

Inhoudsopgave: Datum: 25/09/2023

[1 Getallensysteem en binair rekenen 3](#_Toc155301104)

[1.1 Inleiding 3](#_Toc155301105)

[1.2 Positionele systemen 3](#_Toc155301106)

[1.2.1 Tiendelige getallen 3](#_Toc155301107)

[1.2.2 Binaire getallen 3](#_Toc155301108)

[1.2.3 Octale getallen 4](#_Toc155301109)

[1.2.4 Hexadecimale getallen 5](#_Toc155301110)

[1.2.5 Samenvatting: Decimaal / binair / octaal / hexadecimaal stelsel 5](#_Toc155301111)

[1.3 Conversies tussen talstelsels 5](#_Toc155301112)

[1.4 Bewerkingen in het binair stelsel 5](#_Toc155301113)

[1.4.1 Cijferen 5](#_Toc155301114)

[1.4.2 Andere bewerkingen 6](#_Toc155301115)

[1.4.3 Negatieve getallen 6](#_Toc155301116)

[1.5 Overflow 7](#_Toc155301117)

[1.6 Floating point 8](#_Toc155301118)

[1.6.1 Voorstelling floating point 8](#_Toc155301119)

[2 Hoofdstuk 2 logische poorten 9](#_Toc155301120)

[2.1 Overzicht van een logische poort 9](#_Toc155301121)

[2.2 Basispoorten 9](#_Toc155301122)

[2.2.1 De NIET-poort 9](#_Toc155301123)

[2.2.2 De EN-poort 9](#_Toc155301124)

[2.2.3 De OF-poort 10](#_Toc155301125)

[2.2.4 De XOR-poort 10](#_Toc155301126)

[2.2.5 De NEN-poort en NOR-poort 10](#_Toc155301127)

[2.2.6 De NOR-poort 11](#_Toc155301128)

[2.2.7 Samenvatting poorten 11](#_Toc155301129)

[2.2.8 tri-state-buffer 11](#_Toc155301130)

[2.3 Logische schakelingen 12](#_Toc155301131)

[2.4 Equivalente schakelingen 12](#_Toc155301132)

[3 Hoofdstuk 3 Boolealgebra 13](#_Toc155301133)

[3.1 Definitie 13](#_Toc155301134)

[3.2 Dualiteitsstelsel 14](#_Toc155301135)

[3.3 Eigenschappen 15](#_Toc155301136)

[4 Hoofdstuk 4 Boolese uitdrukkingen en functies 17](#_Toc155301137)

[4.1 Boolese uitdrukkingen 17](#_Toc155301138)

[4.2 Minimale en maximale Boolese uitdrukkingen 17](#_Toc155301139)

[4.3 De disjunctieve normaalvorm: DNV 17](#_Toc155301140)

[4.3.1 Methode 1: gebruik de axioma’s en de eigenschappen 18](#_Toc155301141)

[4.3.2 Methode 2: gebruik de uitvoertabel 18](#_Toc155301142)

[4.4 De conjunctieve normaalvorm: CNV 18](#_Toc155301143)

[4.5 Vereenvoudigen van Boolese uitdrukkingen 19](#_Toc155301144)

[5 Hoofdstuk 5: Veitch-Karnaugh diagrammen 20](#_Toc155301145)

[5.1 Karnaugh diagram van een Boolese uitdrukking 20](#_Toc155301146)

[5.2 Vereenvoudigen: algoritme met minimale uitdrukkingen (Tip: DNV) 21](#_Toc155301147)

[5.3 Vereenvoudigen: algoritme met maximale uitdrukkingen (Tip: CNV) 21](#_Toc155301148)

[5.4 Boole Algebra en logische schakelingen 22](#_Toc155301149)

[6 Hoofdstuk 6 Codeertheorie 23](#_Toc155301150)

[6.1 Inleiding 23](#_Toc155301151)

[6.2 Foutdetecterende codes 23](#_Toc155301152)

[6.2.1 Controlegetal - Cyclic Redundancy Check (vervolg) 23](#_Toc155301153)

[6.3 Foutverbeterende codes 24](#_Toc155301154)

[6.3.1 Hammingcode 24](#_Toc155301155)

[7 Hoofdstuk 7: Inleiding tot de analyse 25](#_Toc155301156)

[7.1 Het veld 25](#_Toc155301157)

[7.2 Machten 25](#_Toc155301158)

[7.3 Intervallen 25](#_Toc155301159)

[7.4 Het begrip oneindig in de wiskunde 26](#_Toc155301160)

[7.4.1 Eigenschappen 26](#_Toc155301161)

[8 Hoofdstuk 8: Veeltermfuncties 28](#_Toc155301162)

[8.1 Definities en notaties 28](#_Toc155301163)

[8.2 Constante functies 28](#_Toc155301164)

[8.3 Lineaire functies of functies van de eerste graad 29](#_Toc155301165)

[8.4 Functies van de tweede graad 29](#_Toc155301166)

[9 Hoofdstuk 9: De exponentiële en logaritmische functie 31](#_Toc155301167)

[9.1 De logaritmische functie 31](#_Toc155301168)

[10 Hoofdstuk 10: Bijzondere functies 33](#_Toc155301169)

[10.1 Absolute waarde 33](#_Toc155301170)

[10.2 Floor en ceiling functie: 33](#_Toc155301171)

[10.2.1 Floor 33](#_Toc155301172)

[10.2.2 Ceiling 33](#_Toc155301173)

[11 Hoofdstuk 11: Eindige velden 34](#_Toc155301174)

[11.1 Definities en eigenschappen 34](#_Toc155301175)

[11.2 Het eindig veld Z 35](#_Toc155301176)

[11.2.1 ℤm vervolg nummer 1: 35](#_Toc155301177)

[11.2.2 ℤm vervolg nummer 2: 36](#_Toc155301178)

[11.3 Nog meer voorbeelden: 36](#_Toc155301179)

[11.4 Rekenen in ℤp 37](#_Toc155301180)

[11.5 Vergelijkingen in ℤp 38](#_Toc155301181)

[11.6 ISBN – Internationaal Standaard Boek Nummer 38](#_Toc155301182)

[11.7 EAN – Europese Artikel Nummering 39](#_Toc155301183)

# Getallensysteem en binair rekenen

## Inleiding

Wat is een cijfer?

Een cijfer is een symbool, dat gebruikt wordt bij de voorstelling van getallen.

Wat is een getal?

Een getal wordt voorgesteld door, al dan niet van elkaar verschillende, cijfers achter elkaar te plaatsen

## Positionele systemen

Betekenis ‘positionele getallen’:

De plaats van het cijfer bepaald de waarde van het cijfer.

### Tiendelige getallen

Wat is het grondtal van het positionele systeem?

10

Wat zijn de verzameling van symbolen van het positionele systeem?

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9

Grootheden kennen:

Afbeelding met tekst, nummer, Lettertype, schermopname

Automatisch gegenereerde beschrijving

### Binaire getallen

Wat is het grondtal van het binaire systeem?

2

Wat zijn de verzameling van symbolen in het binaire systeem?

0 – 1

Voor binaire getallen is het essentieel de machten van 2 te kennen:



Waarom moeten we binaire getallen kunnen omzetten?

* Een IPV-4 adres bestaat uit 32 binaire symbolen.
* Het probleem is dat dit heel moeilijk te lezen is voor mensen die er niks van begrijpen, daarom moeten we dit kunnen omzetten.

Hoe maken we een onderscheid tussen de verschillen getallensystemen van binair en decimaal?

We maken gebruik van haakjes:

Binair stelsel: (1001)2

Decimaal stelsel (9)10

Wat is een bit?

* Een binary digit
* Afkorting **b**
* Een cijfer uit het binair systeem

Wat is een byte?

* Rij van 8 bits
* Afkorting **B**

Wat is een msb?

* Most significant bit (meest belangrijke bit)
* In een binair getal is dit het meest linker bit (hij heeft de grootste waarde).

