Mecánica Intermedia (LFIS 312)

Licenciatura en Física

Profesor: J.R. Villanueva e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 6

---

1. Un cometa se mueve hacia el sol con una velocidad inicial v_0. La masa del Sol es $M_\odot$ y su radio es $R_\odot$. Encuentre la sección eficaz total para golpear el sol. Considere al sol en reposo e ignore todos los demás cuerpos.

2. Un cohete con velocidad v_∞ y parámetro de impacto b se aproxima a un planeta de radio R_0 y masa M. ¿Cuál es la condición para que el cohete golpee el planeta?. Si sólo se pierde, ¿Cuál es el ángulo de deflección?.

3. La sección eficaz para golpear la superficie de un núcleo es de interés en el estudio de reacciones nucleares que ocurren en el scattering de iones pesados. Integrando sobre parámetros de impacto apropiados, muestre que la sección transversal para golpear un núcleo de radio R en el scattering de Rutherford es dado por

$$\sigma_r = \pi R^2 \left(1 - \frac{V_c}{E}\right), \tag{1}$$

donde $V_c = zZe^2/R$ es la barrera repulsiva Coulombiana en la superficie nuclear y se asume que $E \geq V_c > 0$.

4. (a) Obtener la siguiente relación entre el ángulo de scattering θ y el parámetro de impacto b para un potencial central repulsivo

$$\theta(b) = \pi - 2b \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(1 - V/E) - b^2u^2}}, \tag{2}$$

donde $u = r^{-1}$ y u_0 es el punto de retorno clásico.

   (b) Rederive el resultado obtenido en clases para el scattering de Rutherford a partir de la expresión (2).

   (c) ¿Cuál es la correspondiente expresión general para la sección eficaz diferencial?

   (d) ¿Cuál es la expresión correspondiente a la parte (a) para potenciales atractivos?

5. Un flujo uniforme de partículas con energía E es dispersada por un potencial central $V(r) = \gamma/r^2$. Derive la sección transversal diferencial elástica

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \frac{\gamma\,\pi^2}{E\sin\theta}\,\frac{\pi - \theta}{\theta^2(2\pi - \theta)^2}. \tag{3}$$

Grafique cuidadosamente la dependencia angular. Discuta la sección transversal total y comente el resultado para un potencial atractivo ($\gamma < 0$).

6. Un pión cargado (π^+ o π^-) tiene una energía cinética (no-relativista) T. Un núcleo masivo tiene una carga $Q = Ze$ y un radio efectivo b. Clásicamente, el pión golpea el núcleo si la distancia de máxima aproximación es b o menor. Despreciando el retroceso del núcleo (y los efectos electrón–núcleo), muestre que la sección eficaz de scattering para estos piones es:

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\pi b^2 (T-V)}{T}, & \text{para } \pi^+ \\ \\ \frac{\pi b^2 (T+V)}{T}, & \text{para } \pi^-, \end{cases}$$

donde

$$V = \frac{Ze^2}{b}.$$

7. Consideremos un potencial de Coulomb repulsivo truncado definido en la forma

$$V(r) = \begin{cases} \frac{k}{r}, & r > a \\ \\ \frac{k}{a}, & r \leq a. \end{cases}$$

En el caso de una partícula de energía total $E < k/a$, obtener expresiones para el ángulo de scattering Θ en función de b/b_0, donde b_0 es el parámetro de impacto para el cual el periápside se encuentra en el punto $r = a$. (las fórmulas se pueden dar de forma explícita pero no son sencillas). Efectuar una representación gráfica numérica de θ en función de b/b_0 para el caso particular en que $E = 2k/a$ ¿Qué podemos deducir acerca de la sección eficaz de scattering angular a partir de la dependencia entre θ y b/b_0 en este caso particular?

8. Si un potencial repulsivo disminuye monótonamente con r para energías grandes frente a $V(r_d)$ el ángulo de scattering será pequeño. En estas condiciones, demostrar que la ecuación

$$\theta = \pi - 2 \int_0^{u_d} \frac{b\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - b^2\,u^2}}, \tag{4}$$

se puede transformar de manera que el ángulo de desviación venga dado aproximadamente por

$$\theta = \frac{1}{E} \int_0^1 \frac{[V(u_d) - V(u)]\ \mathrm{d}y}{(1-y^2)^{3/2}}, \tag{5}$$

donde y es, evidentemente, u/u_d.

Demostrar, además, que si $V(u)$ es de la forma Cu^n, donde n es un entero positivo, en el límite de energías elevadas la sección eficaz es proporcional a $\theta^{-2(1+1/n)}$.

9. Un flujo de partículas con energía E son dispersadas por un potencial central atractivo

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \\ -V_0, & r < a. \end{cases}$$

Muestre que la órbita de las partículas es idéntica con la de los rayos de luz refractados por una esfera de radio a e índice de refracción $n = [(E + V_0)/E]^{1/2}$. Pruebe que la sección eficaz elástica diferencial para $\cos\frac{1}{2}\theta > n^{-1}$ es

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{el} = \frac{n^2 a^2}{4\cos\frac{1}{2}\theta} \frac{\left[n\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - 1\right]\left(n - \cos\frac{1}{2}\theta\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{1}{2}\theta\right)^2} \tag{6}$$

¿Cuál es la sección eficaz total?

10. La interacción entre un átomo y un ión para distancias más grandes que el contacto es dada por la energía potencial

$$V(r) = -\frac{C}{r^4}, \tag{7}$$

donde $C = e^2 P_a^2/2$, e es la carga eléctrica y P_a es la polarizabilidad del átomo.

(a) Dibuje la energía potencial efectiva como función de r.

(b) Si la energía total del ión excede V_0, el valor máximo de la energía potencial efectiva, el ión puede golpear el átomo. Encuentre V_0 en términos del momentum angular ℓ.

(c) Encuentre la sección eficaz para un ión que golpea al átomo (i.e. penetra hacia $r = 0$). Asuma que el ión es mucho más liviano que el átomo.

Constantes

$G = 6.67 \times 10^{-11}\,[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\cdot s}^2}]$ Constante de Gravitación Universal

$R_\oplus = 6.38 \times 10^6\,[\mathrm{m}]$ Radio de la Tierra

$M_\oplus = 5.98 \times 10^{24}\,[\mathrm{Kg}]$ Masa de la Tierra

$R_\odot = 6.96 \times 10^8\,[\mathrm{m}]$ Radio del Sol

$M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,[\mathrm{Kg}]$ Masa del Sol
