

Rozwiązania zadań z PAA

Dominik Lau

2 stycznia 2023

1 algorytmy

Karatsuba

- a) oszacuj złożoność obliczeniową algorytmu Karatsuby
- b) opracowałeś metodę mnożenia dwóch liczb 4-cyfrowych za pomocą 10 mnożeń elementarnych. Czy twoja metoda jest lepsza od metody klasycznej, czy jest lepsza od algorytmu Karatsuby. Ile mnożeń wykona twoja metoda, metoda Karatsuby i metoda klasyczna dla 8 cyfrowych liczb.

rozwiązanie:

a) $M(n) = 3M(n/2) + n = \theta(n^{\lg 3})$

b)

metoda klasyczna(4) = 16 mnożeń (gorsza)

metoda karatsuby(4) = 9 mnożeń (lepsza)

dla 8 mnożeń:

moja metoda ok. 32 mnożenia

metoda karatsuby 27 mnożeń

metoda klasyczna 64 mnożenia

Wyszukiwanie sekwencyjne vs binarne

Jak wiele wyszukiwań binarnych trzeba wykonać w najgorszym przypadku danych w posortowanej tablicy, żeby opłacił się czas jej wstępnego posortowania? Przyjmij, że współczynniki proporcjonalności są równe 1.

rozwiązanie:

$T_s = n$ - czas pojedynczego wyszukiwania sekwencyjnego

$T_b = \log(n)$ - czas pojedynczego wyszukiwania binarnego

$$n \log n + x * \log n \leq x n \rightarrow x \geq \frac{n \log n}{n - \log n}$$

czyli potrzeba $x = \frac{n \log n}{n - \log n}$ wyszukiwań.

Euklides

```

def Euklides1(i,j):
    while i != j:
        if i > j:
            i = i - j
        else:
            j = j - i
    return i

def Euklides2(i,j):
    while i != 0 and j != 0:
        if i > j:
            i = i mod j
        else:
            j = j mod i
    return max{i,j}

```

dla algorytmów Euklides1, Euklides2:

1. Udowodnij poprawność algorytmu
2. Oszacuj pesymistyczna złożoność obliczeniową algorytmu, czy jest to złożoność wielomianowa czy niewielomianowa
3. Oszacuj złożoność pamięciową

rozwiązanie:

Euklides1:

1)
wartości i, j tworzą ciąg malejący, malejący ciąg liczb naturalnych musi być skończony, dlatego algorytm ma własność stopu, z własności NWD, $\text{NWD}(i,j) = \text{NWD}(j,i)$, $\text{NWD}(i,i) = i$ oraz $\text{NWD}(i,j) = \text{NWD}(i-j, j)$, gdzie $i > j$ zatem po każdej iteracji mamy $\text{NWD}(i,j) = \text{NWD}(i-j, j)$ aż w końcu, gdy $i = j$ to $\text{NWD}(i,j) = i = \text{NWD}(i_0, j_0)$

2)
najwięcej operacji wykona się, gdy $i = n$ a $j = 1$, bo wtedy będziemy mieli $T(n) = T(n-1) + 1 = O(n)$ kroków, natomiast złożoność obliczeniowa $T(r) = O(2^r)$ gdzie r - liczba cyfr danych wejściowych, jest to złożoność wykładnicza

3)
 $M(n) = O(1)$ algorytm potrzebuje stałej dodatkowej pamięci

Euklides2:

1)

wartości i, j tworzą ciąg malejący, malejący ciąg liczb naturalnych musi być skończony, dlatego algorytm ma własność stopu, z własności NWD, $\text{NWD}(i, j) = \text{NWD}(j, i)$, $\text{NWD}(i, 0) = i$ oraz $\text{NWD}(i, j) = \text{NWD}(i \bmod j, j)$ przechodzimy przez ciąg przekształceń $\text{NWD}(i, j) = \text{NWD}(i \bmod j, j)$ itd. aż dochodzimy do $\text{NWD}(i, 0) = i = \text{NWD}(i_0, j_0)$

2)

3) $M(n) = O(1)$

Dodawanie wektorów

udowodnij poprawność algorytmu dodawania wektorów A i B

```
def add(A,B):
    C = arr[1..n]
    i = 1
    while i <= n:
        C[i] = A[i] + B[i]
        i += 1
    return C
```

rozwiązanie:

przyjmujemy za niezmiennik $P(k) \iff$ po k -tej iteracji $C[1..k] = A[1..k] + B[1..k]$
 dla $P(1)$ oczywiste, bo $C[1] = A[1] + B[1]$
 zakładamy $P(k)$, w $k+1$ iteracji pętli dodajemy $C[k+1] = A[k+1] + B[k+1]$,
 czyli dostajemy $C[1..k+1] = A[1..k+1] + B[1..k+1] \iff P(k+1)$,
 udowodniliśmy zatem niezmiennik
 po n iteracjach będzie zatem zachodziło $P(n)$, czyli $C[1..n] = A[1..n] + B[1..n]$
 cnd

Największa wartość w wektorze

udowodnij poprawność algorytmu znajdowania maksymalnej wartości w wektorze L

```
def max(L[1..n]):
    i = 2
    max = L[1]
    while i <= n:
        if L[i] > max:
            max = L[i]
        i+=1
    return max
```

rozwiązanie:

przyjmujemy za niezmiennik $P(k) \iff$ po k -tej iteracji $\max = \max(L[1..k+1])$
zaczynamy od $\max = L[1]$ dla pierwszej iteracji mamy, że albo $L[2] > \max$, wówczas $\max = L[2]$ i otrzymujemy $\max = \max(L[1..2])$ albo $L[2] < \max$, wówczas wciąż $\max = \max(L[1..2])$ stąd wynika $P(1)$
załóżmy $P(k)$, czyli $\max = \max(L[1..k+1])$, w $k+1$ iteracji mamy, że albo $L[k+1] > \max$ albo $L[k+1] < \max$, w drugim przypadku $\max = \max(L[1..k+1]) = \max(L[1..k+2])$, w drugim przypadku nowy $\max = L[k+2] >$ stary \max , czyli jest też większy niż wszystkie inne wartości $L[1..k+1]$, zatem mamy $\max = \max(L[1..k+2])$, wykazaliśmy więc indukcyjnie $P(k)$
czyli po $n-1$ wykonaniach pętli mamy $P(n-1)$ czyli $\max = \max(L[1..n]) = \max$ całego wektora, to jest wartość przez nas zwracana, cnd

Wartość wielomianu

algorytm oblicza wartość wielomianu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

```
def W(a: coefficients, x: argument)
    p = a[0]
    xpower = 1
    for i = 1 to n:
        xpower = x * xpower
        p = p + a[i] * xpower
    return p
```

1. ile mnożeń trzeba wykonać w najgorszym przypadku, ile dodawań, a ile w przypadku przeciętnym
2. podaj algorytm, który wykona n mnożeń i n dodawań

rozwiązanie:

1)
dla wielomianu W , gdzie $\text{st. } W = n$ mamy $\text{mno}(n) = 2n$ oraz $\text{dod}(n) = n$ zarówno w przypadku pesymistycznym jak i optymistycznym

2)

```
def horner(a: coefficients, x: argument)
    p = 0
    for i = n to 0:
        p = p * x + a[i]
    return p
```

Złożoność obliczeniowa*

Udowodniono, że pewien algorytm ma złożoność $T(n) = \theta(n^{2,5})$. Określ prawdziwość zdań:

