Ejercicios Ayudantía 21 agosto

13- Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje x de modo que su v varía según la ley $v = \alpha\sqrt{x}$, donde α cte positiva. Teniendo en cuenta que el momento $t=0$ se encontraba en el punto $x=0$. determinar

(a) Dependencia de la velocidad y aceleración respecto al t.

(b) la velocidad media de la partícula en el tiempo, en el transcurso del cual recorre los primeros s metros

* $v = \alpha\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt \,//\int$

$\rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow 2x^{1/2}\Big|_{x_0}^{x} = \alpha(t-t_0) \Rightarrow 2\sqrt{x} = \alpha t \Rightarrow \boxed{t = \frac{2\sqrt{x}}{\alpha}}$

$\therefore\ x = \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^2 \Rightarrow v = \alpha\sqrt{x} = \frac{\alpha^2 t}{2} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\alpha^2 t}{2}} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \boxed{a = \frac{\alpha^2}{2}}$

$\bar{V} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{s}{t} = \frac{s}{2\sqrt{s}/\alpha} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{s} \Rightarrow \boxed{\bar{V} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{s}}$

15- Un punto se mueve <u>retardadamente</u> (rápidez disminuye) en línea recta con una a cuyo módulo depende de la velocidad v según $a = \beta\sqrt{v}$, β cte positiva. Velocidad del punto en el instante inicial es igual a v_0. ¿Qué distancia recorrerá aquél hasta <u>detenerse</u>? ¿En qué tiempo hará este recorrido?

* $a = -\beta\sqrt{v}$, instante inicial x_0, v_0, t_0

$\therefore\ a = \frac{dv}{dt} \overset{\text{cadena}}{=} \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -\beta\sqrt{v} \Rightarrow dv\,\frac{v}{\sqrt{v}} = -\beta dx \Rightarrow v^{1/2} dv = -\beta dx \,//\int$

$\rightarrow \int_{v_0}^{v} v^{1/2} dv = -\beta\int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow \frac{2}{3} v^{3/2}\Big|_{v_0}^{v} = -\beta(x - x_0) \Rightarrow \frac{2}{3}\left(v^{3/2} - v_0^{3/2}\right) = -\beta(x - x_0)$

recorrido hasta detenerse $v=0 \Rightarrow \frac{2}{3} v_0^{3/2} = \beta(x - x_0) \Rightarrow$ si $x_0 = 0$ $\boxed{x = \frac{2}{3}\frac{v_0^{3/2}}{\beta}}$

$\boxed{t}$ $\frac{dv}{dt} = -\beta\sqrt{v} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v^{-1/2} dv = -\beta\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow 2v^{1/2}\Big|_{v_0}^{v} = -\beta(t - t_0)$; $t_0 = 0$, $v = 0$

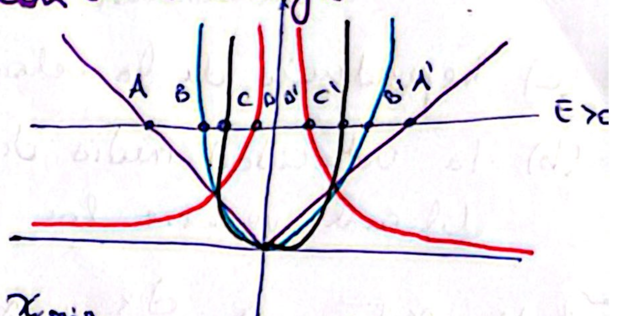
$\Rightarrow 2\sqrt{v_0} = \beta t \Rightarrow \boxed{t = \frac{2\sqrt{v_0}}{\beta}}$

3- Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerza unidimensional con potencial $V(x) = A|x|^n$

Graficar el potencial, indique el rango de energía y posición dentro de los cuales pueden ocurrir oscilaciones acotadas.

Determine el periodo de oscilación en función de la energía

Analice el comportamiento para $n=2$



→ Si la partícula tiene energía E, oscilará entre los puntos de retorno (∃ entre regiones donde $E > V(x)$)

- ⋆ $A \longleftrightarrow A'$ $n=1$ (oscilación)
- ⋆ $B \longleftrightarrow B'$ $n=2$ (oscilación)
- ⋆ $C \longleftrightarrow C'$ $n=3$ (oscilación)
- ⋆ $(-\infty, D)$ y (D', ∞) $n=-1$ mov. sin límite (no oscila)

$$\left\{\begin{array}{l} x(A,B,C,D) \longrightarrow x_{min} \\ x(A',B',C',D') \longrightarrow x_{max} \end{array}\right. \Rightarrow \text{Energía se Conserva}$$

Puntos de retorno: $T=0 \Rightarrow E = V \Rightarrow E = A|x|^n \Rightarrow |x|^n = \frac{E}{A} \Rightarrow x \pm \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}$

$\therefore\ x_{min} = -\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \wedge x_{max} = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}$

Energía: $E = \frac{1}{2}mv^2 + A|x|^n \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E - A|x|^n \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)} \longrightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}} \Rightarrow \Delta t = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}}$$

$$\text{Simetría} \Rightarrow \Delta t = 2\int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}} = 2\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left[\left(A/E\right)^{1/n} x\right]^n}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = (A/E)^{1/n} x \\ du = (A/E)^{1/n} dx \end{array}\right. \Rightarrow dx = (E/A)^{1/n} du \quad ; \quad u\left((E/A)^{1/n}\right) = 1 \quad ; \quad u(0) = 0$$

$$\therefore\ \Delta t = \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_0^1 \frac{\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} du}{\sqrt{1-u^n}} = \sqrt{\frac{2m}{E}} (E/A)^{1/n} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^n}} = \sqrt{2m}\, E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} A^{-1/n} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^n}}$$

$$\text{Si } T = 2\Delta t \Rightarrow \boxed{T = 2\sqrt{2m}\, E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} A^{-1/n} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^n}}}$$

cte, dará un nº pero no afecta la dependencia de T con E

$$\Rightarrow \boxed{T \propto E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}$$

Si $n=2 \Rightarrow$ Oscilación Armónica $V \sim \frac{1}{2}kx^2$; $T \sim E^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1$

Periodo no depende de E

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \left\{\begin{array}{ll} u = \sin x & u(1) = \pi/2 \\ du = \cos x\, dx & u(0) = 0 \end{array}\right. \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2 \Rightarrow T = 2\sqrt{2m}\, A^{-1/n} \pi/2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2A}} \ ; \ 2A = k$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$