Ejercicios prueba 1 Mecánica Intermedia.

Carlos Pincheira

11/09/25

1 Cinemática de la partícula

Ejercicio 1. *Una partícula se en la dirección positiva del eje x de modo que su velocidad varía según la ley*

$$v = \alpha\sqrt{x},$$

donde α es una constante positiva. Teniendo en cuenta que en el momento $t = 0$ se encontraba en el punto $x = 0$, determinar:

(a) la dependencia de la velocidad y de la aceleración respecto del tiempo.

(b) la velocidad media de la partícula en el tiempo, en el transcurso del cual recorre los primeros s metros. .

Se nos da que la partícula se mueve en la dirección positiva del eje x con

$$v = \frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x}, \quad \alpha > 0, \quad x(0) = 0.$$

(a) **Dependencia de la velocidad y la aceleración respecto del tiempo:**

La ecuación diferencial se puede separar:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha\, dt.$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x} = \alpha t + C.$$

Aplicando la condición inicial $x(0) = 0$, se obtiene $C = 0$, por lo que:

$$2\sqrt{x} = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{\alpha t}{2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{\alpha^2 t^2}{4}.$$

La velocidad como función del tiempo es:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2 t^2}{4}\right) = \frac{\alpha^2}{2}t.$$

La aceleración es:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{(constante)}.$$

(b) **Velocidad media durante el tiempo en que recorre los primeros s metros:**

Primero determinamos el tiempo T en el que la partícula recorre $x(T) = s$:

$$s = \frac{\alpha^2 T^2}{4} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\sqrt{s}}{\alpha}.$$

La velocidad media se define como

$$\bar{v} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{s}{T} = \frac{s}{2\sqrt{s}/\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{s}}{2}.$$

Ejercicio 2. *Un punto se mueve retardadamente en línea recta con una aceleración cuyo módulo depende de la velocidad v según la ley*

$$a = \beta\sqrt{v},$$

donde β es una constante positiva. La velocidad del punto en el instante inicial es igual a v_0. ¿Qué distancia recorrerá aquél hasta detenerse? ¿En qué tiempo hará este recorrido?

Se nos da que la aceleración depende de la velocidad según

$$a = \frac{dv}{dt} = -\beta\sqrt{v}, \quad \beta > 0,$$

donde el signo negativo indica que el movimiento es retardado. La velocidad inicial es $v(0) = v_0$.

(a)Determinación de la velocidad como función del tiempo:

Comenzamos con la definición de aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = -\beta\sqrt{v} \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} v^{1/2} dv = -\beta \int_{t_0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad 2v^{1/2}|_{v_0}^{v} = -\beta(t - t_0)$$

Con las condiciones $t_0 = v = 0$

$$2\sqrt{v_0} = \beta t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{\beta}\sqrt{v_0}$$

Determinación de la distancia recorrida:

Aplicamos cadena a definición de velocidad y separamos variables:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = -\beta\sqrt{v} \quad \Rightarrow \quad dv\frac{v}{\sqrt{v}} = -\beta dx$$

$$\therefore \; v^{1/2}dv = -\beta dx$$

Integramos

$$\int_{v_0}^{v} v^{1/2}dv = -\beta \int_{x_0}^{x} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}v^{3/2}|_{v_0}^{v} = -\beta(x - x_0)$$

Por tanto, cuando complete el recorrido hasta detenerse $v = 0$ y con la condición de que $x_0 = 0$, tenemos:

$$\frac{2}{3}v_0^{3/2} = \beta x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}\frac{v^{3/2}}{\beta}$$

2 Movimiento en el plano y en el espacio

Ejercicio 3. *Una partícula se mueve a lo largo de una curva espacial C con un vector posición dado por*

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_1 + B\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_2 + (Ct - D)\,\mathbf{e}_3,$$

donde A, B, C, D y ω son constantes.

(a) Encuentre un vector unitario tangente $\mathbf{e}_T$ a la curva C, y muestre que

$$\vec{v} = v\,\mathbf{e}_T.$$

(b) Encuentre la curvatura, el radio de curvatura y el vector unitario normal $\hat{e}_N$ a la curva $\mathcal{C}$.

Se nos da la posición de la partícula:

$$\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_1 + B\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_2 + (Ct - D)\,\mathbf{e}_3,$$

con A, B, C, D, ω constantes.

