Rozwiązania zadań z PAA

Dominik Lau

17 listopada 2022

1 algorytmy

Karatsuba

a) oszacuj złożoność obliczeniową algorytmu Karatsuby
b) opracowałeś metodę mnożenia dwóch liczb 4-cyfrowych za pomocą 10 mnożeń elementarnych,. Czy twoja metoda jest lepsza od metody klasycznej, czy jest lepsza od algorytmu Karatsuby. Ile mnożeń wykona twoja metoda, metoda Karatsuby i metoda klasyczna dla 8 cyfrowych liczb.

rozwiązanie:
a) $M(n) = 3M(n/2) + n = \theta(n^{lg3})$
b)
metoda klasyczna(4)$=$ 16 mnożeń (gorsza)
metoda karatsuby(4) $=$ 9 mnożeń (lepsza)

dla 8 mnożeń:
moja metoda ok. 32 mnożenia
metoda karatsuby 27 mnożeń
metoda klasyczna 64 mnożenia

Wyszukiwanie sekwencyjne vs binarne

Jak wiele wyszukiwań binarnych trzeba wykonać w najgorszym przypadku danych w posortowanej tablicy, żeby opłacił się czas jej wstępnego posortowania? Przyjmij, że współczynniki proporcjonalności są równe 1.

rozwiązanie:
$T_s = n$ - czas pojedynczego wyszukiwania sekwencyjnego
$T_b = log(n)$ - czas pojedynczego wyszukiwania binarnego
$nlogn + x * logn \leq xn \rightarrow x \geq \frac{nlogn}{n-logn}$
czyli potrzeba $x = \frac{nlogn}{n-logn}$ wyszukań.

Euklides

```
def Euklides1(i,j):
   while i != j:
      if i > j:
         i = i - j
      else:
         j = j - i
   return i

def Euklides2(i,j):
   while i != 0 and j != 0:
      if i > j:
         i = i mod j
      else:
         j = j mod i
   return max{i,j}
```

dla algorytmów Euklides1, Euklides2:

1. Udowodnij poprawność algorytmu
2. Oszacuj pesymistyczna złożoność obliczeniową algorytmu, czy jest to złożoność wielomianowa czy niewielomianowa
3. Oszacuj złożoność pamięciową

rozwiązanie:

Euklides1:

1)
wartości i, j tworzą ciąg malejący, malejący ciąg liczb naturalnych musi być skończony, dlatego algorytm ma własnośc stopu, z własności NWD, NWD(i,j) = NWD(j,i), NWD(i,i) = i oraz NWD(i,j) = NWD(i-j, j), gdzie i > j zatem po każdej iteracji mamy NWD(i,j) = NWD(i-j, j) aż w końcu, gdy i = j to NWD(i,j) = i = NWD(i_0, j_0)

2)
najwięcej operacji wykona się, gdy i = n a j = 1, bo wtedy będziemy mieli $T(n) = T(n-1) + 1 = O(n)$ kroków, natomiast złożoność obliczeniowa $T(r) = O(2^r)$ gdzie r- liczba cyfr danych wejściowych, jest to złożoność wykładnicza

3)
$M(n) = O(1)$ algorytm potrzebuje stałej dodatkowej pamięci

Euklides2:

1)

wartości i, j tworzą ciąg malejący, malejący ciąg liczb naturalnych musi być skończony, dlatego algorytm ma własnośc stopu„ z własności NWD, NWD(i,j) = NWD(j,i), NWD(i,0) = i oraz NWD(i, j) = NWD(i mod j, j)
przechodzimy przez ciąg przekształceń NWD(i,j) = NWD(i mod j, j) itd. aż dochodzimy do NWD(i,0) = i = NWD(i_0, j_0)

2)

