Սկսենք, թե ինչ բան է դաշտը։

Կասենք K բազմությունը դաշտ է, եթե նրա մեջ ներմուծված են էլեմենտների գումարման և բազմապատկման գործողությունները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին։

դաս 16

$K \qquad + \qquad \cdot$

1) $a + b = b + a$

2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

3) $\exists\, 0 \quad \forall x \quad x + 0 = 0 + x = x$

4) $\forall x \in K \quad \exists\, x' \quad x + x' = 0 \quad x' = -x$

գումարման նկատմամբ աբելյան խումբ

5) $a \cdot b = b \cdot a$

6) $a \cdot (bc) = (a \cdot b) \cdot c$

7) $\exists\, 1 \quad \forall x \quad 1 \cdot x = x$

8) $\forall x \neq 0 \quad \exists\, x'' \in K \quad x \cdot x'' = 1$

այս պայմանը բանաձևում է, որ ըստ բազմապատ. լինի աբելյան խումբ, բացի որ 0-ն չունի իր հակադարձը

9) $(a+b) \cdot c = ac + bc$

Օրինակներ՝
- R
- C
- Q

- Z դաշտ չէ, 5-ի հակադարձը օրինակ $1/5 \notin Z$

Գծային տարածություններ

Սահմանում: Դիցուք X որևէ բազմություն է և K որևէ դաշտ: X բազմության մեջ սահմանված է գումարման գործողություն $+ : X \times X \to X$ և K դաշտի էլեմենտներով բազմապատկման գործողություն $\cdot : K \times X \to X$: Եթե վերը նշված գործողությունները բավարարում են հետևյալ աքսիոմներին՝

գումարման գործ. նկատմամբ աբելյան խումբ

1) $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$
2) $(x+y)+z = x+(y+z)$
3) $\exists \bar{0} \in X \ \forall x \in X \quad x + \bar{0} = x$
4) $\forall x \in X \ \exists x' \in X \quad x + x' = \bar{0}, \quad x' = -x$
5) $\forall \alpha \in K \ \forall x, y \in X \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
6) $\forall \alpha, \beta \in K \ \forall x \in X \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
7) $\forall \alpha, \beta \in K \ \forall x \in X \quad \alpha \cdot (\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x$
8) $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$ (K դաշտի միավորն է)

ապա ասում ենք, որ X բազմությունը գծային տարածություն (վեկտորական) է K դաշտի վրա:

X բազմության էլեմենտները կանվանենք վեկտորներ

Աքսիոմներից հետևում են մի քանի ակնհայտ հատկություններ՝

- $1a + 0 \cdot a = (1+0)a = 1a = a \Rightarrow 0 \cdot a = 0$
- $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1-1) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow (-1)a = -a$
- $\lambda \neq 0 \Rightarrow 0 = \lambda^{-1}(\lambda a) = (\lambda^{-1}\lambda)a = 1a = a \Rightarrow a = 0.$

Գծային տարածություն...

- ∀ դաշտ ինքն իր ...
- n-չափանի վեկտորների ...ություն
- Միևնույն n-րդ աստի... ...ների դաշտ.
- համագիծ վեկտորների բազմություն
- ֆունկցիաների բազմություն

Օրինակ՝ $C[a, b]$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Սահմանում: Դիցուք X որևէ գծային տարածություն է, $Y \subset X$ կամայականներ X-ի ենթատարածություն, եթե այն նույն գործողությունների նկատմամբ գծային տարածություն է (քանի որ X գծային տարած. է $\Rightarrow$ բավարարված են 8 աքսիոմները, $Y \subset X \Rightarrow Y$-ի համար ևս բավ. են, ենթատարածության համար բավական է փակ լինի $+$ $\cdot$ գործ. նկատմամբ)

Աքսիոմներից հետևում են մի քանի ակնհայտ հատկություններ՝

- $0 \cdot x = \bar{0}$
- $(-1) \cdot x = -x$
- $\alpha \cdot x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Գծային տարածության օրինակներ՝

- ∀ դաշտ ինքն իր նկատմամբ
- n-չափանի վեկտորների տարածություն
- մինչև n-րդ աստիճանի բազմանդամների բազմ... տարած.
- համընթաց վեկտորների բ...
- ֆունկցիաների բազմություն...

ծանոթագրություն՝ (...

$(f+g)(x) = ...$

$(\alpha f)(x) = ...$

- $1a + 0 \cdot a = (1+0)a = 1a = a \Rightarrow 0 \cdot a = 0$
- $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1-1) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow (-1)a = -a$
- $\lambda \neq 0 \Rightarrow 0 = \lambda^{-1}(\lambda a) = (\lambda^{-1}\lambda)a = 1a = a \Rightarrow a = 0.$

Սահմանում: Դիցուք X-ը ... գծային տարածություն է, $Y \subset X$ կ... X-ի ենթատարածություն, եթե այն նույն գործողությունների նկատմամբ գծային տարածություն է (քանի որ X գծային տարած. է ⇒ բավարարվում են 8 աքսիոմները, բնականաբար, $Y \subset X \Rightarrow$ Y-ի համար ևս բավ. են, ենթատարածության համար բավական է միայն ստուգել + ·, գործ. նկատմամբ)

Օրինակներ՝

- $C[a, b]$ գծային տարածության ենթատարածություն է $P[a, b]$ – $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված բոլոր բազմանդամների տարածություն.

n-րդ աստիճ. բազմանդամ $\rightarrow$ $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

Բայց ֆիքսած n-րդ կարգի բազմանդամները ենթատարածություն չեն՝

$$+\begin{array}{l} 5x^n + \ldots \\ -5x^n + \ldots \\ \hline \end{array}$$

$\rightarrow$ չենք ստանա n-րդ կարգ.

Իսկ արդեն n-րդ կարգը ($\leq n$) չգերազանցող բազմանդամների բազմությունը կլինի $P[a, b]$ ենթատարածություն:

- $l_\infty = \{ \bar{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}$ սահմանափակ է $\}$

$$\bar{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = \{x_n + y_n\}$$

$$\alpha \cdot \bar{x} = \{\alpha \cdot x_n\}$$

Դժվար չէ նկատել, որ բավարարում է բոլոր ակսիոմներին $\Rightarrow$ l_∞ գծային տարածություն է K դաշտի վրա:

$\rightarrow$ R կամ C կախված x_n-երը որ բազմ-ից են

...ածությունն ենթատարա-
[a, b] հատվածի վրա
որոշված բոլոր բազ-
...անդամների պարունակ.
$\ldots + a_n x^n$

...ի բազմանդամները
$+ \; 5x^n + \ldots$
$-5x^n + \ldots$

...չենք ստանա n-րդ կարգ.
...ղերատարանքող
...ներ կլինի $P[a, b]$

...սահմանափակ է}

...վարարում է
...երին պարամետր.

Դիտարկենք $X = \{ \bar{x} = \{x_n\} \; ; \; x_n$ զուգամետ է$\}$

Ապացուցենք X-ը կլինի l_∞-ի ենթատարածություն, քանի որ 1) $X \subset l_\infty$ (զուգամետը սահմանափակ է)

2) $+ \; \cdot$ գործողությունների նկատմամբ փակ է
- զուգ. + զուգ. = զուգ.
- $\alpha \cdot$ զուգ. = զուգ.

$Y = \{ \bar{x} = \{x_n\} \; ; \; x_n \to 0$ (անվերջ փոքր)$\}$

1) $Y \subset X \subset l_\infty$

2) անվերջ փոքր + անվերջ փոքր = անվերջ փոքր

$\alpha \cdot$ անվերջ փոքր = անվերջ փոքր.

Այսինքն՝ Y-ը ևս ենթատարածություն է:

մոդուլը կոմպլեքսի համար է

$$l_2 = \{ \bar{x} = \{x_n\} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$$

Ապացուցենք $l_2 \subset Y$ քանի որ

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \Rightarrow$ ըստ շարքերի զուգամիտության պայմանի $x_n \to 0$:

Ակնհայտ է, որ բազմապատկման գործողության նկատմամբ փակ է: Դիտարկենք գումարումը՝

$\bar{x} = \{x_n\} \in l_2$

$\bar{y} = \{y_n\} \in l_2$

$\{x_n + y_n\} \overset{?}{\in} l_2$

$|x_n+y_n|^2 \le |x_n|^2 + 2|x_ny_n| + |y_n|^2 \le$

հիշեցում: $2|ab| \le |a|^2+|b|^2$

$\le 2\cdot|x_n|^2 + 2\cdot|y_n|^2$

Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} 2(|x_n|^2+|y_n|^2) < +\infty$ և $|x_n+y_n|^2 \le 2(|x_n|^2+|y_n|^2)$ $\Rightarrow$

ըստ շարքերի համեմատության I հայտանիշի

$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^2 < \infty \Rightarrow \{x_n+y_n\} \in \ell_2$

Ապացուցվում է, որ ℓ_2-ը $\mathcal{Y}$-ի ամբողջ և ℓ_∞-ի ենթաբազմություն է:

Բոլոր ℓ_p-երը գծային (նաև ենթա) բազմություններ են

Սահմանում: Դիցուք X որևէ գծային բազմություն է և ունենք $\{x_n\}_{n=1}^{k}$ վեկտորների համակարգ: Կասենք, որ վեկտորների համակարգը գծորեն կախված է, եթե $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ թվեր, որ $\exists_j\ \alpha_j \ne 0$ այնպիսին, որ $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n \cdot x_n = \overline{0}$.

գոնե մեկը 0 չէ

Բնականաբար եթե վեկտորներից մեկը զրոյական վեկտորն է, ապա համակարգը գծորեն կախված է (իր գործակիցը կվերցնենք ≠0 թիվ, մնացածները՝ 0):

Վեկտորների համակարգը կլինի գծորեն կախված այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանցից գոնե մեկը կարող ենք արտահայտել մնացածների գծային կոմբինացիայի միջոցով:

Սահմանում: Ունենք $\{x_i\}_{i\in I}$ վեկտորների բազմություն: (ինդեքս, կարող է ∞ լինել) Այս համակարգը կանվանենք գծորեն անկախ, եթե $\forall$ վերջավոր հատը գծորեն կախված չէ:

$$\sum_{n=1}^{k} \alpha_n \cdot x_n = \bar{0} \Rightarrow \text{բոլոր } \alpha_n\text{-երը} = 0$$

Սահմանում: Տարածությունը կանվանենք K չափանի, եթե նրա մեջ կան K հատ գծորեն անկախ վեկտորներ, բայց $\forall$ $K+1$ հատը արդեն գծորեն կախված է:

Սահմանում: Տարածությունն անվանում ենք անվերջ չափանի, եթե $\forall n \in N$ համար այդ տարածության մեջ կան n հատ գծորեն անկախ վեկտորներ:

օրինակ՝ • $P[a,b] \Rightarrow$ նաև $C[a,b]$

• ℓ_∞

• ℓ_p

վերցնենք $E \subset \ell_\infty$

$E = \{ \bar{x} = \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\} \}$, $x_i = 0$ $i \neq k$ $i = \overline{1,n}$, $x_k = 1$

• R-ը Q դաշտի վրա

(բայց R-ը R դաշտի վրա 1-չափանի,

C-ն R-ի վրա 2-չափանի)

դաս 17

Դիցուք X գծային տարածություն: $Y \subset X$ որևէ ենթաբազմություն է (բնականաբար կարող է ենթատարածություն չլինել): Հարց: Կա՞ արդյոք ենթատարածություն, որը պարունակում է Y-ը: Գոնե մի հատ կա՞: Այո, հենց X-ը կվերցնենք: Իսկ որն է ամենափոքրը, որը պարունակում է Y-ը: Նշանակենք $Z = \bigcap_\alpha E_\alpha$, որտեղ E_α-երը X-ի ենթատարածություններ են և $Y \subset E_\alpha$ (այսինքն՝ Y-ը պարունակող բոլոր ենթա-

ենթատարածությունները վերցնենք և գումարենք

ցանկ հատումը)։ Նաև ապացուցենք, որ

Z-ը X-ի ենթատարածություն է։ Իրոք, եթե

$\forall x, y \in Z \Rightarrow \forall \alpha \quad x, y \in E_\alpha$ → իր ներքին ենթատար.

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y \in E_\alpha \\ \lambda x \in E_\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x + y \in Z \\ \lambda x \in Z \end{array}$$

մեր չափերից

Նկատենք՝ հատում բազմությունը փակ է և գումարման գործողության նկատմամբ, և թվով բազմապատկման ⇒ հատում բազմությունը ենթատարածություն է (ընդհանրապես ամենա< ենթատարածությունն է որը պարունակում է Y)։ Այսպիսով ստացանք ամենափոքր ենթատարածությունը, որի մեջ ընկած է Y-ը։ Z-ը կանվանենք գծային թաղանթ։

Դիցուք X որևէ գծային տարածություն է, Y-ը ենթատարածություն։ Կասենք, որ $x \sim y$, եթե $x - y \in Y$։ Այս ձևով սահմանված հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է (այսինքն՝ ռեֆլեքսիվ է, սիմետրիկ և տրանզիտիվ).

ռեֆլեքսիվ Իրոք, x-ը ինքն իրեն համարժեք է, որովհետև $0 \in Y$ (Y-ը ենթախումբ է)

սիմետրիկ Եթե $x - y \in Y$, ապա $y - x = -(x-y) \in Y$

$\Rightarrow x \sim y \Rightarrow y \sim x$

տրանզիտիվ
$$\left.\begin{array}{l} x \sim y \Rightarrow x - y \in Y \\ y \sim z \Rightarrow y - z \in Y \end{array}\right| \Rightarrow (x-y)+(y-z) \in Y$$

$$x - z \in Y$$
$$\Downarrow$$
$$x \sim z$$

պատկերացնենք, որ X-ը տրոհվում է համարժեքության նույն դասերի մեջ այն տարրերն են որոնց տարբերությունը $\in Y$

իրար հետ չհատվող համարժեքության դասեր, դրանցից մեկը 0-ն է Y-ն է (որովհետև Y-ի ∀ 2 էլեմենտ իրար համարժեք են)

$\forall x_1, x_2 \in Y \Rightarrow x_1 \sim x_2$

և ակնհայտ

$$z \sim x_1 \quad z = \underbrace{(z - x_1)}_{\in Y} + \underbrace{x_1}_{\in Y} \in Y$$

Դիտարկենք նոր օբյեկտ, որի էլեմենտները համարժեքության դասեր են: Սահմանենք համարժեքության դասերի գործողություն այդ համարժեքության դասերի մեջ: Ինչ է նշանակում մի դասին գումա.

ընկնի մեկ այլ դաս կամ դասը բաժանարարներ ըստ[illegible]:

Դիցուք ունենք 2 համարժեքության դասեր ξ և η: Սահմանենք գումար գործողությունը: Վերցնենք $\forall x \in \xi$ և $y \in \eta$: Դիտարկենք $x+y$ վեկտորը: Ակնհայտաբար $x+y \in X \Rightarrow$ ինչ-որ համարժեքության դասի մեջ է ընկած: $\xi+\eta$ ասելով կհասկանանք այն դասը, որը պարունակում է $(x+y)$ էլեմենտը: Այստեղ կա կոռեկտության հարց: Ցույց տանք, որ այս ձևով սահմանված գումարը կոռեկտ է, այսինքն՝ ստացված նոր դասը կախված չէ x-ից ու y-ից: Իրոք, վերցնենք $x_1 \in \xi$ և $y_1 \in \eta$, ունենք

$$x_1 \in \xi \qquad y_1 \in \eta$$
$$x \in \xi \qquad y \in \eta$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$x_1 \sim x \qquad y_1 \sim y$$
$$x_1 - x \in Y \qquad y - y_1 \in Y$$

$$(x - x_1) + (y - y_1) \in Y$$

Նույնն է $\downarrow$

$$(x+y) - (x_1 + y_1) \in Y$$
$$\Downarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} x+y \sim x_1 + y_1 \\ (x+y) \in \xi + \eta \end{array}\right| \Rightarrow (x_1 + y_1) \in \xi + \eta$$

Նույն ձևով կստանանք բոլոր բազմա-
պատկման գործողությունը: Վերցնենք $\forall x \in \xi$
դիտարկենք αx ← (x-ի որևէ վեկտոր է ⇒ ինչ-որ դասի մեջ ընկած

Եթե $\alpha x \in \xi_1 \Rightarrow \alpha\xi = \xi_1$:

Նույն ձևով կարող ենք ցույց տալ կոռեկ-տությունը:

Այսպիսով +,× գործողությունների նկատմամբ համարժեքության դասերի բազմությունը դառնում է գծային տարածություն և այն կանվանենք X-ի ֆակտոր տարածություն ըստ Y ենթատարածության և կնշանակենք

$$\boxed{X/Y}$$

1) Ապացուցել, որ ստացվածը ԳՏ է
այսինքն՝ ցույց տալ, որ
աքսիոմները տեղի ունեն

2) Ապացուցել, որ
$\dim X = \dim Y + \dim X/Y$

...ենք բոլոր բազմա-
...ներ: Վերցնենք $\forall x \in \xi$
...որևէ վեկտոր է $\Rightarrow$
...ր դասերից մեկը
$= \xi_1$

...ցույց տալ կոմբի-

...երի համարժեք
...բազմություններ
...ություն և այն
...որ տարածություն
...և կնշանակենք

կոչվում է $\dim X/Y$ անվանել կո-չափողականություն:

Լեմմա: Դիցուք X-ը որևէ գծային տարածություն է: Y-ը նրա ենթատարածություն է, որի կո-չափողականությունը n է՝ $\dim X/Y = n$: Այդ դեպքում $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ (վեկտորներ) այնպիսին, որ $\forall x \in X$ միակ ձևով կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + y, \quad y \in Y$$

միակ ձևով նշանակում է, որ գործակիցներն են միակը, և y վեկտորը

Ապացույց: Ունենք, որ $\dim X/Y = n$: Դա նշանակում է, որ $\exists \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ բազիս X/Y ֆակտոր տարածության համար: Վերցնենք $\forall x \in X$, քանի որ X-ը բաժանված է համարժեքության դասերի, ապա $\exists \eta$, որ $x \in \eta$: Դա նշանակում է, որ $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ այնպիսին, որ

$$\eta = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n$$

Հիմա մի համարժեքության դասից վերցնենք $\forall$ էլեմենտ: Վերցնենք $x_1 \in \xi_1$, $x_2 \in \xi_2$ ... $x_n \in \xi_n$ բայց անհամանման, եթե $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \in \eta$

$\Rightarrow x \sim (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)$

Նշանակենք $y = x - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \in Y$

և ստացանք $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + y$

Ուրեմն ցույց տվեցինք, որ $\forall x$ կարող ենք նման ձևով ներկայացնել: Մնում է ցույց տալ, որ այդ ներկայացումը միակն է:

