g = 9,815 \frac{N}{kg}$  - przyspieszenie grawitacyjne ziemi  
zatem  $k_1 = 14,1 \frac{N}{m}$ ,  $k_2 = 9,5 \frac{N}{m}$

## 2.5 rachunek niepewności

Do wyliczenia niepewności  $k$  korzystamy ze wzorów<sup>2 3</sup>

$$S_a = \sqrt{\frac{n}{n-2} * \frac{\sum y_i^2 - a \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2}}$$

$$S_k = \frac{g S_a}{a^2}$$

<sup>1</sup>[https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwiczy63\\_02.pdf](https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwiczy63_02.pdf) (63.15)

<sup>2</sup><https://ftims.pg.edu.pl/documents/10673/20436990/wstep.pdf> (42)

<sup>3</sup>[https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwiczy63\\_02.pdf](https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwiczy63_02.pdf) (63.16)

otrzymujemy  $S_{k1} = 0,33 \text{ [N/m]}$ ,  $S_{k2} = 0,10 \text{ [N/m]}$

### 3 Metoda dynamiczna

#### 3.1 pomierzone dane

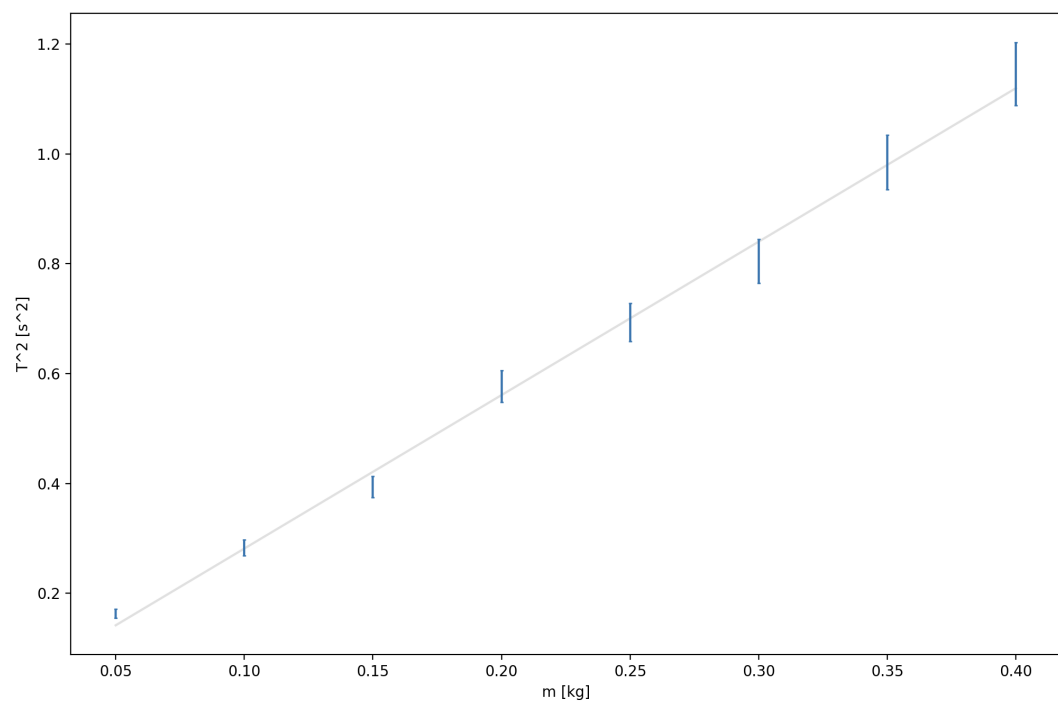
l.p.	m [g]	$t_1$ [s]	$T_1^2$ [ $s^2$ ]	$t_2$ [s]	$T_2^2$ [ $s^2$ ]
1	50	8,07	0,16	9,51	0,23
2	100	10,64	0,28	12,12	0,38
3	150	12,55	0,39	16,03	0,64
4	200	15,19	0,58	18,55	0,86
5	250	16,66	0,69	20, 11	1,01
6	300	17,94	0,80	22, 87	1,31
7	350	19,85	0,99	24, 14	1,46
8	400	21,41	1,15	25,23	1,59