3) $M(n) = O(1)$

Dodawanie wektorów

udowodnij poprawność algorytmu dodawania wektorów A i B

```
def add(A,B):
   C = arr[1..n]
   i = 1
   while i <= n:
      C[i] = A[i] + B[i]
      i += 1
   return C
```

rozwiązanie:

przyjmujemy za niezmiennik $P(k) \iff$ po k-tej iteracji C[1.. k] = A[1..k] + B[1..k]
dla P(1) oczywiste, bo C[1] = A[1] + b[1]
zakładamy P(k), w k+1 iteracji pętli dodajemy C[k+1] = A[k+1] + B[k+1], czyli dostajemy C[1..k+1] = A[1..k+1] + B[1..k+1] $\iff$ $P(k+1)$, udowodniliśmy zatem niezmiennik
po n iteracjach będzie zatem zachodniło P(n), czyli C[1..n] = A[1..n] + B[1..n] cnd

Największa wartość w wektorze

udowodnij poprawnośc algorytmu znajdowania maksymalnej wartości w wektorze L

```
def max(L[1..n]):
   i = 2
   max = L[1]
   while i <= n:
      if L[i] > max:
         max = L[i]
      i+=1
   return max
```

rozwiązanie:

przyjmujemy za niezmiennik $P(k) \iff$ po k-tej iteracji max = max(L[1..k+1])
zaczynamy od max = L[1] dla pierwszej iteracji mamy, że albo L[2] > max, wówczas max = L[2] i otrzymujemy max = max (L[1..2]) albo L[2] < max, wówczas wciąż max = max(L[1..2]) stąd wynika P(1)
załóżmy P(k), czyli max = max(L[1 ..k+1], w k+1 iteracji mamy, że albo L[k+1] > max albo L[k+1] < max, w drugim przypadku max = max(L[1..k+1]) = max(L[1..k+2]), w drugim przypadku nowy max = L[k+2] > stary max, czyli jest też większy niż wszystkie inne wartości L[1..k+1], zatem mamy max = max(L[1..k+2]), wykazaliśmy więc indukcyjnie P(k)
czyli po n-1 wykonaniach pętli mamy P(n-1) czyli max = max(L[1..n]) = max całego wektora, to jest wartość przez nas zwracana, cnd

Wartość wielomianu

algorytm oblicza wartość wielomianu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

```
def W(a: coefficients,x: argument)
   p = a[0]
   xpower = 1
   for i = 1 to n:
      xpower = x * xpower
      p = p + a[i] * xpower
   return p
```

1. ile mnożeń trzeba wykonać w najgorszym przypadku, ile dodawań, a ile w przypadku przeciętnym
2. podaj algorytm, który wykona n mnożeń i n dodawań

rozwiązanie:

1)
dla wielomianu W, gdzie st. W = n mamy $mno(n) = 2n$ oraz $dod(n) = n$ zarówno w przypadku pesymistycznym jak i optymistycznym

2)

```
def horner(a: coefficients, x: argument)
   p = 0
   for i = n to 0:
      p = p * x + a[i]
   return p
```

Złożoność obliczeniowa*

Udowodniono, że pewien algorytm ma złożoność $T(n) = \theta(n^{2,5})$. Określ prawdziwość zdań:

1. istnieją c_1, c_2 takie, że dla wszystkich n czas działania A jest krótszy niż $c_1 n^{2,5} + c_2$
2. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n, dla którego czas działania A jest krótszy niż $n^{2,4}$ sekund
3. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n, dla którego czas działania A jest krótszy niż $n^{2,6}$ sekund
4. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n, dla którego czas działania A jest dłuższy niż $n^{2,4}$ sekund
5. dla każdego n istnieje zestaw danych rozmiaru n, dla którego czas działania A jest dłuższy niż $n^{2,6}$ sekund

rozwiązanie:
mamy $T(n) = \theta(n^{2,5}) \rightarrow c_1 n^{2,5} \leq T(n) \leq c_2 n^{2,5}$ dla prawie wszystkich n

1. prawda (np. $c_2 = 0$)
2. fałsz
3. prawda
4. prawda
5. fałsz

Funkcja malejąca zmieniająca znak

dla $f : R^+ \rightarrow R$ funkcji malejącej zmieniającej znak znajdź algorytm $o(n)$, który znajdzie największą liczbę naturalną n, dla której $f(n) \geq 0$

rozwiązanie:

```
def rozwiazanie(f):
  i = 1
  j = 1
  while f(j) >= 0:
    j = j * 2

  while j != i + 1:
    p = (i+j)/2
    if p >= 0:
      i = p
```

```
    else:
      j = p

  return i
```

złożoność: $O(logn)$

Przesunięcie cykliczne

napisz program, który przesuwa cyklicznie n-elementowy wektor A[1..n] o k pozycji w czasie liniowym, algorytm ma działać in-situ

rozwiązanie:
można zastosować przesuwanie z insertion sorta (przesuwamy k razy in-situ o jedną pozycję w lewo)

```
def shift(A[1..n], k):
  for i = 1 to k:
    current = A[n]
    for j = n to 1:
      swap(A[j], current)
    A[n] = current
```