Ենթադրենք նույն x վեկտորն ունի ուրիշ ներկայացում՝

$$x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + y_1$$

$$(*) \qquad \underbrace{(\alpha_1-\beta_1)x_1 + (\alpha_2-\beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n-\beta_n)x_n}_{\in Y} = \underbrace{y_1 - y}_{\in Y}$$

$\Leftarrow$

$$(\alpha_1-\beta_1)\xi_1 + \dots + (\alpha_n-\beta_n)\xi_n = y = \bar{0}$$

Քանի որ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ բազիս են $\Rightarrow$

գործակիցները $= 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1-\beta_1=0 \\ \vdots \\ \alpha_n-\beta_n=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n=\beta_n \end{matrix}$$

$\Downarrow$

ներկայացումը միակն է

սրանք որ տեղադրենք $(*)$-ի մեջ կստանանք $0 = y_1 - y$

$\Downarrow$

$y_1 = y$

$y = x - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \in Y$

$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + y$

...ցույց տվեցինք, որ $\forall x$ կարող ենք

...ներկայացնել: Մնում է ցույց

...ներկայացումը միակն է:

...ենք x վեկտորը ունի

...ում՝

$\dots \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + y_1$

$\dots) x_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) x_n = \underbrace{y_1 - y}_{\in Y}$

$\dots Y \quad \Leftarrow$

$\dots (\alpha_n - \beta_n) \xi_n = y = \bar{0}$

$\dots \xi_n$ բազիս են $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \beta_n \end{array}$$

$\Downarrow$

...ներկայացումը միակն է

Դիցուք X-ը K դաշտի վրա գծային տարածություն է: Դիտենք $f: X \to K$: Կասենք, որ f-ը գծային ֆունկցիոնալ է, եթե

1) $\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ադիտիվություն

2) $\forall \alpha \in K \quad \forall x \in X \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$ համասեռություն

այս 2 պայմանները համարժեք է հետևյալ պայմանը

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2)$$

Օրինակներ՝

- 0-ական ֆունկցիոնալ (բոլոր էլեմենտները տանում է 0-ի մեջ)
- $R^n \to R$

  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$ — սա մասնավոր դեպք, երբ $a = (1, 0, \dots, 0)$

  սկալյար արտադրյալ

  $f(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{a}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$
- $X = C[a, b] \quad x = x(t)$

  $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$ — սա գծային արտապատկերում է, 2 պայմանները է բավարարում

Ինտեգրալի գծայնությունից ֆունկցիոնալ է

Խնդիր: Ինտեգրման օպերատորը գծային ֆունկցիոնալ չէ: Ցույց տալ, որ ֆունկցիոնալը օպերատոր է, հակառակը ճիշտ չէ:

- $f(\bar{x}) = x(a)$ (ամեն մի ֆունկցիայի համապատասխանեցնում մեզ ցանկալի ֆունկցիայի արժեքը ինչ-որ կետում)

սա նորից գծային ֆունկցիոնալ է

$$f(\bar{x}+\bar{y}) = x(a)+y(a) = f(\bar{x})+f(\bar{y})$$

Սահմանում: Եթե f-ը X-ի վրա գծային ֆունկցիոնալ է, ապա միջուկ ասելով հասկանում ենք՝

$$\operatorname{Ker} f = \{\bar{x} \in X : f(\bar{x}) = 0\}$$

Թեորեմ: $\forall$ ոչ զրոյական գծային ֆունկցիոնալի միջուկի կո-չափողականությունը 1 է:

$$\dim X/\operatorname{Ker} f = 1, \quad \text{եթե } f \neq 0$$

Ապացույց: Քանի f-ը 0-ական արտապատկերում չէ $\Rightarrow \exists$ գոնե մի կետ x_0, որ $f(x_0) \neq 0$

Դիտարկենք $x_1 = \dfrac{1}{f(x_0)} \cdot x_0$

այդ դեպքում $f(x_1) = f\left(\dfrac{1}{f(x_0)} \cdot x_0\right) = \dfrac{1}{f(x_0)} \cdot f(x_0) = 1$

գծային

Հիմա ցույց կտանք, որ եթե վերցնենք $\forall x \in X$ ապա $\exists \alpha$ այնպիսին, որ կարող ենք գրել $x = \alpha \cdot x_1 + y$, որտեղ $y \in \mathrm{Ker} f$:

Վերցնենք $\forall x \in X$ և դիտարկենք $y = x - \underbrace{f(x)}_{\text{թիվ է}} \cdot x_1$

$$f(y) = f(x) - f\left(f(x) \cdot x_1\right) = f(x) - f(x) \cdot \underbrace{f(x_1)}_{=1} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y \in \mathrm{Ker} f$$

Ապացուցեցինք, որ $\forall x$ վեկտոր կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝ $x = \underbrace{f(x)}_{\text{ինչ-որ } \alpha} \cdot x_1 + y$

ցույց տանք միակությունը

$$x = \alpha x_1 + y$$

$$x = \beta x_1 + y_1$$

այստեղից կստանանք $(\alpha - \beta) x_1 = \underbrace{y_1 - y}_{\in \mathrm{Ker} f}$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha - \beta) \cdot x_1 \in \mathrm{Ker} f$$

$$f\left((\alpha - \beta) x_1\right) = 0$$

$$(\alpha - \beta) \underbrace{f(x_1)}_{=1} = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$$

$$\alpha = \beta$$

Որևէ նշանակենք $\eta \in X/\mathrm{Ker} f$ որ $x_1 \in \eta$
Ցույց տանք, որ η հանդիսանում է ֆակտոր
տարածության համար բազիս: Դա կնշա-
նակի, որ չափողականությունը 1 է:
Վերցնենք $\forall \xi \in X/\mathrm{Ker} f$, վերցնենք $\forall x \in \xi$
Ինչ առաջ էլ ցույց տվեցինք, որ $\forall x \in X$
ներկայացվում է միակ ձևով $x = \alpha x_1 + y$,
որտեղ $y \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow x \sim \underbrace{\alpha x_1}_{\in \xi}$ բայց մյուս
կողմից գիտենք, որ քանի որ $x_1 \in \eta$, ապա
$\alpha x_1 \in \alpha \eta \Rightarrow \xi = \alpha \eta$: Վերջ համարժեքության
դասի $\forall$ էլեմենտ գրվեց $\alpha \eta$: այս 1-էլեմենտ
բանող վեկտորը դարձավ ֆակտոր տարածության համար
բազիս:

Նորմավորված տարածություններ

Դիցուք X-ը որևէ դաշտի վրա որոշված գծային տարածություն է։ Որոշված է $p: X \to R$ արտապատկերում (ամեն մի x վեկտորի համապատասխանության մեջ է դրված ինչ-որ թիվ), որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1. $p(x) \geq 0, \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$
2. $\forall \alpha \quad p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x)$
3. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Այդ դեպքում p-ն կանվանենք նորմ կամ նորմի ֆունկցիա, p(x) թիվը կանվանենք x վեկտորի նորմ, իսկ X տարածությունը, որի մեջ արված կա նորմ հասկացությունը կանվանենք նորմավորված տարածություն։

Ընդունված է նշանակել $p(x) = \|x\|$։

1. $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$
2. $\forall \alpha \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Օրինակներ՝

1) R_p^n

Նորմը սահմանենք հետևյալ ձևով՝

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

- $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \geq 0$

  $\|x\| = 0 \iff x_k = 0 \iff \overline{x} = 0$

- $\|\alpha x\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha x_k|^p\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \cdot \sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$

  $= |\alpha| \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} = |\alpha| \cdot \|x\|$

- $\|x+y\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq$ ← Մինկովսկու անհավասարություն

  $\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p} = \|x\| + \|y\|$

Այսպիսով R_p^n նորմավորված տարածություն է, մասնավորապես R_2^n ԷՏ է։

Նույն ձևով կարող ենք դիտարկել C_p^n կոմպլեքս թվերով n-յակների բազմությունը։

Իսկ R_∞^n-ում նորմը սահմանենք՝

$$\|x\| = \max_{k=1,\dots,n}|x_k|$$

կոորդինատների մոդուլի max

- $\max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k| \geq 0$ $\qquad \max |x_k| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$
- $\|\alpha x\| = \max\limits_{k=1,\dots,n} |\alpha x_k| = |\alpha| \cdot \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\forall i = 1,\dots,n \quad |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq$

$$\leq \max |x_k| + \max |y_k| = \|x\| + \|y\|$$

$$\|x+y\| = \max_i |x_i + y_i| \leq \|x\| + \|y\|$$

2) $l_p = \{ \bar{x} = \{x_n\} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \}$

նորմը սահմանենք $\|x\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$

3) $l_\infty = \{ \bar{x} = \{x_n\} :$ x_n - սահմանափակ $\}$

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

4) $C[a,b]$

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

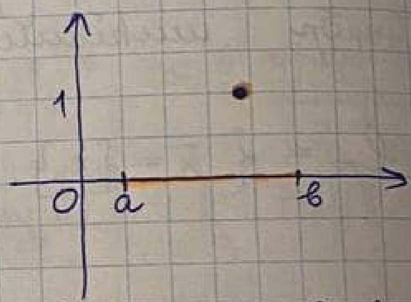
$\to$ $[a,b]$ հատվածում ֆունկցիայի մեծագույն արժեք

Եթե որոշման տիրույթը $[a,b]$ հատվածը չէ, այլ ինչ-որ X բազմություն, $C(X)$ ապա նորմը կսահմանվի այսպես՝ $\|f\| = \sup |f(x)|$

Դիտող: Կարելի նաև այլ նորմ սահմա-
նել հետևյալ ձևով՝

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

- ընդհանուր ձևափոխում, եթե ոչ բացասական ֆունկցիայի ինտեգրալը $= 0 \Rightarrow$ պարտադիր չէ, որ այն նույնաբար 0 լինի, ինչ-որ մի կետ, երկու կետ կարող են ինտեգրալի արժեքի վրա չազդել: Օրինակ՝



Բայց քանի որ ֆունկցիաները անընդհատ են, ապա եթե մի կետում ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեք, ուրեմն ինտեգրալը հաստատ դրական է:
Ուստի առաջին երեքը ունի:

- երեքը ունի
- $$\underbrace{\int_a^b |f(x)+g(x)|\, dx}_{\|f+g\|} \leq \int_a^b \left(|f(x)| + |g(x)|\right) dx = \|f\| + \|g\|$$

Այսինքն $C[a,b]$ վերը նշված նորմով նորմավորված տարածություն դառնում է: Նշանակենք՝ նաև այս նորմով՝

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \longrightarrow C_p[a,b]$$

Դիցուք X-ը նորմավորված տարածություն է: Նշանակենք $\rho(x,y) = \|x-y\|$:

Ապացուցենք, որ այս կերպ սահմանված ρ-ն բավարարում է մետրիկայի աքսիոմներին:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow \|x-y\| = 0$

$$x - y = 0$$
$$x = y$$

2) $\rho(y,x) = \|y-x\| = \|-1\cdot(x-y)\| =$

$= |-1| \, \|x-y\| = \|x-y\| = \rho(x,y)$

3) $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq$

$\leq \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Այդ կերպ ամեն $\forall$ ՆՏ կարելի է դիտարկել որպես ՄՏ: Իսկ այդ մետրիկան կոչվում է ծնված նորմով ծնված մետրիկա:

ուրդ: Կարո՞ղ ենք ∀ ՄՏ մեջ նորմ այնպես սահմանել, որ մետրիկան ծնվի նորմով: Ոչ:

Դիսկրետ ՄՏ: Հնարավոր չէ սահմանել նորմն այնպես, որ դիսկրետ մետրիկան ծնվի այդ նորմով:

$$\|x\| = \|x - \bar{0}\| = \rho(x, \bar{0}) = 1 \quad (\text{եթե } x \neq 0)$$

$$\|7x\| = 7 \neq 1$$

∀ $x \neq 0$ վեկտորի համար $\rho = 1$

Նկատենք՝ ամեն մի ՄՏ չի, որ կարելի է վերածել նորմավոր ԳՏ: Բայց ∀ ՆԳՏ իրենից ՄՏ է՝ համապատասխան նորմով ծնված: ՆԳՏ-ն ինչ-որ իմաստով ՄՏ-ի լավ վերսիան է (+, × գործողությունների կա):

ԼԳՆՏ - լրիվ գծային նորմավորված տարածություն - Բանախի տարածություն

Օրինակ՝ $C[a,b]$, R^n_p, l_p,

Բայց օրինակ $C_p[a,b]$ Բանախյան տարածություն չէ, որովհետև լրիվ չէ:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Բայց լրիվացման թեորեմի համաձայն կարելի է ∀ տարածություն լրիվացնել: Լրացնենք՝ $C_p[a,b]$-ին նոր ֆունկցիաներ ավելացնելով՝ կարող ենք այն դարձնել լրիվ: $C_p[a,b]$ լրիվացումը ընդունված է նշանակել $L_p[a,b]$

Սահմանում: Դիցուք X որևէ ԳՏ է: Ունենք 2 նորմ՝ $\|x\|_1$ և $\|x\|_2$: Կասենք, որ այդ նորմերը համարժեք են, եթե $\exists\, c_1, c_2 > 0$ թվեր այնպիսին, որ $\forall x \in X \quad c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$

Թեորեմ: Եթե X-ը վերջավոր չափանի տարածություն է, $\dim X = n$, ապա նրա մեջ ցանկացած ∀ 2 նորմեր իրար համարժեք են $\|\ \|_1 \sim \|\ \|_2$:

օրինակ R^n-ում նորմերը մեկը մյուսով կարելի է ձևափոխել նույնը չենք կարող ասել անվերջ չափանի տարածությունների համար

Առաջադրանք: Դիցուք X-ը n-չափանի գծային նորմավոր տարածություն է: Ֆիքսենք որևէ բազիս՝

$e_1, e_2, \dots, e_n \Rightarrow \forall x \in X \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$ միակ ձևով:

Սահմանենք նոր նորմ՝

$$\|x\|_3 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

վերլուծության գործակիցներ

Նախ համոզվենք, որ նորմ է՝

① $\sum_{k=1}^{n} |x_k| \geq 0$; $\|x\|_3 = 0 \Rightarrow x_k = 0 \Rightarrow x = \overline{0}$

② $\|\alpha x\|_3 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha x_k| = |\alpha| \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\alpha| \cdot \|x\|_3$

③ $\|x+y\|_3 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) =$
$= \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_3 + \|y\|_3$

Համոզվեցինք, որ սահմանվածը իրոք նորմ է:

Թեորեմը ապացուցված կլինի, եթե ցույց տանք $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$: Ցույց տանք, որ $\forall$ նորմ $\sim \|\cdot\|_3$

Վերցնենք $\forall x \in X$: Գնահատենք $\|x\|_1$-ը:

$$\|x\|_1 = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \overset{\text{հաստատուն}}{x_k} \cdot e_k \Big\|_1 \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k \cdot e_k\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \|e_k\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \underbrace{\max_i \|e_i\|_1}_{\text{նշ. } C_1} = C_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k| = C_1 \cdot \|x\|_3$$

Նկատենք՝ ապացուցենք, որ $\|\cdot\|_1$ ինչ նորմ էլ վերցնենք, գտնի ունի հաստատուն՝ $\|\cdot\|_1 < c_1 \cdot \|\cdot\|_3$:

Համարժեքության ապացույց համար պետք է ցույց տանք, որ $\|x\|_3$-ը գնահատված է $\|x\|_1$-ով:

Սահմանենք $f: R^n \to R$ արտապատկերումը, որը գործում է հետևյալ ձևով

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k \right\|_1$$

$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ նշանակված է $\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot e_k$

Ցույց տանք, որ այս արտապատկերումը անընդհատ է, ավելին՝ =աչափ անընդհատ:

այստեղ էլ ցույց տանք որ f-ը անընդհատ է

$$\left| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \right| = \left| \|x\|_1 - \|y\|_1 \right| \leq$$

օգտվենք հետևյալից՝

$$\forall a, b \in X \qquad \left| \|a\| - \|b\| \right| \leq \|a - b\|$$

ցույց տանք

$$\|a\| = \|a - b + b\| \leq \|a - b\| + \|b\|$$

$$\|b\| = \|a - b\| + \|a\|$$

այս 2-ից կստանանք

$$-\|a - b\| \leq \|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \|a\| - \|b\| \right| \leq \|a - b\|$$

$$\leq \quad \|x-y\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)\cdot e_k \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|(x_k-y_k)\cdot e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k-y_k|\cdot \|e_k\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k-y_k| \cdot \underbrace{\max_k \|e_k\|}_{c_1} = c_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k-y_k|$$

բավական է $|x_k-y_k| < \frac{\varepsilon}{c_1 \cdot n}$ կատարվելուց

$$|f(x_1,\dots,x_n) - f(y_1,\dots,y_n)| < \varepsilon$$

անընդհատ է

Այսպիսով ունենք $R^n \to R$ անընդհատ արտապատկերում:

Դիտարկենք $K = \{\bar{x} = (x_1,\dots,x_n) \in R^n : \sum_{k=1}^{n} |x_k| =$

սահմանափակ
փակ բազմություն

Այն նույն R_1^n-ի միավոր սֆերան է
$\Rightarrow K$ կոմպակտ բազմություն է

Պնդում: M-ը մինիմումն է, այսինքն՝ ընդունում է որ կետում այդ արժեքը մինիմում:
Տարբերել min և inf.

