Mecánica Intermedia (LFIS 312)

Licenciatura en Física

Profesor: J.R. Villanueva   e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 5

1. Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerza conservativa. Encontrar el Lagrangiano y la ecuación del movimiento en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

2. Una argolla desliza sin fricción en un alambre liso en la forma de una cicloide con las ecuaciones

$$x = a\,(\theta - \sin\theta), \qquad y = a\,(1 + \cos\theta),$$

donde a es una constante y $0 < \theta \leq 2\pi$. Encuentre el Lagrangiano y la ecuación de movimiento.

3. Derive la ecuación de movimiento de Lagrange para un disco delgado uniforme que rueda sin resbalar en un plano horizontal bajo la influencia de una fuerza horizontal aplicada en su centro. Determine la fuerza generalizada.

4. Una partícula, que se mueve en el potencial $V(x) = -F\,x$, se desplaza desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = a$ en un intervalo de tiempo τ. Encuentre la dependencia del tiempo de la posición de la partícula, suponiendo que es de la forma $x(t) = A\,t^2 + B\,t + C$ y determine las constantes A, B, y C de tal manera que la acción sea un mínimo.

5. Una forma del puente de Wheatstone tiene, además de las cuatro resistencias usuales, una inductancia en una rama y un condensador en la rama opuesta. Establecer el Lagrangiano L y la función disipación $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_j R_j\,\dot{q}_j$ para el puente sin balancear, siendo las coordenadas las cargas de los elementos. Utilizando la ley de Kirchhoff para los nodos como ligaduras de las intensidades de corriente, obtener las ecuaciones de Lagrange y demostrar que eliminando los multiplicadores λ se reducen a las ecuaciones usuales de redes.

6. Un aro uniforme de masa m y radio r rueda sin deslizar sobre un cilindro fijo, como se muestra en la figura 1 (a). La única fuerza exterior es la de la gravedad. Si el cilindro más pequeño empieza a rodar desde el reposo en la parte superior del cilindro más grande, utilizar el método de los muliplicadores de Lagrange para encontrar el punto en el que el aro se cae del cilindro.

7. Una partícula de masa m desliza sin rozamiento por una cuña de ángulo α y masa M que puede deslizar sin rozamiento sobre una superficie lisa horizontal (ver figura 1 (b)). Tratando la ligadura de la partícula sobre la cuña por el método de los multiplicadores de Lagrange, hallar las ecuaciones de movimiento de la partícula y la cuña. Obtener también una expresión para las fuerzas de ligadura. Calcular el trabajo efectuado en el tiempo t por las fuerzas de ligadura que se ejercen sobre la partícula y sobre la cuña. ¿Cuáles son las constantes de movimiento del sistema? Contrastar los resultados obtenidos con la situación cuando la cuña

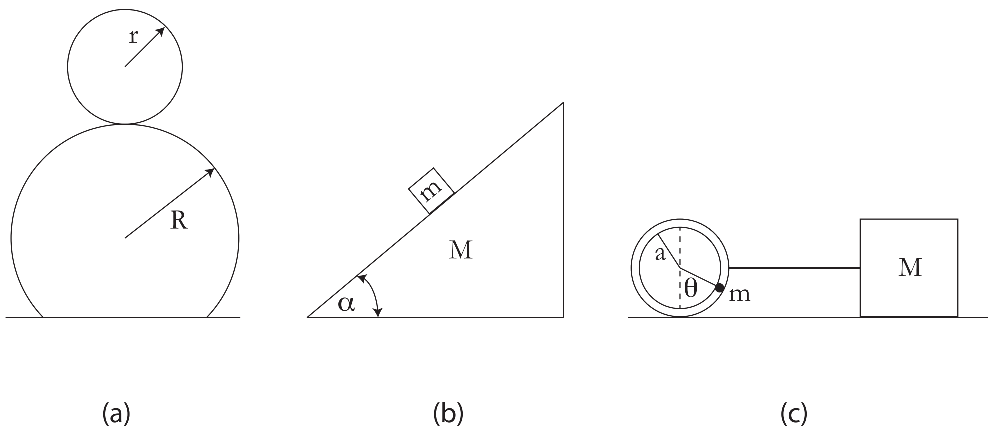

Figure 1: (a) Esquema del problema 6; (b) Esquema del problema 7; Esquema del problema 8

está fija. [*SUGERENCIA:* Para la partícula podemos utilizar o un sistema de coordenadas cartesianas con y vertical, o uno con y normal a la cuña o, lo que es aún más instructivo, hacerlo en ambos sistemas.]