1. istnieją c_1, c_2 takie, że dla wszystkich n czas działania A jest krótszy niż $c_1 n^{2,5} + c_2$
2. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n , dla którego czas działania A jest krótszy niż $n^{2,4}$ sekund
3. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n , dla którego czas działania A jest krótszy niż $n^{2,6}$ sekund
4. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n , dla którego czas działania A jest dłuższy niż $n^{2,4}$ sekund
5. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n , dla którego czas działania A jest dłuższy niż $n^{2,6}$ sekund

rozwiązanie:

mamy $T(n) = \theta(n^{2,5}) \rightarrow c_1 n^{2,5} \leq T(n) \leq c_2 n^{2,5}$ dla prawie wszystkich n

1. prawda (np. $c_2 = 0$)
2. fałsz
3. prawda
4. prawda
5. fałsz

Funkcja malejąca zmieniająca znak

dla $f : R^+ \rightarrow R$ funkcji malejącej zmieniającej znak znajdź algorytm $o(n)$, który znajdzie największą liczbę naturalną n , dla której $f(n) \geq 0$

rozwiązanie:

```
def rozwiązanie(f):  
    i = 1  
    j = 1  
    while f(j) >= 0:  
        j = j * 2  
  
    while j != i + 1:  
        p = (i+j)/2  
        if p >= 0:  
            i = p
```

```
    else:
        j = p

    return i
```

złożoność: $O(\log n)$

Przesunięcie cykliczne

napisz program, który przesuwa cyklicznie n -elementowy wektor $A[1..n]$ o k pozycji w czasie liniowym, algorytm ma działać in-situ

rozwiązanie:

można zastosować przesuwanie z insertion sorta (przesuwamy k razy in-situ o jedną pozycję w lewo)

```
def shift(A[1..n], k):
    for i = 1 to k:
        current = A[n]
        for j = n to 1:
            swap(A[j], current)
        A[n] = current
```

Ciąg Fibonacciego

Napisz cztery wersje obliczenia n -tego wyrazu ciągu Fibonacciego o liczbie kroków: $O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$, $O(n)$, $O(\log n)$, $O(1)$

rozwiązanie:

$O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$

```
def f(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    return f(n-1) + f(n-2)
```

$O(n)$

```
def f(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    x = 1
    y = 1
    for i = 2 to n:
        z = x + y
        y = z
        x = z
```

```
return x
```

$O(\log n)$

```
def f(n):  
    A = (1 + sqrt(5)) / 2  
    B = (1 - sqrt(5)) / 2  
    return 1/sqrt(5) * (A^n - B^n)
```

$O(1)$??

Hybryda

Oszacuj liczbę kroków poniższego algorytmu liczącego wartość n -tego wyrazu ciągu fibonacciego. Określ, czy złożoność jest wielomianowa, superwielomianowa, wykładnicza, superwykładnicza

```
def hybryda(n):  
    if n < 9:  
        if n <= 2:  
            return 1  
        return hybryda(n-1) + hybryda(n-2)  
    else:  
        a = b = 1  
        for i = 3 to n:  
            b = b + a  
            a = b - a  
        return b
```

rozwiązanie:

nie obchodzi nas $n < 9$

$LK(n) = O(n)$

$ZO(r) = O(2^r)$ - złożoność jest wykładnicza

Hanoi

Pewien komputer wykonuje milion operacji przeniesi z poniższego algorytmu w ciągu sekundy. Dla jakich wartości n będzie on pracował

1. minutę
 2. godzinę
 3. rok
-

```
def X(A,B,C,n):  
    if n == 1:  
        przenies(A,C)  
    else:
```

```

X(A,C,B,n-1)
przenies(A,c)
X(B,A,C,n-1)

```

rozwiązanie:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 = \theta(2^n)$$

1.

$$1\ 000\ 000 * 60 = 2^n$$

$$n = \lg(1000000 * 60)$$

2.

$$n = \lg(1000000 * 60 * 60)$$

3.

$$n = \lg(1000000 * 60 * 60 * 24 * 365)$$

Złożoność czasowa

Pewien algorytm A ma złożoność czasową $\theta(n^2)$. Określ prawdziwość zdań:

1. Istnieją stałe c_1, c_2 takie, że dla wszystkich n czas działania A jest krótszy niż $c_1 n^2 + c_2$ sekund
2. Istnieją stałe c_1, c_2 takie, że dla wszystkich n czas działania A jest dłuższy niż $c_1 n^2 + c_2$ sekund
3. Istnieją stałe c_1, c_2, c_3 takie, że dla wszystkich n czas działania A jest równy $c_1 n^2 + c_2 n \log n - c_3 n$ sekund
4. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n , dla którego czas działania A jest mniejszy niż $n^{1,9}$ sekund
5. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n , dla którego czas działania A jest mniejszy niż $n^{2,1}$ sekund
6. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n , dla którego czas działania A jest większy niż $n^{1,9}$ sekund
7. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n , dla którego czas działania A jest większy niż $n^{2,1}$ sekund
8. dla pewnych n czas działania A jest równy 2^n sekund

rozwiązanie:

1. prawda

2. prawda

3. fałsz
4. fałsz
5. prawda
6. prawda
7. fałsz
8. prawda

Złożoność pesymistyczna

Algorytm A ma złożoność $f(n)$, algorytm B ma złożoność $g(n)$. Czy to prawda, że (tak, nie, nie wiadomo):

1. Czy w najgorszym przypadku B jest asymptotycznie szybszy od A, jeśli $g(n) = \Omega(f(n)\log n)$
2. Czy w najgorszym przypadku B jest asymptotycznie szybszy od A, jeśli $g(n) = O(f(n)\log n)$
3. Czy w najgorszym przypadku B jest asymptotycznie szybszy od A, jeśli $g(n) = \theta(f(n)\log n)$
4. Czy w najgorszym przypadku B jest asymptotycznie szybszy od A, jeśli $g(n) = \tilde{\theta}(f(n))$
5. Czy w najgorszym przypadku A jest asymptotycznie szybszy od B, jeśli $g(n) = o(f(n)\log n)$
6. Czy w najgorszym przypadku A jest asymptotycznie szybszy od B, jeśli $g(n) = \omega(f(n)\log n)$

rozwiązanie:

1. nie
2. nie wiadomo
3. nie
4. nie
5. nie wiadomo
6. tak

dwie funkcje

Określ funkcję f jako liniową, wielomianową, superwielomianową, wykładniczą lub superwykładniczą oraz oszacuj jej złożoność.

```
def f(n):  
    if n < 3:  
        return n  
    return f(n-2) + 2 * g(n)  
  
def g(n):  
    if n < 3:  
        return n  
    return 2f(n-2) + g(n / 3)
```

rozwiązanie:

$$T_f(n) = T_f(n-2) + T_g(n) + 1 = 3T_f(n-2) + T_g(n/3)$$

$$3T_f(n-2) + 1 \leq T_f(n) \leq 4T_f(n-2) + 1$$

$$T_f(n) = \Omega((\sqrt{3})^n) \cap O(2^n) - \text{liczba kroków}$$

$$T_f(n) = \Omega((\sqrt{3})^{2^n}) \cap O(2^{2^n}) - \text{złożoność obliczeniowa (jest to złożoność superwykładnicza)}$$