(a) **Vector unitario tangente y relación con la velocidad:**

La velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -A\omega\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_1 + B\omega\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_2 + C\,\mathbf{e}_3.$$

El módulo de la velocidad es

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(-A\omega\sin(\omega t))^2 + (B\omega\cos(\omega t))^2 + C^2} = \sqrt{A^2\omega^2\sin^2(\omega t) + B^2\omega^2\cos^2(\omega t) + C^2}.$$

El vector unitario tangente a la curva es

$$\mathbf{e}_T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-A\omega\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_1 + B\omega\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_2 + C\,\mathbf{e}_3}{\sqrt{A^2\omega^2\sin^2(\omega t) + B^2\omega^2\cos^2(\omega t) + C^2}}.$$

Por definición:

$$\vec{v} = v\,\mathbf{e}_T.$$

(b) **Curvatura, radio de curvatura y vector unitario normal:**

La aceleración es

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_1 - B\omega^2\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_2 + 0\,\mathbf{e}_3.$$

Vector unitario normal:

Primero, calculamos la componente perpendicular de la aceleración respecto a $\mathbf{e}_T$:

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\mathbf{e}_T)\mathbf{e}_T.$$

El vector unitario normal es:

$$\mathbf{e}_N = \frac{\vec{a}_\perp}{|\vec{a}_\perp|} = \frac{\vec{a} - (\vec{a}\cdot\mathbf{e}_T)\mathbf{e}_T}{|\vec{a} - (\vec{a}\cdot\mathbf{e}_T)\mathbf{e}_T|}.$$

Curvatura:

$$\kappa = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}.$$

El producto cruz:

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -A\omega\sin(\omega t) & B\omega\cos(\omega t) & C \\ -A\omega^2\cos(\omega t) & -B\omega^2\sin(\omega t) & 0 \end{vmatrix} = \big(CB\omega^2\sin(\omega t)\big)\mathbf{e}_1 + \big(CA\omega^2\cos(\omega t)\big)\mathbf{e}_2 + \big(AB\omega^3\big)\mathbf{e}_3.$$

Su módulo:

$$|\vec{v}\times\vec{a}| = \sqrt{(CB\omega^2\sin(\omega t))^2 + (CA\omega^2\cos(\omega t))^2 + (AB\omega^3)^2}.$$

Radio de curvatura:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|} = \frac{\big(A^2\omega^2\sin^2(\omega t) + B^2\omega^2\cos^2(\omega t) + C^2\big)^{3/2}}{\sqrt{C^2\omega^4(A^2\cos^2(\omega t) + B^2\sin^2(\omega t)) + A^2B^2\omega^6}}.$$

Ejercicio 4. *Una partícula de masa m se mueve en un campo central en la órbita $r = R\phi^2$, donde R es una constante. Determine*

(a) la fuerza y la energía potencial

(b) la dependencia del ángulo con respecto al tiempo.

Teorema de Binet

$$u = \frac{1}{r}, \quad F(1/u) = -\frac{l^2}{m}\left(u^2 u'' + u^3\right)$$

(a) Fuerza y Enegía potencial

Si

$$u = \frac{1}{R\phi^2} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{R\phi^3} \quad \Rightarrow \quad u'' = \frac{6}{R\phi^4}$$

Construyendo Binet:

$$u^2 u'' + u^3 = \frac{6}{R^3\phi^8} + \frac{1}{R^3\phi^6} = \frac{1}{R^3}\left(\frac{6}{\phi^8} + \frac{1}{\phi^6}\right)$$

Considerando que

$$r = R\phi^2 \quad \Rightarrow \quad \phi^2 = \frac{r}{R}$$

Reemplazando:

$$F(r) = -\frac{l^2}{mr^3}\left(\frac{6R}{r} + 1\right)$$

Calculando el potencial:

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{l^2}{m}\left(\frac{6R}{r^4} + \frac{1}{r^3}\right) \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{l^2}{m}\left(\frac{1}{2r^2} + \frac{2R}{r^3}\right) + C$$

(b) Dependencia del ángulo respecto a t

$$l = mr^2\dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{l}{mr^2} = \frac{l}{mR^2\phi^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{mR^2\phi^4}$$

Integrando:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \phi'^4 d\phi' = \frac{l}{mR^2}\int_{t_0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\phi'^5}{5}\Big|_{\phi_0}^{\phi} = \frac{l}{mR^2}(t - t_0)$$

Se elige $t_0 = 0$ y ϕ_0 como ángulo inicial, por lo tanto:

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{l}{mR^2}t$$

Ejercicio 5. *Determinar la fuerza que genera la siguiente trayectoria*

$$r = a(1 + \cos\phi)$$

(a) ¿Cuál es el potencial que provoca esta órbita?