Wat is een lsb?

* Least significant bit (minst belangrijke bit)
* In een binair getal is dit het meest rechter bit (hij heeft de kleinste waarde).

Volgende tabel vanbuiten kennen:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

**Zie Exceldocument ‘soorten binaire bewerkingen’**

### Octale getallen

Wat is het grondtal van het octale systeem?

8

Wat zijn de verzameling van symbolen in het octale systeem?

0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 - 7

Hoe maken we onderscheid tussen octale en decimale getallen?

(171)8

**Zie Exceldocument ‘soorten binaire bewerkingen’**

### Hexadecimale getallen

Wat is het grondtal van het hexadecimale systeem?

16

Wat is de verzameling van symbolen in het hexadecimale systeem?

0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – A – B – C – D – E – F

Hoe maken we onderscheid tussen octale en decimale getallen?

(17A2)16

**Zie Exceldocument ‘soorten binaire bewerkingen’**

### Samenvatting: Decimaal / binair / octaal / hexadecimaal stelsel

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Decimaal** | **Binair** | **Octaal** | **Hexadecimaal** |
| **Grondtal** | 10 | 2 | 8 | 16 |
| **Symbolen** | 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 - 9 | 0 – 1 | 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 - 7 | 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – A – B – C – D – E - F |
| **Onderscheid** | (121)10 | (01110)2 | (712)8 | (1A6C)16 |

## Conversies tussen talstelsels

Wat bedoelen we met *‘n-aantal bits = 2n’*?

Met één bit hebben we twee mogelijkheden wat het getal kan zijn: 0 of 1.

Met twee bits hebben we vier mogelijkheden wat het getal kan zijn: 00 / 01 / 10 / 11.

…

Hoeveel bits worden bijgehouden in het geheugen per computerwoord?

In groepjes van 8 / 16 / 32 / 64.

Ook met kommagetallen is het essentieel de machten van twee te kennen:

Afbeelding met tekst, Lettertype, schermopname, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving

**Zie Exceldocument ‘soorten binaire bewerkingen’**

## Bewerkingen in het binair stelsel

### Cijferen

Hoe cijfer je in het binair stelsel?

Afbeelding met schermopname, Lettertype, nummer, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = (1)0 🡪 1 overbrengen

1 + 1 + 1 = (1)1 🡪 1 overbrengen

### Andere bewerkingen

Wat is complementeren?

Alle 1’en en 0’en worden omgedraaid.

Dit kan enkel met: 8 / 16 / 32 / 64-bitwoorden.

Afbeelding met schermopname, plein, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijvingWat is de bitsgewijze EN?

Als **beide** bits **actief** zijn (1) wordt de uitkomst ook een 1. Dit wordt uitgevoerd op twee operanden bit per bit.

Afbeelding met schermopname, plein

Automatisch gegenereerde beschrijvingWat is de bitsgewijze OF?

Als **slechts** één bit **actief** is (1) wordt de uitkomst ook een 1.

Wat is de exclusieve OF or XOR?

Afbeelding met schermopname, plein, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijvingAls **één** bit is (1) wordt **actief** de uitkomst ook een **1**.

Als **beide** bits 1 of 0 zijn, wordt de uitkomst een **0**.

### Negatieve getallen

Welke drie methodes zijn er om een negatief voor te stellen?

* Teken + absolute waarde
* Excess-N (127)
* 2’s compliment

We gaan er altijd van uit dat de getallen 8 bits lang zijn.

Teken + absolute waarde:

* Het meest linkse bit (**msb**) is het tekenbit.
* 0 = een **positief** getal
* 1 = een **negatief** getal
* met het tekenbit wordt NIET gerekend.

Nadelen:

* A-B kan niet berekend worden als A+(-B): bijvoorbeeld 22-12 = 22 +(-12)
* Aftrekking moet als afzonderlijke bewerking in de hardware geïmplementeerd worden -> duur!
* Bewerkingen kunnen pas uitgevoerd worden nadat beide tekenbits uit de woorden verwijderd en geanalyseerd werden.
* Nul heeft 2 voorstellingen: [00000000] en [10000000]

Excess-N(127):

We tellen **127** op bij ons getal en zetten het om in de binaire vorm.

Voordelen:

Nul wordt slechts op één manier voorgesteld [00000000]

Nadelen:

* Rekenen met negatieve getallen wordt **ook niet vereenvoudigd**: voorbeeld: 
* Geen enkel getal wordt nog op de **gewone binaire manier** voorgesteld.

2’s Compliment:

**Hier werken we terug met teken + aboslute waarde:**

**Indien het eerste getal 0 is (positief):**

* moeten we het getal enkel omzetten naar de binaire vorm. **MEER NIET**.

**Indien het eerste getal een 1 is (negatief) dan moeten we:**

* Het getal omzetten naar de binaire vorm van de **absolute waarde**.
* Daarna inverteren we het getal, 1 wordt een 0 en 0 wordt een 1.
* Uiteindelijk cijferen we met de twee getallen in kwestie en tellen we er 1 bij op.

Wat als de uitkomst alsnog negatief is bij 2’s compliment?

We inverteren opnieuw en tellen er 1 bij op.

**Zie Exceldocument ‘soorten binaire bewerkingen’**

## Overflow

Wanneer treedt overflow op?

Als er 1 van de **overflow condities** optreedt (**beide samen = GEEN OVERFLOW**!). Deze zijn:

**“carry naar het tekenbit”**

Overdracht van de op één na meest linkse positie naar de meest linkse positie (msb)

**“carry naar buiten”**

Afbeelding met tekst, Lettertype, schermopname, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijvingOverdracht van de meest linkse positie (msb) naar nergens of dus buiten het computerwoord

Afbeelding met tekst, Lettertype, wit, typografie

Automatisch gegenereerde beschrijving

Wanneer treed er geen overflow op?

* Er een carry naar buiten **EN** een carry naar het tekenbit is.
* Geen van beide zicht voordoen.

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Wat merken we op bij overflow?

Indien er overflow is, klopt de som **niet meer**.

**Zie Exceldocument ‘soorten binaire bewerkingen’**

## Floating point

### Voorstelling floating point

We hebben, bijgevolg, 2 getallen nodig om één kommagetal voor te stellen, namelijk:

* één met de waarde en
* één met de aanduiding waar de komma moet komen
  + (meestal onder de vorm van een **exponent**).

Hoe noemen we deze notatie?

De wetenschappelijke notatie.

Voorbeeld: 123456 = 1,23456 . 105 of 1,23456E05

Binary32 getal vanbuiten kennen:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

* Ook bij de binaire voorstelling van een kommagetal is het aantal cijfers na de komma variabel.
* We hebben echter een bijkomend voordeel: in de binaire voorstelling van een kommagetal is het eerste beduidend cijfer of de msb steeds gelijk aan 1.
* Hiervan maken we gebruik om de genormaliseerde vorm te bepalen:
* Bij de genormaliseerde vorm verschuiven we de komma zodat het eerste beduidende cijfer (=1) voor de komma staat.

Welke delen van het getal hebben we nodig om floating point te berekenen?

* Afbeelding met Lettertype, schermopname, lijn, tekst

  Automatisch gegenereerde beschrijvingWe hebben een mantisse nodig.
* En een exponent.

Dit zijn alle onderdelen van de floating point:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Hoe bereken we een floating point met onderstaand voorbeeld?

**11000000101100000000000000000000**

**Stappenplan:**

* We kijken naar ons **msb** of het **positief** of **negatief** is.
* Daarna nemen we de **eerste 8 cijfers** **na ons msb** en dat wordt dan ons **exponent**. Eerst moeten we het nog omzetten naar een **geheel getal**. Eenmaal dat gedaan **trekken we er 127 van af**.
* Vervolgens zijn alle cijfers achter die **8 cijfers onze mantisse**. Eenmaal we dat getal hebben plaatsen we een **komma** voor **onze msb** en een **één**. We **berekenen** het gedeelte achter de **komma en vermedigvulgdigen** het met onze exponent met grondtal **2**.

