

Introducción a la Computación Cuántica para principiantes en el Álgebra Lineal

Autor: Roberto Navarro Arenas

Supervisión: Abelardo Santaella Quintas

Escuela Superior de Física y Matemáticas - IPN

Noviembre 30, 2023

Introducción: ¿A qué nos referimos con *computación*?

- En el contexto general, **computación** se refiere al proceso de utilizar algoritmos, i.e. una serie de instrucciones, para procesar información codificada, transformando datos en información útil.

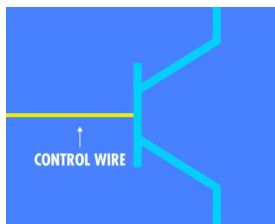
- En teoría de la información, un *bit* (*binary digit*) es la **unidad básica de información** que puede tomar uno de dos valores, comúnmente denotados como 0 y 1, que corresponden a dos estados mutuamente excluyentes (e.g. encendido/apagado).
- En computación digital o "clásica", la información se codifica y procesa en cadenas de bits.

¿Cómo se procesa la información clásicamente?

- En computación digital, se usan **transistores** para construir **compuertas lógicas** que, combinadas, procesan cadenas de bits.

Transistores

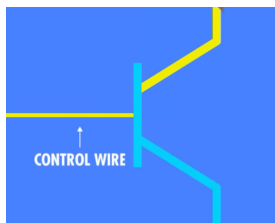
- Los transistores son, de manera muy general, interruptores controlados por pulsos eléctricos.



- Cuando se aplica corriente a la entrada de control (base), se abre el flujo de corriente a través del transistor, permitiendo que los portadores de carga se muevan de una región a otra.

Transistores

- Los transistores son, de manera muy general, interruptores controlados por pulsos eléctricos.



- Cuando se aplica corriente a la entrada de control (base), se abre el flujo de corriente a través del transistor, permitiendo que los portadores de carga se muevan de una región a otra.

Transistores

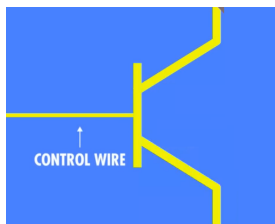
- Los transistores son, de manera muy general, interruptores controlados por pulsos eléctricos.



- Cuando se aplica corriente a la entrada de control (base), se abre el flujo de corriente a través del transistor, permitiendo que los portadores de carga se muevan de una región a otra.

Transistores

- Los transistores son, de manera muy general, interruptores controlados por pulsos eléctricos.



- Cuando se aplica corriente a la entrada de control (base), se abre el flujo de corriente a través del transistor, permitiendo que los portadores de carga se muevan de una región a otra.

Transistores y compuerta NOT

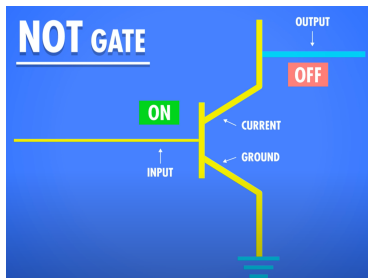


Figure: NOT cuando el input está encendido.

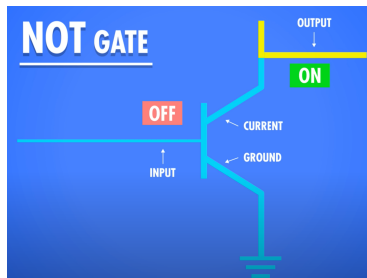


Figure: NOT cuando el input está apagado.

Transistores y compuerta AND

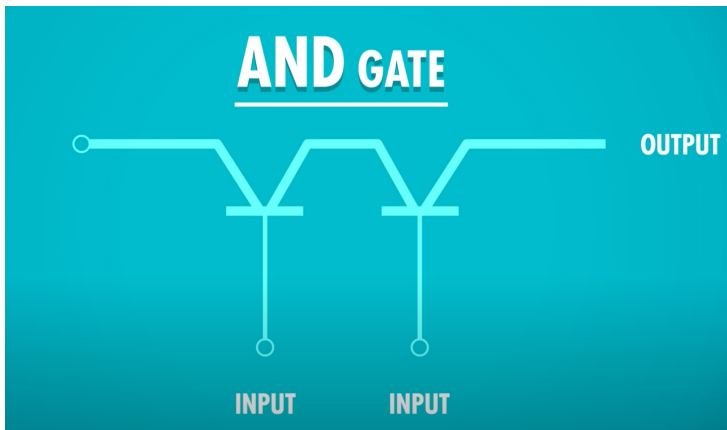


Figure: Compuerta AND como dos transistores en serie.

