

2023

Electromagnetismo

Cásses

Prof. José Villanueva

Universidad de Valparaíso

Licenciatura en Física

Clase 02

15/03/2023

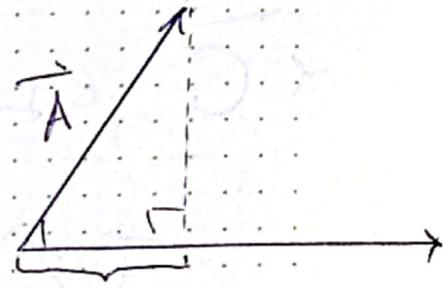
Producto Punto \Rightarrow No forma grupo

$$\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z \rangle ; \vec{B} = \langle B_x, B_y, B_z \rangle$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle A_x B_x, A_y B_y, A_z B_z \rangle$$

Nota: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

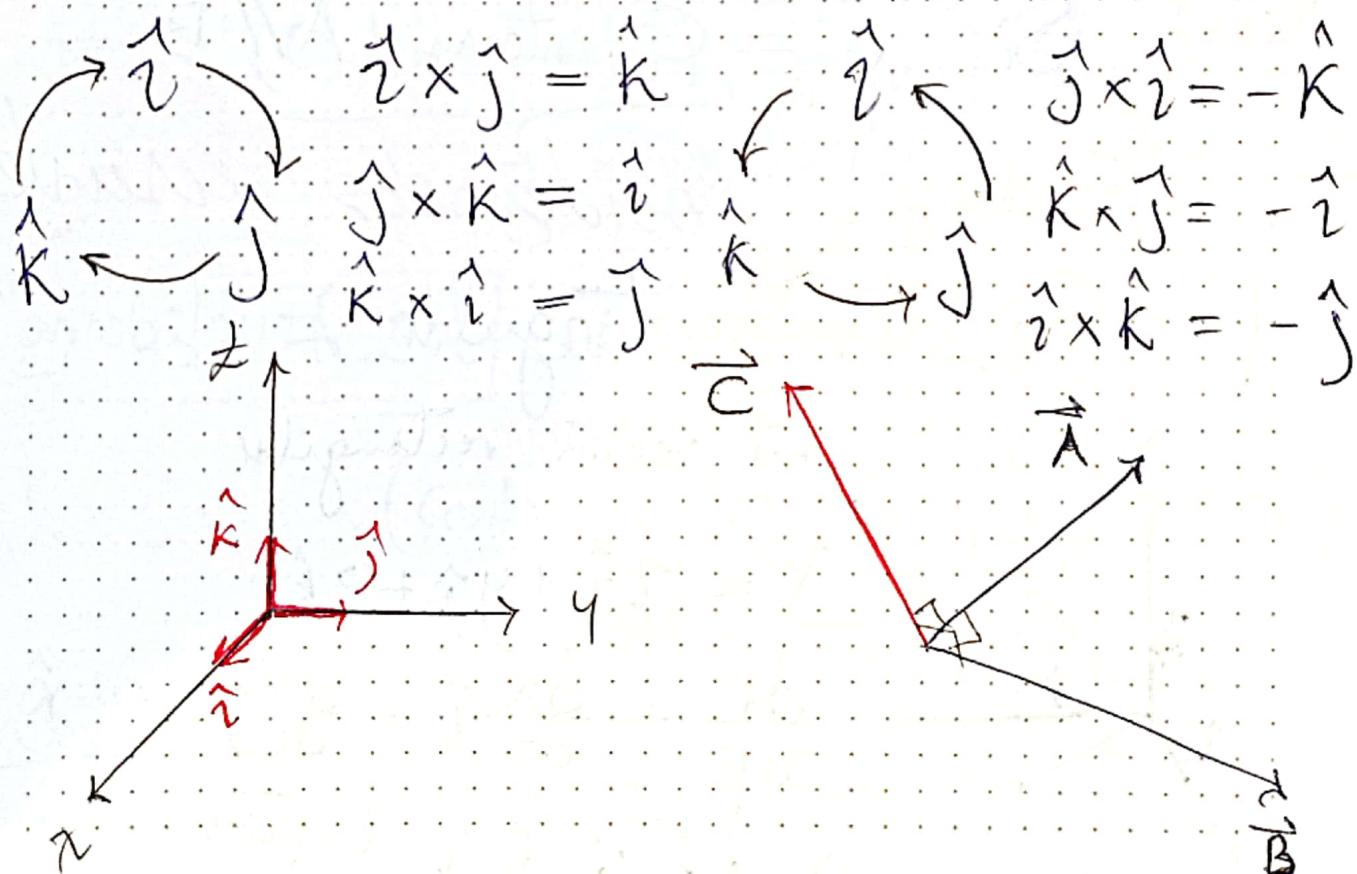
$$\Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

Producto Vectorial \Rightarrow formó grupo

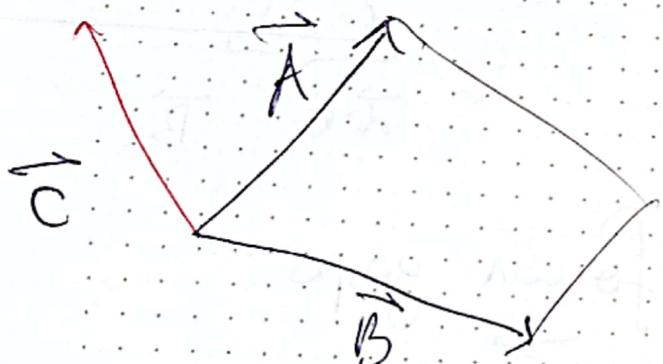
Se obtiene el vector \vec{C}



$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} (A_y B_z - A_z B_y) - \hat{j} (A_x B_z - A_z B_x) + \hat{k} (A_x B_y - A_y B_x)$$

* \vec{C} es \perp al vector \vec{A} y \vec{B}



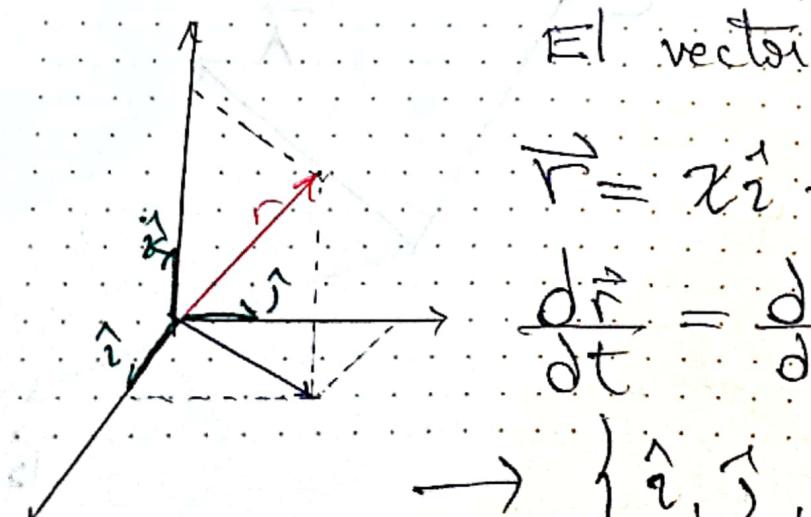
Su magnitud se obtiene

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin X(A, B)$$

Nota Si $\vec{C} = 0$, entonces $\vec{A} \parallel \vec{B}$

Sistemas de Coordenadas cartesianas

1 - Sistema rectangular Euclídeo \mathbb{R}^3

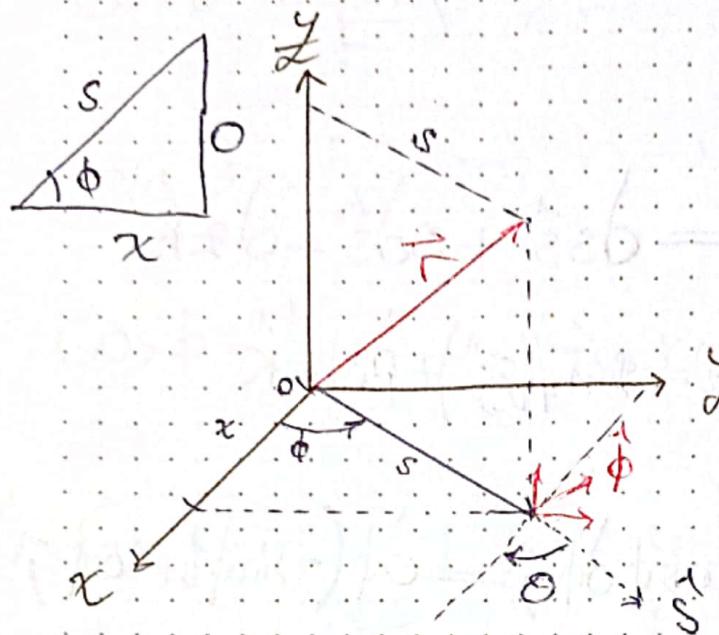


$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$\rightarrow \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ Vector fijo

2- Coordenadas Cilíndricas (s, ϕ, z)



$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\cos \phi = \frac{x}{s}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{y}{s}$$

$$x = s \cos \phi ; y = s \operatorname{sen} \phi ; z = z$$

$$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$= s \cos \phi \hat{i} + s \operatorname{sen} \phi \hat{j} + z\hat{k}$$

$$= s (\cos \phi \hat{i} + \operatorname{sen} \phi \hat{j}) + z\hat{k}$$

$$\hat{s} = \cos \phi \hat{i} + \operatorname{sen} \phi \hat{j}$$

$$= [s\hat{s} + z\hat{k}] \quad \text{Coordenadas Cilíndricas}$$

$$\hat{k} \times \hat{s} = \hat{k} \times (\cos \phi \hat{i} + \operatorname{sen} \phi \hat{j}) = \cos \phi (\hat{k} \times \hat{i}) + \operatorname{sen} \phi (\hat{k} \times \hat{j}) \\ = \cos \phi \hat{j} - \operatorname{sen} \phi \hat{i} = \hat{\phi}$$

Comprobar:

$$\hat{\phi} \times \hat{s} = (-\operatorname{sen} \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j})(\cos \phi \hat{i} + \operatorname{sen} \phi \hat{j}) \\ = -\operatorname{sen} \phi \cos \phi + \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 0$$

$\{\hat{S}, \hat{\phi}\}$ Son vectores variables; permanece

Vemos que

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d(S\hat{i} + \hat{\phi}\hat{k}) = ds\hat{i} + s d\hat{i} + d\hat{\phi}\hat{k} \\ &= ds\hat{i} + s d(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) + d\hat{\phi}\hat{k} \end{aligned}$$

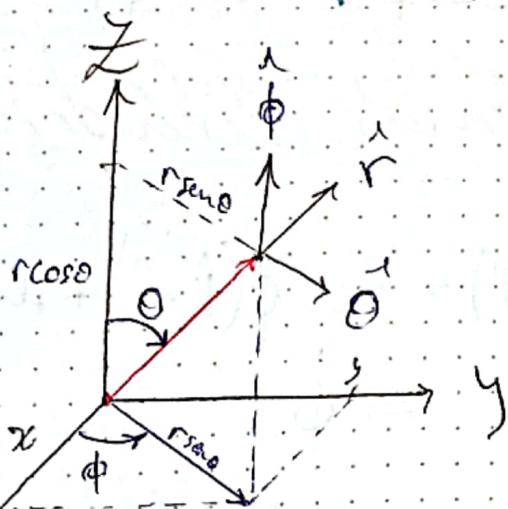
$$\hat{s} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}$$

$$\begin{aligned} * d\hat{s} &= -\sin\phi d\phi \hat{i} + \cos\phi d\phi \hat{j} = d\phi(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}) \\ &= d\phi \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\therefore d\vec{r} = ds\hat{i} + s d\phi \hat{\phi} + d\hat{\phi}\hat{k}$$

3- Sistemas de Coordenadas esféricas

$$(r, \theta, \phi)$$



* $\theta \neq$ polar

* $\phi \neq$ igual que en cilíndricas

* r magnitud de radio

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

π

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \sin \theta$$

$$\cos \phi = \frac{x}{r \sin \theta} \Rightarrow x = r \cos \phi \sin \theta$$

$$\sin \phi = \frac{y}{r \sin \theta} \Rightarrow y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$= r \cos \phi \sin \theta \hat{i} + r \sin \phi \sin \theta \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}$$

$$= r (\cos \phi \sin \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k})$$

$$= r \hat{r}$$

Demotrar que es unitario \hat{r}^2

$$\hat{r}^2 = \sqrt{\cos^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} = 1.$$

$$d\vec{r} = d(r\hat{r}) = dr\hat{r} + r d\hat{r}$$

$$d\vec{r} = d(\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k})$$

$$\hat{i} = \cos\theta \cos\phi \hat{d}\theta \hat{i} - \sin\theta \sin\phi \hat{d}\phi \hat{i}$$

$$\hat{j} = \cos\theta \sin\phi \hat{d}\theta \hat{j} + \cos\phi \sin\theta \hat{d}\phi \hat{j}$$

$$\hat{k} = -\sin\theta \hat{d}\theta \hat{k}$$

$$= \cos\theta \cos\phi \hat{d}\theta \hat{i} - \sin\theta \sin\phi \hat{d}\phi \hat{i} + \cos\theta \sin\phi \hat{d}\theta \hat{j} + \cos\phi \sin\theta \hat{d}\phi \hat{j}$$

$$-\sin\theta \hat{d}\theta \hat{k}$$

$$= \sin\theta \hat{d}\phi \underbrace{(-\sin\theta + \cos\theta)}_{\hat{\phi}} + \hat{d}\theta \underbrace{(\cos\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi)}_{\hat{\theta}}$$

$$= \hat{\phi} = -\sin\theta + \cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi - \sin\theta \hat{k}$$

$$\boxed{d\vec{r} = \sin\theta \hat{d}\phi \hat{\phi} + \hat{d}\theta \hat{\theta}}$$

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \hat{\theta} &= \hat{\phi} \\ \hat{\theta} \times \hat{\phi} &= \hat{r} \\ \hat{\phi} \times \hat{r} &= \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{i} - \cos\theta \sin\phi \hat{j} - \sin\theta \hat{k}$$

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \cos\theta \cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta \cos\phi & \cos\theta \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} (\cos^2\theta \sin\phi + \sin^2\theta \sin\phi) - \hat{j} (\cos^2\theta \cos\phi + \sin^2\theta \cos\phi) + \hat{k} ($$

$$= \hat{i} (\sin\phi) - \hat{j} (\cos\phi) = \boxed{\langle \sin\phi, -\cos\phi \rangle}$$

$$\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{\phi} \quad \text{Q.E.D}$$

$$\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \begin{vmatrix} -\cos\phi & 0 \\ -\cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} \sin\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & -\sin\theta \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} \sin\phi & -\cos\phi \\ \cos\theta \cos\phi & -\cos\theta \sin\phi \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$= \hat{i} (-\cos\phi) - \hat{j} (-\sin\phi \sin\theta) + \hat{k} (\sin^2\phi \cos\theta + \cos\phi \cos^2\theta)$$

$$= \hat{i} (\cos\phi \sin\theta) + \hat{j} (\sin\phi \sin\theta) + \hat{k} (\cos\theta)$$

$$= \langle \cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta \rangle = \frac{1}{r} \hat{r}$$

$$\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r} \quad \text{Q.E.D}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi} \times \hat{r} &= \hat{\theta} \\
 \hat{\phi} \times \hat{r} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sin\phi \cos\theta & \sin\phi \sin\theta & \cos\phi \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i} \begin{vmatrix} \sin\phi \cos\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & 0 \end{vmatrix} + \hat{j} \begin{vmatrix} \sin\phi \sin\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \sin\phi & \sin\phi \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i}(\cos\theta \cos\phi) - \hat{j}(-\sin\theta \cos\phi) + \hat{k}(-\sin\phi \cos^2\theta - \sin\phi \sin^2\theta) \\
 &= \hat{i}(\cos\theta \cos\phi) + \hat{j}(\sin\theta \cos\phi) + \hat{k}(-\sin\phi) \\
 &= \boxed{\langle \cos\theta \cos\phi, \sin\theta \cos\phi, -\sin\phi \rangle} \\
 &= \hat{\theta}, \quad \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta} \quad Q.E.D.
 \end{aligned}$$

Clase 3: electro

* Elemento de Superficie

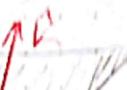
Cortesidad

$$\delta \vec{a} = \delta x \delta z \vec{k}$$



Otra: otra

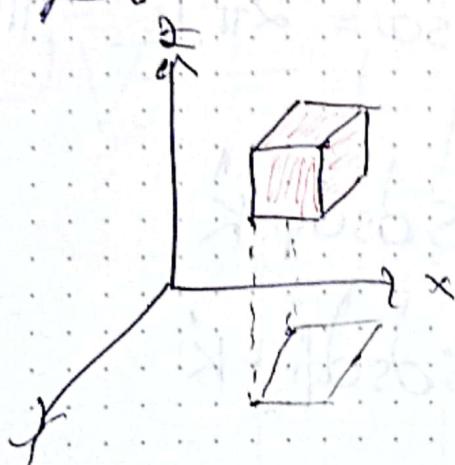
$$\delta \vec{a} = \delta y \delta z \vec{i}$$



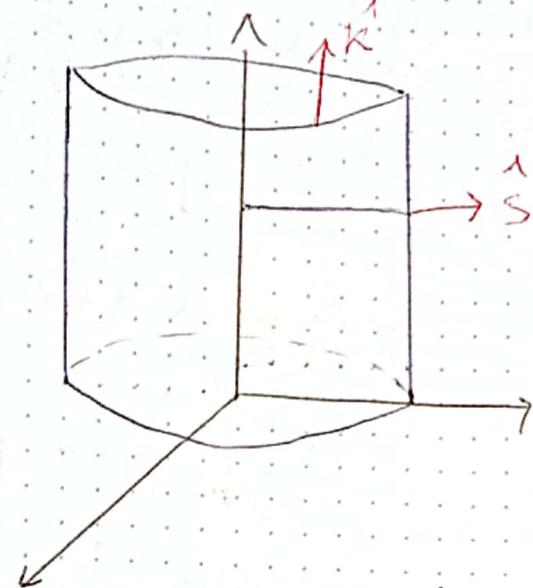
$$\delta \vec{a} = \delta x \delta y \vec{k}$$

x

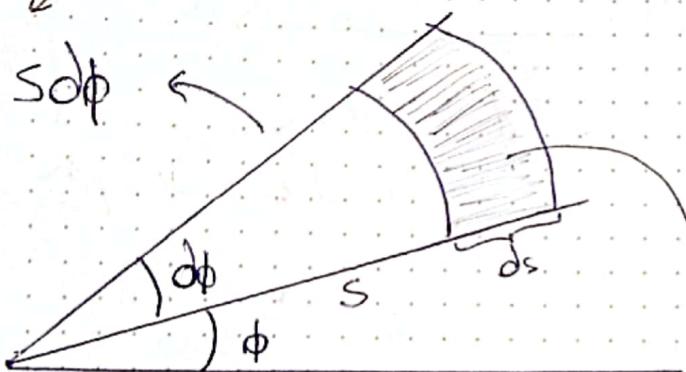
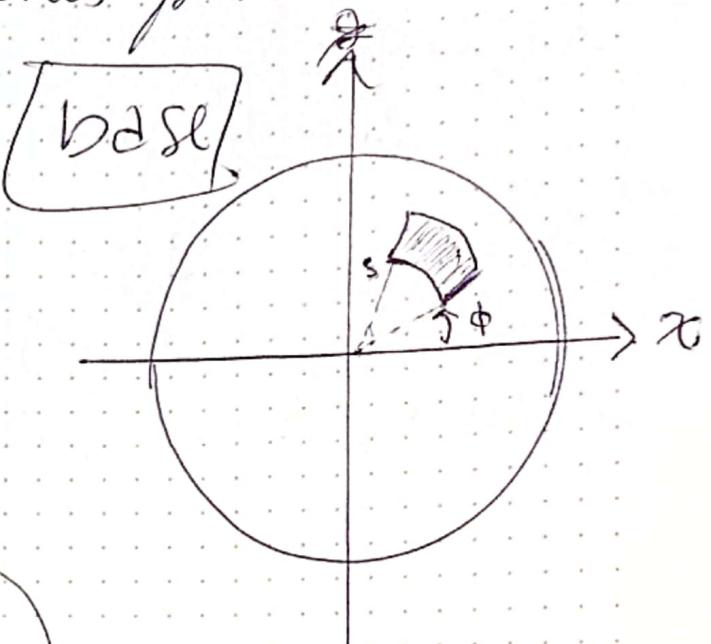
Elemento Volumen $\delta V = \delta x \delta y \delta z$



Coordenadas Cilíndricas



Podemos reconocer dos áreas para un cilindro



$$dA_b = s ds d\phi$$

$$A_b = \int_0^{2\pi} \int_0^R s ds d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R s ds = 2\pi \frac{R^2}{2} = \boxed{\pi R^2}$$

$$\therefore \text{base superior } \vec{dA}_{bs} = s ds d\phi \vec{k}$$

$$\therefore \text{base inferior } \vec{dA}_{bi} = s ds d\phi \vec{-k}$$

Manto



$$\therefore dA_m = s d\phi dz, s \text{ fijo para cada manto}$$

Por ejemplo Para un cilindro de altura H
y radio R

$$A_m = \int_0^{2\pi} \int_0^H R d\phi dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^H R dz = 2\pi RH$$

$$\Rightarrow d\vec{a}_n = s d\phi dz \quad (\text{s fijo})$$

El área de un cilindro elemental

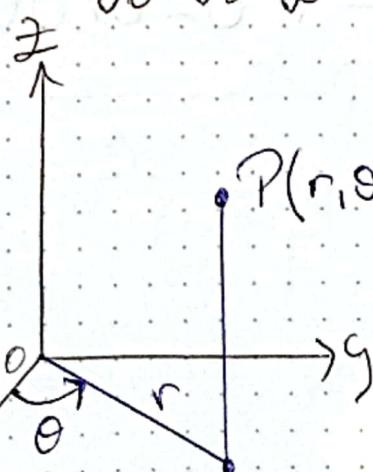
$$d\vec{a} = d\vec{a}_{bs} + d\vec{a}_{bi} + d\vec{a}_n$$

Volumen



$$dV = s ds d\phi dz$$

$$V_{el} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^H s ds d\phi dz = 2\pi \frac{R^2 H}{2} = \pi R^2 H$$



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

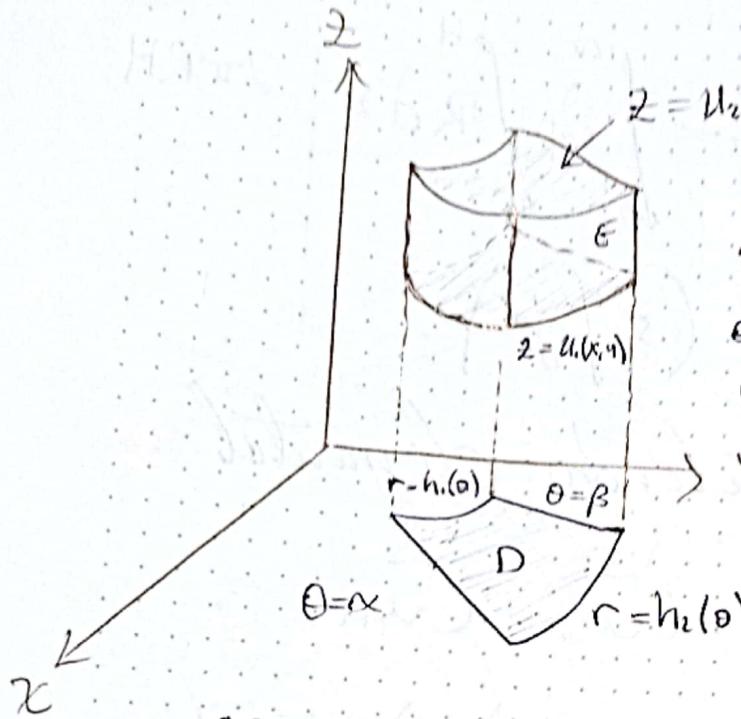
$$z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}; z =$$

x

Evaluación de integrales triples con coordenadas cilíndricas



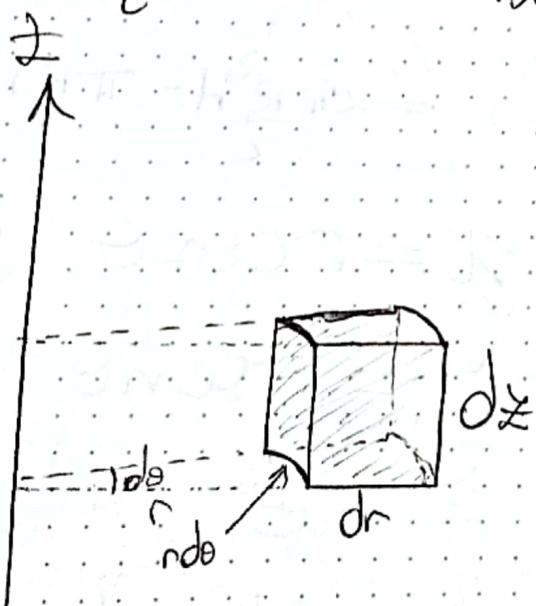
$$z = u_2(x, y)$$

$$E = \int h(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)$$

donde D está dado en coordenadas polares por

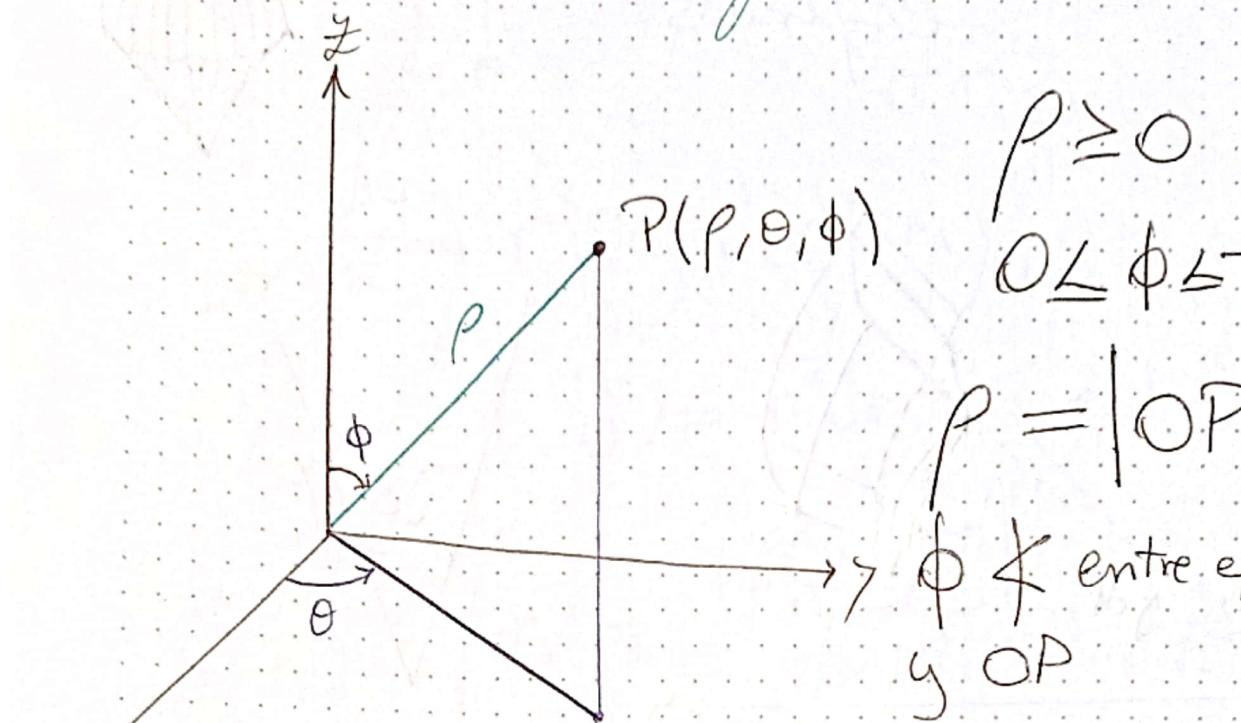
$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r, \theta)}^{u_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r d z d r d \theta$$



