# Resumen Edo parte 1

**Ayudante : Rodolfo Godoy Arteaga**

## 1. Variable separables

$$y' = p(x)g(y)$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = p(x)g(y)$$

Separamos las variables dependiente y independiente, luego integramos.

$$\frac{\partial y}{g(y)} = p(x)\partial x \quad / \int$$

Obtenemos la solución implícita.

$$G(y) = P(x) + c$$

### 1.1. Reducibles a separables

(nota:tambien sirven con homogeneas).

$$y' = f(ax + by + c); b \neq 0 \tag{1}$$

Hacemos un cambio de variables para convertirla a variables separables

$$u = ax + by + c$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = a + by' =$$
$$y' = \frac{u' - a}{b}$$

Remplazando en 1.

$$\frac{u' - a}{b} = f(u)$$

$$u' = bf(u) + a \quad ; u' = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Siguiendo los mismos pasos para resolver variables separables, tenemos la forma general:.

$$\int \frac{\partial u}{bf(u) + a} = \int \partial x$$

## 2. Homogéneas

Una función $F(x,y)$ es homogénea cuando $F(kx,ky) = k^n F(x,y)$, k toma todo los valores de los reales menos el cero.

### 2.1. propiedad

Cuando $n = 0, F(x,y) = g(\frac{y}{x})$.
$y' = F(x,y)$ se dice homogénea si es de grado 0

### 2.2. homogéneas a separables

Teniendo

$$y' = g(\frac{y}{x})$$

Dejamos $y(x) = vx ó x = vy$ y su derivada $y' = v(x) + x\frac{\partial v(x)}{\partial x} ó x' = v(y) + y\frac{\partial v(y)}{\partial y}$ entonces nos queda como una ecuación de variables separables:

$$v' = \frac{g(v) - v}{x}$$

### 2.3. reducibles a homogéneas

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \tag{2}$$

Notar que tienen la forma de una recta, porloque, la pendientes correspondientes serian:

$$l_1 = ax + by + c \quad ; m_1 = -\frac{a}{b}$$

$$l_2 = dx + ey + f \quad ; m_2 = -\frac{d}{e}$$

#### 2.3.1. Si l$_1 \| l_2$

significa que $m_1 = m_2$, por lo tanto, se hace un cambio de variables $z = ax + by$ ó $z = dx + ey$ con sus respectivas derivadas $\partial z = a\partial x + b\partial y$ ó $\partial z = d\partial x + e\partial y$, lo cual se resuelve:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z - a\partial x}{b}}{\partial x} = \frac{z + c}{dx + ey + f}$$

Como son paralelas, $dx + ey + f = k(ax + by) + f$

$$\frac{z' - a}{b} = \frac{z + c}{kz + f}$$

### 2.3.2. Si $l_1 \neq l_2$

Estas rectas como no son paralelas, se intersecta en un punto $f(x_0, y_0)$. Ahora hay que resolver la ecuación, esto significa que hay que encontrar un $x = x_0$ y un $y = y_0$

$$ax + by + c = 0$$

$$dx + ey + f = 0$$

Luego con $x - x_0 = \bar{x}$ y un $y - y_0 = \bar{y}$ queda una edo homogenea. (ojo: $x$ e $y$ siguen siendo variables y $x_0$ e $y_0$ son constantes )

$$y' = \frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{d\bar{x} + e\bar{y}}$$

La suma de $ax_0+by_0+c$ es igual a 0, al igual que el denominador con $dx_0+ey_0+f$.

### 2.3.3. Si $l_1 = l_2$

Esto quiere decir que se intersectan en todos los puntos, por lo tanto:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} = \frac{ax + by + c}{k(ax + by + c)}$$

$$y' = \frac{1}{k} = K$$

## 3. exactas

Una ecuación diferencial de la forma

$$\partial F(x, y) = M(x, y)\partial x + N(x, y)\partial y = 0 \tag{3}$$

M y N se puede definir como:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \tag{4}$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \tag{5}$$

Podemos saber si es exacta con el criterio de exactitud:

$$\frac{M(x, y)}{\partial y} = \frac{N(x, y)}{\partial x}$$

Ahora, sabiendo que esto se hace el siguiente procedimiento para M o N:

(nota: Se puede usar cualquiera de las dos, el resultado es el mismo, de preferencia hacer una revisión mental antes de empezar y buscar el camino mas fácil )

De (4) o (5):

$$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\partial x = \int M(x,y)\partial x$$

$$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\partial y = \int N(x,y)\partial y$$

$$F(x,y) = m(x,y)_x + h(y) \quad ; F(x,y) = n(x,y)_y + h(x)$$

Como nos queda una función derivamos con respecto a su variable para encontrarla.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(m(x,y)_x + h(y))}{\partial y} \quad ; \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(n(x,y)_y + h(y))}{\partial x}$$

