Ayudantía 20 de mayo

Ayudante : Rodolfo Godoy Arteaga

1. Tipo de problemas:

1.1. Anuladores:

Tenemos una función $y(x)$, la cual, queremos saber cual fue su ecuación diferencial.

Para que sea correcto el anulador, la función debe quedar igualada a cero, en otras palabras tenemos que derivar las veces necesarias hasta que se haga cero.

Primera forma $L = (D)^n$ Anula combinaciones lineales de : $c_n x^{n-1}$

Segunda forma $L = (D - r)^n$ Anula combinaciones lineales de : $c_n x^{n-1} e^{rx}$

Tercera forma $L = (D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^n$ Anula combinaciones lineales de : $c_n x^{n-1} e^{ax} cos(bx)$ y $c_n x^{n-1} e^{ax} sen(bx)$

1.2. Homogénea con coeficiente constante

Como se explico en la ayudantía pasada a la función por ejemplo $ay'' + by' + cy = 0$, se aplica la transformada, quedando : $aD^2 + bD + c = 0$, para este caso se tienen dos soluciones. En la cual se tienen los siguientes casos:

caso 1:

$$(D - r_1)(D - r_2)...(D - r_n) = 0 \tag{1}$$

Deja soluciones del tipo

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_n x} \tag{2}$$

caso 2:

$$(D - r)^n = 0 \tag{3}$$

Deja soluciones del tipo

$$y = e^{rx}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_n X^{n-1}) \tag{4}$$

caso 3:

$$r = a \pm ib \tag{5}$$

$$(D - (a \pm ib)) = 0 \tag{6}$$

Deja soluciones del tipo

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{\bar{r}x} \tag{7}$$

$$y = e^{ax}((c_1 + c_2) cos(bx) + (ic_1 - ic_2) sin(bx)) \tag{8}$$

1.3. Coeficiente constantes con coeficiente indeterminado (no homogénea):

Estas ecuaciones están dadas de la forma, por ejemplo, $ay'' + by' + cy = g(x)$, en cuanto al desarrollo no se diferencian tanto con la anterior, solo se le suma un paso mas.

1.3.1. Desarrollo:

paso 1 Se hace el ejercicio normalmente como si fuera una homogénea, o sea, $ay'' + by' + cy = 0$

Teniendo el resultado, por ejemplo $y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

paso 2 Ahora se procede con la ecuación original , o sea, $ay'' + by' + cy = g(x)$, a dejar las "y" como el operador D, o sea, $aD^2 + bD + c = g(x)$. Ahora multiplicando anuladores de $g(X)$ en ambos lados, se tiene una ecuación homogénea, $(D - r_1)(D - r_2) * L(g(x)) = 0$, ese $L(g(x))$, nos dará valores para una solución parcial (y_p), ocupando los mismos casos anteriores

paso 3 La solución final es $y(x) = y_h + y_p$

1.3.2. ejemplo:

$$y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$$

paso 1: se desarrolla como si fuera homogénea

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

queda:

$$(D + 3)^2 = 0$$

la solución $y_h(x)$ es:

$$y_h(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$$

paso 2: se desarrolla el $g(x)$

$$D^2 + 6D + 9 = e^{2x}$$

El anulador $L(e^{2x})$ es $(D - 2)$ (se multiplica en ambos lados para sacar el $g(x)$)

$$(D^2 + 6D + 9)(D - 2) = 0$$

Por lo que la solución "parcial"($y_p(x)$) es:

$$y_p(x) = c_3 e^{2x}$$

Ahora en este tipo de ejercicios, se pide encontrar la constante c_3, esta se puede encontrar remplazando las "y" por y_p
o sea,:

$$y_p'' + 6y_p' + 9y_p = e^{2x}$$

primero necesitamos las derivadas de y_p.

