

Interpolacja

Dominik Lau

25 kwietnia 2023

1 Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie i przeanalizowanie dwóch algorytmów interpolacji na wybranych profilach wysokościowych - metody wykorzystującej wielomian Lagrange oraz metody z funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia. Do implementacji wykorzystano język *Python* oraz biblioteki *matplotlib*, *pandas*.

2 Teoria

W obu przypadkach zakładamy, że mamy pewien zestaw $n + 1$ punktów

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) \\ (x_1, y_1) \\ \dots \\ (x_n, y_n)\end{aligned}$$

Chcemy znaleźć taką funkcję $F(x)$, że

$$\forall_{i=0..n} F(x_i) = y_i$$

dobrze określającą, jakie wartości przyjmują y w punktach $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$

2.1 Metoda Lagrange

W metodzie tej funkcja F ma postać

$$F(x) = \sum_{i=0}^n y_i \phi_i(x)$$

gdzie

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

jest **bazą Lagrange’a**. Metoda ta zwraca takie same wyniki jak metoda Vandermonde, jednak nie musimy rozwiązywać układu równań liniowych

2.2 Metoda krzywych sklepanych 3. stopnia

w tej metodzie funkcja F ma postać

$$F(x) = S_i(x); x \in [x_i, x_{i+1}]$$

czyli przedstawiamy ją jako szereg połączonych wielomianów $S_i(x)$ takich, że

$$\deg(S_i) = 3$$

w celu uzyskania układów równań, z których pozyskamy współczynniki $S_i(x)$ przyjmujemy założenia

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i \\ S_i(x_{i+1}) &= y_{i+1} \\ S'_{j-1}(x_i) &= S'_j(x_i); x = 1..n-1 \\ S''_{j-1}(x_i) &= S''_j(x_i); x = 1..n-1 \\ S''_0(x_0) &= 0 \\ S''_{n-1}(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

znalezienie wielomianów S sprowadza się do rozwiązania powyższego układu równań, w praktyce można wyprowadzić z powyższych układów wzory na b, d w zależności od c a następnie rozwiązać cały układ równań dla wektora $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_{n-1}]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ me... \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3(\frac{a_2 - a_1}{h_2} - \frac{a_1 - a_0}{h_0}) \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

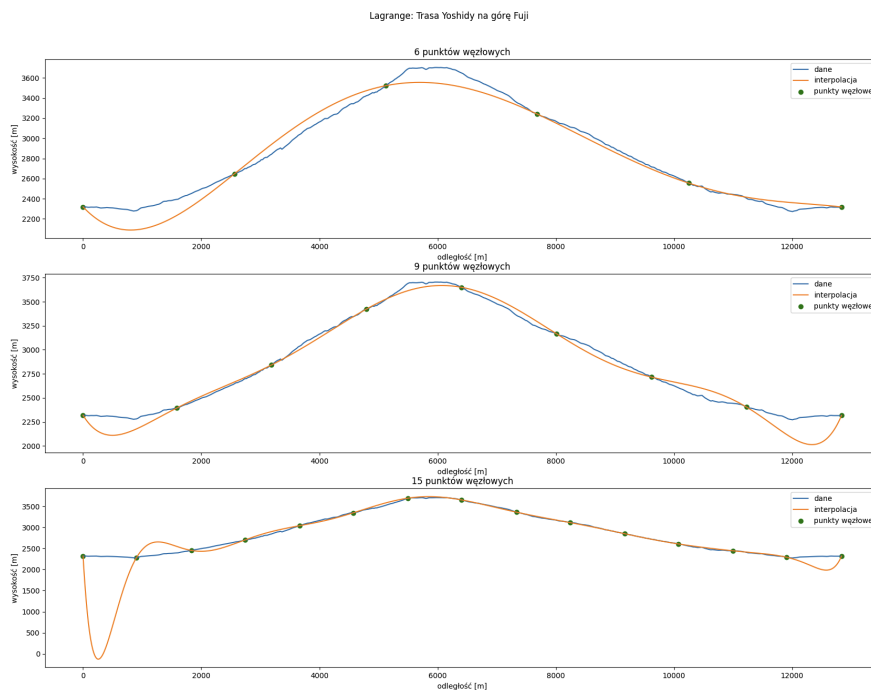
i właśnie z tak uproszczonego układu skorzystano w implementacji (rozwiązany metodą Jacobiego)

