Mecánica Intermedia (LFIS 312)

Licenciatura en Física

Profesor: J.R. Villanueva e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 2: Cinemática

1 Cinemática de la partícula

1.1 Movimiento unidimensional

1. Un objeto que se mueve a velocidad constante recorre una distancia de $20[m]$ en $4[s]$.
   (a) ¿ Cuál es la velocidad y aceleración del objeto?.
   (b) ¿ Qué distancia recorrerá en $9[s]$?.
   (c) ¿ Cuánto tarda en recorrer $75[m]$?.
2. La estrella más cercana a nuestro Sol está a unos $4 \times 10^{16}[m]$ de distancia. ¿ A qué velocidad tendría que ir un cohete espacial para alcanzar esta estrella en 10 años?.
3. Un ascensor sube con velocidad constante de $2[m/s]$. Cuando se encuentra a $10[m]$ sobre el nivel del suelo los cables se rompen. Prescindiendo del rozamiento,
   (a) Calcular la máxima altura a que llega la cabina.
   (b) Si los frenos de seguridad actúan automáticamente cuando la velocidad del descenso alcanza el valor de $4[m/s]$, determinar la altura en la que actúan los frenos.
4. Un coche se desplaza con movimiento acelerado desde el reposo hasta $60[m/s]$ en $11[s]$.
   (a) ¿ Cuál es su aceleración durante este período?.
   (b) ¿ Qué distancia recorre durante el período de aceleración?.
5. Dibuje un gráfico de la distancia en función del tiempo para un objeto que se mueve con aceleración constante de $4[m/s^2]$. Suponga que $v_0 = 0$.
6. En una colisión de frente, un coche que va a $60[Km/h]$ queda parado en $0.1[s]$. ¿ Cuál es la aceleración durante la colisión?.
7. Dibuje un gráfico de la posición en función del tiempo para un objeto que se mueve con velocidad constante de $12[m/s]$. Suponga que $x = 0$ cuando $t = 0$.

8. Una abeja se marcha de una estación experimental a las $15:15(h)$ y vuelve a las $15:22(h)$. Se sabe que la colmena está a $875[m]$ de la estación. ¿ Cuál es la velocidad mínima de vuelo de la abeja?.

9. Una partícula se mueve de acuerdo a la ecuación $x(t) = 10t^2$ donde x está en metros y t en segundos.
   (a) Encuentre la velocidad media para el intervalo de $2[s]$ a $3[s]$.
   (b) Encuentre la velocidad media para el intervalo de $2[s]$ a $2.1[s]$.

10. Al hacer un salto vertical, un saltamontes extiende sus patas $2.5(cm)$ en $0.025[s]$.
    (a) ¿ Cuál es su aceleración del saltamontes mientras extiende sus patas?.
    (b) ¿ Cuál es la velocidad del saltamontes cuando parte del suelo, o sea, en el instante en que sus patas están completamente extendidas?.
    (c) ¿ A qué altura se eleva el saltamontes?.

11. Se lanza hacia arriba una bola con una velocidad inicial de $12[m/s]$.
    (a) ¿ Cuánto tarda la bola en alcanzar el punto más alto?.
    (b) ¿ Cuánto sube la bola?.
    (c) ¿ Cuál es el intervalo de tiempo entre el instante en que la bola sale de la mano y vuelve a ella?.

12. Un automóvil, teniendo una velocidad inicial cero, se desplaza por un camino recto, primero con una aceleración $a = 5\,[m/s^2]$, luego con una velocidad uniforme y, finalmente reduciendo su velocidad con la misma aceleración a, se detiene. Durante este tiempo $t = 25\,[s]$ la velocidad media fue $\overline{v} = 72\,[km/h]$. ¿ Qué tiempo el automóvil mantuvo una velocidad uniforme?.

13. Una partícula se en la dirección positiva del eje x de modo que su velocidad varía según la ley $v = \alpha\sqrt{x}$, donde α es una constante positiva. Teniendo en cuenta que en el momento $t = 0$ se encontraba en el punto $x = 0$, determinar:
    (a) la dependencia de la velocidad y de la aceleración respecto del tiempo;
    (b) la velocidad media de la partícula en el tiempo, en el transcurso del cual recorre los primeros s metros.