$$y_p(x) = c_3 e^{2x}$$

$$y_p'(x) = c_3 2e^{2x}$$

$$y_p''(x) = c_3 4e^{2x}$$

Remplazando en la ecuación, queda:

$$c_3 4e^{2x} + c_3 12e^{2x} + c_3 18e^{2x} = e^{2x}$$

Se van los e^{2x} y encontramos c_3:

$$c_3 4 + c_3 12 + c_3 18 = 1$$

$$34c_3 = 1$$

$$c_3 = \frac{1}{34}$$

La solución final es $y = y_h + y_p$:

$$y(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{34}e^{2x}$$

1.4. Homogénea con coeficiente variables

$$q(x)y'' + p(x)y' + r(x)y = g(x)$$

Este tipo de EDO se reconoce cuando tenemos la variable independiente multiplicando a la dependiente ($\frac{\partial y}{\partial x}, y = dependiente; x = independiente$), si fuese el caso que tenemos por ejemplo un z multiplicando al $\frac{\partial y}{\partial x}$, tenemos que considerarla como una constante, por asi decirlo.

También un problema para esta forma de EDO te dan una solución y_1, que podría ser bien, $y = x^k$, $y = ax + b$ ó $y = sen(x)$, etc.., por ejemplo.
La solución final de este tipo de EDO es $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, y_1 nos la dan (solo hay que encontrar las cte, si es que nos la piden) y y_2 se encuentra con la formula de reducción de orden", que se mostrara en siguiente ejemplo.

Ejemplo 1) $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0$
Sabemos que una de las soluciones es $y_1 = ax + b$
nota: te pueden pedir encontrar las constantes o comprobar que esa sea la solución, en todo caso, se hacen de la misma manera, ya que, están igualada a cero.
Remplazamos y_1, pero primero buscamos sus derivadas correspondientes.

$$y_1 = ax + b$$

$$y_1' = a$$
$$y_1'' = 0$$

Queda:
$$x(0) - (2x+1)(a) + 2(ax+b) = 0$$
$$a = 2b$$

Aquí tenemos la libertad de poner cualquier valor que queramos que obedezca la proporción. Para este caso dejar $b = 1$ y $a = 2$.
Ahora tenemos $y_1 = 2x + 1$, para calcular el y_2, se usa la siguiente formula.

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int P(x)dx}}{y_1^2} dx$$

(Esta es la formula de reducción de orden para EDO de 2° Orden)

Lo mas importante ahora es normalizar la ecuación, en otras palabras, dejar y'' sola.
$$y'' - \frac{(2x+1)}{x} y' + \frac{2}{x} y = 0$$

Ahora nuestra P es $-\frac{(2x+1)}{x}$.
Desarrollando $y_2 = \frac{e^{2x}}{4}$.
Por lo tanto, como se dijo anterior mente la solución final es:
$y(x) = c_1(2x+1) + c_2\frac{e^{2x}}{4}$

Nota bonus: hay un tipo de EDO que se llama Euler-Cauchy, esta es cuando la variable independiente tiene el mismo grado que el orden de la derivada:

$$x^2y'' + x^1y' + y = 0$$

Esto es muy útil, ya que, la solución de este sistema es $y_1 = x^k$.
Remplazando en la ecuación para encontrar "k" nos queda.

$$k^2 + (p-1)k + q = 0$$

En este caso p y q son cte. Ocupando la ecuación cuadrática para encontrar "k", nos dará 3 casos:

caso 1 Distintas soluciones,r_1 yr_2, deja solución tipo:

$$y(x) = c_1X^{r_1} + c_2x^{r_2}$$

caso 2 Solución repetida $r_1 = r_2$:

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} ln(x)$$

caso 3 Solución imaginaria $r = a \pm bi$:

$$y(x) = c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x}$$

$$y(x) = C_1 x^a cos(bln(x)) + C_2 x^a sin(bln(x))$$

Cabe destacar que c_1 no es lo mismo que C_1, ya que, $C_1 = c_1 + c_2$ y $C_2 = ic_1 - ic_2$