3 Wybrane profile wysokościowe

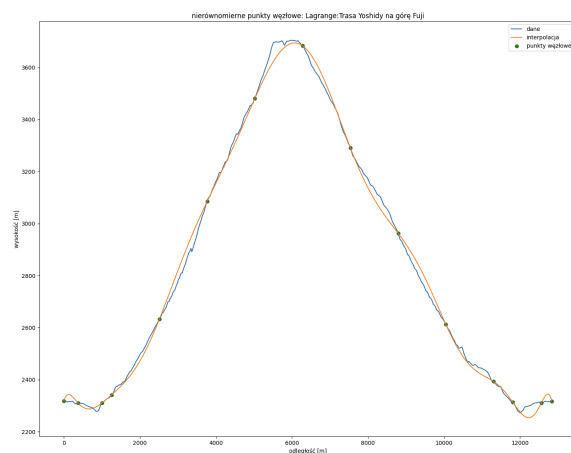
Do analizy wybrano następujące profile wysokościowe

- ścieżkę Yoshidy na górę Fuji - jedno duże wzniesienie
- Al. Ujazdowskie-Łazienki-Solec - trasa głównie płaska
- wokół centrum Słupska - wiele nagłych (ale niedużych) wzniesień

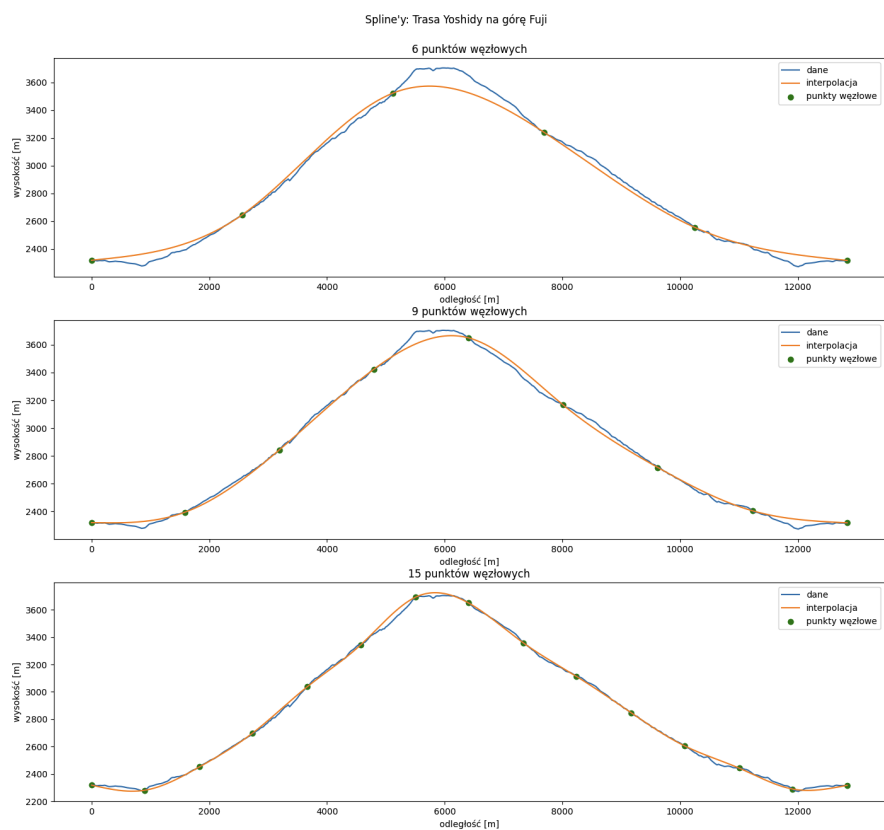
4 Trasa na górę Fuji



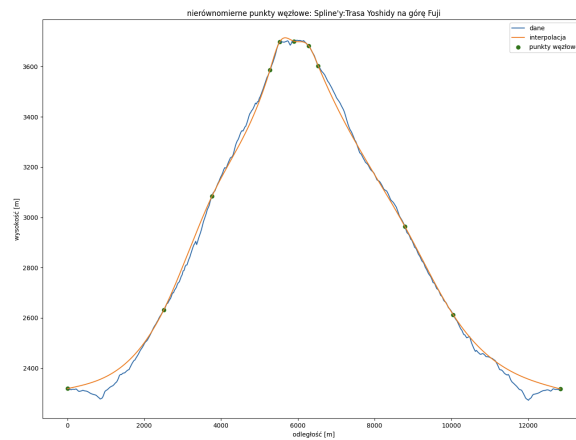
Na powyższych wykresach widzimy wpływ zwiększania ilości punktów węzłowych rozłożonych równomiernie na jakość wyznaczanych wartości interpolacji. Przede wszystkim należy zwrócić uwagę, że dla tej trasy otrzymujemy szybko **dobre odzwierciedlenie odcinków o stałym nachyleniu**, czyli np. od 2 do 4 km trasy. Problemem jest z nagłym spadkiem lub wzrostem nachylenia, jak w przypadku środka przedziału - dla mniejszej ilości punktów węzłowych **możemy nie trafić w charakterystyczny punkt zmiany nachylenia** przez co wyznaczone wartości niewiernie będą odzwierciedlały prawdziwą funkcję. Z tym problemem mamy do czynienia w przypadku 6 i 9 punktów węzłowych. Ponadto w przypadku 15 punktów węzłowych mamy do czynienia z nasileniem innego nieprzychylnego zjawiska, czyli z **efektem Rungego**. Wraz ze wzrostem ilości punktów węzłowych jakość interpolacji na krańcach przedziału pogarsza się (choć w środku przedziału obserwujemy poprawę). Na redukcję efektu Rungego wpłyniemy poprzez zmianę rozmieszczenia punktów, co zilustrowano poniżej.



Jak widać rozmieszczając 15 punktów nierównomiernie - **zwiększamy gęstość na krańcach przedziału** - otrzymujemy znaczne zmniejszenie (choć nie pozbycie się) oscylacji. Czynimy to kosztem gorszej jakości interpolacji w środku przedziału przy takiej samej złożoności obliczeniowej. Możemy zauważyć również porównując interpolację z 9 równomiernie rozmieszczonymi punktami do powyższej, że w przypadku nierównomiernego rozmieszczenia w środku przedziału pojawiają się wahania nawet dla odcinków o stałym nachyleniu. A oto jak z trasą na górę Fuji radzi sobie druga badana metoda