14. Un tren, cuya longitud es $l = 350\,[m]$, empieza su recorrido por una via recta con una aceleración constante, $a = 3 \times 10^{-2}\,[m/s^2]$. Pasado un tiempo $t_1 = 30\,[s]$ de haberse iniciado el movimiento fue conectado el reflector de la locomotora (evento 1) y transcurrido un tiempo $t_2 = 60\,[s]$ desde este instante, la lámpara de señales en la cola del tren (evento 2). Hallar la distancia entre los puntos en que se produjeron estos eventos en un sistema de referencia ligado con el tren y la tierra. ¿Cómo y a qué velocidad constante V respecto a la tierra debe desplazarse cierto sistema de referencia K, para que en él ambos acontecimientos tengan lugar en un mismo punto?.

15. Un punto se mueve retardadamente en línea recta con una aceleración cuyo módulo depende de la velocidad v según la ley $a = \beta\sqrt{v}$, donde β es una constante positiva. La velocidad del punto en el instante inicial es igual a v_0. ¿ Qué distancia recorrerá aquél hasta detenerse? ¿ En qué tiempo hará este recorrido?.

16. Las partículas 1 y 2 se mueven con velocidades constantes v_1 y v_2 por dos líneas rectas, mutuamente perpendiculares, hasta el punto de su intersección O. En el instante $t = 0$ las partículas se encontraban las distancias l_1 y l_2 del punto O. ¿Al cabo de qué tiempo la distancia entre las partículas resultará ser mínima? ¿Cuál será esta distancia mínima?.

17. Un móvil describe un movimiento rectilíneo. En la FIG.1, se representa su velocidad en función del tiempo. Sabiendo que en el instante $t = 0$, parte del origen $x = 0$.

    (a) Dibuje una gráfica de la aceleración en función del tiempo.

    (b) Calcule el desplazamiento total del móvil, hasta el instante $t = 9[s]$.

    (c) Escriba la expresión de la posición x del móvil en función del tiempo t, en todos los tramos.

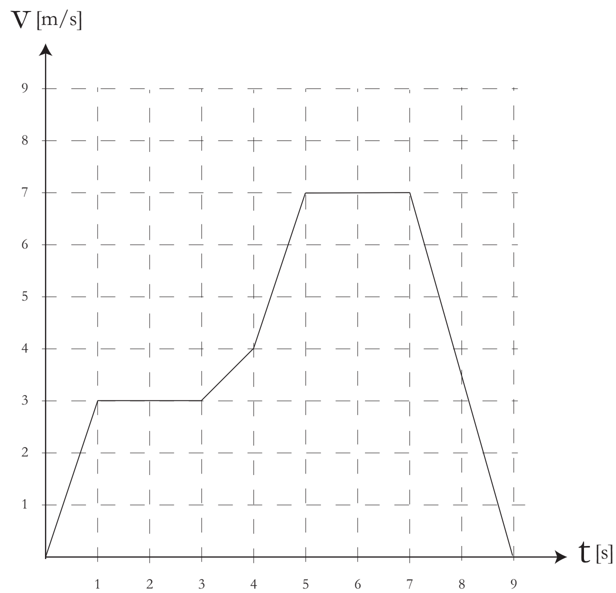

Figure 1: Gráfico v en función de t del problema 17.

18. Una pelota dejada caer desde la cornisa de un edificio emplea 0.25 segundos en pasar frente a una ventana de $2[m]$ de altura. ¿ Qué distancia hay entre el borde superior de la ventana y la cornisa?

19. Un punto recorre la mitad del camino con velocidad v_0. La parte restante la hace a una velocidad v_1 la mitad del tiempo, y a la velocidad v_2 el trayecto final. Determinar la velocidad media del punto durante el recorrido.

1.2 Movimiento en el plano y en el espacio

20. Obtener las componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración de la partícula cuyo vector posición está dado por

    (a) $\overrightarrow{r} = A \cos n\omega t\widehat{i} + B \sin m\omega t\widehat{j}, \quad n, m$ enteros.

    (b) $\overrightarrow{r} = 3t\widehat{i} - 4t\widehat{j} + (t^2 + 3)\widehat{k}$.

    (c) $\overrightarrow{r} = a(t - \sin \omega t)\widehat{i} + a(t - \cos \omega t)\widehat{j}$.

    (d) $\overrightarrow{r} = (a_1 + b_1 t + c_1 t^2)\widehat{i} + (a_2 + d_2 e^{-kt})\widehat{j}$.

21. El vector posición de una partícula varía en función del tiempo t según la ley $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{a}\, t(1 - \alpha t)$, donde $\overrightarrow{a}$ es un vector constante y α es una constante positiva. Determinar

(a) la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración de la partícula en función del tiempo;

(b) el intervalo de tiempo Δt, al cabo del cual la partícula retorna al origen, así como la distancia s que ella recorre.