8. Un bloque de masa M está conectado rígidamente una pista circular sin masa de radio a en una mesa horizontal sin fricción como es mostrado en la figura 1 (c). Una artícula de masa m está confinada a moverse sin fricción en la pista circular la cual es vertical.

   (a) Escriba el Lagrangiano, usando θ como una coordenada.

   (b) Encuentre las ecuaciones de movimiento.

   (c) en el límite de ángulo pequeños, resuelva las ecuaciones de movimiento para θ como una función del tiempo.

9. Estudie la *máquina de Atwood* considerando que la polea de radio a tiene un momento de inercia I. ¿Cuáles son las condiciones para que las tensiones sean iguales?

10. El término *mecánica generalizada* se usa para designar una variedad de la mecánica clásica en la que la función de Lagrange contiene derivadas de q_i respecto al tiempo de orden más alto que el primero. Mediante la aplicación del método de cálculo variacional, demostrar que si hay una función de Lagrange de la forma $L(q, \dot{q}_i, \ddot{q}, t)$, y se cumple el principio de Hamilton con la variación cero de q_i y de $\dot{q}_i$, en los puntos extremos, las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

   Aplique este resultado al Lagrangiano

$$L = -\frac{m}{2} q\,\ddot{q} - \frac{k}{2} q^2.$$

   ¿Reconoce las ecuaciones de movimiento?

11. Supongamos que se supiera experimentalmente que una partícula caía a una distancia dada y_0 en un tiempo $t_0 = \sqrt{2y_0/g}$, pero no se conociera el tiempo de caída para distancias distintas de

y_0. Supongamos, además, que se conoce el Lagrangiano del problema pero en vez de resolver la ecuación de movimiento para obtener y, se supone que la forma funcional es

$$\int_0^{t_0} L\,\mathrm{d}t.$$

Si se ajustan las constantes a y b siempre de manera que el tiempo correspondiente a una caída y_0 venga dado correctamente por t_0, demostrar que la integral

$$y = at + bt^2$$

será un extremo para valores reales de los coeficientes solamente cuando $a = 0$ y $b = g/2$.

12. En óptica geométrica, la trayectoria de un rayo de luz viene dada por el principio de Fermat, el cual establece que un rayo viaja entre dos puntos fijos de tal manera que el tiempo de tránsito es estacionario con respecto a pequeñas variaciones en el camino. Considere la propagación de un rayo de luz en la atmósfera, asumiendo que el índice de refracción n es sólo función de la distancia desde el centro de la tierra. Exprese el principio de Fermat en forma integral. Derive la siguiente ecuación para un rayo en la atmósfera:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = r\,(k\,n^2\,r^2 - 1)^{1/2},$$

donde k es una constante y (r, ϕ) son las coordenadas polares de un punto sobre el rayo con el centro de la tierra como origen. Si n es proporcional a r^m, encuentre el valor de m tal que el rayo inicialmente en una dirección tangencial (paralelo a $\widehat{\phi}$) permenezca a una distancia constante al centro de la tierra para cualquier valor de r.

13. (a) Considere la funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \phi(y, y')\,\mathrm{d}x,$$

donde ϕ es independiente de x. Muestre que la ecuación de Euler-Lagrange tiene una primera integralm de la forma $\phi - y'(\partial\phi/\partial y')$ =const.

(b) Una cuerda flexible de longitud ℓ ($> 2x_0$) cuelga entre dos soportes a la misma altura separados por una distancia $2x_0$. Minimice la energía potencial, incorporando la ligadura de ℓ fijo con un multiplicador de Lagrange. Usando el resultado de la parte (a), integre para encontrar la ecuación explícita para la forma de la cuerda. Si $\ell = 4x_0$, ¿qué tan lejos está el centro de la cuerda con respecto a la línea de unión de los soportes?

14. De acuerdo a la mecánica cuántica, una partícula de masa m en una caja rectangular de lados a, b, c tiene energía

$$E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Asumiendo que la caja tiene volumen constante, muestre que la energía es mínima si la caja es un cubo ($a = b = c$).

15. Considere un cuerda de longitud fija suspendida desde dos puntos fijos. Muestre que la forma que minimiza la energía potencial es un *coseno hiperbólico*.