$$dV = r dz dr d\theta$$

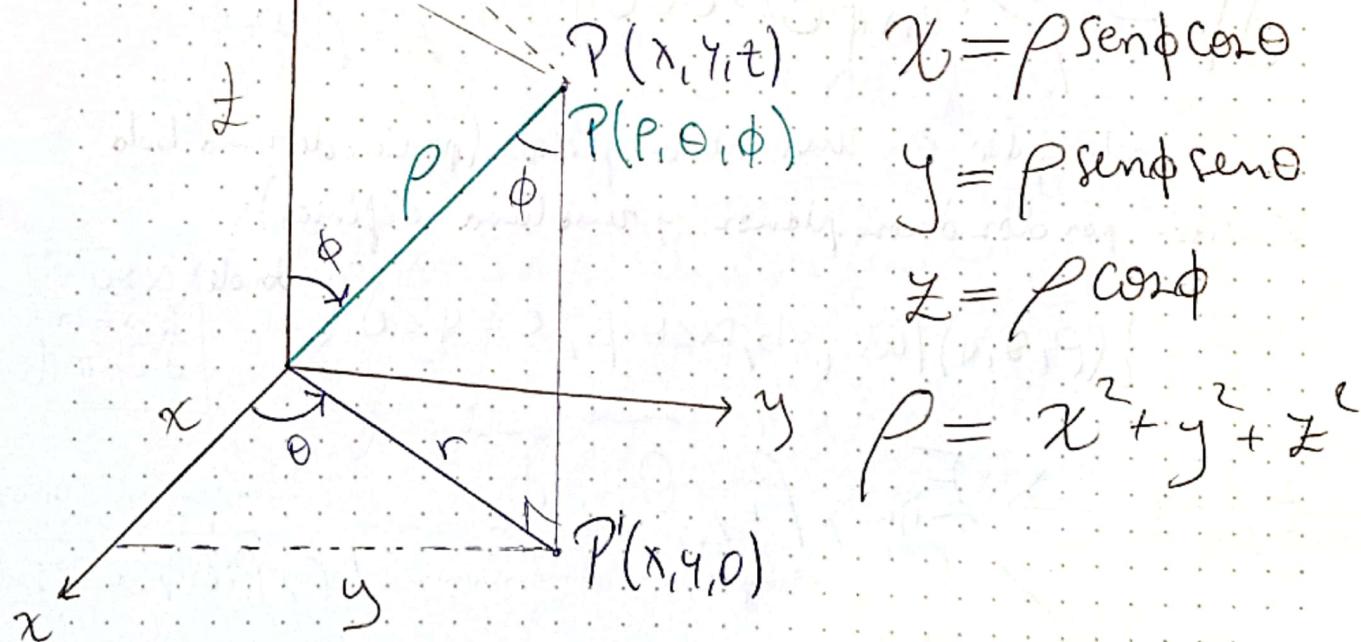
Coordenadas Esféricas (ρ, θ, ϕ)



$$\rho = |\mathbf{OP}|$$

ϕ entre eje $z \geq 0$
y \mathbf{OP}

Coordenadas



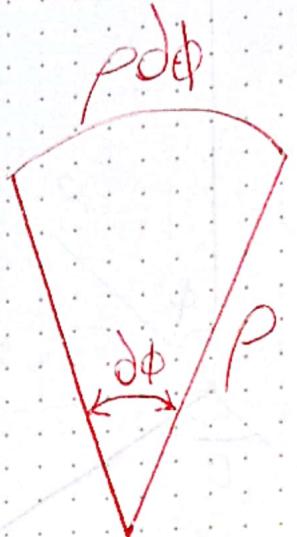
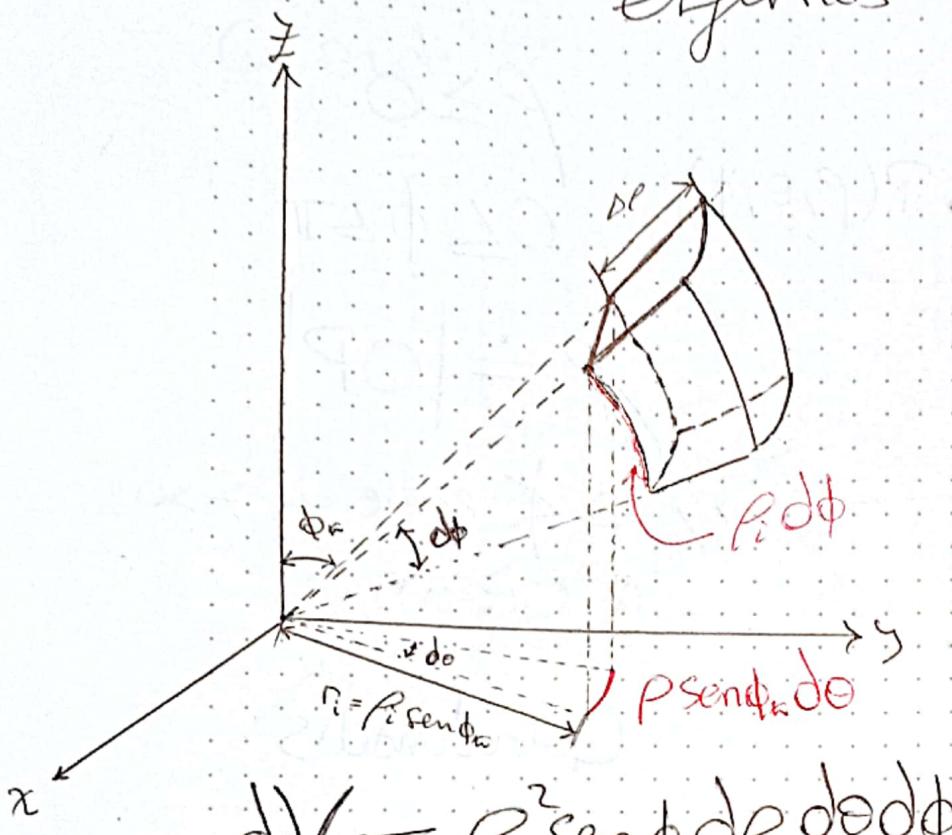
Ejemplo $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Evaluación integrales x3 coordenadas esféricas



$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$$

$$z = \rho \operatorname{cos} \phi$$

Caja rectangular en una cuna esférica (porción de una bola limitada por dos discos planos y una luna esférica)

$$E = \{(p, \theta, \phi) | a \leq p \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

donde
 $\alpha \geq 0$
 $\beta - \alpha \leq 2\pi$
 $d - c \leq \pi$

$$E / \text{cunas esféricas} \Rightarrow E_{ijk}, p_i, \theta_j, \phi_k$$

↑ semiplano semicirc.

↓ caja rectangular con dimensiones

área drw drw

$$\Delta p, p_i \Delta \phi \text{ y } p_i \operatorname{sen} \phi \Delta \theta$$

$$\text{volumen} \Rightarrow \Delta V_{ijk} \approx (\Delta p)(p_i \Delta \phi)(p_i \operatorname{sen} \phi \Delta \theta) \quad \text{d}p, p \text{d}\phi$$

Fórmula para la integración triple con coordenadas esféricas es

$$\iiint f(x, y, z) dV = \iiint_{\text{dejada}} f(p \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \theta, p \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, p \operatorname{cos} \phi) p^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\theta d\phi$$

$$E = \{(p, \theta, \phi) | a \leq p \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

$$A_{s_i} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \cos\theta \Big|_0^{\pi} = 4\pi r^2$$

$$\vec{dA}_{s_i} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$$

Volumen | $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$

$$V_s = \int dV = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{R^3}{3} \cdot 4\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Algebra Vectorial

Teoría electromagnética requiere el uso de operadores diferenciales junto con relaciones integrales vectoriales.

Derivada Direccional

Derivada que se realiza en una dirección determinada, formalmente

$$D_s \varphi = \frac{d\varphi}{ds}$$

\vec{ds} es el desplazamiento infinitesimalmente en la dirección considerada, de magnitud ds

$$\vec{ds} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{Ds \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x, y, z)}{Ds}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}$$

Gradiente

Es un vector cuya dirección apunta en la dirección de máximo crecimiento de la derivada direccional y su magnitud es la magnitud de la derivada direccional en el punto

$$\vec{\nabla} \varphi; \vec{\nabla}, \text{ operador nabla}$$

Podemos determinar el gradiente a través de la gte fórmula

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla} \varphi \cdot \frac{ds}{ds}$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k$$

∇ em coordenadas cilíndricas

$$ds^1 = ds\hat{s} + s d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}; \vec{\nabla}\varphi$$

$$\vec{\nabla}\varphi = (\vec{\nabla}\varphi)_s \hat{1} + (\vec{\nabla}\varphi)_\phi \hat{\phi} + (\vec{\nabla}\varphi)_z \hat{z}$$

$$\varphi = \varphi(s, \phi, z) \Rightarrow d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

$$= (\vec{\nabla}\varphi)_s ds + s(\vec{\nabla}\varphi)_\phi d\phi + (\vec{\nabla}\varphi)_z dz$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z}$$

∇ em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{r} = \sin\phi\hat{\phi} + d\theta\hat{\theta} + dr\hat{r}; \vec{\nabla}\varphi$$

$$\vec{\nabla}\varphi = (\vec{\nabla}\varphi)_\phi \hat{\phi} + (\vec{\nabla}\varphi)_\theta \hat{\theta} + (\vec{\nabla}\varphi)_r \hat{r}$$

$$\varphi = \varphi(r, \theta, \phi) \Rightarrow d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi$$

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\overset{\wedge}{\theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \sin\phi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$$

$$\overset{\wedge}{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$$

$$*\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\varphi(x, y, z) \Rightarrow d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\vec{r} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$
$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$\varphi(r, \theta, \phi) \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi$$

$$\vec{r} = rr \Rightarrow d\vec{r} = d(rr) = dr \hat{r} + r d\hat{r}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \hat{r} dr + r \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} d\phi \right)$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \overset{\wedge}{\theta} ; \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \sin\theta \overset{\wedge}{\phi}$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \sin\phi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = -\sin\theta \sin\phi \hat{x} + \sin\theta \cos\phi \hat{y}$$

$$d\hat{r} = \nabla p \cdot d\hat{r} \quad dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial \phi} d\phi$$

$$d\hat{r} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin\theta d\phi$$

$$\nabla = \nabla_r \hat{r} + \nabla_\theta \hat{\theta} + \nabla_\phi \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial \phi} d\phi \\ &= (\nabla p)_r dr + (\nabla p)_\theta r d\theta + (\nabla p)_\phi r \sin\theta d\phi \end{aligned}$$

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r}; \quad \nabla_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \nabla_\phi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}}$$

Gradiente en coordenadas esféricas

Clase 04

20/03/2023

Gradiente en coordenadas esféricas

$$\frac{dp}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \frac{d\vec{s}}{ds} \rightarrow d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s}$$

Coordenadas esféricas

$$\varphi = \varphi(r, \theta, \phi) \Rightarrow d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{\theta, \phi} dr + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{r, \phi} d\theta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right)_{r, \theta} d\phi$$

$$d\vec{s} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi}$$

$$\vec{\nabla}\varphi = (\vec{\nabla}\varphi)_r \hat{r} + (\vec{\nabla}\varphi)_\theta \hat{\theta} + (\vec{\nabla}\varphi)_\phi \hat{\phi}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s} = (\vec{\nabla}\varphi)_r dr + r(\vec{\nabla}\varphi)_\theta d\theta + r \sin\theta (\vec{\nabla}\varphi)_\phi d\phi$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla}\varphi)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad (\vec{\nabla}\varphi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad (\vec{\nabla}\varphi)_\phi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Integración Vectorial

Existen 3 tipos de integración de uso

común en la teoría Electromagnetismo

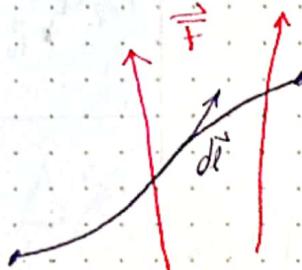
— Integral de líneas, Superficie, volumen

i) Integral de Línea

Si \vec{F} es un campo vectorial, entonces

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$: elemento de trayectoria sobre la que se integra, no necesariamente cerrado



$W \rightarrow$ Suma de contribuciones

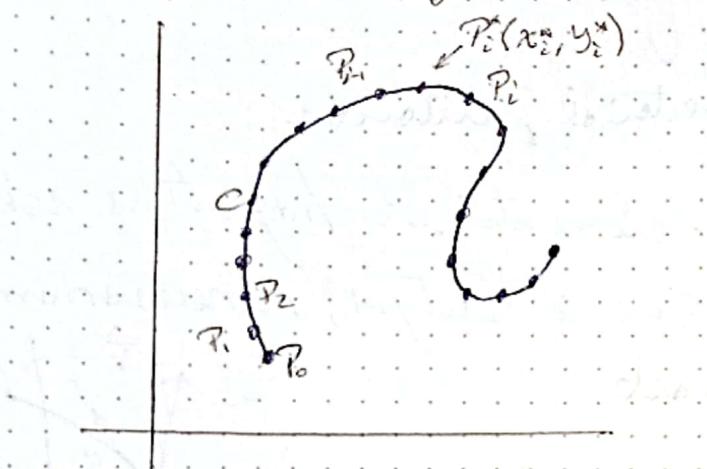
Nota:

- i) Integral de línea es un escalar
- ii) En general, su valor no sólo depende de a y b , sino que también de la trayectoria
- iii) Denotaremos, para una trayectoria cerrada su valor puede ser distinto o igual a 0, sea de importancia el último. (campo conservativo)

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

16.2. Integrales de líneas

- Se integra en una curva C .
- Fueron inventados a principios del siglo XIX para resolver problemas que implican el flujo de fluidos, fuerzas, electricidad y magnetismo.



ecuaciones paramétricas

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

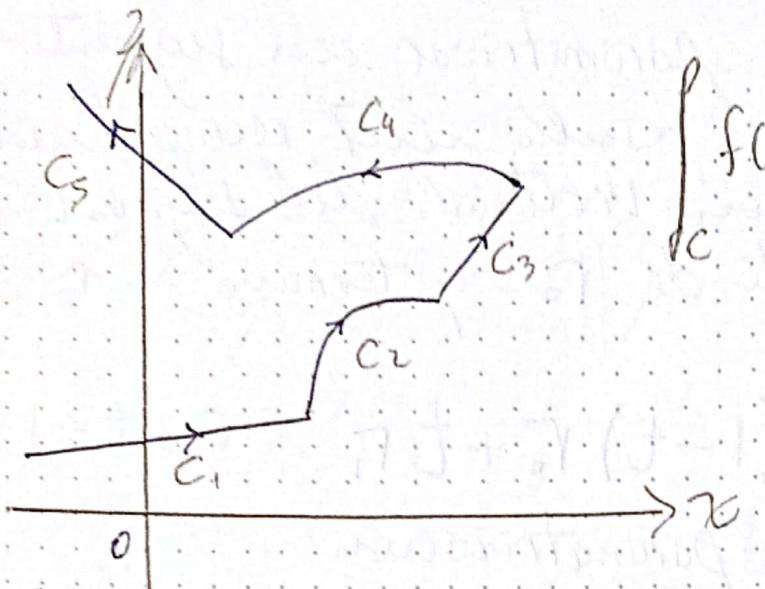
$$a \leq t \leq b$$

Definición Si f se define en una curva simple C dada por las ecuaciones paramétricas, la integral de línea de f a lo largo de C

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

longitud de $C \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$



$$\int_C f(x,y) dx = \int_{C_1} f(x,y) dx + \int_{C_2} f(x,y) dy + \dots$$

Cuando se desea distinguir la integral de línea original $\int_C f(x,y) dx$ de

$$\int_C f(x,y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

$$\int_C f(x,y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i$$

Las fórmulas sgts establecen que los integrales de líneas con respecto a x y y también pueden evaluarse expresando todo en términos de t

$$x = x(t); \quad y = y(t), \quad dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt$$

$$\int_C f(x,y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

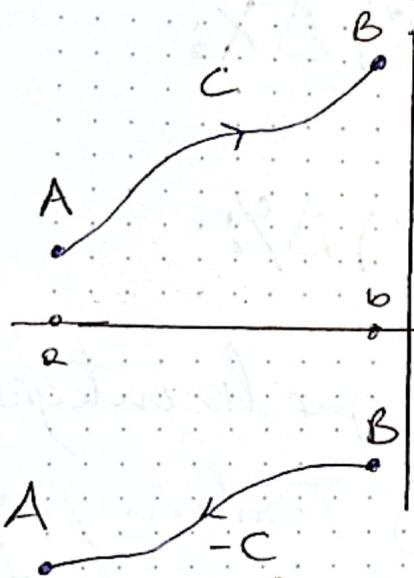
$$\int_C f(x,y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot y'(t) dt$$

A menudo se debe parametrizar un segmento de recta, así que resulta útil recordar que una representación vectorial del segmento de recta que parte de r_0 y termina en r_1 , está dada por

$$r(t) = (1-t)r_0 + tr_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

En general, una parametrización

$x = x(t)$; $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, determina una orientación de una curva C , q la dirección



$$\int_{-c}^c f(x, u) dx = - \int_c^{-c} f(x, u) dx$$

$$\int_{-c}^c f(x, u) dy = - \int_c^{-c} g(x, u) dy$$

→ Si se integra con respecto a la longitud de arco, el valor de la integral de linea no cambia cuando se invierte la orientación de la curva.

$$\int_e^l f(x, u) ds = \int_l^e f(x, u) ds \quad \Delta s > 0.$$

Orientación

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_i > 0 \text{ o } \Delta x_i < 0 \\ \Delta y_i > 0 \text{ o } \Delta y_i < 0 \end{array} \right.$$

Integración de líneas en el espacio

→ Se pone que C es una curva trazada en el espacio desde los extremos a y b .

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ para $a \leq t \leq b$
o por una ecuación vectorial

$$r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

f de tres variables continuas en alguna región que contiene a C , se define la integral de líneas de f de lo largo de C .

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s,$$

Se evalúa usando una fórmula siguiente:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

O puede escribirse de forma vectorial, más compacta:

$$\int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$$

También pueden definirse integrales de línea a lo largo de C con respecto a x, y y z .

$$\int_C f(x, y, z) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta x,$$
$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt.$$

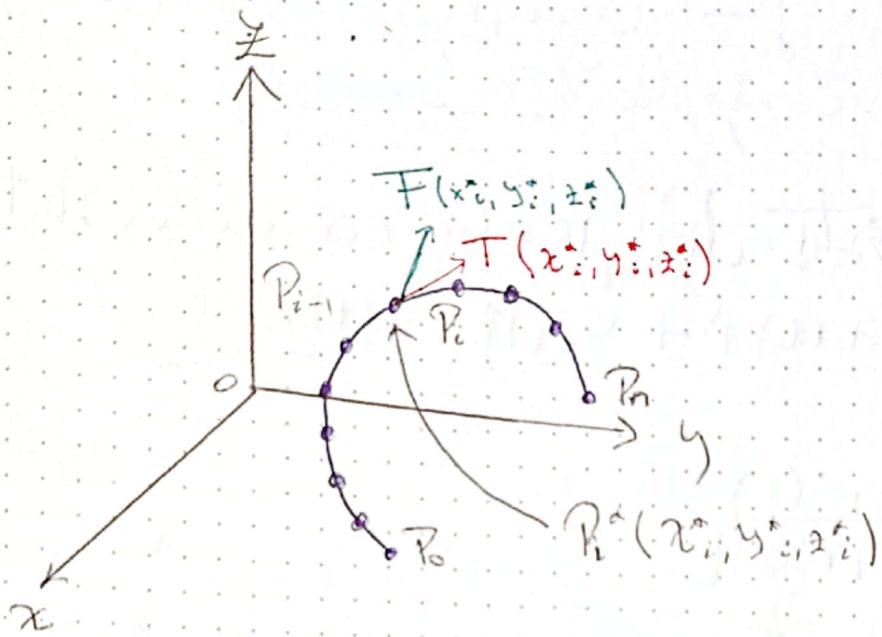
Por lo tanto, en el caso de las integrales de líneas en el plano, se evalúan integrales de la forma

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

expresando todo (x, y, z, dx, dy, dz) en términos del parámetro t

Integración de Línea en Campos Vectoriales

→ Suponir $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ es un campo continuo de fuerzas en \mathbb{R}^3 , como un campo gravitacional o el campo de fuerzas eléctricas.



Una partícula realiza un desplazamiento bajo un campo de fuerzas conservativo que interactúa con la partícula a lo largo de su trayectoria.

Se desea calcular el trabajo W realizado por la partícula a lo largo de su trayectoria bajo el campo de fuerzas F . $\Rightarrow W$ de P_0 a P_1 es $F(x_1^*, y_1^*, z_1^*) \cdot [\Delta s_i T(t_i)] = [F(x_1^*, y_1^*, z_1^*) \cdot T(t_i)] \Delta s_i$

y el W total realizado por la partícula a lo largo de C es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n [F(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot T(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

donde $T(x, y, z)$ es el vector tangente en el punto (x, y, z) .

A medida que se aumenta se debe tener una mejor aproximación del trabajo.

$$W = \int_C F(x, y, z) \cdot T(x, y, z) ds = \int C F \cdot T ds$$

El W es la \int con respecto a la longitud de arco del componente tangencial de la fuerza

→ Si C está dada por la ecuación vectorial $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ entonces

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

$$W = \int_a^b [F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}] \|r'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Esta integral suele abreviarse como $\int_C F \cdot dr$ y ocurre en otras áreas de la física.

A continuación se da la definición sgt para cualquier campo de vectores continuos

Definición

Sea \mathbf{F} un campo de vectores continuos definido en una curva simple C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Entonces, la integral de líneas de \mathbf{F} a lo largo de C es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Nota!

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Alguno $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ y las interpretar con respecto a la longitud de arco no cambia cuando se invierte la orientación, de todos formas es cierto que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

porque el vector \mathbf{T} es reemplazado por su negativo cuando C es reemplazado por $-C$

16.3 El teorema fundamental para integrales de líneas

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

→ Si se concibe al vector gradiente ∇f de una función f de dos o tres variables como un tipo de derivada f , el teorema puede considerarse como el fundamental para integrales de líneas.

3 Teorema

Sia C una curva suave dada por la función vectorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Sea una función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo en C . Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Demo

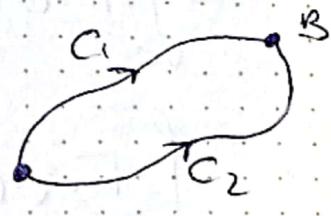
$$\int_C \nabla f \cdot dr = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(r(t)) dt$$

$$= f(r(b)) - f(r(a))$$

+ Independencia de la trayectoria.

→ Suponer que C_1 y C_2 son dos curvas simples (trayectorias) que tienen mismo punto de partida como término



$$\therefore \int_{C_1} F \cdot dr \neq \int_{C_2} F \cdot dr =$$

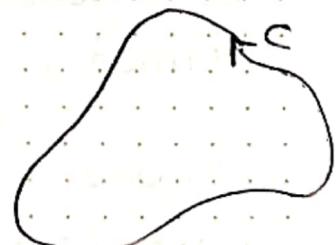
Pero una implicación del Teorema 2 es que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot dr = \int_{C_2} \nabla f \cdot dr$$

Siempre que ∇f es continua, es decir que la integral de líneas de un campo conservativo solo depende del punto de partida y final

→ Si F es un campo vectorial continuo en un dominio D , se dice que la $\int_D F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria si $\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$

→ Una curva se llama cerrada si $r(b) = r(a)$



→ Si $\int_C F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria en D , en cualquier trayectoria cerrada en D , se pueden elegir dos puntos cualesquiera A y B en C y considerar C como compuesto por la trayectoria C_1 de A a B y C_2 de B a A .

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr = 0$$

Se demuestra independencia de la trayectoria
Como sigue.

$$0 = \int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr$$

• $\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$ se comprueba teorema

3 teorema

$\int_C F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria en D

si y sólo si: $\int_C F \cdot dr = 0$ para cada trayectoria cerrada C en D

→ La interpretación física es que el W realizado por un campo de fuerzas conservativo cuando mueve un objeto por una trayectoria cerrada, es de 0.

→ Suponer que D es abierta, lo que significa que para cada punto P en D hay un disco con centro en P que reside enteramente en D esto conectado. Esto significa que dos puntos cualesquiera en D pueden ser unidos por una trayectoria que reside en D.

4 Teorema

Supongamos que \mathbf{F} es un campo vectorial continuo en una región abierta y conexa D .

Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D , entonces \mathbf{F} es un campo vectorial conservativo en D ; es decir, \exists una función tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Cómo se puede determinar si un campo vectorial \mathbf{F} es conservativo o no?

→ Suponer que se sabe que $\mathbf{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$ es conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales de primer orden.

• ∵ hay una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, es decir

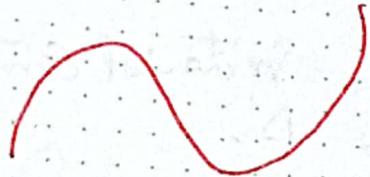
$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

• por teorema de Clairaut

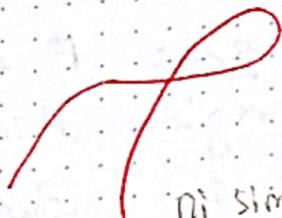
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

5 Teorema Si $F(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ es un campo vectorial conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden en un dominio D , entonces a todo lo largo de D se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



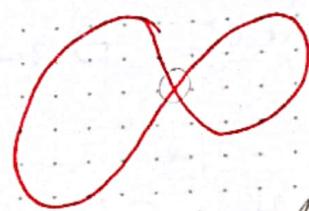
Simple, no cerrada



ni simple, ni cerrada



Simple,
Cerrada



no simple,
cerrada

→ El teorema se cuenta solo para un tipo especial de región.

↳ Curva Simple



regiones
Simplamente
Conectadas

6 Teorema

Sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ un campo vectorial en una región abierta simplemente conectada D .

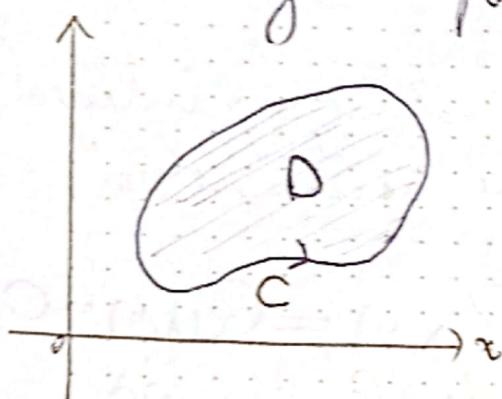
Suponga que P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden y que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{d lo largo de } D$$

Entonces \mathbf{F} es conservativo.

16.4 Teorema de Green

→ Relación entre integrales de líneas
diseñadas alrededor de una curva cerrada simple
C y una integral doble en la
región plana D acotada por C.



→ Se usa la convención de
que la orientación positiva

Así, si C está dada por la
función vectorial
 $r(t)$, $a \leq t \leq b$

Teorema de Green

Sed C una curva cerrada simple con \mathbb{G} y luce
por partes en el plano y sea D la región acotada
por C. Si P y Q tienen derivadas parciales
continuas en una región abierta que contiene
D, entonces

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

La notación $\oint_C P dx + Q dy$ o $\oint P dx + Q dy$

El teorema de Green debería considerarse la
contraparte del teorema fundamental del Cálculo
para integrales dobles.

Considerar $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy$

Con la ecuación spto

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

A veces es más fácil evaluar la integral de línea, y el teorema de Green se usa en dirección inversa.

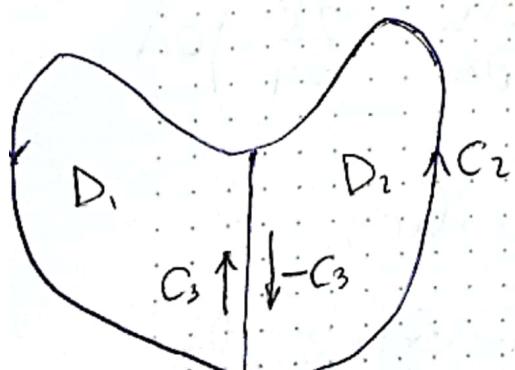
Por ejemplo, si se sabe que $P(x,y) = Q(x,y) = 0$ en la curva C , el teorema de Green da

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy = 0$$

Sin importar qué valores adopten P y Q en la región D .

→ Otra aplicación de la dirección inversa del teorema de Green es el calcular áreas.