22. En el momento $t = 0$ una partícula sale desde el origen de las coordenadas en dirección positiva del eje x. Su velocidad varía en función del tiempo según la ley $\vec{v} = \vec{v}_0\,(1 - t/\tau)$, donde $\vec{v}_0$ es la velocidad inicial, cuyo módulo es $v_0 = 10\,[cm/s]$, y $\tau = 5\,[s]$. Hallar

    (a) la coordenada x de la partícula en los instantes $t_1 = 6\,[s]$, $t_2 = 10\,[s]$ y $t_3 = 20\,[s]$;

    (b) los instantes de tiempo, en que la partícula se encuentra a la distancia $d = 10\,[cm]$ del origen de las coordenadas;

    (c) la distancia s, recorrida por la partícula en los primeros 4 y 8 segundos; Haga un gráfico dela función $s(t)$.

23. Desde una torre de altura H se lanza un objeto haciendo un ángulo α por debajo de la horizontal y con velocidad $v_i = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}$, como es mostrado en la FIG.2. Al mismo tiempo se lanza verticalmente otro objeto con velocidad desconocida v_0 desde el suelo a una distancia D de la torre. Conocidos H, α, v_i y D, (a) Determine la velocidad v_0, el instante y la posición de encuentro de los objetos. (b) Calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración del primer objeto en el instante de encuentro. (c) Calcule la magnitud y la dirección de la velocidad del primer objeto en el instante de la colisión.

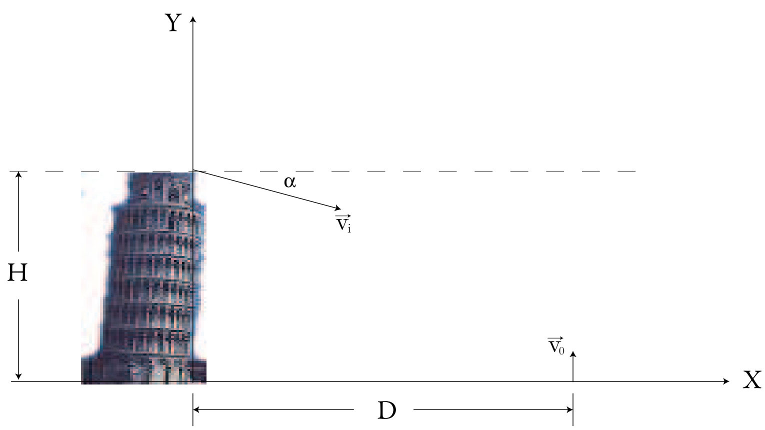

Figure 2: Esquema del problema 23

24. Una botella se deja caer desde el reposo en la posición $x = 20[m]$ e $y = 30[m]$. Al mismo tiempo se lanza desde el origen una piedra con una velocidad de $15[m/s]$.
    (a) Determine el ángulo con el que tenemos que lanzar la piedra para que rompa la botella, calcule la altura a la que ha ocurrido el choque.
    (b) Dibujar en la misma gráfica la trayectoria de la piedra y de la botella.

25. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad $v_o = 100[m/s]$. Medio segundo después, con la misma arma, se dispara un segundo proyectil en la misma dirección. Determinar: (a) La altura a la que se encuentran ambos proyectiles. (b) La velocidad de cada uno al encontrarse. (c) El tiempo transcurrido desde el primer disparo hasta el choque.

26. Calcular la velocidad angular de cada una de las manecillas de un reloj.

27. Las ruedas de un automóvil tienen $60[cm]$ de diámetro. Calcule con qué velocidad angular giran, cuando el automóvil marcha a $72[km/h]$ en un camino rectilíneo, sin que resbalen.

28. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón gira alrededor del protón en una órbita circular de $0.53 \times 10^{-10}[m]$ de radio con una rapidez de $2.18 \times 10^{6}[m/s]$. a) ¿Cuál es la aceleración del electrón en el átomo de hidrógeno? b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta que actúa sobre él?

29. Un punto material describe una circunferencia de $2[m]$ de radio con aceleración constante. En el punto A la velocidad es de $0.5[m/s]$ y transcurridos dos segundos la velocidad en B es $0.75[m/s]$. Calcula la aceleración tangencial, normal y total en el punto A.