Funkcja Padovana

Funkcja Padovana zdefiniowana jest następująco $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(n) = P(n-2) + P(n-3)$. Oszacuj tempo wzrostu funkcji $P(n)$. Znajdź jak najlepsze oszacowanie.

rozwiązanie:

$$\text{Proste oszacowanie } P(n) = \Omega((\sqrt[3]{2})^n) \cap O((\sqrt{2})^n)$$

$$\text{Korzystając z własności funkcji Padovana: } \frac{P(n-2)}{P(n-3)} \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{otrzymujemy } P(n) = \Omega((\sqrt{\frac{7}{4}})^n) \cap O((\sqrt[3]{\frac{7}{3}})^n)$$

Mediana

Dany jest ciąg n liczb naturalnych z przedziału $[1 \dots 10n]$. Napisz algorytm znajdujący medianę, czyli $(n+1)/2$ największy element ciągu.

rozwiązanie:

```
def mediana(A[1..n]):  
    posortuj_przez_zliczanie(A) // potrzeba nam tablicy  
    return A[(n+1)/2]
```

złożoność obliczeniowa $O(n)$, pamięciowa $O(n)$

Własności NWD

Mamy dane własności NWD:

- $\text{NWD}(a,b) = 2\text{NWD}(a/2, b/2)$ jeśli a, b parzyste
- $\text{NWD}(a,b/2)$ jeśli a - nieparzyste, b -parzyste
- $\text{NWD}((a-b)/2, b)$ jeśli a i b nieparzyste

napisz algorytm wykorzystujący te własności do obliczenia NWD i oszacuj jego złożoność obliczeniową.

rozwiązanie:

```
def NWD(a,b):
    if a == 0:
        return b
    if b == 0:
        return a

    if even(a) and even(b):
        return 2 * NWD(a/2, b/2)
    if odd(a) and even(b):
        return NWD(a,b/2)
    return NWD((a-b)/2, b)
```

even sprowadza się do sprawdzenia jednego bitu

złożoność obliczeniowa: $T(r) = T(r-1) + 1 = O(r)$ gdzie r - liczba cyfr a i b

Zagadka 1

```
def z(A[1..n])
    x = 0
    for d = 1 to n:
        for g = d to n:
            suma = 0
            for i = d to g:
                suma = suma + A[i]
            x = max(x, suma)
    return x
```

odpowiedz na pytania:

1. jaki jest efekt działania powyższego kodu
2. jaka jest jego złożoność obliczeniowa
3. napisz program wykonujący to samo zadanie w czasie $O(n)$

rozwiązanie:

1)

algorytm wyznacza największą sumę spójnego podciągu w tablicy A

2)

$$T(n) = O(n^3)$$

3)

```
def z2(A[1..n])
    l = A[1]
    s = A[1]

    for i = 2 to n:
        l = max(l + A[i], A[i])
        s = max(s, l)
    return s
```

Zagadka 2

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n):
    for i = 1 to n * n:
        j = 1
        while j < sqrt(n):
            j = j + j
```

rozwiązanie:

$$T(n) = \theta(n^2 \lg(\sqrt{n})) = O(n^2 \lg(n)) - \text{liczba kroków}$$

$$T(r) = \theta(r 2^{2r}) - \text{złożoność obliczeniowa (r - rozmiar danych, czyli liczba cyfr)}$$

Zagadka 3

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n):
    for i = 1 to n * n:
        k = 1
        l = 1
        while l < n:
            k = k + 2
            l = l + k
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^{2,5})$ - liczba kroków
 $T(r) = \theta(2^{2,5r})$ - złożoność obliczeniowa

Zagadka 4

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n)
    for i = n - 1 to 1
        if odd(i) then
            for j = 1 to i:
                pass
            for k = i + 1 to n:
                x = x + 1
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^2)$ - liczba kroków
 $T(r) = \theta(2^{2r})$ - złożoność obliczeniowa

Zagadka 5

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n):
    for i = n - 1 to 1:
        if odd(i)
            for j = 1 to i:
                for k = i + 1 to n:
                    x = x + 1
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^3)$ - liczba kroków
 $T(r) = \theta(2^{3r})$ - złożoność obliczeniowa

Zagadka 6

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n):
    for i = 1 to n-1:
        for j = i + 1 to n:
            for k = 1 to j:
                pass
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^3)$ - liczba kroków
 $T(r) = \theta(2^{3r})$ - złożoność obliczeniowa

Zagadka 7

Co wylicza poniższa funkcja, podaj jej liczbę kroków i złożoność obliczeniową.

```
def f(n):  
    if n == 0 or n == 1:  
        return 1  
    return f(n-1) - f(n-2)
```

rozwiązanie:

wartości funkcji tworzą ciąg postaci (1,1,0,-1,-1,0,1,1,0,...)

liczba kroków: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) = \theta(\phi^n)$

złożoność obliczeniowa: $T(r) = \theta(\phi^{2^r})$

Zagadka 8

Podaj liczbę kroków funkcji

```
def z(n):  
    L = 0  
    for i = 1 to n * n:  
        for j = i to n:  
            for k = 1 to n * n mod 100:  
                L = L + 1
```

rozwiązanie:

wewnętrzna pętla wykonuje się $O(1)$

$T(n) = \theta(n^2)$

Zagadka 9***

Podaj liczbę kroków i złożoność obliczeniową poniższej funkcji, znajdź jak najlepsze oszacowanie (!).

```
def Fibonacci(n):  
    if i <= 2:  
        return 1  
  
    for i = 1 to 2^n / n^2:  
        pass  
  
    return Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2)
```

rozwiązanie:

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \frac{2^n}{n} \leq 2T(n-1) + \frac{2^n}{n} = O(n2^n)$

$$T(r) = O(2^r * 2^{2^r})$$

lepsze oszacowanie: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \frac{2^n}{n} \leq \dots + 2^n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1) \leq 2^n \ln(n) \rightarrow T(n) = O(\log(n)2^n)$

2 struktury danych

LSAP*

W historii problemu przydziału dla ważonych grafów dwudzielnych znane są algorytmy o złożonościach: $O(\sqrt{n}W \log(Cn^2/W)/\log n)$, $O(\sqrt{nm} \log(nC))$, $O(n^{3/4}m \log C)$, $?, O(nm \log(nC))$, $O(n^4)$, $O(n^3)$

przyjmij $C = O(1)$ -największa waga krawędzi, $W(n)$ - suma wag
uporządkuj je malejąco

rozwiązanie:

przyjmujemy $m = O(n^2)$, $W(n) = O(n)$

kolejność: $?, O(n^4)$, $O(nm \log nC)$, $O(n^3)$, $O(n^{3/4}m \log C)$, $O(\sqrt{(n)m} \log nC)$, $O(\sqrt{n}W \log(Cn^2/W)/\log n)$

Początkowe wyzerowanie macierzy

Początkowe wyzerowanie macierzy wymaga czasu $O(n^2)$. Podaj metodę, która uniknie początkowego wyzerowania macierzy.

rozwiązanie: tworzymy dwie niezainicjalizowane macierze A (mapa zainicjowanych elementów) i B (wartości zainicjowanych elementów) reprezentujące macierz M , przy odwołaniu do elementu $M[i, j]$ sprawdzamy, czy $A[i, j] = 0$ jeśli tak, to element jest zainicjowany i zwracamy jego wartość $B[i, j]$, jeśli $A[i, j] \neq 0$ to wstawiamy do $B[i, j]$ 0 i zwracamy 0.

składowe spójności bez DFS/BFS

Napisz algorytm znajdowania składowych spójności w grafie, w którym nie wykorzystuje się DFS ani BFS. Wskazówka: zastosuj mnożenie macierzy.

Rozwiązanie:

