Practicum NMB : Eigenwaardenproblemen

Matthijs van Keirsblick en Harald Schfer

vrijdag 25 april 2014

Opgave 1

We beginnen door een QR-factorisatie te berekenen van A_0 met eender welke methode. Vervolgens berekenen we $b = Q^* * b_0$. Met deze waarden kunnen we de iteratieve berekening starten die hieronder beschreven staat. De G_x matrices zijn givens transformaties om de toegevoegde rijen van K terug op nul te stellen om zo terug een bovendriehoeksmatrix R te bekomen waarin de nieuwe waarden in verwerkt zijn.

$Q^{(0)} * R^{(0)} = A_0$
$b = Q^{(0)*} * b_0$
for *i = 1 to k* **do**
- $f = n * d$
- $R^{(i)} = G_f^* * ... * G_1^* * \begin{bmatrix} R^{(i-1)} \\ K \end{bmatrix}$
- $R^{(i)} = R^{(i)}(: n, :)$
- $Q^{(i)} = I * G_1 * ... * G_f$
- $b^{(i)} = Q^{(i)*} * \begin{bmatrix} b^{(i-1)} \\ c \end{bmatrix}$
- $b^{(i)} = b^{(i)}(: n, :)$

end

Aan het einde van elke iteratie is het mogelijk om $x^{(i)}$ te berekenen door achterwaardse substitutie toe te passen op de vergelijking $R^{(i)} * x^{(i)} = b^{(i)}$. Omdat na elke iteratie maar $R^{(i)}$ en $b^{(i)}$ opgeslagen moet worden is het duidelijk dat het gebruikte geheugen niet toeneemt. Omdat de grootte van de matrices R en b niet toeneemt neemt het rekenwerk ook niet toe met elke iteratie. Voor het berekenen van een Givens-transformatie zijn 2 delingen, 2 vermenigvuldigen, een optelling en een vierkwantswortel nodig. Er moeten n*d Givens-transformaties berekend worden per iteratie. Een vermenigvuldiging met een rotatiematrix van grootte n+d zoals in dit geval vraagt 4*(n+d) vermenigvuldigingen en 2*(n+d) optellingen. Er gebeuren 2*n*d -1 van die matrix vermenigvuldiginge per iteratie. Tot slot gebeurt er nog voor de berekening van de $b^{(i)}$ een matrix vermenigvuldiging waarvoor $(n+d)^2$ vermenigvuldigingen gebeuren en $(n+d-1)^2$ optellingen.

- $n * d * 2$ delingen
- $n * d$ vierkantswortels
- $n * d * 2 + 2 * (n + d) * (2 * n * d - 1) + (n + d - 1)^2 \approx 4 * n^2 * d$ optellingen
- $n*d*4+4*(n+d)*(2*n*d-1)+(n+d)^2 \approx 8*n^2*d$ vermenigvuldigingen