**Zie Exceldocument ‘soorten binaire bewerkingen’**

# Hoofdstuk 2 logische poorten

## Overzicht van een logische poort

Wat is een logische poort?

* Een elektronische schakeling
* Je kan er fancy dingen mee doen

Transistor = spel om logische poorten te maken.

Wat zijn de eigenschappen van een logische poort?

* Afbeelding met diagram, Lettertype, lijn, ontwerp

  Automatisch gegenereerde beschrijvingEén of meer ingangen en exact één uitgang
* Mogelijk waardes: 0 en 1
* Waarde uitgang hangt af van waarde ingang.
* Je kan maar twee dingen hangen aan je ingang: veel stroom (0) of weinig stroom (1).

Wat is waarheidstabel?

Een tabel van alle mogelijke waardes

## Basispoorten

### De NIET-poort

Afbeelding met tekst, diagram, schermopname

Automatisch gegenereerde beschrijving

We krijgen het omgekeerde aan de uitgang. 0 🡪 1 en 1 🡪 0 aan de uitgang.

Hier heb je twee rijen.

### De EN-poort

Afbeelding met tekst, schermopname, nummer, diagram

Automatisch gegenereerde beschrijving

Hier moet de A en de B waar zijn zodat de uitgang één omvat.

Hier heb je vier rijen

### De OF-poort

Afbeelding met tekst, schermopname, nummer, diagram

Automatisch gegenereerde beschrijving

Hier moet of A of B waar zijn om een één uit te komen.

Hier heb je vier rijen.

### De XOR-poort

Afbeelding met tekst, schermopname, diagram, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijving

Hier moet of A of B waar zijn om één uit te komen. Beide A en B die 0 of 1 zijn is niet ok.

Hier heb je vier rijen.

### De NEN-poort en NOR-poort

Afbeelding met tekst, schermopname, diagram, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijving

Hier werkt het omgekeerd. NEN = niet EN. A en B mogen niet allebei waar zijn. Als A of B waar is, is het waar. Maar allebei waar = het omgekeerde.

DE BOLLETJES KEREN DE WAARDE OM.

POORTEN KUNNEN TEKENEN.

### De NOR-poort

Afbeelding met tekst, schermopname, diagram, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijving

De NOR heeft 0 als uitkomst als één van de twee waar is. Zijn ze beide niet waar? Is het waar.

### Samenvatting poorten

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

**Zie Exceldocument ‘oefeningen logische poorten’**

### tri-state-buffer

Wat is een tri-state-buffer?

Dit is een speciale poort die gebruikt wordt om kortsluiting (x/ ) op bussen te vermijden.

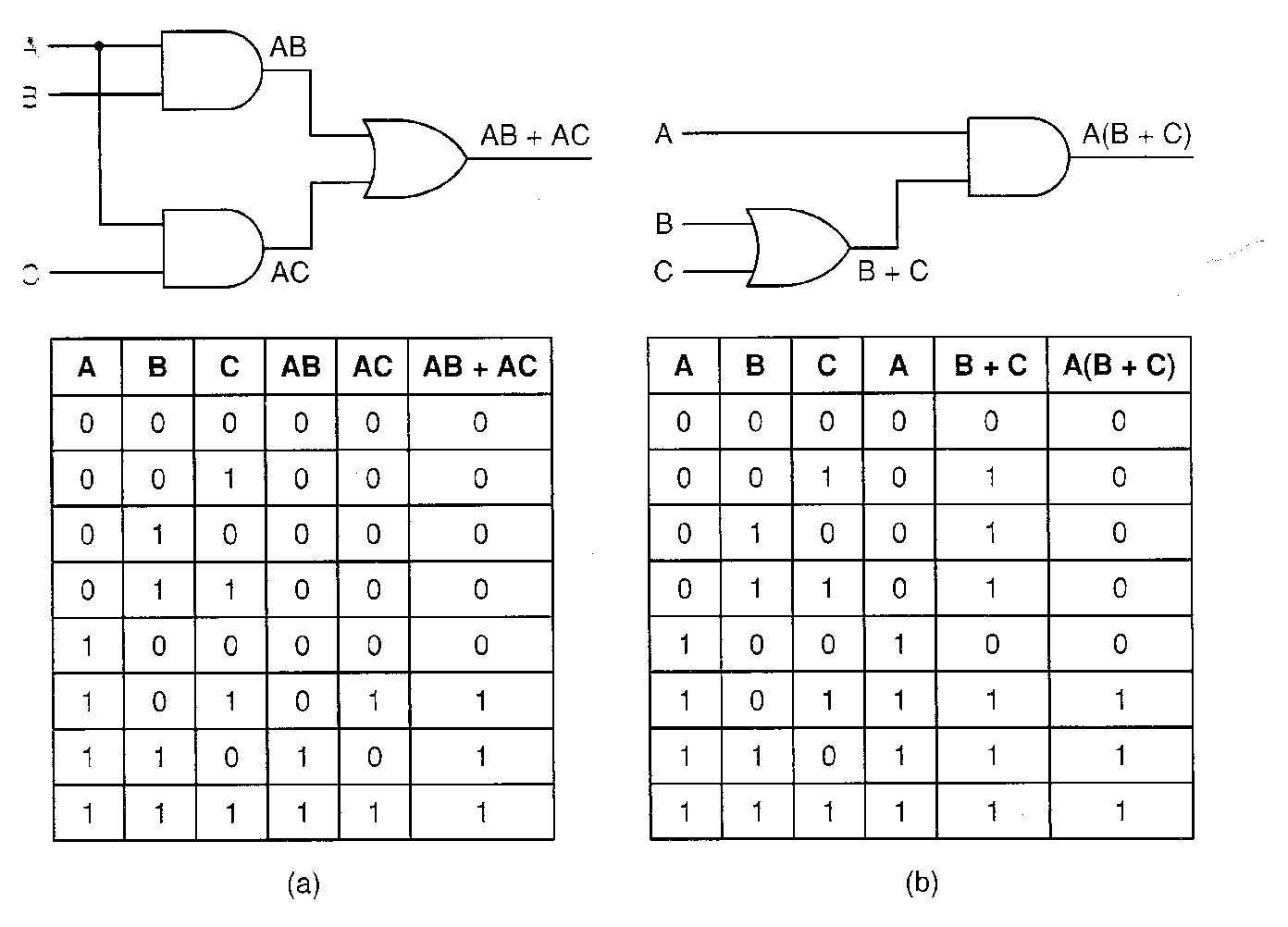
Afbeelding met tekst, Lettertype, schermopname, diagram

Automatisch gegenereerde beschrijving

Afbeelding met tekst, schermopname, visitekaartje, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijving

## Logische schakelingen

Wat is een logische schakeling?

Een schakeling met meerder poorten en ingangen

## Equivalente schakelingen

Wanneer spreken we over equivalente schakelingen?

Afbeelding met diagram, Lettertype, lijn, wit

Automatisch gegenereerde beschrijvingWe noemen twee logische schakelingen equivalent wanneer ze **dezelfde waarheidstabel** hebben. Bijvoorbeeld:

Beide schakelingen komen een uitkomst (M) uit die 0 is

Equivalentie bij basispoorten:

* In sommige technologieën is het alleen mogelijk om NAND- of NOR- poorten te maken met transistoren.
* Oplossing: de andere basispoorten bouwen als schakelingen van NAND- of NORpoorten.

# Hoofdstuk 3 Boolealgebra

## Definitie

Wat is boole-algebra?

Een Boole-algebra is één specifieke algebraïsche structuur.

Wat zijn de eigenschappen van een boole-algebra?