Versiónes ampliadas del teorema de Green



$$D = D_1 \cup D_2$$

frontera de D_1 es $C_1 \cup C_3$

frontera de D_2 es $C_2 \cup (-C_3)$

dsi, aplicando el teorema de Green a D_1 y D_2 ; por separado, se obtiene

$$\int_{C_1 \cup C_3} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

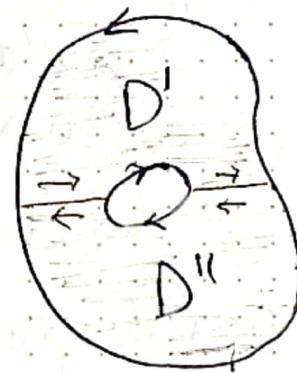
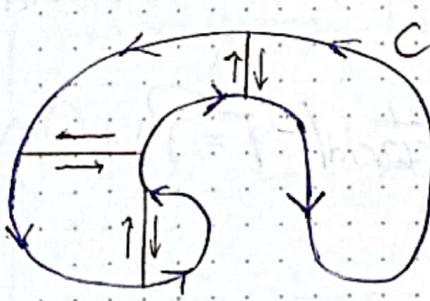
Si se suman estas dos ecuaciones, las integrales de linea a lo largo de C_3 y $-C_3$ se eliminan, así que se obtiene

$$\int_{C_1 \cup C_2} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Lo cual es el teorema de Green para

$D = D_1 \cup D_2$, ya que su frontera es

$$C = C_1 \cup C_2$$



El teorema de Green puede prolongarse para aplicarse a regiones con agujeros, es decir regiones que no están simplemente conectadas

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{\partial D'} P dx + Q dy + \int_{\partial D''} P dx + Q dy$$

Como las integrales de líneas a lo largo de las rectas frontera comunes están en direcciones opuestas, se eliminan y se obtiene

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy + \int_C P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy$$

el cual es el teorema de Green para la región D

Formas Vectoriales del teorema de Green

Los operadores rotacional y de divergencia permiten reescribir el teorema de Green en versiones que serán útiles.

→ Considerar región plana D, su cerrada frontera C y las funciones P y Q satisfacen las hipótesis del teorema de Green

↳ Considerar el campo vectorial $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$.

Su integral de líneas es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy$$

y considerando a \mathbf{F} como un campo vectorial en \mathbb{R}^3 con tercer componente 0, se tiene

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_{(x,y)} & Q_{(x,y)} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Por tanto,

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \hat{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k} \cdot \hat{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y ahora se puede reescribir la ecuación del teorema de Green en la forma vectorial

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \hat{k} dA$$

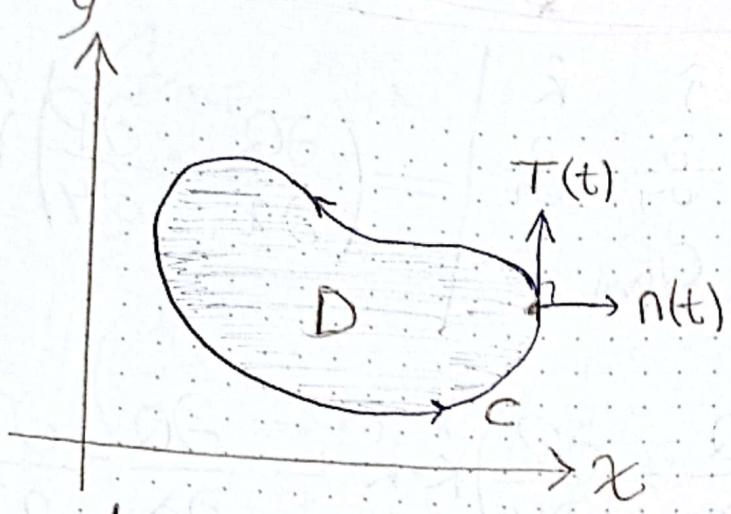
→ Integral de línea del Componente tangencial de \mathbf{F} a lo largo de C como la integral doble del Componente vertical de $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ en la región D encerrada por C .

→ Si C está dado por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} \quad a \leq t \leq b$$

→ Vector tangente unitario

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \hat{i} + \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \hat{j}$$



Usted puede verificar que el vector normal unitario externo a C este dado por

$$n(t) = \frac{y'(t)}{\|r'(t)\|} i - \frac{x'(t)}{\|r'(t)\|} j$$

ASe, se tiene

$$\oint_C F \cdot n ds = \int_a^b (F \cdot n)(t) \|r'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t)) y'(t)}{\|r'(t)\|} - \frac{Q(x(t), y(t)) x'(t)}{\|r'(t)\|} \right] \|r'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t)) y'(t) dt - Q(x(t), y(t)) x'(t)$$

$$= \oint_C P dy - Q dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

Por el Teorema de Green. Pero el integrando en esta integral doble es justo la divergencia de F. Por lo que se tiene una segunda forma vectorial del Teorema de Green.

$$\oint_C F \cdot n ds = \iint_D \operatorname{div} F(x, y) dA$$

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) dA$$

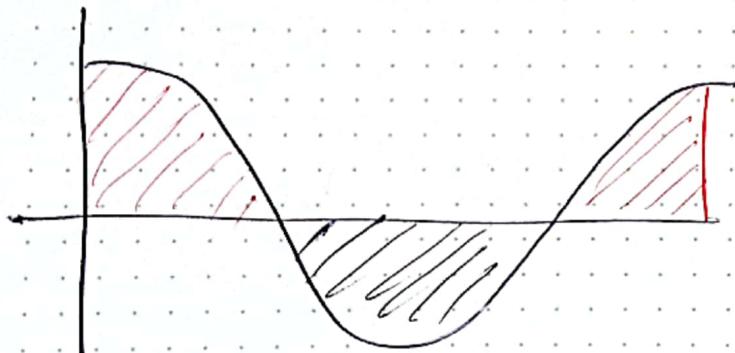
Esta versión indica que la integral de línea del componente normal de \mathbf{F} a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de \mathbf{F} en la región D encerrada por C .

Clase N° 5 Electro

21/03/2023

Un par de integrales

$$1 - \int_0^{2\pi} d\phi \vec{S} = \int_0^{2\pi} d\phi (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \\ = \int_0^{2\pi} \cos \phi \hat{i} d\phi + \int_0^{2\pi} \sin \phi \hat{j} d\phi \\ = \hat{i} \sin \phi \Big|_0^{\pi} - \hat{j} \cos \phi \Big|_0^{\pi} = 0$$



Cualquier función periódica integrada en un periodo es cero

$$2 - \int_0^{\pi} \frac{(x - r \cos \theta) \sin \theta}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

$$u = x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta \\ du = 2x \sin \theta d\theta \\ \sin \theta d\theta = \frac{du}{2x}$$

$$\rightarrow r \cos \theta = \frac{u - x^2 - r^2}{2x}$$

$$\text{Si } \theta = 0 \Rightarrow (x - r)^2$$

$$\theta = \pi = (z+r)^2$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \left(z + \left(\frac{u-z^2-r^2}{2z} \right) \right) \frac{du}{2rz} \frac{1}{u^{3/2}} \\
&= \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \left(\frac{2z^2+u-z^2-r^2}{2z} \right) \frac{du}{2rz u^{3/2}} \quad \frac{1}{u^{3/2}} \frac{2z^2+u-z^2-r^2}{u^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{4rz^2} \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \left(\frac{z^2-r^2}{u^{3/2}} + \frac{1}{u^{1/2}} \right) du \quad \frac{z^2-r^2}{u^{3/2}} + \frac{1}{u^{1/2}} \\
&\equiv \frac{(z^2-r^2)}{4rz^2} \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} u^{-3/2} du + \frac{1}{4rz^2} \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} u^{1/2} du \\
&\quad -\frac{3}{2} + 1 = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \\
&= \frac{z^2-r^2}{4rz^2} \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \Big|_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} + \frac{1}{4rz^2} \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Big|_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \\
&= \frac{1}{2rz^2} \left\{ (z^2-r^2) \left[-\frac{1}{z+r} + \frac{1}{z-r} \right] + (z+r) - (z-r) \right\}
\end{aligned}$$

$$z > r \Rightarrow z - r > 0$$

$$I_{ii} = \frac{1}{2r^2} \left\{ (z^2 - r^2) \left[\frac{2(1+z+r)}{z^2 - r^2} \right] + 2 + r \right\}$$

$$= \frac{1}{2r^2} \left\{ 2(r) \right\} = \boxed{\frac{2}{z^2}}$$

$$\text{Si } z < r \Rightarrow r - z > 0$$

$$I_{ii} = \frac{1}{2r^2} \left\{ (z^2 - r^2) \left[\frac{1}{r-z} - \frac{1}{r+z} \right] + 2 \right\}$$

$$= -\frac{1}{2r^2} \left\{ (z^2 - r^2) \left[\frac{r+z - r+z}{r^2 - z^2} \right] + 2z \right\}$$

$$= -\frac{1}{2r^2} \cdot 4z = \boxed{-\frac{2}{r^2}}$$

Función Delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x=0 \end{cases}$$

Con $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

Generalizando a 3D. $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

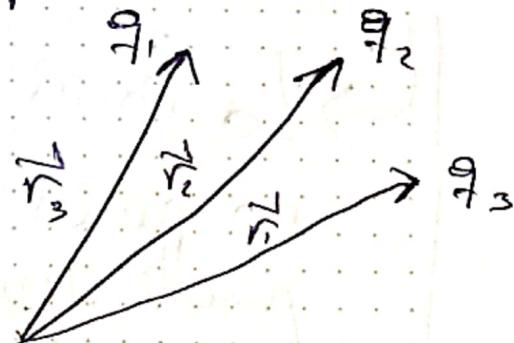
$$\begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq \vec{0} \\ \infty & \text{si } \vec{r} = \vec{0} \end{cases}$$

Distribución
discreta de m cargas
puntuales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r}) d^3r = 1$$

~ volumen

1 / L \Rightarrow dimension

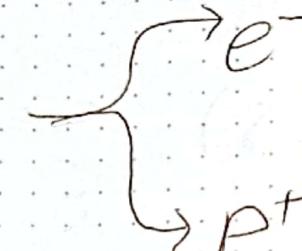


$$\rho = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = q_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) + q_2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) + \dots + q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

Clase 06 Electro

Aspectos básicos

Dos tipos de carga



→ Misma magnitud Signos opuestos

→ Misma cantidad el uno al otro → Cuerpo Neutro

Exceso de Carga

e- : Cargado negativamente

p+ : Cargado positivamente

④ Principio de Conservación

→ La carga eléctrica, en un sistema cerrado, no puede crear ni destruirse, sólo se puede separar la carga positiva y negativa

→ Una partícula cargada moviéndose en una región donde hay cargas en reposo y en movimiento (corriente eléctrica); está sujeta a una fuerza electromagnética que compone

$$\vec{F}_E = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

• q₁ $\vec{F}_e \Rightarrow$ no depende de la velocidad de la partícula

• q₂ $\vec{F}_m \Rightarrow$ Proporcional y \perp a la partícula

Campo de inducción eléctrica

(\hookrightarrow Campo eléctrico)

→ Razón entre la fuerza que ejerce sobre una partícula y la magnitud de la carga.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}$$

poco rigurosa
(afecta a las partículas que generan el campo)

Carga puntual

Carga contenida en una región infinitesimalmente pequeña

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q}$$

En la práctica $q \rightarrow 0$ significa que q es (carga)

Campo Inducción Magnética

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

→ No realiza trabajo

$$W_m = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_m \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$
$$= q \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

↳ La magnitud se puede determinar

$$|\vec{F}_m| = q |\vec{v} \times \vec{B}| \sin \theta (\vec{v}, \vec{B})$$

$$\vec{F}_m = \vec{F}_{em} - \vec{F}_e$$

Sistema de Unidades: $\text{V} \rightarrow \text{MKS}$

Usaremos el sistema MKS

Unidad de Carga en el Coulomb [C]

NO es práctica para medir

→ Lo más fácil de medir es el Ampere [A]

Cantidad de carga que atraviesa por unidad de tiempo una cierta región dada.

$$[\vec{E}] = \frac{[N]}{[c]} = \frac{[V]}{[m]}$$

$$[B] = \frac{[N][s]}{[c][m]} = \frac{[W_b]}{[m]^2}$$

Wb = Weber

V: unidad de tiempo

m: metros

N: Newtons

→ El valor de la Carga eléctrica es

$$e^- = 1.6 \times 10^{-19} [c]$$

I - Electroestática

30:06

→ Estudio de problemas en los cuales las cargas ^{están} en reposo

→ Campo eléctrico en el vacío

punto de partida

en la ley empírica

de Coulomb

Charles Coulomb

establece la ley

(a) La fuerza de atracción entre dos cargas puntuales actúan a lo largo de la línea de unión entre las cargas

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_1$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_1$$

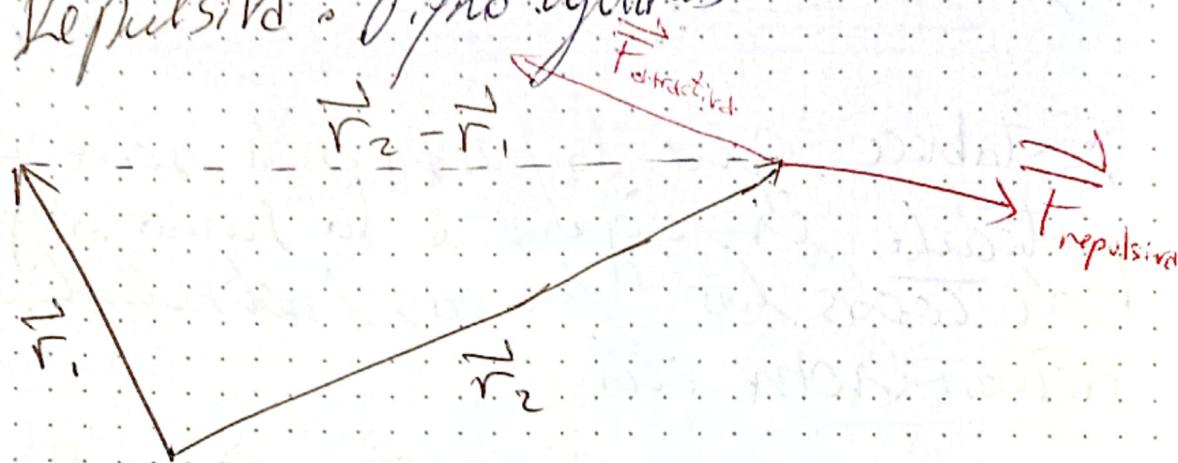
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

Línea de unión donde actúa la fuerza

b) La fuerza de atracción es proporcional al producto algebraico de las cargas

→ Atractiva: Signo Contrario

→ Repulsiva: Signo igual



(c) Es inversamente proporcional al cuadrado de la separación

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ϵ_0 = Permittividad eléctrica del vacío

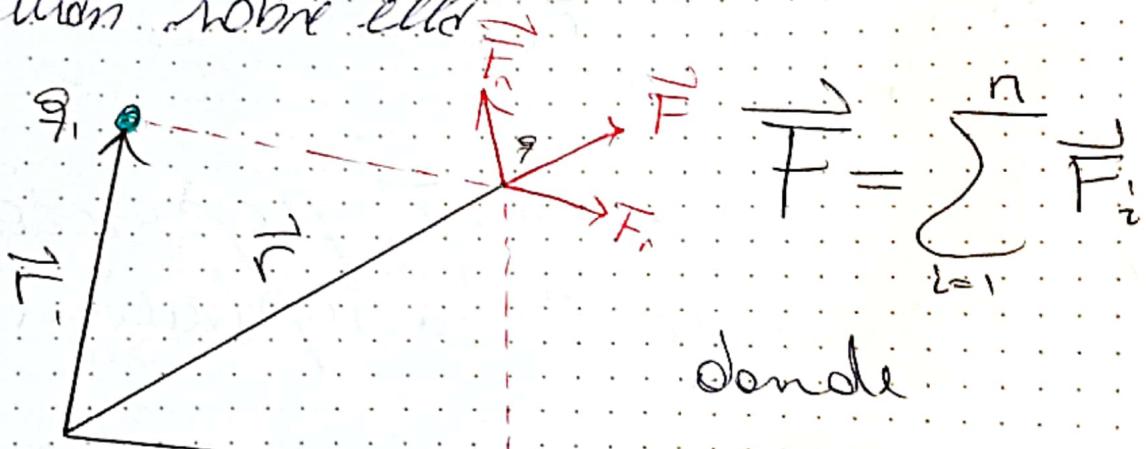
$$= 8,854 \times 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right]$$

→ La fuerza es descrita por medio de la siguiente relación

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2}$$

⑧ Principio Superposición

Establece que la fuerza neta sobre una partícula es igual a la suma algebraica de todas las fuerzas individuales que actúan sobre ella.



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Donde

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Este principio lo podemos generalizar para distribuciones continuas de cargas, con los cuales podemos definir funciones

Close of electro 27/03/2023

Campo eléctrico

Def

Para un punto en el espacio, el Campo eléctrico es la razón entre la fuerza eléctrica y la magnitud de una Carga puntual ubicada.

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_c}{q}$$

Si en el espacio, \exists m cargas puntuales y otras distribuciones continuas de cargas, el Campo eléctrico en un punto \vec{r} del espacio es

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') \\ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') d\vec{a}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{v}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$

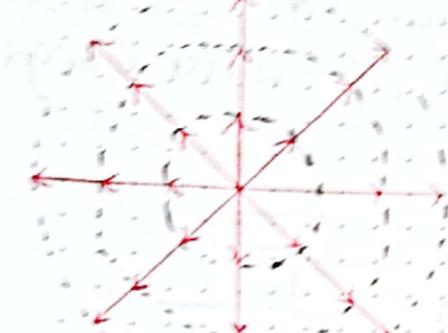
Carga puntual

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i)$$

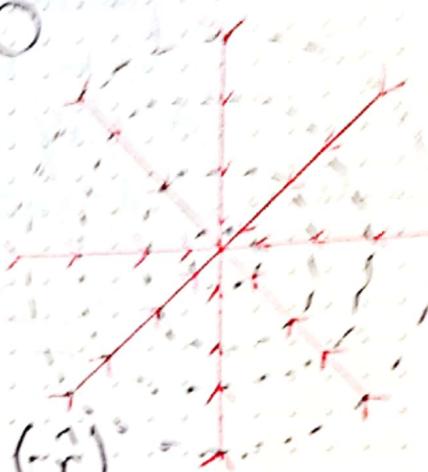
Si lo ubicamos en el $\vec{r}_1 = \vec{0}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$q > 0$



$q < 0$

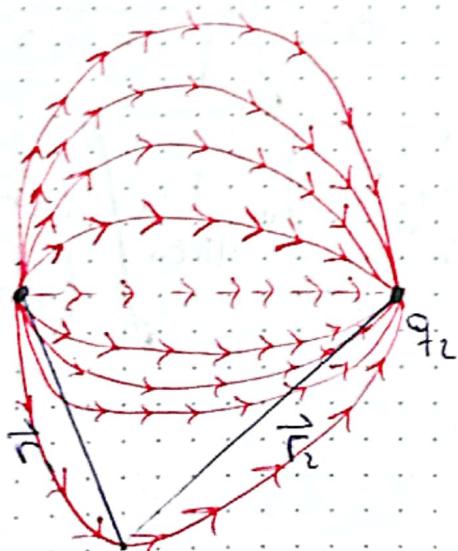


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q)}{r^2} \hat{r}$$

Dos Cargas Puntadas

$$m=2 ; \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \hat{r}$$

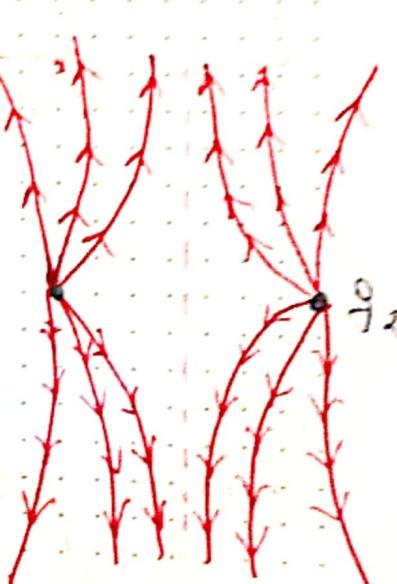
$q_1 > 0$



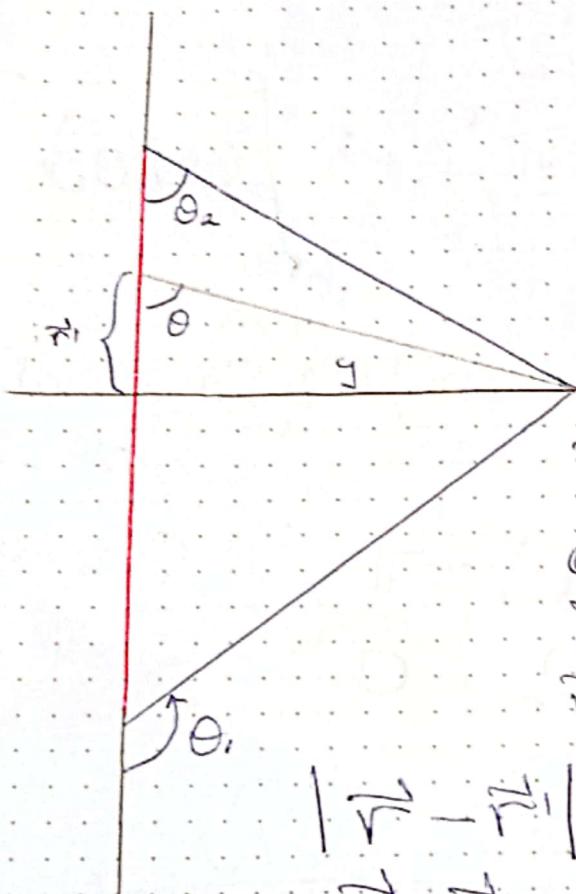
$q_2 < 0$

$q_1 > 0$

$q_2 > 0$



Campo eléctrico de un hilo con ρ .
línea de cargas λ constante



$$\tan \theta = \frac{y}{x'}$$

$$x' = y \operatorname{ctg} \theta$$

$$dx' = -y \operatorname{cosec}^2 \theta d\phi$$

$$\lambda = \text{cte}$$

$$dl' = dx'$$

$$\vec{r} = y \hat{j}$$

$$\vec{r}' = x' \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y^2}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = y \hat{j} - x' \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx' (y \hat{j} - x' \hat{i})}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\therefore x'^2 + y^2 = y^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + y^2 = y^2 (\operatorname{ctg}^2 \theta + 1) \\ = y^2 \operatorname{csc}^2 \theta$$

$$\vec{E}(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(-y) \operatorname{csc}^2 \theta d\theta (y \hat{j} - y \operatorname{ctg} \theta \hat{i})}{y^3 \operatorname{csc}^3 \theta}$$

$$\vec{E}(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta (-\hat{j} + \text{ctg } \theta \hat{i})$$

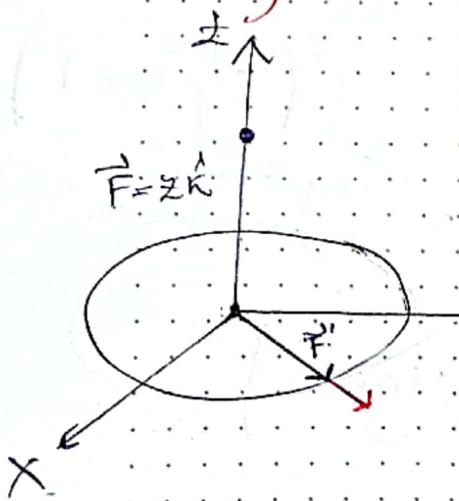
$$\Rightarrow \vec{E}(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left\{ -\hat{j} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta + \hat{i} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left\{ \hat{j} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) + \hat{i} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \right\}$$

¿Hubo infinito? $\theta_1 = \pi$
 $\theta_2 = 0$ se cancela

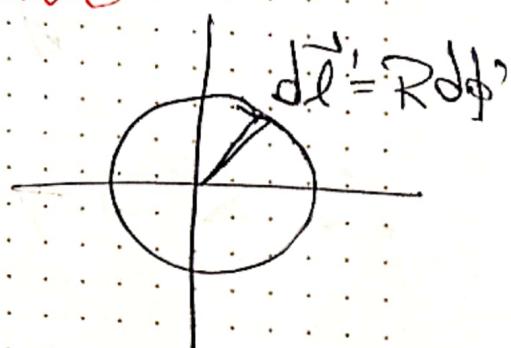
$$\vec{E}(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \hat{j}$$

Campo de una espira circular
 de radio R y densidad lineal de
 cargas de λ constante



$$\vec{r} = zk$$

$$\vec{r}' = R s'$$



$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2}$$

$$dl' = R d\phi'$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = zk - R s'$$

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl'}{|r - r'|^3} (n - n')$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda R d\phi'}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} (z\hat{k} - R\hat{s})$$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' (z\hat{k} - R\hat{s})$$

$\hat{s}' = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} \left\{ 2\int_0^{2\pi} d\phi' - R \int_0^{2\pi} d\phi' s' \right\}$$

↑ periodo

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} z\hat{k} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{2\pi R \lambda z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{R\lambda z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

¿Cuál es la carga total de la espira?

$$Q = \int \lambda dl' = 2\pi R \lambda \quad \lambda = \frac{dQ}{dl}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Serie Binomial es lo mismo que la Serie de Taylor. Si

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$x = \left(\frac{z}{R}\right)^2 ; \quad m = -\frac{3}{2}$$

$$\left[1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{R}\right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{z}{R}\right)^4$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{R^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{R}\right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{z}{R}\right)^4 + \dots \right\}$$

$$z \rightarrow \infty$$

$$\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{z}{z^3 \left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{3/2}} ; \quad X = \frac{R^2}{z^2}, \quad m = -\frac{3}{2}$$

$$\left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{R}{z}\right)^4 + \dots$$

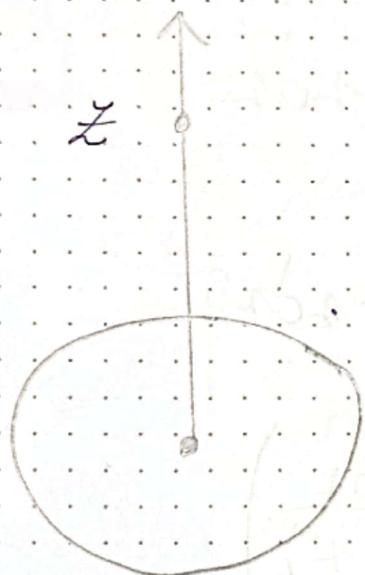
$$\therefore \vec{E} = \frac{Qk}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{R}{z}\right)^4 + \dots \right\}$$

$$z \rightarrow \infty \quad \vec{E}(z) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} k$$

Clase 8 Electro

28/03/23

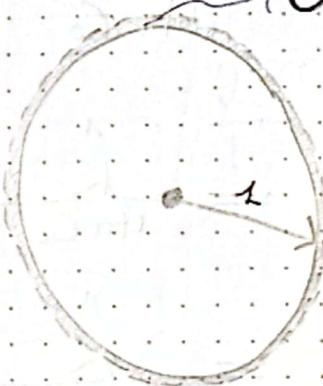
Encontrar una Carga distinta d partir de la que conocemos por el principio de Superposición



$$\sigma = \frac{dQ}{da}$$

densidad superficial de cargas

$$dQ = \sigma da$$



$$2\pi r ds$$

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Cálculo de un Campo eléctrico de un plano infinito cargado con densidad superficial σ constante

→ En este caso vamos realizar el cálculo utilizando el campo de una espira, y el resultado de un campo de distintos radios $0 \leq r \leq \infty$.

