Mecánica Intermedia (LFIS 312)

Licenciatura en Física
Profesor: J.R. Villanueva e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 1: Bases Matemáticas.

I. ANÁLISIS VECTORIAL

1. Sean los vectores

$$\vec{A} = 3\widehat{\imath} + 4\widehat{\jmath} + 5\widehat{k},$$
$$\vec{B} = -\widehat{\imath} + 4\widehat{\jmath} - 2\widehat{k},$$
$$\vec{C} = 2\widehat{\imath} - \widehat{\jmath} + \widehat{k}.$$

   Calcular: a) la suma de los vectores $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$; b) las magnitudes y los cosenos directores de los tres vectores; c) los vectores unitario en la dirección de los tres vectores; d) los productos escalares $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{A}\cdot\vec{C}$ y $\vec{B}\cdot\vec{C}$ y el ángulo entre cada par de vectores; e) los productos vectoriales $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{C}$ y $\vec{B}\times\vec{C}$; f) el triple producto $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ (¿son coplanares los vectores?); g) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{A}$ y $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{B}$

2. Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$$

   e interpretando el resultado geométricamente, demuestre la *ley de los cosenos*.

3. Demuestre la *ley de los senos* para un triángulo mediante el uso del producto cruz de un vector con $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$.

4. Pruebe que la proyección de la suma de dos vectores sobre un eje es igual a la suma de las proyecciones de los vectores sobre el mismo eje.

5. **Identidad de Lagrange:** Pruebe que si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores arbitrarios, entonces

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 \left|\vec{B}\right|^2 - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2 \tag{1}$$

6. Dado cuatro puntos con radios vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$, suponga

$$[(\vec{D}-\vec{A})\times(\vec{C}-\vec{A})]\cdot(\vec{B}-\vec{A})=0.$$

   Pruebe que los puntos son coplanares.

7. Hallar un vector unitario $\widehat{u}$ que sea perpendicular a $\vec{A}=(2,1,1)$ y a $\vec{B}=(1,-1,2)$

8. Un vector $\vec{A}$ es descompuesto en un vector radial $\vec{A}_r$ y un vector tangencial $\vec{A}_t$. Si $\widehat{r}$ es un vector unitario en la dirección radial, muestre que

$$\begin{aligned} &(a) \quad \vec{A}_r=\widehat{r}\,(\vec{A}\cdot\widehat{r}),\\ &(b) \quad \vec{A}_t=-\widehat{r}\times(\widehat{r}\times\vec{A}). \end{aligned}$$

9. Demuestre que

$$\begin{aligned} \vec{A}&=\widehat{i}\cos\alpha+\widehat{j}\sin\alpha\\ \vec{B}&=\widehat{i}\cos\beta+\widehat{j}\sin\beta \end{aligned}$$

   son vectores unitarios en el plano xy formando ángulos α,β con el eje x. Por medio de un producto escalar, obtenga la fórmula para $\cos(\alpha-\beta)$.

10. Sean $\widehat{e}_1$, $\widehat{e}_2$, $\widehat{e}_1$ una base ortonormal. ¿Es

$$\vec{a}_1=2\widehat{e}_1+\widehat{e}_2-3\widehat{e}_3,\quad \vec{a}_2=\widehat{e}_1-4\widehat{e}_3,\quad \vec{a}_3=4\widehat{e}_1+3\widehat{e}_2-\widehat{e}_3$$

   una base? ¿Lo es

$$\overrightarrow{b}_1=\widehat{e}_1-3\widehat{e}_2+2\widehat{e}_3,\quad \overrightarrow{b}_2=2\widehat{e}_1-4\widehat{e}_2-\widehat{e}_3,\quad \overrightarrow{b}_3=3\widehat{e}_1+2\widehat{e}_2-\widehat{e}_3?$$

11. Demostrar que si dos vectores tienen la misma magnitud V y hacen un ángulo θ, su suma tiene una magnitud $S=2V\cos\theta/2$ y su diferencia $D=2V\sin\theta/2$.

12. Demostrar que si la suma y la diferencia de dos vectores son perpendiculares, los vectores tienen magnitudes iguales.

13. Demostrar que si las magnitudes de la suma y la diferencia de dos vectores son iguales, entonces los vectores son perpendiculares.