Ciąg Fibonacciego

Napisz cztery wersje obliczenia n-tego wyrazu ciągu Fibonacciego o liczbie kroków: $O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$, $O(n)$, $O(logn)$, $O(1)$

rozwiązanie:
$O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$

```
def f(n):
  if n == 0 or n == 1:
    return 1
  return F(n-1) + F(n-2)
```

$O(n)$

```
def f(n):
  if n == 0 or n == 1:
    return 1
  x = 1
  y = 1
  for i = 2 to n:
    z = x + y
    y = z
    x = z
```

```
   return x
```

$O(logn)$

```
def f(n):
   A = (1 + sqrt(5)) / 2
   B = (1 - sqrt(5)) / 2
   return 1/sqrt(5) * (A^n - B^n)
```

$O(1)$??

Zagadka 1

```
def z(A[1..n])
   x = 0
   for d = 1 to n:
      for g = d to n:
         suma = 0
         for i = d to g:
         suma = suma + A[i]
      x = max(x, suma)
   return x
```

odpowiedz na pytania:

1. jaki jest efekt działania powyższego kodu
2. jaka jest jego złożonośc obliczeniowa
3. napisz program wykonujący to samo zadanie w czasie O(n)

rozwiązanie:
1)
algorytm wyznacza największą sumę spójnego podciągu w tablicy A

2)
$T(n) = O(n^3)$

3)

```
def z2(A[1..n])
   l = A[1]
   s = A[1]

   for i = 2 to n:
      l = max(l + A[i], A[i])
      s = max(s, l)
   return s
```

Zagadka 2

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n):
  for i = 1 to n * n:
    j = 1
    while j < sqrt(n):
      j = j + j
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^2 lg(\sqrt{n})) = O(n^2 lg(n))$ - liczba kroków
$T(r) = \theta(r2^{2r})$ - złożonośc obliczeniowa (r - rozmiar danych, czyli liczba cyfr)

Zagadka 3

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n):
  for i = 1 to n * n:
    k = 1
    l = 1
  while l < n:
    k = k + 2
    l = l + k
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^{2,5})$ - liczba kroków
$T(r) = \theta(2^{2,5r})$ - złożoność obliczeniowa

Zagadka 4

oszacuj złożonośc obliczeniową

```
def z(n)
  for i = n - 1 to 1
    if odd(i) then
      for j = 1 to i:
        pass
      for k = i + 1 to n:
        x = x + 1
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^2)$ - liczba kroków
$T(r) = \theta(2^{2r})$ - złożoność obliczeniowa

Zagadka 5

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n):
  for i = n -1 to 1:
    if odd(i)
      for j = 1 to i:
        for k = i+ 1 to n:
          x = x + 1
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^3)$ - liczba kroków
$T(r) = \theta(2^{3r})$ - złożoność obliczeniowa

Zagadka 6

oszacuj złożoność obliczeniową