→ Cada espina apunta al campo elemental
Mira contribución de la forma

$$d\vec{E} = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dQ$$

$$= \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi r dr \hat{r}$$

$$d\vec{E}(z) = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi r dr \hat{r}$$

$$= \frac{k}{4\pi\epsilon_0} 2\pi z \left(\frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right)$$

Luego, el campo total

$$\int d\vec{E} = \vec{E} = \frac{\Gamma z k}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$u = z^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r dr \Rightarrow \frac{du}{2r} = dr$$

$$u(0) = z^2; u(\infty) = \infty$$

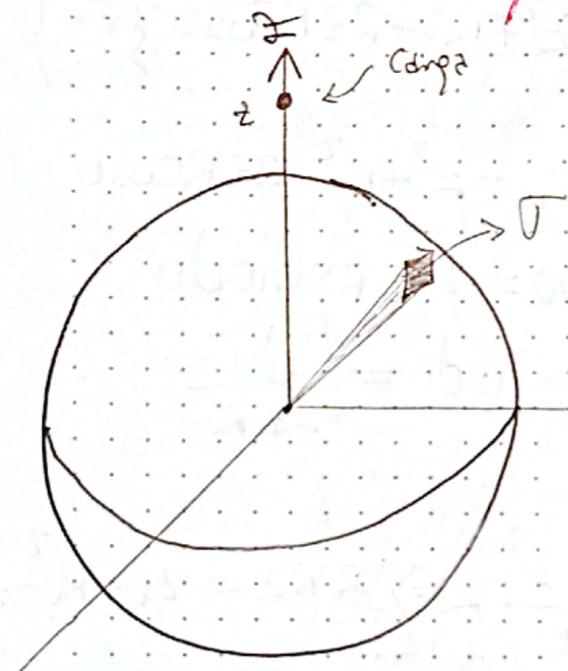
$$\therefore \vec{E}(z) = \frac{\Gamma z k}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{\infty} u^{-\frac{3}{2}} du = \frac{\Gamma z k}{4\epsilon_0} \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})} \right]_{z^2}^{\infty}$$

$$= \frac{\Gamma z k}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2}} \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\Gamma z k}{2\epsilon_0 |z|}$$

$$\text{Si } z > 0 \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

$$\text{Si } z < 0 \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{k})$$

Calculo del Campo eléctrico de una Superficie esférica de radio R y de densidad superficial constante σ



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}') dQ'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{r} = z \hat{k}$$

$$\vec{r}' = R \hat{r}'$$

$$\hat{r}' = \sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}$$

$$dA = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz \cos\theta} \\ = \sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz \cos\theta}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{k} - R \hat{r}'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}') dQ'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\sin(\theta)(z\hat{k} - R\hat{r}')}{{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}} {}_{3/2}$$

$$z\hat{k} - R\hat{r}' = (z - R\cos\theta)\hat{k} - R\sin\theta(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})$$

θ periodo

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} K \left\{ 2\pi \int_0^\pi \frac{d\theta \sin\theta (z - R\cos\theta)}{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta} \right\} {}_{3/2}$$

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta \sin\theta (z - R\cos\theta)}{\{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta\}^{3/2}}$$

$u = z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta$
 $d\theta = 2zR\sin\theta d\theta$
 $\sin\theta d\theta = \frac{du}{2zR}$

$$R\cos\theta = \frac{u - R - z^2}{2z}$$

$$\text{Si } \theta = 0 \Rightarrow R = \frac{u - R - z^2}{2z} \Leftrightarrow 2Rz = u - R^2 - z^2$$

$$\Leftrightarrow u_+ = (z + R)^2$$

$$\text{Si } \theta = \pi \Rightarrow -R = \frac{u - R - z^2}{2z} \Leftrightarrow -2Rz = u - R^2 - z^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 - 2Rz + z^2 = u_- \Rightarrow u_- = (z - R)^2$$

$$I = \int_{(z+R)^2}^{(z-R)^2} \left(z - \left(\frac{u - R^2 - z^2}{2z} \right) \right) \frac{du}{2zR} \cdot u^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \int_{(z+R)^2}^{(z-R)^2} \left(\frac{z^2 - u - R^2 + z^2}{2z} \right) \frac{du}{2zR u^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4R^2} \int_{(z+R)^2}^{(z-R)^2} \left(\frac{z^2 - R^2 + u}{u^{\frac{3}{2}}} \right) du$$

$$= \frac{(z^2 - R^2)}{4\pi z^2} \int_{(z+R)^2}^{(z-R)^2} u^{-\frac{3}{2}} du + \frac{1}{4\pi z^2} \int_{(z+R)^2}^{(z-R)^2} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2Rz^2} \left[(z^2 + R^2) \left[-\frac{1}{|z-R|} + \frac{1}{z+R} \right] + |z-R| - (z+R) \right]$$

$$z > R \Rightarrow z - R > 0$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2Rz^2} \left\{ (z^2 - R^2) \left[\frac{-(z+R) + (z-R)}{(z^2 - R^2)} \right] + z + R - z - R \right\} \\ &= \frac{1}{2Rz^2} \left\{ -z - R + z - R + z - R - z - R \right\} \\ &= \frac{1}{2Rz^2} \left\{ -4R \right\} = \boxed{-\frac{2}{z^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Si } z < R \Rightarrow r - z > 0$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2Rz^2} \left\{ (z^2 - R^2) \left[\frac{1}{z - R} + \frac{1}{z + R} \right] - z + R - z - R \right\} \\ &= \frac{1}{2Rz^2} \left\{ 2z - 2z \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} K \cdot I$$

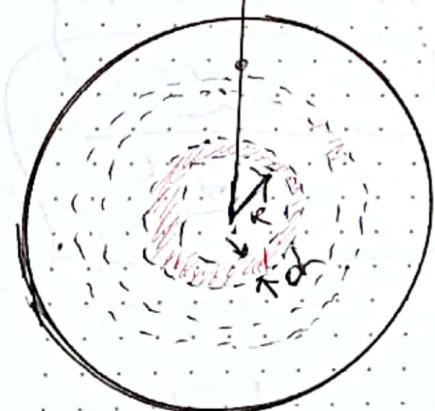
Campo Eléctrico $\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 z^2} K & |z| > R \\ 0 & |z| < R \end{cases}$

El Campo eléctrico fuera de la esfera es equivalente al de una carga $Q = \frac{\rho}{4\pi R^2} V$ ubicada en el centro de la distribución.

Cálculo del campo eléctrico de una esfera de radio R y densidad de Carga volumétrica ρ constante



$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{k}$$



$$dQ = \rho 4\pi r^2 dr$$

C _{volumen}

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{\rho 4\pi r^2 dr \hat{k}}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \int \frac{\rho r^2}{\epsilon_0 z^2} dr$$

$$= \frac{\rho k}{\epsilon_0 z^2} \int_0^R r^2 dr = \frac{\rho k}{\epsilon_0 z^2} \cdot \frac{R^3}{3}$$

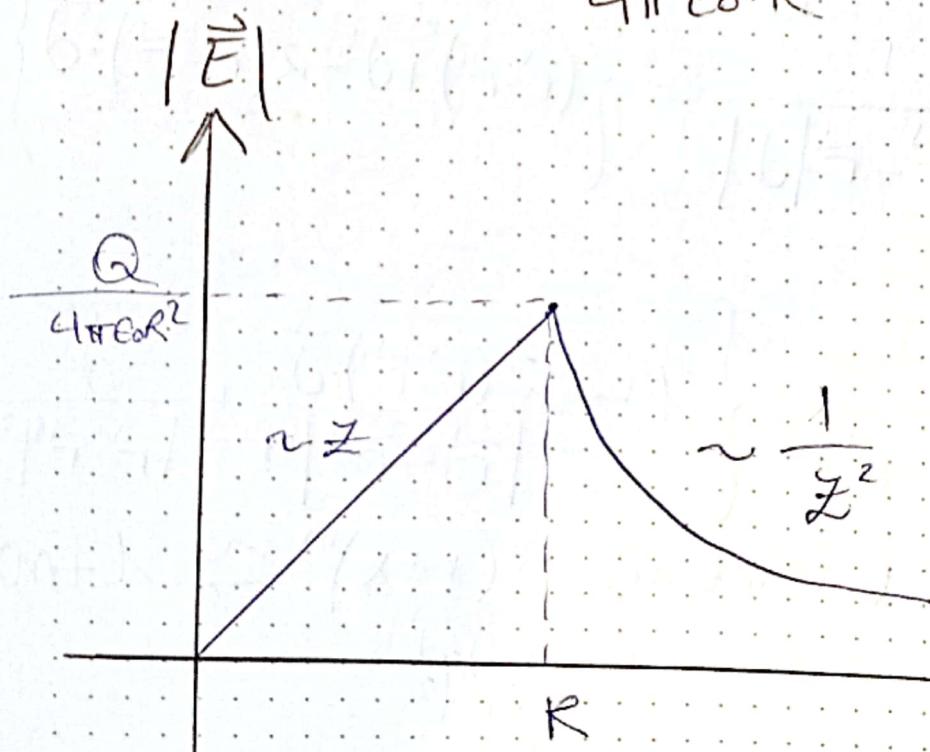
$$= \frac{\frac{4\pi}{3}R^3\rho}{4\pi\epsilon_0 z^2} k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} k$$

Ahora $\rightarrow z < R$ $\frac{z^3}{r'^2} + \frac{R^3}{r'^2} - \frac{z^3}{R^2}$

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho}{\epsilon_0 z^2} \left\{ \int_0^z r'^2 dr' + \int_0^{R^3} r'^2 dr' \right\}$$

$$\frac{R^3 z}{R^3 z} = \frac{\rho}{\epsilon_0 z^2} \cdot \frac{z^3}{3} = \frac{4\pi R^3 \rho z}{4\pi \epsilon_0 R^2} \left(\frac{z}{R} \right)$$

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \left(\frac{z}{R} \right)$$



Clase 9 Electro 29/03/2023

Campo eléctrico de un dipolo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d}|} \frac{(\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d})}{|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d}|^3} + \frac{(-q)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right\}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d})}{|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d}|^3} - \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right\}$$

$$* \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d}|} = \left\{ (\vec{r}-\vec{r}')^2 + d^2 - 2(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \vec{d} \right\}^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \left\{ 1 - \frac{2(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \frac{\vec{d}^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right\}^{-3/2}$$

Propiedades recetas
Teorema del Binomio: $(1+x)^m \approx 1+mx$

$$m = -3/2 \quad x = -\frac{2(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d}|} \approx \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \left\{ 1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \dots \right\}$$

$$r = \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

Luego,

$$\vec{E}(r) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \left[1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \dots \right] - \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right\}$$

$$\vec{E}(r) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3} \left\{ (\vec{r}-\vec{r}') + \frac{3(\vec{r}-\vec{r})(\vec{r}-\vec{r}')\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \vec{d} - \frac{(3\vec{d}(\vec{r}-\vec{r}'))\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \dots - (\vec{r}-\vec{r}') \right\}$$

↳ términos de orden
 $d^2 \sim 0$

$$\therefore \vec{E}(r) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') + \dots \right\}$$

Def Dipolo eléctrico puntual

$$\vec{p} = \lim_{d \rightarrow 0} q\vec{d}$$

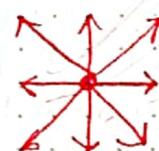
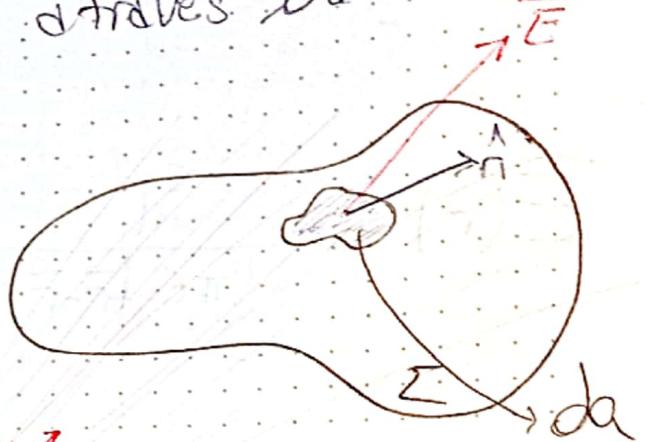
Signos contrarios
misma magnitud

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} (\vec{r}-\vec{r}') + \dots \right\}$$

⑬ Flujo eléctrico

→ Es la medida del número de líneas de que pasa a través de una superficie

$$\Phi_e = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{a}$$



$$\Phi_e = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} da$$

Nota | En superficies perpendiculares al campo el flujo es nulo

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^3}$$
$$\frac{1}{r^1} = \frac{1}{r}$$

14 Ley de Gauss

→ Relación entre la componente normal del campo eléctrico sobre una superficie Σ y la carga total encerrada por la superficie

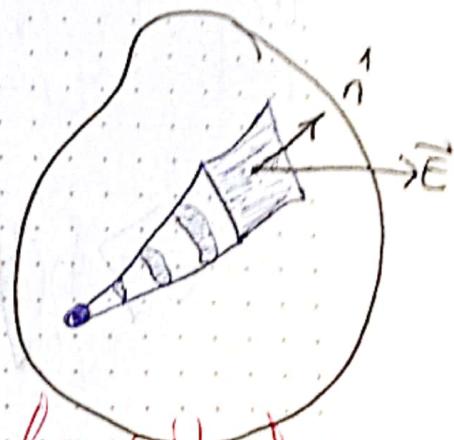
→ Pensemos en una carga puntual ubicada en el origen

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

→ 2a integral sobre una superficie cerrada que incluye a la carga

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot \hat{n} da$$

$$d\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3} da$$



Def Elemento de ángulo sólido

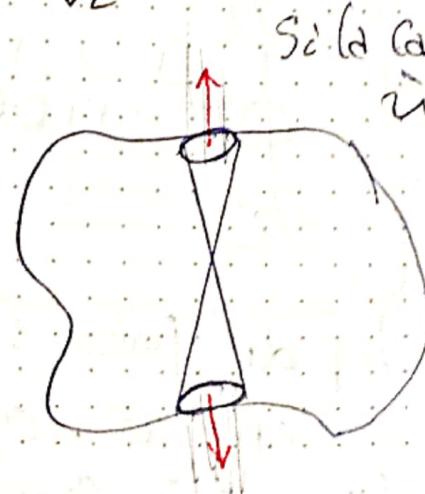
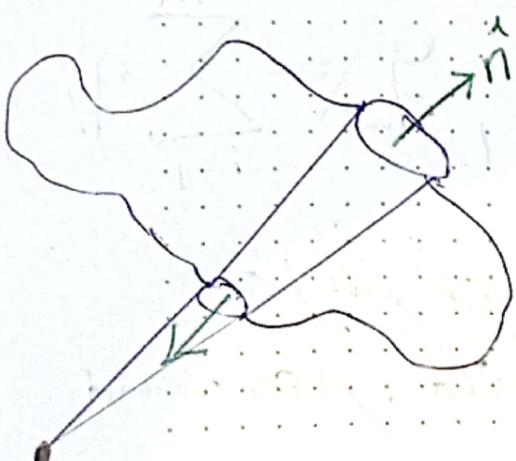
$$d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot \hat{n} da}{r^3} = \frac{r \cdot \hat{n} da}{r^2}$$

En Coordenadas esféricas

$$d\Omega = \sin\theta d\phi d\theta$$

$$\rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Sigma} d\Omega$$

Si la carga es exterior, $\oint_{\Sigma} d\Omega = 0$



Si la carga e interior

$$\oint_{\Sigma} d\Omega = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = - \cos \phi \Big|_0^{\pi} = 4\pi$$

$$\Rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ exterior } \Sigma \\ \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \text{ interior } \Sigma \end{cases}$$

Supongamos que tenemos m cargas puntuales interiores a una superficie Σ

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \sum_{i=1}^m \oint_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot \hat{n} da$$

$$= \sum_{i=1}^m \Phi_{e_i} = \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$q_{\text{int}} = \sum_{i=1}^m q_i$$

Ley de Gauss: relación entre el flujo eléctrico con la carga eléctrica por una superficie cerrada.

Este resultado también aplica a distribuciones continuas

$$q_{\text{int}} = \int_{\text{c}} \lambda(r') dl'; \int_S \sigma(r) da; \int_V \rho(r) dv$$

Importante

Para calcular el campo eléctrico mediante el teorema de GAUSS debe ser posible encontrar una superficie cerrada, llamada superficie gaussiana, tal que el módulo del campo eléctrico sea constante sobre ella y además en cada punto de ella es el campo normal.

En la práctica

$$\oint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{SG} |\vec{E}| da = |\vec{E}| \oint_{SG} da = |\vec{E}| A_{sg} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

El TG nos permite calcular el E. Su dirección se debe determinar con argumentos de simetría

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0 A_{sg}}$$

Ejemplo

Carga puntual

la SG corresponde
a esferas centradas en
la Carga

$$A_{SG} = 4\pi r^2$$

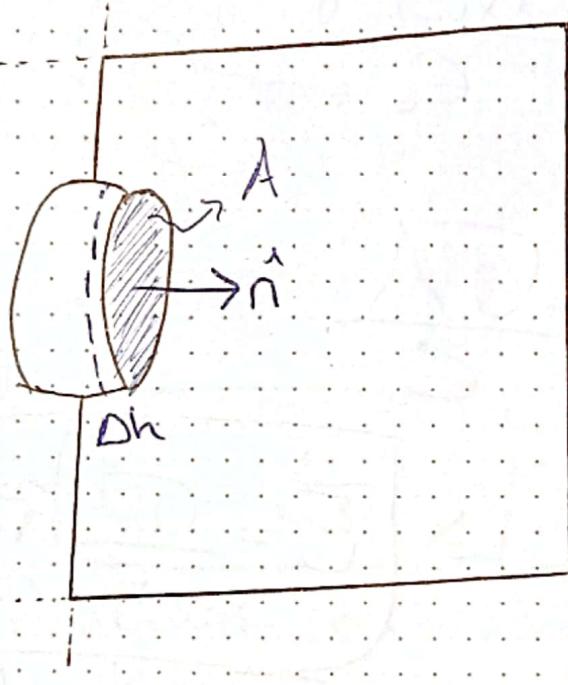
y el campo radial,
normal con esta superficie

$$|\vec{E}| = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

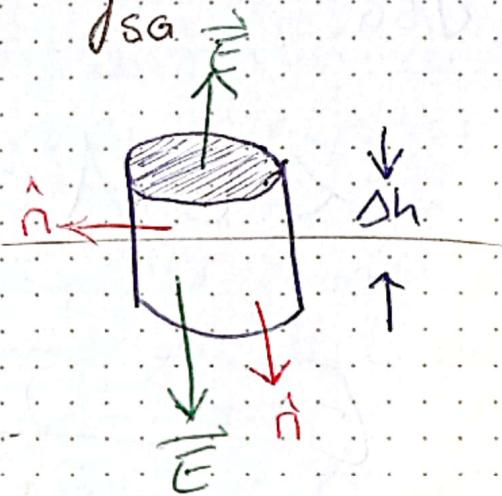
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Clase 10

Teorema de Gauss



$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} d\alpha = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



ii) Debido a la simetría (plana), el campo eléctrico es siempre normal a la superficie plana

$$\Rightarrow \vec{E} = E \hat{n}$$

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$$

$$\begin{aligned} ii) \oint \vec{E} \cdot \hat{n} d\alpha &= \int_{S6} \vec{E} \cdot \hat{n} d\alpha + \int_{b1} \vec{E} \cdot \hat{n} d\alpha + \int_{b2} \vec{E} \cdot \hat{n} d\alpha \\ &= 2 \int_b \vec{E} \cdot \hat{n} d\alpha = 2E \int_b d\alpha = 2E \cdot A \end{aligned}$$

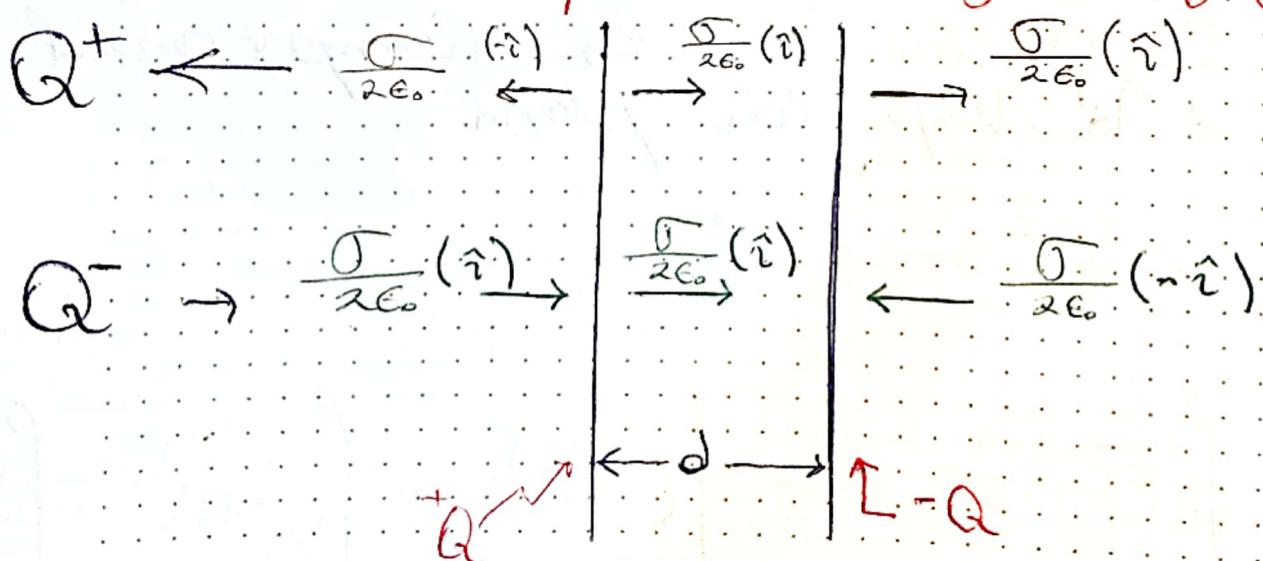
$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \Gamma da = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int da = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$2 \cdot EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}}$$

Nota: Determine Cuanto vale el Campo en la sgte configuración



En los extremos $\vec{E} = 0$
 En el interior $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$

} Condensador de placas paralelas

Ejemplo

SG3

SG2

SG1

R_1

R_2

$$\rho = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Determine el Campo eléctrico en todo el espacio

→ Debido a la simetría de la distribución de cargas, el campo eléctrico será radial y constante sobre cualquier superficie esférica centrada en el origen de la distribución

$$\Rightarrow \vec{E} = E \hat{r}$$

Podemos reconocer tres Superficies Gausianas
y cómo reconocer una SG?

→ 1- La curvatura de la superficie en cualquier punto dado en la misma en todas las direcciones

→ 2- La curvatura gaussiana de la superficie es cte en cada punto

→ 3- La superficie no tiene baches ni esquinas afiladas

Es decir, debe tener una curvatura intrínseca que no presente singularidades o discontinuidades en ningún punto de la S.

Podemos reconocer 3 regiones distintas

$$SG_1 : \quad 0 < r < R_1$$

$$SG_2 : \quad R_1 < r < R_2$$

$$SG_3 : \quad R_2 < r < \infty$$

$$\int_{SG} E \cdot d\vec{a} = E \cdot 4\pi r^2$$

$$i) Q_{\text{int}} = -Q \Rightarrow E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$ii) Q_{\text{int}} = -Q + \int_{R_1}^r \rho dV = -Q + \int_{R_1}^r \left(\frac{K}{r'} \right) 4\pi r'^2 dr' \quad P \neq \text{cte}$$

$$Q_{\text{int}} = -Q + 4\pi K \int_{R_1}^r r'^2 dr' = -Q + 4\pi K \frac{r^2}{2} \Big|_{R_1}^r$$

$$= -Q + 2\pi K (r^2 - R_1^2)$$

$$\star \text{ Si } \alpha Q = \int_{R_1}^{R_2} \rho dV = K 4\pi \int_{R_1}^{R_2} r'^2 dr' = 2\pi K (R_2^3 - R_1^3)$$

$$\Rightarrow 2\pi K = \frac{\alpha Q}{R_2^3 - R_1^3}$$

$$Q_{\text{int}} = -Q + \alpha Q \left(\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} \right)$$

$$\therefore 4\pi r^2 E_2 = \underline{-Q + \alpha Q \left(\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} \right)}$$

$$E_2 = \frac{-Q + \alpha Q \left(\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} + \frac{\alpha Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \frac{1}{r^2}}$$

$$\text{iii}) Q_{\text{int}} = -Q + \int_{R_1}^{R_2} \rho dV = -Q + \alpha Q$$

$$\Rightarrow E_3 \cdot 4\pi r^2 = \frac{-Q + \alpha Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_3 = \frac{\tilde{Q}}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad ; \quad \tilde{Q} = -Q + \alpha Q$$

$$\Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{\tilde{Q}}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad * \text{ Si } \alpha = 1 \Rightarrow \vec{E}_3 = \vec{0}$$

Ejemplo 3

→ Debido a la simetría de la distribución de cargas, el campo será radial (coordenadas polares) con respecto al eje axisimétrico

→ Serán SG todos los cilindros centrados y dirigidos con respecto a la distribución de cargas

$$\Rightarrow \vec{E} = E \hat{s}$$

* Reconocemos dos regiones

$$i) 0 < s < b$$

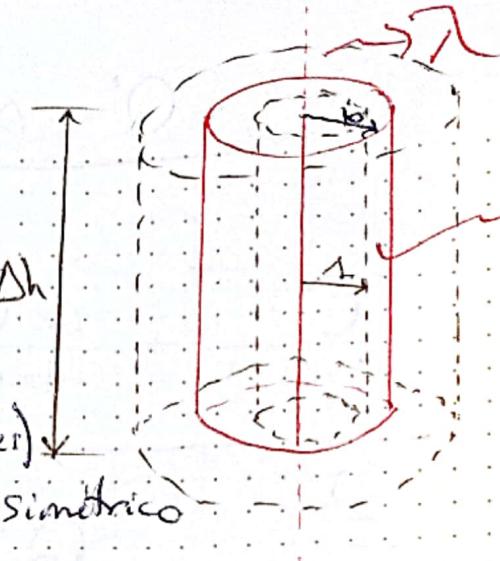
$$ii) b < s < \infty$$

En ambos casos: $\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = E \cdot 2\pi s \Delta h$

$$E \cdot 2\pi s \Delta h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_i = \frac{Q_{int}}{2\pi \epsilon_0 s \Delta h}$$

$$i) 0 < s < b : Q_{int} = \lambda \cdot \Delta h$$

$$\Rightarrow E_i = \frac{\lambda \Delta h}{2\pi \epsilon_0 s \Delta h} \rightarrow E_i = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 s} \hat{s}$$

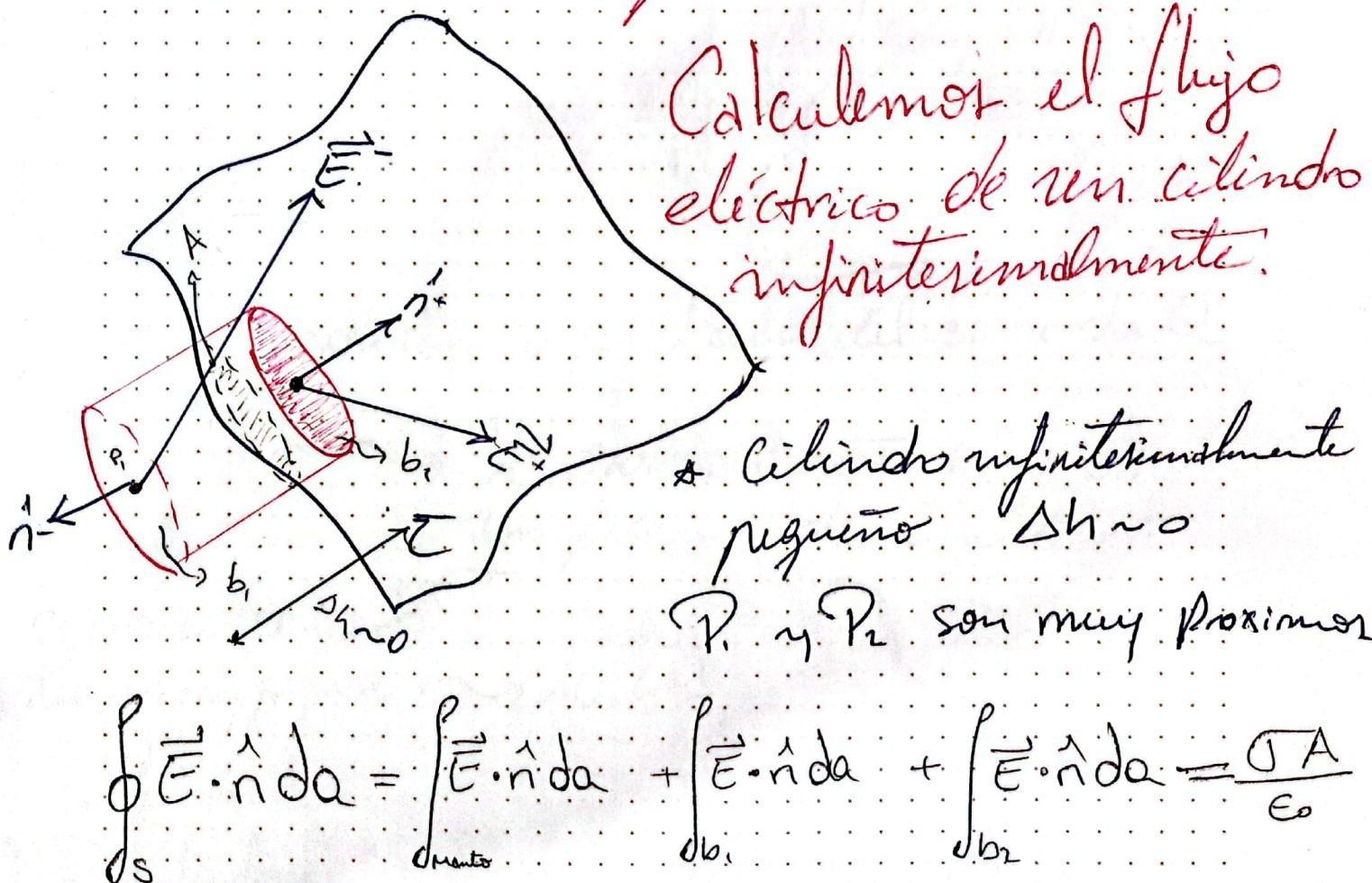


$$ii) b < s < \infty : Q_{int} = \lambda \cdot \Delta h + \sigma 2\pi b s$$

$$\rightarrow E_i = \frac{sh(\lambda + \sigma 2\pi b)}{2\pi \epsilon_0 \Delta h s}$$

$$\boxed{\vec{E}_i = \frac{\lambda + 2\pi b \sigma}{2\pi \epsilon_0 s} \hat{s}}$$