(b) Determine la acceleration radial y tangencial de la particular

Teorema de Binet

$$u = \frac{1}{r}, \quad F(1/u) = -\frac{l^2}{m}\left(u^2 u'' + u^3\right)$$

$$\therefore\ u = \frac{1}{a(1+\cos\phi)} \quad\Rightarrow\quad u = \frac{1}{a}(1+\cos\phi)^{-1} \quad\Rightarrow\quad u' = \frac{1}{a}(-1)(1+\cos\phi)^{-2}(-\sin\phi) = \frac{\sin\phi}{a(1+\cos\phi)^2}$$

Reescribiendo u' en terminos de u

$$u' = a\sin\phi u^2 \quad\Rightarrow\quad u'' = a\cos\phi\ u^2 + 2a\sin\phi\ uu' = a\cos\phi\ u^2 + 2a^2\sin^2\phi\ u^3$$

y si

$$u = \frac{1}{a(1+\cos\phi)} \quad\Rightarrow\quad 1+\cos\phi = \frac{1}{au} \quad\Rightarrow\quad \cos\phi = \frac{1}{au} - 1$$

$$\therefore\ u'' = au^2\left(\frac{1}{au} - 1\right) + 2a^2u^3\left(1 - \frac{1}{a^2u^2} + \frac{2}{au} - 1\right) = u - au^2 - 2u + 4au^2 = -u + 3au^2$$

Ahora,

$$u^2u'' = 3au^4 - u^3 \quad\Rightarrow\quad u^2u'' + u^3 = 3au^4$$

La fuerza será:

$$F(1/u) = -\frac{l^2}{m}(3au^4) \quad\Rightarrow\quad F(r) = -3a\frac{l^2}{m}\frac{1}{r^4}$$

Calculando el potencial:

$$\frac{dV}{dr} = 3a\frac{l^2}{m}\frac{1}{r^4} \quad\Rightarrow\quad V(r) = 3a\frac{l^2}{m}\int_{r_0}^{r} r^{-4}dr = 3a\frac{l^2}{m}\left(-\frac{1}{3r^3}\right)_{r_0}^{r} = -a\frac{l^2}{m}\frac{1}{r^3} + C$$

Donde C es la constante de integración en r_0 que puede elegirse como $C = 0$ si queremos que $V(\infty) = 0$

(b) Aceleración radial y tangencial

Como el momentum angular se conserva, tenemos que la aceleración tangencial es 0.

Para la aceleración radial, tomamos el valor de nuestra fuerza y lo dividimos por m

$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{3al^2}{m^2}\frac{1}{r^4}$$

3 Potenciales

Ejercicio 6. *Un sistema con masa efectiva m tiene una energía potencial dada por*

$$U(x) = U_0 \left(-2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{x}{x_0} \right)^4 \right),$$

donde U_0 y x_0 son constantes positivas y $U(0) = 0$.

(a) Determine los puntos donde la fuerza sobre la partícula es nula. Clasifique estos puntos como estables o inestables. Calcule el valor de $\frac{U(x)}{U_0}$ en dichos puntos de equilibrio.

(b) Si la partícula recibe un pequeño desplazamiento desde un punto de equilibrio, encuentre la frecuencia angular de las oscilaciones pequeñas.

$$U(x) = U_0 \left[-2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^4 \right], \qquad U_0 > 0,\ x_0 > 0.$$

Grafico:

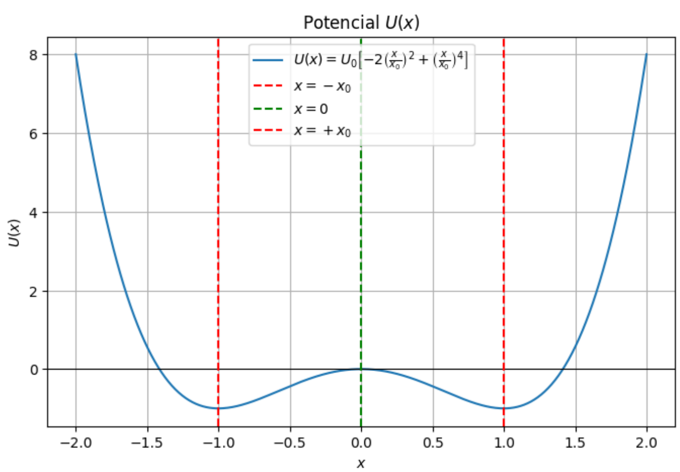

Figure 1: Gráfica de potencial.