$m$  - masa zawieszona na sprężynie

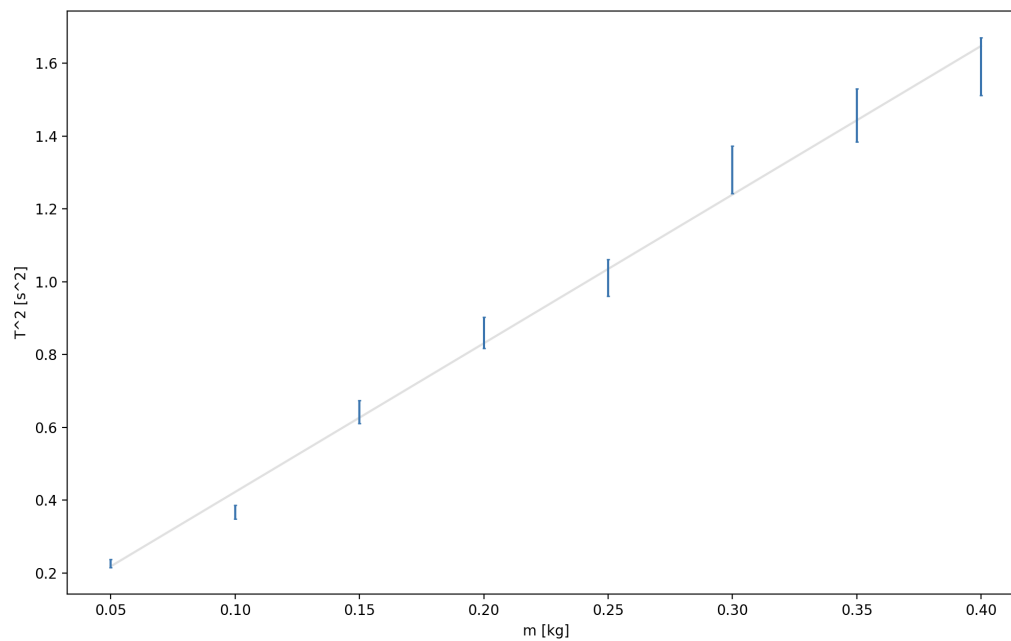
$t_i$  - pomierzony czas 20 okresów

$t_i = 20T_i$

### 3.2 wykres $T_1^2(m)$



### 3.3 wykres $T_2^2(m)$



### 3.4 obliczenie stałej sprężystości

korzystamy ze wzoru<sup>4</sup>

$$k = \frac{4\pi^2}{a}$$

otrzymujemy  $k_1 = 14,14 \frac{N}{m}$ ,  $k_2 = 9,67 \frac{N}{m}$

### 3.5 rachunek niepewności

przyjeliśmy  $\Delta t = 0,5s \rightarrow \Delta T = 0,025s$   
do wyliczenia niepewności korzystamy ze wzoru<sup>5</sup>

$$S_k = \frac{4\pi^2 S_a}{a^2}$$

co daje nam  $S_{k1} = 0,32$ ,  $S_{k2} = 0,46$

---

<sup>4</sup>[https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63\\_02.pdf](https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63_02.pdf) (63.17)

<sup>5</sup>[https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63\\_02.pdf](https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63_02.pdf) (63.18)

## 4 Moduł sztywności

### 4.1 pomierzone dane

dana	wartość <sub>1</sub>
r	0,35mm
R	7,05mm
N	80 zwojów

$r$  - promień drutu sprężyny

$R$  - promień sprężyny

$N$  - liczba zwojów sprężyny

zmierzaliśmy sprężynę 1

### 4.2 obliczenie modułu sztywności

korzystamy ze wzoru<sup>6</sup>

$$G = \frac{4NR^3k}{r^4}$$

przyjmując  $k = k_{d1} - k_1$  z metody dynamicznej  
otrzymujemy  $G = 105,62 \text{ GPa}$

### 4.3 rachunek niepewności

do wyliczenia niepewności korzystamy ze wzoru<sup>7</sup>

$$|\Delta G| = G * (|\frac{\Delta N}{N}| + |\frac{3\Delta R}{R}| + |\frac{4\Delta r}{r}| + |\frac{\Delta k}{k}|)$$

gdzie przyjmujemy  $\Delta R = \Delta r = 0.05mm$ ,  $\Delta N = 5$ ,  $\Delta k = 3S_k$   
 $\Delta G = 80$

---

<sup>6</sup>[https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63\\_02.pdf](https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63_02.pdf) (63.19)

<sup>7</sup>[https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63\\_02.pdf](https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/Cwicz63_02.pdf) (63.20)