Aplicación: Discontinuidad de la Componente normal del Campo eléctrico



$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \int_{\text{curva}} \vec{E} \cdot \hat{n} da + \int_{b_1} \vec{E} \cdot \hat{n} da + \int_{b_2} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$(\hat{n} = -\hat{n} \equiv -\hat{n})$$

$$\int_{b_1} \vec{E}^- \cdot \hat{n}^- da + \int_{b_2} \vec{E}^+ \cdot \hat{n}^+ da = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$(\vec{E}^+ \cdot \hat{n} - \vec{E}^- \cdot \hat{n}) \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$(E_n^+ - E_n^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad E_n^+ = \vec{E}^+ \cdot \hat{n}$$

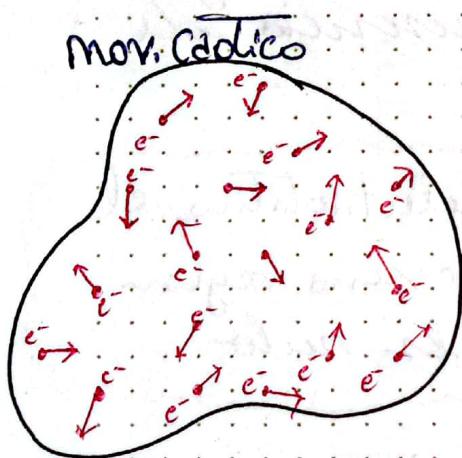
$$\boxed{\Delta E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad E_n^- = \vec{E}^- \cdot \hat{n}$$

Clase 11 Electro 04/04/23

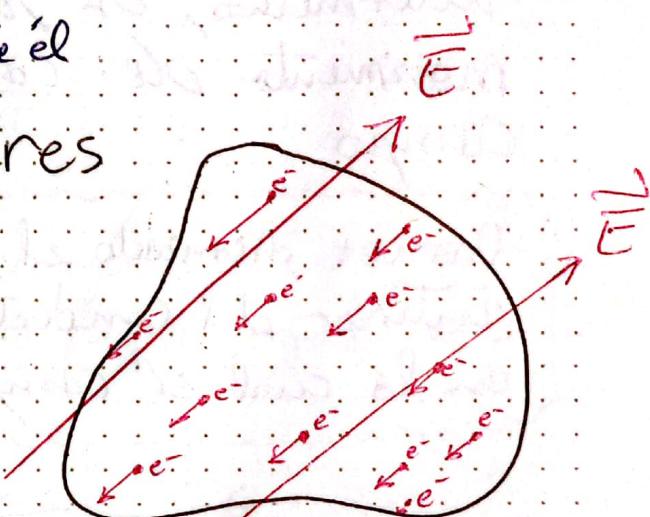
16 Conductores en Equilibrio electrostático

Según el comportamiento y respuesta a un campo eléctrico los materiales se clasifican como:

a) **Conductores**: Tienen una gran cantidad de portadores libres de moverse sobre él



Conductores



* Se moverán dependiendo del signo de Q

→ Se moverán hasta estar en una posición de Equilibrio

ocurre en un tiempo muy pequeño $\sim 10^{-50}$ s

Equilibrio electrostático

"Tiempo de relajación"

→ Es un movimiento neto de Q^\pm

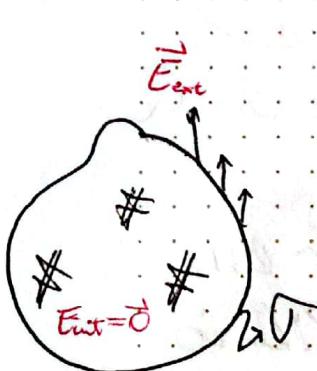
b) Aisladores & dieléctricos:

- No posee carga libre, no se observa movimiento en ausencia de campo (nulos conductores de electricidad)
- Partículas muy juntas

c) Semiconductores: Comportamiento intermedio

intermedio, es posible encontrar algún movimiento de cargas en ausencia de campo

Una vez alcanzado el equilibrio electrostático el interior del conductor debe ser una región en la cual el campo neto es nulo.



$$\vec{E}_{int} = \vec{0} \rightarrow \text{nulo} = \text{cte}$$

$$\# : \text{Conductor} \rightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}_{\text{conductor}}$$

→ Esto implica que el interior de un conductor tiene carga neta igual a 0

→ En la proximidad de la superficie del conductor el campo eléctrico vale

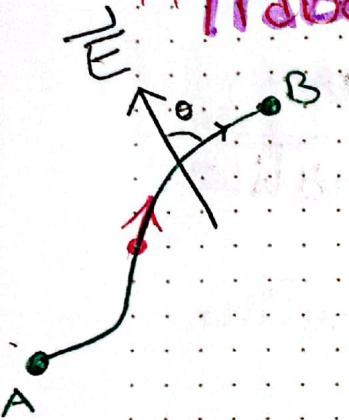
$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Para un conductor en equilibrio electrostático

⇒ Cada Σ Q \exists una discontinuidad de Campo

↳ Exceso de Carga se da la Σ

19 Trabajo y Energía Potencial



Una Q en movimiento donde \exists un E , se siente una Fuerza.

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

→ Para mantener en mov. uniforme (o quieto) es necesario aplicar una fuerza igual pero en sentido contrario

$$\vec{F}_R = -q \vec{E}$$

• El W necesario para mover una Q desde un punto A a otro B

$$dW = \vec{F}_R \cdot d\vec{l} = F_R dl \cos\theta$$

→ $dW > 0$; $dW < 0$

El trabajo total

$$W = \int dw = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

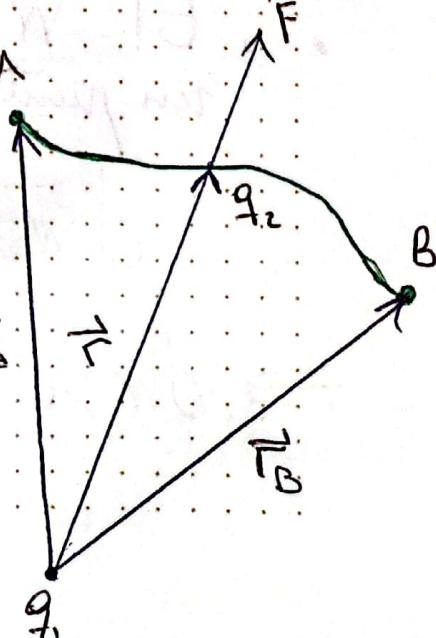
Si la trayectoria es cerrada y el $W=0$

↳ **Campo Conservativo**

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{F} \text{ es Conservativo}$$

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr$$
$$= - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_A}^{r_B}$$
$$= - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

W no depende de trayectoria, solo pos. inicial y final (A,B)



Debido a que el trabajo no depende de la trayectoria podemos escribir

$$W = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_1}^{r_2} (-\nabla U) \cdot d\vec{l} = U(r_1) - U(r_2)$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \Rightarrow U \text{ electrostática} \\ \sim U \text{ gravitacional}$$

2) Potencial Electrostático \rightarrow Escalar

U electrostática \neq potencial electrostático

\rightarrow Debido a la complejidad matemática no siempre resulta útil calcular E directamente.

\hookrightarrow Por esto se introduce el concepto de potencial electrostático que proviene del hecho de que \vec{F} es conservativo,

$$\vec{E} = -\nabla \Phi$$

$$\Phi_e \neq \Phi$$

↓
flujo ↓
 potencial

Nota:

- Si la distribución de cargas es finita y localizada se puede definir un "potencial absoluto" en el sentido de que se define el origen del potencial en infinito
- Si la distribución es infinita sólo podemos calcular diferencias de potencial es imposible tomar un origen de potencial en la tierra

$$\frac{1}{\Phi} = 0$$

Para una Carga puntual en \vec{r}'

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Mientras que para distribuciones

* Discreta (n cargas puntuales)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

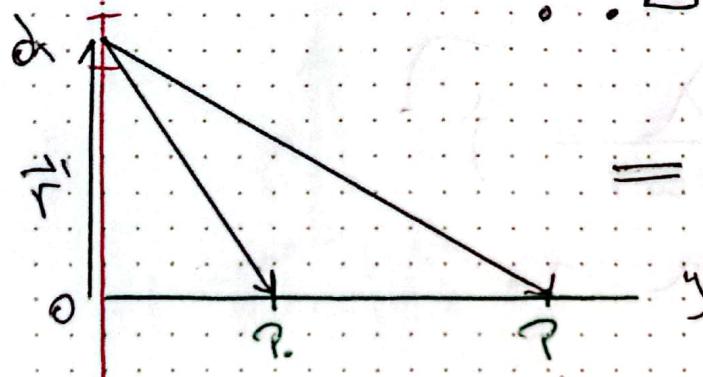
* Continua

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\lambda(\vec{r}') d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}_{ida}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\lambda(\vec{r}') d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') d\vec{a}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Potencial electrostático de un hilo recto infinito con densidad lineal de cargas λ constantes

$$\therefore \Delta \Phi = \Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0)$$



$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\text{hilo}} \frac{\lambda d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int_{\text{hilo}} \frac{\lambda d\vec{l}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|} \right]$$

$$\Delta \Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y_0^2}} \right]$$

$$\Delta \Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} - \int_0^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y_0^2}} \right]$$

$$\star \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + v^2})$$

$$\Delta \Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(x' + \sqrt{x'^2 + y^2}) \Big|_0^{\infty} - \ln(x' + \sqrt{x'^2 + y_0^2}) \Big|_0^{\infty} \right]$$

$$\therefore \Delta \Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[-\ln|y| + \ln|y_0| \right] = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|y_0|}{|y|}}$$

¿Cálculo eléctrico? $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$

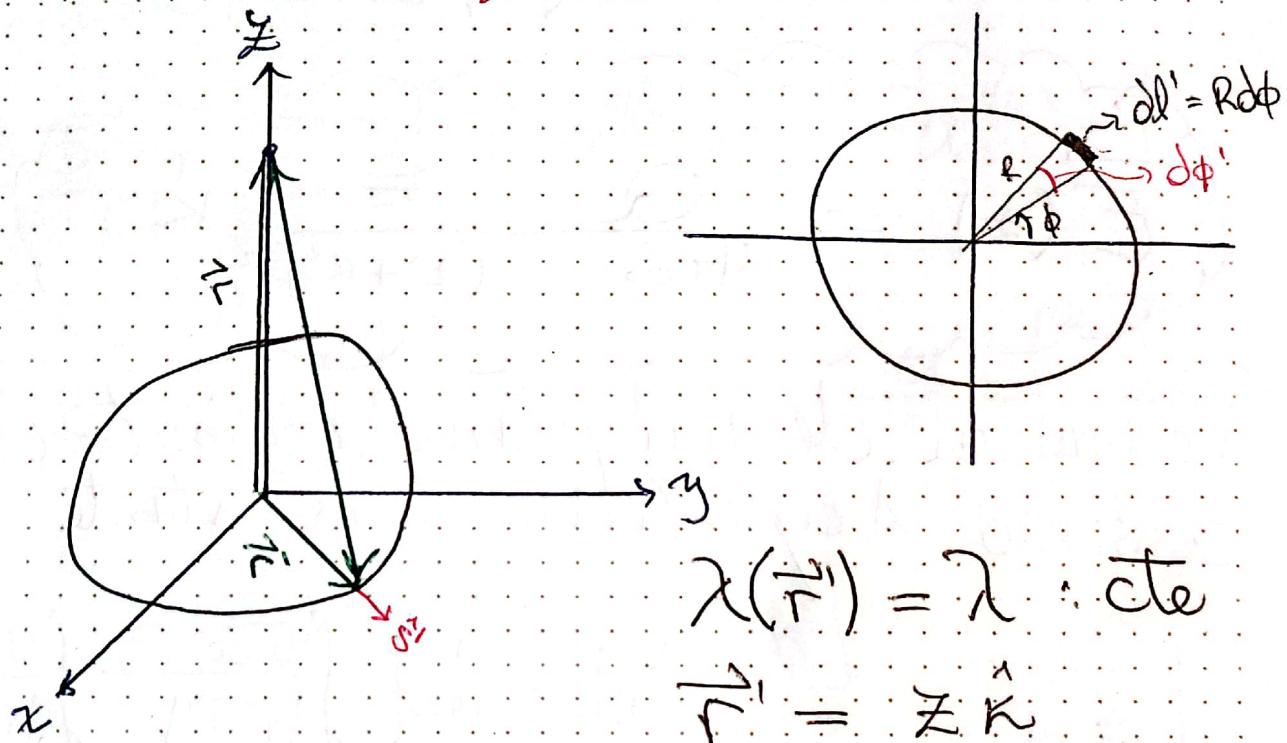
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial}{\partial y} \Phi(y) \hat{j} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \ln y \hat{j}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \ln y \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \hat{j}$$

Close 12 Electro 05/04/23

Potencial en un punto sobre el eje de simetría de una espira circular de radio R y densidad lineal λ cte.



$$\lambda(\vec{r}') = \lambda \cdot \text{cte}$$

$$\vec{r}' = z \hat{k}$$

$$dL' = R d\phi'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2}$$

$$\Phi(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{2\pi R \lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\boxed{\Phi(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}}$$

$$\text{y d. que } \Phi = \Phi(z) \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{k}$$

$$\therefore \vec{E}(z) = -\hat{k} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \right) (z^2 + R^2)^{-3/2} \hat{z}$$

$$\vec{E}(z) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Potencial de un plano infinito con densidad superficial σ constante

$$\Delta\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\sigma dz'}{|r - r'|} - \int \frac{\sigma dz}{|r_0 - r|} \right]$$

$$d\Omega' = 2\pi s' ds'$$

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$d\Omega' = 2\pi s' ds'$$

$$\vec{r}' = \vec{z} \hat{k}$$

$$\vec{r}' = s' \hat{s}'$$

$$\sigma(r') = \sigma : \text{cte}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{s'^2 + z^2}$$

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}'| = \sqrt{s'^2 + z_0^2}$$

$$\nabla \Phi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \pi \left[\int_0^{\infty} \frac{2s' ds'}{\sqrt{s'^2 + z^2}} - \int_0^{\infty} \frac{2s' ds'}{\sqrt{s'^2 + z_0^2}} \right]$$

$$u = s'^2 + z^2$$

$$ds = 2s' ds' \Rightarrow s' ds' = \frac{du}{2}$$

$$u(s=0) = z^2 ; u(s \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$$

$$\Delta \Phi = \frac{\pi}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{z^2}^{\infty} u^{-1/2} du - \int_{z_0^2}^{\infty} u^{-1/2} du \right]$$

$$= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[\frac{u^{1/2}}{1/2} \Big|_{z^2}^{\infty} - \frac{u^{1/2}}{1/2} \Big|_{z_0^2}^{\infty} \right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [|z_0| - |z|]$$

Si $|z| > |z_0| > 0$

$$\Delta \Phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (|z_0| - |z|) \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

Con respecto a un origen

se calcula $\Delta \Phi$ cuidando el σ infinito

Ecuaciones Diferenciales de la Electrostatica

* Forma Diferencial de la ley de Gauss

$$\int_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Siempre se podrá igualar a la densidad volumétrica

$$\int_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dv'$$

El teorema de la divergencia

$$\int_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dv$$

$$\therefore \int_V \nabla \cdot \vec{E} dv = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

Y si que el volumen es arbitrario, podemos escribir

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Además, el campo electrostático es conservativo, entonces es válido que

$$\vec{E} = -\nabla \Phi$$

Reemplazando en la ley de Gauss

$$\nabla \cdot [-\nabla \Phi] = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\rho \neq 0 \Rightarrow$ Ecación Poisson

$\rho = 0 \Rightarrow$ Ecación Laplace

∇^2 operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

El operador Laplaciano se utiliza comúnmente en matemáticas, física y otras ciencias para describir la variación de una magnitud en el espacio.

Operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Operador Laplaciano en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\nabla^2 f =$$

Por otro lado, podemos dirigir que

rotacional

Derivada tangencial
a la dirección

"circulación"
"vortex"

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \Phi) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Campo electrostático
irrotacional

Dos ecuaciones Diferenciales en
electrostática

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \wedge \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

En total son 6 ecuaciones diferenciales que
están acopladas que se deben resolver
simultáneamente

→ Debemos encontrar, en general, 6
constantes libres que se deben fijar
con condiciones de contorno (cc)

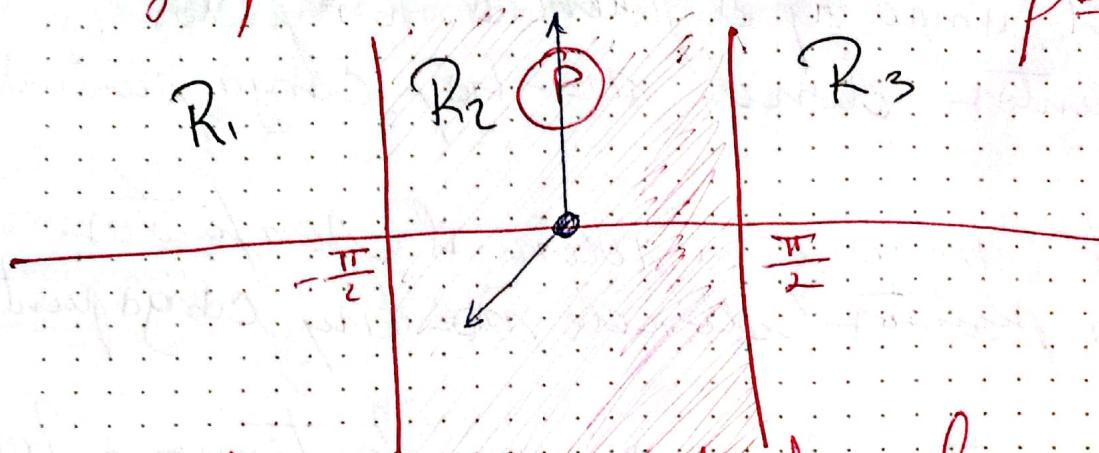
Condiciones de Contorno ↳ Dependen de cada
tema particular

- 1- El campo y el potencial en O en O es la
distribución de Carga fija (limitada a una región
finita del espacio)

- 2-** El campo y el potencial son finitos en puntos donde no hay carga puntual
- 3-** El campo y el potencial son finitos en líneas donde $\lambda = 0$
- 4-** El potencial es siempre continuo a través de Σ cargada o no
- 5-** La componente tangencial del campo eléctrico es siempre continua de Σ Q o no
- 6-** La componente normal del campo eléctrico es continua a través de Σ donde $J=0$ y cuando $J \neq 0$ presenta una discontinuidad igual a $\frac{J}{\epsilon_0}$
- 7-** El campo eléctrico es constante a través de Σ donde $\sigma = 0$

Ejemplo de Aplicación

$$P = P_0 \cos x$$



Calcular \vec{E} en todo el espacio

* Debido a la simetría del problema

$$\vec{E} = E(x) \hat{i}$$

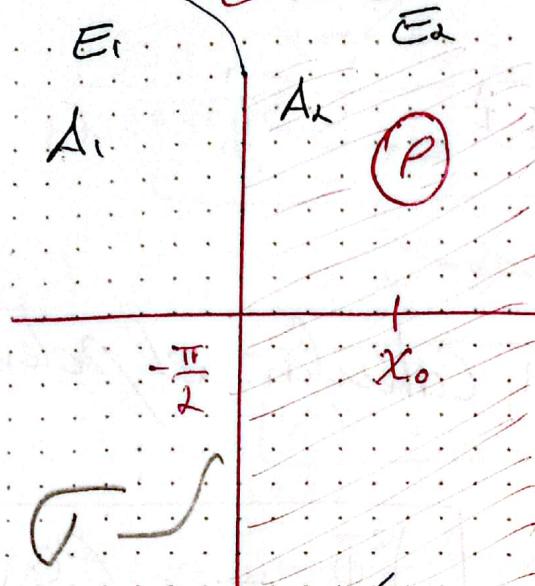
$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial x}$$

En R_1 : $-\infty < x < -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_1 = A_1$$

En R_1 : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; $P = P_0 \cos x$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{P_0}{\epsilon_0} \cos x \Rightarrow E_2 = \frac{P_0}{\epsilon_0} \sin x + A_2$$



$$E = E(x) \hat{i}$$

$$E_1 = A_1$$

$$E_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \sin x + A_2$$

$$E_3 = A_3$$

Yd que \exists cargas Superficial

$$\left. \begin{array}{l} i) E_1 \Big|_{-\frac{\pi}{2}} = E_2 \Big|_{-\frac{\pi}{2}} \\ ii) E_2 \Big|_{\frac{\pi}{2}} = E_3 \Big|_{\frac{\pi}{2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Condiciones de la} \\ \text{Z de densidades } \sigma \\ \text{de q} \end{array}$$

$$iii) -E_1 \Big|_{\infty} = E_3 \Big|_{\infty} \rightarrow \boxed{-A_1 = A_3}$$

vector

$$i) A_1 = \underbrace{-\frac{\rho_0}{\epsilon_0} + A_2}_{\text{vector}} \quad \left. \begin{array}{l} A_2 = 0 \\ A_1 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \end{array} \right\}$$

$$ii) -A_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + A_2 \quad \left. \begin{array}{l} A_1 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \\ A_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$A_1 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} + A_2 \quad \rightarrow \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$-A_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + A_2$$

$$0 = 0 + 2A_2 \Rightarrow \boxed{A_2 = 0}$$

$$\vec{E}_1(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \hat{i}$$

$$\vec{E}_2(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \sin x \hat{i}$$

$$\vec{E}_3(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \hat{i}$$

Simetría

Mismo problema para calcular el potencial

* Punto de partida

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

$$i) \rho=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \Phi_1(x) = A_1 x + b_1, \\ ; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = A_1.$$

$$ii) \rho(x) = \rho_0 \cos x \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos x \\ \rightarrow \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int \cos x dx + A_2 \\ = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \sin x + A_2$$

$$\boxed{\Phi_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos x + A_2 x + b_2}$$

$$iii) \rho=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi_3(x) = A_3 x + b_3} \\ \boxed{\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = A_3}$$

i) En $x = -\frac{\pi}{2}$: $\Phi_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \Phi_2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{-A_1 \frac{\pi}{2} + b_1 = -A_2 \frac{\pi}{2} + b_2}$$

ii) En $x = \pi/2$: $\Phi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Phi_3\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{A_2 \frac{\pi}{2} + b_2 = A_3 \frac{\pi}{2} + b_3}$$

iii) Continuidad del Campo en $x = -\frac{\pi}{2}$

$$-A_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - A_2 \Rightarrow A_1 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} - A_2$$

$$\boxed{A_1 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} + A_2}$$

iv) Continuidad del Campo en $x = \pi/2$

$$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - A_2 = -A_3$$

$$\Rightarrow \boxed{A_3 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} + A_2}$$

v) Condición en infinito

$$\Phi_1|_{-\infty} = \Phi_3|_{\infty}$$

* Por Simetría
debería ser el
mismo valor

$$\Phi_1 \sim A_1 x \quad ; \quad \Phi_2 \sim A_2 x$$

$x \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \boxed{-A_1 = A_3}$$

vi) Origen del potencial (arbitrario)

Eleción libre: $\Phi_2(\pi/2) = 0$

$$A_2 \frac{\pi}{2} + b_2 = 0$$

• no se sabe

fijar en 0

Pq es inconsistente
matemáticamente

$$b_2 = -A_2 \frac{\pi}{2}$$

$$*\Phi_3(\pi/2) = 0 \Rightarrow A_3 \frac{\pi}{2} + b_3 = 0$$

$$b_3 = -A_3 \frac{\pi}{2}$$

$$-A_3 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + A_2 \quad | \quad A_2 = 0$$

$$A_3 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} + A_2 \quad | \quad A_1 = -A_3 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$b_2 = 0$$

$$-\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{\pi}{2} + b_1 = 0$$

$$b_3 = \frac{\pi}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow b_1 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{\pi}{2}$$

Así

$$\Phi_1(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad -\infty < x < -\frac{\pi}{2}$$

$$\Phi_2(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos x \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

$$\Phi_3(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} (x - \pi/2) \quad \pi/2 \leq x \leq \infty$$

Ejercicios

$$R_1 = R$$

$$R_2 = 2R$$

$$R_3 = 3R$$

$$\rho(r) = -\frac{\epsilon_0 \alpha_0}{r}; R_1 \leq r < R_2$$

a) Encontrar el potencial en todo el espacio.

b) Determinar la densidad de carga inducida en cada superficie

SG₁: $0 \leq r \leq R_1$

SG₂: $R_1 \leq r \leq R_2$

SG₃: $R_2 \leq r \leq R_3$

SG₄: $R_3 \leq r \leq \infty$

En los 4 casos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E$$

Por simetría del problema

$$\rho = \rho(r) \rightarrow \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

R₁: $\rho=0$ $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = A_1 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{A_1}{r^2}$$

$\Phi_1(r)$ = $-\frac{A_1}{r} + b_1$

$$R_2 \quad \rho = -\frac{\epsilon_0 \alpha_0}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{\alpha_0}{r}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \alpha_0 r \quad | \int$$

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\alpha_0 r^2}{2} + A_2$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{A_2}{r^2} \quad | \int$$

$$\boxed{\Phi_2(r) = \frac{\alpha_0}{2} r - \frac{A_2}{r} + b_2}$$

$$R_3 \quad \rho = 0 \rightarrow \frac{d\Phi_3}{dr} = \frac{A_3}{r^2} \Rightarrow \boxed{\Phi_3 = -\frac{A_3}{r} + b_3}$$

$$R_4 \quad \rho = 0 \rightarrow \frac{d\Phi_4}{dr} = \frac{A_4}{r^2} \Rightarrow \boxed{\Phi_4 = -\frac{A_4}{r} + b_4}$$

Condiciones de contorno

i) En el origen no hay carga puntual

$$\Rightarrow \Phi \text{ es finito en } r=0 \Rightarrow \boxed{A_1=0}$$

ii) En $r=R$, $\Phi=0$ (conductor de tierra)

$$\Rightarrow b=0$$

iii) continuidad del potencial en $r=R$

$$\Phi_1(R) = \Phi_2(R)$$

$$0 = \frac{\alpha_0}{2}(r-R) + A_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{A_2}{R} - \frac{\alpha_0}{2} R}$$

iv) R_3 es una región que es un conductor en equilibrio electrostático

$$\Phi_3 = \text{cte} \Rightarrow A_3 = 0$$

$$\Phi_3 = b_3$$

v) en $r=R_3$: conductor conectado a una fuente V_0

$$b_3 = V_0 \Rightarrow \boxed{\Phi_3 = V_0}$$

vi) Potencial constante en $r=R_3=3R$

$$\Phi_3(R_3) = \Phi_4(R_3)$$

$$V_0 = -\frac{A_4}{R_3} + b_4 \Rightarrow \boxed{A_4 = -V_0 R_3 + b_4 R_3}$$

vii) Distribución localizada: $\Phi_4 \rightarrow 0$ cuando

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \boxed{b_4 = 0}$$

$$\boxed{\Phi_4 = \frac{V_0 R_3}{r} = \frac{3V_0 R}{r}}$$

$$\Phi_2(R_2) = \Phi_3(R_2)$$

$$\frac{\alpha_0 R}{2} - \frac{A_2}{2R} = V_0 \Rightarrow A_2 = 2RV_0 - \alpha_0 R^2$$
$$A_2 = R(2V_0 - \alpha_0 R)$$

$$\Phi_2 = \frac{\alpha_0}{2} (r-R) + 2R \left(v_0 - \frac{\alpha_0 R}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

Método de imágenes eléctricas

23

- * Encontrar densidades de Q involucradas
- * útil para calcular campo y potencial cuando no conocemos la distribución de Contorno
- * Está basado en el principio de unicidad del potencial
 → El potencial es único en una región delimitada por superficies sobre las cuales se fijan las condiciones de Contorno

24 Condiciones de Contorno Dirichlet:

→ fija el potencial en las Σ delimitadas

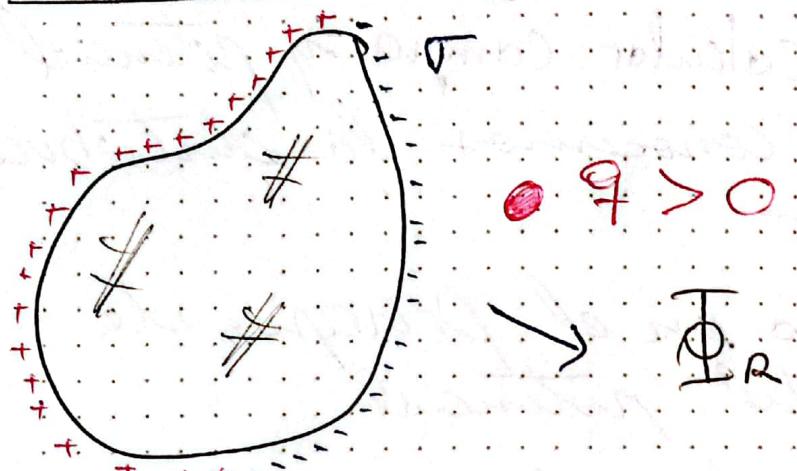
25 Condiciones de Contorno Neumann:

→ Si se da la derivada normal del potencial (componente normal del campo) en las Σ delimitadas

Yd que el potencial satisface la ec. de Poisson, uno ve que si satisfacemos las condiciones de Contorno, la solución es única

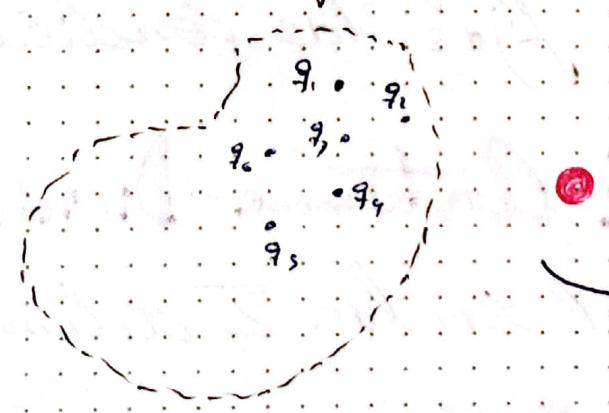
Idea Central: Crear un problema que satisfaga en alguna región las condiciones del problema real.

