Ayudantía Mecánica Intermedia

Carlos Pincheira

09/09/25

Ejercicio 1. *Considere una partícula moviéndose en la órbita elíptica*

$$r(\phi) = \frac{a(1-\epsilon)}{1+\epsilon\cos\phi}$$

donde a y ϵ son constantes, bajo la condición $l = mr^2\dot{\phi}$, con m y l constantes. Determine la aceleración radial y tangencial de la partícula.

Teorema de Binet:

$$F(1/u) = -\frac{l^2}{m}\left(u^2u'' + u^3\right); \quad u = 1/r$$

$$u = \frac{1}{r(\phi)} = \frac{1+\epsilon\cos\phi}{a(1-\epsilon)} \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{\epsilon\sin\phi}{a(1-\epsilon)} \quad \Rightarrow \quad u'' = -\frac{\epsilon\cos\phi}{a(1-\epsilon)}$$

$$u^2u'' + u^3 = \frac{(1+\epsilon\cos\phi)^2}{a^3(1-\epsilon)^3} = \frac{1}{a(1-\epsilon)}\frac{1}{r^2}$$

$$F(r) = -\frac{l^2}{m(a-\epsilon)}\frac{1}{r^2}$$

$$\therefore a_c = -\frac{\mu}{r^2}, \quad \mu = \frac{l^2}{m^2(a-\epsilon)}, \quad a_t = 0$$

Ejercicio 2. *De acuerdo con la teoría de las fuerzas nucleares de Yukawa, la fuerza de atracción entre dos nucleones tiene un potencial de la forma*

$$V(r) = -K\frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad K > 0, \quad \alpha > 0.$$

(a) Encontrar la fuerza

(b) *Discutir los tipos de movimiento que son posibles para la masa m bajo dicha fuerza*

(c) *Encontrar el momento angular L y la energía total E para el movimiento en un círculo de radio a*

(d) *Determinar el periodo del movimiento circular y el periodo de pequeñas oscilaciones radiales.*

Solución.
Sea

$$V(r) = -K\frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad K > 0,\ \alpha > 0.$$

(a) **Fuerza.** Para un potencial central $V(r)$ la fuerza radial es

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{dV}{dr}\,\hat{\mathbf{r}}.$$

entonces

$$\frac{dV}{dr} = K\frac{e^{-\alpha r}(\alpha r + 1)}{r^2}.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{F}(r) = -K\,\frac{e^{-\alpha r}(\alpha r + 1)}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

(b) **Tipos de movimiento posibles.** El potencial efectivo es

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - K\frac{e^{-\alpha r}}{r}.$$

- Para $r \to 0$: si $L \neq 0$, domina la barrera centrífuga $+\infty$; si $L = 0$, la partícula puede caer al centro.
- Para $r \to \infty$: $V(r) \to 0^-$ y $V_{\text{eff}}(r) \to 0^+$.

Por tanto:

- Si $E < 0$ y U_{eff} tiene un mínimo, hay órbitas ligadas.
- Si $E > 0$, el movimiento es no ligado (dispersión).
- Si $L = 0$, es posible la caída al centro.

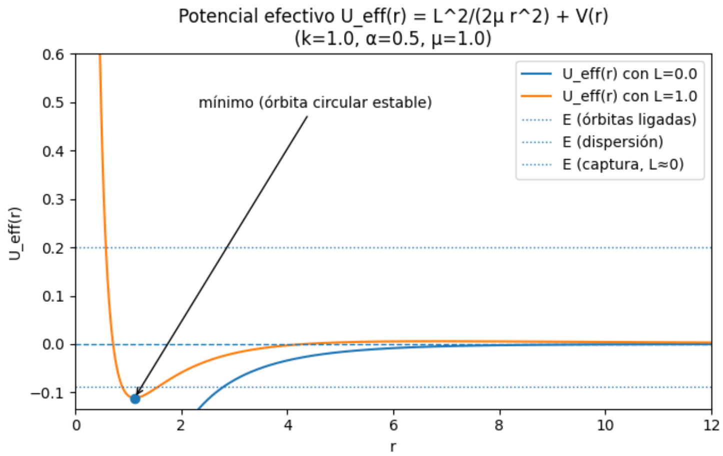

Figure 1: Análisis del movimiento de la partícula.

(c) **Momento angular y energía en una órbita circular de radio a.**

Condición de equilibrio:

$$\frac{dV_{eff}}{dr}|_{r=a} = 0$$

Así, el momento angular:

$$L = \sqrt{mK\, e^{-\alpha a}\, a(\alpha a + 1)}.$$

Energía total:

$$E = K\frac{e^{-\alpha a}}{a}\left(\frac{\alpha a - 1}{2}\right).$$

(d) **Período.**

Frecuencia de oscilaciones radiales:

$$V''_{eff}(a) > 0, \quad k = V''_{eff}(a), \quad T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Entonces

$$T_{=}2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{K\, e^{-\alpha a}\left(1 + \alpha a - \alpha^2 a^2\right)}}.$$

Condición de estabilidad:

$$1 + \alpha a - \alpha^2 a^2 > 0.$$