14. El momentum angular $\vec{L}$ de una partícula de masa m es dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \overrightarrow{v}$, donde $\vec{p}$ es el momentum lineal. Con las velocidades lineal y angular relacionas por $\overrightarrow{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, muestre que

$$\vec{L} = mr^2 \left[\omega - \widehat{r}\,(\widehat{r} \cdot \vec{\omega})\right].$$

Aquí $\widehat{r}$ es el vector unitario en la dirección radial. Para $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ esto se reduce a $\vec{L} = I\vec{\omega}$, con el momento de inercia I dado por mr^2.

15. Es fácil demostrar que la derivada del vector $\vec{A}(t)$ de magnitud constante puede ser expresada como un producto vectorial

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}. \tag{2}$$

Sin embargo $\vec{\omega}$ no es única, ya que la suma del término $c\vec{A}$ a $\vec{\omega}$ producirá el mismo resultado. Por otro lado, la derivada de dos vectores de magnitud constante puede determinar una $\vec{\omega}$ única, en función de la cual sus derivadas son expresables en la forma

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B}.$$

(a) Demuestre la ecuación (2).

(b) Considerando los vectores unitarios

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \widehat{i} \sin\alpha t \cos\beta t + \widehat{j} \sin\alpha t \sin\beta t + \widehat{k} \cos\alpha t,\\
\vec{e}_2 &= \widehat{i} \cos\alpha t \cos\beta t + \widehat{j} \cos\alpha t \sin\beta t - \widehat{k} \sin\alpha t,\\
\vec{e}_3 &= -\widehat{i} \sin\beta t + \widehat{j} \cos\beta t,
\end{aligned}$$

hállese el vector de la velocidad angular $\vec{\omega}$ que satisface las ecuaciones

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_2.$$

(c) Demostrar que la misma $\vec{\omega}$ también nos da

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_3.$$

16. ¿Cuál debe ser el valor de c, la componente z del vector

$$\vec{A} = 3\widehat{\imath} + 4\widehat{j} + c\widehat{k},$$

para que el vector $\vec{A}$ sea perpendicular al

$$\vec{B} = -2\widehat{\imath} + 4\widehat{j} + 5\widehat{k}?.$$

17. Sea $\vec{A}(t) = A_x(t)\,\widehat{\imath} + A_y(t)\,\widehat{\jmath} + A_z(t)\,\widehat{k}$ una función vectorial y $c(t)$ un campo escalar, donde t es un escalar (el tiempo, por ejemplo). Demuestre las siguientes relaciones utilizando la definición de límites en las derivadas

$$
\begin{aligned}
&(a) \qquad \frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}.\\
&(b) \qquad \frac{d(c\vec{A})}{dt} = \frac{dc}{dt}\vec{A} + c\frac{d\vec{A}}{dt}.\\
&(c) \qquad \frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}.\\
&(d) \qquad \frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}.
\end{aligned}
$$

18. Dado el conjunto de tres vectores no coplanares $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, los vectores

$$
\begin{aligned}
\vec{a}^1 &= \frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{V},\\
\vec{a}^2 &= \frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{V},\\
\vec{a}^3 &= \frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{V},
\end{aligned}
$$

donde el volumen es $V = \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\times\vec{a}_3$, se denominan vectores recíprocos. Demostrar que $\vec{a}^i\cdot\vec{a}_i = 1$ y que $\vec{a}^i\cdot\vec{a}_j = 0$ $(i,j = 1,2,3)$. Discutir la disposición geométrica de los vectores recíprocos $\vec{a}^1$, $\vec{a}^2$, $\vec{a}^3$ en relación con $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

19. Demostrar que cualquier vector V puede escribirse en cualquiera de estas dos formas

$$
\begin{aligned}
\vec{V} &= (\vec{V}\cdot\vec{a}^1)\,\vec{a}_1 + (\vec{V}\cdot\vec{a}^2)\,\vec{a}_2 + (\vec{V}\cdot\vec{a}^3)\,\vec{a}_3\\
&= \sum_{i=1}^{3}(\vec{V}\cdot\vec{a}^i)\vec{a}_i,
\end{aligned}
$$

ó

$$
\begin{aligned}
\vec{V} &= (\vec{V}\cdot\vec{a}_1)\,\vec{a}^1 + (\vec{V}\cdot\vec{a}_2)\,\vec{a}^2 + (\vec{V}\cdot\vec{a}_3)\,\vec{a}^3\\
&= \sum_{i=1}^{3}(\vec{V}\cdot\vec{a}_i)\,\vec{a}^i.
\end{aligned}
$$