Compuertas lógicas y operaciones booleanas



AND

A	B	Output
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



OR

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



XOR

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NAND

A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NOR

A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



XNOR

A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figure: Compuertas lógicas AND, OR, XOR (Exclusive OR), NAND (Not AND), NOR (Not OR) y XNOR (Exclusive NOR) con sus tablas de verdad.

Estas compuertas toman una o más entradas de bits y producen una salida de bit basada en la operación lógica que representan.

Sumadores

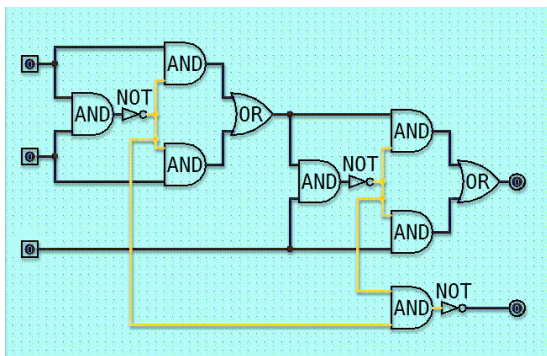


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".¹

¹Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

Sumadores

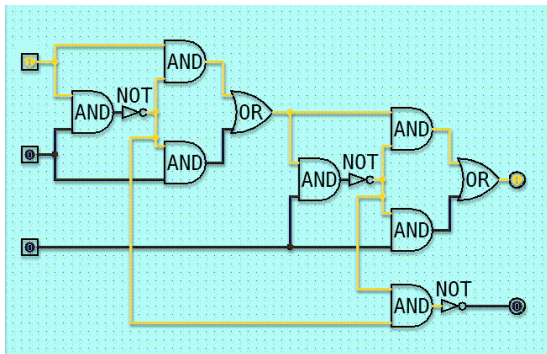


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".²

²Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

Sumadores

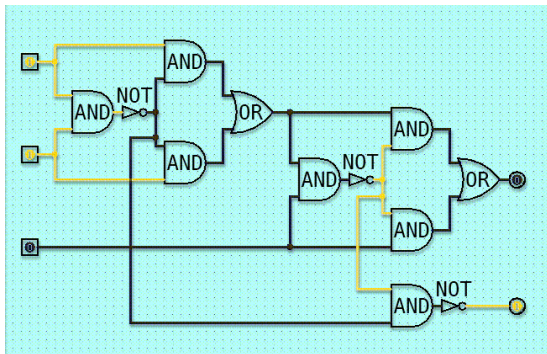


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".³

³Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

Sumadores

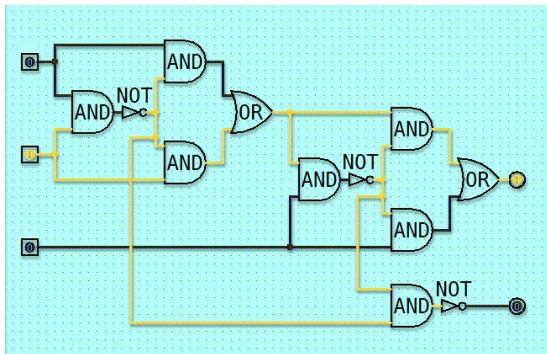


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".⁴

⁴Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

Sumadores

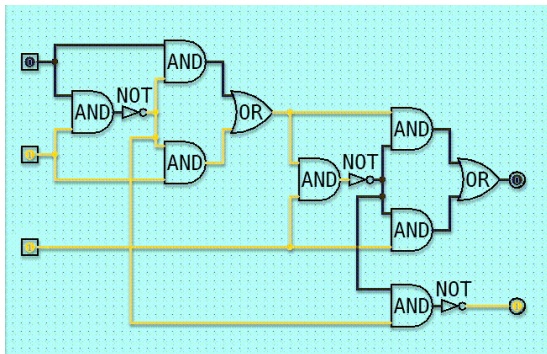


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".⁵