Problema real



$$\Phi_R = \Phi_q + \Phi_r$$

Problema ficticio



$$\Phi_f = \Phi_q + \Phi_{q_1} + \dots + \Phi_{q_n}$$

Φ_r Satisface $\Phi_r|_{\Sigma} = V$; $\Phi_r|_{\infty} = 0$

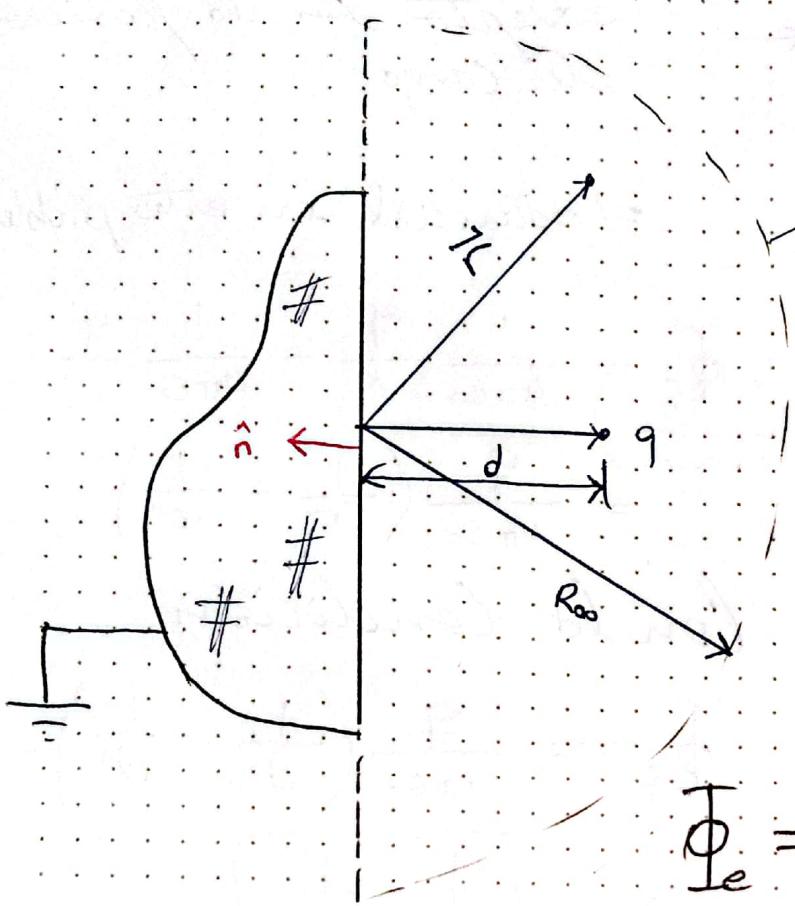
Φ_f Satisface (necesariamente) $\Phi_f|_{\Sigma} = V$

$$\Phi_f|_{\infty} = 0$$

* Para calcular demidades de carga desconocida

Ejemplo

Plano ∞



$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Podemos determinar la carga total inducida a partir del Teorema de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{R_0} \vec{E} \cdot \hat{n} da + \oint_{\text{Plano}} \vec{E} \cdot \hat{n} da = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{int} = 0$$

↑
no hay flujos

$$Q_{int} = q + q' = 0 \Rightarrow q' = -q$$

Imagen

Tenemos un problema con condiciones de Dirichlet

Problema real :

$$\Phi_k|_{\infty} = 0$$

$$\Phi_r|_{\infty} = 0$$

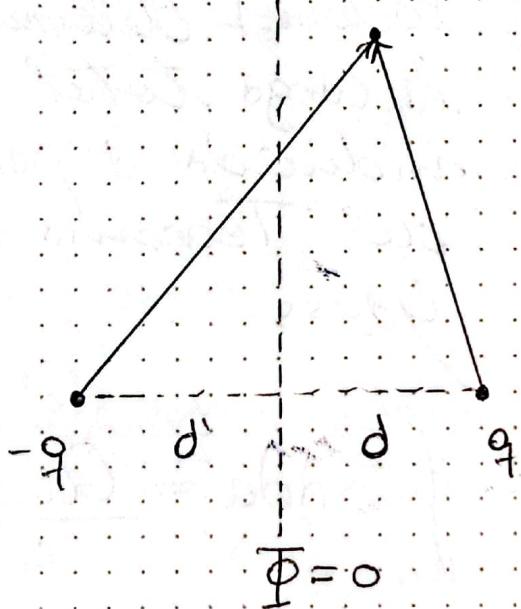
Además

$$\nabla^2 \Phi_R = 0 \quad \leftarrow$$

En la región de interior
excepto en la posición
de Carga

Problema ficticio

El potencial en este problema



$$\begin{aligned}\Phi_f &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r'} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)\end{aligned}$$

Con la Condición

$$\Phi_f = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d'} \right) = 0$$

$$d = d'$$

$$\Phi_f = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right]$$

El campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right]$$

Mientras que en el exterior $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$

Calculo de densidad de cargas inducidas

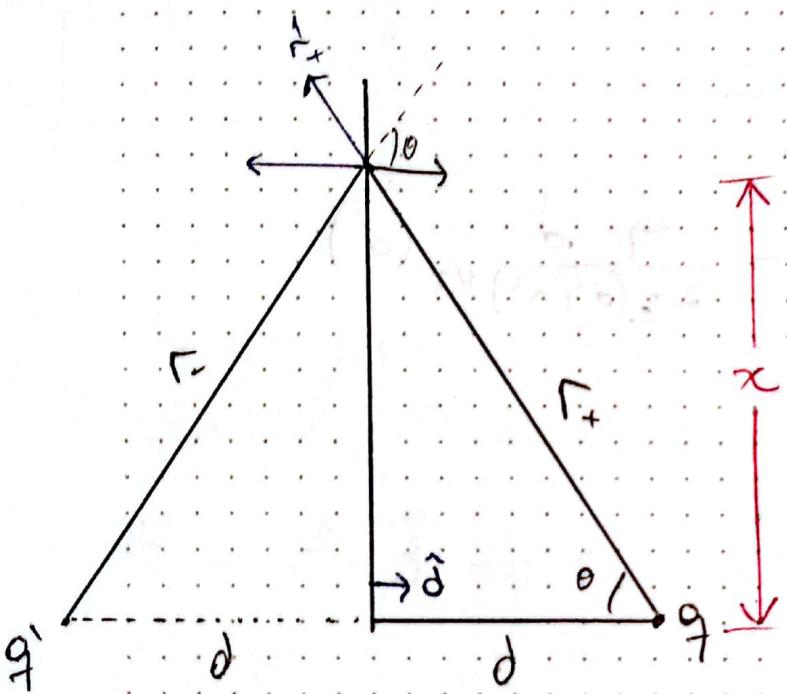
$$(\vec{E} - \vec{E}_{\text{ext}}) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$(\vec{E} - \vec{E}_{\text{ext}}) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{c}$$

$$\Rightarrow \Gamma_i = \epsilon_0 \vec{E} \Big|_{z=0} \cdot \hat{n}$$

$$\Gamma_i = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}$$

$$\Gamma_i = \epsilon_0 \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_+ \cdot \hat{n}}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_- \cdot \hat{n}}{r_-^3} \right) \right]$$



$$\text{En } \Sigma: r_+ = r_- = r$$

$$\vec{r}_+ \cdot \hat{n} = -r \cos \theta$$

$$\vec{r}_- \cdot \hat{n} = r \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$\Gamma_i = -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{r \cos \theta}{r^3} + \frac{r \cos \theta}{r^3} \right) = -\frac{q}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\boxed{\Gamma_i = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}}}$$

¿Cuál es la fuerza ejercida por el plano sobre la carga puntual?

→ Basta calcular la fuerza entre la carga y su carga imagen

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{(2d)^2} (\hat{d}) = \frac{1}{16\pi G_0} \frac{q^2}{d^2} (-\hat{d})$$

$$V_i = -\frac{q}{4\pi} \frac{d}{(d^2+x^2)^{3/2}} \quad \vec{E} = ?$$

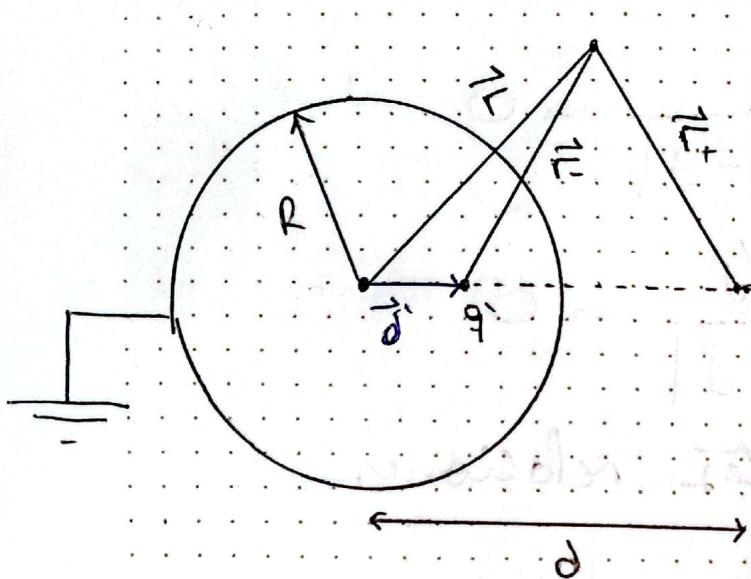
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\alpha} = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{6}{\epsilon_0} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2+x^2)^{3/2}} (\hat{d})$$

Clase #15

19/04/23

Carga puntual frente a una esfera de radio R conductor. Conectada a Tierra.



i) Determine el potencial para $r > R$

ii) Determinar la densidad de carga inducida

Carga ficticia $q' > 0$, ya que la Σ este a potencial Cero. $q' > 0$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{d} \Rightarrow r = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\alpha} = |\vec{r} - \vec{d}|$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d} \Rightarrow r' = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\alpha} = |\vec{r} - \vec{d}|$$

$$\therefore \Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{d}|} + \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{d}|} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|rr'-dd'|} + \frac{q'}{|rr'-dd'|} \right]$$

Condición de Contorno: $\Phi(r) = 0$

$$\Rightarrow \frac{q}{|R\hat{r} - d\hat{d}|} + \frac{q'}{|R\hat{r}' - d'\hat{d}'|} = 0$$

$$\frac{q}{R|\hat{r} - \frac{d\hat{d}}{R}|} + \frac{q'}{d|\frac{R\hat{r} - \hat{d}}{d'}|} = 0$$

$$\frac{q/R}{|\hat{r} - \frac{d\hat{d}}{R}|} + \frac{q'/d'}{|\frac{R\hat{r} - \hat{d}}{d'}|} = 0$$

Tenemos las sgtes relaciones

i) $\frac{q}{R} = -\frac{q'}{d'}$

ii) $\frac{d}{R} = \frac{R}{d'} \Rightarrow \boxed{d' = \frac{R^2}{d}}$

y de i)

$$q' = -\frac{q}{R} \cdot d'$$

$$q' = -\frac{q}{R} \cdot \frac{R^2}{d} \Rightarrow \boxed{q' = -\frac{R}{d} q < 0}$$

• Reemplazando en

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|R\hat{r} - d\hat{d}|} + \frac{q'}{|R\hat{r}' - d'\hat{d}'|} \right]$$

$$\therefore \Phi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|r\hat{r}-d\hat{d}|} - \frac{R/d}{|r\hat{r}-\frac{R^2}{d}\hat{d}|} \right] & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

El campo eléctrico $\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r\hat{r}-\vec{r}'\hat{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q(r\hat{r}-d\hat{d})}{|r\hat{r}-d\hat{d}|^3} - \frac{q'(r\hat{r}-d'\hat{d}')}{|r\hat{r}-d'\hat{d}'|^3} \right]$$

$$\text{Con } q' = -\frac{R}{d}q \quad \text{y} \quad d' = \frac{R^2}{d}$$

$$\therefore \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r\hat{r}-d\hat{d}}{|r\hat{r}-d\hat{d}|^3} - \frac{R/d(r\hat{r}-\frac{R^2}{d}\hat{d})}{|r\hat{r}-\frac{R^2}{d}\hat{d}|^3} \right] & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

La fuerza de atracción

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\vec{d}-\vec{d}'|^3} (\vec{d}-\vec{d}') = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{d}-\vec{d}'|^2} \vec{d}'$$

$$\text{Con } q' = -\frac{R}{d}q \quad \text{y} \quad d' = \frac{R^2}{d}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{q(-\frac{R}{d}q)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(\vec{d}-\frac{R^2}{d}\vec{d})^2} = \frac{q^2 \left(\frac{R}{d}\right) (\vec{d})}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{d^2-R^2}{d}\right)^2} = \frac{q^2 (R/d)}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{d^2} (\vec{d}^2 - R^2)}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R/d}{(\vec{d}^2 - R^2)^2}$$

Densidad Superficial de Cargas

$$\Gamma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_R = -\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dr} \Big|_R$$

$$= -\epsilon_0 \left[\frac{d}{dr} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_-} \right] \right]$$

$$= -\frac{q}{4\pi} \left[-\frac{r'_+}{r_+^2} + \frac{R/d'r'_-}{r_-^2} \right]_{r=R}$$

$$* \Gamma'_+ \Big|_R = \frac{dr_+}{dr} \Big|_R = \frac{1}{2} (r^2 + d^2 - 2rd\cos\alpha)^{-1/2} (2r - 2d\cos\alpha) \Big|_R$$

$$* \Gamma'_- \Big|_R = \frac{dr_-}{dr} \Big|_R = \frac{1}{2} (r^2 + d'^2 - 2rd'\cos\alpha)^{-1/2} (2r - 2d'\cos\alpha) \Big|_R$$

$$\Gamma'_+ \Big|_R = \frac{2(r - d\cos\alpha)}{2\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\alpha}} \Big|_R = \frac{R - d\cos\alpha}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha}}$$

$$\Gamma'_- \Big|_R = \frac{2(r - d'\cos\alpha)}{2\sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd'\cos\alpha}} \Big|_R = \frac{R - d'\cos\alpha}{\sqrt{R^2 + d'^2 - 2Rd'\cos\alpha}}$$

$$= \frac{R - \frac{R^2}{d}\cos\alpha}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2RR^2\cos\alpha}} = \frac{R - R^2/d\cos\alpha}{\Gamma'_- \Big|_R}$$

$$\therefore \Gamma = -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{R - d\cos\alpha}{(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha)^{1/2}} + \frac{R/d(R - R^2/d\cos\alpha)}{(R^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2R^3\cos\alpha)^{1/2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & * \left(R^2 + \frac{R^4}{d^2} - \frac{2R^3}{d} \cos\alpha \right)^{3/2} \\
 & = \left(\frac{R^2}{d^2} d^2 + \frac{R^2}{d^2} R^2 - \frac{R^2}{d^2} 2Rd \cos\alpha \right)^{3/2} \\
 & = \left[\frac{R^2}{d^2} (d^2 + R^2 - 2Rd \cos\alpha) \right]^{3/2} = \frac{R^3}{d^3} (d^2 + R^2 - 2Rd \cos\alpha)^{3/2}
 \end{aligned}$$

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{R - d \cos\alpha}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos\alpha)^{3/2}} + \frac{R/d(R - R^2/d \cos\alpha)}{(R/d)^3(d^2 + R^2 - 2Rd \cos\alpha)^{3/2}} \right]$$

$$= -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{(d^2 + R^2 - 2Rd \cos\alpha)^{3/2}} \left[d \cos\alpha + R + \frac{d^2}{R^2} \left(R - \frac{R^2}{d} \cos\alpha \right) \right]$$

$$= -\frac{q}{4\pi (d^2 + R^2 - 2Rd \cos\alpha)^{3/2}} \left[d \cos\alpha + R + \frac{d^2}{R} - d \cos\alpha \right]$$

$$= -\frac{q}{4\pi (d^2 + R^2 - 2Rd \cos\alpha)^{3/2}} \left[\frac{R^2 + d^2}{R} \right]$$

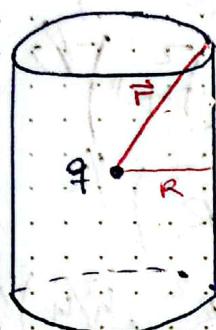
$$\boxed{\sigma = -\frac{q (R^2 + d^2)}{4\pi R (d^2 + R^2 - 2Rd \cos\alpha)^{3/2}}}$$

Carga total?

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\alpha) R^2 \sin\alpha d\alpha d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\alpha) R^2 \sin\alpha d\alpha \\
 &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sigma(\alpha) \sin\alpha d\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{-q(d^2 - R^2) \sin \alpha}{4\pi R(d^2 + R^2 - 2dR \cos \alpha)^{3/2}} d\alpha \\
 & = \frac{qR(d^2 - R^2)}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha}{(d^2 + R^2 - 2dR \cos \alpha)^{3/2}} d\alpha \\
 \Rightarrow & u = d^2 + R^2 - 2dR \cos \alpha \\
 du = & 2dR \sin \alpha d\alpha \Rightarrow \sin \alpha d\alpha = \frac{du}{2dR} \\
 u(0) = & d^2 + R^2 - 2dR = (d-R)^2 \\
 u(\pi) = & d^2 + R^2 + 2dR = (d+R)^2 \\
 & = \frac{qR(d^2 - R^2)}{2} \int_{(d-R)^2}^{(d+R)^2} u^{-3/2} \cdot \frac{du}{2dR} \\
 & = -\frac{q(d^2 - R^2)}{4d} \left[-2u^{-1/2} \right]_{(d-R)^2}^{(d+R)^2} \\
 & = \frac{q(d^2 - R^2)}{2d} \left\{ \frac{1}{d+R} - \frac{1}{d-R} \right\} \\
 & = \frac{q(d^2 - R^2)}{2d} \left\{ \frac{d-R - d+R}{(d^2 - R^2)} \right\} = \frac{q}{2d} \left\{ -2R \right\} \\
 & = -\frac{qR}{d} = \boxed{\frac{q!}{1}}
 \end{aligned}$$

A. (a) Un cilindro circular de radio R y altura h tiene una carga q en su centro. Encuentre el flujo lateral. Analice los casos $h \rightarrow 0$ y $h \rightarrow \infty$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$da = R d\phi dz$$

$$\hat{n} = \hat{r}$$

Coordenadas Cilíndricas $z = h/2$

$$\hat{r} = s\hat{s} + z\hat{k}$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\hat{r} = \frac{R\hat{s} + z\hat{k}}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-h/2}^{h/2} \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(R\hat{s} + z\hat{k})}{\sqrt{R^2 + z^2}} da$$

$$= \frac{2\pi R^2 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = R \tan x \\ dz = R \sec^2 x dx \\ x(z=0) = 0; x(h/2) = \tan^{-1}(h/2R) = x_1 \end{array} \right\}$$

$$\Phi_e = \frac{R^2 q}{2\epsilon_0} \int_0^{x_1} \frac{R \sec^2 x dx}{(R^2 + R^2 \tan^2 x)^{3/2}} = \frac{R^3 q}{2\epsilon_0} \int_0^{x_1} \frac{\sec^2 x dx}{R^3 (1 + \tan^2 x)^{3/2}}$$

$$= \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^{x_1} \frac{\sec x dx}{\sec^3 x} = \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^{x_1} \cos x dx$$

$$= \frac{q}{2\epsilon_0} \sin x ; \tan x = \frac{z}{R} \rightarrow \sin x = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\boxed{\Phi_e = \frac{q}{2\epsilon_0} \frac{h/2}{\sqrt{h^2/4 + R^2}}}$$

$$h \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad h \rightarrow \infty$$

$$f(h/2) = \frac{h/2}{\sqrt{h^2/4 + R^2}}$$

$$h/2 \left(h^2/4 + R^2 \right)^{-1/2}$$

$$h/2 \left(\frac{h^2}{4R^2} R^2 + R^2 \right)^{-1/2}$$

$$h/2 \left(R^2 \left(\frac{h^2}{4R^2} + 1 \right) \right)^{-1/2}$$

$$h/2 \frac{1}{R} \left(\frac{h^2}{4R^2} + 1 \right)^{-1/2}$$

$$h/2 \frac{1}{R} \left(\left(\frac{h}{2R} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2}$$

$$h/2 \left(\frac{h^2}{4} + R^2 \right)^{-1/2}$$

$$h/2 \left(\frac{h^2}{4} + \frac{R^2}{h^2/4} \cdot h^2/4 \right)^{-1/2}$$

$$h/2 \left(\frac{h^2}{4} \left\{ 1 + \frac{4R^2}{h^2} \right\} \right)^{-1/2}$$

$$h/2 \frac{2}{h} \left\{ 1 + \frac{4R^2}{h^2} \right\}^{-1/2}$$

$$\left\{ 1 + \left(\frac{2R}{h} \right)^2 \right\}^{-1/2}$$

$$\approx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4R^2}{h^2} \right)$$

(b) El potencial medio temporal de un átomo de hidrógeno neutro viene dado por

$$\Phi = \frac{qe^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\alpha r}{a}\right)$$

en donde q es la Carga electrónica, y $\alpha = \frac{q}{a}$ (a_0 es el radio de Bohr). Encuentre la distribución de Carga que dará lugar a este potencial e interprete el resultado final.

$$\Phi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a \alpha^3}; \quad \Phi = \frac{\Phi_0}{\alpha} f(r) g(r); \quad f(r) = e^{-\alpha r} \\ g(r) = \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

* \oplus ; * $\nabla^2(fg) = (\nabla^2 f)g + 2(\vec{\nabla}f) \cdot (\vec{\nabla}g) + (\nabla^2 g)f$

$$\rightarrow \nabla^2 f = \nabla^2 e^{-\alpha r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{de^{-\alpha r}}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (-\alpha r^2 e^{-\alpha r}) \\ = \frac{1}{r^2} \left\{ -2r\alpha e^{-\alpha r} + \alpha^2 r^2 e^{-\alpha r} \right\} \\ = -\frac{\alpha}{r^2} \left\{ -\alpha r^2 e^{-\alpha r} + 2r e^{-\alpha r} \right\} \\ = \alpha^2 e^{-\alpha r} - \frac{2\alpha e^{-\alpha r}}{r} = 2\alpha e^{-\alpha r} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{r} \right) \\ \therefore (\nabla^2 f)g = 2\alpha e^{-\alpha r} \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{r^2} \right)$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{d}{dr} e^{-\alpha r} \hat{r} = -\alpha e^{-\alpha r} \hat{r}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} g = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) \hat{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r}$$

$$\therefore (\vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} g) = \frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r^2}$$

$$\rightarrow \nabla^2 g = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$$

$$\therefore (\nabla^2 g)_f = (-4\pi \delta(\vec{r})) \cancel{e^{-\alpha r}} \rightarrow 0 \text{ en todos los puntos menores que } r=1$$

$$e^{-\alpha} = 1$$

$$= -4\pi \delta(\vec{r})$$

* Ecuación de Poisson $\rightarrow \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\nabla^2 \Phi = \left[\frac{\alpha^3 e^{-\alpha r}}{2} - \frac{2\alpha e^{-\alpha r}}{r^2} + \frac{2\alpha e^{-\alpha r}}{r^2} - 4\pi \delta(\vec{r}) \right] \frac{\Phi}{\alpha} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \epsilon_0 \frac{\Phi_0}{\alpha} \left[4\pi \delta(\vec{r}) - \frac{\alpha^3 e^{-\alpha r}}{2} \right]$$

$$= \cancel{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \alpha} \left[4\pi \delta(\vec{r}) - \frac{\alpha^3 e^{-\alpha r}}{2} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi} \left[4\pi \delta(\vec{r}) - \frac{\alpha^3 e^{-\alpha r}}{2} \right]$$

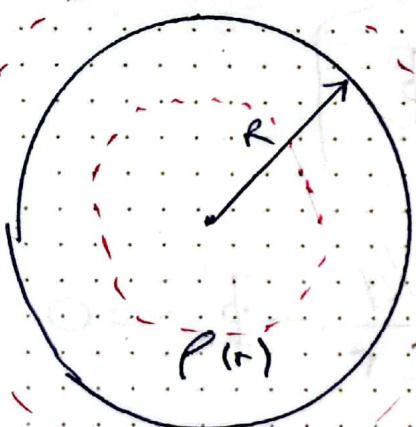
$$\therefore \rho_{(r)} = \underbrace{q \delta(\vec{r})}_{\substack{\text{Protón} \\ r=0}} - \underbrace{\frac{q \alpha^3 e^{-\alpha r}}{8\pi}}_{\substack{\text{electrón en } 1s}}$$

2- Una esfera de radio R tiene una Carga (+), cuya densidad volumétrica sólo depende de la distancia r hasta su centro según la ley $\rho = \rho_0 (1 - r/R)$, $\rho_0 = \text{cte}$. Calcular

(a) el campo eléctrico y el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera en función de r

(b) el valor máximo de la intensidad E_m y la distancia r_m que le corresponde

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$



$$\oint_{\text{SG}} \vec{E} \cdot \hat{n} da = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

$$R_1 | 0 \leq r \leq R \Rightarrow Q_{\text{in}} = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

$$\int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \int_0^r \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) dr = 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{3}{4} \frac{r^2}{R}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{3}{4} \frac{r^2}{R}\right) \hat{r}}$$

$$R_2 | R < r < \infty \quad Q_{\text{in}} = 4\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4}\right)$$

$$= 4\pi \rho_0 \frac{R^3}{12} = \frac{\pi \rho_0 R^3}{3}$$

$$Q_{in} = \frac{Q_0}{4}, \quad Q_0 = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{4r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \frac{Q_0/4}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

