Ayudantía Mecánica Intermedia

Carlos Pincheira

19/10/25

Ejercicio 1. *Para discutir el caso donde la ecuación secular de autovalores tiene raíces múltiples y los correspondientes autovalores son degenerados considere dos grados de libertad con*

$$\bar{v} \equiv \begin{pmatrix} v & v_{12} \\ v_{12} & v \end{pmatrix}, \quad \bar{m} \equiv \begin{pmatrix} m & m_{12} \\ m_{12} & m \end{pmatrix}$$

(a) *Encuentre los autovalores y autovectores. Muestre que en el límite* $(m_{12}, v_{12}) \to 0$ *o* $(m, v) \to 0$ *los autovalores se vuelven degenerados con* $\omega_1^2 = \omega_2^2$.

(b) *Muestre que en estos límites se pierde información concerniente a los correspondientes autovectores y que uno siempre puede encontrar dos soluciones linealmente independientes de la forma*

$$z_\sigma^{(s)} = e^{i\phi_s} \bar{\rho}_\sigma^{(s)} \quad \textit{con} \quad s = 1, 2 \quad \textit{y} \quad \bar{\rho}_\sigma^{(s)} \ \textit{real.}$$

(c) *Muestre que estas soluciones pueden ser ortonormales de acuerdo a la ecuación*

$$\sum_\lambda \sum_\sigma \rho(t)_\sigma m_{\sigma\lambda} \rho_\lambda^{(s)} = \delta_{st}$$

escogiendo

$$\rho_\sigma^{(1)} \equiv C_1 \bar{\rho}_\sigma^{(1)}, \quad \rho_\sigma^{(2)} \equiv C_2 \left(\bar{\rho}_\sigma^{(2)} - \alpha \bar{\rho}_\sigma^{(1)} \right),$$

con

$$\alpha \equiv \frac{\sum_\lambda \sum_\sigma \bar{\rho}_\sigma^{(2)} m_{\sigma\lambda} \bar{\rho}_\lambda^{(1)}}{\sum_\lambda \sum_\sigma \bar{\rho}_\sigma^{(1)} m_{\sigma\lambda} \bar{\rho}_\lambda^{(1)}}.$$

¿Qué son C_1 *y* C_2*? Este es un ejemplo de la ortogonalización de Gram-Schmidt.*

Ejercicio 2. *Un aro delgado de radio R y masa M oscila en su propio plano con un punto del aro fijo. Unido al aro hay una masa puntual m obligada a moverse sin fricción a lo largo del aro. El sistema está en un campo gravitacional $\vec{g}$. Considere sólo pequeñas oscilaciones.*

(a) Muestre que las frecuencias de los modos normales son

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{R}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

(b) Encuentre los autovectores de los modos normales. Dibuje su movimiento.

(c) Construya la matriz modal.

(d) Encuentre las coordenadas normales y muestre que ellas diagonalizan el Lagrangiano.