Mecánica Intermedia (LFIS 312)

Licenciatura en Física

Profesor: J.R. Villanueva e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 8

---

1. Escriba el Hamiltoniano para un péndulo doble plano.

2. Considere el siguiente Lagrangiano:

$$L = A\,\dot{x}^2 + B\,\dot{y} + C\,\dot{x}\,\dot{y} + \frac{D}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{1}$$

   donde A, B, C y D son constantes. Determine el Hamiltoniano.

3. Un péndulo simple de longitud ℓ y masa m está suspendido de tal forma que su punto de soporte se mueve uniformemente en un circulo vertical de radio a. Obtenga las ecuaciones de movimiento de Hamilton. ¿Cuál es el momentum canónico?

4. Obtenga el Hamiltoniano para un planeta en órbita en torno al Sol en coordenadas polares planas. Determine las ecuaciones de Hamilton para el movimiento.

5. Un péndulo esférico consiste de una partícula de masa m en un campo gravitacional restringuida a movérse sobre la superficie de una esfera de radio R. Use el ángulo polar θ (medido desde la vertical hacia abajo) y el ángulo azimutal para obtener las ecuaciones de movimiento en la formulación Hamiltoniana. Expanda el Hamiltoniano a segundo orden en torno al movimiento circular uniforme en $\theta = \theta_0$ y muestre que la expresión resultante es justamente aquella obtenida para el oscilador armónico simple con $\omega^2 = [g/\ell \cos\theta_0](1+3\cos^2\theta_0)$.

6. Una partícula se mueve en un potencial central $V(r)$. Use coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) para obtener el Hamiltoniano. Derive las ecuaciones de movimiento.

7. El movimiento relativista de una partícula en un potencial estático $V(\vec{r})$ puede ser obtenido a partir del Lagrangiano

$$L = -m\,c^2\,\sqrt{1 - v^2/c^2} - V(\vec{r}). \tag{2}$$

   (a) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange y verifique la aseveración anterior.

   (b) Encuentre el momento canónico $\vec{p}$ y muestre que el Hamiltoniano relativista viene dado por

$$H = \sqrt{m^2\,c^4 + p^2\,c^2} + V(\vec{r}). \tag{3}$$

   ¿Es el Hamiltoniano una constante de movimiento?

(c) Asuma que V es esféricamente simétrico. Muestre que $\vec{r}\times\vec{p}$ es una constante de movimiento. De esta forma, reduzca H a la forma

$$H = c\sqrt{m^2\,c^2 + p_r^2 + r^{-2}\,p_\phi^2} + V(r). \tag{4}$$

8. Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerza cuyo potencial en coordenadas esféricas es

$$V(r,\theta) = -\frac{k\cos\theta}{r^2}, \tag{5}$$

donde k es una constante. Obtenga las ecuaciones de movimiento canónicas.

9. Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerza central atractivo que tiene una magnitud

$$f(r,t) = \frac{k}{r^2}e^{-\alpha t}, \tag{6}$$

donde k y α son constantes, t es el tiempo, y r es la distancia entre m y el centro de fuerzas. Encuentre el Lagrangiano y el Hamiltoniano. Compare el Hamiltoniano con la energía total del sistema y discuta la conservación de energía para el sistema.

10. Una partícula de carga eléctrica e y masa m está moviéndose en un campo electromagnético con $\Phi = 0$ y $\vec{A} = \widehat{k}\,A_z(x,y,z)$.

(a) Use la ecuación de fuerza de Lorentz

$$m\,\ddot{\vec{r}} = e\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\,\dot{\vec{r}}\times\vec{B}(\vec{r},t)\right] \tag{7}$$

para construir la primera integral explícita $\dot{z} + e\,A_z/mc = C$ (cte).