(a) Puntos de equilibrio y clasificación

La fuerza es:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -U_0 \left(-4\frac{x}{x_0^2} + 4\frac{x^3}{x_0^4} \right) = 4U_0 \frac{x}{x_0^2} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right).$$

Los puntos de equilibrio se encuentran resolviendo $F(x) = 0$:

$$x = 0, \qquad x = \pm x_0.$$

Clasificación mediante la segunda derivada:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = U_0\left(-\frac{4}{x_0^2} + 12\frac{x^2}{x_0^4}\right).$$

Evaluando en los puntos de equilibrio:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = -\frac{4U_0}{x_0^2} < 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ es un } \textbf{máximo} \text{ (inestable).}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\pm x_0} = \frac{8U_0}{x_0^2} > 0 \;\Rightarrow\; x = \pm x_0 \text{ son } \textbf{mínimos} \text{ (estables).}$$

Valores de la energía potencial en los puntos de equilibrio:

$$\frac{U(0)}{U_0} = 0, \qquad \frac{U(\pm x_0)}{U_0} = -2 + 1 = -1.$$

(b) Frecuencia angular de oscilaciones pequeñas

Para oscilaciones pequeñas alrededor de $x = \pm x_0$:

$$k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\pm x_0} = \frac{8U_0}{x_0^2}.$$

La frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8U_0}{mx_0^2}}$$

Ejercicio 7. *Una función de energía potencial frecuentemente utilizada para describir la interacción entre dos átomos es el potencial de Lennard–Jones 6–12*

$$U(r) = U_0\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right], \qquad r > 0,$$

donde r es la distancia entre los átomos y $U_0 > 0,\ r_0 > 0$ son constantes.

Encuentre la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable para dos átomos idénticos enlazados por la interacción de Lennard–Jones. Denote por m la masa efectiva del sistema de los dos átomos.

Sea el potencial de Lennard–Jones

$$U(r) = U_0\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right], \qquad r > 0, \quad U_0 > 0,\ r_0 > 0.$$

1. Posición de equilibrio

La fuerza es

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = -U_0\left(-12\frac{r_0^{12}}{r^{13}} + 12\frac{r_0^6}{r^7}\right) = 12U_0\frac{r_0^6}{r^{13}}\left(r^6 - r_0^6\right).$$

El equilibrio ocurre cuando $F(r) = 0 \Rightarrow r^6 = r_0^6$, es decir

$$r_{\text{eq}} = r_0$$

2. Segunda derivada en el equilibrio
Calculamos

$$\frac{d^2U}{dr^2} = U_0\left(156\frac{r_0^{12}}{r^{14}} - 84\frac{r_0^6}{r^8}\right),$$

y evaluando en $r = r_0$:

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r_0} = U_0\left(\frac{156}{r_0^2} - \frac{84}{r_0^2}\right) = \frac{72U_0}{r_0^2}.$$

La constante efectiva de restitución es

$$k = \frac{72U_0}{r_0^2}$$

3. Frecuencia angular de oscilaciones pequeñas
Si m es la masa efectiva (reducida) del sistema, la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72U_0}{m\,r_0^2}}$$

Por lo tanto, el sistema oscila armónicamente alrededor de $r = r_0$ con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{72U_0}{mr_0^2}}$$

Ejercicio 8. *Consideremos un sistema masa–resorte amortiguado sometido a una fuerza sinusoidal. Supongamos que la componente en x de la fuerza externa está dada por*

$$F_x(t) = F_0\cos(\omega t),$$

donde F_0 (la amplitud) es el valor máximo y ω es la frecuencia angular de la fuerza externa. La fuerza varía entre F_0 y $-F_0$ porque la función coseno varía entre $+1$ y -1. Determinar $x(t)$ como la posición del objeto respecto de la posición de equilibrio.