Ahora usando la relación 5 y 6

$$m'(x,y)_x + h'(y) = N(x,y) \quad ; n'(x,y)_y + h'(x) = M(x,y)$$

Despejando e integrando h()

$$\int h'(y)\partial y = \int N(x,y) - m'(x,y)_x \partial y \quad ; \int h'(x)\partial x = \int M(x,y) - n'(x,y)_y \partial x$$

Solo faltaría remplazar h(x) o h(y) donde corresponde:

$$F(x,y) = m(x,y)_x + \int N(x,y) - m'(x,y)_x \partial y \quad ; F(x,y) = n(x,y)_y + \int M(x,y) - n'(x,y)_y \partial x$$

## 3.1. Si no es exacta

Se multiplica por el factor integrante $\mu(x,y)$ para volverla exacta.

### 3.1.1. Inspección (Tener buen ojo):

Multiplicar un $\mu(x,y)$, tal que, la ecuación quede como una derivada.

$$\partial xy = x\partial y + y\partial x$$

$$\partial(\frac{x}{y}) = \frac{y\partial x - y\partial x}{y^2}$$

Etc...

### 3.1.2. Sistemática

Si $\mu$ depende solamente de x ó de y, se puede encontrar de la siguiente manera

$$\frac{\frac{M(x,y)}{\partial y} - \frac{N(x,y)}{\partial x}}{N} = f(x) \qquad ; \mu = e^{\int f(x) \partial x}$$

$$\frac{\frac{M(x,y)}{\partial y} - \frac{N(x,y)}{\partial x}}{M} = g(y) \qquad ; \mu = e^{- \int g(y) \partial y}$$

(nota: tener mucho cuidado con el denominador, el signo de la integral y de la variable en la que hay que integrar, En ambas situaciones, se requiere de un buen trabajo algebraico para obtener las funciones f(x) y g(y). En cualquier caso, se sugiere que comience haciendo la resta y la simplifique o factorice de modo tal que permita simplicar expresiones con M o N, así podrá concluir cual función es mejor utiliza). Para encontrar un $\mu$ que sea función de x e y, se usa la ecuación:

$$\frac{\frac{M(x,y)}{\partial y} - \frac{N(x,y)}{\partial x}}{Ny - Mx} = h(z) \qquad ; \mu = e^{\int h(z) \partial z}$$

h(z) es una funcion que depende x e y.
Ahora en este punto tenemos condiciones para seguir aplicando el metodo y que z solo puede ser una de las siguientes funciones:

$$z = x + y$$

$$z = xy$$

$$z = x - y$$

$$z = \frac{x}{y}$$

$$z = x^2 + y^2$$

# 4. Lineales de primer orden

Una ecuación de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{6}$$

(nota: si Q(x)=0, es homogénea)

Usando su factor integrante $\mu(x) = e^{\int P(x) \partial x}$

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

$$\frac{\partial(y\mu)}{\partial x} = \mu(x)Q(x)$$

Integrando entre 0 y la variable (x).

$$y(x)\mu(x) - y(0)\mu(0) = \int_0^x Q(x)\mu(x)\partial x$$

Dejamos expresada la constante numérica $y(0)\mu(0) = y_0$ y procedemos a despejar y(x).

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int P(x)\partial x}}(y_0 + \int_0^x Q(x)e^{\int P(x)\partial x}\partial x)$$

# 5. Bernoulli

Cuando se tiene una ecuación diferencial del tipo

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{7}$$

(nota; si $n = 0$ es Lineal, si $n = 1$ es de variables separables)

Con un cambio de variables se puede transformar a una ecuación lineal de primer orden

$$t = y^{1-n} \qquad ; t' = (1-n)y^{-n}yp$$

multiplicando 7 por $(1-n)y^{-n}$ nos queda:

$$t' + P(x)(1-n)t = Q(x)(1-n)$$

# 6. Riccati

Cuando se tiene una ecuación diferencial de la forma:

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y = R(x) \tag{8}$$

Con $P(x) \neq 0$

Con una solución particular($y_p(x)$) y un cambio de variables ($y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z}$) se convierte e una ecuación diferencial lineal de primer orden.
Teniendo

$$y'(x) = y'_p(x) - \frac{1}{z^2}z'$$

Se remplaza en 8.

$$y'_p(x) - \frac{1}{z^2}z' + P(x)(y_p(x)^2 + 2y_p(x)\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}) + Q(x)(y_p(x) + \frac{1}{z}) = R(x)$$

multiplicando por $-z^2$ y sabiendo que $y'_p + P(x)y_p^2 + Q(x)y_P + R(x) = 0$ queda:

$$z' + (-2P(x)y_p - Q(x))z = P(x)$$