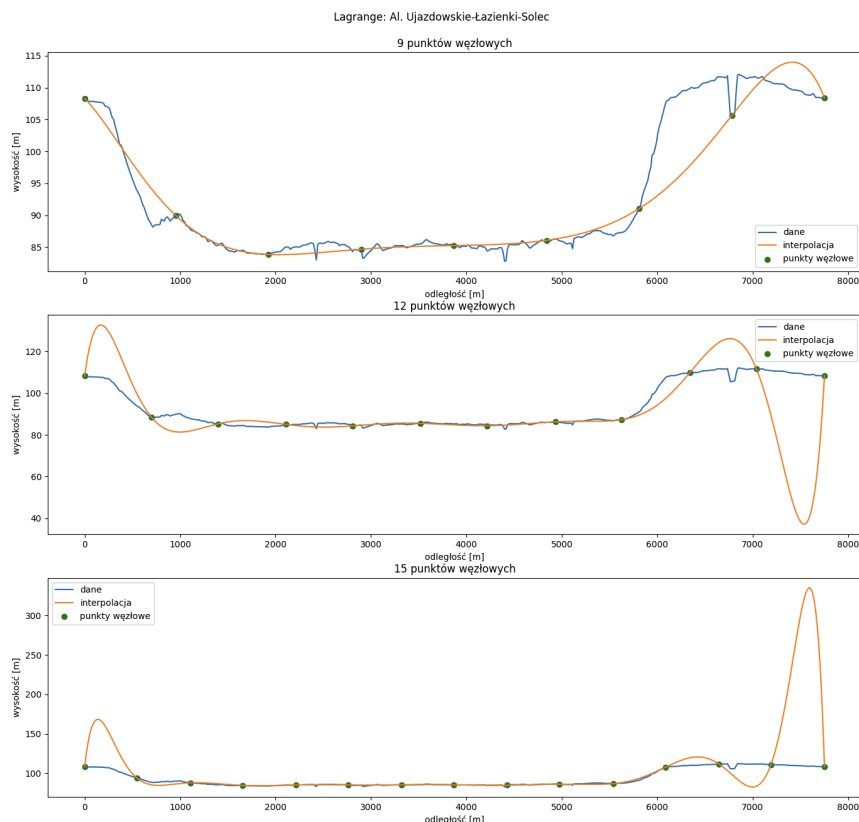


Chociaż w tym wypadku dla środka przedziału brak jest dużych różnic w stosunku do metody Lagrange'a, to **pozbywamy się efektu Rungego**. Tym samym dla metody krzywych sklejanych możemy poprawiać jakość interpolacji poprzez zwyczajne zwiększanie punktów węzłowych rozłożonych równomiernie bez ryzyka pogorszenia aproksymacji na brzegach przedziału.



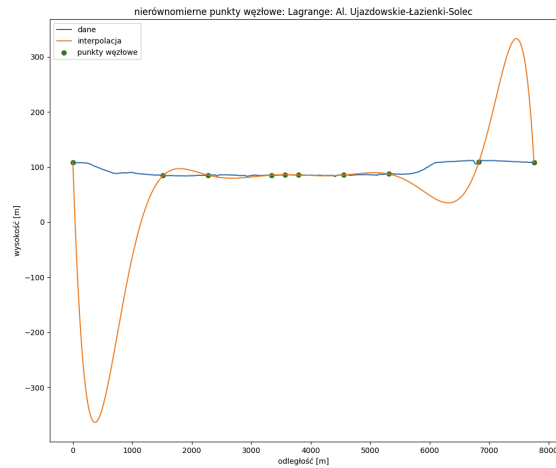
Możemy również próbować w przypadku funkcji sklepanych umieszczać węzły w punktach charakterystycznych, jednak efekt jest podobny jak w przypadku rozmieszczenia równomiernego, a może nawet prowadzić do gorszej interpolacji w pewnych odcinkach.

5 Trasa w Warszawie

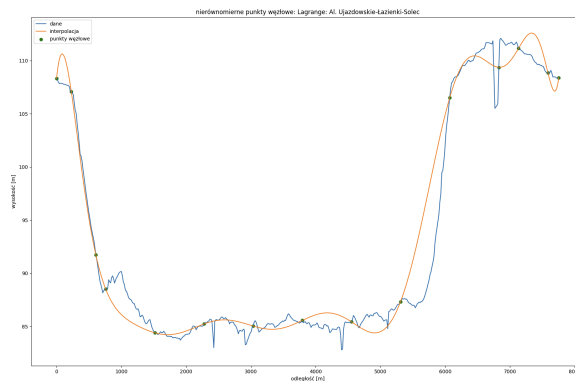


Przedstawiona trasa jest płaska (drobne spadki i wzniesienia $\sim 2\text{m}$) z dwoma znacznymi wzniesieniami. Dla interpolacji wielomianowej w przypadku 9 punktów mamy dobre odwzorowanie przebiegu funkcji dla terenu płaskiego (pomijając wspomniane wcześniej drobne spadki), natomiast ze względu na kłopotliwe umiejscowienie węzłów w okolicach wzniesień krzywa mniej wiernie odwzorowuje profil terenu. Występuje przypadek analogiczny do widzianego w przypadku góry Fuji - **jakość interpolacji dla nagłych wzniesień mocno zależy od rozmieszczenia punktów**, natomiast tereny płaskie są ogółem dobrze odwzorowywane i rozmieszczenie punktów nie gra tak istotnej roli. Jeżeli chcemy otrzymać lepszą interpolację to w tym wypadku efekt Rungego pojawia się bardzo szybko, ponieważ już dla 12 punktów węzłowych mamy znaczne odchylenia od oczekiwanej wartości funkcji (w pewnych miejscach wynik nawet dwukrotnie większy). Efekt podobnie jak w przypadku profilu góry Fuji nasila się wraz ze wzrostem ilości punktów węzłowych. Ostatecznie **dla równomiernie rozmieszczonych węzłów metodą Lagrange'a nie jesteśmy w stanie uzyskać dobrej interpolacji dla tego terenu**. Wcześniej zwiększaliśmy gęstość węzłów na brzegach przedziału. Co jeśli

