Mecánica Intermedia (FIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: J. R. Villanueva *e-mail:* jose.villanueva@uv.cl

Tarea 4

1. Hállese la función de energía potencial de las fuerzas conservativas que hay entre las funciones de fuerza siguientes:

   (a) $F_x = f_1(x)$, $F_y = f_2(y)$, $F_z = f_3(z)$.

   (b) $F_x = \frac{a}{x^2+y^2}$, $F_y = \frac{b}{x^2+y^2}$, $F_z = 0$.

   (c) $F_x = \frac{ax}{x^2+y^2+z^2}$, $F_y = \frac{ay}{x^2+y^2+z^2}$, $F_z = \frac{az}{x^2+y^2+z^2}$.

   (d) $F_x = x\,y^2\,z$, $F_y = x^2\,y\,z$, $F_z = \frac{x^2\,y^2}{2}$.

   (e) $F_x = \frac{a+x}{x^2+y^2+z^2}\,e^{-ax}$, $F_y = \frac{b+y}{x^2+y^2+z^2}\,e^{-by}$, $F_z = \frac{c+z}{x^2+y^2+z^2}\,e^{-cz}$.

2. Encontrar las fuerzas conservativas para las que las siguientes son las funciones de energía potencial escalares:

   (a) $V(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$

   (b) $V(r,\theta,\phi) = \frac{a\cos\theta}{r^2}$

   (c) $V(x,y,z) = \frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2)$

   (d) $V(r,\theta,\phi) = \frac{e^{-k\cos\theta}}{r}$

3. Calcular el trabajo realizado por las siguientes fuerzas a lo largo de las trayectorias indicadas:

   (a) $\vec{F} = 4\,y\,\hat{\imath} + 2\,x\,\hat{\jmath} + \hat{k}$ a lo largo de la hélice
   $x = 4\cos\phi$, $y = 4\sin\phi$, $z = 2\phi$, desde $\phi = 0$ hasta $\phi = 2\pi$.

   (b) $\vec{F} = 2\,x\,z\,\hat{\imath} + 3\,z^2\,\hat{\jmath} + y^2\,\hat{k}$ a lo largo de la recta $x = 2y = 4z$ desde el origen hasta el punto $(4,2,1)$.

4. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje X bajo la influencia de un campo de fuerza conservativa cuyo potencial es $V(x)$. Si la partícula se encuentra en las posiciones x_1 y x_2 en los respectivos tiempos t_1 y t_2, demostrar que si E es la energía total,

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V(x)}}.$$

5. Una partícula de masa m y carga q se mueve con velocidad constante v en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Si escogemos el campo magnético $\vec{B}$ paralelo al eje OZ, y la velocidad inicial de la partícula dada por $v_0 = (0,u,v)$, muestre que

(a) $v_x = u \sin \omega t, \qquad v_y = u \cos \omega t, \qquad v_z = v.$

(b) $x = x_0 + (u/\omega)(1 - \cos \omega t), \qquad y = y_0 + (u/\omega) \sin \omega t, \qquad z = z_0 + vt$, donde x_0, y_0, z_0 son las posiciones inicial de la partícula a lo largo de los ejes X, Y, Z, respectivamente.

(c) También mostrar que la proyección de la trayectoria en el plano XY es una ecuación de la circunferencia dada por

$$\left(x - x_0 - \frac{u}{\omega}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{u^2}{\omega^2}.$$

La partícula, así, se mueve sobre la superficie del cilindro circular recto cuya sección transversal es el círculo representado por la ecuación anterior.

6. Una partícula de carga positiva, e, y masa m pasa por un filtro de velocidades compuesto por un campo eléctrico uniforme, $\overrightarrow{E}$, dirigido a lo largo del sentido positivo del eje y,

$$\vec{E} = E\,\widehat{\jmath},$$

y un campo magnético uniforme dirigido a lo largo del eje z,

$$\vec{B} = B\,\widehat{k}.$$

(a) ¿Para qué velocidad inicial dirigida a lo largo del eje x pasará la partícula cargada por dicho filtro sin desviarse?

(b) Demuéstrese que una partícula cuya velocidad inicial esté en el plano xy y forme cierto pequeño ángulo, α, con el sentido positivo de x, volverá a cortar nuevamente al eje x al cabo de cierto tiempo. Hállese el punto en que ocurre este nuevo cruce de la partícula que tenga la velocidad deseada hallada en la parte (a).

7. Una fuerza $\vec{F}(x) = (a - 2bx)\,\widehat{\imath}$, actúa sobre una partícula de masa m, donde a y b son constantes positivas.

(a) Determinar la energía potencial $V(x)$.

(b) Hacer gráficos de $F(x)$ y $V(x)$.

(c) Discuta el movimiento de la partícula para diferentes valores de la energía.

8. En un espectrómetro de masas, se acelera un ión positivo de una sola carga ($q = 1.602 \times 10^{-19}\,[c]$) por medio de una diferencia de potencial de $1000\,[V]$. Luego pasa por un campo magnético uniforme en el que $B = 0.1\,[Wb/m^2]$, y se desvia en una trayectoria circular de radio $R = 0.182\,[m]$. Determinar:

(a) La velocidad del ión;

(b) la masa del ión en kilogramos y en unidades de masa atómica (uma);

(c) el número de masa del ión.

