Una breve Introducción a las Ecuaciones diferenciales

Preámbulo

Ya al termino de este curso, recordemos que nuestro objetivo central de este curso fue integrar (antiderivar) una función f para obtener una nueva función F . Esto lo escribimos

$$\int f(x)dx = F(x) + c \cdots (1)$$

Y , por definición , esto fue correcto siempre y cuando

$$F'(x) = f(x) \cdots (2)$$

Ahora bien, (2) que está en el lenguaje de derivadas es equivalente a

$$dF(x) = f(x)dx$$

en el lenguaje de diferenciales. Por tanto, podemos interpretar la fórmula (1) como

$$\int dF(x)dx = F(x) + c \cdots (2)$$

Desde la perspectiva dada en (2), integramos la diferencial de una función para obtener las función más una constante. Desde este punto de vista, pero adaptándolo nos ayudara a resolver ecuaciones diferenciales.

¿Qué es una ecuación diferencial? , para motivar nuestra respuesta, empezaremos con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1

Encuentre una ecuación , en x e y, de la curva que pasa por el punto $(-1,2)$ y cuya pendiente en cualquier punto de la curva es igual a dos veces la abscisa (coordenada x) de ese punto.

Solución

La condición que debe cumplirse en cada punto (x, y) de la curva es

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Estamos buscando una función $y = f(x)$ que satisfaga esta ecuación y con la condición adicional de que $y = 2$ cuando $x = -1$. Abordaremos la solución de este problema de dos maneras.

Método 1:

Cuando una ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdots (3)$$

Observamos que y debe ser una antiderivada de $g(x)$; esto es,

$$y = \int g(x)dx$$

En este caso,

$$y = \int 2xdx = x^2 + c$$

Método 2:

Consideremos a dy/dx como un cociente de dos diferenciales . Cuando multiplicamos ambos lados de

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Obtenemos

$$dy = 2dx$$

Ahora integramos las diferenciales de ambos lados , igualamos los resultados y simplificamos

$$\int dy = \int 2xdx$$

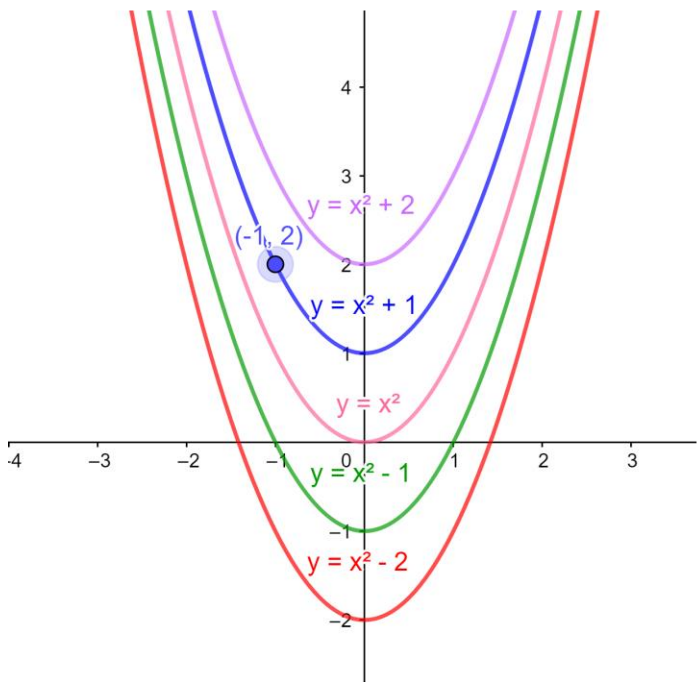
$$y + c_1 = x^2 + c_2$$

$$y = x^2 + c_2 - c_1$$

$$y = x^2 + c$$

El segundo método funciona en una gran variedad de problemas que no están en la sencilla fórmula (3), como veremos.

La solución $y = x^2 + c$ representa una familia de curvas ilustradas en la figura siguiente , para $c = -2, -1, 0, 1, 2$



De esta familia de parábolas debemos seleccionar aquella para la que $y = 2$ cuando $x = -1$; por tanto, queremos que

$$2 = (-1)^2 + c$$

Concluimos que $c = 1$ y por tanto que $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ **(ver figura)**

Las ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = 2x \text{ y } dy = 2xdx$$

se denominan ecuaciones diferenciales .