...ատ արտապատկերում է

$f(\bar{x}) = M$

$\forall x \in K \quad f(x) \geq M,$

$M \neq 0:$

$0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k \right\| = 0 \Rightarrow$

$$\leq \quad \|x-y\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)\cdot e_k \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|(x_k-y_k)\cdot e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k-y_k|\cdot \|e_k\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \cdot \underbrace{\max_k \|e_k\|}_{c_1} = c_1 \cdot \sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$$

բավական է $|x_k - y_k| < \dfrac{\varepsilon}{c_1 \cdot n}$ վերցնենք

$$|f(x_1,\dots,x_n) - f(y_1,\dots y_n)| < \varepsilon$$

անընդհատ է

Ապացուցել ունենք $R^n \to R$ անընդհատ արտապատկերում:

Դիտարկենք $K = \{\bar{x} = (x_1,\dots,x_n) \in R^n : \sum_{k=1}^{n}|x_k| =$

սահմանափակ
փակ բազմություն

Այս նույն R^n_1-ի միավոր սֆերան է
$\Rightarrow$ K կոմպակտ բազմություն է

$f: K \to R$ անընդհատ արտապատկերում է

Վայերշտրասի թեոր. $\Longrightarrow$ $\exists \min f(\bar{x}) = M$

Այս նշանակում է $\forall x \in K \quad f(x) \geq M$,

ընդ որում նկատենք $M \neq 0$:

Եթե $M=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k \right\| = 0 \Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k = 0$, e_k բազիս են $\Rightarrow \forall k \quad x_k = 0 \Rightarrow x = \bar{0} \notin K$

հակասություն ստացանք

այսինքն $\min f(x) \neq 0$

$\Rightarrow \forall (x_1, \ldots, x_n) \in K \quad f(x_1, \ldots, x_n) \geq M > 0$

Նախապատրաստական երկու վերցնենք

$$\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$$

և դիտարկենք հետևյալ վեկտորը

$$\left(\frac{x_1}{\|x\|_3}, \frac{x_2}{\|x\|_3}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_3}\right) = \frac{1}{\|x\|_3} \cdot \bar{x}$$

$\bar{x}$-ի կոորդինատների մոդուլների գումարը $= \|x\|_3$

$$\frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{\|x\|_3} = 1, \text{ քանի որ } \|x\|_3 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Դա նշանակում է, որ այս $\left(\frac{\bar{x}}{\|x\|_3}\right)$ վեկտորը $\in K$,

և քանի որ K բազմության $\forall$ կետում ֆունկցիայի արժեքը $\geq M \Rightarrow f\left(\frac{x_1}{\|x\|_3}, \frac{x_2}{\|x\|_3}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_3}\right) \geq M$

Մյուս կողմից՝

$$f\left(\frac{x_1}{\|x\|_3}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_3}\right) = \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|x\|_3} e_k \right\|_1 = \frac{1}{\|x\|_3} \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_1 =$$

$$= \frac{1}{\|x\|_3} \cdot \|x\|_1$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\|x\|_3} \cdot \|x_1\| \geq M \Rightarrow \|x_1\| \geq M \cdot \|x\|_3$$

դաս 19

Արդյունքում ստացանք՝

$$M\cdot\|x\|_3 \le \|x\|_1 \le c_1\cdot\|x\|_3$$

$$\Downarrow$$

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$$

∀ նորմ է

Ապացուցեցինք որ տարածության մեջ ինչ նորմ էլ վերցնենք այն համարժեք է լինելու $\|\cdot\|_3$; Ուրեմն ∀-ը $\sim \|\cdot\|_3 \Rightarrow$ ∀ 2-ը իրար համարժեք են:

Այս թեորեմից ձևակերպումներ կարող ենք անել՝ եթե X ԳՆՏ է և $\dim X<\infty$ (վերջավոր չափանի) ու այդ տարածության մեջ ունենք 2 նորմ՝ $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$: Եթե ինչ-որ մի նորմով $x_n \xrightarrow{(1)} a \Rightarrow \|x_n-a\|_1\to 0$

1 նորմի իմաստով

ապա $\|x_n-a\|_2\to 0$: Այսինքն՝ կապ չունի, թե որ նորմն ենք վերցրել դիտարկվող տարածության մեջ, որն էլ վերցնենք $x_n\to a$

$$c_1\|x_n-a\|_1 \le \|x_n-a\|_2 \le c_2\cdot\|x_n-a\|_1$$

2 նորմով էլ զուգամիտություն ունենք

Գծային օպերատորներ

Սահմանում: Դիցուք X և Y ԳՏ են K դաշտի վրա, $A: X \to Y$: Կասենք, որ A արտապատկերումը գծային է, եթե

1. $\forall x, y \in X \quad A(x+y) = Ax + Ay$ ադիտիվ
2. $\forall x \in X, \ \forall \alpha \in K \quad A(\alpha x) = \alpha (Ax)$ համասեռ

կամ որ նույնն է (1 պայմանով)

$$\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall x, y \in X \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay$$

Օրինակներ՝

1) զրոյական արտապատկերում $Ax = \bar{0}$

2) $Ax = x$ նույնական արտապատկերում $X \to X$, երբեմն նշանակում են $Ix = x$

3) $Ax = \alpha x \qquad (X \to X)$

↑ ֆիքսած թիվ

4) $R^n \to R^n$

այս արտապատկերմանը համապատասխանում է տեղափոխության մատրից

$$A(x_1, \dots, x_n) = (x_2, x_1, \dots, x_n)$$

Հիշեցում: Վերջավոր չափանի տարածությունում մեզ $\forall$ արտապատկերմանը համար կա մատրից, նաև հակառակը՝ ասենք որ մատրիցով տրված է գծային արտապատկերում:

5) $\mathcal{A} : R^n \to R^m$

$\mathcal{A}x = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_m)$$

6) $\mathcal{D} : P_n \to P_{n-1}$

$\mathcal{D}$ – ածանցման օպերատոր

P_n – մինչև n-րդ կարգի բազմանդամների բազմություն

7) $\mathcal{D} : C^1[a, b] \to C[a, b]$

ածանցման օպերատորը բոլոր անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների բազմության

$$\mathcal{D}(f) = f'$$

8) $\mathcal{A} : C[a, b] \to C[a, b]$

$$\mathcal{A}(f(x)) = \int_a^x f(t)\,dt$$ վերին փոփոխականով ինտեգրալ

$$\mathcal{A}(f(x)) = \int_a^b f(t)\,dt \in R$$ թիվ է

$\mathcal{A} : C[a, b] \to R$

գծային ֆունկցիոնալ

Ինչ է նշանակում օպերատորի անընդհատությունը

Սահմանում: Դիցուք X և Y ԳՆՏ են, $A: X \to Y$ օպերատոր է: A օպերատորը $x_0 \in X$ կետում կանվանենք անընդհատ, եթե $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ այնպիսին, որ $\|x - x_0\|_X < \delta$

$$\Downarrow$$

$$\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$$

A օպերատորը անվանում ենք անընդհատ X-ի վրա, եթե այն անընդհատ է X-ի բոլոր կետերում:

Թեորեմ: Եթե $A: X \to Y$ գծային օպերատոր է և ինչ-որ մի x_0-ում անընդհատ է, ապա A-ն անընդհատ է ամբողջ X-ի վրա: Այսինքն՝ գծային օպերատորը կամ անընդհատ է բոլոր կետերում, կամ ոչ մի կետում անընդհատ չէ:

Ապացույց: Ունենք, որ A օպերատորը x_0 կետում անընդհատ է: Վերցնենք $\forall x_1 \in X$ և ցույց տանք, որ x_1-ում էլ է անընդհատ: Իսկ քանի որ x_1-ն էլ $\forall$ է $\Rightarrow$ կարող ենք, որ ամենուրեք անընդհատ է: Վերցնենք $\forall x \in X$, որ

$\|x - x_1\| < \delta$ և x_0-ի համար գրանց

Եթե ցույց տանք, որ $\|Ax - Ax_1\| < \varepsilon$, ապա թեորեմը կապացուցվի։

Դիտարկենք՝

$$\|Ax - Ax_1\| = \|Ax - Ax_1 + Ax_0 - Ax_0\| =$$
$$= \|A(\underbrace{x - x_1 + x_0}_{\text{նշ. } y}) - Ax_0\|$$

$$\|y - x_0\| = \|x - x_1\| < \delta \Rightarrow \|Ay - Ax_0\| < \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\|Ax - Ax_1\| < \varepsilon$$

Սահմանում: Դիցուք X, Y ԳՆՏ են, $A: X \to Y$ գծային օպերատոր է: A օպերատորը անվանում ենք սահմանափակ օպերատոր, եթե $\exists c$ թիվ այնպիսին, որ $\forall x \in X$ $\|Ax\|_Y < c \cdot \|x\|_X$

Հատկություններ

1. Եթե A-ն սահմանափակ օպերատոր է, ապա X բազմության մեջ ընկած $\forall$ սահմանափակ բազմության պատկերը Y բազմության մեջ սահմանափակ բազմություն է:

Ունենք $E \subset X$ սահմանափակ է, ցույց տանք, որ $A(E) \subset Y$ սահմանափակ է:

Ընդհանրապես, սահմանափակ լինել նշանակում է ինչ-որ գնդի մեջ ընկած լինել:

E սահմանափակ է $\Rightarrow \exists M \ \forall x \in E \ \|x\| < M$

$$\Rightarrow \|Ax\| \underset{\text{սահմանափակության սահմանում}}{\leq} C \cdot \|x\| \leq C \cdot M$$

Արդյունքում $A(E)$ (E-ի պատկերը) ամբողջությամբ ընկած է Y տարածության 0 կենտրոնով $C \cdot M$ շառավղով գնդի մեջ:

Պարզվում է, որ ինչ-որ վերապահումով հակառակ պնդումը նույնպես ճիշտ է:

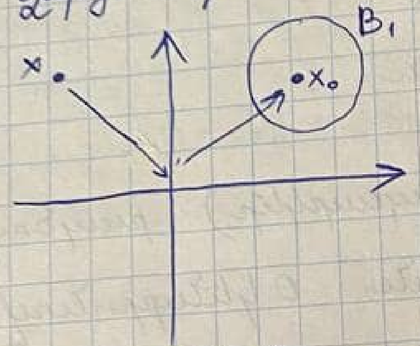
Թեորեմ: Եթե $A: X \to Y$ ԳՕ է և $\exists B_1 = B(x_0, r)$, որի համար $A(B_1)$ պատկերը սահմանափակ բազմություն է, ապա A օպերատորը սահմանափակ է:

Այլ կերպ ասած, եթե այս 2 թեորեմները կցենք իրար, ապա կստանանք հետևյալը՝ A օպերատորը սահմանափակ է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոնե մի գնդի պատկերը սահմանափակ բազմություն է:

Ապացույց: Ունենք, որ B_1 գնդի պատ-կերը սահմանափակ է: Դա նշանակում է, որ

$\exists M \quad \forall x \in B_1 \quad \|Ax\| \le M$

Վերցնենք $\forall x \in X, \quad x \neq 0$



բոլորին կարող ենք x-ը ձգման տարա-պատկերումով գցենք գնդի մեջ

Դիտարկենք $y = \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} \cdot x + x_0$ վեկտորը.

$$\|y - x_0\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} \cdot x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} \cdot \|x\| = \frac{r}{2} < r$$

$\Rightarrow y \in B_1$, քանի որ B_1-ի $\forall$ կետում պատ-կերը $\le M \Rightarrow \|Ay\| \le M$ կամ որ նույնն է

$$\left\| A \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} \cdot x + x_0 \right) \right\| \le M$$

$$\left\| A \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} \cdot x \right) \right\| = \left\| A \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} x + x_0 \right) - A x_0 \right\| \le$$

$$\le \left\| A \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} \cdot x + x_0 \right) \right\| + \|A x_0\| \le M + M = 2M$$

Մյուս կողմից $\left\| A \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} \cdot x \right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} \cdot \|Ax\|$

Արդյունքում կունենք $\frac{1}{\|x\|}\cdot\frac{r}{2}\cdot\|Ax\| \le 2M$

$$\|Ax\| \le \underbrace{\frac{4M}{r}}_{\text{ինչ-որ } C}\cdot\|x\|$$

$\forall x\in X$ բացի զրոյից 0 վեկտորից, բայց նկատենք, որ այս =ով ճիշտ է նաև երբ $x=0$

$\Downarrow$

A-ն սահմանափակ օպերատոր է

Թեորեմ: Դիցուք X, Y ԳՆՏ են, $A: X\to Y$ ԳՕ է: Որպեսզի A օպերատորը լինի անընդհատ $\Longleftrightarrow$ A-ն լինի սահմանափակ:

$\Longrightarrow$ Ապացույց: A օպերատորը անընդհատ է $\Rightarrow$ անընդհատ է $\forall$ կետում: x_0-ում անընդհատ է $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\quad \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$

Այլ կերպ ասած, եթե $x\in B(x_0,\delta) \Rightarrow Ax\in B(Ax_0,\varepsilon)$.

Դուրս եկավ, որ $B(x_0,\delta)$ գնդի պատկերը ընկած է ուրիշ գնդի մեջ, այսինքն՝ սահմանափակ բազմություն է $\Rightarrow$ օպերատորը սահմանափակ է

$\Longleftarrow$ Ունենք, որ A օպերատորը սահմանափակ է. $\forall x\in X$:

այսինքն՝ $\exists c$, որ $\|Ax\|\le c\cdot\|x\|$

Ուզում ենք ցույց տալ, որ օպերատորը անընդհատ է: Բավական է ցույց տալ, որ 0-ում անընդհատ է:

?

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \qquad \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$$

պետք է սա ցույց տանք

Բավական է վերցնենք $\delta = \varepsilon / c$, այդ դեպքում, երբ $\|x\| < \varepsilon / c$

$$\Downarrow$$

$$\|Ax\| < c \cdot \varepsilon / c = \varepsilon$$

$$\|Ax\| < \varepsilon$$

Ստացանք, որ A օպերատորը անընդհատ է 0-ում $\Rightarrow$ անընդհատ է ամբողջ տարածությունում:

Սահմանում: Գծային ֆունկցիոնալը կանվանում է սահմանափակ ֆունկցիոնալ, եթե

$$f: X \to K \quad \exists C \quad \forall x \quad |f(x)| \leq C \cdot \|x\|$$

Քանի որ գծային ֆունկցիոնալը գծային օպերատորի մասնավոր դեպք է, ապա ֆունկցիոնալը կլինի անընդհատ այն և միայն այն դեպքում, երբ այն սահմանափակ է:

Օրինակներ՝

1) $f: C[a, b] \to R$

$f(x(t)) = x(a) + x(b)$ ծայրակետերում ֆունկցիայի արժեքների գումար

Ստուգենք որ գծային ֆունկցիոնալ է:

$$f(x(t) + y(t)) = x(a) + y(a) + x(b) + y(b) = f(x(t)) + f(y(t))$$

$$f(\alpha x) = \alpha x(a) + \alpha x(b) = \alpha f(x(t))$$

$$\Downarrow$$

f-ը գծային ֆունկցիոնալ է

Սահմանափակ ֆունկցիոնալ է, թե ոչ:

$$|f(x)| = |x(a) + x(b)| \leq |x(a)| + |x(b)| \leq$$

Քանի որ $C[a, b]$-ում $\|x(t)\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$

$$\leq \max_t |x(t)| + \max_t |x(t)| = \underbrace{2}_{C}\|x\| \Rightarrow$$ սահմանափակ

2) Դիտարկենք $K: [a, b] \times [c, d] \to R$ կոմպակտ

ուղղանկյան վրա որոշված անընդհատ

$K(x, y)$ ֆունկցիա: Սահմանենք A օպերա-

տորը հետևյալ ձևով՝

$$Af = \int_a^b f(x) \cdot K(x, y)\, dx = \varphi(y)$$

ըստ x-ի ինտեգրելուց հետո ստանում ենք y-ից կախված ֆունկցիա.

Նկատենք՝ ամեն ֆունկցիայի համապատաս-

խանությունը մեզ է բերում նոր y-ից կախված

ֆունկցիա $\Rightarrow A: C[a, b] \to \underbrace{C[c, d]}$:

? ինչու անընդհատ

Հիշենք պարամետրից կախված ինտեգրալի մասին թեորեմը:

թեորեմ: Եթե ունենք y պարամետրից

կախված ինտեգրալ (ըստ x-ի ենք ինտեգրում

y-ը պարամետրն է), այս ֆունկցիայի

անընդհատությունից $\Rightarrow$ պարամետրից կախված

ինտեգրալի անընդհատությունը:

Ապացուցենք, որ A արտապատկերումը

գծային օպերատոր է:

$$A(\alpha f+\beta g)=\int_a^b\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]\cdot K(x,y)\,dx=$$

$$=\alpha\cdot\int_a^b f(x)\cdot K(x,y)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,K(x,y)\,dx=\alpha Af+\beta Ag$$

սահմանափակ օպերատոր է, թե ոչ:

Նախ, քանի որ K-ն փակ ուղղանկյան վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիա է $\Rightarrow$ ըստ Վայերշտրասի I թեորեմի (կոմպակտի վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է) սահմանափակ ֆունկցիա է, այսինքն՝

$$\exists M\quad \forall (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\qquad |K(x,y)|<M$$

Դիտարկենք՝

$$\|Af\|=\left\|\int_a^b f(x)\cdot K(x,y)\,dx\right\|=\max_y\left|\int_a^b f(x)\,K(x,y)\,dx\right|\leq$$

$$\leq\max_y\int_a^b |f(x)|\cdot|K(x,y)|\,dx \leq$$ քանի որ $\forall x\quad |f(x)|\leq\max_x|f(x)|=\|f\|$

$$\leq\max_y\int_a^b \|f\|\cdot M\,dx=\|f\|\cdot\underbrace{M\cdot(b-a)}_{c}$$

Այսպիսով $\|Af\|\leq c\cdot\|f\| \Rightarrow$ սահմանափակ օպերատոր է

$K(x,y)$ ընդունված է անվանել օպերատորի կորիզ:

3) Դիտարկենք $D: C^1[a,b] \to C[a,b]$

անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ (1 կարգի ածանցյալները անընդհատ են)

$$Df = f'(x)$$

Այն գծային օպերատոր է, բայց պարզվում է, որ սահմանափակ չէ (անընդհատ չէ):

Անընդհատության համար որպես $[a,b]$ հատված վերցնենք $[0,1]$ հատվածը:

Վերցնենք $f_n(x) = x^n \qquad x \in [0,1]$

$\to$ սրանք կամ գծային ֆունկցիաներ են

$$\|f_n\| = \max_x |x^n| = 1$$

$$Df_n = n \cdot x^{n-1}$$

$$\|Df_n\| = \|n \cdot x^{n-1}\| = n \cdot \underbrace{\|x^{n-1}\|}_{\max|x^{n-1}|=1} = n = n \cdot |f_n|$$

n-ը ինչքան ասես կարող ենք մեծ վերցնել $\Rightarrow$ չի լինի այնպիսի c, որ $\|Df_n\| \leq c \cdot |f_n|$

Բացի այդ, մենք ասել ենք՝ որպեսզի օպերատորը սահմանափակ լինի պետք է $\forall$ սահմանափակ բազմության պատկերը լինի սահմանափակ բազմություն: Իսկ մենք ստացանք, որ պատկերների նորմերն անվերջ ծածանում են՝ որը կախված: Պայմանի՝ ծայրերը գտնում էլեմենտներ կան, որոնց վրա օպերատորը կիրառած, չգտնում են անվերջություն: ⇒ օպերատորը սահմանափակ չէ ⇒ անընդհատ չէ

Օպերատորի նորմ

Նախ նշենք՝ ինչ բան է գծային սահմանափակ օպերատոր: Դիտարկենք $A: X \to Y$ գՕ է: Կասենք, որ A օպերատորը սահմանափակ է, եթե $\exists c \quad \forall x \in X \quad \|Ax\| \le c \cdot \|x\|$

այսպիսի c թվերն անվերջ են

Հարց է առաջանում՝ ինչքան լավ (ճշգրիտ) կարող ենք այդ c թիվը գտնել:

Նշանակենք $\{c\}$ – անհավասարությունը բավարարող c-երի բազմությունը

Այս բազմությունը ներքևից սահմանափակ է, ներքևից 0-ով

ունի inf: Նշանակենք $\inf\{C\} = \|A\|$ և այն կանվանենք A օպերատորի նորմ:

Ցույց տանք, որ inf-ը հասանելի է:

Կամ, որ նույնն է, ցույց տանք, որ

$$\|A\| \overset{?}{\in} \{C\} \iff \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

Ենթադրենք ասվածը չէ՝ $\|A\| \notin \{C\} \Rightarrow$

$\exists x_1 \in X \qquad \|Ax_1\| > \|A\| \cdot \|x_1\|$

Նկատենք, որ $x_1 \neq 0$: Եթե $x_1 = 0$ կունենայինք $0 > 0$ ինչը չի կարող լինել. ուստի կբերեր անհամապատասխանություն:

Քանի որ $x_1 \neq 0$, ան=ության 2 մասերը բաժանենք $\|x_1\|$-ի վրա, կստանանք

$$\|A\| < \frac{\|Ax_1\|}{\|x_1\|}$$

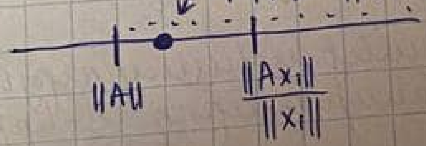
Հիշենք: $\inf E = a$

1) $\forall x \in E \quad x \geq a$

2) $\forall a' > a \quad \exists x' \quad x' < a'$

$\|A\| = \inf\{C\} \Rightarrow \exists c_1 \in \{C\} \qquad c_1 < \dfrac{\|Ax_1\|}{\|x_1\|}$

էդ թիվը պիտի լինի



$\Downarrow$

$$\|Ax_1\| > c_1 \cdot \|x_1\|$$

հակասում է սա պայմանին

Ստացանք հակասություն $\Rightarrow \|A\| \in \{C\}$:

Այլ կերպ ասած $\underset{\|A\|}{\underset{\shortparallel}{\inf\{C\}}} = \min\{C\}$

$\frac{\|Ax_1\|}{\|x_1\|}$

$c_1 \cdot \|x_1\|$

$\{C\}$:

Խնդիր: Ապացուցել, որ $\mathbb{R}$-ում $\forall$ սահմանափակ բազմության փակումը սահմանափակ է:

Նույնը էլ $\mathbb{R}^n$-ում

շարունակությունը Տետր 2-ում

Թեորեմ (օպերատորի նորմի մասին):

Դիցուք X և Y ԳՆՏ են: $A: X \to Y$ ԳԱՕ է (այլ կերպ ասած գծային սահ-մանափակ օպերատոր է): Այդ դեպքում՝

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

↓
բոլոր ձևի
արժեքների sup

Ապացույց: Նշանակենք $\alpha = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$

$$\beta = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Նախ ցույց տանք, որ $\alpha = \beta$:

Կօգտվենք այնպիսի մի փաստից, որ եթե ունենք 2 բազմություններ՝ A և B, $A \subset B$ ապա $\sup B \ge \sup A$:

Վերցնենք $\forall x \ne 0$: Դիտարկենք

$$\left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot x\right)$$ վեկտորը նորմը միավոր է

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \left\| A\left(\frac{1}{\|x\|} \cdot x\right) \right\| \le \alpha$$

Ստացանք, որ $\forall x \ne 0$ դեպքում $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \alpha$ ← ստացանք վերին եզր

իսկ $\beta = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Նշանակենք α – $\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\}$-ի վերին եզր

β – ճշգրիտ (անհավասարության վերին եզր)

$$\Downarrow$$

մասի վերցված sup $\rightarrow \beta \leq \alpha \leftarrow$ ամբողջ ձևի վրա sup

Հիմա ցույց տանք հակառակ անհավասարությունը՝ $\alpha \leq \beta$

Վերցնենք $\forall x \neq 0 \quad \|x\| \leq 1$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\|x\|} \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ax\| \leq \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \beta$$

Ստացանք, որ ճշգրիտ ձևի $\forall x^{\neq 0}$ համար

$$\|Ax\| \leq \beta$$

Բայց նկատենք, եթե $x=0$ լիներ կատարվեր $0 \leq \beta$ ինչը էլ ճիշտ է $\forall x$-ի համար ճշմարիտ ձևով (β միշտ ոչ բացասական է)

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \|Ax\| \leq \beta \\ \text{ուրեմն } \alpha = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

Ստացանք $\alpha \le \beta$, մյուս կողմից ունենք

$\beta \le \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$։

Ցույց տանք, որ A օպերատորի նորմը հենց α-ն է՝ $\|A\| = \alpha$։ Այլ կերպ ասած

$\inf\{C\} = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$։

Ունենք, որ $\sup\limits_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \beta \Rightarrow \forall x \ne 0 \ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \beta$

բան որ նույնն է $\forall x \in X \ \|Ax\| \le \beta \cdot \|x\|$

ինչը կնշանակի, որ $\beta \in \{C\}$։ Բայց

ստացանք $\|A\| = \inf\{C\} \Rightarrow \|A\| \le \beta$

Ենթադրենք $\|A\| < \beta$

Ունենք, որ $\forall x$ կետում $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

$\Rightarrow \forall x \ne 0$ դեպքում կարող ենք 2 մասերն էլ

բաժանենք $\|x\|$-ի վրա, կստանանք

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| \qquad \forall x \ne 0$$

ստացանք β-ից փոքր վերին եզր
բայց էլ բերենք հակասության
փաստը որ բայց պայմանը

$\beta = \sup \Rightarrow \|A\| \ge \beta$

Մյուս կողմից $\|A\| \le \beta$

$\Rightarrow \|A\| = \beta$

Այսպիսով ապացուցեցինք, որ ∀ գծային անընդհատ օպերատորի նորմը կարելի է հաշվել նաև որպես միավոր գնդի պատկերների նորմի sup կամ $\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right\}$ բազմության sup, երբ $x \neq 0$:

գծային ֆունկցիոնալը անընդհատ է ⇒ $\exists C \quad \forall x \quad |f(x)| \leq C\|x\|$

f ֆունկցիոնալի նորմ կանվանենք $\inf\{C\}$ և կնշանակենք $\|f\| = \inf\{C\}$:

Թեորեմը համարժեք կլինեն

$$\boxed{\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}}$$

իրենց մոդուլ այլ ոչ թե նորմ; քանի որ f(x) թիվ է, իսկ թվերի դեպքում նորմը հենց մոդուլն է

Օրինակ՝ $f: C[a,b] \to R$

$$f(x(t)) = \int_a^b x(t)\,dt$$

այս գծային ֆունկցիոնալ է անընդհատ է, թե ոչ պարզենք →

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \le \int_a^b |x(t)|\,dt \le \int_a^b \max_t |x(t)|\,dt =$$

$$= \|x\| \cdot \int_a^b 1\,dt = \|x\| \cdot (b-a) \Rightarrow$$ f-ը գծային սահմանափակ ֆունկցիոնալ է

Կարող ենք հաշվել այս ֆունկցիոնալի նորմը։ Բայց նկատենք, որ եթե վերցնենք

$$x(t) = 1 \Rightarrow f(x) = \int_a^b 1\,dt = b-a = (b-a)\cdot \underbrace{\|x\|}_{=1}$$

- $|f(x)| \le (b-a)\cdot\|x\|$

$$\Downarrow$$

$$(b-a) \in \{C\}$$

- ինչ-որ մի կետում

$$f(x) = (b-a)\cdot\|x\|$$

$$\Rightarrow b-a = \sup_{x\ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|$$

դաս 21

> Նայենք ևս մեկ օրինակ:

$A : C[a,b] \to C[a,b]$ հետևյալ ձևով

$$Af = \int_a^x t^4 f(t)\,dt$$ ← փոփոխական վերին եզրով ինտեգրալ, այս x-ից կախված անընդհատ ֆունկցիա

Գծայնությունը ապացուցելը հեշտ է

$$A(\alpha f + \beta g) = \int_a^x t^4 (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt =$$

$$= \alpha \int_a^x t^4 f(t)\,dt + \beta \int_a^x t^4 g(t)\,dt = \alpha Af + \beta Ag$$

Հիմա ցույց տանք, որ սահմանափակ օպերատոր է՝

$$\|Af\| = \max_x \left| \int_a^x t^4 f(t)\,dt \right| \le \max_x \int_a^x t^4 \cdot |f(t)|\,dt \le$$

$$\le \max_x \int_a^x t^4 \|f\|\,dt = \|f\| \cdot \max_x \int_a^x t^4\,dt =$$

$$= \|f\| \cdot \max_x \left(\frac{x^5}{5} - \frac{a^5}{5}\right) = \|f\| \cdot \left(\frac{b^5 - a^5}{5}\right)$$ ← հաստ. c թիվ

x^5 աճող ֆունկցիա է => մեծագույն արժեքը ընդունում է աջ ծայրակետում

$\Downarrow$

օպերատորը սահմանափակ է

Ունեցանք, որ

$$\|A\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} \leq \frac{b^5-a^5}{5}$$

Նկատենք, որ եթե վերցնենք $f=1$

$$\Rightarrow \|Af\| = \max_x \int_a^x t^4\,dt = \frac{b^5-a^5}{5} = \frac{b^5-a^5}{5}\cdot \underbrace{\|f\|}_{=1}$$

Ստացանք, որ գոյ-ուն մի ֆունկցիայի դեպքում

$\dfrac{\|Af\|}{\|f\|} = \dfrac{b^5-a^5}{5}$. Ունենք, որ $\sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{\|Af\|}{\|f\|} \leq \dfrac{b^5-a^5}{5}$

Այս երկուսից ունեցանք $\max\limits_{f\neq 0} \dfrac{\|Af\|}{\|f\|} = \dfrac{b^5-a^5}{5}$

այսինքն՝ $\|A\| = \dfrac{b^5-a^5}{5}$:

> Դիտենք ևս մեկ օրինակ: Դիտարկենք R^n_2 տարածությունը (իրական թվերի n-յակների տարածությունը, որտեղ նորմը՝

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$$ ← մոդուլը կոմպլեքսների համար)

Ֆիքսենք $\bar{a} \in R^n_2$ և դիտարկենք հետևյալ արտապատկերումը՝

$$f_a(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$ → այլ կերպ ասած սկալյար արտադրյալ (x, a)

$f_a : R^n_2 \to R$

գծային ֆունկցիոնալ

Արտապատկերումը գծային է: Ապացուցում է սկալյար արտադրյալի գծայնությունից:

Ապացուցենք՝ արդյոք սահմանափակ է:

ֆունկցիոնալ է դրա համար մոդուլ (թիվ է) $\rightarrow$

$$|f_a(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k\right| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}}_{\|a\|} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}}_{\|x\|}$$

Կոշի-Բունյակովսկու անհ=ություն

ստացանք $|f_a(x)| \leq \|a\| \cdot \|x\| \Rightarrow$ սահմանափակ ֆունկցիոնալ

փորձենք հաշվել ֆունկցիոնալի նորմը.

$$\|f_a\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_a(x)|}{\|x\|} \leq \|a\| \quad \forall x \neq 0$$

Ցույց տանք նաև, որ $\sup = \|a\|$:

Դիտարկենք՝ $\bar{x}_0 = \left(\frac{a_1}{\|a\|}, \frac{a_2}{\|a\|}, \ldots, \frac{a_n}{\|a\|}\right) = \frac{1}{\|a\|} \cdot \bar{a}$

միավորական $\|\bar{x}_0\| = 1$

$$f_a(\bar{x}_0) = \frac{a_1 \cdot a_1}{\|a\|} + \frac{a_2 \cdot a_2}{\|a\|} + \ldots + \frac{a_n a_n}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\| = \|a\| \cdot \|x_0\|$$

Ստացանք՝ ինչ-որ մի x_0 կետում՝ $f_a(x_0) = \|a\|$

$$\Downarrow$$

$$\|f_a\| = \|a\|$$

Եթե վերցնենք R^n_p: Ապացուցված է, որ ֆունկցիոնալի նորմը՝

$\|f_a\| = \|a\|_q \leftarrow$ համալուծ

Գծային սահմանափակ օպերատորների բազմությունը

Դիցուք X և Y K դաշտի վրա որոշված գծային նորմած բազմություններ են և $A, B : X \to Y$ գծային սահմանափակ օպերատորներ են:

Նախ սահմանենք օպերատորների գումար և թվով բազմապատկման գործողությունները:

- $(A+B)x = Ax + Bx$
- $\forall \alpha \quad (\alpha A)x = \alpha \cdot Ax$

Պարզ: Ապացուցենք այս 2 նոր օպերատորները սահմանափակ են:

Նկատենք, որ $\forall x$ համար

- $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le$

օգտվելով A և B օպերատորների սահմանափակությունից

$$\le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_{\in \{C\}} \cdot \|x\|$$

$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ (= չի ստացվում ակնհայտ օրինակ $B = -A$)

• $\|\alpha A x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| \leq \underbrace{|\alpha| \cdot \|A\|}_{\in \{C\}} \cdot \|x\|$

Ստացանք, որ $\forall$ 2 սահմանափակ օպերա-տորների գումարը և թվով բազմապատկումը սահմանափակ օպերատոր են:

Դժվար չէ ստուգել, որ սահմանափակ օպերատորների բազմությունը գծային տարածություն է:

Նշանակենք $L(X,Y) = \{A : A: X \to Y$ ԳՍՕ$\}$

$L(X,Y)$ գծային տարածություն է, ավելին, մեր ներմուծած օպերատորի նորմով դառնում է նորմավորված տարածություն:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$ համարժեք է $\inf\{C\}$

Ցույց տանք, որ այս իրոք բավարարում է նորմի 3 աքսիոմներին:

1) $\|A\| \geq 0$ ընդ որում՝ $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \forall x \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$$

$$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A = 0$$

Ունեցանք, որ

$$\|A\| = \sup_{f\neq 0}\frac{\|Af\|}{\|f\|} \le \frac{b^5-a^5}{5}$$

Նկատենք, որ եթե վերցնենք $f=1$

$$\Rightarrow \|Af\| = \max_x \int_a^x t^4\,dt = \frac{b^5-a^5}{5} = \frac{b^5-a^5}{5}\cdot\underbrace{\|f\|}_{=1}$$

Ստացանք, որ գոյ-ուն մի ֆունկցիայի դեպքում $\dfrac{\|Af\|}{\|f\|} = \dfrac{b^5-a^5}{5}$. Ունենք, որ $\sup\limits_{f\neq 0}\dfrac{\|Af\|}{\|f\|} \le \dfrac{b^5-a^5}{5}$

Այս երկուսից ունենք $\max\limits_{f\neq 0}\dfrac{\|Af\|}{\|f\|} = \dfrac{b^5-a^5}{5}$

այսինքն՝ $\|A\| = \dfrac{b^5-a^5}{5}$:

> Բերենք ևս այլ օրինակ: Դիտարկենք R_2^n տարածությունը (իրական թվերի n-յակների տարածությունը, որտեղ նորմը՝

$$\|\bar a\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2} \leftarrow \text{մոդուլը կոմպլեքսների համար}$$
)

Ֆիքսենք $\bar a \in R_2^n$ և դիտարկենք հետևյալ արտապատկերումը՝

$$f_a(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \longrightarrow \text{այլ կերպ ասած սկալյար արտադրյալ } (x, a)$$

գծային ֆունկցիոնալ $f_a : R_2^n \to R$

Արտապատկերումը գծային է: Հետևում է
սկալյար արտադրյալի գծայնությունից:
Ապացուցենք՝ արդյոք սահմանափակ է:

ֆունկցիոնալ է
դրա համար
ծնող (թիվ 5)

$$|f_a(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k\right| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}}_{\|a\|} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}}_{\|x\|}$$

Կոշի-Բունյակովսկու ան=ություն

ստացանք $|f_a(x)| \leq \|a\| \cdot \|x\| \Rightarrow$ սահմանափակ ֆունկցիոնալ

Փորձենք հաշվել ֆունկցիոնալի նորմը.

$$\|f_a\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_a(x)|}{\|x\|} \leq \|a\| \quad \forall x \neq 0$$

Ուզում ենք ցույց տալ, որ $\sup = \|a\|$:

Դիտարկենք $\bar{x}_0 = \left(\frac{a_1}{\|a\|}, \frac{a_2}{\|a\|}, \ldots, \frac{a_n}{\|a\|}\right) = \frac{1}{\|a\|} \cdot \bar{a}$

ակնհայտորեն $\|\bar{x}_0\| = 1$

$$f_a(\bar{x}_0) = \frac{a_1 \cdot a_1}{\|a\|} + \frac{a_2 \cdot a_2}{\|a\|} + \ldots + \frac{a_n a_n}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\| = \|a\| \cdot \|x_0\|$$

Ստացանք՝ գոնե-որ մի x_0 կետում $f_a(x_0) = \|a\|$

$$\Downarrow$$

$$\|f_a\| = \|a\|$$

Եթե վերցնենք R^n_p: Պարզվում է, որ ֆունկցիոնալի նորմը
$\|f_a\| = \|a\|_q \leftarrow$ Հյոլդերից

Գծային սահմանափակ օպերատորների բազմություն

Դիցուք X և Y K դաշտի վրա որոշված գծային նորմավոր բազմություններ են և $A, B : X \to Y$ գծային սահմանափակ օպերատորներ են:

Նախ սահմանենք օպերատորների գումար և թվով բազմապատկման գործողությունները:

- $(A+B)x = Ax + Bx$
- $\forall \alpha \quad (\alpha A)x = \alpha \cdot Ax$

Խնդիր: Ապացուցենք այս 2 նոր օպերատորները սահմանափակ են:

Նկատենք, որ $\forall x$ համար

- $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq$ (օգտվենք A և B օպերատորների սահմանափակությունից)

$$\leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_{\in \{C\}} \cdot \|x\|$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$ (= չի լինում անհավասար օրինակ $B = -A$)

- $\|\alpha A x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| \leq \underbrace{|\alpha| \cdot \|A\|}_{\in \{C\}} \cdot \|x\|$

Ապացուցվեց, որ $\forall$ 2 սահմանափակ օպերատորների գումարը և թվով բազմապատկումը սահմանափակ օպերատոր են:

Դժվար չէ ստուգել, որ սահմանափակ օպերատորների բազմությունը գծային տարածություն է:

Նշանակենք $L(X,Y) = \{A : A: X \to Y \text{ ԳՍՕ}\}$

$L(X,Y)$ գծային տարածություն է, ավելին, մեր ներմուծած օպերատորի նորմով դառնում է նորմավորված տարածություն:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$ $\to$ համարժեք է $\inf\{C\}$