```
def sklawowe(G[1..n, 1..n]):
    S = I[1..n, 1..n] # macierz identycznosci
    W = 0[1..n, 1..n] # macierz zerowa
    for i = 1 to n: # O(n * n^lg7)
        S = S * G
        W = W + S

    # przyporządkowanie składowych spójności wierzchołkom O(n^2 lgn)
```

```

tablica_skladowych = array of sets [1..n]
for i = 1 to n:
    skladowe[i].add(i)
    for j = 1 to n:
        # W[i,j] - czy istnieje jakakolwiek sciezka miedzy i oraz j
        if W[i,j] != 0:
            skladowe[i].dodaj(j)

# usuniecie powtarzajacych sie skladowych O(nlgn)
skladowe = set of sets
for i = 1 to n:
    skladowe.add(tablica_skladowych[i])

return skladowe

```

złożoność $T(n) = O(n * n^{lg7})$

zakładam, że dodawanie do zbioru jest realizowane w czasie $O(lgn)$

macierz rozrzedzona

podaj reprezentację wiązaną macierzy, w której występować będą tylko elementy niezerowe

rozwiązanie:

chcąc reprezentować macierz $M[1..n, 1..m]$ tworzymy tablicę $L[1..n]$ list. Element $M[i, j]$ znajduje się w liście $L[i]$ w postaci pary (j, wartość).

merge

napisz algorytm scalania dwóch tablic posortowanych

rozwiązanie:

```

def merge(A,B):
    C = [1.. n+m]
    i = 1
    j = 1
    k = 1

    while i != n+1 or j != n+1:
        if A[i] < B[j]:
            C[k] = A[i]
            k+=1
            i+=1
        else:
            C[k] = B[j]
            k+=1
            j+=1

```



```

        k+=1
        j+=1
    if i > j:
        wstaw reszta B do C
    else if i < j:
        wstaw reszta A do C
    return C

```

odwracanie porządku listy

napisz algorytm odwracania porządku elementów listy liniowej i udowodnij jego poprawność

rozwiązanie

```

def reverse(L):
    R = list()
    while not L.empty():
        R.wstaw_na_koniec(L.ostatni)
        L.usun_ostatni()
    return R

```

dowód poprawności:

niezmiennik: $P(k) \iff$ po k -tej iteracji pętli $R[1..k]$ zawiera odwrócone elementy $L[(n-k)..n]$

$P(1)$ trywialne (R zawiera tylko ostatni element L)

załóżmy $P(k)$, zatem $R[1..k]$ zawiera odwrócone elementy $L[(n-k)..n]$

w następnej iteracji na pozycję $R[k+1]$ wstawiamy ostatni element okrojonej listy L , czyli $L[n-k-1]$

mamy zatem $R[1..k+1] =$ odwrócone elementy $L[n-k-1..n] \iff P(k+1)$ czyli

$P(k)$ jest prawdziwy dla każdego k

po n -iteracjach (n -długość listy) mamy $P(n)$ czyli $R[1..n]$ zawiera odwrócone elementy $L[1..n]$ cnd

Planarny graf dwudzielny

Podaj planarny graf dwudzielny, który nie może być umieszczony na płaszczyźnie w taki sposób, że każda ściana z wyjątkiem zewnętrznej jest wielokątem wypukłym.

rozwiązanie:

Odpadają wszystkie grafy $K_{p,q}$ w których $p \geq 3$ i $q \geq 3$ (bo $K_{3,3}$ jest nieplanarny). Graf, który spełnia treść zadania to na przykład $K_{2,4}$.

Macierzowa reprezentacja grafu z szybkim sprawdzeniem sąsiadów

Zaprojektuj macierzowy sposób reprezentacji grafu nieskierowanego, który: a) w czasie $O(1)$ umożliwia sprawdzenie, czy dana para wierzchołków u, v jest połączona krawędzią; b) w czasie $O(\deg v)$ umożliwia przejrzenie wszystkich sąsiadów wierzchołka v . Naskicuj procedurę boolowską $B(u, v)$, która realizuje punkt (a).

rozwiązanie:

macierz będzie zawierała $n+1$ kolumn numerowanych od 0 i n wierszy numerowanych od 1. Kolumna 0 będzie zawierała informację, o ile ma przeskoczyć j , żeby trafić na następnego sąsiada. Wszystkie pozostałe komórki też będą zawierały tę informację. Jeśli dwa wierzchołki nie sąsiadują ze sobą, w komórce ma być 0. Jeśli w komórce znajduje się ostatni sąsiad to jej wartość powinna wynosić -1.

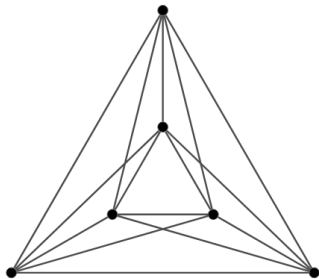
```
def hasEdge(M,i,j):
    if M[i,j] = 0:
        return false
    return true

def countDeg(M, i):
    deg = 0
    j = 0
    while true:
        if M[i,j] == -1 break
        j += M[i,j]
    return deg
```

Liczba przecięć K_6

Udowodnij, że $\xi(K_6) = 3$

rozwiązanie:



z rysunku wynika, że $\xi(K_6) \leq 3$

Załóżmy zatem, że $\xi(K_6) = 2$, oba przecięcia dotyczą czterech różnych

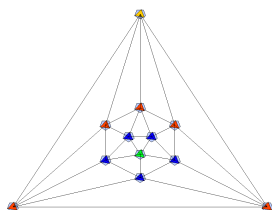
wierzchołków. Usuńmy zatem jeden z wierzchołków, wówczas otrzymujemy graf K_5 bez przecięć co jest sprzecznością. Zatem $\xi(K_6) = 3$

Graf planarny 5-regularny

narysuj graf planarny 5-regularny

rozwiązanie:

jest to graf dwunastościan:



warto zauważyć, że wszystkie grafy platońskie są planarne

Umieszczanie grafów

Udowodnij, że graf może być umieszczony na płaszczyźnie \iff może być umieszczony na powierzchni kuli.

rozwiązanie:

(\implies)

skoro graf może być umieszczony na płaszczyźnie to $\xi(G) = 0$ natomiast genus grafu ograniczony jest od góry $g \leq \xi(G) \rightarrow g = 0$ zatem można go również umieścić na kuli, która ma genus = 0

(\impliedby)

skoro graf możemy umieścić na kuli, która jest powierzchnią bez rączek to znaczy, że nie ma przecięć więc można go również umieścić na płaszczyźnie

inne rozwiązanie:

każdą sferę można rzutować na płaszczyznę z wyjątkiem jednego punktu (bieguna)

Nierówności trójkąta

Dany jest zbiór n liczb. Sprawdź czy w tym zbiorze są takie 3, które mogą być długościami boków trójkąta. Algorytm powinien mieć złożoność $o(n^2)$.

rozwiązanie:

```
def triangle_inequality(A[1..n]):  
    A = sort(A)  
    c1 = A[1]  
    c2 = A[2]  
    for i = 3 to n:  
        if c1 + c2 > A[i]  
            return True  
        else:  
            c1 = A[i]  
            swap(c1, c2)  
    return False
```

złożoność $O(n \log n)$

Najkrótszy cykl w grafie dwudzielnym

Znajdź algorytm, który w grafie $K_{p,q}$ ($p, q \geq 1$) znajdzie najkrótszy cykl i oszacuj jego złożoność obliczeniową. (rozważ przypadek a) lista sąsiedztwa, b) macierz sąsiedztwa) Dlaczego jest ona mniejsza niż złożoność pamięciowa?

rozwiązanie:

```
def cykle(G):  
    u1 = sasiad1(v)  
    u2 = sasiad2(v)  
    u3 = niesasiad(v)  
    return (v, u1, u3, u2, v)
```

a)

złożoność obliczeniowa $O(n)$ - przejście sąsiedztwa v , mniejsze niż $n + m$

b)

złożoność obliczeniowa $O(n)$ mniejsze niż n^2

złożoności obliczeniowe są mniejsze niż złożoność pamięciowa, bo zbiór danych nie składa się z samych danych istotnych

Harmoniczne kolorowanie

Harmoniczne kolorowanie - to takie pokolorowanie grafu, w którym:

- sąsiednie wierzchołki mają różne kolory
- dowolne dwie krawędzie mają różne pary kolorów

Minimalną ilość kolorów do pokolorowania harmonicznie grafu oznaczamy $h(G)$ albo $\chi_H(G)$.

Efektywną metodą na przechowywanie struktury grafu rzadkiego jest pokolorowanie go harmonicznie. Zapamiętujemy strukturę w postaci wektora kolorów W , gdzie $w_i \in W$ to kolor i -tego wierzchołka. Obok wektora zapamiętujemy macierz C o rozmiarze $h(G) \times h(G)$, w której $c_{i,j} = (u, v)$ gdy uv jest krawędzią o końcach pomalowanych kolorem i i kolorem j , w przeciwnym wypadku $c_{i,j} = 0$. Wiedząc, że $\sqrt{2m} < h(G) \leq n$ oszacuj:

1. złożoność czasową procedury $B(u, v)$
2. złożoność pamięciową macierzy W i C

rozwiązanie:

1)

```
def B(v, u, W, C):
    kolor1 = W[v]
    kolor2 = W[u]
    if C[kolor1, kolor2] == 0:
        return false
    return true
```

złożoność $O(1)$

2)

$$M_W(n) = \theta(n)$$

$$M_C(n) = \Omega(m) \cap O(n^2)$$

Znajdowanie drogi długości k

Posortuj złożoności malejąco dla algorytmu znajdowania drogi długości k w nieobciążonym grafie n -wierzchołkowym.

$$O(4^k n^{O(1)}), \quad O(k! n^{O(1)}), \quad O(1, 66^k n^{O(1)}), \quad O((2e)^k n^{O(1)}), \quad O(1, 66^n n^{O(1)}),$$

$$O(2^{3k/2} n^{O(1)}), \quad O(2^k n^{O(1)})$$

rozwiązanie:

ograniczenie górne na k : $k \leq n - 1$

$$O(k! n^{O(1)}), \quad O((2e)^k n^{O(1)}), \quad O(4^k n^{O(1)}), \quad O(2^{3k/2} n^{O(1)}), \quad O(2^k n^{O(1)}),$$

$$O(1, 66^n n^{O(1)}), \quad O(1, 66^k n^{O(1)})$$

LGS

Naszkicuj program `lgs` zwracający liczbę gwiazd spinających zawartych w G . Oszacuj jego złożoność w zależności od m i n dla macierzy sąsiedztwa, listy sąsiedztwa, pęków wyjściowych.

rozwiązanie:

```
def lgs(G):
    l = 0
    for v in G:
        if |N(v)| = n-1:
            l += 1
    return l
```

dla macierzy sąsiedztwa $O(n^2)$, dla listy sąsiedztwa $O(n + m)$, dla pęków $O(n)$

Cykl

Napisz program, który stwierdza, czy graf G zapisany w macierzy sąsiedztwa wierzchołków jest cyklem i oszacuj jego złożoność obliczeniową.

rozwiązanie:

```
def is_cycle(G[1..n][1..n]):
    odwiedzone = tablica[1..n]
    licznik_odwiedzone = 0
    wyzeruj(odwiedzone)
    obecny_wierzcholek = 1
    while licznik_odwiedzone != n:
        odwiedzone[obecny_wierzcholek] = 1
        licznik_odwiedzone += 1
        licznik_odwiedzone =
        licznik_sasiadow = 0
        do_odwiedzenia = -1
        for i = 1 to n:
            if B(obecny_wierzcholek, i):
                licznik_sasiadow += 1
                if not odwiedzone[i]:
                    do_odwiedzenia = i

        if B(obecny_wierzcholek, 0) and licznik_odwiedzone = n:
            return true
        if do_odwiedzenia = -1:
            return false
        if licznik_sasiadow != 2:
            return false