En general cualquier ecuación en la que la incógnita sea una función y que incluya derivadas (o diferenciales) se denomina **ecuación diferencial.**

Otros ejemplos son

$$\frac{dy}{dx} = 3xy + sen\ x$$

$$ydy = 2(x^3 + 1)dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 4xy = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 40y \ \ o\ y' = 40y\ (modelo\ de\ crecimiento)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3(y - 60) \ \ o\ y' = 3(y - 60)$$

$$(ley\ de\ enfriamiento\ de\ Newton)$$

$$y''' + 2\,y'' + y' - xy = \cos x$$

$$x^2y''' + 2e^xy'' = (x^2 + 3)y^2$$

Estos ejemplo corresponden a **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)** que son aquella ecuaciones que contienen solo una o varias derivadas de una función desconocida de una variable, y se quiere determinarla a partir de la ecuación.

En cambio:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

es una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP), pues en esta ecuación tenemos una variable dependiente z y más de una variable independiente, en este caso, $x\ e\ y$.

Otros ejemplo de EDP:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \quad donde\ u=u(x,y,z,t)$$

Definición

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta en la ecuación.

Ejemplos

$$y''+3y'=x+8 \quad es\ de\ orden\ 2$$

$$y'''+2(y'')^2=\cos x \quad es\ de\ orden\ 3$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad es\ de\ orden\ 2$$

Cuando una función se sustituye en una ecuación diferencial y transforma esa ecuación en una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación diferencial.

Por tanto, resolver una ecuación diferencial es encontrar una función desconocida, que en muchos casos no es fácil de encontrar. Aquí sólo consideramos el tipo más sencillo, las ecuaciones diferenciales **de primer orden con variables separables y las homogéneas.**

Estas ecuaciones con variable separable son ecuaciones que incluyen sólo a la primera derivada de la función desconocida y son las que las variables pueden separarse , una en cada lado de la ecuación

Separación de variables

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+3x^2}{y^2}$$

Si multiplicamos ambos lados por y^2dx , obtenemos

$$y^2dy=(x+3x^2)dx$$

En esta forma, la ecuación diferencial tiene separadas sus variables , es decir , los términos que incluyen a y están en un lado de la ecuación y los de x en la otra. En forma separada podemos resolver la ecuación mediante el método 2 (integrar ambos lados , igualar los resultados y simplificar), como lo ilustramos ahora.

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

Después encuentre aquella solución para la cual $y = 6$ y $x = 0$.

Solución

Como se observo anteriormente la ecuación dada es equivalente a

$$y^2 dy = (x + 3x^2)dx$$

Así,

$$\int y^2 dy = \int (x + 3x^2)dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^2}{2} + x^3 + c_2$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + (3c_2 - 3c_1)$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + c$$

Entonces la solución general es

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + c}$$

Para encontrar la constante c , utilizamos la condición dada, $y = 6$ cuando $x = 0$. Esto da

$$6 = \sqrt[3]{c}$$

$$216 = c$$

Por tanto, la solución particular

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216}$$

Para verificar nuestro trabajo podemos sustituir este resultado en ambos lados de la ecuación diferencial original para ver que dé una igualdad. También debemos verificar que $y = 6$ cuando $x = 0$.

Al sustituir en el lado derecho de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216\right)^{-2/3} (x + 3x^2)$$

$$= \frac{x + 3x^2}{\left(\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216\right)^{2/3}}$$

En el lado derecho

$$\frac{x + 3x^2}{y^2} = \frac{x + 3x^2}{\left(\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216\right)^{2/3}}$$

Como se esperaba, las dos expresiones son iguales.

Ahora cuando $x = 0$, tenemos

$$y = \sqrt[3]{\frac{3(0)^2}{2} + 3(0)^3 + 216} = \sqrt[3]{216} = 6$$

Por consiguiente, $y = 6$ cuando $x = 0$, como esperábamos.

Resumiendo, el método de manera más general, tenemos:

Método de separación de variables

Si la ecuación diferencial $y' = f(x, y) \cdots (4)$ puede escribirse en la forma

$$h(y)y' = g(x)$$

donde $h(y)$ es una función que depende solamente de la variable y, y $g(x)$ es una función que depende solo de la variable x, se denomina ecuación diferencial separable o de variables separables.

Resolución de $\boldsymbol{h(y)y' = g(x)}$:

Como

$$h(y)y' = g(x)$$

O mejor

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

De donde se obtiene que

$$h(y)dy = g(x)dx$$

Una solución $y(x)$ de esta última ecuación debe cumplir que:

$$h\big(y(x)\big)y'(x)dx = g(x)dx$$

Luego ambos término serán funciones de x, por lo que integrando en x ambos lados de la igualdad se tienen

$$\int h\big(y(x)\big)y'(x)dx = \int g(x)dx$$

Para $y(x) = y \Rightarrow y'(x)dx = dy$, luego

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Ahora, si denotamos respectivamente estas primitivas por $G(y)$ y $F(x)$, se tiene que

$$G(y) = F(x) + c$$

Por lo que la función $G(y) - F(x) = c$ es la solución general implícita de la ecuación diferencial.