Potencial

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\frac{d\Phi}{dr} \hat{r} \Rightarrow \Phi = - \int \vec{E} \cdot dr + \Phi_0$$

$$\Phi_1 = - \int E_1 dr + \Phi_0 = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int \left(r - \frac{3}{4} \frac{r^2}{R}\right) dr + \Phi_0$$

$$\boxed{\Phi_1 = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{4R} \right) + \Phi_0}$$

$$\Phi_2 = - \int \vec{E}_2 dr + \Phi_0' = \frac{Q_0/4}{4\pi\epsilon_0 r} + \Phi_0' = 0$$

$$(\Phi \rightarrow 0 \text{ con } r \rightarrow \infty)$$

$$\Phi_1(R) = \Phi_2(R)$$

$$-\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{4} + \Phi_0 = \frac{Q_0/4}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\boxed{\Phi_0 = \frac{Q/4}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{4}}$$

$$b) E_i = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{3}{4} \frac{r^2}{R} \right)$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial r} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r}{R} \right) \Big|_{r=r_m} = 0$$

$$\frac{3}{2} \frac{r_m}{R} = 0 \Rightarrow r_m = \frac{2}{3} R$$

$$E_m = E_i(r_m) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{2}{3} R - \frac{3}{4} R \cdot \left(\frac{2}{3} R \right)^2 \right)$$

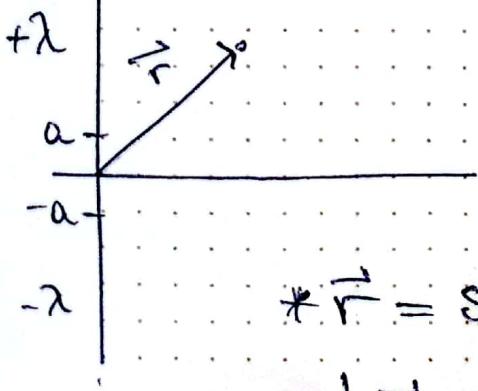
$$\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{2}{3} R - \frac{3}{4} R \cdot \frac{4}{9} R^2 \right) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{2}{3} R - \frac{R}{3} \right)$$

$$E_m = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0}$$

3- Una líne de Carga larga y recta con una carga λ por unidad de longitud se extiende a lo largo del eje z desde a hasta ∞ . Se coloca otra líne de carga con $-\lambda$ a lo largo del eje $-z$ desde $-a$ hasta $-\infty$.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_a^\infty \frac{\lambda dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_a^{-\infty} \frac{(-\lambda)dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_a^\infty \frac{dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \int_{-a}^0 \frac{dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]$$



$$*\vec{r} = s\hat{s} + z\hat{k}; \vec{r}' = z'\hat{k}; dl' = dz'$$

$$* |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(z-z')^2 + s^2}$$

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_a^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + s^2}} - \int_{-\infty}^a \frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + s^2}} \right]$$

$$I_1 = \int_a^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + s^2}}$$

$(z-z') = u \Rightarrow (z-z')^2 = u^2$
 $-dz' = du$
 $u(a) = z-a$
 $u(\infty) = 0$

$$\int_{z-a}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2 + s^2}}$$

$\begin{cases} u = s \operatorname{tg} x & u(z-a) = s \operatorname{tg}(z-a) \\ du = s \sec^2 x dx & \frac{z-a}{s} = \operatorname{tg} x \end{cases}$
 $u(\infty) = \pi/2 \quad x = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{z-a}{s} \right)$

$$\int_{x}^{\pi/2} \frac{s \sec^2 x dx}{\sqrt{s^2 \operatorname{tg}^2 x + s^2}} = \int_x^{\pi/2} \frac{s \sec^2 x dx}{s \sec x} = \int_x^{\pi/2} \sec x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \left(\frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \right) dx \quad \begin{cases} C = \sec x + \operatorname{tg} x \\ dc = \sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x dx \\ C(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

$$C(x) = \sqrt{(x-a)^2 + s^2} + \frac{z-a}{s}$$

$$* \sec \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{z-a}{s} \right) \right) = \frac{\sqrt{(z-a)^2 + s^2}}{s}$$

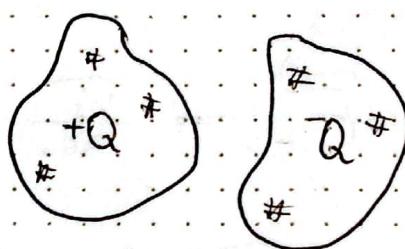
$$\int_0^{\infty} \frac{dc}{c} = \ln c \Big|_T^{\infty} = \boxed{-\ln \left| \frac{\sqrt{(z-a)^2 + s^2} + z-a}{s} \right|}$$

25/04/23

Clase #17

26 Condensadores

→ Sistemas de conductores cargados que permiten almacenar energía eléctrica, por medio de la acumulación de electricidad.



$$\vec{E} = \text{nulo} \Rightarrow \vec{\Phi} = \text{cte}$$

Dos conductores se cargan con $\pm Q$ y ya que cada conductor está a potencial cte, la diferencia de potencial también lo es

$$\Delta \Phi = \Phi_+ - \Phi_- = - \int_{(-)}^{(+)}) \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Definimos la capacitancia (capacidad) como:

$$C = \frac{Q}{\Delta \Phi}$$

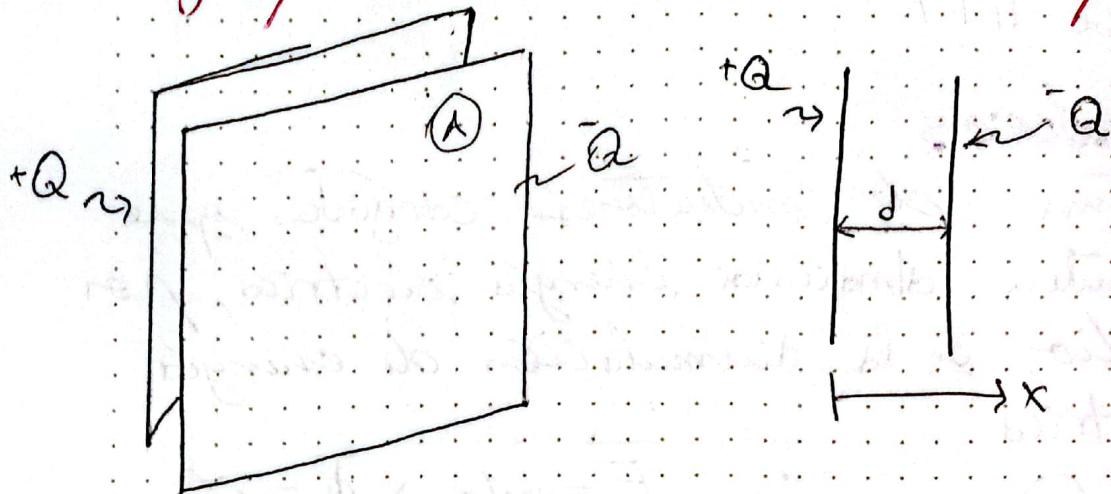
C es una cantidad puramente geométrica que depende de la forma y de las dimensiones de los conductores

SI

$\sim 10^{-8}, 10^{-6}, 10^{-3}$

$$[C] = \frac{F}{V} = F [Farad]$$

Ejemplo 1: Condensador de placas paralelas



$$\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i} ; \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}$$

$$\Delta \Phi = - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_d^0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} dk$$

$$\Delta \Phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d ; \sigma = \frac{Q}{A}$$

$$\Delta \Phi = \frac{Q \cdot d}{\epsilon_0 \cdot A} \rightarrow C = \frac{Q}{\Delta \Phi} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

La energía potencial

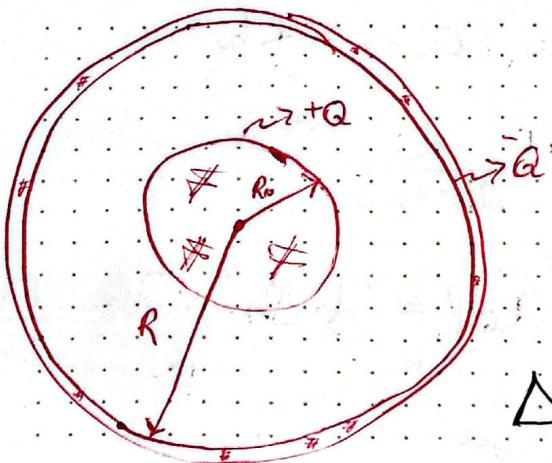
$$W = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta \Phi = \frac{1}{2} C (\Delta \Phi)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

En este caso

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot \frac{Q^2 \cdot d^2}{\epsilon_0^2 \cdot A^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cdot d}{\epsilon_0 \cdot A}$$

Ejemplo 2 Condensador esférico

campo en el interior del sistema



Entre $R_1 < r < R_2$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$\Delta\Phi = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}; \quad d\vec{l} = dr \hat{r}$$

$$\Delta\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

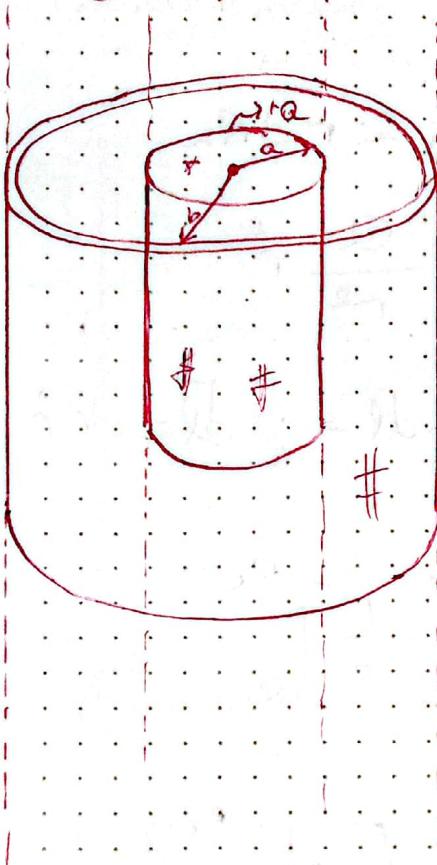
Luego

$$C = \frac{Q}{\Delta\Phi} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

La energía potencial almacenada

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$

Ejemplos: Condensador Cilíndrico



Entre $a < s < b$

$$-\lambda \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

$$i) Q = \int \lambda dl = \lambda \cdot \Delta h \rightarrow \lambda = \frac{Q}{\Delta h}$$

$$ii) \Delta \Phi = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad d\vec{r} = ds \hat{s}$$

$$= \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} ds = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta h} \left[\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta h} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}}$$

Capacidad por
unidad de
largo

La energía potencial (por unidad de largo)

$$\boxed{W = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta \Phi = \frac{1}{\Delta h} \left[\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]}$$

$$\boxed{\overline{W} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

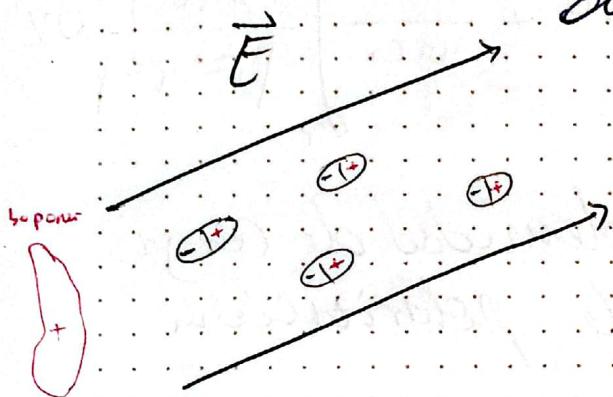
Dielectricos

no hay mov de Q

Polarización

27

Fenómeno de ordenamiento
y orientación de dipolos
eléctricos en el interior
de un medio dieléctrico



Dielectricos

medios disolutores en los
cuales los efectos de
polarización son apreciables

Desde el punto de vista macroscópico, un dielectro se puede visualizar como una distribución de dipolos eléctricos en el vacío

Campo eléctrico de red distibución
Volumétrica de dipolos eléctricos en
el vacío

Def Vector polarización

\vec{P} : ²⁸ momento
dipolar por
volumen

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V} = \frac{d \vec{P}}{d V}$$

El potencial eléctrico

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{V_p(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{P_p(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$: densidad de cargas de polarización

$P_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ densidad de cargas ligadas

El campo eléctrico resulta:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{P_p(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

La carga total de polarización

$$Q_p = \int_S V_p(\vec{r}') da' + \int_V P_p(\vec{r}') dv'$$

$$= \int_s \vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n} d\alpha' - \int_V \vec{r} \cdot \vec{P}(\vec{r}) dV$$

Clase #18

26/04/23

Def Desplazamiento eléctrico ²⁸

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Las ecuaciones diferenciales en un medio dielectrónico

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

En medios isotrópicos, \vec{E} / \vec{P}

$$\vec{P} = \alpha \vec{E} ; \alpha \text{ polarizabilidad}^{29} \text{ (propia de cada medio)}$$

(cantidad empírica)

Por otro lado definimos la susceptibilidad eléctrica, χ_e , por medio de la relación ³¹

$$\alpha = \epsilon_0 \chi_e$$

$$\text{y así: } \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

entonces decimos que el vector del desplazamiento eléctrico es

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \end{aligned}$$

La constante dielectrica

$$K_e = 1 + \chi_e$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 K_e \vec{E}$$

Finalmente, definimos la permitividad electrica del medio dielectrico

$$\epsilon = \epsilon_0 K_e$$

y con esto

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$$

En muchos casos ϵ es cte

Teorema de Gauss para medios dielectricos

$$\oint_{SG} \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q_{int}$$

Nota: En Q_{int} quedan excluidas las cargas de polarizacion, es decir, solo considera las cargas libres

Las condiciones de contorno son ahora

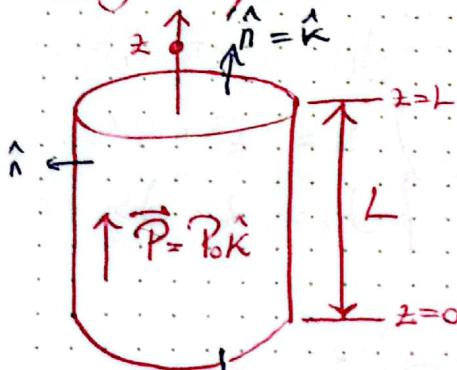
i) $\Delta D_n = \sigma$ (σ libre)

ii) $\Delta D_t = 0$

La densidad de energía (energía por unidad de volumen)

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E$$

* Ejemplo 1 ¿Cuánto vale el potencial en z?



$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p d\alpha'}{|r - r'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p dv'}{|r' - r|}$$

Necesitamos Conocer $\sigma_p + \rho_p$

i) $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} P_0 = 0$

ii) $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$

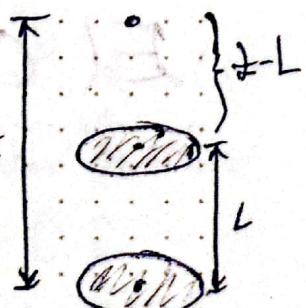
iiia) σ_p en el manto es cero ya que
 $\vec{P} \perp \hat{n} = \hat{s}$

iiib) En la base inferior, $\hat{n} = -\hat{k}$

$$\therefore \sigma_{p_1} = (P_0 \hat{k}) \cdot (-\hat{k}) = -P_0$$

iiic) En la base superior, $\hat{n} = \hat{k}$

$$\therefore \sigma_{p_2} = (P_0 \hat{k}) (\hat{k}) = P_0$$



$$\Phi(z) = \Phi_{b1} + \Phi_{b2}$$

$$\Phi(z) = \Phi_{b1}(z) + \Phi_{b2}(z-L)$$

$$\Phi_{b1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_A da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad ; \quad \begin{aligned} \vec{r} &= z\hat{k} \\ \vec{r}' &= s'\hat{s}' \\ da' &= 2\pi s' ds' \end{aligned}$$

$$\Phi_{b1}(z) = \frac{(-P_o) \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{s' ds'}{\sqrt{z^2 + s'^2}} \quad ; \quad \begin{cases} u = z^2 + s'^2 \\ du = 2s' ds \end{cases}$$

$$= \frac{(-P_o) 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{1}{2} \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{(-P_o)}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - z \right]$$

$$\Phi_{b2}(z-L) = \frac{P_o}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z-L)^2 + R^2} - (z-L) \right]$$

$$\therefore \Phi(z) = \frac{P_o}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z-L)^2 + R^2} - (z-L) - \sqrt{z^2 + R^2} + z \right]$$

$$= \frac{P_o}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z-L)^2 + R^2} - \sqrt{z^2 + R^2} + L \right]$$

El campo eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dz}\hat{k}$$

$$\frac{d}{dz} \left[((z-L)^2 + R^2)^{1/2} - (z^2 + R^2)^{1/2} \right] (-\hat{k})$$

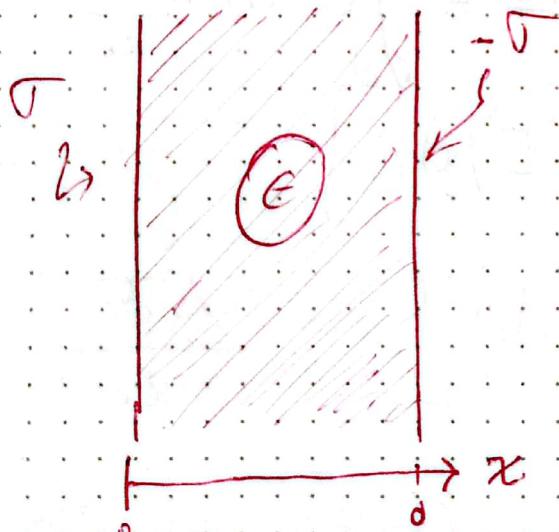
$$\frac{d}{dz} \left[(z^2 - 2zL + L^2)^{1/2} - (z^2 + R^2)^{1/2} \right] (-\hat{k})$$

$$\frac{1}{2} (z^2 - 2zL + L^2) \cdot (2z - 2L) - \frac{1}{2} (z^2 + R^2) \cdot (2z)$$

$$\frac{z - L}{\sqrt{z^2 - 2zL + L^2 + R^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{P_0}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + R^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right\} (-\hat{k})$$

Condensador Plano

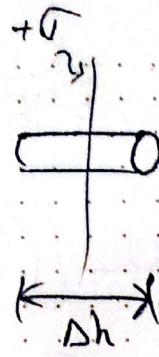


Desarrollamos determinar como cambia el campo eléctrico, la diferencia de potencial eléctrico, la capacidad y la energía al introducir un dielectrónico de $\epsilon = \text{cte}$

- i) El campo eléctrico es normal a las placas $\Rightarrow \vec{E} = E\hat{i}$, y así también lo será el vector desplazamiento $\vec{D} = D\hat{i}$

Teorema de Gauss

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{in} = \nabla A$$



$$DA = \nabla A \Rightarrow D = \nabla$$

$$\therefore D = \epsilon E = \nabla \Rightarrow E = \frac{\nabla}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon}$$

$$E = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{\nabla}{\epsilon}$$

Pero $\frac{\epsilon_0}{\epsilon} = \chi_e$ $\wedge \epsilon_0 = \frac{\epsilon}{\epsilon}$

$$E = \frac{\epsilon_0}{\chi_e}$$

$$\text{ii}) \Delta \Phi = \Phi_+ - \Phi_- = - \int_0^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \cdot \frac{\chi_e}{\chi_e}$$

$$= \frac{1}{\chi_e} \left[- \int_0^{\infty} (\chi_e \vec{E}) \cdot d\vec{r} \right]$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\chi_e} \left[- \int_0^{\infty} \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} \right] = \frac{\Delta \Phi}{\chi_e}$$

$$\text{iii}) C = \frac{Q}{\Delta \Phi} = \frac{Q}{\Delta \Phi_0 / \chi_e} = \chi_e \left(\frac{Q}{\Delta \Phi_0} \right)$$

$$= \chi_e C_0$$

$$\text{ir) } \boxed{U} = \frac{\partial w}{\partial V} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$$= \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E^2 \right)$$

$$\boxed{U} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{E_0^2}{\frac{1}{\epsilon}} \right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \right) = \frac{1}{\epsilon} \boxed{U}$$

Conclusiones en serie

Usando el resultado anterior

$$\vec{D} = D \hat{i}$$

Además, \vec{Q} libre en la Σ de separación entre los medios de manera \vec{D} es continuo ahí



$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \sigma \hat{i}$$

$$\therefore \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} \hat{i} \quad \wedge \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2} \hat{i}$$

$$\Delta \Phi = - \int_{d_1+d_2}^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{d_1+d_2}^{d_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} - \int_{d_1}^0 \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^{d_1} \vec{E}_1 \cdot \hat{i} dx + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 \cdot \hat{i} dx$$

$$\Delta \Phi = \left(\frac{\sigma d_1}{\epsilon_1} + \frac{\sigma d_2}{\epsilon_2} \right) \frac{A}{A} = \sigma A \left(\frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A} \right)$$

$$= Q \left(\frac{1}{\epsilon_1 A} + \frac{1}{\epsilon_2 A} \right)$$

Si $C_1 = \frac{\epsilon_1 A}{d_1}$ y $C_2 = \frac{\epsilon_2 A}{d_2}$, juntas

con $C = \frac{Q}{\Delta \Phi}$

Entonces $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

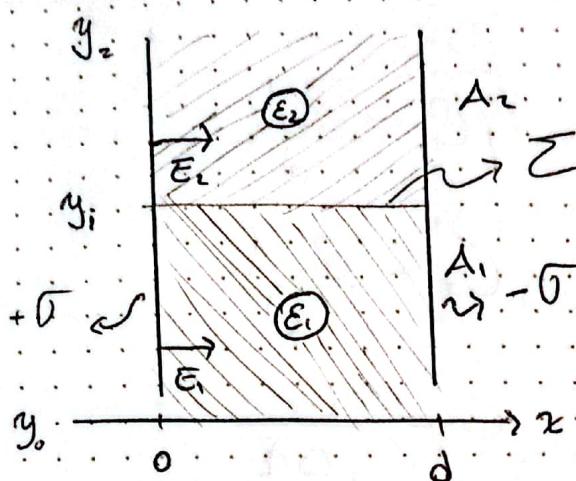
Generalizando a n dieléctricos

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

close #19 electro

02/05/2023

Condensadores en paralelo



i) Por simetría es normal
a las placas

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1 \hat{i} & 0 \leq y \leq y_1 \\ E_2 \hat{i} & y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

Ld. Condición de Contorno Sobre Σ

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad (\text{Continuidad de la componente tangencial})$$

Aca los campos son puramente tangenciales respecto a Σ , entonces

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1$$

$$\therefore \Delta \Phi = \Phi_0 - \Phi_d = - \int_A \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = - \int_A \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}$$

(Siempre del negativo al positivo)

$$\Rightarrow |E_1| = |E_2| = \frac{\Delta \Phi}{d}$$

Por otro lado, La ley de GAUSS

$$\oint_{S_6} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{\text{int}} \quad (\text{Incluye cargas libres no de polarización})$$

$$D = \epsilon E$$

$$D_1 A_1 + D_2 A_2 = Q_{\text{int}} = \sigma A_1 + \sigma A_2$$

$$\epsilon_1 E_1 A_1 + \epsilon_2 E_2 A_2 = Q$$

$$(\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2) E = Q \rightarrow (\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2) \frac{\Delta \Phi}{d} = 0$$

$$\frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d} = \frac{Q}{\Delta \Phi}; C_1 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$

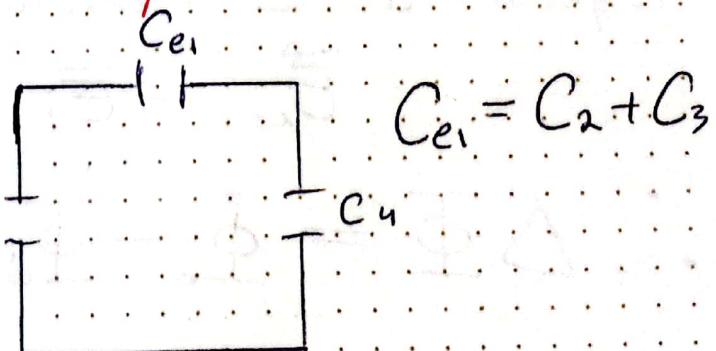
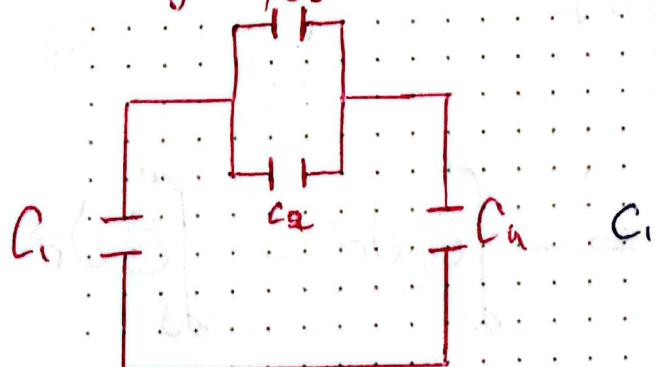
$$C = C_1 + C_2$$

$$C = \frac{Q}{\Delta \Phi}$$

Generalizando d n condensadores en paralelo

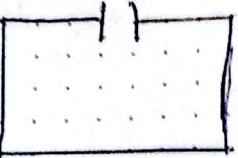
$$C = \sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i A_i}{d}$$

* Ejemplo : obtener la capacidad equivalente



$$C_1 \quad C_{e2} = C_{e1} + C_4 = C_2 + C_3 + C_4$$

$$\frac{1}{C_{e2}} = \frac{1}{C_2 + C_3} + \frac{1}{C_4}$$



$$C_{e3} = C_1 + C_2$$

$$\frac{1}{C_{e3}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2+C_3} + \frac{1}{C_4}$$

$$\frac{1}{C_{e3}} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1(C_2 + C_3)} + \frac{1}{C_4}$$

$$\frac{1}{C_{e3}} = \frac{C_4(C_1 + C_2 + C_3) + C_1(C_2 + C_3)}{C_1 C_4 (C_2 + C_3)}$$

$$C_{e3} = \frac{C_1 C_4 (C_2 + C_3)}{C_4 (C_1 + C_2 + C_3) + C_1 (C_2 + C_3)}$$

34 Corriente eléctrica

→ Consideremos Q en movimiento uniforme en medios que lo permiten (conductores, semi-conductores, dielectricos, etc). En general, los portadores serán e^- , pero también pueden ser iones.

Def:

La Q en movimiento constituye una Corriente, y el proceso por el cual se transporta se llama

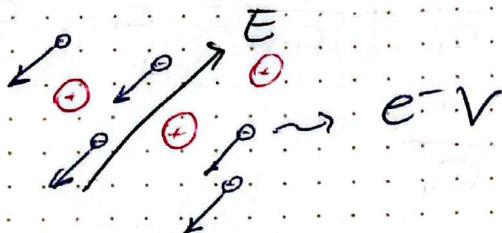
35 Conducción

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

donde $Q(t)$ es la carga neta transportada al tiempo t .

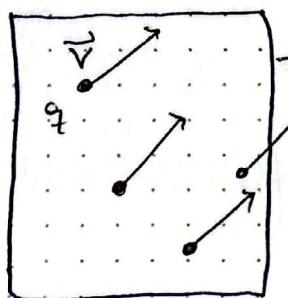
$$\text{En SI} \Rightarrow [I] = \frac{C}{A} = A; \text{Ampere}$$

De forma pictórica



36

Densidad de Corriente \vec{J} , y ecuación de Continuidad



\vec{v} : Velocidad

$$\rho = Nq$$

N : # de portadores por unidad de volumen

media de arrastre

En una unidad de tiempo cada portador recorre una distancia $\vec{v} \cdot \Delta t$

$$dI = \frac{S Q}{\Delta t} = q N \vec{v} \cdot \hat{n} \Delta t da$$

$$dI = N q \vec{v} \cdot \hat{n} da$$

Nota: Si \exists más de una especie de portadores

$$dI = \left(\sum_i N_i q_i \vec{v}_i \right) \cdot \hat{n} da$$

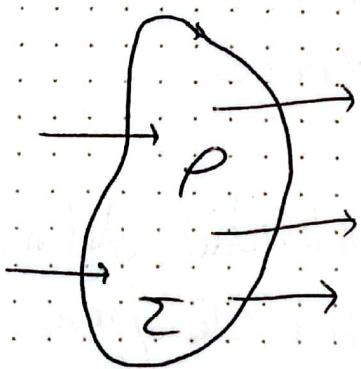
Def Densidad de Corriente

$$\overrightarrow{J} = \sum_i N_i q_i \vec{v}_i \quad [J] = \frac{A}{m^2}$$

Luego $\delta I = \overrightarrow{J} \cdot \hat{n} da$

$$I = \int_{\Sigma} \overrightarrow{J} \cdot da$$

Y dada que la Q eléctrica no se crea ni destruye, existe una relación entre \overrightarrow{J} y P en un volumen de control



la corriente que entra a V , encerrado por da Σ

$$I = - \oint_{\Sigma} \overrightarrow{J} \cdot da = - \int_V \nabla \cdot \overrightarrow{J} dv$$

Pero, $I = \frac{dQ}{dt} \sim \frac{d}{dt} \int_V P(\vec{r}) dv$

Si $P = P(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$

$$\Rightarrow I = \int_V \frac{\partial P}{\partial t} dv$$

Igualando ambas expresiones

$$I = - \int_v \nabla \cdot \vec{J} dv = \int_v \frac{\partial P}{\partial t} dv$$

y que el volumen es arbitrario

$$\therefore \boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0}$$

ecuación
de
Continuidad 37

Ley de Ohm

38

Empíricamente se encuentra que a temperatura constante, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico.