    return false
```

Mnożenie hybrydowe macierzy

Założmy, że mamy dwa algorytmy mnożenia macierzy, pierwszy wykonuje 22 mnożenia na macierzach 3×3 , drugi 99 mnożeń na macierzach 5×5 , którym algorytmem najlepiej jest pomnożyć macierze 15×15 .

Rozwiązanie:

Najlepiej użyć metody hybrydowej, najpierw rozbijamy macierz na 3×3 macierzy 5×5 , mnożymy pierwszym algorytmem a potem drugim, czyli mamy $22 * 99$ mnożeń.

3 Problemy

klika o rozmiarze $\leq k$

Mamy algorytm, który odpowiada na pytanie, czy graf G zawiera klikę $\leq k$ jeśli G ma gwiazdę spinającą. Jak wykorzystać ten algorytm dla grafu, który nie ma gwiazdy spinającej?

rozwiązanie:

Chcemy się dowiedzieć, czy graf ma klikę $\leq k$.

Dokładamy do G gwiazdę spinającą, następnie pytamy o to, czy powstały graf ma klikę $\leq k-1$.

konwersja do 3CNF

Sprowadź podane wyrażenia do 3CNF

1. $x_1 + \bar{x}_2$
2. x_1
3. $x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4$
4. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

rozwiązanie:

- 1) $x_1 + \bar{x}_2 = (x_1 + \bar{x}_2 + y)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{y})$
- 2) $x_1 = (x_1 + y)(x_1 + \bar{y}) = (x_1 + y + z)(x_1 + y + \bar{z})(x_1 + \bar{y} + z)(x_1 + \bar{y} + \bar{z})$
- 3) $x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4 = (x_1 + x_2 + y)(\bar{x}_3 + x_4 + \bar{y})$
- 4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = (x_1 + x_2 + y)(x_3 + x_4 + x_5 + \bar{y}) = (x_1 + x_2 + y)(x_3 + x_4 + \bar{z})(x_5 + \bar{y} + z)$

UWAGA!

w podpunkcie 3 i 4 zastosowaliśmy trik, niech ϕ będzie dowolną formułą logiczną DNF o literalach a, b, c, d to jest $\phi = a + b + c + d$

wówczas $\psi = (a + b + y)(c + d + \bar{y})$ jest równoważne w kontekście spełnialności do ϕ . Innymi słowy zawsze zachodzi $\text{SAT}(\psi) = \text{SAT}(\phi)$

KLIKA \in NPC

Udowodnij, że KLIKA \in NPC. Użyj problemu CNF-SAT.

rozwiązanie:

1)

KLIKA \in NP - mając dowolny podgraf n_1 wierzchołkowy w czasie n_1^2 jesteśmy w stanie sprawdzić, czy jest kliką

2)

T: CNF-SAT α KLIKA

D:

budujemy graf G

- jego wierzchołki to zmienne należące do poszczególnych klauzul formuły
- wierzchołki w obrębie jednej klauzuli są niezależne
- zmienne zanegowane występujące w różnych formułach (czyli np. $x, \neg x$) są niezależne między sobą
- pozostałe wierzchołki połączone są krawędziami

CNF-SAT(formuła) = KLIKA(G, Nklauzul)

(a) jeśli formuła nie jest spełnialna, czyli CNF-SAT(formuła) = NIE, to znaczy, że w grafie G nie ma klik łączącej wszystkie klauzule-podzbiory, bo gdyby była, to dla pewnego wartościowania 0,1 wierzchołków do niej należących wartościowanie formuły wynosiłoby 1 co jest sprzeczne z założeniem, a zatem KLIKA(formuła, Nklauzul) = NIE

(b) jeśli formuła jest spełnialna, czyli CNF-SAT(formuła) = TAK, to znaczy, że w grafie G wszystkie wierzchołki należące do odpowiedniego wartościowania są ze sobą połączone i stanowią klikę, a zatem KLIKA(formuła, Nklauzul) = TAK

PW \in NPC

Udowodnij, że PW (Pokrycie wierzchołkowe) \in NPC. Użyj problemu KLIKA.

rozwiązanie:

1)

PW \in NP - mając dowolny $S \subseteq V$ w czasie wielomianowym jesteśmy w stanie sprawdzić, czy jest pokryciem wierzchołkowym - lecimy po krawędziach i sprawdzamy czy dla $\{v, w\}$ v lub $w \in S$, jeśli tak dla każdej krawędzi, to S jest pokryciem wierzchołkowym, w przeciwnym wypadku nim nie jest

2)

T: KLIKA α PW

D:

$KLIA(G, k) = PW(G', n-k)$

(a) jeśli G ma klikę k -elementową ($KLIA(G, k) = TAK$), to jego dopełnienie ma k -elementowy zbiór wierzchołków niezależnych, zatem żeby pokryć wszystkie krawędzie w najgorszym wypadku będziemy musieli w pokryciu umieścić wszystkie pozostałe wierzchołki (poza tymi niezależnymi) czyli $PW(G', n-k) = TAK$

(b) jeśli G nie ma klik k -elementowej ($KLIA(G, k) = NIE$) to w jego dopełnieniu każde k wierzchołków jest połączonych przynajmniej jedną krawędzią a co za tym idzie nie może być pokrycia $n-k$ elementowego (bo jedna krawędź by została bez kolorowego wierzchołka), czyli $PW(G', n-k) = NIE$

Ważone pokrycie wierzchołkowe

Udowodnij, że problem WPW (Ważonego pokrycia wierzchołkowego) $\in NPC$.
WPW definiujemy tak:

- Dane wejściowe: graf G z obciążonymi wierzchołkami, liczba $p \in \mathbb{N}$
- Pytanie: Czy G zawiera pokrycie wierzchołkowe o wadze $\leq p$

rozwiązanie:

1)

$WPW \in NP$ - mając dowolne $S \subseteq V$ jesteśmy w stanie zweryfikować w czasie wielomianowym czy waga sumuje się do p , a także, zweryfikować, czy S jest pokryciem

2)

$T: PW \leq WPW$

D:

$PW(G, k) = WPW(G_w, k)$, czyli G z wagami = 1 na każdym wierzchołku, k)

(a) jeśli graf ma pokrycie wierzchołkowe rozmiaru $\leq k$, to G_w ma pokrycie wierzchołkowe o łącznej wadze $\leq k$, czyli oba problemy odpowiadają TAK

(b) jeśli graf nie posiada pokrycia wierzchołkowego rozmiaru $\leq k$, to G_w również nie ma pokrycia o łącznej wadze $\leq k$, czyli dla obu problemów mamy NIE.

$SORT \leq MM$

Udowodnij, że $SORT \leq MM$.

$SORT$ definiujemy tak:

- Ciąg A n liczb
- Pytanie: Czy A jest rosnący?

MM definiujemy tak:

- Dane wejściowe: macierze A, B, C
- Pytanie: Czy $A \times B = C$

rozwiązanie:

zauważmy, że SORT da się rozwiązać wielomianowo, zatem nasza funkcja przekształcająca dane wejściowe będzie miała postać

```

SORT(A,n):
  if posortowany(A):
    MM(matrix(0), matrix(0), matrix(0))
  else:
    MM(matrix(0), matrix(0), matrix(1))

```

(a) jeśli $\text{SORT} = \text{TAK}$, to $\text{MM} = \text{TAK}$, ponieważ $\text{matrix}(0) \times \text{matrix}(0) = \text{matrix}(0)$

(b) jeśli $\text{SORT} = \text{NIE}$, to $\text{MM} = \text{NIE}$, ponieważ $\text{matrix}(0) \times \text{matrix}(0) \neq \text{matrix}(1)$

Gwiazda spinająca i kliki

Marek ma magiczną skrzynkę rozwiązującą problem k-kliki ale tylko, gdy w grafie jest gwiazda spinająca. Jak Andrzej ma zmienić swój graf niezawierający gwiazdy spinającej, żeby móc skorzystać ze skrzynki Marka?

rozwiązanie:

```

def Andrzej(G,k):
  G2 = G + gwiazda_spinajaca
  return Marek(G2, k+1)

```

(*) dodając gwiazdę spinającą zwiększamy rozmiar każdej kliki o 1

(a) jeśli $\text{Marek}(G2, k+1)$ daje TAK, to oznacza, że w $G2$ mamy $k+1$ -klikę zatem w G mamy k -klikę zgodnie z (*), czyli $\text{Andrzej}(G, k)$ daje TAK

(b) jeśli $\text{Marek}(G2, K+1)$ daje NIE, to oznacza, że w $G2$ nie mamy $k+1$ -kliki, a zatem z faktu (*) w grafie G nie ma k -kliki, czyli $\text{Andrzej}(G, k)$ daje NIE

czyli problem zostaje zachowany

4 Algorytmy aproksymacyjne

Kolorowanie wierzchołków

Dla poniższych algorytmów wymień, które grafy koloruje optymalnie, a dla których się myli.

1. LF

2. SL

3. SLF

rozwiązanie:

1)

optymalnie: $K_n, K_{p,q}$

myli się: P_6 , koperta, J_n - graf Johnsona

2)

optymalnie: W_n, C_n, J_n , drzewa, grafy planarne, grafy Mycielskiego

myli się: grafy dwudzielne, grafy Colemena-Moore'a, pryzma, pryzmatoid

3)

optymalnie: dwudzielne, w tym J_n , drzewa, C_n, W_n , kaktusy

myli się: $K_{p,q,r}$

Znajdowanie klik w grafie kubicznym

Zaprojektuj algorytm 1-absolutnie aproksymacyjny znajdujący największą klikę w n -wierzchołkowym grafie kubicznym. Algorytm powinien mieć złożoność $O(n)$

rozwiązanie:

Algorytm k -absolutnie aproksymacyjny \rightarrow algorytm taki, że dla danych I , gdzie $OPT(I)$ - optymalny wynik, mamy $|A(I) - OPT(I)| \leq 1$, czyli musimy znaleźć algorytm, który będzie mógł się pomylić o 1 w zwracaniu rozmiaru klik. Oto on:

```
def clique(G):  
    if n == 4:  
        return {v1, v2, v3, v4}  
    else:  
        u = dowolnysasiad(v1)  
        return {v1, u}
```

Czyli algorytm zwraca klikę K_4 lub K_2 , możliwe jest, że w grafie występuje K_3 ale chcemy stworzyć algorytm aproksymacyjny, więc możemy się pomylić o 1. Algorytm ma złożoność $O(n)$, bo `dowolnysasiad(v1)` działa w czasie $O(n)$. Algorytm ma złożoność mniejszą niż złożoność pamięciowa, bo niewszystkie dane w macierzy sąsiedztwa reprezentującej graf są danymi istotnymi dla wyniku.

Problem komiwojażera

Udowodnij, że jeśli $P \neq NP$ to problem komiwojażera nie ma wielomianowego algorytmu względnie aproksymacyjnego.

rozwiązanie:

Założmy, że istnieje taki algorytm k -aproksymacyjny - użyjemy go do rozwiązania problemu Ścieżki Hamiltona. Dla pewnego grafu G dodajemy wagę 1 do jego krawędzi, następnie tworzymy \tilde{G} i dodajemy do jego krawędzi wagę kn , scalamy te grafy i otrzymujemy graf pełny G^* . Dla G^* uruchamiamy nasz algorytm. Wiemy, że jeśli G ma ścieżkę Hamiltona, to $OPT(G^*) = n$, w przeciwnym wypadku $OPT(G^*) > kn$ natomiast nasz algorytm zwraca $A(G^*) \leq kn$, więc sprawdzając, czy nasz algorytm zwrócił $\leq kn$ możemy stwierdzić w czasie P , że graf posiada cykl Hamiltona lub nie $\rightarrow P = NP$, co jest sprzeczne z zał.

Pokrycie wierzchołkowe

Dla Pokrycia wierzchołkowego, gdzie k oznacza maksymalny rozmiar pokrycia:

1. udowodnij, że problem jest wielomianowy dla dowolnego ustalonego k
2. zaprojektuj algorytm wielomianowy dla $k = 1$
3. Udowodnij, że optymalizacyjna wersja PW nie ma algorytmu wielomianowego 1-absolutnie aproksymacyjnego (chyba, że $P = NP$)

rozwiązanie:

(1.)

rozwiązanie takiego problemu można przeprowadzić poprzez sprawdzenie wszystkich kombinacji tego, które wierzchołki są w pokryciu, a które nie, co można zrobić w czasie $O(n^k)$ i sprawdzenie dla każdego, czy pokrywa cały zbiór krawędzi, co można zrobić w czasie $O(m)$, zatem przy ustalonym k mamy problem wielomianowy

(2.)

```
def coverWithOne(G):  
    for i = 1 to n:  
        if vi covers entire E(G):  
            return True  
    return False
```

złożoność to $O(nm)$

(3.)

załóżmy, że istnieje taki algorytm A , powiedzmy, że mamy G taki, że $pw(G) = k$, konstruujemy na jego podstawie graf $G^* = G \cup G$, dla którego $pw(G^*) =$

$2k$, ponieważ musimy pokryć obie składowe spójności. Poniższy algorytm umożliwi nam dokładne rozwiązanie problemu PW.