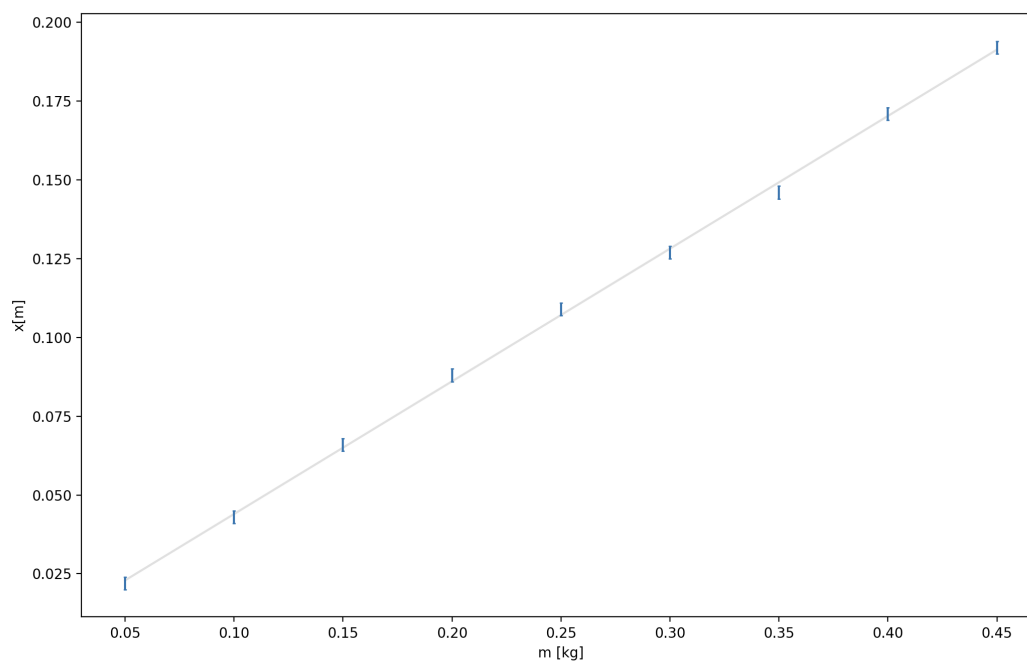
## 5 Układ sprężyn połączony równolegle

### 5.1 pomierzone dane

l.p.	$\Delta x$ [cm]	m [g]	t[s]	$T^2$ [s <sup>2</sup> ]
1	2,2	50	5,18	0,07
2	4,3	100	8,95	0,20
3	6,6	150	10,66	0,28
4	8,8	200	11,65	0,34
5	10,9	250	13,14	0,43
6	12,7	300	14,49	0,53
7	14,6	350	15,56	0,61
8	17,1	400	16,92	0,67
9	19,2	450	17,39	0,76