Por tanto, los pasos necesarios para resolver ecuaciones de este tipo (1) son:

P1: Expresamos la ecuación diferencial de la forma

$$h(y)dy = g(x)dx$$

P2: Se integra del paso 1 para encontrar la solución general, es decir

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

P3: De ser posible, escribir la solución en forma explicita $y = u(x,y) + c$, caso contrario escribir la solución implícita, en la forma $u(x,y) = c$.

Ejemplos

1.- Resolver la ecuación diferencial:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

Solución

La ecuación dada se puede escribir de manera equivalente como

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

Entonces

$$ydy = -xdx$$

$$\int ydy = -\int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + k$$

$$x^2 + y^2 = 2k$$

Luego

$$x^2 + y^2 = c$$

es la solución general de la ecuación diferencial con $c > 0$.

2.- Resolver la ecuación diferencial: $y' = x\sqrt{y}$

Solución

$$y' = x\sqrt{y} \Rightarrow\ y' = xy^{1/2}$$

$$\Rightarrow y^{-1/2}\frac{dy}{dx} = x\ ;\ con\ y \neq 0$$

$$\Rightarrow y^{-1/2}\ dy = xdx\ ; y \neq 0$$

$$\Rightarrow \int y^{-1/2}\ dy = \int xdx$$

$$\frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + k$$

$$\Rightarrow y^{1/2} = \frac{x^2}{4} + \frac{k}{2}$$

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2\ ;\ \forall c \in \mathbb{R}$$

es solución de la ecuación diferencial. ¿Es esta la solución general? La respuesta es no pues observen que para $y = 0$ también es solución de la ecuación, en realidad es una solución singular. Por tanto, todas las soluciones de la ecuación dada son:

$$y = 0 \wedge y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2\ ;\ \forall c \in \mathbb{R}$$

3.- Resolver la ecuación diferencial: $(x^2 + 1)y' = x^2(y + 1)$

Solución

$$(x^2 + 1)y' = x^2(y + 1)\ \Rightarrow (x^2 + 1)\ \frac{dy}{dx} = x^2(y + 1)$$

$$\frac{dy}{y+1}=\frac{x^2}{x^2+1}dx$$

Entonces

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$$\Rightarrow\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$\Rightarrow\int\frac{dy}{y+1}=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow ln|y+1|=\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\Rightarrow ln|y+1|=x-arctg\ x+c$$

Es la solución implícita y general de la ecuación diferencial.

3.- Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^3+1)dy-x^2ydx=0\ ;\ y(1)=2$$

Solución

Primero resolveremos la ecuación diferencial

$$(x^3+1)dy-x^2ydx=0$$

Y después determinaremos la solución particular**.**

$$(x^3+1)dy-x^2ydx=0\ \Rightarrow\ (x^3+1)dy=x^2ydx$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{x^2}{x^3+1}dx$$

$$\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x^2}{x^3+1}dx$$

$$\Rightarrow\ ln|y|=\frac{1}{3}ln|x^3+1|+k$$

$$\Rightarrow 3ln|y| = ln|x^3 + 1| + 3k$$

$$\Rightarrow 3ln|y| = ln|x^3 + 1| + m$$

$$\Rightarrow 3ln|y| = ln|x^3 + 1| + \ln c$$

$$\Rightarrow ln|y^3| = ln|c(x^3 + 1)|$$

Entonces

$$y^3 = c(x^3 + 1)$$

Es solución general de la ecuación dada. Ahora determinemos la solución particular sujeta a la condición $y(1) = 2$.

Si $x = 1 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow 2^3 = c(1^3 + 1)$

$\Rightarrow c = 4$

Por tanto, la solución particular es

$$y^3 = 4(x^3 + 1)$$

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Definición

Se dice que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n, si para todo t se cumple que

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Ejemplo 4

$$f(x, y) = x^3 - xy^2 + 2y^3$$

es homogénea de grado 3 o de tercer grado.

En efecto, se tiene que

$$f(tx, ty) = (tx)^3 - (tx)(ty)^2 + 2(ty)^3$$

$$= t^3x^3 - (tx)(t^2y^2) + 2t^3y^3$$
$$= t^3x^3 - t^3xy^2 + 2t^3y^3 = t^3(x^3 - xy^2 + 2y^3) = t^3f(x,y)$$

Ejemplo 5

$$f(x,y) = \sqrt[7]{x^7 + y^7}$$

En este caso se tiene que es homogénea de grado 1, pues

$$f(tx,ty) = \sqrt[7]{(tx)^7 + (ty)^7}$$
$$= \sqrt[7]{t^7x^7 + t^7y^7}$$
$$= \sqrt[7]{t^7(x^7 + y^7)}$$
$$= \sqrt[7]{t^7}\sqrt[7]{x^7 + y^7}$$
$$= t\sqrt[7]{x^7 + y^7}$$
$$= tf(x,y)$$
$$f(tx,ty) = tf(x,y)$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice que es homogénea si se puede escribir de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Este tipo de ecuación diferencial mediante un cambio de variable se transforma en una ecuación de variables separables.