Ցույց տանք, որ այս իրոք բավարարում է նորմի 3 աքսիոմներին:

1) $\|A\| \geq 0$ ընդ որում՝ $\|A\| = 0 \iff A = 0$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \forall x \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$$

$$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A = 0$$

2) $\|\alpha A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|\alpha Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|\alpha|\cdot\|Ax\|}{\|x\|} =$

$$= |\alpha|\cdot \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha|\cdot\|A\|$$

3) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

Ցույց տվեցինք, որ $L(X,Y)$ նորմավորված տարածություն է:

ԼԳՆՏ

Թեորեմ: Եթե Y բանախյան տարածություն է, ապա $L(X,Y)$ ևս բանախյան է:

Ապացույց: Ցույց տալ, որ տարածությունը բանախյան է նշանակում է պետք է ցույց տանք, որ այն լրիվ է ($\forall$ ֆունդամենտալը զուգամետ է):

Դիտարկենք $\forall\{A_n\} \subset L(X,Y)$ ֆունդամենտալ հաջ.: Ուզում ենք ցույց տալ, որ $\|A_n - A\| < \varepsilon$

մեր զուգամ. է

$\{A_n\}$ ֆունդամենտալ հաջ. է $\Rightarrow$ $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n,m>n_0$

Դիտարկենք $\forall x\in X$ և վերցնենք $\{A_n x\} \subset Y$

ուզում ենք ցույց տալ, որ $\{A_n x\}$ զուգամետ է, դրա համար բավական է ցույց տալ, որ ֆունդ. է, քանի որ Y ԲՏ է

Դիտարկենք՝

$$\|A_n x - A_m x\|_Y = \|(A_n - A_m)x\|_Y \le \underbrace{\|A_n - A_m\|}_{<\varepsilon} \cdot \|x\|_X < \varepsilon \cdot \|x\|_X$$

ցույց տվեցինք, որ $\{A_n x\}$ ֆունդ. է
Y ԲՏ է $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} A_n x = y$$

Սահմանենք նոր արտապատկերում

$A: X \to Y \qquad Ax = y = \lim_{n\to\infty} A_n x$

կետային զուգամիտություն

Ցույց տանք, որ $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$: Դրա համար պետք է ցույց տանք՝

1) գծայնությունը,

2) սահմանափակությունը:

1) $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x_1 + \beta x_2) =$

$= \lim_{n\to\infty}(\alpha A_n x_1 + \beta A_n x) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \beta \lim_{n\to\infty} A_n x_2 =$

$= \alpha A x_1 + \beta A x_2$

2) Դիտարկենք $\{\|A_n\|\} \subset \mathbb{R}$

$\big|\|A_n\| - \|A_m\|\big| \le$ օգտվելով $\big|\|a\| - \|b\|\big| \le \|a - b\|$

$\le \|A_n - A_m\| < \varepsilon \qquad m, n > n_0$

Ապացուցենք $\{\|A_n\|\}$ թվային հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է $\Rightarrow$ զուգամետ է

$$\Downarrow$$

սահմանափակ է

$$\exists C \quad \forall n \quad \|A_n\| \le C$$

$$\forall x \in X \qquad \|Ax\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|$$

սա ճիշտ է այս անհ=ությունից

$$\big|\|a\| - \|b\|\big| \le \|a - b\|$$

$$\|A_n x\| \le \underbrace{\|A_n\|}_{\le C} \cdot \|x\| \le C \cdot \|x\|$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \|A_n x\|}_{= \|Ax\|} \le C \cdot \|x\|$$

արդյունքում $\|Ax\| \le C \cdot \|x\| \Rightarrow$ սահմանափակ է

Դիտարկենք $\forall x \quad \|A_n x - A_m x\| \longrightarrow \|A_n x - Ax\|$

$$\Uparrow$$

նաև $\lim_{m\to\infty} (A_n x - A_m x) = A_n x - Ax$

ունենք $\|A_n x - A_m x\| \to \|A_n x - Ax\|$

ձախ կողմից $\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \cdot \|x\|$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|A_n x - Ax\| < \varepsilon \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$$

հավասարությունը երբ $x \neq 0$ ան=ուղղակի

2 մասերը բաժանենք $\|x\|$-ի վրա, կստանանք

$$\frac{\|A_n x - A x\|}{\|x\|} < \varepsilon \qquad \forall n > n_0$$

$$\frac{\|(A_n - A)x\|}{\|x\|} < \varepsilon$$

Հիշենք $\|A_n - A\| = \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|(A_n - A)x\|}{\|x\|}}_{\substack{\text{ըստ մեր ապացուցածի} \\ < \varepsilon \quad \forall n > n_0}}$

$$\Downarrow$$

$$\|A_n - A\| < \varepsilon \Rightarrow A_n \to A$$

վերջ թեորեմն ապացուցվեց

Դիցուք E և F ինչ-որ K դաշտի վրա որոշված գծային տարածություններ են և նորմավորված ունենք $A : E \to F$ գծային օպերատոր է։ $\forall n \in N$ համար դիտարկենք

$$E_n = \{x \in E : \|Ax\| \leq n \cdot \|x\|\}$$

նկատենք, որ $0 \in E_n$ (զրոյին), այսինքն $E_n \neq \emptyset$։ Ֆիքսենք՝ ինչքան n-ը մեծացնենք, այնքան E_n բազմությունը կմեծանա։ օրինակ՝ $x \in E_2$ ապա կլինի նաև $x \in E_3$ և ընդհանրապես եթե $x \in E_n$, ապա $x \in E_{n+1}$ (ամեն մի հաջորդը պարունակում է նախորդը)։

Թեորեմ: Եթե E-ն բանախյան տարածություն է և A-ն գծային օպերատոր է, ապա

1) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$
2) $\exists K$ E_K ամենուրեք խիտ է E-ում $\Leftrightarrow [E_K] = E$

Ապացույց:

1) Ցույց տալու համար, որ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ պետք է ցույց տանք որ $\forall$ կետ $\in E$ ընկած է E_n-երից որևէ մեկի մեջ:

Վերցնենք $\forall x \in E,\ x \neq 0$ և դիտարկենք

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \in R \Rightarrow \exists m > \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

կոնկրետ ինչ-որ թիվ

$$\|Ax\| \leq m \cdot \|x\|$$

$$\Downarrow$$

$$x \in E_m$$

Ապացուցենք, որ E-ի $\forall$ ոչ զրոյական վեկտոր ընկած է ինչ-որ E_m-ի մեջ: Իսկ $x=0$ ընկած է բոլոր E_m-երի մեջ:

2) E PS է $\Rightarrow$ Լրիվ է

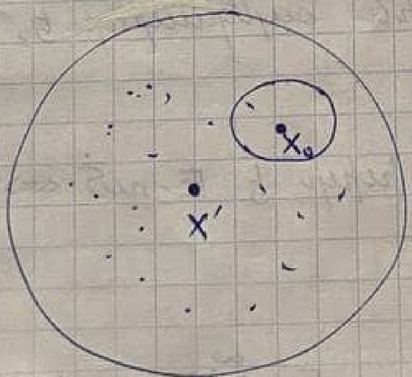
$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

Բերի թեորեմ

$\Longrightarrow \exists k_0$ E_{k_0} ամենուրեք նոսր չէ

$$\Downarrow$$

$\exists B(x', r) \subset E$ որ E_{k_0} խիտ է $B(x', r)$ գնդում



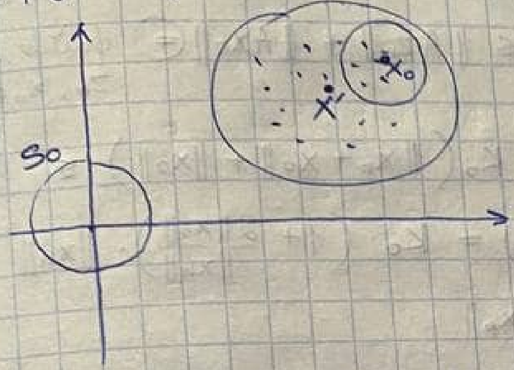
Իրականում կարող է $x' \notin E_{k_0}$ Համապատասխանաբար ցանկացած կարող ենք $B(x', r)$ գնդի մեջ վերցնենք նոր գունդ, որի կենտրոնն արդեն $\in E_{k_0}$

$$\exists x_0 \in \left(B(x', r) \cap E_{k_0}\right)$$

$$\exists r_0 \quad B[x_0, r_0] \subset B(x', r)$$

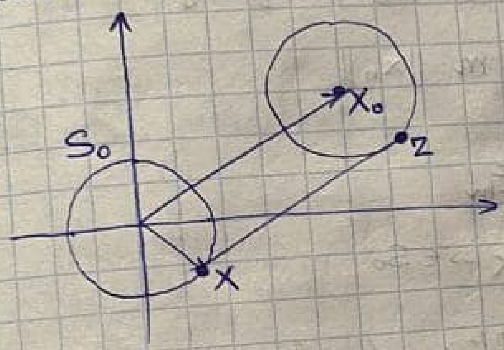
Քանի որ E_{k_0}-ն խիտ է $B(x', r)$-ում, ապա նաև խիտ է $B[x_0, r_0]$ գնդում

Վերցնենք $S_0 = S(0, r_0) = \{x, \ \|x\| = r_0\}$



Վերցնենք $\forall x \in S_0$ և դիտարկենք $z = x + x_0$

Նկատենք, որ



$$\|z - x_0\| = \|x + x_0 - x_0\| = \|x\| = r_0$$

$$\Downarrow$$

$z \in B[x_0, r_0]$

E_{k_0}-ն ամենուրեք խիտ է $B[x_0, r_0]$-ում $\Rightarrow \exists z_n \in E_{k_0}$, $z_n \to z$

Նշանակենք $x_n = z_n - x_0$ և ցույց տանք, որ $x_n \to x$

Իրոք, դիտարկենք

$$\|x_n - x\| = \|z_n - x_0 - x\| = \|z_n - \underbrace{(x_0 + x)}_{z}\| = \|z_n - z\| \to 0$$

այստեղից $\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x_n \to x$

$$\Downarrow$$

$$\|x_n\| \to \|x\| = r_0$$

$$\|x_n\| > \frac{r_0}{2}$$

Գնահատենք

$\|Ax_n\| = \|Az_n - Ax_0\| \le \|Az_n\| + \|Ax_0\| \overset{\leq}{} $ քանի որ $z_n, x_0 \in E_{k_0}$

$$\le K_0\|z_n\| + K_0\|x_0\| = K_0\left(\|x_n + x_0\| + \|x_0\|\right) \le$$

$$\le K_0\left(\|x_n\| + 2\|x_0\|\right) = K_0\left(1 + \frac{2\|x_0\|}{\|x_n\|}\right)\cdot\|x_n\| \le$$

$$\le \underbrace{K_0\left(1 + \frac{4\|x_0\|}{r_0}\right)}_{\text{ինչ-որ թիվ, որ մի բանից կախված չէ}}\cdot\|x_n\|$$

մեծ վերցնենք

$\exists\, m \in \mathbb{N}$ $\quad \|Ax_n\| \le m\cdot\|x_n\|$

$$\Downarrow$$

$$x_n \in E_m$$

$$x_n \to x \to \in S_0$$

Ապացուցենք, որ S_0 սֆերայի վրայի $\forall$ կետի կարող ենք $x_n \in E_m$ կետերի հաջ.-ով

Տեղեկանք: Ուրեմն E_m-ը ամենուրեք խիտ է S_0-ում:

Ցույց տանք, որ նույն E_m-ը ոչ միայն S_0-ում է խիտ, այլ նաև ամբողջ E-ում:

Վերցնենք $\forall\, y \in E,\ y \neq 0$ և դիտարկենք

$p = \frac{r_0}{\|y\|}\cdot y$ ակնհայտորեն $\|p\| = r_0$

$$\Downarrow$$

$$p \in S_0$$

(հիշենք E_m-ը ամենուրեք խիտ է S_0-ում) $\exists\, p_n \in E_m \quad p_n \to p$

Դիտարկենք $y_n = \frac{\|y\|}{r_0} \cdot p_n$

գնահատենք

$$\|y - y_n\| = \left\| \frac{\|y\| p}{r_0} - \frac{\|y\|}{r_0} \cdot p_n \right\| = \frac{\|y\|}{r_0} \cdot \|p - \overset{\nearrow 0}{p_n}\| \to 0$$

արդյունքում $\|y - y_n\| \to 0 \Rightarrow y_n \to y$

Բայց մյուս կողմից՝

$$\|A \cdot y_n\| = \left\| A \cdot \left(\frac{\|y\|}{r_0} \cdot p_n \right) \right\| = \frac{\|y\|}{r_0} \cdot \|A p_n\| \circledequal$$ քանի որ $p_n \in E_m$

$$\circledequal \frac{\|y\|}{r_0} \cdot m \cdot \|p_n\| = m \cdot \|y_n\|$$

Արդյունքում $\|A \cdot y_n\| \le m \cdot \|y_n\|$

$$\Downarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} y_n \in E_m \\ y_n \to \underset{\in E}{y} \end{array} \right| \Rightarrow E_m\text{-ը խիտ է } E\text{-ում}$$

է S_0-ում:

ում է

Բանախի թեորեմ: Դիցուք X և Y FS են և վերցնենք $A \in L(X,Y)$ և ենթադրենք՝ A-ն փոխմիարժեք է: Այդ դեպքում $\exists A^{-1} : Y \to X$, որը նույնպես ԳՍՕ է:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք գծայնությունը՝ վերցնենք $\forall y_1, y_2 \in Y$ և $\forall \alpha, \beta$ և ցույց տանք, որ

$$A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2$$

Նշանակենք՝ $x_1 = A^{-1} y_1 \Rightarrow A x_1 = y_1$

$x_2 = A^{-1} y_2 \Rightarrow A x_2 = y_2$

Քանի որ A-ն գծային է $\Rightarrow A(\alpha x_1 + \beta x_2) =$

$= \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$

$\Rightarrow A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2$

Գծայնությունը ապացուցվեց: Հիմա ցույց տանք, որ հակադարձը սահմանափակ օպերատոր է:

Նշանակենք $Y_n = \{ y \in Y : \|A^{-1} y\| \le n \cdot \|y\| \}$

Համաձայն նախորդ թեորեմի՝

FS5

1) $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$

2) $\exists m$ Y_m-ը ամենուրեք խիտ է Y-ում

Վերցնենք $\forall y \in Y,\ y \neq 0$: Նշանակենք $\|y\| = \ell \neq 0$

Ունենք Y_m ամենուրեք խիտ է $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\exists y_1 \in Y_m \quad \|y - y_1\| < \frac{\ell}{2}$

գնահատենք

$$\|y_1\| = \|y_1 - y + y\| \leq \|y_1 - y\| + \|y\| < \frac{\ell}{2} + \ell = \frac{3}{2}\ell$$

2) Դիտարկենք $(y - y_1) \in Y$, Y_m ամենուրեք խիտ է $\Rightarrow \exists y_2 \in Y_m \quad \|(y - y_1) - y_2\| < \frac{\ell}{2^2}$

$$\|y_2\| = \|y_2 - (y - y_1) + (y - y_1)\| \leq \|y_2 - (y - y_1)\| + \|y - y_1\| \leq \frac{\ell}{2^2} + \frac{\ell}{2} = \frac{3}{2^2}\ell$$

Ինդուկցիայի քայլ: Ենթադրենք արդեն կառուցել ենք $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ վեկտորները հետևյալ պայմանով՝

$$\left\|y - \sum_{k=1}^{n-1} y_k\right\| < \frac{\ell}{2^{n-1}} \qquad \left(y - \sum_{k=1}^{n-1} y_k\right) \in Y,\ Y_m \text{ ամենուրեք խիտ է} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists y_n \in Y_m \quad \left\|\left(y - \sum_{k=1}^{n-1} y_k\right) - y_n\right\| < \frac{\ell}{2^n}$$

գնահատենք

$$\|y_n\| = \left\|y_n - \left(y - \sum_{k=1}^{n-1} y_k\right) + \left(y - \sum_{k=1}^{n-1} y_k\right)\right\| \leq \frac{\ell}{2^n} + \frac{\ell}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n}\ell$$

դաս 23

Շարունակելով արդյունքը՝ կունենանք՝

$\{y_n\} \subset Y_m$ $\qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \leq \frac{\ell}{2^n}$

ստանում

$\|y_n\| \leq \frac{3}{2^n}\ell$

Դիտարկենք $\qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$

Նշանակենք 1) $x_n = A^{-1} y_n$

2) $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Ուզում ենք ցույց տալ, որ S_n զուգամետ է:

Քանի որ X ԲՏ է բավական է ցույց տալ,

որ S_n ֆունդամենտալ է:

Ցույց տանք, որ S_n-ը ֆունդամենտալ է

Գնահատենք

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}\| \leq$$

$$\leq \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \dots + \|x_{n+p}\| \leq$$

Հիշենք: $\{y_n\} \in Y_m \Rightarrow \|\underbrace{A^{-1}y_n}_{x_n}\| \leq m \underbrace{\|y_n\|}_{\leq \frac{3\ell}{2^n}} \leq \frac{m \cdot 3\ell}{2^n}$

$\Downarrow$

$$\|x_n\| \leq \frac{m \cdot 3\ell}{2^n}$$

$$\le m \cdot \frac{3\varepsilon}{2^{n+1}} + m \cdot \frac{3\varepsilon}{2^{n+2}} + \ldots\ldots + m \cdot \frac{3\varepsilon}{2^{n+p}} =$$

$$= \frac{3m\varepsilon}{2^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{p+1}}\right) <$$

$$< \frac{3m\varepsilon}{2^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p+1}} + \ldots\right) = \frac{3m\varepsilon}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3m\varepsilon}{2^{n}}$$

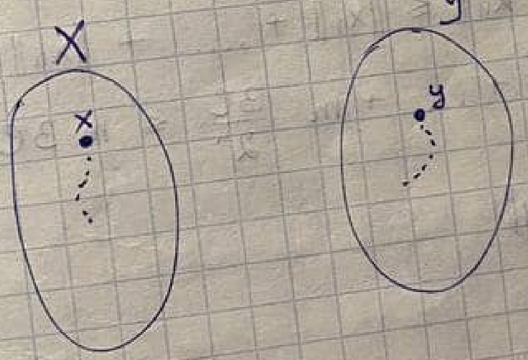
անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա

բավական է n-ը մեծ լինի, կստանանք

$$\|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

S_n ֆունդամենտալ է
X ԲՏ է
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = x$



y-ին ձգտեցնում ենք
ճանապարհի զանազաններով
այդ կետերի հաջորդական-
կետերը նայենք, պարզվում
է ձգտում → x
Պետք է ցույց տանք, որ
այդ կետերից y-ի նախա-
պատկերներն է x-ը