```
def z(n):
  for i = 1 to n-1:
    for j = i + 1 to n:
      for k = 1 to j:
        pass
```

rozwiązanie:

$T(n) = \theta(n^3)$ - liczba kroków
$T(r) = \theta(2^{3r})$ - złożoność obliczeniowa

2 struktury danych

LSAP*

W historii problemu przydziału dla ważonych grafów dwudzielnych znane są algorytmy o złożonościach: $O(\sqrt{n}Wlog(Cn^2/W)/logn))$, $O(\sqrt{n}mlog(nC))$, $O(n^{3/4}mlogC)$, ?,$O(nmlog(nC)$, $O(n^4)$, $O(n^3)$
przyjmij $C = O(1)$-największa waga krawędzi, $W(n)$ - suma wag
uporządkuj je malejąco

rozwiązanie:
przyjmujemy $m = O(n^2)$, $W(n) = O(n)$
kolejność: ?, $O(n^4)$, $O(nmlognC)$, $O(n^3)$, $O(n^{3/4}mlogC)$, $O(\sqrt(n)mlognC)$, $O(\sqrt{n}Wlog(Cn^2/W)/logn))$

Początkowe wyzerowanie macierzy

Początkowe wyzerowanie macierzy wymaga czasu $O(n^2)$. Podaj metodę, która uniknie początkowego wyzerowania macierzy.

rozwiązanie: tworzymy dwie niezainicjalizowane macierze A(mapa zainicjowanych elementów) i B(wartości zainicjowanych elementów) reprezentujące macierz M, przy odwołaniu do elementu $M[i,j]$ sprawdzamy, czy $A[i,j] = 0$ jeśli tak, to element jest zainicjowany i zwracamy jego wartość $B[i,j]$, jeśli $A[i,j] \neq 0$ to wstawiamy do $B[i,j]0$ i zwracamy 0.

składowe spójności bez DFS/BFS

Napisz algorytm znajdowania składowych spójności w grafie, w którym nie wykorzystuje się DFS ani BFS. Wskazówka: zastosuj mnożenie macierzy.

Rozwiązanie:

```
def skladowe(G[1..n,1..n]):
   S= I[1..n, 1..n] # macierz identycznosci
   W = O[1..n, 1..n] # macierz zerowa
   for i = 1 to n: #O(n * n^lg7)
      S = S * G
      W = W + S

   # przyporzadkowanie skladowych spojnosci wierzcholkom O(n^2 lgn)
   tablica_skladowych = array of sets [1..n]
   for i = 1 to n:
      skladowe[i].add(i)
      for j = 1 to n:
         # W[i,j] - czy istnieje jakakolwiek sciezka miedzy i oraz j
         if W[i,j] != 0:
            skladowe[i].dodaj(j)

   # usuniecie powtarzajacych sie skladowych O(nlgn)
   skladowe = set of sets
   for i = 1 to n:
      skladowe.add(tablica_skladowych[i])

   return skladowe
```

---

złożoność $T(n) = O(n * n^{lg7})$
zakładam, że dodawanie do zbioru jest realizowane w czasie $O(lgn)$

macierz rozrzedzona

podaj reprezentację wiązaną macierzy, w której występować będą tylko elementy niezerowe

rozwiązanie:
chcąc reprezentować macierz $M[1..n, 1..m]$ tworzymy tablicę $L[1..n]$ list. Element $M[i, j]$ znajduje się w liście $L[i]$ w postaci pary (j, wartość).

merge

napisz algorytm scalania dwóch tablic posortowanych

rozwiązanie:

```
def merge(A,B):
   C = [1.. n+m]
   i = 1
   j = 1
   k = 1

   while i != n+1 or j != n+1:
      if A[i] < B[j]:
         C[k] = A[i]
         k+=1
         i+=1
      else:
         C[k] = B[i]
         k+=1
         j+=1
   if i > j:
      wstaw reszte B do C
   else if i < j:
      wstaw reszte A do C
   return C
```

odwracanie porządku listy

napisz algorytm odwracania porządku elementów listy liniowej i udowodnij jego poprawność

rozwiązanie

