Kolorowanie wierzchołkowe grafów

Dominik Lau

20 grudnia 2022

1 Definicje

Kolorowanie wierzchołkowe grafu - takie przypisanie jego wierzchołkom kolorów, żeby żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie miały tego samego koloru.

$\chi(G)$ - liczba chromatyczna grafu, ile kolorów potrzeba conajmniej, żeby go pokolorować

$D_A(n)$ - funkcja dobroci dla algorytmu A, największy stosunek wyniku algorytmu do wyniku optymalnego

$SHC(A)$ - dość trudne grafy, grafy dla których algorytm A czasem daje wynik optymalny a czasem się myli

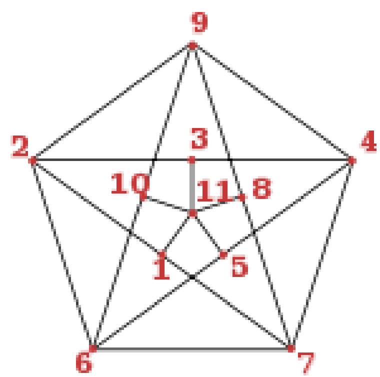
$HC(A)$ - trudne graf,y grafy dla których algorytm A zawsze się myli

$\omega(G)$ - liczba klikowa grafu G, rozmiar największej kliki

2 Oszacowania

2.1 Dolne

Dla dowolnego grafu o $\omega(G) = \omega$ mamy$\chi(G) \geq \omega$.
Różnica może być dowolnie duża, np. grafy Mycielskiego



2.2 Górne

Dla dowolnego grafu o $\Delta(G) = \Delta$ mamy $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
Tw. Brooksa: $\chi(G) = \Delta + 1$ tylko dla grafów pełnych i cykli nieparzystych.

Dla grafów planarnych mamy $\chi(G) \leq 4$.

3 Funkcja dobroci

$$D_A(n) = \max_{G, |V(G)|=n} \frac{A(G)}{OPT(G)}$$

W kolorowaniu najlepszą funkcją jest $D_A(n) = 1$, najgorszą $D_A(n) = n$ (bo taki wynik daje algorytm trywialny kolorujący wszystkie wierzchołki na różne kolory).

4 SL - smallest last

4.1 Działanie algorytmu

Złożoność - $O(n + m)$

Pseudokod

```
def SL(G):
   G2 = copy(G)
   kolejnosc = []
   while n(G2) != 0:
      v = wierzcholek_o_min_deg(G2)
      kolejnosc.push_front(v)
      G2 = G2 - v
```

```
pokoloruj_zachlannie(G,kolejnosc)
```

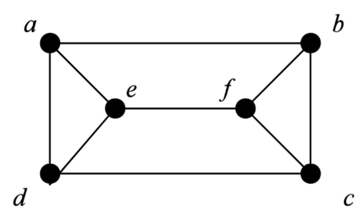
4.2 Przypadki pozytywne

SL optymalnie koloruje drzewa, ponieważ zostawia liście na koniec.

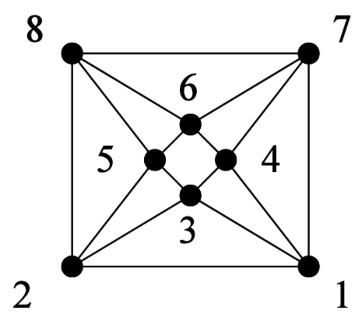
inne optymalne: drzewa, cykle
półpozytywne (funkcja dobroci O(1)): grafy Johnsona, grafy Mycielskiego, grafy planarne

4.3 Trudne grafy

$min(SHC(A)) = $ PRYZMA

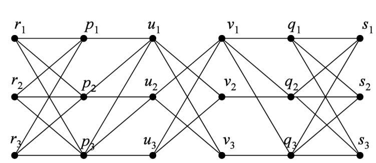


$min(HC(A)) = $ PRYZMOID



4.4 Funkcja dobroci

Dla grafu Colmena Moora CM_k (poniżej CM_3)



SL użyje k-kolorów (k $\sim$ n) mimo, że jest to graf dwudzielny $\rightarrow D_{SL}(n) = O(n)$

5 LF - largest first

5.1 Działanie algorytmu

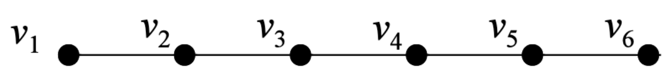
Złożoność - $O(n+m)$

Pseudokod

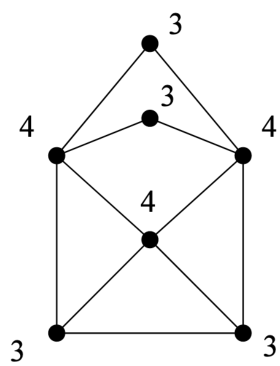
```
def LF(G):
  kolejnosc = wierzcholki_od_max_deg_do_min_deg(G)
  pokoloruj_zachlannie(G,kolejnosc)
```

5.2 Trudne/dość trudne grafy

$min(SHC(A)) = P_6$

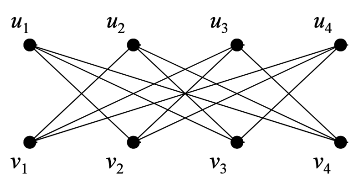


$min(HC(A))$ =KOPERTA



5.3 Funkcja dobroci

Najgorszy przypadek zachodzi dla grafów Jordana J_k. Poniżej J_4 .



LF pokoloruje je $k = \frac{n}{2}$ kolorami $\rightarrow D_{LF}(n) = n/4 = O(n)$.

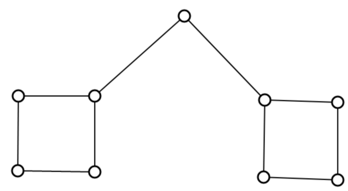
6 Grafy planarne

Algorytm SL koloruje grafy planarne co najwyżej 6 kolorami. Z czego to wynika?

7 Inne

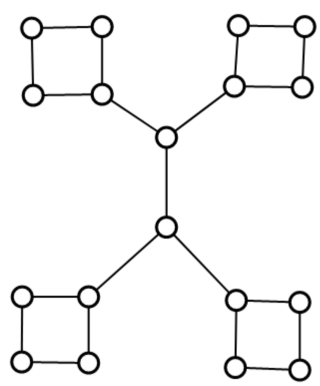
W ogólności oba algorytmy nie kolorują optymalnie grafów dwudzielnych.

Graf "jajca"



Jest to graf dwudzielny, dość trudny dla SL (może mylić się o 1), który LF koloruje optymalnie.

Graf "poczwórne jajca"



Jest to graf dwudzielny, dość trudny dla SL (może się mylić o 2), który LF koloruje optymalnie.