Ցույց տանք, որ $A^{-1}y = x$

Դիտարկենք

$$Ax = A\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) = \lim_{n\to\infty} (AS_n) = \lim_{n\to\infty} \left(A(x_1 + \ldots + x_n)\right) =$$

$Ax_1 = y_1$

$Ax_n = y_n$

A-ն անընդհատ օպերատոր է
⇓
սահմանի պատկերը հավասար է
իր պատկերների սահմանին

$$\circledequal \lim_{n\to\infty}(y_1+y_2+\dots+y_n) = y$$

Այսպիսով ստացանք $Ax = y$ այն որ նույնն է $A^{-1}y = x$

Մեր նպատակն է ցույց տալ, որ հակադարձ օպերատորը սահմանափակ է: Իսկ դա նշանակում է, որ դրա նորմը կարելի է գնահատել y-ով:

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| = \|\lim_{n\to\infty} S_n\| = \lim_{n\to\infty}\|S_n\| \circledleq$$

$$\|S_n\| = \|x_1 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_n\| \leq$$

$$\leq m\cdot\frac{3\ell}{2} + m\cdot\frac{3\ell}{2^2} + \dots + m\cdot\frac{3\ell}{2^n} \leq m\cdot 3\ell$$

$$\circledleq 3m\underbrace{\ell}_{\|y\|} = 3m\cdot\|y\|$$

ստացանք $\|A^{-1}y\| \leq 3m\cdot\|y\|$

$$\Downarrow$$

A^{-1} սահմանափակ օպերատոր է

$$\Downarrow$$

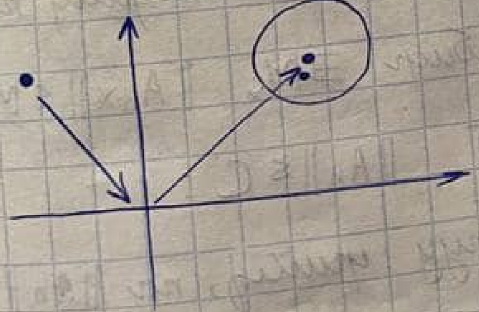
$$A^{-1} \in L(X,Y)$$

Ուշադիր: Չենք կարող ասել որ f ֆունկցիան անընդհատ է, ապա բաց բազմության պատկերը բաց է: Օրինակ՝
- $f(x)=x^2$ R-ում կամ $(-1;1)$-ում
- $f(x)=\sin x$ բացի պատկերը $[-1;1]$ որը փակ է

Հավասարաչափ սահմանափակության սկզբունք

Թեորեմ: Դիցուք X և Y ԳՆՏ են և ենթադրենք ունենք $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ ← գծային սահմանափակ օպերատորների հաջորդականություն
ենթադրենք նաև, որ $\exists B_0 = B(x_0, r_0)$ և $\exists M \in R$ այնպիսին, որ $\forall x \in B_0$, $\forall n \in N$ դեպքում $\|A_n x\| \le M$: Այդ դեպքում $\exists C$, որ $\forall n$ $\|A_n\| \le C$:

Ապացույց: Վերցնենք $\forall x \in X$, $x \neq 0$
դիտարկենք $y = \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} \cdot x + x_0$
ակնհայտորեն



$$\|y - x_0\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} \cdot x \right\| = \frac{r_0}{2} < r_0$$

$$\Downarrow$$

$y \in B_0$ ⇐ ըստ թեորեմի պայմանի $\forall n$ համար

$\|A_n y\| \le M$

$$\left\| A_n\left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} x + x_0 \right) \right\| \le M \qquad \forall n \text{ համար}$$

Գնահատենք

$$\left\| A_n\left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} \cdot x \right) \right\| \le \underbrace{\left\| A_n\left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} \cdot x + x_0 \right) \right\|}_{\le M} + \underbrace{\| A_n x_0 \|}_{\le M} \le 2M$$

ճիշտ ∀ կետում $\le M$ ճանաչվածքային կետերում

ստացանք $\left\| A_n\left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} \cdot x \right) \right\| \le 2M$

ձախ կողմից $= \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} \cdot \| A_n x \|$

$$\| A_n x \| \le \frac{4M}{r_0} \cdot \|x\|$$

անցնելով inf$\{C\}$

$$\| A_n \| \le \frac{4M}{r_0}$$

Բանախ–Շտեյնհաուսի թեորեմ:

Դիցուք X ԲՏ է, Y ԳՆՏ է և ունենք $\{A_n\} \subset L(X,Y)$

Եթե $\forall x \in X$ համար $\{A_n x\}$ սահմանափակ հաջ. է, այսինքն՝ ամեն մի x համար $\exists M_x$ $\|A_n x\| \le M_x$, ապա $\exists C$ $\forall n$ [illegible] $\|A_n\| \le C$:

Ապացույց: Դրականը ցույց տանք, որ $\|A_n\|$ սահմանափակ է, բավական է ցույց տալ, որ որևէ մի գունդ կա, որի կետերը սահմանափակ է:

$$\left\| A_n \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} x + x_0 \right) \right\| \le M \quad \forall n \text{ համար}$$

Գնահատենք

$$\left\| A_n \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} x \right) \right\| \le \underbrace{\left\| A_n \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{r_0}{2} x + x_0 \right) \right\|}_{\le M} + \underbrace{\| A_n x_0 \|}_{\substack{\text{ցույց } \forall \\ \text{կետում} \le M \\ \text{ճանաչված} \\ \text{կետերում}}} \le$$

այսպես

ցույց կ

Դիտարկենք

$$\|A_n x\| \le \underbrace{\|A_n\|}_{\le C} \cdot \|x\| \le C \cdot \|x\| \le$$

$$\le C \cdot \|x - x_0 + x_0\| \le C\big(\underbrace{\|x - x_0\|}_{x \in B \Rightarrow \|x - x_0\| < r} + \|x_0\|\big)$$

$$\le C \cdot (r + \|x_0\|)$$

Ստացանք $\|A_n x\| \le \underbrace{C \cdot (r + \|x\|)}_{\text{ֆիքսված թիվ}}$

Բանախ-Շտեյնհաուսի թեորեմ:

Դիցուք X ԲՏ է, Y ԳՆՏ է և ունենք $\{A_n\} \subset L(X,Y)$: Եթե $\forall x \in X$ համար $\{A_n x\}$ սահմանափակ հաջ. այսինքն` ամեն մի x համար $\exists M_x$ $\|A_n x\| \le M_x$, ապա $\exists C$ $\forall n$ դեպքում $\|A_n\| \le C$:

Ապացույց: Որպեսզի ցույց տանք, որ $\|A_n\|$ սահմանափակ է, բավական է ցույց տալ, որ որևէ մի գունդ կա, որի պատկերը սահմանափակ է:

Անենք հակառակ ենթադրության միջոցով:
Ենթադրենք $\|A_n\|$ սահմանափակ չէ: Օգտվելով
նախորդ թեորեմից՝ կնշանակի, որ բաց գնդում
էլ վերցնենք $A_n x$-երը սահմանափակ չեն
($\forall B(x_0, r_0)$ շնորհիվ $A_n x$ սահմ. չեն)
Դա կնշանակի՝

$\forall B(x_0, r_0) \quad \forall M \quad \exists x' \in B(x_0, r_0)$ և $\exists n'$, որ

$$\|A_{n'} x'\| > M$$

Վերցնենք $M = 1$ համար $\exists x_1 \ \exists n_1$, որ $\|A_{n_1} x_1\| > 1$

A_{n_1} անընդհատ օպերատոր է $\Rightarrow$ նշանի պահպանման թեորեմ

$\exists r_1 \quad \forall x \in B[x_1, r_1] \quad \|A_{n_1} x\| > 1$

այս մասի արժեքները >1

անընդհատության շնորհիվ կարող ենք փոքրացնել

$$r_1 < \frac{1}{2}$$

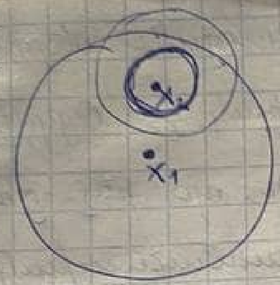
Վերցնենք $M = 2$ և դիտարկենք $B[x_1, r_1]$
համանման մեր ենթադրության $\exists x_2 \in B[x_1, r_1] \ \exists n_2$

$$\|A_{n_2} x_2\| > 2$$

անընդհատության շնորհիվ $r_2 < \frac{1}{2^2}$

$$\|A_{n_2} x\| > 2$$

$$\forall x \in B[x_2, r_2]$$



r_2-ը վերցնենք այնքան փոքր, որ $B[x_2, r_2] \subset B[x_1, r_1]$

Դրույթը այսպես շարունակելով, կստանանք
$B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \dots\dots \supset B[x_{k-1}, r_{k-1}]$
$A_{n_1}, A_{n_2}, \dots\dots, A_{n_{k-1}}$ որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին $\|A_n x\| > i$ երբ $x \in B[x_i, r_i]$

վերցնենք $M = k$ և դիտարկենք $B[x_{k-1}, r_{k-1}]$
համաձայն մեր ենթադրության $\exists x_k \in B[x_{k-1}, r_{k-1}]$
$\exists n_k$ որ $\|A_{n_k} x_k\| > k \Rightarrow \exists r_k < \frac{1}{2^k}$ $\forall x \in B[x_k, r_k]$
$\|A_{n_k} x\| > k$

և ավելին՝ r_k վերցնենք այնպես, որ
$B[x_k, r_k] \subset B[x_{k-1}, r_{k-1}]$
Ընթացքը շարունակելով՝ արդյունքում կստանանք ներդրված գնդերի հաջ.
$B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset \dots\dots \supset \dots\dots$ $r_n \to 0$
և $\exists A_{n_k}$ այնպես, որ $\|A_{n_k} x\| > k$:
համաձայն ներդրված գնդերի թեորեմի

$\exists x_0 \in B[x_k, r_k]$ $\forall k$ համար

$\Downarrow$

$\|A_{n_k} x_0\| > k \Rightarrow \{A_n x_0\}$ սահմանափակ չէ, որը էլ հակասում է թեորեմի պայմանին

$\Downarrow$

դրանով էլ ցույց տվինք որ $\|A_n\|$ սահմանափակ է

$\Downarrow$

նախորդ թեորեմի համաձայն

$\|A_n\|$ սահմանափակ է

դաս 24

Հետևանք-թեորեմ: Դիցուք X ԲՏ է, Y ԳՆՏ է. ունենք $\{A_n\} \subset L(X, Y)$: Եթե $\forall x \in X$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$, ապա $\exists C$, որ $\forall n$ դեպքում $\|A_n\| \leq C$

Y պատկանող վեկտորներ.

Ապացույց: Ունենք $\forall x$ համար $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y$

Այդ դեպքում $\|A_n x\| \longrightarrow \|y\|$

թվային հաջորդականություն, որը զուգամետ է $\Rightarrow$ սահմանափակ է

$\Downarrow$

հանգեցինք նախորդ թեորեմին

$\Downarrow$ Բանախ-Շտեյնհաուս

$\exists C$ $\forall n$ $\|A_n\| \leq C$

Հիշեցում: Ունենք ֆունկցիաների $f_n(x)$ հաջ.: Եթե ամեն մի ֆիքսած x-ի համար ունենք $f_n(x) \to f(x)$, ապա ասում ենք $f_n(x)$-երը կետորեն զուգամիտում են $f(x)$-ին:

Օրինակ՝ $f_n(x) = x^n$ զուգամետ է, երբ $x \in (-1,1]$

սահմանային ֆունկցիան $f(x) = \begin{cases} 0; & x \in (-1,1) \\ 1; & x = 1 \end{cases}$

Եթե $f_n(x)$ անընդհատ են և $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, ապա $f(x)$ կլինի անընդհատ: (Սրանից կետային զուգամիտությունը չի պահպանում սահմանային ֆունկցիայի զուգամետ լինելը):

Թեորեմ: Դիցուք X ԲՏ է, Y ԳՆՏ է և ունենք $\{A_n\} \subset L(X,Y)$: Հայտնի է, որ $\forall x \in X$ համար $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y$: Եթե սահմանենք նոր օպերատոր $Ax = y$, ապա $A \in L(X,Y)$: (Այլ կերպ ասած եթե A_n օպերատորները կետային իմաստով ձգտում են A օպերատորին, ապա այդ սահմանային օպերատորը կլինի ① գծային ② անընդհատ)

Ապացույց: Նախ ցույց տանք գծայնությունը:

Վերցնենք $\forall x_1, x_2 \in X$ և $\alpha, \beta \in K$ և

գրառենք՝

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x_1 + \beta x_2) \overset{A_n \text{ գծային է}}{=} \lim_{n\to\infty}(\alpha A_n x_1 + \beta A_n x_2) =$$

$$= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = \alpha A x_1 + \beta A x_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A օպերատորը գծային է

Ստուգենք արդեն A օպերատորի սահմանափակությունը.

Ունենք $\forall x \in X$ համար $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x \Longrightarrow$

Բանախ-Շտեյնհաուսի թեորեմի համաձայն

$\exists C \quad \|A_n\| \le C \quad \forall n$ համար $\Rightarrow \forall n$ համար և

$\forall x$ համար $\quad \|A_n x\| \le \|A_n\| \cdot \|x\| \le C \cdot \|x\|$

Դիտարկենք՝

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A_n x\right\| \overset{\text{նորմը անընդհատ է}}{=} \lim_{n\to\infty}\|A_n x\| \le C \cdot \|x\|$$

դրանցից յուրաքանչյուրը $\le C \cdot \|x\|$

$\Rightarrow$ նրանց սահմանը ևս $\le C \cdot \|x\|$

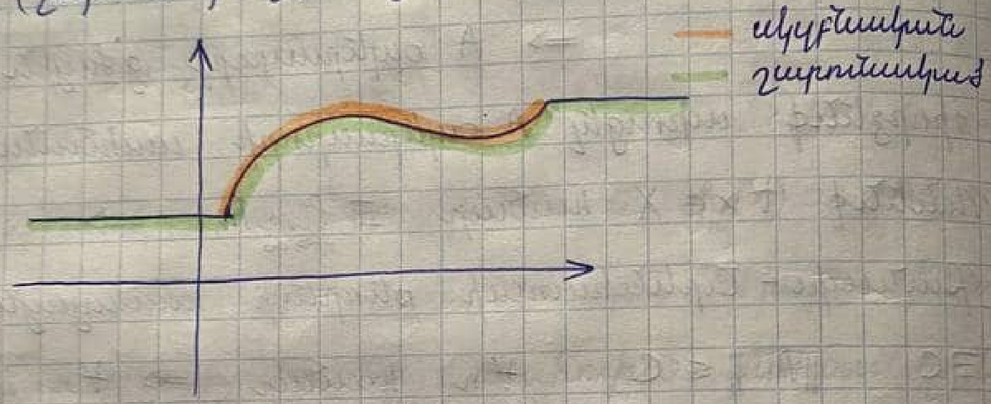
Այսինքն $\forall x$ համար $\|Ax\| \le C \cdot \|x\| \Rightarrow$

A օպերատորը սահմանափակ է

Ունենք ինչ-որ f ֆունկցիա: Ինչ է նշանակում ֆունկցիան շարունակել:

① Որոշման տիրույթը մեծացնել,

② ընդլայնման որոշման տիրույթում ֆունկցիան (շարունակածը) նույնն է:



Հարց: Արդյո՞ք կարելի է միշտ ֆունկցիան շարունակել՝ այն անընդհատ պահելով: Ոչ:

Օրինակ՝ $f(x)=\frac{1}{x}$ 0 կետում ոչ էլ շարունակելիս անընդհատ չի դառնա

Թեորեմ: Դիցուք X ԳՆՏ է, Y ԲՏ է և ենթադրենք E-ն X-ի ենթատարածությունն է, որը ամենուրեք խիտ է X-ում՝ $[E]=X$ և ենթադրենք ունենք $A_0 : E \to Y$, որը ԳՍՕ է: Այդ դեպքում A_0 օպերատորը կարելի է շարունակել ամբողջ X-ի վրա՝ պահպանելով նորմը: Այսինքն՝

1) $\exists\ A \in L(X, Y)$ որ $\forall x \in E \quad Ax = A_0 x$

(Aն A_0-ի շարունակությունն)

2) $\|A\| = \|A_0\|$

Ապացույց: Վերցնենք $\forall x \in X$: Քանի որ $[E] = X \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, x_n \in E$ որ $x_n \to x$:

Դիտարկենք $\{A_0 x_n\} \in Y$: Նախ ցույց տանք, որ $A_0 x_n$ հաջ. ֆունդամենտալ է: $x_n \to x \Rightarrow$
x_n ֆունդամենտալ հաջ. է $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\quad n, m > n_0$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Գնահատենք՝

$$\|A_0 x_n - A_0 x_m\| = \|\underset{\downarrow\ \text{E-ի վրա սահմ. օպ.}}{A_0}(\overbrace{x_n - x_m}^{\in E})\| \le \|A_0\| \cdot \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{<\varepsilon\quad m,n>n_0} \le \underset{\text{ֆիքսած թիվ է}}{\|A_0\|} \cdot \varepsilon$$

Այսպիսով $\{A_0 x_n\}$ ֆունդամենտալ հաջ. է, Y ԲՏ է $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_0 x_n = y$

Ցույց տանք, որ y վեկտորը x_n-երի ընտրությունից կախված չէ (կախված է միայն x-ից): Ենթադրենք ունենք $z_n \in E \quad z_n \to x$ ցույց տանք, որ $A_0 z_n \to y$

Դա կնշանակի, որ y վեկտորը կախված է միայն x-ից:

Ցուցաբերենք

$$\|A_0 z_n - y\| \le \|A_0 z_n - A_0 x_n\| + \|A_0 x_n - y\| =$$
$$= \|A_0(z_n - x_n)\| + \|A_0 x_n - y\| \le \|A_0\|\,\|z_n - x_n\| + \|A_0 x_n - y\| \le$$
$$\le \|A_0\| \cdot \Big(\underbrace{\|z_n - x\|}_{0} + \underbrace{\|x - x_n\|}_{0}\Big) + \underbrace{\|A_0 x_n - y\|}_{0} \to 0$$

Այսպիսով $\|A_0 z_n - y\| \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_0 z_n = y$

այսինքն՝ y-ը կախված է միայն x-ից

Սահմանենք նոր օպերատորը՝

$$Ax = y = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n$$

Այժմ ցույց տանք, որ նոր օպերատորը իրոք A_0-ի շարունակությունն է, այսինքն՝ E բազմության վրա նույնն են: Ինչը ակնհայտ է

ցույց տանք, որ այն գծային է, սահմանափակ և $\|A\| = \|A_0\|$

Եթե $x \in E$, ապա որպես x կետին զուգամետ հաջ. վերցնենք հաստատուն հաջ. $x_n = x$

Կիրառելով $x_n \to x$ և ըստ սահմանման

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n = \lim_{n\to\infty} A_0 x = A_0 x$$

Ապացուցեցինք, որ իրոք A-ն A_0-ի շարունակությունն է

Ցույց տանք, որ A օպերատորը գծային է:

Վերցնենք $\forall x, y \in X \quad \forall \alpha, \beta \in K$ և գրառենք

$A(\alpha x + \beta y) \circeq$

Քանի $[E] = K \Rightarrow \exists\, x_n, y_n \in E \quad x_n \to x, \; y_n \to y$

$$\circeq \lim_{n\to\infty} A_0(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n\to\infty}(\alpha A_0 x_n + \beta A y_n) =$$

$$= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} A_0 x_n + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} A_0 y_n = \alpha \cdot Ax + \beta A y$$

$\Downarrow$

A-ն գծային օպերատոր է

Հիմա փորձենք ցույց տալ սահմանափակությունը

Վերցնենք $\forall x \in X$ և գնահատենք

$$\|Ax\| = \|\lim_{n\to\infty} A_0 x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|A_0 x_n\| \circeq$$

$$\|A_0 x_n\| \le \|A_0\| \cdot \|x_n\| \longrightarrow \|A_0\| \cdot \|x\|$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \le b_n \\ a_n \to d \\ b_n \to c \end{array}\right| \Rightarrow d \le c$$

$\le \|A_0\| \cdot \|x\|$.