(b) Muestre que las ecuaciones para x e y pueden ser escritas como

$$\ddot{\vec{r}}_\perp = -\nabla_\perp\frac{(C - e\,A_z/mc)^2}{2} \tag{8}$$

(c) Considere un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\,\widehat{i}$. Integre estas ecuaciones para mostrar que la partícula ejecuta una hélice en torno a la dirección $\widehat{i}$ con una frecuancia angular eB_0/mc.

11. Construya, a partir de primeros principios, el Hamiltoniano para un oscilador armónico unidimensional de masa m y constante de resorte k. Determine el valor de la constante C para que las siguientes ecuaciones definan una transformación canónica de las antiguas variables (q,p) a las nuevas variables (Q,P):

$$Q = C(p + i\,m\omega q), \qquad \text{y} \qquad P = C(p - i\,m\omega q), \tag{9}$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$. ¿Cuál es la función generatriz $S(q,P)$ para esta transformación? Encuentre las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables e intégrelas. De esta forma, encuentre la solución al problema original. (Esta transformación define los operadores de creación y aniquilación de la Mecánica Cuántica.)

12. Muestre que la siguiente transformación es canónica:

$$Q = \sqrt{2q}\,e^t\cos p \qquad P = \sqrt{2q}\,e^{-t}\sin p \tag{10}$$

13. Demostrar las siguientes propiedades de los paréntesis de Poisson para las funciones $f(q,p), g(q,p), h(q,p)$

(a) $\{f, g\} = -\{g, f\}$

(b) $\{f, c\} = 0$, donde c es una constante.

(c) $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$

(d) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$

(e) $\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$

(f) $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$

(g) $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ (identidad de Jacobi)

14. Determine los paréntesis de Poisson formado por las componentes cartesianas del momentum $\vec{p}$ y del momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

15. Determine los paréntesis de Poisson formados a partir de las componentes del momentum angular $\vec{L}$

16. Muestre, usando paréntesis de Poisson, que la siguiente transformación es canónica

$$Q = \sqrt{e^{-2q} - p^2}, \qquad P = \arccos\left(p\, e^q\right) \tag{11}$$

17. (a) Pruebe que la siguiente transformación es canónica:

$$Q = p \cot q, \quad P = \log[\sin(q/p)]$$

(b) Encuentre la función generatriz $F_1(q, Q)$ para esta transformación.

18. ¿Bajo que condición la siguiente transformación es canónica?

$$Q = q + ip, \quad P = Q^*$$

19. Considere la siguiente función generatriz

$$F_2(q, P) = (q + P)^2.$$

Obtenga las ecuaciones de transformación.

20. El hamiltoniano para un cuerpo de masa m en caída libre es

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz,$$

donde g es la aceleración de gravedad. Determine la función generatriz $F_4(p, P)$ si $K = P$.

21. (a) Pruebe que la función $S_0(q, P) \equiv \sum_\sigma q_\sigma P_\sigma$ genera la transformación identidad $Q_\sigma = q_\sigma$, $P_\sigma = p_\sigma$.

(b) Pruebe que la función $S_0 + H\,\mathrm{d}t$ genera la transformación dinámica desde t a $t + \mathrm{d}t$, con $Q_\sigma = q_\sigma(t + \mathrm{d}t)$, $P_\sigma = p_\sigma(t + \mathrm{d}t)$. Discuta el corolario de que la evolución temporal de cualquier sistema mecánico (no importando que tan complicado sea) es sí mismo una transformación canónica.

(c) Para un sistema descrito en coordenadas cartesianas, use los resultados precedentes para probar que las funciones $S_0 + \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ y $S_0 + \widehat{n} \cdot \vec{L}\,\mathrm{d}\phi$ generan traslaciones infinitesimales $\mathrm{d}\vec{r}$ y rotaciones $\widehat{n}\,\mathrm{d}\phi$, respectivamente, donde $\vec{P}$ y $\vec{L}$ son los momenta lineal total y angular total.

22. Use las variables de acción angular para encontrar las frecuencias de un oscilador armónico tridimensional con constantes de resortes distintas k_x, k_y, k_z