* Afkorting: B
* Een verzameling S die minstens twee constanten, **0 en 1**, bevat;
* twee **binaire operatoren** op S: **+ en \* (spreek je uit als EN niet MAAL);**
* een **unaire operator** op S; - (complement + bewerking met maar één nummer / zoals tegengestelde)

Welke axioma’s van Huntington moeten voor alle x, y, z ∈ S geldig zijn in een boole-algebra?

|  |  |
| --- | --- |
| Eigenschappen: | Inhoud: |
| Commutatieve eigenschappen | x + y = y + x  x \* y = y \* x |
| Distributieve eigenschappen | x \* (y + z) = (x \* y) + (x \* z)  x + (y \* z) = (x + y) \* (x + z) |
| Identiteitswetten | x + 0 = x  x \* 1 = x |
| Complementwetten | x + (niet)-x = 1  x \* (niet-)x = 0 |

Belangrijk:

* Het is niet per se x \* (niet-x) dat 0 is, maar ook
* x \* (niet-y) of (niet-x) \* y is ook 0!

*Weten: je moet de operator niet per se schrijven (x \* y = xy)*

Wat is de definitie van de drie operatoren in een boole-algebra?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Afbeelding met diagram, lijn, typografie, ontwerp  Automatisch gegenereerde beschrijving | | |
| Tip: EN-poort | OF-poort | NOT-poort |

Wat is het kvg?

Kleinst gemene veelvoud:

De deler van het product van beide gehele getallen

Wat is de ggd?

Grootst Gemene Deler:

Welk getal is het grootste getal dat zowel deelbaar is door x en y (bv. 6 en 1 = 1).

Tip: als bij de *kvg* en *ggd* de tabel in de gespiegelde vorm symmetrisch is, klopt het bewijs.

Wat is een axioma?

De normale vorm een bewerking.

Bewijs van eigenschappen:

|  |  |
| --- | --- |
| Eigenschappen: | Bewijs |
| Commutatief | Afbeelding met nummer, Lettertype, lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijving |
| Distributief | Afbeelding met tekst, schermopname, nummer, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijving |
| Identiteitswetten |  |
| Complementwetten |  |

**Eenmaal alle vier deze axioma’s zijn bewezen, is het boole-algebra!**

## Dualiteitsstelsel

Afbeelding met schermopname, tekst, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijvingWat is het dualiteitsstelsel?

Alle symbolen worden vervangen door hun duale vorm (het omgekeerd).

Indien de normale bewerking geldig is, is de duale vorm ook geldig.

Wat zijn de duale vormen van de volgende axioma’s?

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

## Eigenschappen

**!OPGELET! JE KRIJGT EEN FORMULARIUM MET DE FORMULES!**

Eigenschap 1: het complement is uniek

Voor elke x ∈ S bestaat er juist één x ∈ S zodat 𝑥 + 𝑥ҧ= 1 𝑒𝑛 𝑥 ∙ 𝑥ҧ= 0

Afbeelding met tekst, Lettertype, schermopname, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Eigenschap 2: involutie

Als we de unaire operator tweemaal toepassen op een element x dan krijgen we als uitkomst opnieuw x

Afbeelding met tekst, Lettertype, schermopname, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Eigenschap 3: complement van 0 en 1

Het complement van 0 is 1 en omgekeerd.

Afbeelding met tekst, Lettertype, schermopname, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving

Tip eigenschap 1, 2, 3:

Om met eigenschap 1, 2 en 3 te beginnen moeten we meestal beginnen met \* 1 of +0

Eigenschap 4: idempotentie

* Afbeelding met schermopname, lijn, typografie, ontwerp

  Automatisch gegenereerde beschrijvingWanneer de operator + toegepast wordt op tweemaal hetzelfde argument dan is het resultaat dat argument.
* Wanneer de operator · toegepast wordt op tweemaal hetzelfde argument dan is het resultaat dat argument.

Afbeelding met Lettertype, schermopname, lijn, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijvingEigenschap 5: begrenzing

* Om het even welke waarde optellen bij 1 levert steeds 1. Om het even welke waarde vermenigvuldigen met 0 levert steeds 0.
* De onbekende hoeft niet altijd x te zijn zodat deze rekenregels tellen.

Afbeelding met Lettertype, tekst, lijn, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijvingEigenschap 6: absorptie

* Een element x optellen bij een product waarin x voorkomt als factor levert steeds x.
* Een element x vermenigvuldigen met een som waarin x als term voorkomt levert steeds

Eigenschap 7: associatief

* Wanneer we drie elementen vermenigvuldigen dan kunnen we de haakjes verplaatsen zonder het resultaat te wijzigen.
* Afbeelding met tekst, Lettertype, lijn, typografie

  Automatisch gegenereerde beschrijvingWe kunnen de haakjes dus ook weglaten omdat de uitdrukking niet verkeerd kan begrepen worden.

Afbeelding met Lettertype, tekst, nummer, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijvingeigenschap 8: wetten van de Morgan

* Het complement van een som is het product van de complementen.
* Het complement van een product is de som van de complementen.

# Hoofdstuk 4 Boolese uitdrukkingen en functies

## Boolese uitdrukkingen

In dit hoofdstuk behouden we ons tot de minimale Boole-algebra (B).

## Minimale en maximale Boolese uitdrukkingen

Hoe werken minimale en maximale boolese uitdrukkingen?

De uitdrukkingen lopen in een volgorde alsof het binaire waarden zijn. Maar in plaats van een *1* typen we een *niet-symbool* boven de onbekende.

|  |  |
| --- | --- |
| **Minimale uitdrukkingen:** | Maximale uitdrukkingen: |
|  |  |

## De disjunctieve normaalvorm: DNV

Om de DNV te bewijzen kunnen we 2 manieren gebruiken:

* Bewijzen (via eigenschappen / zie HF3)
* Gebruik maken van een waarheidstabel

Hoe schrijven we de DNV op?

* Eerst kijken we naar alle functies waarbij f(x,y,z) actief is of niet (1 of 0).
* Afbeelding met tekst, Lettertype, wit

  Automatisch gegenereerde beschrijvingBij DNV kijken we naar de 1.
* Is f(x,y,z) actief? Dan kijken we naar de originele waarden van x, y en z en kijken we welke waarden 1 of 0 hebben.
* Hebben ze waarde 1, dan schrijven we ze normaal op. Hebben ze waarde 0, dan schrijven we een niet-symbool boven de onbekende.

bv:

Let op: **DNV** = (x **\*** y **\*** z) **+** (…)

Oefening DNV:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

### Methode 1: gebruik de axioma’s en de eigenschappen

Je start met de functie f(x,y,z) en voert ze uit tot je alle haakjes van de DNV hebt.

Zie geschreven blad.

Afbeelding met tekst, Lettertype, algebra, ontvangst

Automatisch gegenereerde beschrijving

### Methode 2: gebruik de uitvoertabel

**Zie (oefening CNV en DNV)**

## De conjunctieve normaalvorm: CNV

Hoe schrijven we de CNV op?

* Eerst kijken we naar alle functies waarbij f(x,y,z) actief is of niet (1 of 0).
* Bij CNV kijken we naar de 0.
* Is f(x,y,z) niet actief? Dan kijken we naar de originele waarden van x, y en z en kijken we welke waarden 1 of 0 hebben.
* Hebben ze waarde 1, dan schrijven we ze met het niet-symbool boven de onbekende. Hebben ze waarde 0, dan schrijven we ze normaal op.

Voorbeeld:

bv:

Let op: **CNV** = (x **+** y **+** z) **\*** (…)

Oefening CNV:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Samenvatting DNV en CNV:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

## Vereenvoudigen van Boolese uitdrukkingen

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, algebra

Automatisch gegenereerde beschrijving

# Hoofdstuk 5: Veitch-Karnaugh diagrammen

## Karnaugh diagram van een Boolese uitdrukking

We weten dat een waarheidstabel er ongeveer uitziet als een rechtstaande rechthoek. Bij een karnaugh kaart is het ofwel een vierkant ofwel een horizontale rechthoek.

Hoe stellen we een karnaugh kaart op voor 2 variabelen (x, y)?