Արդյունքում $\|Ax\| \le \underbrace{\|A_0\|}_{\text{ինչ-որ c թիվ կախված չէ x-ից}} \cdot \|x\| \Rightarrow$ A-ն սահմանափակ է

Հիմա ցույց տանք, որ պահանջվում է նորմ

$\|A\|=\|A_0\|$

Ունենք $\|Ax\| \le \|A_0\|\cdot\|x\|$

$$\Downarrow$$

$$\|A\| \le \|A_0\|$$

և $\|A_0\|$ այդ արժեքը inf է

Ցույց տանք, որ $\|A_0\| \le \|A\|$ $\forall$ պարագայում

$$\|A_0\| = \sup_{\substack{\|x\|\le 1 \\ x\in E}} \|A_0 x\| = \sup_{\substack{\|x\|\le 1 \\ x\in E}} \|Ax\| \le \sup_{\substack{\|x\|\le 1 \\ x\in X}} \|Ax\| = \|A\|$$

$$\left.\begin{aligned} &\|A_0\| \le \|A\| \\ &\|A\| \le \|A_0\| \end{aligned}\right| \Rightarrow \|A\| = \|A_0\|$$

Մյուս կողմից $\|A\| \le \|A_0\|$

Թեորեմն ապացուցվեց

Սահմանում: Դիցուք ունենք X բազմություն և $x\alpha y$ բինար հարաբերություն, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին

ընդունված է նշանակել $\le$

1) $x\alpha x$ ռեֆլեքսիվ

2) եթե $x\alpha y$ և $y\alpha x$, ապա $x=y$ անտիսիմետրիկ

3) $x\alpha y$ և $y\alpha z \Rightarrow x\alpha z$

Կասենք, որ α-ն կարգի հարաբերություն է, իսկ X-ը՝ մասնակի կարգավորված բազմություն:

դաս 25

Մասնակի կարգավորված բազմության օրինակ՝

$X = \mathbb{R}$ $\quad \angle - \leq$ նաև լրիվ կարգավորված

Կարգի հարաբերության համար ընդունված է օգտագործել հետևյալ սիմվոլը $\leq$

Ուրիշ օրինակ: Դիտարկենք X որևէ բազմ. է:

Դիտարկենք X-ի ենթաբազմ. բազմությունը՝ 2^X:

$\forall A, B \in 2^X$ կասենք, որ $A \leq B$ եթե $A \subset B$:

Այս ձևով սահմանված հարաբերության

նկատմամբ 2^X մասնակի կարգավորված բազմ. է:

Օրինակ՝ Դիտարկենք $m, n \in \mathbb{N}$, կասենք $m \leq n$ եթե $n \vdots m$

Ակնհայտորեն բավարարված են 3 պայմանները՝

1) $\checkmark$

2) $m \leq n \quad n \leq m \Rightarrow n = m$

3) $m \leq n \quad n \leq k \Rightarrow m \leq k$

$\mathbb{N}$ բազմությունը այս հարաբերությամբ մասնակի

կարգավորված բազմ. է: Մասնակի, այլ ոչ լրիվ

որովհետև օրինակ $\quad$ 5 և 7 համեմատելի չեն:

Սահմանում: Դիցուք X որևէ մասնակի կարգավորված բազմություն է: $a \in X$ կանվանենք **մաքսիմալ տարր**, եթե $\forall x \in X \quad a \preccurlyeq x \Rightarrow x = a$.

Այլ կերպ ասած մեր բազմության մեջ չկա էլեմենտ, որ համեմատելի է a-ի հետ և մեծ է նրանից: Նկատենք, որ բազմությունը կարող է ունենալ մի քանի մաքսիմալ տարր:

Վերցնենք $X = \{1, 2, \dots, 20\} \quad m \preccurlyeq n \Rightarrow n \vdots m$

մաքսիմալ էլեմենտներ $\{11, 12, \dots, 20\}$

Սահմանում: Ունենք X մասնակի կարգավորված բազմություն է, $Y \subset X$: Y կանվանենք **շղթա**, եթե $\forall x, y \in Y \quad x \preccurlyeq y$ կամ $y \preccurlyeq x$

Օրինակ՝ $\{1, 2, 4, 8, 16\}$

$X = \{1, 2, \dots, 20\} \quad \{1, 3, 6, 12\}$

$\{1, 3, 6, 18\}$.

Սահմանում: Դիցուք X մասնակի կարգավորված բազմություն է, $Y \subset X$: x_0-ն կանվանենք Y-ի **վերին եզր**, եթե $\forall y \in Y \quad y \preccurlyeq x_0$:

պարտադիր չի Y-ից լինի

Ցորնի լեմմա: Դիցուք X ՄԿԲ է: Եթե X-ում ընկած ∀ շղթա ունի վերին եզր, ապա X-ում ∃ մաքսիմալ տարր:

Ընտրության աքսիոմ: Եթե A-ն ինչ-որ բազմությունների բազմություն է և $\forall a \in A$ համար ունենք X_a, ապա $\exists f$ ֆունկցիա, որը A-ի վրա որոշված է այնպիսին, որ $f(a) \in X_a$: (Եթե ունենք բազմություններ, ապա ամեն մեկից ինչ-որ մի հատ ներկայացուցիչ կարող ենք վերցնել:)

Ցորնի լեմման համարժեք է ընտրության աքսիոմին (որը որպես աքսիոմ ընդունենք, ծյուր ցրա օգնությամբ կառուցվել):

Ծյուր ցրա օգնությամբ կառուցվել ...

Սահմանում 1: Դիցուք X-ը որևէ ԳՏ է R-ի վրա: p-ն անվանում ենք $p: X \to R$ ֆունկցիոնալ է: p-ն անվանում ենք $p(x+y) \le p(x)+p(y)$

կիսաադիտիվ, եթե $\forall x, y \in X$ ... Բնականաբար ∀ ադիտիվ ֆունկցիոնալ նաև կիսաադիտիվ է:

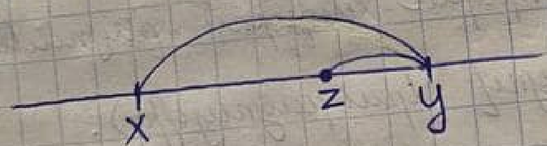
Սահմանում 2: $p: X \to \mathbb{R}$ անվանում ենք **դրական համասեռ**, եթե $\forall \alpha \geq 0$ $p(\alpha x) = \alpha \cdot p(x)$

Սահմանում 3: $p: X \to \mathbb{R}$ կոչվում է **ուռուցիկ** ֆունկցիոնալ, եթե $\forall x, y \in X$ և $\forall \alpha \in [0,1]$

$$p(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha \cdot p(x) + (1-\alpha) \cdot p(y)$$

Դժվար չէ նկատել, որ եթե ֆունկցիոնալը կիսաադիտիվ է և դրական համասեռ, ապա նաև ուռուցիկ է:

Երկրաչափական իմաստը



$\forall z = \alpha x + (1-\alpha) y$ $\quad \alpha \in [0,1]$

ընդ որում $\alpha = 0$ $z = y$
$\alpha = 1$ $z = x$

նշանակենք $\dfrac{y-z}{y-x} = \alpha$

$$y - z = \alpha y - \alpha x$$

$$z = \alpha x + (1-\alpha) \cdot y$$

Հան-Բանախի թեորեմ: Դիցուք X-ը R-ի վրա ԳՏ է: $p: X \to R$ կիսագծային և դրական համասեռ ֆունկցիոնալ է, $L_0 \subset X$ ենթաբազմություն է և ունենք φ գծային ֆունկցիոնալ՝ որոշված L_0-ի վրա $\varphi: L_0 \to R$ այնպիսին, որ $\forall x \in L_0$ համար $\varphi(x) \leq p(x)$: Այդ դեպքում $\exists f: X \to R$ գծային ֆունկցիոնալ, որ

1) հանդիսանում է φ-ի շարունակությունը,
2) $\forall x \in X$ համար $f(x) \leq p(x)$:

Հիշեցում: f-ը φ-ի շարունակությունն է նշանակում է $\forall x \in L_0$ համար $f(x) = \varphi(x)$:

Ապացույց: Վերցնենք $x_0 \notin L_0$: Նշանակենք

$$L_1 = (x_0, L_0) = \{ \alpha x_0 + y \ : \ y \in L_0, \alpha \in R \}$$

գծային թաղանթը

Առաջին քայլը հետևյալն է՝ ցույց տալ, որ L_0-ի վրա ֆունկցիոնալն ունենալով՝ կարելի է մի քիչ շարունակել L_1-ի վրա, այնուհետև մեծ բազմության վրա:

Ենթադրենք, որ եթե $z \in L_1$, այսինքն՝ $z = \alpha x_0 + y$ ներկայացումը միակն է: Իրոք, ենթադրենք հակառակը՝ մի z վեկտոր կա, որ ունի 2 ներկայացում՝ $z = \alpha x_0 + y$

$$z = \alpha_1 x_0 + y_1$$

$$\alpha x_0 + y = \alpha_1 x_0 + y_1$$

$$(\alpha - \alpha_1) x_0 = y_1 - y$$

Եթե հավասար է $\alpha = \alpha_1 \Rightarrow y_1 = y$ բայց ենթադրել էինք, որ 2 տարբեր ներկայացում ունի

$$\Downarrow$$

$$\alpha \neq \alpha_1$$

Եթե $\alpha \neq \alpha_1$ $\quad x_0 = \underbrace{\dfrac{\overbrace{y_1 - y}^{\in L_0}}{\alpha - \alpha_1}}_{\text{թիվ է}} \in L_0$

բայց ունենք $x_0 \notin L_0$: Ստացանք հակասություն, այսինքն՝ L_1-ի $\forall$ վեկտոր ունի միակ ներկայացում $(\alpha x_0 + y)$:

Նկատենք, որ եթե վերցնենք $\forall\, y_1, y_2 \in L_0$ և դիտարկենք՝

$$\varphi(y_1) - \varphi(y_2) \overset{\varphi\text{-ն գծ է}}{=} \varphi(y_1 - y_2) \leq p(y_1 - y_2) =$$

$$= p(y_1 + x_0 - y_2 - x_0) \overset{\text{կիսաադիտիվ}}{\leq} p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0)$$

Անհավասարությունից կստանանք`

$$\varphi(y_1) - p(y_1 + x_0) \le \varphi(y_2) + p(-y_2 - x_0) \quad \forall y_1, y_2 \in L_0$$

$$\sup_{y \in L_0} \{\varphi(y) - p(y + x_0)\} \le \inf_{y \in L_0} \{\varphi(y) + p(-y - x_0)\}$$

$$\Downarrow$$

$\exists C$, որ $\sup\limits_{y \in L_0} \{\varphi(y) - p(y + x_0)\} \le C \le \inf\limits_{y \in L_0} \{\varphi(y) + p(-y - x_0)\}$

Սահմանենք f ֆունկցիոնալ L_1-ի վրա, որ լինի շարունակություն ու գծային ֆունկցիոնալ: Դրա համար բավարար է, որ վերջինս ունենա

$$f(\alpha x_0 + y) \underset{\text{գծային}}{=} \alpha f(x_0) + f(y) \underset{\text{շարունակություն}}{=} \alpha \cdot f(x_0) + \varphi(y)$$

Այլ կերպ ասած f ֆունկցիոնալը սահմանելու համար բավական է ունենալ x_0 կետում ֆունկցիոնալի արժեքը: Ընդունենք $f(x_0) = -C$ (→ վերևի նույն)

Այլ կերպ ասած, եթե $z \in L_1$ $z = \alpha x_0 + y$

ապա $f(z) = f(\alpha x_0 + y) = \varphi(y) - C \cdot \alpha$:

Այսպիսով սահմանեցինք $f(z) = \varphi(y) - C \cdot \alpha$ որ f-ը գծային է.

Մնում է ցույց տանք, որ $f(x) \le p(x)$ L_1-ի վրա:

φ-ի շարունակությունն է և

Ապացուցենք գծայնությունը: Վերցնենք $z_1, z_2 \in L$

$$z_1 = \alpha_1 x_0 + y_1$$
$$z_2 = \alpha_2 x_0 + y_2$$

Դիտարկենք՝

$$f(\gamma z_1 + \beta z_2) = f(\gamma\alpha_1 x_0 + \gamma y_1 + \beta\alpha_2 x_0 + \beta y_2) =$$

$$= f\big(x_0(\gamma\alpha_1 + \beta\alpha_2) + \underbrace{\gamma y_1 + \beta y_2}_{\in L_0}\big) \underset{\text{ըստ սահմանման}}{=}$$

$$= \varphi(\gamma y_1 + \beta y_2) - c\cdot(\gamma\alpha_1 + \beta\alpha_2) \underset{\varphi\text{-ն գծային է}}{=} \gamma\cdot\varphi(y_1) + \beta\cdot\varphi(y_2) - c\gamma\alpha_1 - c\beta\alpha_2 =$$

$$= \gamma\cdot f(z_1) + \beta\cdot f(z_2) \Rightarrow f \text{ ֆունկցիոնալը գծային է:}$$

Հիմա պետք է ցույց տալ, որ f-ը φ-ի շարունակությունն է:

$\forall y \in L_0 \qquad y = 0\cdot x_0 + y \Rightarrow$ ըստ սահմանման

$$f(y) = f(0x_0 + y) = \varphi(y) - c\cdot 0 = \varphi(y)$$

Ստացանք, որ L_0-ի $\forall$ կետում f և φ համընկնում են (նույնն են), այսինքն՝ f-ը φ-ի շարունակությունն է:

Անցնենք հիմա 2) կետին՝ պետք է ցույց տալ, որ $f(x) \le p(x)$

Վերցնենք $\forall z \in L_1$ $\quad z = \alpha x_0 + y \quad y \in L_0$

ըստ սահմանման $\quad f(z) = \varphi(y) - c\cdot\alpha$

$$f(\alpha x_0 + y) = \varphi(y) - c\cdot\alpha = \alpha\cdot\left(\varphi\left(\tfrac{1}{\alpha}y\right) - c\right) \leq$$

Եթե $\alpha > 0$ $\quad$ sup-ից կունենանք՝

$$\leq \alpha\cdot p\left(\tfrac{1}{\alpha}y + x_0\right) = p(y + \alpha x_0) = p(z)$$

քանի որ $\alpha>0$

Ստացանք $\quad f(z) \leq p(z) \quad$ երբ $\alpha > 0$:

Եթե $\alpha < 0$, օգտվենք inf-ից, կստանանք՝

$$\varphi\left(\tfrac{1}{\alpha}y\right) - c \geq -p\left(-\tfrac{1}{\alpha}y - x_0\right) \qquad (\times\alpha)$$

$-\alpha > 0$

$$\underbrace{\alpha\cdot\left(\varphi\left(\tfrac{1}{\alpha}y\right) - c\right)}_{= f(z)} \leq -\alpha\cdot p\left(-\tfrac{1}{\alpha}y - x_0\right)$$

$$f(z) \leq p(y + \alpha x_0) = p(z)$$

Ստացանք $\quad f(z) \leq p(z) \quad$ երբ $\alpha < 0$

Նկատենք անկախ նրանից $\alpha > 0$, թե $\alpha < 0$

ճշմարիտ է $\quad f(z) \leq p(z)$

Երբ $\alpha = 0 \qquad f(z) = \varphi(y) \leq p(y) = p(z)$

Ստացանք, որ մեր շարունակված f ֆունկցիո-

նալը L_1-ի վրա բավարարում է 2) պայմանին

անհավասարությանը

$f(x) \leq p(x)$:

Յուրաքանչյուր f ֆունկցիայի համար D_f նշանակենք f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը: Նշանակենք

$$\Omega = \{ f : f\text{-ը } \varphi\text{-ի շարունակությունն է}, \ f(x) \le p(x) \quad x \in D_f \}$$

$\downarrow$

$\neq \varnothing$

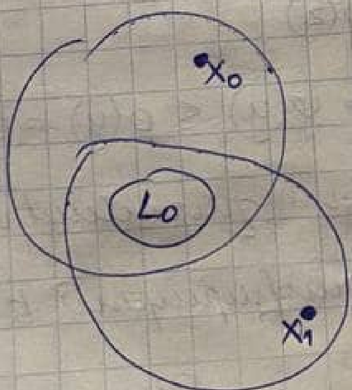
բոլոր հնարավոր շարունակությունները

Սահմանում: Դիցուք $f_1, f_2 \in \Omega$: Կասենք $f_1 \preccurlyeq f_2$ եթե $D_{f_1} \subset D_{f_2}$ և ամեների՝ $\forall x \in D_{f_1}$ $f_1(x) = f_2(x)$:

Այս ձևով սահմանված կարգի հարաբերությունն է (բավարարված են 3 պայմանները):

Ω մասնակի կարգավորված բազմություն է:

Չենք կարող ասել, որ Ω-ի մեջ ընկած $\forall 2$ էլեմենտներ կարելի է համեմատել:



Ω-ում դիտարկենք ∀ շղթա՝ $\{f_\alpha\}$։ Ցույց տանք, որ այդ շղթան ունի վերին եզր։

Նշանակենք $\mathcal{D} = \bigcup_\alpha \mathcal{D}_{f_\alpha}$։ Այն ենթատարածություն է։

Սահմանենք $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$։ Վերցնենք $\forall x \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow \exists \alpha'$ $x \in \mathcal{D}_{f_{\alpha'}}$ $f(x) = f_{\alpha'}(x)$

