Ayudantía 13 de mayo

Ayudante : Rodolfo Godoy Arteaga

1. Resumen de la materia:

1.1. resolver EDO con coeficientes constantes:

Tenemos una EDO en la cual se descompone en operadores de derivadas, $L(f) = 0$

1.1.1. ejemplo:

$$y''' - y' = 0$$

Usando la transformada:

$$D^3 - D = 0$$

Para encontrar la solución hay que usar las raíces o ceros de los polinomios de D que va dejando la transformada. A su vez, van haber 3 tipos de soluciones:

1.1.2. caso 1:

$$(D - r_1)(D - r_2)...(D - r_n) = 0 \tag{1}$$

Deja soluciones del tipo

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_n x} \tag{2}$$

1.1.3. caso 2:

$$(D - r)^n = 0 \tag{3}$$

Deja soluciones del tipo

$$y = e^{rx}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_n X^{n-1}) \tag{4}$$

1.1.4. caso 3:

$$r = a \pm ib \tag{5}$$

$$(D - (a \pm ib)) = 0 \tag{6}$$

Deja soluciones del tipo

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{\bar{r}x} y = e^{ax}((c_1 + c_2)cos(bx) + (c_1 - ic_2)sin(bx)) \tag{7}$$

1.2. Anuladores:

Tenemos una función ya solucionada $y(x)$, la cual, queremos saber cual fue su ecuación diferencial.

1.2.1. ejemplo:

Tenemos una función y(x):

$$y(x) = x$$

Usando el anulador L queda

$$Ly(x) = Lx$$

para que sea correcto el anulador, la función debe quedar igualada a cero, en otras palabras tenemos que derivar las veces necesarias hasta que se haga cero.En este caso la función x se anulará en la segunda derivada.

$$D^2y = D^2x = 0$$

La EDO y el anulador son, respectivamente:

$$y'' = 0 \quad ; D^2 = 0$$

Para no ir probando derivadas a la hora de hacer ejercicios, se tienen las formas generales:

1.2.2. Primera forma

$L = (D)^n$ Anula alas combinaciones lineales de : $c_n x^{n-1}$

1.2.3. Segunda forma

$L = (D - r)^n$ Anula alas combinaciones lineales de : $c_n x^{n-1} e^{rx}$

1.2.4. Tercera forma

$L = (D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^n$ Anula alas combinaciones lineales de : $c_n x^{n-1} e^{ax} cos(bx)$ y $c_n x^{n-1} e^{ax} sen(bx)$

1.3. Ejercicios:

Anuladores:

1) $2 - x^2 e^{5x} + 5xe^{5x}$ (recomiendo ver la solución de este ejercicio antes de hacerlo por su cuenta)
2) $7e^{-4x} + 8e^{-4x} cos(2x) - e^{-4x} sen(x)$
3) $e^{6x} sen(x) cos(x) + x^8 e^{6x} cos(2x)$

Cof Cte:

$1)4y'' + 12y' + 5y = 0$
$2)4y'' + 4y' + y = 0$
$3)y'' - 2y' - 3y = 0$
$4)y'' + 2y' + y = 0$

1.4. solución:

Anuladores:

1) Este tipo de ejercicios se resuelve usando las formas mostradas anteriormente, de la siguiente forma: Tenemos $2 - x^2e^{5x} + 5xe^{5x}$.
y sus derivadas correspondientes (usando la primera y segunda forma) para que sean anuladas son:

$$2 : D$$
$$-x^2e^{5x} : (D-5)^3$$
$$5xe^{5x} : (D-5)^2$$

Independiente del signo de la función, las derivadas son iguales, El anulador queda:

$$L = D(D-5)^3(D-5)^2$$

Pero se puede dejar solamente:

$$L = D(D-5)^3$$

Ya que, al tener anuladores iguales, nos quedamos con el de mayor exponente, ya que, en este caso las dos partes de la función se anulan con el $(D-5)^3$ al sumar los exponente y dejarlo $D(D-5)^5$, estoy derivando de mas, la función ya es cero en $D(D-5)^3$.

2) Tenemos $7e^{-4x} + 8e^{-4x}cos(2x) - e^{-4x}sen(x)$
y sus derivadas correspondientes (usando la segunda y tercera forma) para que sean anuladas son:

$$7e^{-4x} : (D+4)$$
$$8e^{-4x}cos(2x) : (D^2 + 8D + 16 + 4)$$
$$-e^{-4x}sen(x) : (D^2 + 8D + 16 + 1)$$

Independiente del signo de la función, las derivadas son iguales, El anulador queda:

$$L = (D+4)(D^2 + 8D + 20)(D^2 + 8D + 17)$$

Como las funciones son distintas, se puede dejar, así tal cual.

3) Tenemos $e^{6x}sen(x)cos(x) + x^8e^{6x}cos(2x)$
Aqui no tenemos una forma para anular $e^{6x}sen(x)cos(x)$, pero podemos usar propiedades trigonométricas a nuestra conveniencia.
Usando $2Sen(x)Cos(x) = Sen(2x)$ podemos proceder con sus derivadas correspondientes (usando la tercera forma) para que sean anuladas son:

$$\frac{e^{6x}sen(2x)}{2} : (D^2 - 12D + 36 + 4)$$

$$x^8e^{6x}cos(2x) : (D^2 + 12D + 36 + 4)^9$$

El anulador queda:

$$L = (D^2 + 12D + 36 + 4)^9(D^2 - 12D + 36 + 4)$$

Como las funciones son iguales, nos quedamos con el de mayor exponente.

$$L = (D^2 + 12D + 36 + 4)^9$$

Cof cte:

1) Aplicamos transformada:

$$4y'' + 12y' + 5y \to 4D^2 + 12D + 5 = 0$$

ocupando la ecuación cuadrática se tiene $x_1 = -\frac{5}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

queda:

$$(D + \frac{5}{2})(D + \frac{1}{2}) = 0$$

Como tenemos varias soluciones, ocupamos el caso 1, la función $y(x)$ es:

$$y = c_1e^{-\frac{5}{2}x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}$$

2) Aplicamos transformada:

$$4y'' + 4y' + y \to 4D^2 + 4D + 1 = 0$$

queda:

$$(2D + 1)^2 = 0$$

Como tenemos soluciones que se repiten, ocupamos el caso 2, la función $y(x)$ es:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(c_1 + c_2x)$$

3) Aplicamos transformada:

$$y'' - 2y' - 3y \to D^2 - 2D - 3 = 0$$

queda:

$$(D-3)(D+1) = 0$$

Como tenemos varias soluciones, ocupamos el caso 1, la función $y(x)$ es:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

4) Aplicamos transformada:

$$y'' + 2y' + y \to D^2 + 2D + 1 = 0$$

queda:

$$(D+1)^2 = 0$$

Como tenemos soluciones repetidas, ocupamos el caso 2, la función $y(x)$ es:

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2 x)$$