```
def ExactPolynomialVertexCover(G):
    Gstar = G U G
    a = A(Gstar) # 2k v 2k+1
    return floor(a/2)
```

dokładne rozwiązanie NP-trudnego problemu PW w czasie wielomianowym \rightarrow $P = NP$, co jest sprzeczne z założeniem.

Dokładna liczba chromatyczna

Masz 100-wierzchołkowy graf G , a ja posiadam schemat PTAS, który działa w czasie $O(n^{\frac{1}{\varepsilon}})\mu s$. Chcesz stwierdzić, czy $\chi(G) = 3$, jak skorzystasz z mojego schematu i jak długo sekund będą trwały Twoje obliczenia?

rozwiązanie:

skorzystać można poprzez odpowiednie ustalenie ε : $a - \chi < 1 \rightarrow a < 1 + \chi$, stąd mamy $\frac{a}{\chi} \leq 1 + \varepsilon < \frac{1+\chi}{\chi} \rightarrow \varepsilon < \frac{1}{\chi}$ wówczas dla ustalonego χ otrzymujemy dokładny wynik, zatem przyjmujemy $\chi = 3 \rightarrow \varepsilon < \frac{1}{3}$ czyli np. $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Wówczas $T = 100^4 \mu s = 100 s$.

5 Dowody grafowe

Tw. Eulera

Udowodnij, że jeśli G jest spójnym grafem płaskim to $s = m - n + 2$

rozwiązanie:

indukcja względem m :

Jeśli $m = 1$, to $n = 1$ i mamy jedną ścianę (przypadek trywialny $P(1)$)

załóżmy $P(m-1)$

Rozważmy m -krawędziowy graf G . Jeśli G jest drzewem to $m = n - 1$ oraz $f = 1$ (jest acykliczny) czyli mamy $P(m)$. Jeśli G zawiera cykl, usuńmy pewną krawędź należącą do cyklu, $G-e$ ma $m-1$ krawędzi i $s-1$ ścian. Korzystamy z $P(m-1)$ i mamy $s - 1 = m - 1 - n + 2 \rightarrow s = m - n + 2 \iff P(m)$. cnd

Lemat o pocałunkach

Udowodnij, że dla każdego spójnego grafu płaskiego G o $n \geq 3$ zachodzi $2m \geq 3s$

rozwiązanie:

Dwa przypadki:

1) G jest drzewem ($s=1$)

zatem $m = n - 1 \leq 2 \rightarrow 2m \leq 4 = 4s \leq 3s$

2) G zawiera cykl

usuwamy wszystkie wierzchołki stopnia 1 otrzymując w ten sposób $R(G)$ (rdzeń G). Każda jego ściana jest otoczona przez co najmniej 3 krawędzie oraz $s(R(G)) = s(G)$ czyli mamy $m(R(G)) \geq 3s \rightarrow 2m(R(G)) \geq 3s$. Tym bardziej $m(G) \geq 3s$. cnd

Przydatne ograniczenie górne na m

Udowodnij, że dla grafu planarnego G o $n \geq 3$ mamy $m \leq 3n - 6$

rozwiązanie:

załóżmy, że G jest płaski (jest izomorficzny do grafu płaskiego więc możemy tak zrobić)

mamy $s = m - n + 2$ oraz $2m \geq 3s$

wstawiamy do lematu o pocałunkach wzór na s i otrzymujemy wzór z twierdzenia. cnd

Własności drzewa

Udowodnij, że następujące własności są równoważne:

1. T jest drzewem
2. T jest acykliczny i ma $n-1$ krawędzi
3. T jest grafem spójnym i ma $n-1$ krawędzi
4. T jest grafem spójnym i każda krawędź jest mostem
5. każde dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą
6. dodanie do T jednej krawędzi stworzy dokładnie jeden cykl

rozwiązanie:

wszystkie własności są trywialne dla $n = 1$, załóżmy prawdziwość wszystkich własności dla $P(k)$, gdzie $k < n$

(1. \rightarrow 2.)

T jest z definicji acykliczne, po usunięciu dowolnej krawędzi otrzymujemy $T - e = T_1 \cup T_2$ (rozspajamy). Z założenia indukcyjnego $m(T - e) = m(T_1) + m(T_2) = n(T_1) + n(T_2) - 2 \rightarrow m(T) = n(T_1) + n(T_2) - 1 = n(T) - 1$ zatem $m = n - 1$

(2. \rightarrow 3.)

zakładamy, że T nie jest grafem spójnym zatem $T = T_1 \cup T_2$ z założenia indukcyjnego $m(T) = m(T_1) + m(T_2) = n(T_1) + n(T_2) - 2 \rightarrow m = n - 2$ co jest sprzeczne z 2. zatem T musi być spójny.

(3. \rightarrow 4.)

$k = 1$ - ilość składowych spójności, czyli minimalna ilość krawędzi, która czyni go spójnym to $n-1$ więc każda krawędź musi być mostem

(4. \rightarrow 5.)

załóżmy, że między pewną parą wierzchołków mamy dwie drogi, zatem jeśli usuniemy którąś z krawędzi należących do jednej z dróg to nie rozpoimy grafu, co jest sprzeczne z 4.

(5. \rightarrow 6.)

załóżmy, że T zawiera cykl, wtedy dwa wierzchołki należące do tego cyklu połączone są dwiema różnymi drogami co jest sprzeczne z 5. po dodaniu krawędzi między tymi wierzchołkami tworzymy cykl, bo mamy jedną drogę, która była wcześniej i nową drogę przez tą krawędź, zatem $\gamma = 1$

(6. \rightarrow 1.)

załóżmy, że graf nie jest spójny, jest to sprzeczne z 5. bo dodanie jednej krawędzi nie gwarantuje stworzenia cyklu, zatem T musi być spójny, z 6. jest również acykliczny zatem jest drzewem

Pąki w grafie planarnym

Udowodnij, że każdy graf planarny zawiera co najmniej 3 pąki (pąk - wierzchołek v taki, że $\deg(v) \leq 5$)

rozwiązanie:

załóżmy, że mamy w grafie planarnym tylko dwa pąki v i u , zatem $\deg(v) + \deg(u) + 6(n-2) \leq 2m \leq 6n - 12$ co jest sprzeczne ($\deg(v) \neq 0$ i $\deg(u) \neq 0$) (ostatnia nierówność z przydatnego oszacowania górnego m)

Liczba cyklomatyczna

Udowodnij, że dla dowolnego grafu spójnego liczba cyklomatyczna $\gamma(G) = m - n + 1$

rozwiązanie:

usuwamy tyle krawędzi, żeby graf stał się acykliczny (czyli żeby stał się drzewem), w drzewie $m = n - 1$, czyli musimy usunąć $m - (n-1)$ krawędzi end.

Cykl w grafie dwudzielnym

Udowodnij, że graf jest dwudzielny \iff nie ma nieparzystych cykli

rozwiązanie:

(\rightarrow)

załóżmy, że graf dwudzielny ma nieparzysty cykl, zatem nie jest dwukolorowalny, bo nieparzyste cykle wymagają trzech kolorów, sprzeczność

(\leftarrow)

załóżmy, że graf nie ma nieparzystych cykli, zatem dla pewnego wierzchołka v można przyporządkować każdemu innemu wierzchołkowi dwa kolory - jeden dla tych, które są w odległości nieparzystej od v , drugi - parzystej, w ten sposób dowodzimy, że graf jest dwudzielny

Ograniczenie górne na χ

Udowodnij, że dla dowolnego grafu zachodzi $\chi(G) \leq \Delta + 1$

rozwiązanie:

dla $n = 1$ powyższa zależność zachodzi

załóżmy, że tw. zachodzi dla pewnego n , rozważmy graf $n+1$ wierzchołkowy G . Z założenia $\chi(G - v) \leq \Delta(G) + 1$, natomiast v ma co najwyżej Δ sąsiadów, czyli w najgorszym przypadku mamy jeden dostępny kolor, którym możemy go pokolorować, stąd $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. cnd

stąd mamy tw. Brooksa

Dla dwóch klas grafów mamy sytuację $\chi = \Delta + 1$: dla grafów pełnych oraz cykli nieparzystej długości. Dla reszty $\omega \leq \chi \leq \Delta$

Liczba chromatyczna grafu planarnego

Dla grafu planarnego G udowodnij:

1. $\chi(G) \leq 6$
2. $\chi(G) \leq 5$
3. czy jest lepsze oszacowanie na liczbę chromatyczną dla grafów planarnych?

rozwiązanie:

(1.)

(2.)

(3.)

tak, $\chi(G) \leq 4$

Tw. Vizinga

Udowodnij tw. Vizinga: $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$

6 Trudne zadania

Pokrycie wierzchołkowe *

Algorytm rozwiązuje problem k-pokrycia wierzchołkowego grafu G

```
def vertexcover(G,k)
    if E(G) empty:
        return true
    if k == 0:
        return false
    wybierz dowolne e = uv
    return vertexcover(G - u, k - 1) or vertexcover(G - v, k - 1)
```

1. jaka jest złożoność algorytmu w terminach m i k
2. podaj typy grafów i wartości k, dla których vertexcover zwraca true w czasie wielomianowym
3. podaj typy grafów i wartości k, dla których vertexcover zwraca false w czasie wykładniczym

MFP

W historii problemu maksymalnego przepływu znane są m.in. następujące algorytmy:

(1969) Edmondsa-Karpa
(1970) Dinica
(1974) Karzanova
(1977) Cherkaskyego
(1978) Galila
(1978) Shiloacha
(1980) Sleatora-Tarjana
(1986) Goldberga-Tarjana
(2013) Orlina

o złożonościach $O(nm)$, $O(nm \log(n^2/m))$, $O(nm \log n)$, $O(nm \log^2 n)$, $O(n^{5/3} m^{2/3})$, $O(n^2 \sqrt{m})$, $O(n^3)$, $O(n^2 m)$, $O(nm^2)$
przyporządkuj złożoności do odpowiednich algorytmów

rozwiązanie:

trzeba rozpatrzyć dwa przypadki: 1. grafy rzadkie, 2. grafy gęste i średnio gęste

Listowa reprezentacja drzew n-wierzchołkowych

Zaproponuj listowy sposób reprezentacji drzew n-wierzchołkowych w pamięci $O(n)$ umożliwiający sprawdzanie $O(1)$, czy para wierzchołków jest połączona krawędzią.

Minimalne rozcięcie

Problem Minimalne Rozcięcie pyta jak równo podzielić wierzchołki grafu, tak aby zminimalizować liczbę krawędzi łączących wierzchołki z różnych podzbiorów. Najszybszy znany algorytm dla problemu MR ma złożoność $O(2^{O(kkk)}n^3\log^3n)$ gdzie k jest rozmiarem minimalnego cięcia. Jaka jest najszersza klasa grafów, dla której problem MR jest wielomianowy? Jaki jest wówczas związek pomiędzy k i n ? Jaka jest wówczas złożoność wspomnianego algorytmu?

rozwiązanie:

jakie to mogą być klasy?

$K_{p,q}$: $k = 0$, $T = O(n^3\log^3n)$

T_n : $k = 1$, $T = O(n^3\log^3n)$

Q_p : $k = \log n$, $T = O(n^6\log^3n)$

N_n : $k = 0$