⁵Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

Sumadores

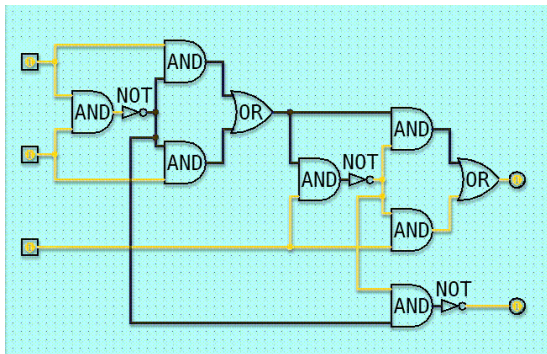


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".⁶

⁶Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

Sumadores

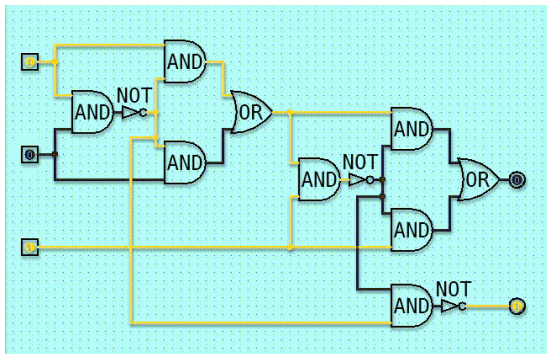


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".⁷

⁷Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

Sumadores

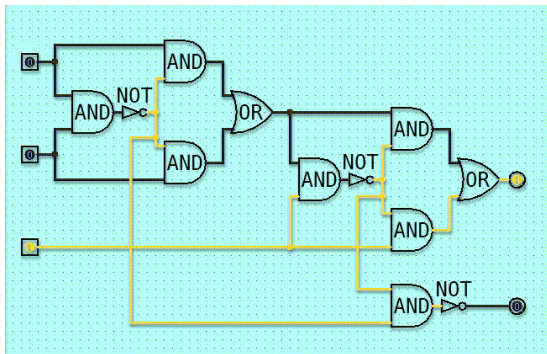


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".⁸

⁸Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

Sumadores

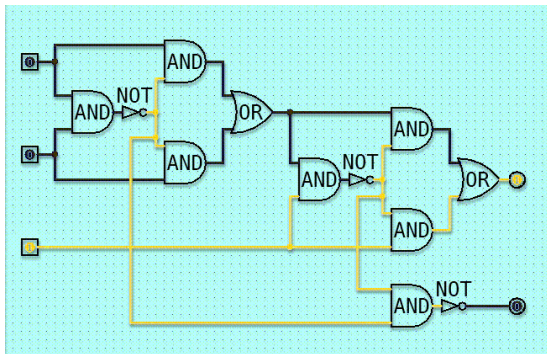


Figure: Un sumador simple usando las compuertas "AND", "NOT", y "OR".⁹

⁹Image adapted from work by LISnapyc, available under the CC BY-SA 4.0 license.

- *Se puede demostrar que cualquier algoritmo que puede ser ejecutado por una máquina de Turing también puede ser computado por una combinación de sumadores simples y otras compuertas lógicas fundamentales, asumiendo que se disponga de tiempo y memoria suficientes.*

- En computación cuántica, la unidad básica de información, (*bit cuántico* o *qubit*) corresponde a un sistema cuántico, por ejemplo, el spin de una partícula.

Spin del Electrón

Electron spin explained: imagine a ball that's rotating, except it's not a ball and it's not rotating

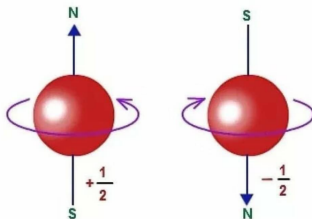


Figure: Espín del electrón explicado: imagina una pelota que está rotando, excepto que no es una pelota y no está rotando.