Consideremos la ecuación del oscilador amortiguado forzado:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t),$$

donde m es la masa, b el coeficiente de amortiguamiento viscoso, k la constante del resorte, F_0 la amplitud de la fuerza y ω su frecuencia angular. Definimos además:

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(frecuencia natural)}, \qquad \gamma \equiv \frac{b}{2m} \qquad \text{(coeficiente de amortiguamiento)}.$$

1. Forma general de la solución. La solución general se escribe como suma de la solución homogénea (transitoria) y de una solución particular (régimen estacionario):

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Solución homogénea. La ecuación homogénea $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ tiene raíces:

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

En el caso subamortiguado $\gamma < \omega_0$ (el más habitual) escribimos:

$$\omega_d \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \qquad x_h(t) = e^{-\gamma t}\big(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)\big),$$

que son oscilaciones amortiguadas que decaen con la envolvente $e^{-\gamma t}$.

Solución particular (estado estacionario). Buscamos una solución particular de la forma armónica con la misma frecuencia de la fuerza externa. Usando representación compleja:

$$x_p(t) = \Re\{X e^{i\omega t}\}, \qquad F_0 \cos(\omega t) = \Re\{F_0 e^{i\omega t}\}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos:

$$(-m\omega^2 + ib\omega + k)\, X = F_0, \qquad X = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + ib\omega}.$$

La amplitud y la fase de X determinan la respuesta real. Definimos:

$$x_0(\omega) \equiv |X| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b/m)^2\omega^2}},$$

y el desfase:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{(b/m)\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right).$$

Entonces:

$$x_p(t) = x_0(\omega) \cos\big(\omega t - \varphi(\omega)\big).$$

2. Solución completa y régimen estacionario. Combinando:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\big(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)\big) \; + \; x_0(\omega) \cos\big(\omega t - \varphi(\omega)\big)$$

La primera parte es transitoria y decae con $e^{-\gamma t}$; a largo plazo el movimiento queda dominado por $x_p(t)$.

3. Interpretación física y comportamiento con ω.

- Para $\omega \ll \omega_0$: $\varphi \approx 0$, $x_0 \approx F_0/k$ (respuesta casi estática).
- Para $\omega \approx \omega_0$: $\varphi \approx \pi/2$, amplitud máxima si el amortiguamiento es pequeño (resonancia).
- Para $\omega \gg \omega_0$: $\varphi \approx \pi$, amplitud decrece como $x_0 \sim F_0/(m\omega^2)$.
- La frecuencia de resonancia para amortiguamiento pequeño es:

$$\omega_{\text{res}} \approx \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

4. Constantes a partir de condiciones iniciales. Si $x(0) = x_0^{(i)}$ y $\dot{x}(0) = v_0^{(i)}$, con $A \equiv x_0(\omega)$ y $\varphi \equiv \varphi(\omega)$:

$$C_1 = x_0^{(i)} - A\cos\varphi, \qquad C_2 = \frac{v_0^{(i)} + \gamma C_1 - A\omega \sin\varphi}{\omega_d}.$$

Entonces el movimiento es la superposición de un transitorio amortiguado y de una oscilación forzada de frecuencia ω con amplitud:

$$x_0(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b/m)^2\omega^2}}, \qquad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{(b/m)\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right).$$

Ejercicio 9. *Una partícula de masa m se mueve en un potencial armónico central $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ con una constante de resorte positiva k.*

(a) Utilice el potencial efectivo para mostrar que todas las órbitas están ligadas y que E debe exceder $E_{\min} = (kl^2/m)^{1/2}$.

(b) Verifique que la órbita es una elipse cerrada con origen en el centro. Si la relación $E/E_{\min} = \cosh\xi$ define la cantidad ξ, verifique que los parámetros orbitales están dados por $a^2 = e^{\xi} l(mk)^{-1/2}$, $b^2 = e^{-\xi} l(mk)^{-1/2}$, y $\epsilon^2 = 1 - e^{-2\xi}$. Discuta los casos límite $E \to E_{\min}$ y $E \gg E_{\min}$.

(c) Demuestre que el período es $2\pi(m/k)^{1/2}$, independiente de E y l. Discuta este resultado elemental.

(a) Potencial efectivo y energía mínima
El momento angular es l (conservado). El potencial efectivo es

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Para $r \to 0$, la segunda contribución $\sim l^2/(2mr^2) \to +\infty$ y para $r \to \infty$, la primera contribución $\sim \frac{1}{2}kr^2 \to +\infty$. Por tanto V_{eff} posee un mínimo global y todas las órbitas están ligadas.