We beginnen met het zetten van de niet-variabele, daarna de wel-versie. Voorbeeld:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Niet-y | y |
| Niet-x |  |  |
| x |  |  |

Hoe stellen we dit op voor 3 / 4 variabelen (x, y, z, u)?

* We beginnen eerst met de **volledige niet-kant** van de eerste twee variabelen.
* Daarna de **linkse variabele** is de **niet-vers**ie de **rechter** de **normale versie**.
* Vervolgens zijn de **twee variabelen** de **wel-versie**.
* Uiteindelijke is de **linkse variabele** de **wel-versie** en de **rechter** de **niet-versie**.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | niet-z, niet-u | niet-z, u | z,u | z, niet-u |
| niet-x, niet-y | 1 | 1 | 0 | 0 |
| niet-x, y | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x, y | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x, niet-y | 1 | 1 | 1 | 1 |

Hoe vul je zo een kaart in?

Hiermee krijg je altijd een functie, bv. f(x, y, u, z) = xyzu + niet-x, niet-y, niet-z

+ x, niet-y. Als die variabelen er minsten staan dan betekent het dat alles waar die variabelen minsten een 1 komt te staan. Deze functie is hierboven uitgewerkt:

Na dat we de tabel hebben ingevuld, kunnen we dit nog verder uitwerken. We moeten namelijk **groepjes** maken met het getal waarmee we de **meeste/grootste** groepen kunnen maken.

Werk je met **1**? Dan schrijven we de **normale waarde** op.

Werk je met **0**? Dan schrijven we de **uiteindelijke waarde**.

Nadat de groepjes zijn gemaakt moeten we ze uitwerken via een DNV en CNV.

Werk je met **1**? Dan gebruiken we de **DNV**. Schrijfwijze: (x **\*** y) **+** (x **\*** z) …

Werk je met **0**? Dan gebruiken we de **CNV**. Schrijfwijze: (x **+** y) **\*** (x **+** z) …

Hoe vind je de DNV?

Eenmaal je al je groepjes hebt gevonden, moet je groep per groep afgaan. Neem het groepje linksboven en -onder. Als we een wel- en een niet-variabele staan hebben, mag die niet mee in de DNV.

Uitgewerkt voorbeeld van hierboven: (niet-z \* niet-y)

Hoe vind je de CNV?

Exact dezelfde methode als de DNV, maar we inverteren het gedeelte tussen de haakjes.

Hoe stellen we een karnaugh kaart op voor 5 variabelen (x, y, z, u, v)? zie geschreven blad

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | niet-z, niet-u, niet-v | niet-z, niet-u, v | Niet-z, u, v | Niet-z, u, niet-v | Z, u, niet-v | Z, u, v | Z, niet-u, v | Z, niet-u, niet-v |
| niet-x, niet-y |  |  |  |  |  |  |  |  |
| niet-x, y |  |  |  |  |  |  |  |  |
| x, y |  |  |  |  |  |  |  |  |
| x, niet-y |  |  |  |  |  |  |  |  |

## Vereenvoudigen: algoritme met minimale uitdrukkingen (Tip: DNV)

Afbeelding met tekst, schermopname, diagram, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijvingRechthoeken:

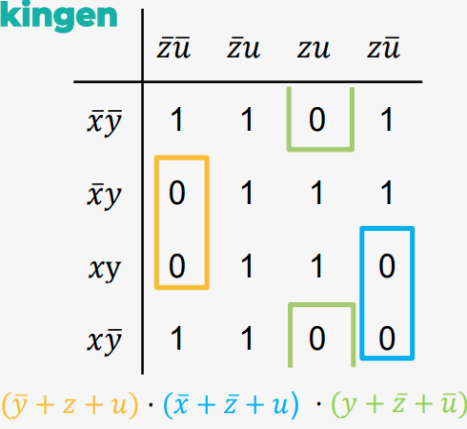
* Hier maak je rechthoeken van 1
* Aantal cijfers in één rechthoek moet een macht zijn van 2!

Uitdrukking:

* Per vierkant **schrijf** je een letter in de uitdrukking op als je
  + dezelfde letter 2x ziet
* Je **schrijft** hem **niet** op als je
  + dezelfde letter in zowel de **normale vorm** als de **niet-vorm** ziet.
* Hier schrijven we onze letters in de uitdrukking gewoon zomaar over. y = y
  + Want je werkt met 1

## Vereenvoudigen: algoritme met maximale uitdrukkingen (Tip: CNV)

Rechthoeken:

* Hier maak je rechthoeken van 0
* Aantal cijfers in één rechthoek moet een macht zijn van 2!

Uitdrukking:

* Per vierkant **schrijf** je een letter in de uitdrukking op als je
  + dezelfde letter 2x ziet
* Je **schrijft** hem **niet** op als je
  + dezelfde letter in zowel de **normale vorm** als de **niet-vorm** ziet.
* Hier schrijven we onze letters in de uitdrukking omgekeerd over y = niet-y
  + Want je werkt met 0

## Boole Algebra en logische schakelingen

Afbeelding met tekst, diagram, schermopname, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijving

zie oefeningen PP

# Hoofdstuk 6 Codeertheorie

## Inleiding

Bij het uitwisselen van informatie over een (communicatie)kanaal, kan het voorkomen dat niet alle bits correct worden doorgegeven.

Het verstuurde bericht is: 10110**1**1100

Het ontvangen bericht is: 10110**0**1100

Wat zijn de verschillende soorten ruis?

* + **Natuurlijke ruis**:

verstoring van de communicatie door natuurlijke fenomenen zoals bliksem, temperatuurschommelingen, …

* + **Toevallige ruis**:

onvoorspelbare vormen van communicatiebeschadiging zoals magnetische fluctuaties, slijtage van een communicatiedrager

* + **Opzettelijke ruis**:

het doelbewust verstoren van de communicatie zoals het inrichten van stoorsignalen.

Wat zijn fout detecterende codes?

Deze codes ontdekken dat er een fout is, als het ontvangen bericht verschillend is van het verzonden bericht.

Wat zijn fout verbeterende codes?

Deze codes verbeteren, daarnaast, het ontvangen bericht zodat het oorspronkelijk bericht gedecodeerd wordt. De voorwaarde is wel dat er niet te veel fouten zijn opgetreden.

Enkele voorbeelden van fout detecterende codes:

* **Backward Error Correction:**
* Bij fouten worden de gegevens opnieuw opgevraagd aan de verzender.
* **Forward Error Correction:**
* Hammingcode**.**

## Foutdetecterende codes

### Controlegetal - Cyclic Redundancy Check (vervolg)

Hoe werkt CRC – versie coderen?

Je krijgt een binair getal (**data**) en een **polynoom**.

Je moet de **data steeds delen** **tot** het getal een rest tegenkomt **dat niet meer te delen is door het polynoom**. Voor we starten voegen we eerst n**-1 nullen** toe aan onze data. Om een deling te bepalen gebruiken we de **XOR-methode**.

Hoe werkt CRC – versie decoderen?

We delen ons data door het polynoom op **dezelfde manier** als de **coderenversie**, maar we voegen **geen extra 0’en toe** aan onze data voor we starten met delen.

## Foutverbeterende codes

### Hammingcode

Pariteitsbit:

Een bit dat op de plaats staan van de uitkomst van een macht. Dit vervangt GEEN plaats/cijfer van de data.

Hoe werkt hammingcode?

* We vullen onze pariteitsbits in, te starten van P0, P1, P2 en P3.
* De plaatsen waar geen pariteitsbits staan, vullen we onze data in.
* We vullen onze rijen in waarbij het getal overeenkomt met meest bovenste getal.

Hoe weten we wanneer het pariteitsbit een 1 of een 0 is?