Superposición

- Que puede estar en una superposición de ambos estados a la vez.

Superposición: El Experimento del Gato de Schrödinger

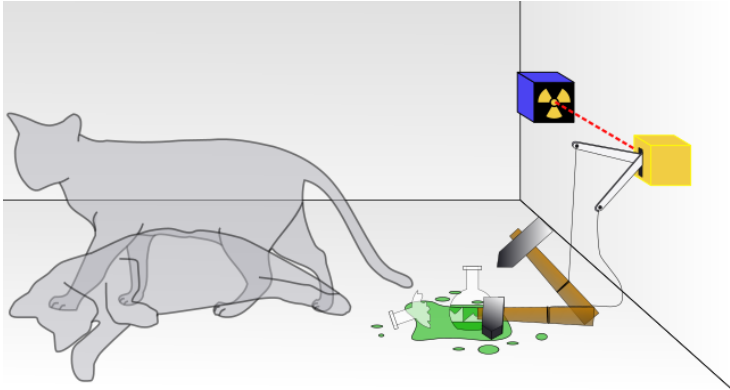


Figure: Ilustración del experimento mental del gato de Schrödinger.¹⁰

¹⁰Source: Dhatfield, Wikimedia Commons. License: CC BY-SA 3.0

Qubits en superposición

- Luego puedo etiquetar los diferentes estados, comúnmente $|0\rangle$ y $|1\rangle$.
Y tener *superposiciones* de estados

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Donde $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ corresponden a las probabilidades con las que mido los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, respectivamente.

- I.e. mi unidad básica de información **puede tomar dos valores al mismo tiempo**, con cierta probabilidad de encontrarlo en cualquiera de los dos estados.

Ejemplo de superposición

- Por ejemplo, consideramos

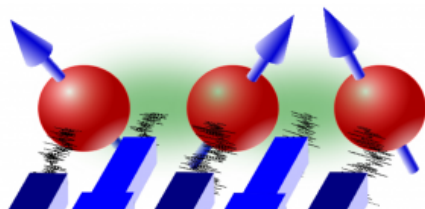
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

En este caso, $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$.

- I.e. $|\psi\rangle$ corresponde a un qubit que **se mide** en los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, cada uno, un 50% de las veces.
- Nótese que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. I.e. *la suma de todas las probabilidades es igual a 1*.

Computación simultánea habilitada por la superposición

- Esto me permite representar 2^n bits clásicos por cada n qubits.
Por ejemplo, considere un sistema con tres qubits



000	001
010	011
100	101
110	111

Table: Valores clásicos para $n = 3$ qubits

Figure: Ensemble de partículas

- **Paralelismo:** Luego puedo aplicar *compuertas cuánticas* sobre la superposición para hacer computación paralela.

Sistemas cuánticos en superposición

- Sin embargo, ¿qué ocurre si medimos el estado de nuestro sistema?
E.g. para $n = 3$,

$$\alpha_1 |0\rangle |0\rangle |0\rangle + \dots + \alpha_i |b_{3_i}\rangle |b_{2_i}\rangle |b_{1_i}\rangle + \dots + \alpha_8 |1\rangle |1\rangle |1\rangle$$

Qubits: Formalismo

Formalmente,

Definition

Un **qubit** es un vector unitario en un *espacio de Hilbert*¹¹ bidimensional y complejo, representado como

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son la base estándar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. (Con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$).

- La base puede representarse como $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego podemos escribir

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

¹¹Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial con producto interno que es *completo bajo la norma inducida*.

Para nuestro caso basta considerar la estructura de espacio vectorial.

¿Cómo se procesa la información cuántica?

- En computación cuántica, la información se procesa a través de **compuertas lógicas cuánticas**, que cambian las probabilidades de medir los distintos estados.

- Dado un qubit arbitrario

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

el equivalente cuántico a una compuerta NOT, es una operación que invierte los valores de las probabilidades. Explícitamente,

$$X|\psi\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle.$$

NOT Cuántico como operador

- Esto corresponde a la transformación $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$X|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle.$$

- Asimismo tenemos $X|0\rangle = |1\rangle$ y $X|1\rangle = |0\rangle$

¿Qué otras transformaciones podemos considerar?