```
def reverse(L):
   R = list()
```

```
  while not L.empty():
    R.wstaw_na_koniec(L.ostatni)
    L.usun_ostatni()
  return R
```

dowód poprawności:
niezmiennik: $P(k) \iff$ po k-tej iteracji pętli R[1..k] zawiera odwrócone elementy L[(n-k)..n]
$P(1)$ trywialne (R zawiera tylko ostatni element L
załóżmy $P(k)$, zatem R[1..k] zawiera odwrócone elementy L[(n-k)..n]
w następnej iteracji na pozycję R[k+1] wstawiamy ostatni element okrojonej listy L, czyli L[n-k-1]
mamy zatem R[1..k+1] = odwrócone elementy L[n-k-1..n] $\iff P(k+1)$ czyli P(k) jest prawdziwy dla każdego k
po n-iteracjach (n-długość listy) mamy P(n) czyli R[1..n] zawiera odwrócone elementy L[1..n] cnd

Planarny graf dwudzielny

Podaj planamy graf dwudzielny, który nie może być umieszczony na płaszczyźnie w taki sposób, że każda ściana z wyjątkiem zewnętrznej jest wielokątem wypukłym.

rozwiązanie:
Odpadają wszystkie grafy $K_{p,q}$ w których $p \geq 3$ i $q \geq 3$ (bo $K_{3,3}$ jest nieplanarny). Graf, który spełnia treść zadania to na przykład $K_{2,4}$.

Macierzowa reprezentacja grafu z szybkim sprawdzeniem sąsiadów

Zaprojektuj macierzowy sposób reprezentacji grafu nieskierowanego, który: a) w czasie 0(1) umożliwia sprawdzenie, czy dana para wierzchołków u, v jest połączona krawędzią; b) w czasie O(degv) umożliwia przejrzenie wszystkich sąsiadów wierzchołka v. Naszkicuj procedurę boolowską B(u, v), która realizuje punkt (a).

rozwiązanie:
macierz będzie zawierała n+1 kolumn numerowanych od 0 i n wierszy numerowanych od 1. Kolumna 0 będzie zawierała informację, o ile ma przeskoczyć j, żeby trafić na następnego sąsiada. Wszystkie pozostałe komórki też będą zawierały tą informację. Jeśli dwa wierzchołki nie sąsiadują ze sobą, w komórce ma być 0. Jeśli w komórce znajduje się ostatni sąsiad to jej wartość powinna wynosić -1.

```
def hasEdge(M,i,j):
  if M[i,j] = 0:
```

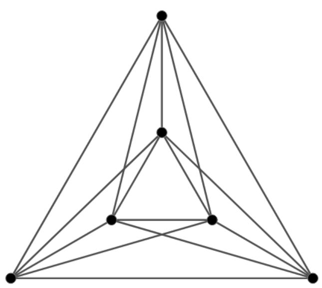
```
        return false
    return true

def countDeg(M, i):
    deg = 0
    j = 0
    while true:
        if M[i,j] == -1 break
        j += M[i,j]
    return deg
```

Liczba przecięć K_6

Udowodnij, że $\xi(K_6) = 3$

rozwiązanie:

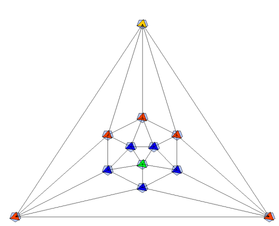


z rysunku wynika, że $\xi(K_6) \leq 3$
Załóżmy zatem, że $\xi(K_6) = 2$, oba przecięcia dotyczą czterech różnych wierzchołków. Usuńmy zatem jeden z wierzchołków, wówczas otrzymujemy graf K_5 bez przecięć co jest sprzecznością. Zatem $\xi(K_6) = 3$

Graf planarny 5-regularny

narysuj graf planarny 5-regularny

rozwiązanie:
jest to graf dwunastościan:



warto zauważyć, że wszystkie grafy platońskie są planarne

Umieszczanie grafów

Udowodnij, że graf może być umieszczony na płaszczyźnie $\iff$ może być umieszczony na powierzchni kuli.

rozwiązanie:

$(\longrightarrow)$
skoro graf może być umieszczony na płaszczyźnie to $\xi(G) = 0$ natomiast genus grafu ograniczony jest od góry $g \leq \xi(G) \rightarrow g = 0$ zatem można go również umieścić na kuli, która ma genus $= 0$

$(\longleftarrow)$
skoro graf możemy umieścić na kuli, która jest powierzchnią bez rączek to znaczy, że nie ma przecięć więc można go również umieścić na płaszczyźnie

inne rozwiązanie:

każdą sferę można zrzutować na płaszczyznę z wyjątkiem jednego punktu (bieguna)

Znajdowanie klik w grafie kubicznym

Zaprojektuj algorytm 1-absolutnie aproksymacyjny znajdujący największą klikę w n-wierzchołkowym grafie kubicznym. Algorytm powinien mieć złożoność $O(n)$

rozwiązanie:
Algorytm k-absolutnie aproksymacyjny -> algorytm taki, że dla danych I, gdzie OPT(I) - optymalny wynik, mamy $|A(I) - OPT(I)| \leq 1$, czyli musimy znaleźć algorytm, który będzie mógł się pomylić o 1 w zwracaniu rozmiaru kliki. Oto on:

```
def clique(G):
  if n == 4:
    return {v1, v2, v3, v4}
  else:
    u = dowolnysasiad(v1)
    return {v1, u}
```

Czyli algorytm zwraca klikę K_4 lub K_2, możliwe jest, że w grafie występuje K_3 ale chcemy stworzyć algorytm aproksymacyjny, więc możemy się pomylić o 1. Algorytm ma złożoność $O(n)$, bo dowolnysasiad(v1) działa w czasie $O(n)$. Algorytm ma złożoność mniejszą niż złożoność pamięciowa, bo niewszystkie dane w macierzy sąsiedztwa reprezentującej graf są danymi istotnymi dla wyniku.

Nierówności trójkąta

Dany jest zbiór n liczb. Sprawdź czy w tym zbiorze są takie 3, które mogą być długościami boków trójkąta. Algorytm powinien mieć złożoność $o(n)$.

rozwiązanie:

```
def triangle_inequality(A[1..n]):
   A = sort(A)
   c1 = A[1]
   c2 = A[2]
   for i = 3 to n:
      if c1 + c2 > A[i]
         return True
      else:
         c1 = A[i]
         swap(c1,c2)
   return False
```

złożoność $O(nlogn)$

Najkrótszy cykl w grafie dwudzielnym

Znajdź algorytm, który w grafie $K_{p,q}$ $(p, q \geq 1)$ znajdzie najkrótszy cykl i oszacuj jego złożoność obliczeniową. (rozważ przypadek a) lista sąsiedztwa, b) macierz sąsiedztwa) Dlaczego jest ona mniejsza niż złożoność pamięciowa?

rozwiązanie:

```
def cykle(G):
   u1 = sasiad1(v)
   u2 = sasiad2(v)
   u3 = niesasiad(v)
   return (v, u1, u3, u2, v)
```

a)
złożoność obliczeniowa O(n) - przejrzenie sąsiedztwa v, mniejsze niż n + m

b)
złożoność obliczeniowa O(n) mniejsze niż n^2

złożoności obliczeniowe są mniejsze niż złożoność pamięciowa, bo zbiór danych nie składa się z samych danych istotnych

Harmoniczne kolorowanie

Harmoniczne kolorowanie - to takie pokolorowanie grafu, w którym:

- sąsiednie wierzchołki mają różne kolory
- dowolne dwie krawędzie mają różne pary kolorów

Minimalną ilość kolorów do pokolorowania harmonicznie grafu oznaczamy $h(G)$ albo $\chi_H(G)$.
Efektywną metodą na przechowywanie struktury grafu rzadkiego jest pokolorowanie go harmonicznie. Zapamiętujemy strukturę w postaci wektora kolorów W, gdzie $w_i \in W$ to kolor i-tego wierzchołka. Obok wektora zapamiętujemy macierz C o rozmiarze $h(G) \times h(G)$, w której $c_{i,j} = (u, v)$ gdy uv jest krawędzią o końcach pomalowanych kolorem i i kolorem j, w przeciwnym wypadku $c_{i,j} = 0$. Wiedząc, że $\sqrt{2m} < h(G) \leq n$ oszacuj:

1. złożoność czasową procedury B(u,v)
2. złożoność pamięciową macierzy W i C

rozwiązanie:

1)