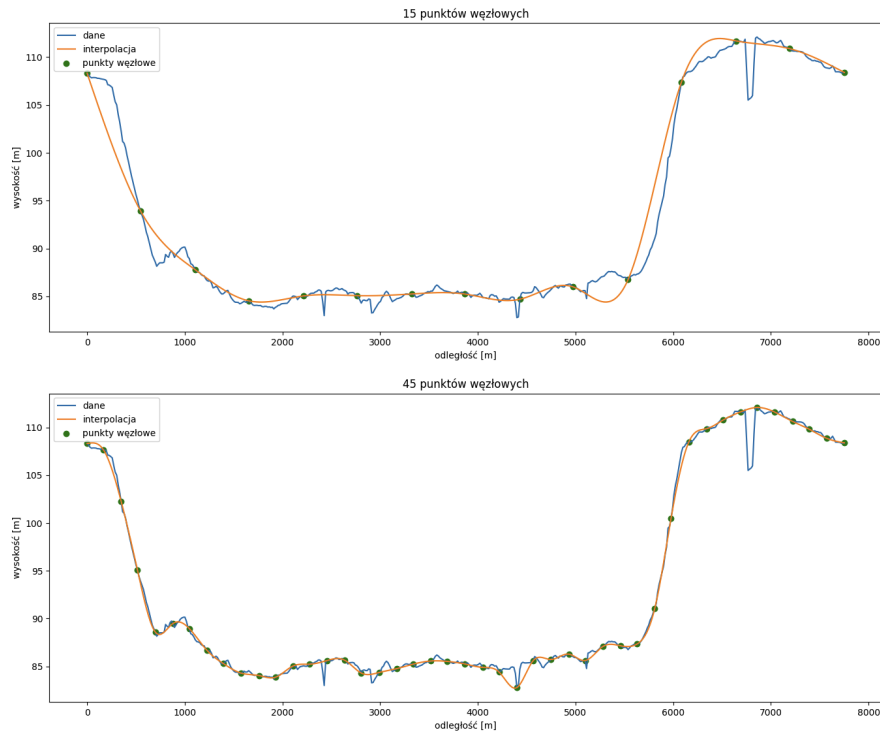
większość punktów skupujemy w jego środku?



Dla mniejszej ilości punktów węzłowych efekt Rungego został **spotęgowany**. Możemy zatem wnioskować, że jego skala jest związana z względną gęstością punktów w środku i na obrzeżu przedziału. Dla porównania próba redukcji efektu:

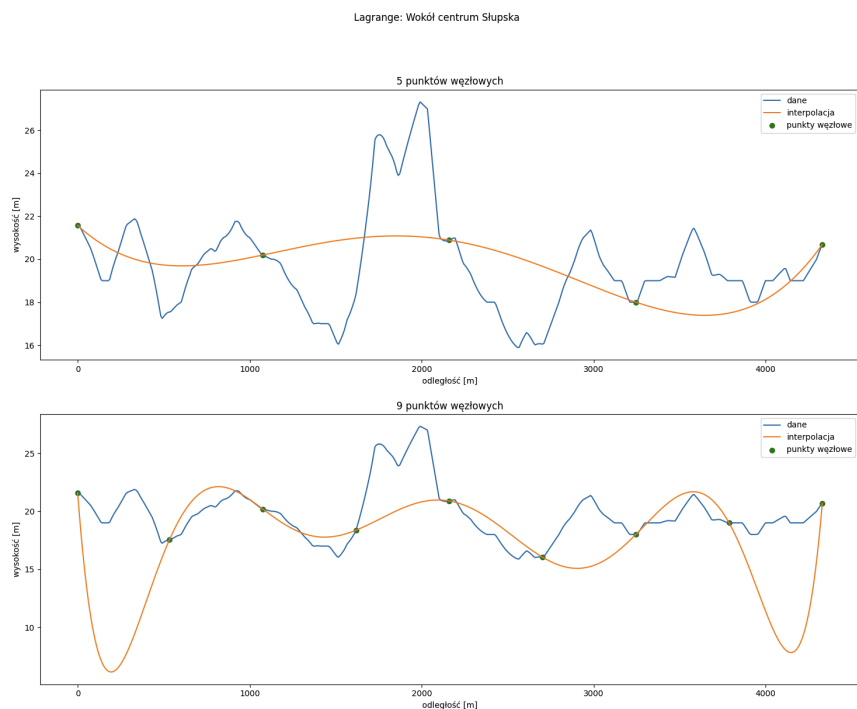


Dla tak rozmieszczonych 15 punktów węzłowych **efekt jest lepszy niż gdy rozmieściliśmy je równomiernie**. Niemniej jednak środek przedziału nie jest wiernie odwzorowany, zupełnie tak jak w przypadku góry Fuji, teraz jednak te odstępstwa są bardziej widoczne.



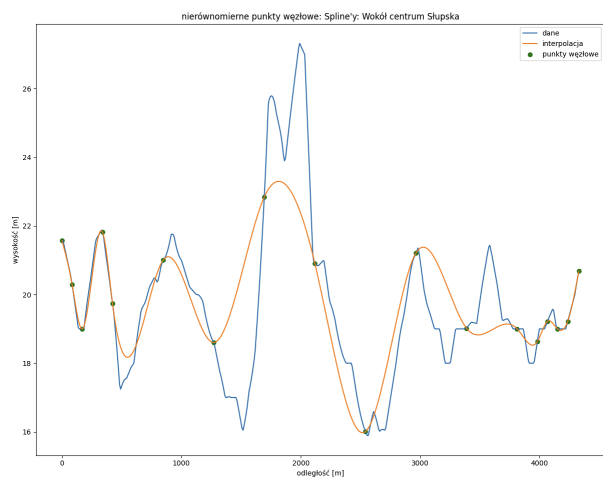
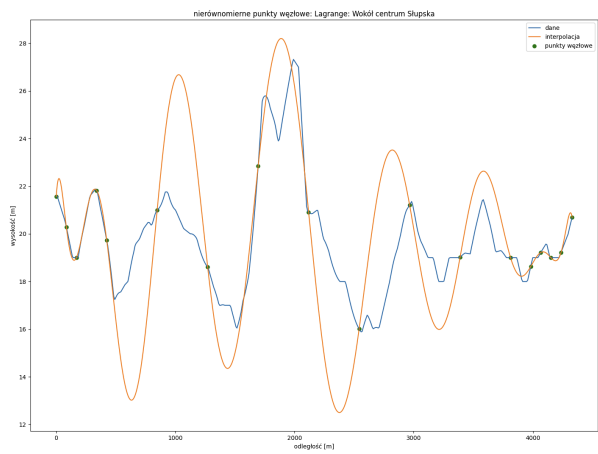
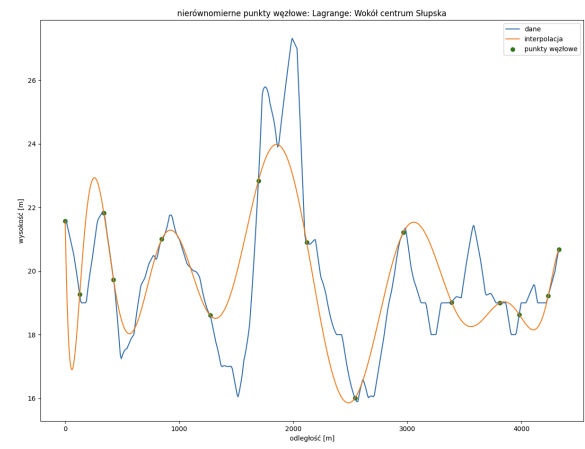
Dla metody krzywych sklejanych dla 15 punktów problem stanowią drobne oscylacje wysokości występujące po środku przedziału, dla tej metody możemy jednak pozwolić sobie na **zwiększenie liczby punktów węzłowych** dzięki czemu otrzymujemy lepsze przybliżenie tych **chwilowych przeskoków** jak widać dla 45 węzłów. Warto zwrócić uwagę, że dla góry Fuji, w której profilu wysokościowym było mniej "szumu" bardzo dobrą interpolację osiągaliliśmy dla mniejszej ilości punktów. Zauważmy też, że **zaobserwowane dla mniejszej ilości punktów "wygładzenie" może być pożądanym efektem na przykład w przetwarzaniu sygnałów**. Mimo wszystko, w przeciwieństwie do metody z wielomianem Lagrange'a, metodzie krzywych sklejanych udaje się osiągnąć dla tego terenu dobre rezultaty.