30. Un ciclista parte del reposo en un velódromo circular de $50[m]$ de radio y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, hasta que, a los $50[s]$ de iniciada su marcha, alcanza una velocidad de $36[km/h]$; desde este momento conserva su velocidad. Calcula:

    (a) la aceleración tangencial y la aceleración angular en la primera etapa del movimiento
    (b) la aceleración normal y la aceleración total en el momento de cumplirse los $50[s]$.
    (c) la longitud de pista recorrida en los $50[s]$.
    (d) la velocidad tangencial media y la velocidad angular media en la primera etapa del movimiento.
    (e) el tiempo que tarda en dar una vuelta a la pista, con velocidad constante.
    (f) el número de vueltas que da en $10[min]$, contados desde que inició el movimiento.

31. Una partícula se mueve en el sentido de la agujas del reloj sobre una circunferencia de radio $R = 1[m]$ con su centro en $(x, y) = (1, 0)[m]$. La partícula parte del reposo en el origen en el instante $t = 0[s]$ y su velocidad crece con aceleración constante de $(\pi/2)[m/s^2]$. En el instante en que la partícula ha recorrido la mitad de la circunferencia, calcular:

    (a) Tiempo que ha transcurrido.
    (b) Módulo y dirección de su velocidad.
    (c) Aceleración normal y tangencial.
    (d) Ángulo que forman los vectores velocidad y aceleración.

32. Pruebe que la velocidad de una partícula en un espacio tri-dimensional es independiente de el origen fijado, sobre el cual su vector posición está referido.

33. En el transcurso de tiempo $t = 10\,[s]$ un punto recorrió la mitad de una trayectoria circular de radio $R = 160\,[cm]$. Calcular

    (a) la velocidad media $\overline{v}$;
    (b) la aceleración media $\overline{a}$.

34. La velocidad de un tren se incrementa a una razón constante A desde 0 a V, entonces permanece constante por un intervalo, finalmente decrece a 0 a una razón constante B. Si S es la distancia total recorrida, pruebe que el tiempo total transcurrido es

$$\frac{S}{V} + \frac{1}{2}V\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right).$$

35. Una partícula se mueve con una aceleración constante a lo largo de la curva $x_2 = x_1/100$ desde el punto A al punto B. La velocidad de la partícula en A es de 10 [m/s], y 10 [s] después, en el punto B está viajando a 50 [m/s]. Determine la aceleración total de la partícula en el punto B.

36. Una escalera de longitud b reposa sobre un muro vertical (Figura 3). La base de la escalera es separada con una velocidad constante v_0.

   (a) Muestre que el punto medio M de la escalera describe un arco de un circulo de radio $b/2$ con centro en O.

   (b) Encuentre la velocidad del punto medio M en el momento en que la base de la escalera está a una distancia $a < b$ desde el muro.

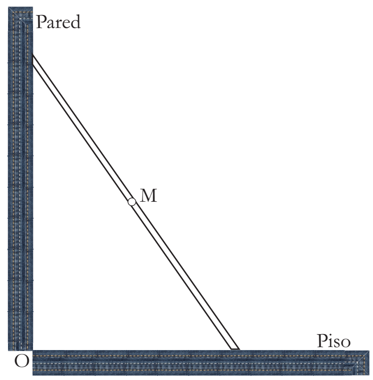

Figure 3: Esquema del problema 36

37. Un jugador de béisbol golpea la bola a $0.9[m]$ del suelo de manera que ésta adquiere una velocidad de $14.4[m/s]$ formando un ángulo de $30°$ sobre la horizontal. Un segundo jugador, situado a $30[m]$ del bateador y en el plano de la trayectoria de la bola, comienza a correr en el mismo instante en el que el primero golpea la bola.

   (a) Calcular cuál ha de ser la mínima velocidad del segundo jugador si es capaz de coger la bola a $2.4[m]$ del suelo.

   (b) ¿ Qué distancia ha recorrido el segundo jugador?.

38. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria tal que su radio vector es dado por

$$\vec{r}(t) = A\left(e^{\alpha t}\,\widehat{e}_1 + e^{-\alpha t}\,\widehat{e}_2\right),$$

donde A y α son constantes. Encuentre la velocidad y dibuje la trayectoria.

39. Una partícula se mueve a lo largo de una curva espacial $\mathcal{C}$ con un vector posición dado por

$$\vec{r} = A\,\cos\omega t\,\widehat{e}_1 + B\,\sin\omega t\,\widehat{e}_2 + (Ct - D)\,\widehat{e}_3,$$

donde A, B, C, D y ω son constantes.

