

Sztuczna inteligencja

Dominik Lau

13 kwietnia 2023

1 Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie i przeanalizowanie dwóch algorytmów interpolacji na wybranych profilach wysokościowych - metody wykorzystującej wielomian Lagrange oraz metody z funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia. Do implementacji wykorzystano język *Python* oraz biblioteki *matplotlib*, *pandas*.

2 Teoria

W obu przypadkach zakładamy, że mamy pewien zestaw $n + 1$ punktów

$$(x_0, y_0)$$

$$(x_1, y_1)$$

...

$$(x_n, y_n)$$

i chcemy znaleźć taką funkcję $F(x)$, że

$$\forall_{i=0..n} F(x_i) = y_i$$

dobrze określającą, jakie wartości przyjmują y w punktach $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$

2.1 Metoda Lagrange

W metodzie tej funkcja F ma postać

$$F(x) = \sum_{i=0}^n y_i \phi_i(x)$$

gdzie

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

jest **bazą Lagrange'a**. Metoda ta zwraca takie same wyniki jak metoda Vandermonde, jednak nie musimy rozwiązywać układu równań liniowych

2.2 Metoda krzywych sklepanych 3. stopnia

w tej metodzie funkcja F ma postać

$$F(x) = S_i(x); x \in [x_i, x_{i+1}]$$

czyli przedstawiamy ją jako szereg połączonych wielomianów $S_i(x)$ takich, że

$$\deg(S_i) = 3$$

w celu uzyskania układów równań, z których pozyskamy współczynniki $S_i(x)$ przyjmujemy założenia

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i \\ S_i(x_{i+1}) &= y_{i+1} \\ S'_{j-1}(x_i) &= S'_j(x_i); x = 1..n-1 \\ S''_{j-1}(x_i) &= S''_j(x_i); x = 1..n-1 \\ S''_0(x_0) &= 0 \\ S''_{n-1}(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

znalezienie wielomianów S sprowadza się do rozwiązania powyższego układu równań, w praktyce można wyprowadzić z powyższych układów wzory na b, d w zależności od c a następnie rozwiązać cały układ równań dla wektora $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_{n-1}]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3(\frac{a_2 - a_1}{h_2} - \frac{a_1 - a_0}{h_0}) \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

i właśnie z tak uproszczonego układu skorzystano w implementacji (rozwiązany metodą Jacobiego)

3 Wybrane profile wysokościowe

Do analizy wybrano następujące profile wysokościowe

- ścieżkę Yoshidy na górę Fuji - jedno duże wzniesienie
- trasę Al. Ujazdowskie-Łazienki-Solec - trasa głównie płaska
- trasę wokół centrum Słupska - wiele nagłych (ale niedużych) wzniesień

4 Trasa na górę Fuji

5 Trasa w Warszawie

6 Trasa wokół centrum Słupska

7 Źródła

- Wikipedia-Spline
- Medium-Spline