Por ejemplo, considere la transformación lineal

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Basta considerar sus valores sobre la base $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

- $$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

- $$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Compuerta de Hadamard

- I.e. la compuerta H , llamada *compuerta de Hadamard* induce una superposición equiprobable sobre la base computacional.

I.e. los estados

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad ; \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

Son tales que

$$P(0) = P(1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

.

Compuerta de dos qubits: Controlled-NOT

La compuerta CNOT invierte el primer qubit, llamado *qubit objetivo*, si el segundo qubit, el *qubit de control*, se encuentra en el estado $|1\rangle$:

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- En este caso, el sistema de dos qubits corresponde un vector en el generado por la base

$$|0\rangle|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si el qubit control es $|0\rangle$, el estado completo permanece sin cambio.
- Si el qubit control es $|1\rangle$, el qubit objetivo invierte su estado (operación NOT).

Compuerta de dos qubits: Controlled-NOT

Explícitamente, si tenemos un estado arbitrario

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |0\rangle |0\rangle + \alpha_2 |0\rangle |1\rangle + \alpha_3 |1\rangle |0\rangle + \alpha_4 |1\rangle |1\rangle$$

Por la linealidad de la transformación

$$\text{CNOT} |\psi\rangle =$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \text{CNOT} |0\rangle |0\rangle + \alpha_2 \text{CNOT} |0\rangle |1\rangle + \alpha_3 \text{CNOT} |1\rangle |0\rangle + \alpha_4 \text{CNOT} |1\rangle |1\rangle \\ &= \alpha_1 |0\rangle |0\rangle + \alpha_2 |0\rangle |1\rangle + \alpha_3 |1\rangle |1\rangle + \alpha_4 |1\rangle |0\rangle \end{aligned}$$

- Si el qubit control es $|0\rangle$, el estado completo permanece sin cambio.
- Si el qubit control es $|1\rangle$, el qubit objetivo invierte su estado (operación NOT).

Circuitos cuánticos

Una manera de diseñar instrucciones para procesar información cuántica es a través de *circuitos cuánticos*.

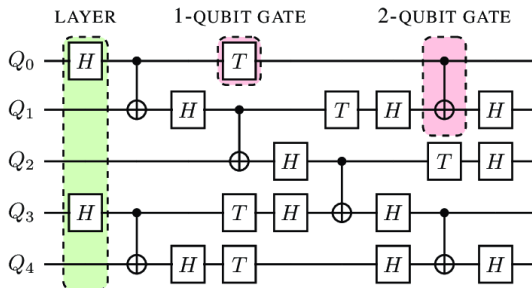
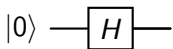


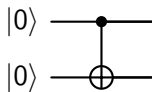
Figure: Ejemplo de un circuito cuántico de 5 qubits, donde cada línea horizontal representa la evolución temporal del estado de un único qubit.¹²

¹²Reference; License

Hadamard; CNOT en circuitos



Compuerta de Hadamard

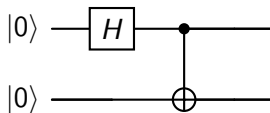


Compuerta CNOT.

Otra particularidad de la información cuántica

Consideramos ahora un sistema de dos qubits inicializados en el estado $|0\rangle$.

- ¿Qué pasa si aplicamos una compuerta H al primer qubit y luego aplicamos una compuerta CNOT?



$$|\psi_0\rangle = |0\rangle |0\rangle$$

Produciendo un estado de Bell

- 1 Inicializamos el sistema en el estado $|0\rangle|0\rangle$ ¹³.
- 2 Aplicamos H al primer qubit

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

- 3 Después de la compuerta H , el estado del sistema completo se encuentra en el estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle)$$

- 4 Luego, aplicando una compuerta CNOT, se invierte el qubit objetivo con una probabilidad de $\frac{1}{2}$, lo cual produce el siguiente estado final

$$\frac{|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

el cual se conoce como *estado de Bell*.