20. Denominando $V_i = \vec{V}\cdot\vec{a}_i$ y $V^i = \vec{V}\cdot\vec{a}^i$ las componentes *covariantes* y *contravariantes* de $\vec{V}$, y

$$g_{ij} = \vec{a}_i\cdot\vec{a}_j, \qquad g^{ij} = \vec{a}^i\cdot\vec{a}^j,$$

demostrar que

$$V^j = \sum_{i=1}^{3} V_i g^{ij}, \qquad V_j = \sum_{i=1}^{3} V^i g_{ij},$$

y

$$(V)^2 = \sum_{i=1}^{3} V_i V^i = \sum_{i=1}^{3} V_i V_j g^{ij} = \sum_{i=1}^{3} V^i V^j g_{ij}.$$

21. Demostrar que

$$\vec{a}^1 \cdot \vec{a}^2 \times \vec{a}^3 = \frac{1}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3}.$$

II. ANÁLISIS DIMENSIONAL.

1. En la siguiente ecuación homogénea, determine las dimensiones de x e y:

$$Wxy^2 + Fxy = ax^2y^2,$$

donde W es el peso, F es la fuerza, y a es la aceleración.

2. Dadas las expresiones: (a) $\omega v/r$, (b) ωv, (b) $v^2\omega^2/r$ en donde, ω es la velocidad angular, v la velocidad lineal y r la longitud. Determinar la o las expresiones que corresponden a una aceleración.

3. En un experimento de mecánica se necesita determinar el período de un péndulo. Intuitivamente pensamos que este podría depender de g, la aceleración de gravedad; l, el largo del péndulo; y m, la masa del objeto. Determine la expresión dimensionalmente correcta.

4. El período de un proceso físico - químico viene dado por la relación

$$T = \frac{2\pi(R+K)^x}{R\sqrt{g}},$$

donde R es un radio y g es la aceleración de gravedad. Determine x y las dimensiones de K.

5. Considere el sistema de unidades de Planck definido en clases como un sistema basado en cuatro constantes universales: constante de gravitación universal, G ; velocidad de la luz en el vacío, c ; constante de Planck, h ; y la constante de Boltzman, k_B. Determine para este sistema (a) tiempo de Planck, t_p; (b) temperatura de Planck, T_p; (c) energía de Planck, E_p; (d) Masa de Planck, M_p; (e) Densidad de Planck, ρ_p.

6. El desplazamiento de una partícula, cuando se mueve bajo aceleración uniforme, es cierta función del tiempo transcurrido y de la aceleración. Suponga que se escribe este desplazamiento $s = k\, a^m\, t^n$, donde k es una constante adimensional. Muestre mediante análisis dimensional que esta expresión se satisface si $m = 1$ y $n = 2$. ¿Este análisis puede brindar el valor de k?.

7. La potencia de una hélice impulsora de un barco es $P = k\, \omega^x\, r^y\, \rho^z$, donde k es una constante adimensional, ω es la velocidad angular, r es el radio de la hélice, ρ es la densidad del agua de mar. Halle x, y, z.

8. La formula de Bernoulli para medir la energía de un líquido que discurre es

$$E = \left(h + \frac{p}{g\rho} + \frac{v^2}{2g}\right) w,$$

donde h es la altura; p es la presión; ρ es la densidad; v es la rapidez; g es la aceleración de la gravedad; w es el peso. Verifique el principio de homogeneidad dimensional.

9. Encuentre la dimensión de Q si $Q = E\, v\, (\pi - (\mathrm{Log}K)^3)^2$, donde E es energía, v es rapidez, $\pi = 3.1415$, y K es una constante. ¿Qué dimensión debe tener la constante K?. Explique.

10. Considere una estrella vibrando, cuya frecuencia ν depende (a lo sumo) de su radio R, densidad de masa ρ y la constante gravitacional de Newton G. ¿Cómo depende ν de R, ρ y G?

11. Una burbuja de gas proveniente de una explosión profunda bajo el agua oscila con un período $T \sim p^\alpha\, \rho^\beta\, \epsilon^\gamma$ donde p es la presión estática, ρ es la densidad del agua, y ϵ es la energía total de la explosión. Encuentre α, β y γ.