

Ejercicios Ayudantía 21 agosto

13- Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje x de modo que su v varía según la ley $v = \alpha \sqrt{x}$, donde α cte positivo. Teniendo en cuenta que el momento $t=0$ se encuentra en el punto $x=0$. Determinar

- Dependencia de la velocidad y aceleración respecto al t .
- la velocidad media de la partícula en el tiempo, en el transcurso del cual recorre los primeros 5 metros

$$* v = \alpha \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt \quad | \int$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha \int_{t_0}^t dt \Rightarrow 2x^{1/2} \Big|_{x_0}^x = \alpha(t-t_0) \Rightarrow 2\sqrt{x} = \alpha t \Rightarrow \boxed{t = \frac{2\sqrt{x}}{\alpha}}$$

$$\therefore x = \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^2 \Rightarrow v = \alpha \sqrt{x} = \frac{\alpha^2 t}{2} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\alpha^2 t}{2}} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \boxed{a = \frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\bar{v} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{5}{t} = \frac{5}{2\sqrt{5}/\alpha} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{5}}$$

→ rapidez disminuye

15- Un punto se mueve retardadamente en línea recta con una a cuyo módulo depende de la velocidad v según $a = -\beta \sqrt{v}$, β cte positiva. Velocidad del punto en el instante inicial es igual a v_0 .

¿Qué distancia recorrerá aquel hasta detenerse?

¿En qué tiempo hará este recorrido?

* $a = -\beta \sqrt{v}$, instante inicial x_0, v_0, t_0

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -\beta \sqrt{v} \Rightarrow dv \frac{v}{\sqrt{v}} = -\beta dx \Rightarrow v^{1/2} dv = -\beta dx \quad | \int$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^v v^{1/2} dv = -\beta \int_{x_0}^x dx \Rightarrow \frac{2}{3} v^{3/2} \Big|_{v_0}^v = -\beta(x-x_0) \Rightarrow \frac{2}{3} (v^{3/2} - v_0^{3/2}) = -\beta(x-x_0)$$

recorrido hasta detenerse $v=0 \Rightarrow \frac{2}{3} v_0^{3/2} = \beta(x-x_0) \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3} \frac{v_0^{3/2}}{\beta}}$

[t] $\frac{dv}{dt} = -\beta \sqrt{v} \Rightarrow \int_{v_0}^v v^{1/2} dv = -\beta \int_{t_0}^t dt \Rightarrow 2 v^{1/2} \Big|_{v_0}^v = -\beta(t-t_0); t_0=0$

$$\Rightarrow 2\sqrt{v_0} = \beta t \Rightarrow \boxed{t = \frac{2\sqrt{v_0}}{\beta}}$$

3- Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerza unidimensional con potencial $V(x) = A|x|^n$

Graficar el potencial, indique el rango de energía y posición dentro de los cuales pueden ocurrir oscilaciones acotadas.

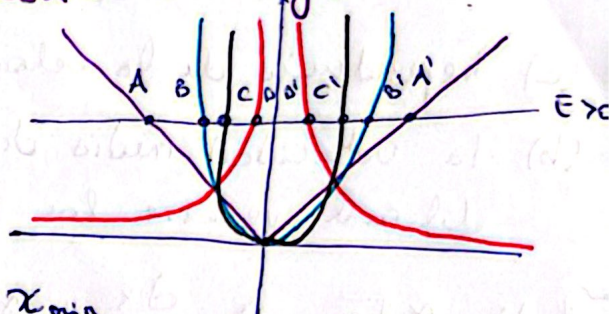
Determine el periodo de oscilación en función de la energía

Analice el comportamiento para $n=2$

→ Si la partícula tiene energía E , oscilará entre los puntos de retorno (\exists entre regiones donde $E > V(x)$)

- * $A \leftrightarrow A'$ $n=1$ (oscilación)
- * $B \leftrightarrow B'$ $n=2$ (oscilación)
- * $C \leftrightarrow C'$ $n=3$ (oscilación)
- * $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ $n=-1$ mov. sin límite (no oscila)

$$\begin{cases} x(A, B, C, D) \rightarrow x_{\min} \\ x(A', B', C', D') \rightarrow x_{\max} \end{cases} \Rightarrow \text{Energía se Conserva}$$



Puntos de retorno: $T=0 \Rightarrow E=V \Rightarrow E=A|x|^n \Rightarrow |x|^n = \frac{E}{A} \Rightarrow x = \pm \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}$

$\therefore x_{\min} = -\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}$ y $x_{\max} = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}$

Energía: $E = \frac{1}{2}mv^2 + A|x|^n \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E - A|x|^n \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}} \Rightarrow \Delta t = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}}$

Simetría $\Rightarrow \Delta t = 2 \int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}} = 2 \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{A}{E}\right)^{1/n} x\right]^n}}$

$\begin{cases} u = \left(\frac{A}{E}\right)^{1/n} x \\ du = \left(\frac{A}{E}\right)^{1/n} dx \end{cases} \Rightarrow dx = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} du ; u\left(\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}\right) = 1 ; u(0) = 0$

$\therefore \Delta t = \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_0^1 \frac{\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} du}{\sqrt{1 - u^n}} = \sqrt{\frac{2m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^n}} = \sqrt{2m} E^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} A^{-1/n} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^n}}$

Si: $T = 2\Delta t \Rightarrow T = 2\sqrt{2m} E^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} A^{-1/n} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^n}}$ cte, dará un ne pero no afecta la dependencia de T con E

$\Rightarrow T \propto E^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}$

Si: $n=2 \Rightarrow$ Oscilación Armónica $V \sim \frac{1}{2}kx^2$; $T \sim E^{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} = 1$

Periodo no depende de E
 $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \left. \begin{matrix} u = \sin x \\ u(1) = \pi/2 \\ u(0) = 0 \end{matrix} \right\} du = \cos x dx \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2 \Rightarrow T = 2\sqrt{2m} A^{-1/2} \pi/2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2A}} ; 2A = k$
 $\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$