Zijn er in een rij een **even** aantal 1’en? Dan is het pariteitsbit een **0** (1 + 1 = 10)

Zijn er in een rij een **oneven** aantal 1’en? Dan is het pariteitsbit een **1** (1 + 1 + 1 = 11)

Voorbeeld hammingcode (5 PUNTEN VAN HET EXAMEN):

Afbeelding met tekst, nummer, Lettertype, schermopname

Automatisch gegenereerde beschrijving

Wat als je hammingcode krijgt en het omgekeerde moet doen?

# Hoofdstuk 7: Inleiding tot de analyse

## Het veld

Waarom is R, + en \* een veld?

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, algebra

Automatisch gegenereerde beschrijving

## Machten

Rekenregels machten:

Afbeelding met Lettertype, typografie, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijving

## Intervallen

4 soorten intervallen:

* Open interval ]a, b[ alles tussen deze waarde, beide niet inbegrepen.
* Gesloten interval [a, b] alles tussen deze waarde, beide inbegrepen
* Halfopen interval ]a, b] alles tussen deze waarde, a niet inbegrepen, b wel
* Halfopen interval [a, b[ alles tussen deze waarde, a inbegrepen, b niet

Verzameling van R in een interval:

Afbeelding met Lettertype, nummer, symbool, typografie

Automatisch gegenereerde beschrijving

Verzamelterm N:

Alle positieve getallen.

Verzamelterm Z:

Alle positieve en negatieve getallen

Verzamelterm Q:

Alle positieve, negatieve en kommagetallen

## Het begrip oneindig in de wiskunde

### Eigenschappen

Rekenregels R:

Afbeelding met Lettertype, tekst, lijn, schermopname

Automatisch gegenereerde beschrijving

Ongeldige bewerkingen:

Afbeelding met Lettertype, cirkel, diagram, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving

Rekenregels delen en vermenigvuldigen:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Dit laatste betekent dat x/0 ofwel …

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Oefeningen:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Afbeelding met tekst, Lettertype, handschrift, wit

Automatisch gegenereerde beschrijving

# Hoofdstuk 8: Veeltermfuncties

## Definities en notaties

Definitie:

Een functie f is een reële functie indien zijn bron- en doelverzameling beide zijn. D.w.z. dat voor elke x ∈ hoogstens één y ∈ bestaat zodanig dat f(x) = y. We noemen x het argument terwijl y het beeld wordt genoemd.

Notatie:



Beeld/bereik:

De lengte die gebruikt wordt van de **y-as**.

Domein:

De lengte die gebruikt wordt van de **x-as**.

Continuïteit:

Iets is **continu** als je de pen niet omhoog moet heffen om de grafiek te tekenen. Zoniet, is hij **discontinu**.

Nulpunt:

Het punt waar de x-waarde een getal is en de **y-waarde 0** is.

## Constante functies

Constante functie:

Een **constante functie **is een functie waarbij de functiewaarde constant is. Dit wordt ook wel een functie van de **0de graad** genoemd en kan bv. zijn: y = 3

Afbeelding met lijn, Rechthoek, tekst

Automatisch gegenereerde beschrijvingVoorbeeld constante:

**Eigenschappen:**

* Dom(f) = R
* Beeld/bereik = 4
* Nulpunten = geen
* Snijpunt = Coördinaat (0,4) met x = 0 en y = 4

**Tekenverloop:**

****

Tekenverloop bij een constante:

De top begint bij de x waarbij het start in -oneindig en +oneindig met in het midden de **Top (-b/a)** en bij f(x) links het **teken** **voor** de x op **0** stond en rechts het teken **na** de x 0 is gepasseerd.

## Lineaire functies of functies van de eerste graad

Definitie:

De functie waarbij a en b gegeven reële getallen zijn en a ≠ 0, noemt men een **functie van de eerste graad of lineaire functie**.

RICO (RichtingsCoëfficiënt) :



Voorbeeld met:

Afbeelding met lijn, diagram, Perceel

Automatisch gegenereerde beschrijving**Eigenschappen:**

* Domein = R
* Bereik/beeld = R
* Snijpunten (y-as) = 1 (-6, 0)
* Nulpunten = 1 (2, 0)
* RICO = 3 > 0

## Functies van de tweede graad

Definitie:

Een functie waarbij a, b en c gegeven reële getallen zijn en waarvoor a ≠ 0, noemt men een functie van de **tweede graad**.

* Afbeelding met tekst, Lettertype, wit, algebra

  Automatisch gegenereerde beschrijvingIndien a > 0 is, is de grafiek een **dalparabool**
* indien a < 0 is, is de grafiek een **bergparabool**.

Extrema (top):

Bij een **dalparabool** is dit extremum een **minimum**.

Bij een **bergparabool** is dit extremum een **maximum**.

Nulpunten:

Hier kunnen er meerdere nulpunten zijn. Dit bereken je via de **Discriminant** (b2 – 4ac)

* Indien:
  + D > 0:
  + Afbeelding met Lettertype, typografie, ontwerp

    Automatisch gegenereerde beschrijving
  + D = 0:
  + D < 0: Er is geen nulpunt: de parabool ligt volledig boven of onder de X-as

Eenmaal dit gekend, kunnen we de vergelijking invullen:



Tekenverloop bij een 2e graadsfunctie:

Afbeelding met diagram, lijn, origami

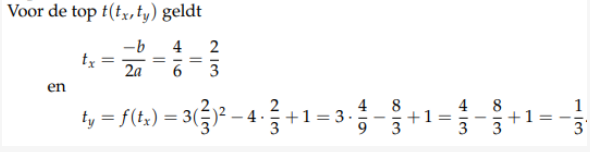
Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met tekst, schermopname, lijn, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Top van x en y in een 2e graadsfunctie:

* Top van x:
* Top van y: Top van x invullen in het volledige functievoorschrift = Top van y

Voorbeeld 2e graadsfunctie f(x) = 3x2 -4x + 1 :

* **Nulpunten**: (-4)2 – 4 \* 3 \* 1 = 16 – 12 = **4**
  + x1 = = 1
  + x2 = =
* **Domein** = R
* **Snpijpunten** (Y-as) = (0, 1), want f(0) = 1
* **Top**:
* **Beeld/bereik** = [-1/3, +oneindig[
* **Tekenverloop**:

Afbeelding met lijn, schermopname, nummer, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijving

# Hoofdstuk 9: De exponentiële en logaritmische functie

Definitie exponentiële functie:

De exponentiële functie met grondtal a:



Stijgende en dalende exponentiële functies:

Voor **a > 1** is de exponentiële functie strikt **stijgend** Voorbeeld: 3

Voor **0 < a < 1** is de exponentiële functie strikt **dalend** Voorbeeld: 0.5 of -2

Afbeelding met tekst, ontvangst, schermopname, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijvingHoe vullen we een exponentiële functie in? Met voorbeeld 2x

* We schrijven een aantal punten op (-2, -1, 0, 1 en 2) en vullen de waarden in
* Vervolgens maken we een grafiek en vullen we de punten in en verbinden we ze met elkaar.

Eigenschappen:

* **Domein** (X) = R
* **Beeld/bereik** (Y) = R+0 (R+ zonder 0)
* **Nulpunten** = geen nulpunten (want 30 = 1)
* **Continuïteit** = continu
* **f(1)** = a
* **f(0)** = 1 (afhankelijk van het grondtal a)

Definitie natuurlijk grondtal e:

De natuurlijke exponentiële functie met natuurlijk grondtal e (e = **2,** **7182**818284 . . .) is

Afbeelding met Lettertype, typografie, tekst, kalligrafie

Automatisch gegenereerde beschrijving

## De logaritmische functie

Definitie:

De **logaritmische functie met grondtal** a is



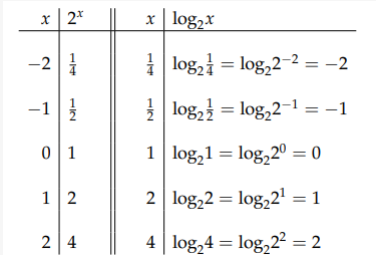
Stijgende en dalende logaritmische functies:

Voor **a > 1** is loga strikt stijgend

Voor **0 < a < 1** is loga strikt dalend

Belangrijk verschil/verduidelijking bij exponentiële functies en logaritmische functies:

* Bij **logaritmische** functies berekenen we **y 2x =y**
* Bij **exponentiële** functies berekenen we **x 2y = x**



Hoe vullen we een exponentiële functie in? Met voorbeeld 2x

* We schrijven een aantal punten op (-2, -1, 0, 1 en 2) en vullen de waarden in
* Vervolgens maken we een grafiek en vullen we de punten in en verbinden we ze met elkaar.