   (a) Encuentre un vector unitario tangente $\widehat{e}_T$ a la curva $\mathcal{C}$, y muestre que $\vec{v} = v\,\widehat{e}_T$.

   (b) Encuentre la curvatura, el radio de curvatura y el vector unitario normal $\widehat{e}_N$ a la curva $\mathcal{C}$.

40. Obtener las expresiones de las componentes azimutales de la velocidad y la aceleración de las partículas cuyo vector bidimensional de posición sea:

   (a) $r = \frac{5}{2-\cos\phi}$, $\qquad \phi = \omega t$

(b) $r = A\cos\omega_1 t, \qquad \phi = \omega_2 t$

(c) $r = a/t, \qquad \phi = bt$

41. Una partícula se mueve en el espacio a lo largo de una trayectoria cuyas ecuaciones paramétricas son dadas por $x_1 = b\sin(\omega t)$, $x_2 = b\cos(\omega t)$, $x_3 = c$, donde b y c son constantes.

    (a) Encuentre su vector posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$, y aceleración $\vec{a}$ para cualquier tiempo t.

    (b) Muestre que la partícula recorre su camino con velocidad constante y que su distancia al origen permanece constante.

    (c) Muestre que la aceleración es perpendicular a la velocidad y al eje x_3.

    (d) Determine la trayectoria de la partícula, esto es, el camino descrito en términos de las coordenadas espaciales solamente. Dibuje la trayectoria.

42. Considere una partícula moviéndose en la órbita elíptica

$$r(\phi) = \frac{a(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon\,\cos\phi},$$

donde a y ε son constantes, bajo la condición $mr^2\dot{\phi} = \ell$, con m y ℓ constantes. Determine la aceleración radial y tangencial de la partícula.

43. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $x_1 = 2t^2$, $x_2 = t^2 - 4t$, $x_3 = 3t - 5$, donde t es el tiempo. Encuentre las componentes de la velocidad y aceleración de la partícula al tiempo $t = 1\,[s]$ en la dirección $\widehat{e}_1 - 3\widehat{e}_2 + 2\widehat{e}_3$.

44. Hállense la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una hélice circular definida por las coordenadas cilíndricas:

$$\rho = a, \qquad \phi = bt, \qquad z = -ct.$$

45. Hallar las componentes esféricas de la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector posición se especifica por

$$r = b, \qquad \theta = \theta_0\cos\omega t, \qquad \phi = \omega t.$$

46. Hallar la velocidad y la aceleración de una partícula en coordenadas parabólicas (η, ξ, ϕ), donde

$$x = \eta\xi\cos\phi, \qquad y = \eta\xi\sin\phi, \qquad z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2),$$

o bien,

$$\xi^2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + z, \qquad \eta^2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - z, \qquad \phi = \arctan\frac{y}{x}.$$

47. Hallar la velocidad y la aceleración de una partícula en coordenadas cilíndricas elípticas (ζ, σ, z), donde

$$x = \frac{1}{2}a\cosh\zeta\cos\sigma, \qquad y = \frac{1}{2}a\sinh\zeta\sin\sigma, \qquad z = z,$$

o bien,

$$a\left(\frac{\cosh\zeta+\cos\sigma}{2}\right) = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}a\right)^2 + y^2}, \qquad a\left(\frac{\cosh\zeta-\cos\sigma}{2}\right) = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2 + y^2}.$$

48. Encuentre la velocidad y la aceleración de una partícula cuya órbita polar viene dada por

   (a) $r(\phi) = a\, e^{b\phi}$

   (b) $r(\phi) = a + b\,\phi$

   (c) $r(\phi) = a \cos b\phi$

   donde a y b son constantes positivas.

49. Determine las expresiones de la velocidad y la aceleración en

   (a) coordenadas Toroidales

   $$x = x(\lambda, \mu, \alpha) = r\cos\alpha; \qquad y = y(\lambda, \mu, \alpha) = r\sin\alpha; \qquad z = z(\lambda, \mu, \alpha) = r\frac{\sin\mu}{\cosh\lambda + \cos\mu};$$

   donde
   $$r = \frac{\sinh\lambda}{\cosh\lambda + \cos\mu}.$$

   (b) coordenadas Elipsoidales

   $$x = x(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}; \qquad y = y(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}};$$

   $$z = z(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}},$$

   donde $a > b > c > 0$.