16. Una partícula relativista tiene una cuadrivelocidad

$$U^\alpha = (\gamma c, \gamma \vec{v}),$$

donde $\gamma^{-1} = \sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$, v es la velocidad de la partícula y c la velocidad de la luz en el vacío. Asumiendo que el movimiento es en una dimensión, muestre que el Lagrangiano definido por

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - V,$$

donde la energía potencial V es independiente de la velocidad, provee las ecuaciones de movimiento correctas. Encuentre el momento generalizado.

17. Dos puntos de masa m están unidos por una varilla rígida y sin peso de longitud ℓ, el punto medio de la cual está obligado a moverse sobre una circunferencia de radio a. Escribir la energía cinética en coordenadas generalizadas.

18. Un punto material se mueve por el espacio bajo la influencia de una fuerza derivable de un potencial generalizado de la forma

$$U(\vec{r}, \vec{v}) = V(r) + \vec{\sigma} \cdot \vec{L},$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición trazado desde un punto fijo, $\vec{L}$ es el momentum angular respecto a dicho punto y $\vec{\sigma}$ es un vector fijo en el espacio.

   (a) Hallar las componentes de la fuerza que se ejerce sobre la partícula en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas, basándose en la ecuación

   $$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

   (b) Demostrar que las componentes en los dos sistemas de coordenadas están relacionadas entre sí como en la ecuación

   $$Q_j = \sum_j \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

   (c) Obtener las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas.

19. Una partícula se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza, dirigida hacia un centro de fuerzas, cuya magnitud es

$$F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\,\ddot{r}}{c^2}\right), \tag{1}$$

donde r es la distancia de la partícula al centro de fuerzas. Hallar el potencial generalizado que da lugar a dicha fuerza y a partir de él, la lagrangiana para el movimiento en un plano. (La expresión (1) representa la fuerza entre dos cargas en la electrodinámica de Weber.)

20. Sea $q_1, \ldots, q_n$ un sistema de coordenadas generalizadas independientes para un sistema de n grados de libertad, con una lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$. Supongamos que lo transformamos en otro sistema de coordenadas independientes $s_1, \ldots, s_n$, por medio de ecuaciones de transformación

$$q_i = q_i(s_1, \ldots, s_n, t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(A una tal transformación se le da el nombre de *transformación de punto*.) Demostrar que si se expresa la lagrangiana en función de s_j, $\dot{q}_j$ y t mediante las ecuaciones de transformación, L satisfará las ecuaciones de Lagrange respecto a las coordenadas s:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0.$$

Dicho de otro modo, la forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo una transformación de punto.

21. Una lagrangiana para un sistema físico particular se puede escribir en la forma

$$L' = \frac{m}{2}\left(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right),$$

donde a, b y c son constantes arbitrarias pero sometidas a la condición $b^2 - ac \neq 0$. ¿Cuáles son las ecuaciones de movimiento? Examinar particularmente los dos casos $a = c = 0$ y $b = 0$, $c = -a$. ¿Cuál es el sistema físico descrito por la anterior lagrangiana? Demostrar que la lagrangiana usual definida como $L = T - U$ está relacionada con L' por una transformación de punto. ¿Cuál es el significado de la condición impuesta al valor $b^2 - ac$?

22. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión de tal manera que tiene la lagrangiana

$$L = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 V(x) - V^2(x),$$

donde $V(x)$ es una cierta función derivable de x. Hallar la ecuación de movimiento para $x(t)$ y describir la naturaleza física del sistema basándonos en esta ecuación.

23. Obtener la lagrangiana y las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble, en donde las longitudes de los péndulos son l_1 y l_2, y las masas correspondientes son m_1 y m_2.

24. El campo electromagnético es invariante ante una transformación de los potenciales escalar y vector dada por

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t), \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

donde $\psi(\vec{r}, t)$ es arbitraria (pero derivable). ¿Qué efecto tendrá esta transformación sobre la lagrangiana de una partícula que se mueve en un campo electromagnético? ¿Se ve afectado el movimiento?

25. Obtener la ecuación del movimiento de una partícula que caiga verticalmente bajo la influencia de la gravedad cuando estén presentes fuerzas de rozamiento que se obtengan de una función de disipación $\frac{1}{2}kv^2$. Integrar la ecuación para obtener la velocidad en función del tiempo y demostrar que la velocidad máxima posible para una caída a partir del reposo es $v = mg/k$.