9. De acuerdo con la teoría de las fuerzas nucleares de Yukawa, la fuerza de atracción entre dos nucleones tiene un potencial de la forma

$$V(r) = -K\frac{e^{-\alpha r}}{r}, \qquad K > 0,\ \alpha > 0.$$

(a) Encontrar la fuerza.

(b) Discutir los tipos de movimiento que son posibles para la masa m bajo dicha fuerza.

(c) Encontrar el momento angular L y la energía total E para el movimiento en un círculo de radio a.

(d) Determinar el periodo del movimiento circular y el periodo de pequeñas oscilaciones radiales.

10. Un proyectil disparado desde la Tierra tiene un alcance ℓ y la altura máxima de la trayectoria es h, ¿cuáles son la velocidad inicial y el ángulo de elevación del proyectil en función de h, ℓ y g (despreciando el rozamiento en el aire?)

11. En la posición $x = 0$, $y = 0$, un cañon tiene un alcance máximo ℓ_m. Determinar los dos ángulos de elevación para hacer blanco en el punto $x = \ell_m/2, \quad y = \ell_m/4$.

12. Una partícula se mueve en un campo de fuerza dado por $\vec{F} = r^2\,\vec{r}$, donde $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula. Demostrar que el momento angular de la partícula se conserva.

13. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de la trayectoria dada por

$$x = x_0 + at^2, \qquad y = bt^3, \qquad z = ct,$$

donde x_0, a, b y c son constantes. Encuentre las siguientes cantidades en un tiempo posterior t: momentum angular $\vec{L}$, fuerza $\vec{F}$, y torque $\vec{\tau}$ sobre la partícula. Verifique que se satisface

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}.$$

14. Una partícula de carga positiva e se mueve en el campo eléctrico central

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\alpha}{\rho}\widehat{\rho},$$

que hay entre las placas de un condensador cilíndrico, y un campo magnético uniforme

$$\overrightarrow{B} = B\widehat{k},$$

paralelo al eje del condensador.

(a) Establecer las ecuaciones de movimiento de la partícula en coordenadas cilíndricas.

(b) Demostrar que la ecuación de movimiento, en función de la variable angular ϕ, que es una coordenada que se puede no considerar, se resuelve fácilmente y da como integral de movimiento

$$m\,\rho^2\,\dot{\phi} + \frac{1}{2}\,e\,\rho^2\,B = L = \text{constante}.$$

(c) Demostrar que, utilizando el resultado hallado en (b), la ecuación radial se puede reducir a una ecuación de movimiento unidimensional, que nos dará una segunda integral de movimiento que expresa la conservación de la energía total.

(d) Si la partícula es emitida desde el cilindro interior (de radio R_1) con una velocidad inicial

$$\overrightarrow{v} = v_0\,\widehat{\rho},$$

¿cuál debe ser el valor mínimo de v_0 para que la partícula llegue al otro cilindro cuyo radio es R_2 ($R_2 > R_1$). [*Sugerencia:* el valor mínimo de v_0 se obtendra cuando R_2 sea un punto de retorno.]

15. Dos partículas, P y Q, cada una de masa m, son conectadas por una cuerda liviana e inextensible de longitud 2ℓ, la cual pasa a través de un pequeño agujero liso O en una mesa horizontal lisa. La partícula P es libre para deslizarse sobre la mesa, y Q se cuelga libremente por debajo de ella. Inicialmente OQ es de longitud ℓ, y P se proyecta desde el reposo en un ángulo recto respecto a OP con velocidad $(8g\ell/3)^{1/2}$. Demostrar que en el movimiento subsiguiente, la partícula Q llegará a la mesa.

16. Una partícula cargada $+e_1$ que se mueve con una velocidad muy alta v_0 a lo largo de una línea recta que pasa a una distancia b de otra carga $+e_2$ de masa m. Suponiendo una ley central de la fuerza de magnitud e_1e_2/r^2 entre e_1 y e_2, encontrar la energía Q transferida desde e_1 a e_2 durante el encuentro.

17. Una pelota de goma de masa 0.2 [kg] golpea el suelo con una velocidad de 8 [m/s] y rebota con aproximadamente la misma velocidad. Si el balón está en contacto con el suelo durante 10^{-3} [s] (fotografías de alta velocidad pueden mostrar esto), ¿cuál es la fuerza ejercida sobre la pelota por el piso?

18. Una bala de cañón de masa M se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica. Una explosión interna, lo que genera una cantidad de energía E, rompe la bala en dos partes. Una parte de masa kM, con $k < 1$, continúa en la dirección original, y la otra parte es reducida al reposo. Encuentre la velocidad de la masa kM inmediatamente después de la explosión.

19. Dos masas, m_1 y m_2, están conectadas por un resorte lineal de constante k, y el sistema está inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción. El resorte se comprime una cantidad δ y puesto en libertad. Encontrar la velocidad de cada masa cuando el resorte vuelve a su longitud no deformada natural L.

20. Una partícula está obligada a moverse a lo largo del eje X sujeta a una fuerza restauradora $-kx$ y a una fuerza constante F. Discuta su movimiento, y encuentre la frecuencia y la posición del punto de equilibrio.