Ցույց տանք f ֆունկցիոնալի գծայնությունը

$x \in \mathcal{D}_{f_{\alpha_1}}$ $y \in \mathcal{D}_{f_{\alpha_2}}$

ենթադրենք $\alpha_1 < \alpha_2$

$\Downarrow$

f_{α_2}-ը f_{α_1}-ի շարունակությունն է

$$f_{\alpha_1} \preceq f_{\alpha_2} \Rightarrow \mathcal{D}_{f_{\alpha_1}} \subset \mathcal{D}_{f_{\alpha_2}}$$

$$f(x+y) = f_{\alpha_2}(x+y) = f_{\alpha_2}(x) + f_{\alpha_2}(y) = f(x) + f(y)$$

↑ սա գծային է քանի որ $\in \Omega$

Նույն կերպ նկատենք, որ $f(x) = f_{\alpha'}(x) \le p(x)$

Այս ձևով ստացանք, որ $f \in \Omega$։

Այլ կերպ ասած $\forall \alpha$ $f_\alpha \preceq f$։ Դրա նշանակ,

կարող ենք ասել

որ f-ը $\{f_\alpha\}$ շղթայի համար վերին եզր է։

Այսպիսով՝ ∀ շղթա ունի վերին եզր $\Rightarrow$

Ցորնի լեմմայի $\exists g \in \Omega$ max-ային

համաձայն

$\mathcal{D}_g = X$ ՊԱՐՏԱԴԻՐ Է

Ենթադրենք $\mathcal{D}_g \neq X$: Դա կնշանակի $\exists x_0$ $x_0 \notin$ Բայց համաձայն թեորեմի առաջին մասի $\exists g_1$ ֆունկցիոնալ՝ որոշված $(x_0, \mathcal{D}_g)$ ձևի բազմության վրա, որը հանդիսանում է g-ի շարունակությունը՝ $g \preceq g_1$, որը հակասում է g-ի max-ալ լինելուն:

Հան-Բանախ 2

Թեորեմ: Դիցուք X ԳՆՏ է և L_0-ն X-ի ենթատարածություն է: $\varphi: L_0 \to R$ ԳՍՖ է: Այդ դեպքում φ-ն կարելի է շարունակել ամբողջ տարածության վրա՝ պահպանելով նորմը՝ $\exists f: X \to R$ ԳՍՖ

1) f-ը φ-ի շարունակությունն է,
2) $\|f\| = \|\varphi\|$:

Ապացույց: Սահմանենք $p: X \to R$ $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$

կիսաադիտիվ → $p(x+y) = \|\varphi\| \cdot \|x+y\| \leq \|\varphi\| \cdot (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y)$

դրական համասեռ → $\alpha > 0$ $p(\alpha x) = \|\varphi\| \cdot \|\alpha x\| = \|\varphi\| \cdot |\alpha| \cdot \|x\| = \alpha \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| = \alpha \cdot p(x)$

$\forall x \in L_0 \quad \varphi(x) \le |\varphi(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{սահմանափակությունից}}}{\le} \|\varphi\| \cdot \|x\| = p(x)$

Այսպիսով $\forall x \in \underset{\substack{\nwarrow \\ D_\varphi}}{L_0} \quad \varphi(x) \le p(x)$

Համաձայն Հան-Բանախի թեորեմի $\exists\, f: X \to R$ գծային ֆունկցիոնալ, որ

1) f-ը φ-ի շարունակությունն է,

2) $f(x) \le p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$

Ունենք $\quad f(x) \le \|\varphi\| \cdot \|x\|$

$$-f(x) = f(-x) \le \|\varphi\| \cdot \|-x\| = \|\varphi\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow |f(x)| \le \|\varphi\| \cdot \|x\|$$

$\Downarrow$

f ֆունկցիոնալը սահմանափակ է

$\|f\| \le \|\varphi\|$

շարունակման նորմը չի կարող փոքր լինել սկզբնականի նորմից

$\Downarrow$

$\|f\| = \|\varphi\|$

սրա պատճառով

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in L_0 \\ \|x\| \le 1}} |\varphi(x)| \le \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \le 1}} |f(x)| = \|f\|$$

նույնն է, որ $\sup_{\substack{x \in L_0 \\ \|x\| \le 1}} |f(x)|$

Որոշ հետևանքներ Հան-Բանախի թեորեմից

Հետևանք: Դիցուք X ԳՆՏ է, $x_0 \in X$ $x_0 \neq 0$.

Այդ դեպքում $\exists f : X \to R$ ԳԱՖ, որ

1) $f(x_0) = \|x_0\|$

2) $\|f\| = 1$:

Ապացույց: Դիտարկենք $L_0 = \{\alpha x_0\}_{\alpha \in R}$

այն ձգված ենթատարածությունը

$x \in L_0 \Rightarrow x = \alpha x_0$

Սահմանենք $\varphi(x) = \varphi(\alpha x_0) = \alpha \cdot \|x_0\|$

$y \in L_0 \Rightarrow y = \beta x_0$

$$\varphi(x+y) = \varphi(\alpha x_0 + \beta x_0) = \varphi\big(x_0 \cdot (\alpha+\beta)\big) = (\alpha+\beta)\cdot\|x_0\| =$$

$$= \alpha \cdot \|x_0\| + \beta \|x_0\| = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ադիտիվությունը ստուգվեց

Նույն կերպ համասեռությունը՝

$$\varphi(\gamma x) = \varphi(\gamma \alpha x_0) = \gamma \cdot \alpha \cdot \|x_0\| = \gamma \cdot \varphi(x)$$

Այսպիսով φ-ն L_0-ի վրա որոշված գծային ֆունկցիոնալ է:

Ունենք $\forall x = \alpha x_0 \Rightarrow \|x\| = \|\alpha \cdot x_0\| = |\alpha| \cdot \|x_0\|$

$$|\varphi(x)| = |\alpha| \cdot \|x_0\| = \|x\|$$

$|\varphi(x)| \le 1 \cdot \|x\| \Rightarrow \varphi$-ն սահմանափակ է

$\|\varphi\| = 1$

$$\varphi(x_0) = \varphi(1 \cdot x_0) = 1 \cdot \|x_0\| = \|x_0\|$$

Այսպիսով L_0-ի վրա ունենք φ ԳԱՖ, որ $\|\varphi\| = 1$ և $\varphi(x_0) = \|x_0\|$, համաձայն Հան-Բանախի 2 թեորեմի φ-ն կարելի է շարունակել ամբողջ տարածության վրա՝ պահպանելով նորմը

$$f(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|$$

$$\|f\| = \|\varphi\| = 1$$

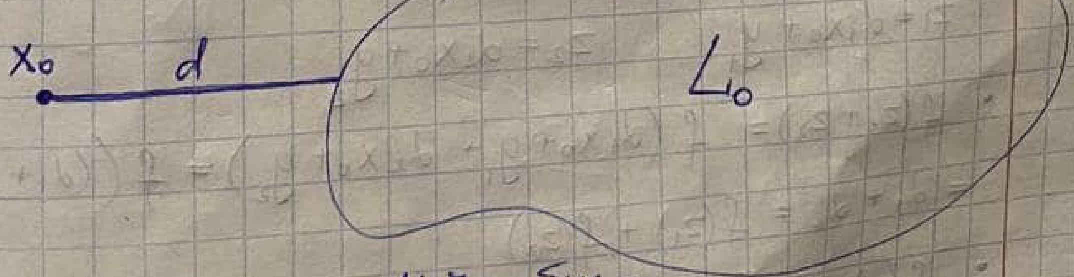
գրված են մետրիկական տարածությունում

դաս 27

Սահմանում: Ունենք A և B բազմություններ: A և B բազմությունների հեռավորություն անվանում ենք՝

$$\boxed{d(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A,\ y \in B\}}$$

Մասնավորապես երբ A բազմությունը մի կետանոց է՝ $d(x_0, B) = \inf\{\rho(x_0, y) : y \in B\}$



Բնականաբար $\forall$ նորմա-վորված տարածություն մետրիկական է (կա հեռավ. [illegible]):

Թեորեմ (կետի և ենթատարածության հեռավորության մասին):

Դիցուք X ԳՆՏ է, L_0 որևէ ենթատարածություն է: Ունենք $x_0 \in X$ այնպես, որ $d(x_0, L_0) = d$.
Այդ դեպքում $\exists f: X \to R$ ԳՍՖ այնպիսին, որ

1) $f(x_0) = 1$

2) $f(y) = 0 \quad \forall y \in L_0$

3) $\|f\| = \frac{1}{d}$

այս պայմանն ապահովում է, որ $x_0 \in L_0$
L_0 ենթատարածութ. $\Rightarrow$

Ապացույց: Դիտարկենք՝

$$L_1 = (x_0, L_0) = \{\alpha x_0 + y : \ y \in L_0, \alpha \in R\}$$

գծային թաղանթ է

Ցույց ենք տվել $z \in L_1$ ունի միակ ներկայացում $z = \alpha x_0 + y$: Սահմանենք ֆունկցիոնալ

$$f(z) = f(\alpha x_0 + y) = \alpha$$

Ստուգենք գծայնությունը՝

$z_1 = \alpha_1 x_0 + y_1 \qquad z_2 = \alpha_2 x_0 + y_2$

- $f(z_1 + z_2) = f(\alpha_1 x_0 + y_1 + \alpha_2 x_0 + y_2) = f((\alpha_1 + \alpha_2) x_0 + (y_1 + y_2)) =$
$= \alpha_1 + \alpha_2 = f(z_1) + f(z_2)$
- $f(\lambda z_1) = f(\lambda \alpha_1 x_0 + \lambda y_1) = \lambda \cdot \alpha_1 = \lambda \cdot f(z_1)$

Ապացուցենք f-ը L_1-ի վրա որոշված գծային ֆունկցիոնալ է: Ցույց տանք, որ բնորոշող 1) և 2) կետերը բավարարված են:

1) $f(x_0) = f(1\cdot x_0 + 0) = 1$

2) $f(y) = f(0\cdot x_0 + y) = 0 \quad \forall y \in L_0$

Ցույց տանք սահմանափակությունը:

Վերցնենք $\forall z \in L_1$, $z = \alpha x_0 + y$ երբ $\alpha \neq 0$, $x_0 \neq 0$ $\Rightarrow z \neq 0$

Գրառենք՝

$$|f(z)| = |\alpha| = \frac{|\alpha|}{\|\alpha x_0 + y\|} \cdot \|z\| = \frac{1}{\|x_0 + \frac{1}{\alpha} y\|} \cdot \|z\| \leq$$

$$\|x_0 + \frac{1}{\alpha} y\| = \|x_0 - \underbrace{(-\tfrac{1}{\alpha}) y}_{\in L_0}\| \geq d$$

$$\leq \frac{1}{d} \|z\|$$

(այս անհավասարությունը ապացուցեցինք $\forall z$-ի համար երբ $\alpha \neq 0$, իսկ [illegible], որ $\alpha = 0$ օրինակը է ճիշտ է)

Ապացուցենք $|f(z)| \leq \frac{1}{d} \|z\| \Rightarrow$ f-ը սահմանափակ ֆունկցիոնալ է

$$\Downarrow$$

$$\|f\| \leq \frac{1}{d}$$

Որպես ցույց տանք, որ $\|f\| = \frac{1}{d}$, այսինքն՝

բավական է ցույց տանք $\|f\| \geq \frac{1}{d}$:

որ հաշիվ կզ ցույց տանք

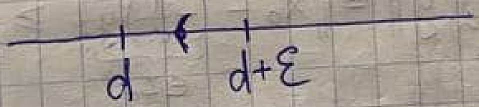
Ունենք, որ $d = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in L_0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y_n \in L_0$ այնպես, որ $\|x_0 - y_n\| \to d$

Ցույց տանք վերը նշվածը՝ $\|x_0 - y_n\| \to d$

Քանի inf սահմանումից $\Rightarrow \|x_0 - y_n\| \ge d$,

Ճշտ կողմից $\forall \varepsilon > 0$ համար $\exists y' \in L_0$ $\|x_0 - y'\| < d + \varepsilon$



. . . . .

. . . . . .

$\forall n$ համար կգտնենք $y_n \in L_0$ որ $\|x_0 - y_n\| \le \frac{1}{n} + d$

$$\Downarrow$$

$$\|x_0 - y_n\| \longrightarrow d$$

Դիտարկենք $f(x_0 - y_n) = 1$

(սահմանափակ) $\Rightarrow$ $f(x_0 - y_n) \le \underbrace{\|f\| \cdot \|x_0 - y_n\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\| \cdot d}$

$\Rightarrow 1 \le \|f\| \cdot d$

$\|f\| \ge \frac{1}{d}$

Արդյունքում

ունենք

Հարց: Նա

ֆունկցիոնա

Դիտարկ

$g($

$g(x$

Ճշտ կողմ

$1 = |g$

Ստացանք $\|f\| \geq \frac{1}{d}$

ունեինք $\|f\| \leq \frac{1}{d}$ $\Bigg| \Rightarrow \|f\| = \frac{1}{d}$

Ապացույցի ավարտ

Հարց: Հնարավոր է արդյոք կառուցել ֆունկցիոնալ, որի նորմը $\frac{1}{d}$-ից փոքր չլինի:

Պատասխան: Ոչ: Ցույց տանք

$$g(x_0)=1 \qquad g(y)=0 \quad \forall y \in L_0$$

$$g(x_0-y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{գծային}}}{=} g(x_0)-g(y)=1$$

Մյուս կողմից $\quad |g(x_0-y)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{սահմանափակ}}}{\leq} \|g\|\cdot\|x_0-y\| \quad \forall y$ համար.

մինիմիզացնող y_n

$$1=|g(x_0-y_n)| \leq \underbrace{\|g\|\cdot\|x_0-y_n\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \|g\|\cdot d} \quad \Big| \Rightarrow \|g\| \geq \frac{1}{d}$$

Համալուծ տարածություններ

Հիշեցնենք: Եթե X, Y ԳՆՏ են, մենք L(X,Y)-ով նշանակել ենք X-ից Y գործող բոլոր գծային սահմանափակ օպերատորների բազմությունը և ապացուցել ենք, որ եթե Y FS է, ապա L(X, Y) ևս FS է: Մասնավորապես, եթե վերցնենք, որ Y = R (կամ C), ապա ստանում ենք, որ

$X^* \equiv L(X, R(\text{կամ } C))$ FS է:

$\uparrow$ անվանում ենք X-ի **համալուծ տարածություն**

$$\boxed{X^* = \{ f : \quad f: X \to K \quad \text{ԳՍՖ} \}}$$

X^* FS է և հիշենք $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |f(x)|$

Սահմանում: Դիցուք X, Y K դաշտի վրա ԳՏ են: Այդ ԳՏ-երը կանվանենք **իզոմորֆ**, եթե $\exists A: X \to Y$ փոխմիարժեք արտապատկերում, որը պահպանում է գծայնությունը՝
- $A(x+y) = Ax + Ay$
- $A(\alpha x) = \alpha A x$

(եթե X, Y ԳՆՏ են, ապա պայմաններին մեջ ավելանում է՝ $\|Ax\| = \|x\|$)

Դիտարկենք՝

$$R^n_p = \left\{ \bar{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) : \ \|x\|_p=\Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} \right\} \quad p>1$$

Նկարագրել այս տարածության համալուծ տարածությունը:

Վերցնենք $\forall a=(a_1, \dots, a_n)$ և նշանակենք՝

$$f_a(\bar{x})=\sum_{k=1}^n a_k \cdot x_k \qquad f_a : R^n_p \to R$$

Հեշտ է ապացուցել, որ f_a գծային արտապատկերում է: Ցույց տանք, որ այն սահմանափակ ֆունկցիոնալ է, այսինքն, փորձենք հաշվել $\|f_a\|$:

$$|f_a(\bar{x})| = \Big|\sum_{k=1}^n a_k \cdot x_k\Big| \le \sum_{k=1}^n |a_k \cdot x_k| \le$$

ընտրենք q թիվն այնպես, որ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}$$

այսինքն՝ վերցնենք $q=\frac{p}{p-1}$ և

կիրառենք Հյոլդերի ան=ությունը

$$\le \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_q \cdot \|x\|_p$$

Արդյունքում՝ $|f_a(\bar{x})| \le \|a\|_q \cdot \|x\|_p$

$$\Downarrow$$

f_a սահմանափակ ֆունկցիոնալ է $\Rightarrow f_a \in (R^n_p)^*$

հաշվել $\|f_a\|$:

փորձենք

Նշանակենք՝

$$y_k = sgn(a_k)\cdot|a_k|^{q-1} \qquad y=(y_1,\dots,y_n)$$

$$f_a(y) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{sgn(a_k)\cdot|a_k|^{q-1}\cdot a_k}_{=|a_k|} = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^1 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\|y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^{q-1}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^{q}\right.$$

$$= \|a\|_q\cdot\|y\|_p$$

Այսպիսով $|f_a(x)| \le \|a\|_q\cdot\|x\|_p$ $\forall x$-ի համար բայց ձախ կողմից էլ ինչ-որ վեկտորի համար $|f_a(x)| = \|a\|_q\cdot\|x\|_p \Longrightarrow \|f_a\| = \|a\|_q$

Ստացանք՝ այսպիսով $\forall a$ վեկտորով ծնվում է ինչ-որ ԳԱՖ, որի նորմը $= \|a\|_q$: Բայց փոխ-միարժեքությունն ճանաչելու համար պետք. մի հատ էլ ասենք, որ ամեն մի ֆունկցիոնալի համար մի հատ ինչ-որ վեկտոր կա, որով ծնվում է:

Վերցնենք $\forall f \in (R_p^n)^*$ (ԳՍՖ է) և ցույց տանք, որ այն ինչ-որ մի վեկտորով ծնված է։

Վերցնենք $e_1, e_2, \dots, e_n$ բազիսը, այս նշանակում է $\forall x$ միակ ձևով ներկայացվում է

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k \qquad e_k = (0, 0, \dots, \underset{k}{1}, 0 \dots 0)$$

$$f(\bar{x}) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot f(e_k) =$$

Դիտարկենք՝

$$a = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \in R^n$$

կստանանք $= f_a(x)$

Այսինքն՝ ֆունկցիոնալը ծնվել a վեկտորով։

Ստացանք ամեն մի վեկտորով մի ֆունկցիոնալ ծնվեց, և հակառակը, ամեն մի ֆունկցիոնալի համար մի վեկտոր կա, որով ֆունկցիոնալը ծնված է։ Այսինքն՝ փոխմիարժեք համապատասխանություն կա։ Նորմերը՝ նույնն են պահպանված է։ Իզոմորֆիզմ կա՝

$$(R_p^n)^* \sim R_q^n$$ (կարելի է նույնացնել)