Ayudantía 13 de mayo

Ayudante : Rodolfo Godoy Arteaga

1. ejercicios:

1) $y'' - 2y' - 3y = 4x$
2) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
3) $z'' + 4z' + 6z = 0$
4) $y'' - y' - 2y = e^{-x} sin(x)$
5) $y''' - 4y' = e^{-2x}$
6) $x'' + x' - 2x = y^2$

2. solución:

2.1. 1)

tipo: Coeficiente constante con coeficiente indeterminado

paso 1 Se hace homogénea:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$D^2 - 2D - 3 = 0$$

solución homogénea $y_h(x) = c_1 e^{3x} + c : 2e^{-x}$.

paso 2 Anular el coeficiente indeterminado. El anulador de $4x$ es D^2, se multiplica a ambos lados, para que se iguale a cero.

$$(D - 3)(D + 1)D^2 = 0$$

Solución parcial: $y_p(x) = A + Bx$.
Ahora se Sustituye las "y" por "y_p"

$$-2(B) - 3(A + Bx) = 4x$$

Ahora tenemos sabemos que los valores multiplicados por x deben ser iguales a cuatro y el resto de valores deben ser cero, ya que, no aparecen en la igualdad.

$$-3Bx = 4x$$

$$-2B - 3A = 0$$

Resolviendo el sistema, resulta en, : $B = -\frac{4}{3}$ y $A = \frac{8}{9}$

paso 3: Solución final $y = y_h + y_p$

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{8}{9} - \frac{4}{3}x$$

2.2. 2)

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

Paso 1:

$$D^2 + 2D + 1 = 0$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Paso 2: Anulador $(D+1)$

$$(D+1)^3 = 0$$
$$y_p = Ax^2e^{-x}$$

Derivadas;

$$y_p' = A2xe^{-x} - Ax^2e^{-x}$$
$$y_p'' = A2e^{-x} - A4xe^{-x} + Ax^2e^{-x}$$

Remplazando:

$$A2e^{-x} - A4xe^{-x} + Ax^2e^{-x} + 2(A2xe^{-x} - Ax^2e^{-x}) + Ax^2e^{-x} = e^{-x}$$

Se va el e^{-x} y además se restan los x y x^2, Resultando en:

$$A = \frac{1}{2}$$

Resultado final $y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2)$.

2.3. 3)

tipo: Homogénea con coeficiente cte.

$$D^2 + 4D + 6 = 0$$
$$(D - (-2 + i\sqrt{2}))(D - (-2 + i\sqrt{2})) = 0$$

Solución: $y(x) = e^{-2x}(C_1cos(\sqrt{2}x) + C_2sin(\sqrt{2}x))$

2.4. 4

$$y'' - y' - 2y = e^{-x}sin(x)$$

Homogénea

$$(D-2)(D+1) = 0$$

Solución homo $y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$

Desarrollo la parcial

Anulador $L = (D^2 + 2D + 2)$.

$$y_p = Ae^{-x}cos(x) + Be^{-x}sin(x)$$

Derivadas:

$$y_p' = A[-sin(x)e^{-x} - e^{-x}cos(x)] + B[cos(x)e^{-x} - sin(x)e^{-x}]$$
$$y_p'' = A[2e^{-x}sin(x)] + B[-2e^{-x}cos(x)]$$

Resolviendo $A = \frac{3}{10}$ y $B = -\frac{1}{10}$:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + e^{-x}[\frac{3}{10}cos(x) - \frac{1}{10}sin(x)]$$

2.5. 5)

homogénea

$$D^3 - 4D = 0$$

Solución $y_h = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$. Anulador de e^{2x}.

$$(D^3 - 4D)(D - 2) = 0$$

Solución parcial $y_p = Axe^{2x}$ Derivadas:

$$y_p = Ae^{2x} + A2xe^{2x}$$

$$y_p''' = A12e^{2x} + A8xe^{2x}$$

Resolviendo el sistema: $A = \frac{1}{8}$ solución:

$$y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + \frac{1}{8}xe^{2x}$$

2.6. 6)

$$x'' + x' - 2x = y^2$$

Homogénea

$$(D + 2)(D - 1) = 0$$

Homogénea: $x_h = c_1e^{-2y} + c_2e^y$ Anulador:

$$(D + 2)(D - 1)D^3 = 0$$

Parcial: $x_p = C + By + Ay^2$ Sistema

$$2AB - 2C = 0$$

$$2A - 2B = 0$$

$$-2A = 1$$

Solución final:

$$x(y) = c_1e^{-2y} + c_2e^y - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2$$