

NP, NPC, NPH

Dominik Lau

4 stycznia 2023

1 NP

1.1 Definicja

Decyzyjny problem $\Pi \in \text{NP}$ \iff jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym przy zastosowaniu idei wyroczni weryfikowalne w czasie wielomianowym.

Decyzyjny problem $\Pi \in \text{P}$ \iff jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym.

Decyzyjny problem $\Pi \in \text{NPI}$ \iff $\Pi \in \text{NP} - \text{P}$ (NP-intermediate). Problemy, dla których nie udowodniono, że są ani P ani NPC.

Uwaga $\Pi \in \text{P} \rightarrow \Pi \in \text{NP}$

1.2 Algorytmy niedeterministyczne

Algorytm wykonywany na niedeterministycznej maszynie Turinga, definiujemy działanie wyboru $O(1)$ zwracające dobry wynik dla zbioru danych.

1.3 Przykładowy problem NPI

Izomorfizm grafu

Dane: G_1, G_2

Pytanie: Czy G_1 izomorficzny do G_2 ?

1.4 α -redukcja

$\Pi_1 \alpha \Pi_2$ \iff mamy funkcję $T(x)$, która zachowuje problem i zmienia dane wejściowe Π_1 do Π_2 .

Istotne jest, że $tr(\Pi_1) \leq tr(\Pi_2)$, gdzie tr - trudność problemu.

2 NPC

2.1 Definicja

Decyzyjny problem $\Pi \in \text{NPC}$ $\iff \Pi \in \text{NP}$ i $\forall \Pi_1 \in \text{NP} \Pi_1 \alpha \Pi$. Czyli jest to problem przynajmniej tak samo trudny jak wszystkie inne problemy w NP.

2.2 3SAT i 3CNF

3CNF to formuła logiczna składająca się z iloczynu klauzul, w których występują po trzy literały. np. $\phi = (x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_4 + x_5)$

3SAT to problem o pytaniu: Czy podana formuła ϕ 3CNF jest spełnialna tj. czy dla pewnego wartościowania zmiennych $\phi, \phi = 1$. Jest to jedyny problem NPC, dla którego udowodniono bezpośrednio, że jest NPC (Cook, 1971). Na chłopski rozum dlaczego tak jest: każdy algorytm można sprowadzić do układu funkcji logicznych (np. układu bramek logicznych).

2.3 Dowodzenie NPC

Dowodzenie, czy Π jest NP-zupełny

1. wybrać problem $\Pi^* \in \text{NPC}$
2. pokazać $\Pi^* \alpha \Pi \rightarrow \Pi \in \text{NPH}$
3. pokazać, że $\Pi \in \text{NP}$ ($\iff \Pi \alpha \Pi^*$)

2.4 Przykładowe problemy NPC

3CNF

Pokrycie wierzchołkowe

3-wymiarowe skojarzenie

2-podział

Suma podzbioru

Genus grafu

3 NPH

3.1 Definicja

Problem $\Pi \in \text{NPH}$ $\iff \Pi$ jest co najmniej tak samo trudny jak wszystkie problemy w NP. Decyzyjna wersja problemu $\Pi_o \in \text{NPH} = \Pi_d \in \text{NPC}$.

Mając rozwiązanie wielomianowe problemu decyzyjnego prawie zawsze możemy rozwiązać odpowiadający mu problem optymalizacyjny w czasie wielomianowym

3.2 Optymalne kolorowanie grafu, mając rozwiązanie problemu decyzyjnego

TODO

3.3 Graf podkubiczny

Graf podkubiczny $G = \text{KUBICZNY} - \{e\}$