Resolución de ecuaciones diferenciales homogéneas

Los pasos necesarios para resolver una ecuación diferencial homogénea son:

1. Expresar la ecuación diferencial de la forma
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
2. Verificar que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

3. Transformar la ecuación diferencial homogénea en una de variable separables, utilizando cualquiera de las siguientes sustituciones: $y = ux$ o $x = uy$, con sus respectivos diferenciales.
4. Resolver la ecuación diferencial en variables separables, para luego regresar al cambio de variable realizado.

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $xdy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx = 0$

Solución

$$M(x, y) = -\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) \text{ ; } N(x, y) = x$$

Luego

$$M(tx, ty) = -\left(ty + \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2}\right) = -\left(ty + \sqrt{t^2(x^2 - y^2)}\right)$$

$$= t\left[-\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)\right] = tM(x, y)$$

Entonces $M(x, y)$ es homogénea de grado 1

De la misma forma $N(tx, ty) = tx = tN(x, y)$ entonces $N(x, y)$ es homogénea de grado 1 y por tanto la ecuación es homogénea de grado 1.

Sea $y = ux$ entonces $dy = xdu + udx$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene

$$x(xdu + udx) - \left(ux + \sqrt{x^2 - (ux)^2}\right)dx = 0$$

Resolviendo se tiene que

$$x^2du + uxdx - uxdx - \sqrt{x^2 - (ux)^2}dx = 0$$

$$x^2du - \sqrt{x^2 - (ux)^2}dx = 0$$

$$x^2du = \sqrt{x^2 - (ux)^2}dx$$

$$x^2du = \sqrt{x^2(1 - u^2)}dx$$

$$x^2du = x\sqrt{1-u^2}\,dx$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x} \quad con\, u \neq \pm 1$$

Integrando

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$arcsen\, u = ln|x| + c$$

$$arcsen\, \frac{y}{x} = ln|x| + c$$

es la solución general de la ecuación diferencial.

Ejemplo 7

Resolver la ecuación diferencial: $(x^2 + xy)dy = 2y^2dx$

Solución

$M(x,y) = 2y^2 \;\Rightarrow M(tx,ty) = 2(ty)^2 = 2t^2y^2 = t^2(2y^2) = t^2M(x,y)$.

Entonces

$M(x,y)$ es homogénea de grado 2

$$N(x,y) = x^2 + xy \Rightarrow N(tx,ty) = (tx)^2 + (tx)(ty)$$

$$= t^2x^2 + t^2xy$$

$$= t^2(x^2 + xy) = t^2N(x,y)$$

Entonces

$N(x,y)$ es homogénea de grado 2

Por tanto, la ecuación es homogénea de grado 2.

Usaremos el cambio de variable $x = uy$ y además $dx = ydu + udy$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$((uy)^2 + (uy)y)dy = 2y^2(ydu + udy)$$

$$u^2y^2dy + uy^2dy = 2y^3du + 2y^2udy$$

Agrupando diferenciales y aplicando factor común en ambos miembros

$$y^2(u^2 + u - 2u)dy = 2y^3du$$

Separando las variables con sus respectivas diferenciales,

$$\frac{dy}{y} = \frac{2du}{u^2 - u}$$

Integrando ambos lados de la ecuación

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2du}{u^2 - u}$$

Donde

$$\int \frac{2du}{u^2 - u} = 2\int \frac{du}{u(u-1)}$$

Ahora

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$$

$$1 = A(u-1) + Bu$$

Si $u = 1 \Rightarrow B = 1$

Si $u = 0 \Rightarrow A = -1$

Luego

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}$$

Así,

$$\int \frac{2du}{u^2 - u} = 2\int \frac{du}{u(u-1)}$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du$$

$$= 2(ln|u-1| - ln|u|) + k$$

Por tanto

$$\int \frac{dy}{y} = 2(ln|u-1| - ln|u|) + k$$

Luego

$$ln|y| = ln\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 + k$$

O bien

$$ln|y| = ln\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 + ln|c|$$

$$ln|y| = ln\left|c\left(\frac{u-1}{u}\right)^2\right|$$

Por tanto

$$y = c\left(\frac{u-1}{u}\right)^2$$

$$y = c\left(\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}}\right)^2$$

$$y = c\left(\frac{x-y}{x}\right)^2$$

Es la solución general de la ecuación diferencial.