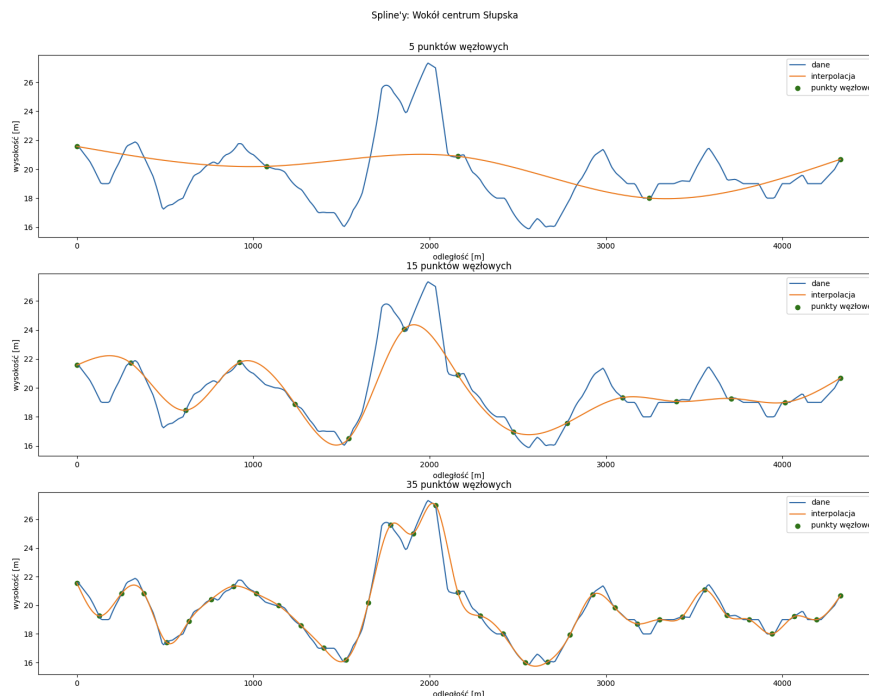
6 Trasa wokół centrum Słupska



Ostatni analizowany profil wysokościowy jest bardzo nieregularny, przy czym są to nagłe i gwałtowne spadki i wzrosty nachylenia. Jak widać, w tym wypadku duży efekt Rungego występuje już przy 9 węzłach, zatem jak wcześniej podejrzewaliśmy **na oscylacje wpływa nie tylko ilość punktów węzłowych ale także charakter przebiegu interpolowanej funkcji**. Dla 5 węzłów mamy natomiast demonstrację, dlaczego dla nieregularnych funkcji potrzebujemy większej ilości punktów węzłowych w celu otrzymania dobrej interpolacji - **zbyt mała ilość "próbek" nie zapewnia wystarczającej ilości informacji do odwzorowania profilu**.

Na poniższych wykresach natomiast widać zauważony już wcześniej wzrost oscylacji w środku przedziału przy zwiększaniu gęstości węzłów na krańcach przedziału. Podobnego efektu nie ma dla metody krzywych sklejanych.





Tak prezentują się wyniki dla krzywych sklejanych. **5 punktów węzłowych to za mało próbek, żeby trafnie oddać kształt tego profilu wysokościowego** i tyczy się to obu metod. Dla 35 punktów węzłowych otrzymujemy tak jak w przypadku trasy w Warszawie dokładne odzwierciedlenie oryginalnej funkcji. Ciekawe i potencjalnie użyteczne zjawisko obserwujemy dla 15 punktów, bo chociaż interpolacja nie jest jeszcze dokładna, to stanowi to dobry filtr wartości szybkozmiennych, który jak wcześniej wspomniano **może posłużyć w przetwarzaniu sygnałów**.