Eigenschappen (Hier worden het domein en beeld zogezegd omgewisseld):

* **Domein** (Y) = R+0 (R+ zonder 0)
* **Beeld/bereik** (X) = R
* **Nulpunten** = geen nulpunten (want 30 = 1)
* **Continuïteit** = continu
* **f(a)** = 1
* **f(1)** = 0 (afhankelijk van het grondtal a)

Asymptoot:

De as die niet gesneden wordt

!Belangrijk! 3 bepaalde logaritmen worden ook anders genoemd !Belangrijk!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Naam functie: | Oorspronkelijk geschreven: | Anders geschreven: |
| Briggse logaritmische functie | Log 10 | Log |
| Neperiaans of natuurlijke logaritmische functie | Log e | Ln |
| Logaritmische functie met grondtal 2 | Log 2 | Lg |

Rekenregels logaritmen: Oefeningen logaritmen:

* Afbeelding met tekst, ontvangst, Lettertype, wit

  Automatisch gegenereerde beschrijvingLoga (x \* y) = Loga (x) + loga (y)
* Loga (x / y) = Loga (x) - loga (y)
* Loga (xy) = y \* Loga (x)
* Loga (a)\* = 1
* () = logc (b)

# Hoofdstuk 10: Bijzondere functies

## Absolute waarde

Definitie absolute waarde:

De **absolute waarde** functie is de functie met als functievoorschrift.

Afbeelding met lijn, origami

Automatisch gegenereerde beschrijving

Eigenschappen absolute waarde:

Domein(abs) = R

Beeld (abs) = R+

Voorbeeld absolute waarde:

abs(7) = 7

abs(-13) = 13

## Floor en ceiling functie:

### Floor

Definitie:

De **floor-functie** is de functie met functievoorschrift:

Afbeelding met lijn, diagram

Automatisch gegenereerde beschrijvingEigenschappen:

Domein(floor) = R

Beeld (floor) = Z

Voorbeeld:

floor(-0.5) = -1

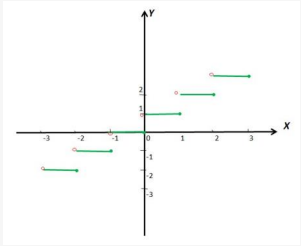
floor (2.77) = 2

floor (-4.9) = 5

### Ceiling

Definitie:

De **ceiling-functie** is de functie met functievoorschrift:

Eigenschappen:

Domein(floor) = R

Beeld (floor) = Z

Voorbeeld:

floor(-0.5) = 0

floor (2.77) = 3

floor (-4.9) = -4

# Hoofdstuk 11: Eindige velden

## Definities en eigenschappen

Definitie eindige velden:

Een verzameling F waarop twee binaire operatoren, + (optelling) en · (vermenigvuldiging), gedefinieerd zijn en waartoe zeker twee constante elementen, 0 en 1, behoren is een veld wanneer de volgende eigenschappen voldaan zijn:

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, document

Automatisch gegenereerde beschrijving

Eigenschap:

* Voor een willekeurig veld F met a, b ∈ F geldt:
  + Het element 0 is het opslorpend element voor de vermenigvuldiging: a \* 0 = 0
  + Een veld F heeft **nuldelers**: als a \* b = 0 dan geldt a = 0 of b = 0

Notatie:

Voortaan zullen we **a \* b** noteren als **ab**.

Definitie eindig veld:

Een **eindig veld** is een veld waarvoor de **verzameling van elementen eindig** is. Het aantal elementen van deze verzameling is de **orde** van het veld.

Stelling:

Er bestaat een veld van de orde q als en slechts als q de macht van een priemgetal p is



Wat is een priemgetal?

Een getal dat enkel deelbaar is **door zichzelf** en **1**.

Isomorf:

Twee velden van de orde q met q = ph zijn isomorf. Een veld van de orde q noemen we een Galois veld van de orde q, GF(q).

## Het eindig veld Z





ℤm:

ℤm is dus een **eindige verzameling** met m elementen. Indien we wensen te rekenen met de elementen van ℤm dan zal de optelling en de vermenigvuldiging zoals gedefinieerd voor ℤ niet volstaan, aangezien niet elk resultaat opnieuw tot ℤm zal behoren.

Voorbeeld:



In deze verzameling mag je zowel + als \* doen met alle getallen die je maar wilt, maar de uitkomst moet ergens in de verzameling zitten.

### ℤm vervolg nummer 1:

Definitie:

Stel a, b ∈ ℤ . Dan is a congruent met b modulo m als en slechts als de deling van a en van b door m dezelfde rest oplevert.

Notatie:

**a ≡ b** (mod m), met a mod m = **de positieve rest na deling door m**.

Voorbeelden met modulo operator:



Eigenschap:

Stel a ≡ a’ (mod m) en b ≡ b’ (mod m), dan geldt:

Afbeelding met Lettertype, tekst, wit, kalligrafie

Automatisch gegenereerde beschrijving

Kortom: met moeilijkere en hogere getallen zonder rekenmachine kan je die moeilijke getallen al de modulo van nemen en zo verder rekenen in onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld met deze eigenschap:



### ℤm vervolg nummer 2:

Definitie:

Stel a, b ∈ ℤm. In ℤm worden de bewerkingen + en · als volgt gedefinieerd:

Afbeelding met tekst, Lettertype, wit, typografie

Automatisch gegenereerde beschrijving

Voorbeelden:

Afbeelding met tekst, Lettertype, schermopname, wit

Automatisch gegenereerde beschrijving

Afbeelding met tekst, Lettertype, wit, typografie

Automatisch gegenereerde beschrijving

Maar! 2 · 4 ≡ 0 (mod 8). Nochtans geen van beide factoren is 0! Dus kan ℤ8 , +, · geen veld zijn.

## Nog meer voorbeelden:

**Stelling: Zp , +, · is een veld als en slechts als p een priemgetal is.**

Afbeelding met Lettertype, nummer, lijn, schermopname

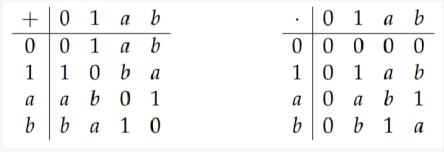
Automatisch gegenereerde beschrijvingHet eindig veld met 2 elementen:

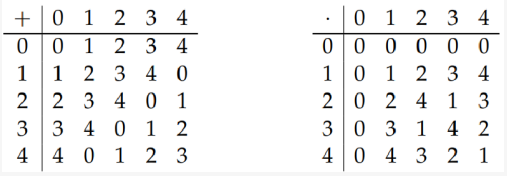
Het eindig veld met twee elementen is GF(2) = ℤ2 = {0, 1} met de tabel voor de optelling en vermenigvuldiging

Het eindig veld met 3 elementen:

Het eindig veld met drie elementen is GF(3) = ℤ3 = {0, 1, 2} met de tabel voor de optelling en vermenigvuldiging

Het eindig veld met 4 elementen:

Gelet de stelling is ℤ4 geen veld, 4 is immers geen priemgetal. In ℤ4 geldt 2 · 2 ≡ 0 (mod 4). Dus 2 is een nuldeler. Hieruit kunnen we onmiddellijk besluiten dat ℤ4 geen veld is. Er geldt 4 = 22 en dus is 4 een macht van een priemgetal. Waaruit volgt dat er wel een eindig veld met 4 elementen moet bestaan. Dit eindig veld met 4 elementen kan als volgt gedefinieerd worden: GF(4) = {0, 1, a, b} met

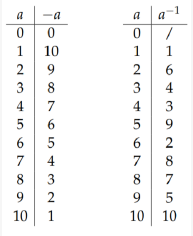
Het eindig veld met 5 elementen:

Het getal 5 is een **priemgetal**. Dit betekent dat we opnieuw met ℤ5 kunnen werken voor het eindig veld van 5 elementen. Het eindig veld met 5 elementen is GF(5) = ℤ5 = {0, 1, 2, 3, 4} met de optelling en vermenigvuldiging als volgt gedefinieerd in ℤ5

Afbeelding met diagram, nummer, Lettertype, tekst

Automatisch gegenereerde beschrijving

Aangezien ℤ5 , +, · een veld is, moet elk element een tegengestelde hebben voor de optelling en een invers voor de vermenigvuldiging. Voor elk element a van ℤ5 moet gelden a + (−a) ≡ 0 (mod 5) en voor alle elementen a van ℤ5 , behalve 0, moet gelden a · a −1 ≡ 1 (mod 5).