```
def B(v,u, W, C):
  kolor1 = W[v]
  kolor2 = W[v]
  if C[kolor1, kolor2] == 0:
    return false
  return true
```

złożoność O(1)

2)
$M_W(n) = \theta(n)$
$M_C(n) = \Omega(m) \cap O(n^2)$

3 α-redukcja

klika o rozmiarze $\leq$ k

Mamy algorytm, który odpowiada na pytanie, czy graf G zawiera klikę $\leq$ k jeśli G ma gwiazdę spinającą. Jak wykorzystać ten algorytm dla grafu, który nie ma gwiazdy spinającej?

rozwiązanie:
Chcemy się dowiedzieć, czy graf ma klikę $\leq$ k.
Dokładamy do G gwiazdę spinającą, następnie pytamy o to, czy powstały graf ma klikę $\leq$ k-1.

4 Dowody grafowe

Tw. Eulera

Udowodnij, że jeśli G jest spójnym grafem płaskim to $s = m - n + 2$

rozwiązanie:
indukcja względem m:
Jeśli m = 1, to n = 1 i mamy jedną ścianę (przypadek trywialny P(1))
załóżmy P(m-1)
Rozważmy m-krawędziowy graf G. Jeśli G jest drzewem to m = n - 1 oraz f = 1 (jest acykliczny) czyli mamy P(m). Jeśli G zawiera cykl, usuńmy pewną krawędź należącą do cyklu, G-e ma m-1 krawędzi i s-1 ścian. Korzystamy z P(m-1) i mamy $s - 1 = m - 1 - n + 2 \to s = m - n + 2 \iff P(m)$. cnd

Lemat o pocałunkach

Udowodnij, że dla każdego spójnego grafu płaskiego G o $n \geq 3$ zachodzi $2m \geq 3s$

rozwiązanie:
Dwa przypadki:
1)G jest drzewem (s=1)
zatem $m = n - 1 \leq 2 \to 2m \leq 4 = 4s \leq 3s$
2) G zawiera cykl
usuwamy wszystkie wierzchołki stopnia 1 otrzymując w ten sposób $R(G)$ (rdzeń G). Każda jego ściana jest otoczona przez co najmniej 3 krawędzie oraz s(R(G)) = s(G) czyli mamy $m(R(G)) \geq 3s \to 2m(R(G)) \geq 3s$. Tym bardziej $m(G) \geq 3s$. cnd

Przydatne ograniczenie górne na m

Udowodnij, że dla grafu planarnego G o $n \geq 3$ mamy $m \leq 3n - 6$

rozwiązanie:
załózmy, że G jest płaski (jest izomorficzny do grafu płaskiego więc możemy tak zrobić)
mamy $s = m - n + 2$ oraz $2m \geq 3s$
wstawiamy do lematu o pocałunkach wzór na s i otrzymujemy wzór z twierdzenia. cnd

Własności drzewa

Udowodnij, że następujące własności są równoważne:

1. T jest drzewem

2. T jest acykliczny i ma n-1 krawędzi
3. T jest grafem spójnym i ma n-1 krawędzi
4. T jest grafem spójnym i każda krawędź jest mostem
5. każde dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą
6. dodanie do T jednej krawędzi stworzy dokładnie jeden cykl

rozwiązanie:
wszystkie własności są trywialne dla n =1, załóżmy prawdziwość wszystkich własności dla P(k), gdzie $k < n$

(1. $\rightarrow$ 2.)
T jest z definicji acykliczne, po usunięciu dowolnej krawędzi otrzymujemy $T - e = T_1 \cup T_2$ (rozspajamy). Z założenia indukcyjnego $m(T-e) = m(T_1) + m(T_2) = n(T_1) + n(T_2) - 2 \rightarrow m(T) = n(T_1) + n(T_2) - 1 = n(T) - 1$ zatem $m = n - 1$

(2. $\rightarrow$ 3.)
zakładamy, że T nie jest grafem spójnym zatem $T = T_1 \cup T_2$ z założenia indukcyjnego $m(T) = m(T_1) + m(T_2) = n(T_1) + n(T_2) - 2 \rightarrow m = n - 2$ co jest sprzeczne z 2. zatem T musi być spójny.

(3. $\rightarrow$ 4.)
k = 1 - ilość składowych spójności, czyli minimalna ilość krawędzi, która czyni go spójnym to n-1 więc każda krawędź musi być mostem

(4. $\rightarrow$ 5.)
załóżmy, że między pewną parą wierzchołków mamy dwie drogi, zatem jeśli usuniemy którąś z krawędzi należących do jednej z dróg to nie rozspoimy grafu co jest sprzeczne z 4.

(5. $\rightarrow$ 6.)
załóżmy, że T zawiera cykl, wtedy dwa wierzchołki należące do tego cyklu połączone są dwiema różnymi drogami co jest sprzeczne z 5. po dodaniu krawędzi między tymi wierzchołkami tworzymy cykl, bo mamy jedną drogę, która była wcześniej i nową drogę przez tą krawędź, zatem $\gamma = 1$

(6. $\rightarrow$ 1.)
załóżmy, że graf nie jest spójny, jest to sprzeczne z 5. bo dodanie jednej krawędzi nie gwarantuje stworzenia cyklu, zatem T musi być spójny, z 6. jest również acykliczny zatem jest drzewem

Pąki w grafie planarnym

Udowodnij, że każdy graf planarny zawiera co najmniej 3 pąki (pąk - wierzchołek v taki, że $deg(v) \leq 5$

rozwiązanie:
załóżmy, że mamy w grafie planarnym tylko dwa pąki v i u, zatem $deg(v) + deg(u) + 6(n-2) \leq 2m \leq 6n - 12$ co jest sprzeczne ($deg(v) \neq 0$ i $deg(u) \neq 0$) (ostatnia nierówność z przydatnego oszacowania górnego m)

Liczba cyklomatyczna

Udowodnij, że dla dowolnego grafu spójnego liczba cyklomatyczna $\gamma(G) = m - n + 1$

rozwiązanie:
usuwamy tyle krawędzi, żeby graf stał się acykliczny (czyli żeby stał się drzewem), w drzewie m = n - 1, czyli musimy usunąć m - (n-1) krawędzi cnd.

5 Trudne zadania

Pokrycie wierzchołkowe *

Algorytm rozwiązuje problem k-pokrycia wierzchołkowego grafu G