oznaczenia jak w pozostałych podpunktach

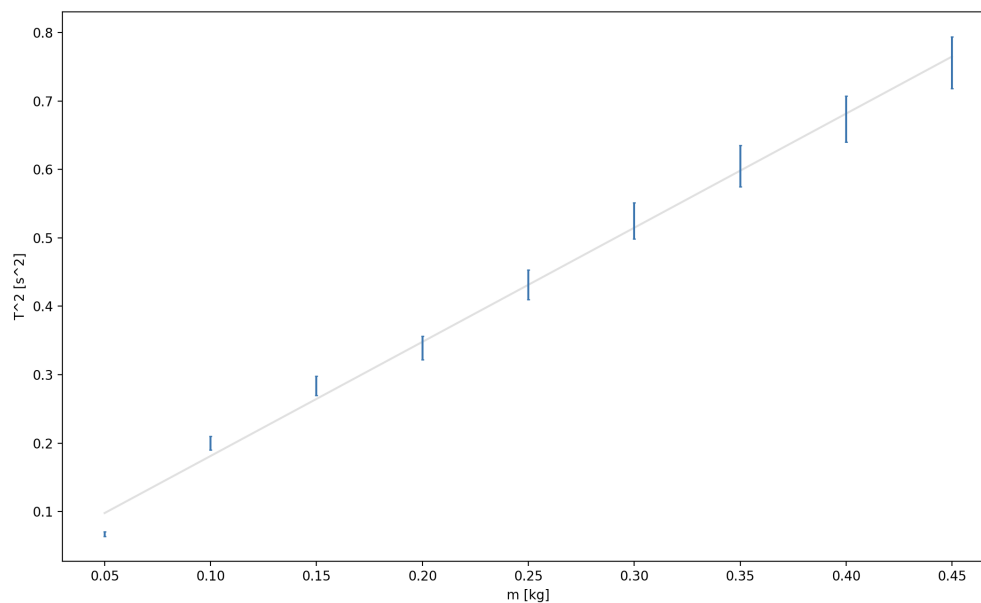
### 5.2 wykres i opracowanie $x(m)$



$a = 0,42$  zatem  $k = 23,3$ , co zgadza się z założeniami teoretycznymi  $k \approx k_1 + k_2$



### 5.3 wykres i opracowanie $T^2(m)$



tym razem  $a = 1,67$  a zatem  $k = 23,75$ , co zgadza się z założeniami teoretycznymi  $k \approx k_1 + k_2$

### 5.4 rachunek niepewności dla metody statycznej

do wyliczenia niepewności korzystamy z tych samych wzorów co poprzednio i otrzymujemy  $S_k = 1,1$  [N/m]

### 5.5 rachunek niepewności dla metody dynamicznej

do wyliczenia niepewności korzystamy z tych samych wzorów co poprzednio i otrzymujemy  $S_k = 1,52$  [N/m]

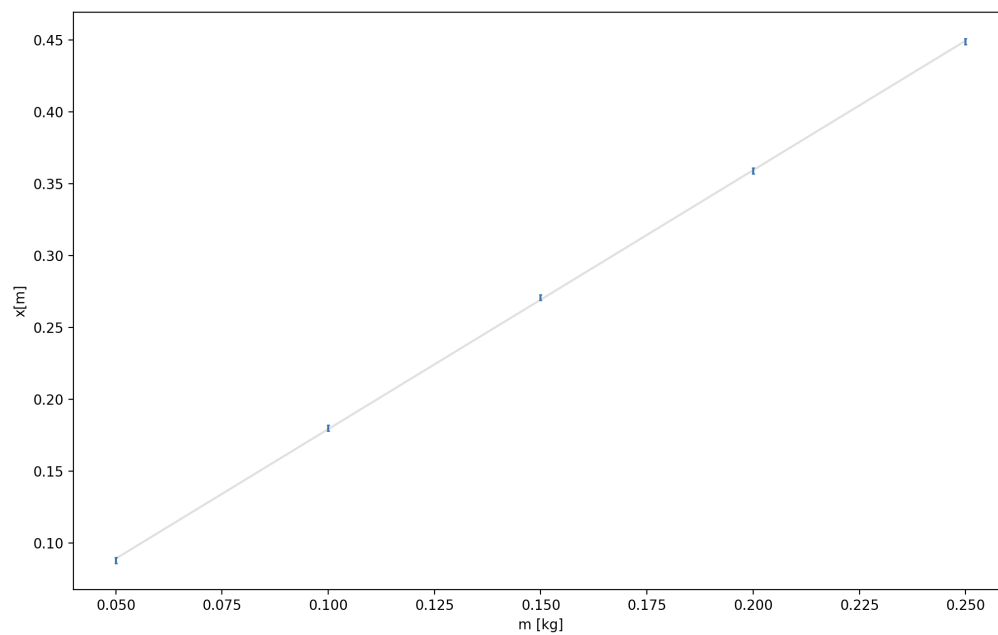
## 6 Układ sprężyn połączony szeregowo

### 6.1 pomierzone dane

l.p.	$x$ [cm]	$m$ [g]	$t$ [s]	$T^2$ [s <sup>2</sup> ]
1	8,8	50	12,42	0,39
2	18,0	100	17,80	0,79
3	27,1	150	21,13	1,12
4	35,9	200	24,49	1,50
5	44,9	250	26,1	1,70