7 Eliminacja efektu Rungego

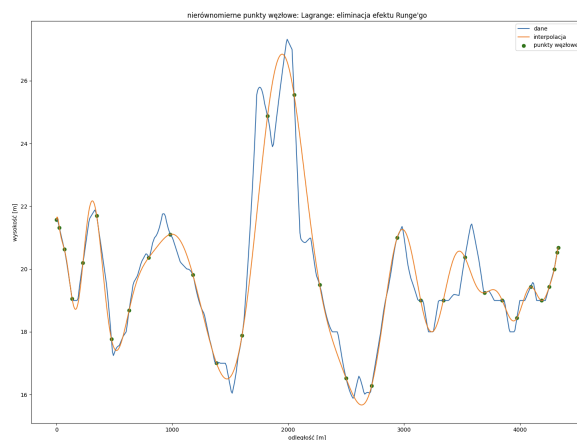
We wszystkich powyższych podpunktach głównym problemem metody interpolacji wielomianowej był efekt Rungego. Doszliśmy do wniosku, że istnieje pewna zależność między rozmieszczeniem punktów węzłowych a nasileniem tego efektu. Czy jesteśmy zatem w stanie określić tę zależność w celu wyznaczenia rozmieszczenia węzłów, które pozwoli nam na niwelację efektu Rungego? Okazuje się, że tak! Dla n punktów węzłowych ich rozmieszczenie będzie pokrywało się z pierwiastkami wielomianu Czebyszewa stopnia n :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1, 1]$$

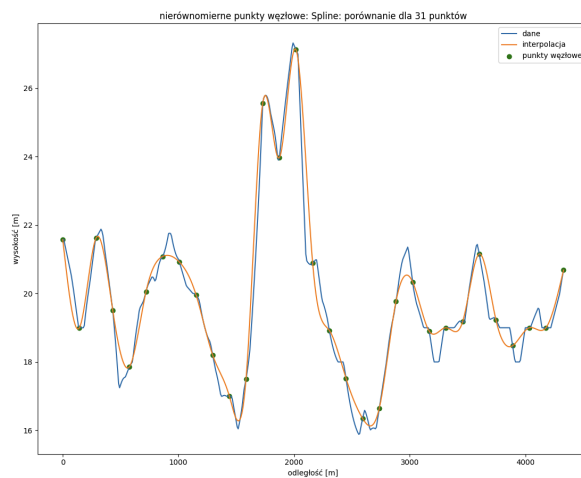
pierwiastki te są postaci

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), k = 0..n-1$$

rozmieścimy teraz węzły zgodnie z powyższym wzorem dla przypadku, w których efekt Rungego był najbardziej nasilony czyli trasy wokół centrum Słupska



jak widać efekt Rungego został wyeliminowany, natomiast interpolacja jest gorsza niż gdyby użyć krzywych sklejących dla 31 punktów:



dlatego nawet jeśli udało nam się pozbyć efektu Rungego należałoby się zastanowić czy nie lepiej dla naszego zastosowania użyć mimo wszystko krzywych sklejących.

8 Podsumowanie

Reasumując, obie metody są przydatne, jednak **użyteczność interpolacji wielomianowej z wykorzystaniem wielomianu Laplace'a jest ograniczona przez efekt Rungego**. Zjawisko to powoduje oscylacje na krańcach przedziału wraz ze wzrostem ilości punktów węzłowych, więc paradoksalnie pogarsza jakość interpolacji przy zwiększaniu złożoności obliczeniowej i punktów pomiarowych. Wady tej nie mają krzywe sklejące, które są pod każdym względem lepsze od metody wielomianowej. W efekcie ich użycia otrzymujemy dokładniejsze wartości interpolacji, ponadto wierność odwzorowania wzrasta wraz ze wzrostem liczby węzłów. **Krzywe sklejące radzą sobie zarówno z terenami o wolnozmiennym nachyleniu jak i o nagłych zmianach nachylenia**, czego nie można powiedzieć o metodzie wielomianowej, która ma problem z "ostrymi" krawędziami funkcji (gwałtownymi zmianami). Efekt Rungego można wyeliminować za pomocą węzłów Czebyszewa, tym samym zwiększając zakres zastosowań interpolacji wielomianowej. Obie metody nadają się również jako **filtr dolnoprzepustowy** do przetwarzania sygnałów.

9 Źródła

- Wikipedia-Spline
- Medium-Spline
- Efekt-Rungego
- Węzły Czebyszewa