La condición de mínimo es

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = kr - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \ \Rightarrow \ kr^4 = \frac{l^2}{m}.$$

Entonces

$$r_0^2 = \sqrt{\frac{l^2}{mk}} = \frac{l}{\sqrt{mk}}.$$

Evaluando en r_0:

$$E_{\min} = V_{\text{eff}}(r_0) = \frac{1}{2}kr_0^2 + \frac{l^2}{2mr_0^2} = l\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kl^2}{m}}.$$

Para que exista movimiento radial se requiere $E \geq E_{\min}$.

(b) Órbita elíptica y parámetros orbitales

El potencial es isotrópico: $V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$. Las ecuaciones de movimiento separadas son

$$m\ddot{x} + kx = 0, \qquad m\ddot{y} + ky = 0,$$

con frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$.

Soluciones:

$$x(t) = a\cos(\omega t), \qquad y(t) = b\sin(\omega t),$$

que describen una elipse centrada en el origen.

La energía total:

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2) = \frac{k}{2}(a^2 + b^2).$$

Momento angular:

$$l = m\omega ab = \sqrt{mk}\,ab.$$

Por tanto

$$a^2 + b^2 = \frac{2E}{k}, \qquad ab = \frac{l}{\sqrt{mk}}.$$

Sea $A = a^2$, $B = b^2$. Son raíces de

$$\lambda^2 - (a^2 + b^2)\lambda + (ab)^2 = 0.$$

Por la fórmula general:

$$a^2 = \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(ab)^2}}{2}, \qquad b^2 = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(ab)^2}}{2}.$$

Sustituyendo $a^2 + b^2 = 2E/k$, $(ab)^2 = l^2/(mk)$, el discriminante es

$$\Delta = \frac{4}{k^2}\big(E^2 - E_{\min}^2\big), \qquad E_{\min}^2 = \frac{kl^2}{m}.$$

Definiendo $E/E_{\min} = \cosh\xi$, se tiene

$$a^2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - E_{\min}^2}}{k} = \frac{E_{\min} e^{\xi}}{k},$$

$$b^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - E_{\min}^2}}{k} = \frac{E_{\min} e^{-\xi}}{k}.$$

Como $E_{\min} = l\sqrt{k/m}$,

$$a^2 = e^{\xi} l (mk)^{-1/2}, \qquad b^2 = e^{-\xi} l (mk)^{-1/2}.$$

La excentricidad resulta

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^{-2\xi}.$$

Casos límite:

$$E \to E_{\min} \;\Rightarrow\; \xi \to 0 \Rightarrow a^2 = b^2,\; \varepsilon \to 0$$

(órbita circular). Para $E \gg E_{\min}$, ξ grande, $a^2 \gg b^2$ y la elipse se vuelve muy alargada.

(c) Periodo independiente de E y l

Cada coordenada x y y oscila con frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$, de modo que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

independiente de E y l.

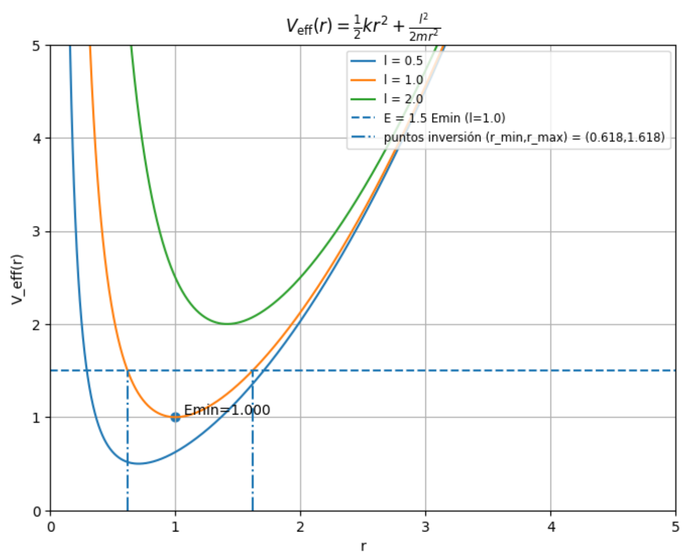

Figure 2: Potencial efectivo