¹³ $|0\rangle|0\rangle$ representa el *producto tensorial* $|0\rangle \otimes |0\rangle$.

Entrelazamiento cuántico: 'spooky action at a distance'

- ¿Qué pasa si mido cualquiera de los dos qubits en un estado de Bell?

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$$

- *Se puede demostrar que cualquier algoritmo que puede ser ejecutado por una máquina de Turing clásica también puede ser computado por una computadora cuántica utilizando un conjunto universal de compuertas cuánticas, asumiendo que se disponga de tiempo y memoria cuántica suficientes.*

Ejemplo: Algoritmo de Deutsch

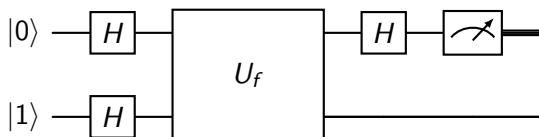
Considere el siguiente problema:

- Tomando una función $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, se tienen cuatro posibles casos:

Tipo de función	$f(0)$	$f(1)$
Constante	0	0
	1	1
Balanceada	0	1
	1	0

- Dada $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ arbitraria, ¿cómo podemos determinar si es constante o balanceada?

Algoritmo de Deutsch (I)



- 1 Preparamos dos qubits, inicializando el primer qubit en el estado $|0\rangle$ y el segundo en el estado $|1\rangle$. I.e.

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle |1\rangle$$

- 2 Y aplicamos Hadamard a ambos qubits, generando la superposición:

$$|\psi_1\rangle = (H \otimes H) |0\rangle |1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

Algoritmo de Deutsch (II)

- 3 Aplicamos la compuerta U_f que codifica a la función f . La acción de U_f se define como:

$$U_f |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle,$$

donde \oplus denota adición modulo 2. Después de aplicar U_f , el estado del sistema se convierte en:

$$|\psi_2\rangle = U_f |\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle (|f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle) + |1\rangle (|f(1)\rangle - |1 \oplus f(1)\rangle)).$$

$$\text{Si } f \text{ es constante: } \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

$$\text{Si } f \text{ es balanceada: } \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$$

Algoritmo de Deutsch (III)

- 4 Aplicamos Hadamard al primer qubit, y dejando al segundo qubit sin cambio:

$$|\psi_3\rangle = (H \otimes I) |\psi_2\rangle.$$

$$\text{Si } f \text{ es constante: } |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\text{Si } f \text{ es balanceada: } |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

- 5 Medimos el primer qubit. Si f es constante, la medición será $|0\rangle$, y si f es balanceada, la medición será $|1\rangle$.

Matrices y Vectores

- Descripción: Elementos fundamentales en álgebra lineal, representan ecuaciones lineales y transformaciones.
- Aplicaciones: Los estados cuánticos se modelan como vectores complejos; las puertas cuánticas se representan como matrices, cruciales en la inicialización de estados y la realización de operaciones cuánticas básicas.

Espacios Vectoriales

- Descripción: Constituyen el marco para describir estados cuánticos. Los espacios vectoriales, particularmente los espacios de Hilbert complejos, representan el espacio de estados de sistemas cuánticos.
- Aplicaciones: Fundamentales en la mecánica cuántica para describir estados cuánticos y en la superposición cuántica.

Independencia Lineal, Base y Dimensión

- Descripción: Conceptos clave para la estructura de los espacios vectoriales.
- Aplicaciones: Caracterización de estados cuánticos, representación de estados cuánticos medibles, y medición de la complejidad de sistemas cuánticos.

Transformaciones Lineales y Operadores

- Descripción: Funciones que preservan la adición de vectores y la multiplicación escalar. Incluye operadores lineales, unitarios, hermíticos, proyecciones y normal.
- Aplicaciones: Centrales para modelar operaciones y transiciones cuánticas, observables en mecánica cuántica, evolución de estados cuánticos y medición.

Eigenvalores y Eigenvectores

- Descripción: Vectores inalterados por una transformación lineal y sus correspondientes valores de escala.
- Aplicaciones: Teoría de medición cuántica, estados estacionarios de sistemas cuánticos y análisis de observables cuánticos.