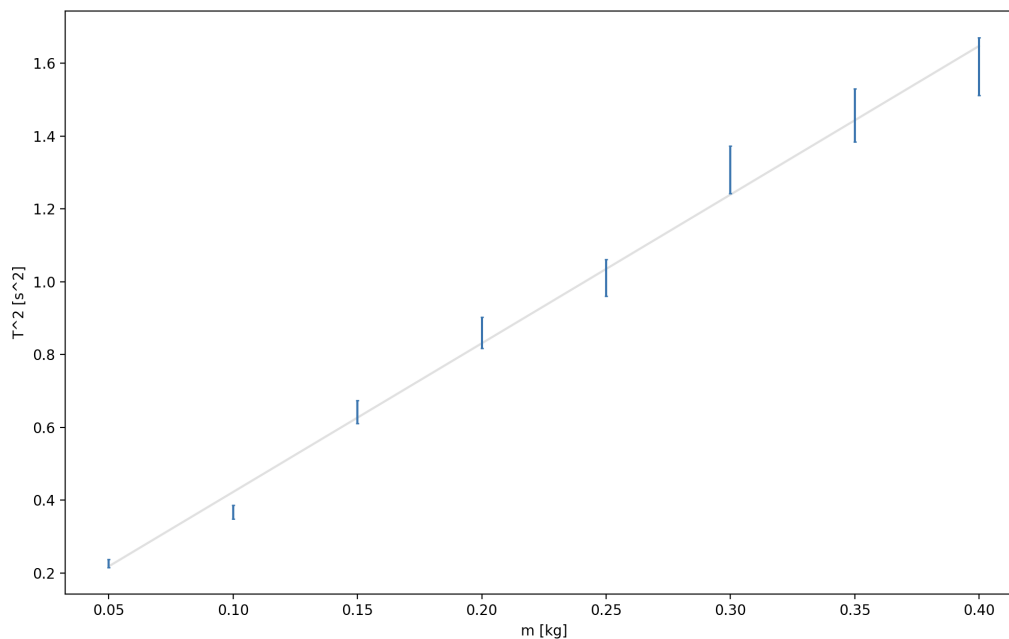
oznaczenia jak w pozostałych podpunktach

### 6.2 wykres i opracowanie $x(m)$



$a = 1,80$  zatem  $k = 5,5$  co zgadza się z teoretycznymi przewidywaniami, bo  $1/k \approx 1/k_1 + 1/k_2$

### 6.3 wykres i opracowanie $T^2(m)$



$a = 6,68$  zatem  $k = 5,90$  co zgadza się z teoretycznymi przewidywaniami, bo  $1/k \approx 1/k_1 + 1/k_2$

### 6.4 rachunek niepewności dla metody statycznej

do wyliczenia niepewności korzystamy z wyżej wymienionych wzorów i otrzymujemy  $S_k = 0,2$  [N/m]

### 6.5 rachunek niepewności dla metody dynamicznej

do wyliczenia niepewności korzystamy z tych samych wzorów co poprzednio i otrzymujemy  $S_k = 1,01$  [N/m]

## 7 Wnioski

zadanie	współczynnik sprężystości [ $\frac{N}{m}$ ]
metoda statyczna	14,1 i 9,5
metoda dynamiczna	14,14 i 9,67
układ połączony równolegle	23,3 i 23,75
układ połączony szeregowo	5,5 i 5,90

moduł sztywności  $G = 105,62$  GPa

Korzystając z metody statycznej i dynamicznej do wyznaczenia współczynnika sprężystości badanych sprężyn otrzymaliśmy zbliżone do siebie wartości współczynników z obu metod. Z wykresów przedstawiających zależność wychylenia od masy obserwujemy liniowy wzrost wychylenia. Co więcej, w przypadku metody dynamicznej tworząc wykres zależności kwadratu okresu drgań od obciążenia również otrzymujemy zależność liniową. W obu przypadkach zaobserwowaliśmy jedynie zakres stosowności prawa Hook'a, nie doprowadzając tym samym sprężyn do zakresu nieliniowych odkształceń nietrwałych i plastycznych. Taką samą sytuację obserwujemy dla układów sprężyn (szeregowego i równoległego). W połączeniu szeregowym i równoległym sprężyn uzyskujemy wyniki zbliżone do założeń teoretycznych tych połączeń. Współczynnik sprężystości dla układu szeregowego wzrósł, zaś dla układu równoległego zmalał względem współczynnika pojedynczej sprężyny.

W metodzie statycznej głównym czynnikiem wpływającym na błędy był błąd paralaksy, dokładność linijki oraz minimalne drgania podczas odczytu wartości. W metodzie dynamicznej był to czas reakcji przy pomiarach okresu drgań, a przy obliczaniu modułu sztywności dokładność suwmiarki.

Podczas obliczeń przyjęliśmy, że badane sprężyny są nieważkie oraz zaniedbaliśmy opory ruchu. Wszystkie pomiary zostały wykonane w temperaturze pokojowej.