```
def vertexcover(G,k)
  if E(G) empty:
    return true
  if k == 0:
    return false
  wybierz dowolne e = uv
  return vertexcover(G - u, k - 1) or vertexcover(G - v, k - 1)
```

1. jaka jest złożoność algorytmu w terminach m i k
2. podaj typy grafów i wartości k, dla których vertexcover zwraca true w czasie wielomianowym
3. podaj typy grafów i wartości k, dla których vertexcover zwraca false w czasie wykładniczym

MFP

W historii problemu maksymalnego przepływu znane są m.in. następujące algorytmy:
(1969) Edmondsa-Karpa
(1970) Dinica

(1974) Karzanova
(1977) Cherkaskyego
(1978) Galila
(1978) Shiloacha
(1980) Sleatora-Tarjana
(1986) Goldberga-Tarjana
(2013) Orlina
o złożonościach $O(nm)$, $O(nmlog(n^2/m))$, $O(nmlogn)$, $O(nmlog^2n)$, $O(n^{5/3}m^{2/3})$, $O(n^2\sqrt{m})$, $O(n^3)$, $O(n^2m)$, $O(nm^2)$
przyporządkuj złożoności do odpowiednich algorytmów

rozwiązanie:
trzeba rozpatrzeć dwa przypadki: 1. grafy rzadkie, 2. grafy gęste i średnio gęste

Listowa reprezentacja drzew n-wierzchołkowych

Zaproponuj listowy sposób reprezentacji drzew n-wierzchołkowych w pamięci O(n) umożliwiający sprawdzanie O(1), czy para wierzchołków jest połączona krawędzią.

Minimalne rozcięcie

Problem Minimalne Rozcięcie pyta jak równo podzielić wierzchołki grafu, tak aby zminimalizować liczbę krawędzi łączących wierzchołki z różnych podzbiorów. Najszybszy znany algorytm dla problemu MR ma złożoność $O(2^{O(kkk}n^3log^3n)$ gdzie k jest rozmiarem minimalnego cięcia. Jaka jest najszersza klasa grafów, dla której problem MR jest wielomianowy? Jaki jest wówczas związek pomiędzy k i n? Jaka jest wówczas złożoność wspomnianego algorytmu?

rozwiązanie:
jakie to mogą być klasy?
$K_{p,q}$: k = 0, T = $O(n^3log^3n)$
T_n: k = 1, T = $O(n^3log^3n)$
Q_p: $k = logn$, T = $O(n^6log^3n)$
N_n: $k = 0$