Espacios con Producto Interno

- Descripción: Espacios donde se aplica el concepto de ángulo y longitud.
- Aplicaciones: Fidelidad y superposición entre estados cuánticos, interpretación de probabilidades y normalización de estados.

Ortogonalidad y Ortonormalidad

- Descripción: Conjunto de vectores tales que $\langle v, w \rangle = 0$ (ortogonalidad) y $\langle v, w \rangle = \delta_{u,v}$ (ortonormalidad), lo que implica que son perpendiculares entre sí en el caso de la ortogonalidad, y además tienen longitud unitaria en el caso de la ortonormalidad.
- Aplicaciones: En computación cuántica, son cruciales para definir estados base y mejorar la eficiencia de algoritmos, ya que garantizan la independencia y simplicidad de los estados cuánticos.

Teorema Espectral y Diagonalización

- Descripción: Descomposición de matrices en una forma diagonal más simple, incluyendo la Forma Normal de Jordan.
- Aplicaciones: Simplificación del análisis de observables cuánticos, transformación de bases y comprensión de la estructura de sistemas cuánticos.

Productos Tensoriales

- Descripción: Operación matemática que extiende vectores y matrices a dimensiones superiores.
- Aplicaciones: Representación de estados en sistemas multi-qubit, descripción de estados entrelazados y modelado de sistemas cuánticos compuestos.

Traza de una Matriz

- Descripción: Suma de los elementos en la diagonal principal de una matriz.
- Aplicaciones: Cálculo de probabilidades, valores esperados y análisis de estados mixtos en mecánica cuántica.

Matrices Positivas Semidefinidas

- Descripción: Matrices que representan formas cuadráticas, todas cuyos eigenvalores son no negativos.
- Aplicaciones: Estudio de matrices de densidad, asegurando la realizabilidad física de estados en mecánica cuántica.

Transformaciones Ortogonales

- Descripción: Son transformaciones lineales que preservan el producto interno de vectores, manteniendo la longitud y el ángulo entre ellos. En espacios euclidianos, estas transformaciones corresponden a rotaciones y reflexiones.
- Aplicaciones: En mecánica cuántica, las transformaciones ortogonales son fundamentales para el cambio de bases y la conservación de probabilidades y estados. También son esenciales en algoritmos de optimización y procesamiento de señales.

Transformaciones Unitarias

- Descripción: Generalización de las transformaciones ortogonales en espacios de Hilbert complejos. Estas transformaciones conservan el producto interno complejo, lo que implica la conservación de la norma de vectores.
- Aplicaciones: Cruciales en la evolución temporal de estados cuánticos y en la formulación de puertas lógicas cuánticas. Permiten la transformación de estados cuánticos sin perder su información cuántica.

Transformaciones Hermitianas

- Descripción: Son operadores lineales que son iguales a su adjunto conjugado.
- Aplicaciones: Fundamentalmente asociadas con observables en mecánica cuántica, donde sus eigenvalores representan los posibles resultados de mediciones. Las transformaciones hermitianas son cruciales en la formulación de la teoría de medición cuántica y en la descripción de la evolución de sistemas cuánticos cerrados.

Descomposición Polar y en Valores Singulares

- Descripción: Descomposición de una matriz en formas más simplificadas, incluyendo la descomposición de Schmidt para sistemas bipartitos.
- Aplicaciones: Análisis de operaciones y canales cuánticos, preparación de estados y tomografía en computación cuántica.

Formas Multilineales

- Descripción: Funciones que son lineales en cada uno de sus argumentos, proporcionando una manera de extender conceptos lineales a contextos más complejos y de múltiples variables.
- Aplicaciones: En computación cuántica, estas formas son importantes para las transformaciones de estados y la representación de redes tensoriales, facilitando el análisis y la manipulación de sistemas cuánticos complejos.

Referencias

- [1] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [2] János A. Bergou, Mark Hillery, *Introduction to the Theory of Quantum Information Processing*. Springer, 2013.
- [3] David McMahon, *Quantum Computing Explained*. Wiley-IEEE Computer Society Press, 2007.