Het eindig veld met 11 elementen:

Het getal 11 is een **priemgetal**. Het eindig veld met 11 elementen is GF(11) = ℤ11 = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. De optelling en vermenigvuldiging op deze verzameling is analoog aan de voorgaande voorbeelden. Alle inverse elementen voor de optelling en de vermenigvuldiging in ℤ11 :

## Rekenen in ℤp

3 mod 5:

De berekening gebeurt in ℤ5 . Dit houdt in dat het resultaat enkel een element kan zijn van ℤ5 of dus van {0, 1, 2, 3, 4} – 3 mod 5 = de rest na gehele deling door 5. Bijgevolg is 3 mod 5 = 3

23 mod 7:

De berekening gebeurt in ℤ7 => resultaat is een element van {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} – 23 mod 7 = 2 omdat 7 drie keer in 23 kan en 7.3 = 21 => de rest = 2 of dus 23 -21

7 mod 5:

Berekening in ℤ5 = {0, 1, 2, 3, 4} => oplossing kan geen negatief getal zijn! – Tel bij -7 een veelvoud op van 5 zodat het resultaat positief wordt en in ℤ5 ligt: -7 + 2.5 = 3 => -7 mod 5 ≡ 3 mod 5 of -7 mod 5 = 3

3. 2-1 mod 5:

* Berekening gebeurt in ℤ5 = {0, 1, 2, 3, 4} – 2 -1 inℤ5 = 3:
  + Het inverse van een element a uit een eindige verzameling ℤp vind je door, een getal uit ℤp te nemen b zodat a.b mod p = 1. Dan is a-1 = b
  + Om 2-1 inℤ5 te bepalen zoeken we dus naar een getal x in ℤ5 , zodat 2.x mod 5 = 1 → x = 3 of dus 2 -1 =3
* 3. 2-1 mod 5 ≡ 3.3 mod 5 = 4

(117.6-1 + 1004) mod 7:

* Bepaal voor alle getallen eerst de rest na deling door 7:
  + 117 = 16.7 + 5 → rest is 5
  + 1004 = 143.7 +3 → rest is 3
* Herschrijf (117.6-1 + 1004) mod 7 ≡ (5.6-1 + 3) mod 7
* Bepaal 6-1 in ℤ7 → 6 -1 = 6
* Herschrijf (5.6-1 + 3) mod 7 ≡ (5.6 + 3) mod 7 ≡ 33 mod 7 ≡ 5 mod 7 = 5

## Vergelijkingen in ℤp

In ℤ17 : x + 5 ≡ 35

* (x + 5 ≡ 35) mod 17 → x moet een element zijn van ℤ17
* Deel eerst alle veelvouden van 17 weg: (x + 5 ≡ 1) mod 17
* (x + 5 ≡ 1) mod 17 ⌠ (x ≡ -4) mod 17 ⌠ (x ≡ -4 + 17) mod 17 ⌠ (x ≡ 13) mod 17 of dus x =13
* **Controle**: (13 + 5 ≡ 35) mod 17 ⌠ (18 ≡ 35) mod 17 ⌠ (1 ≡ 1) mod 17

In ℤ5 : 23 x + 13 ≡ 0

* 23 x + 13 ≡ 0 mod 5 → x moet een element zijn van ℤ5
* Deel eerst alle veelvouden van 5 weg: (3x + 3 ≡ 0) mod 5
* (3x + 3 ≡ 0) mod 5 ⌠(3x ≡ -3) mod 5 ⌠(3x ≡ -3+5) mod 5 ⌠(3x ≡ 2) mod 5
* Om de factor 3 voor de x weg te werken, vermenigvuldigen we beide leden met 3-1 (let op dit is 3-1 uit ℤ5 en niet 1/3 uit ℝ!) : (3x ≡ 2) mod 5 ⌠(3-1 .3x ≡ 3-1 .2) mod 5 ⌠(1.x ≡ 3-1 .2) mod 5 ⌠(x ≡ 3-1 .2) mod 5
* Bepaal 3-1 in ℤ5 → 3 -1 = 2
* Herschrijf (x ≡ 3-1 .2) mod 5 ⌠ (x ≡ 2.2) mod 5 ⌠ (x ≡ 4) mod 5 of x = 4
* Controle: (23 . 4 + 13 ≡ 0) mod 5 ⌠ (105 ≡ 0) mod 5 ⌠ (0 ≡ 0) mod 5µ

## ISBN – Internationaal Standaard Boek Nummer

Definitie:

Elk boek in een boekhandel is voorzien van een **Internationaal Standaard BoekNummer(ISBN).**

Bestaat uit:

Een ISBN-code bestaat uit 10 digits:x=x1x2x3. . .x10met xi ∈ {0, 1, . . . , 9} voor i=1, . . . , 9 en x10 ∈

{0, 1, . . . , 9,X} waarvoor geldt **(Hier werken we met modulo 11)**

Hoe checken we of een ISBN code klopt (controlecijfer vinden)? 0−19−859617−0

Afbeelding met tekst, Lettertype, lijn, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

* We maken indexen van alle getallen met 1 – 10, daar plaatsen we elk getal boven
* Dan vermenigvuldigen we elk elke index met het ISBN getal.
* Daarop passen we dan **MODULO 11** op toe.
* Uiteindelijk tellen we al deze resultaten op en nemen we daarvan de **MODULO 1**1 opnieuw
  + is dat getal 0? Dan is de ISBN-code **correct**.
  + Is het geen 0? Dan is de ISBN-code **niet correct**.
    - Hier is de 0 het **controlecijfer**

## EAN – Europese Artikel Nummering

30 Jaar na de uitvinding van de ISBN-nummers werd ontdekt dat er niet genoeg ISBN-nummers meer waren. Dus er een oplossing werd gevonden:

* Bij **oude** nummers werd er het **prefix 987** toegevoegd
* Bij **nieuwgemaakte** nummer wordt het **prefix 979** toegevoegd.

Voorbeeld nieuwe code:

Oud: 0−19−859617−0

Nieuw: 978−0−19−859617−2

Het controlecijfer is hier veranderd wegens de nieuwe methode.

Nieuwe methode controlecijfer vinden:

* Vanaf nu werken we niet meer met **module 11**, maar nu werken we met **modulo 10**
* Om nu het controlecijfer te vinden doen we
  + Alle **oneven** getallen \* **1**
  + Alle **even** getallen \* **3**
* Eenmaal alle getallen zijn vermenigvuldigd tellen we deze op en berekenen we hiervan modulo 10. Het getal dat we hierna moeten optellen om (x + x = 0) uit te komen is ons **controlecijfer**.

Voorbeeld nieuwe methode:

Afbeelding met tekst, schermopname, lijn, nummer

Automatisch gegenereerde beschrijving

Hier is getal 2 je controlegetal.