Aplicado

$$(*) \vec{J} = g \vec{E}$$

g: conductividad del medio
Suele ser cte puro en general $g = g(E)$

Cuando g es cte y satisface (*) hablamos de medios lineales o medios ohmicos

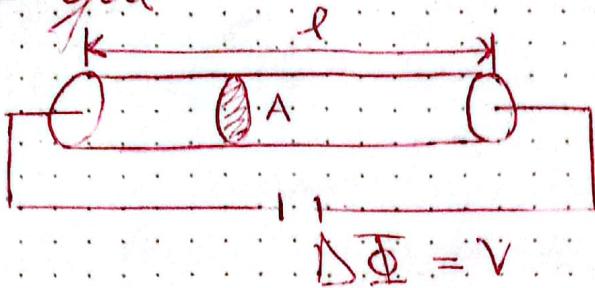
También se define la resistividad del medio

$$\rho = \frac{1}{g} \Rightarrow [\rho] = [V \cdot m]$$

Ω : dim

$$g = \frac{1}{\rho m}$$

Vedemos que



$$\Delta \Phi = \int_l E \cdot dr = El$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = JA$$

$$I = JA = (ge) A = g \left(\frac{V}{l} \right) A = \left(\frac{A}{\eta l} \right) V$$

Def: Resistencia eléctrica

$$R = \frac{\eta l}{A}$$

Luego tenemos que

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow V = IR$$

El trabajo que se realizó al mover una $Q dq$ en un diferencial de potencial

$$dw = V dq$$

$$\text{La potencia } P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Clase #20

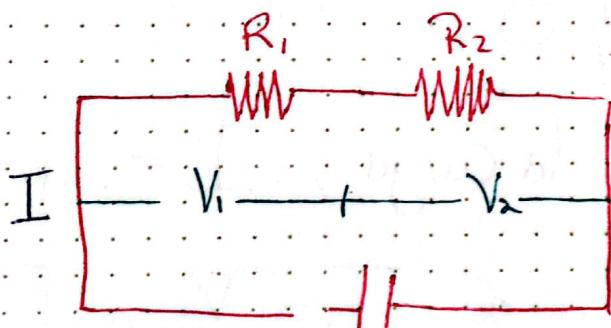
4o Redes de Resistencias y Leyes de Kirchhoff

Portadores se mueven bajo la acción de un campo eléctrico uniforme \rightarrow Corriente Continua

d. Traves de un circuito cerrado compuesto de varios brazos. Queremos estudiar, por ahora, circuitos compuestos de varias resistencias.

Existen 2 formas para conectar estas resistencias

4.2 Conexión en Serie:



$$\Delta\Phi = V$$

La intensidad de la corriente que pasa por R_1 y R_2 es la misma (no hay fuente ni sumidero de cargas). Además, tenemos que $V = V_1 + V_2$ (conservación de energía).

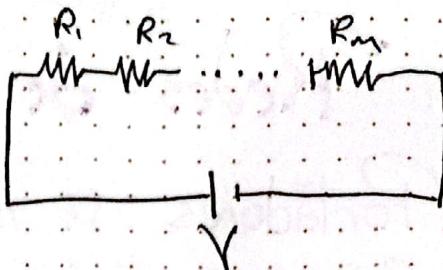
Ahora, $V_1 = IR_1$ y $V_2 = IR_2$

$$\therefore V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

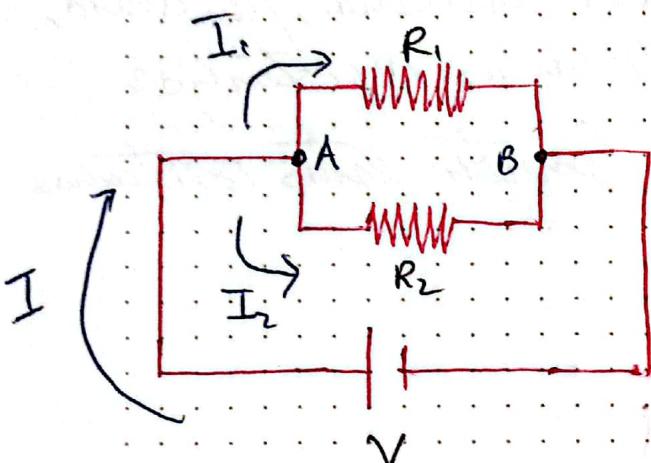
Si $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 \Rightarrow V = I R_{\text{eq}}$

Para m resistencias conectadas en serie

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^m R_i$$



Conexión en paralelo.



La diferencia de potencial entre a y b es V .

$$V = I_1 R_1 \wedge V = I_2 R_2$$

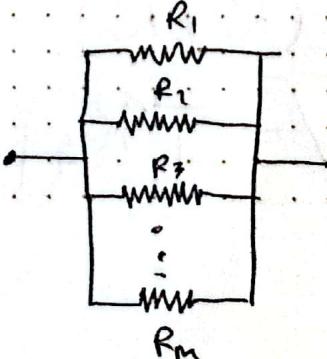
Por conservación de la carga, $I = I_1 + I_2$

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \wedge I_1 = \frac{V}{R_1} \wedge I_2 = \frac{V}{R_2}$$

$$\text{Luego, } I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{Si } \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow V = I R_{\text{eq}}$$

Para m Resistencias en paralelos $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{R_i}$



Def: u4 Nodo: Punto de un circuito donde concurren tres o más corrientes

u5 Malla: Trayectoria conductora cerrada en la red

Leyes de Kirchhoff.

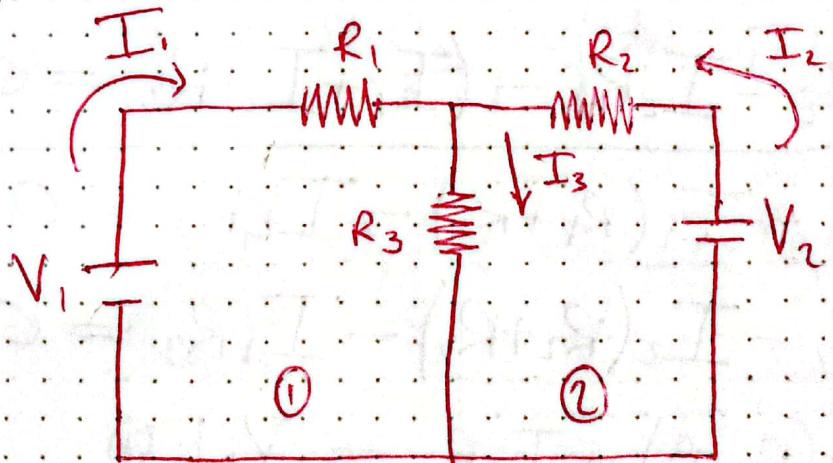
I- La suma algebraica de las corrientes que circulan hacia un nodo es cero

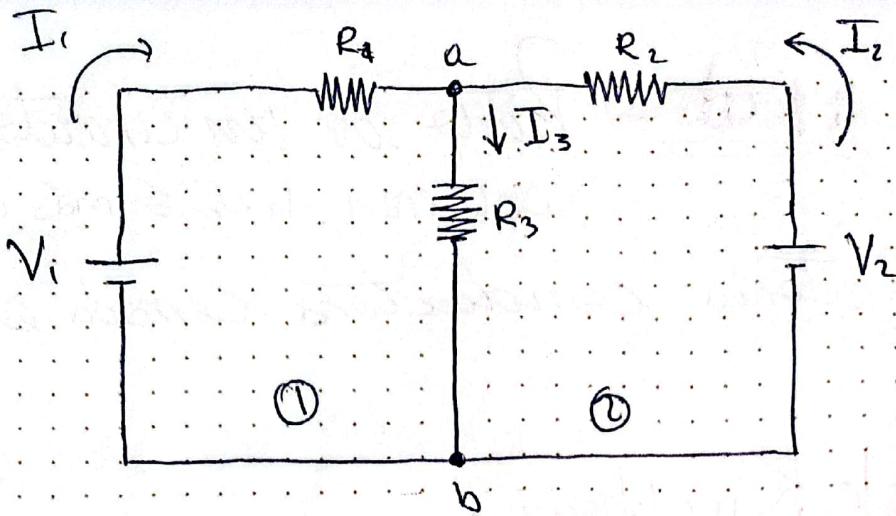
$$\sum_j I_j = 0 \quad (\text{en un nodo})$$

II- La suma algebraica de las diferencias de voltaje en cualquier malla de la red es cero

$$\sum_j V_j = 0 \quad (\text{en una malla})$$

* Ejemplo:





Malla 1: $V_b + V_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = V_b$
 (desde b)

$$\Rightarrow V_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \quad (1)$$

Malla 2: $V_b + V_2 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = V_b$
 (desde b)

$$V_2 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \quad (2)$$

Por la ley I: $I_3 = I_1 + I_2 \quad (3)$

i) Reemplazando (3) en (1) y (2)

$$V_1 - I_1 R_1 - (I_1 + I_2) R_3 = 0$$

$$V_2 - I_2 R_2 - (I_1 + I_2) R_3 = 0$$

$$V_1 - I_1 (R_1 + R_3) - I_2 R_3 = 0$$

$$V_2 - I_2 (R_2 + R_3) - I_1 R_3 = 0$$

$$I_1 (R_1 + R_3) + I_2 R_3 = V_1 \quad (4)$$

$$I_2 (R_2 + R_3) + I_1 R_3 = V_2 \quad (5)$$

(a) despejar I_1

$$I_2(R_2+R_3) + I_1 R_3 = V_2$$

$$I_1 = \frac{V_2}{R_3} - \left(\frac{R_2+R_3}{R_3} \right) I_2 \quad (a) \rightarrow (b)$$

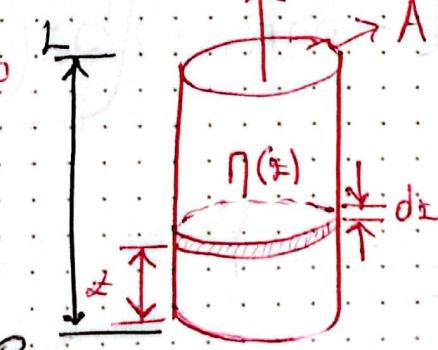
(b) $I_1(R_1+R_3) + I_2 R_3 = V_1$

$$(R_1+R_3) \left[\frac{V_2}{R_3} - \left(\frac{R_2+R_3}{R_3} \right) I_2 \right] + I_2 R_3 = V_1$$

$$\left(\frac{R_1+R_3}{R_3} \right) V_2 - \frac{(R_1+R_3)(R_3+R_2)}{(R_2+R_3)} I_2 + I_2 R_3 = V_1 \quad \begin{matrix} \text{Resistividad} \\ \text{eléctrica} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Resistividad} \\ \text{máx} \end{matrix}$$

$$R = \frac{\eta l}{A}$$

Ejemplo



$$dR = \frac{\eta(z) dz}{A} \quad | \int$$

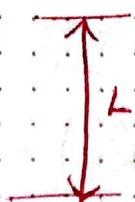
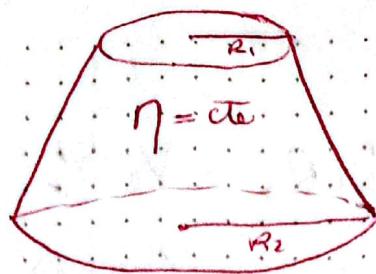
$$\eta(z) = \eta_0 \left(2 - \frac{z^2}{L^2} \right) ?$$

$$R = \frac{1}{A} \int_0^L \eta(z) dz = \frac{1}{A} \int_0^L \eta_0 \left(2 - \frac{z^2}{L^2} \right) dz$$

$$= \frac{\eta_0}{A} \int_0^L \left(2 - \frac{z^2}{L^2} \right) dz = \frac{\eta_0}{A} \left\{ 2 \int_0^L dz - \frac{1}{L^2} \int_0^L z^2 dz \right\}$$

$$= \frac{\eta_0}{A} \left\{ 2L - \frac{L^3}{3} \right\} \Rightarrow R = \frac{5}{3} \frac{\eta_0 L}{A}$$

Ejemplo



$$z = L$$

$$z = 0$$

En este caso $A = A(z)$

$$\left. \begin{array}{l} A = \pi r^2 \\ A_1 = \pi R_1^2 \\ A_2 = \pi R_2^2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} z = mr + b \\ 0 = mR_2 + b \\ L = mR_1 + b / (-1) \\ -L = m(R_2 - R_1) \end{array}$$

\rightarrow ~~z varía entre~~

$$r = \frac{z - b}{m}$$

$$m = -\frac{L}{R_2 - R_1} \Rightarrow b = mR_2 \Rightarrow b = \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) L$$

$$\Rightarrow A(z) = \pi r^2 = \frac{\pi}{m^2} (z - b)^2$$

$$dR = \frac{\eta_0 dz}{A(z)} = \frac{\eta_0 dz}{\frac{\pi}{m^2} (z - b)^2} = \frac{\eta_0 m^2 dz}{\pi (z - b)^2} \quad \left| \int_0^L \right.$$

$$R = \int_0^L \frac{\eta_0 m^2 dz}{\pi (z - b)^2} = \frac{\eta_0 m^2}{\pi} \int_0^L \frac{dz}{(z - b)^2} \quad \left| \begin{array}{l} u = z - b \\ du = dz \\ u(0) = -b \\ u(L) = L - b \end{array} \right.$$

$$-\frac{\eta_0 L^2}{\pi (R_2 - R_1)^2} \int_{-b}^{L-b} u^{-2} du = \frac{\eta_0 L^2}{\pi (R_2 - R_1)^2} \left\{ -\frac{1}{u} \right\}_{-b}^{L-b}$$

$$= \frac{\eta_0 L^2}{\pi (R_2 - R_1)^2} \left\{ -\frac{1}{L-b} - \frac{1}{b} \right\} = -\frac{\eta_0 L^2}{\pi (R_2 - R_1)^2} \left\{ \frac{b+L-b}{b(L-b)} \right\}$$

$$= -\frac{\eta_0 L^2}{\pi (R_2 - R_1)^2} \left\{ \frac{L}{b(L-b)} \right\} ; b = \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) L$$

$$L - b = L - \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) L = L \left(1 - \frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

$$= L \left(\frac{R_2 - R_1 - R_2}{R_2 - R_1} \right) = -L \left(\frac{R_1}{R_2 - R_1} \right)$$

$$R = \frac{-\eta_0 L^2}{\pi (R_2 - R_1)^2} \left\{ \frac{L}{L \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) \left(-L \left(\frac{R_1}{R_2 - R_1} \right) \right)} \right\}$$

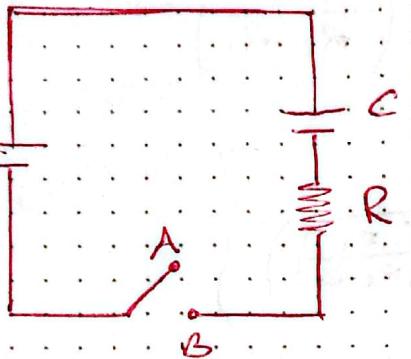
$$= \frac{\eta_0 L^2}{\pi (R_2 - R_1)^2} \left\{ \frac{1}{K} \cdot \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1 R_2} \right\}$$

$$\boxed{R = \frac{\eta_0 L}{\pi R_1 R_2}}$$

16 Circuitos RC

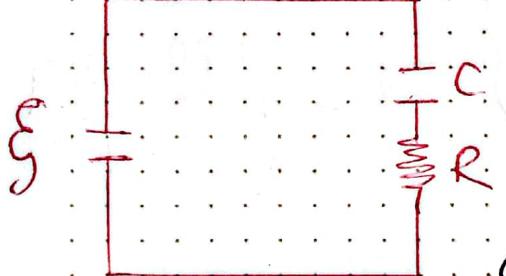
Primero estudiaremos el proceso de Carga del Condensador

FEM
batería
pila



Para $t < 0$, A y B están desconectados

Se conectan en $t = 0$, y comienza a circular una corriente



Aplicando las leyes de Kirchhoff

$$E - \frac{Q}{C} - RI = 0$$

En este caso, $I = I(t) \Rightarrow Q = Q(t)$

* Las condiciones iniciales: $t = 0, Q = 0$
 $\wedge I = I_0$

* Cuando el Condensador se Carga es cero y la Carga es $Q_T \equiv q$, luego,

$$Q_T = q = C \cdot E$$

Variando en el tiempo la ecuación de la Energía:

$$\frac{d}{dt} \left(E - \frac{Q}{C} - RI \right) = 0$$

\hookrightarrow cte

$$\therefore -\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} - R \frac{dI}{dt} = 0 \quad (I = \frac{dQ}{dt})$$

$$-\frac{1}{C} I(t) - R \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$-R \frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{C} I(t)$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Adimensional}$$

$\tau = RC \rightarrow$ Constante de tiempo del circuito RC

$$\Rightarrow \int_{I_0}^I \frac{dI'}{I'} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{t}{\tau}/e \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

L a Carga en el Condensador: $I_0(t=0) = \frac{E}{R}$

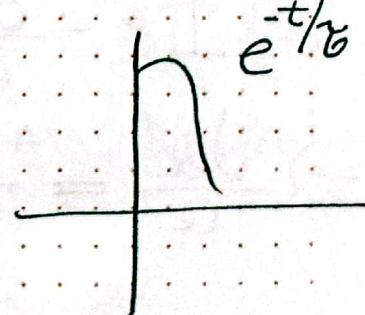
$$\frac{dQ}{dt} = I_0 e^{-t/\tau} / \int$$

$$\int_0^Q dQ = I_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt = \left. \frac{I_0}{-1/\tau} e^{-t/\tau} \right|_0^t = EI(1 - e^{-t/\tau})$$

Lab electro:

$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, si $\tau < t \rightarrow$ ^{decade}_{rápidamente}

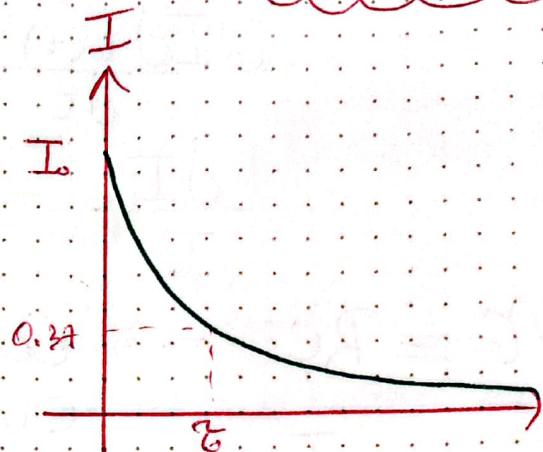
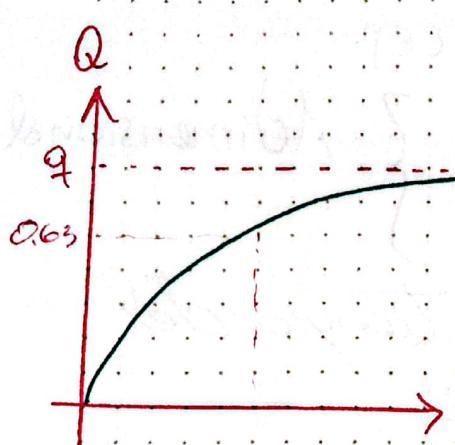
$\tau \rightarrow$ orden de los 10 [s] en el lab



$$t=0 \Rightarrow \mathcal{E} - RI_0 = 0$$

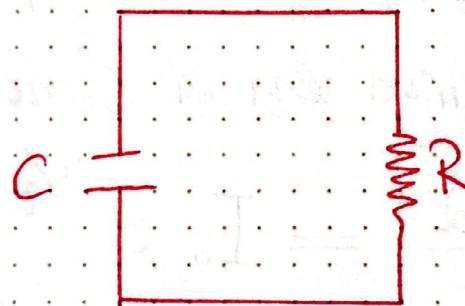
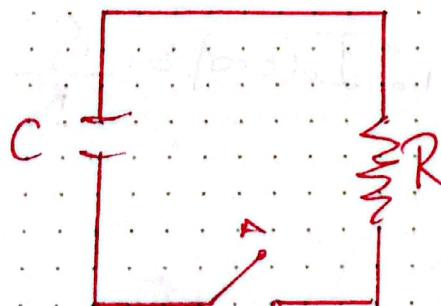
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\tau = RC \Rightarrow \mathcal{E} I_0 = \mathcal{E} \cdot C \Rightarrow Q(t) = q(1 - e^{-t/\tau})$$



Vedmos el proceso de descarga del Condensador

cuando se saca la batería, se descarga en la resistencia



$$t < 0$$

$$\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = RI \rightarrow \text{Corriente de descarga}$$

$$\therefore I = -\frac{dQ}{dt} \quad (\frac{dQ}{dt} < 0) \Rightarrow \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = -R \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\int_q^Q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{Z} \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{Q}{q}\right) = -\frac{t}{Z} / e$$

$$Q(t) = q e^{-t/Z}$$

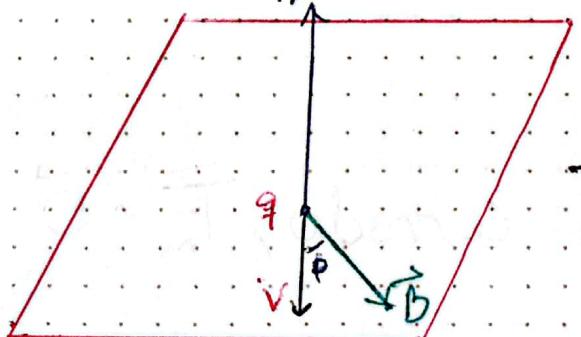
Id Corriente : $I = \frac{q}{Z} e^{-t/Z}$

$$I(t) = \frac{\xi}{R} e^{-t/Z}$$

4.7 Fuerza Magnética

* Las observaciones muestran que la fuerza es proporcional a la carga, velocidad y el campo magnético, de la siguiente manera:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{B}: \text{inducción magnética}$$



Así, la magnitud de la fuerza es

$$F_m = q v B \sin \phi$$

[SI] : [B] = T = $\frac{W_b}{m^2} = \frac{N}{A \cdot m}$; T: tesla
W_b: weber

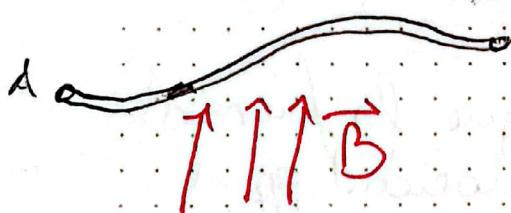
Vedamos el trabajo realizando por las fuerzas magnéticas

$$W_m = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_m \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = q \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

id est i.e., No realizó trabajo
es decir

Fuerza magnética sobre un conductor

En un campo externo de inducción \vec{B} en la región donde está un alambre



Podemos escribir

$$\vec{F}_m = I \int_a^b d\vec{r} \times \vec{B}$$

Si \vec{B} es uniforme

$$\vec{F}_m = I \left(\int_a^b d\vec{r} \right) \times \vec{B} = \frac{dI}{dt} (d\vec{r} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}_m = I l \times \vec{B}$$

NOTA: Si el alambre es cerrado, $\vec{F}_m = 0$

La fuerza magnética sobre una espira en un campo uniforme es cero.

Campo magnético de Corrientes cte

Hasta aquí hemos estudiado los efectos sobre el espacio debido a cargas en reposo, lo cual se puede resumir en la ley de Coulomb

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Si las Q están en MU, moviéndose con velocidades \vec{V} y \vec{V}_i , E también tiene fuerza magnética \vec{F}_m ejercida por q sobre q

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{V} \times (\vec{V}_i \times \hat{r})$$

μ_0 = Permeabilidad magnética del vacío

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{N}{A^2} \right]$$

$$\vec{F}_m = q \vec{V} \times \vec{B} \quad \vec{B} \text{ inducción magnética dada por}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^2} \vec{V}_i \times \hat{r}$$

ó bien

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^3} (\vec{V}_i \times \hat{r})$$

Si en la región E también un campo eléctrico \vec{E} , la fuerza total sobre la partícula de carga q viene dada por la fuerza de Lorentz:

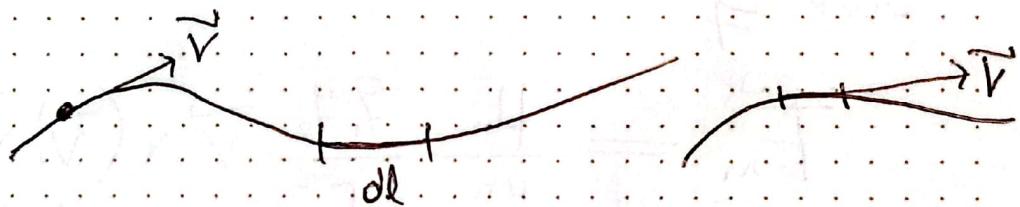
$$\overrightarrow{F}_{em} = \overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_m = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{B}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{em} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V} \times \overrightarrow{B})}$$

Nota: Es interesante observar que

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

fuerza sobre conductores portadores de corriente

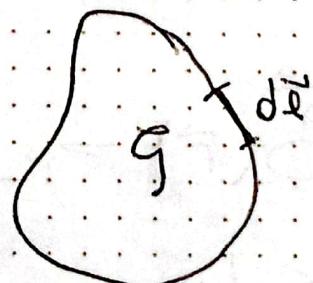


$$d\overrightarrow{F} = N A dI q \overrightarrow{V} \times \overrightarrow{B}$$

$$d\overrightarrow{F} = N A V q dI \times \overrightarrow{B} ; I = N A |V| q$$

$$\therefore d\overrightarrow{F} = I dI \times \overrightarrow{B}$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{F} = I f dI \times \overrightarrow{B}$$



Si \overrightarrow{B} es uniforme $\Rightarrow \overrightarrow{F}_m = 0$

Torque de la Fuerza Magnética

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}_m = I \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})$$

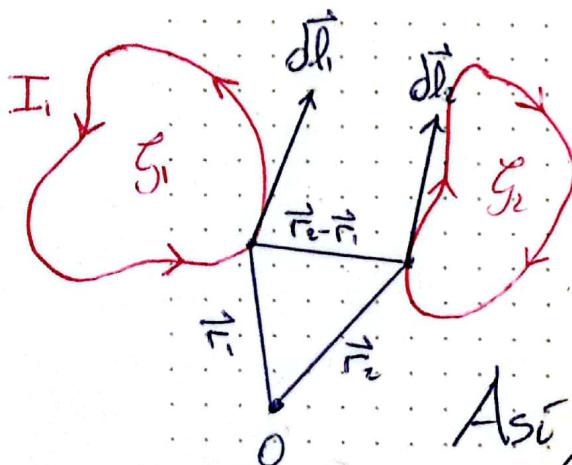
∴ Para un Circuito Cerrado

$$\vec{\tau} = I \oint \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})$$

Ley de Biot-Savart

Análogo a Coulomb

- * Ørsted (1820) enunció que los Corrientes producen efectos magnéticos.
- * Ampere muestra que los resultados empíricos se pueden resumir en la sgte ley



$$I_2 \vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{S_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Pero sabemos que $\vec{F}_2 = I_2 \oint_{S_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B}$

Así, podemos ver directamente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \vec{B}(\vec{r}_2)$$

Ley de
Biot-Savart

La diferencial de esta ley:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_i \frac{d\vec{l}_i \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_i|^3}$$

Para una densidad de corriente, esto ultimo queda

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}_i) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_i|^3} dV$$

y la diferencial

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}_i) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_i|^3} dV$$

De la forma general

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Aplicación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV'$$

Identidad: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = -\vec{F} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{G} + \vec{G} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = -\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \times \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) + \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}')$$

Nota:

$J(\vec{r}')$ actúa sólo en \vec{r}' y $\vec{\nabla}$ actúa en los no primados

También, recordemos que

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} ?$$

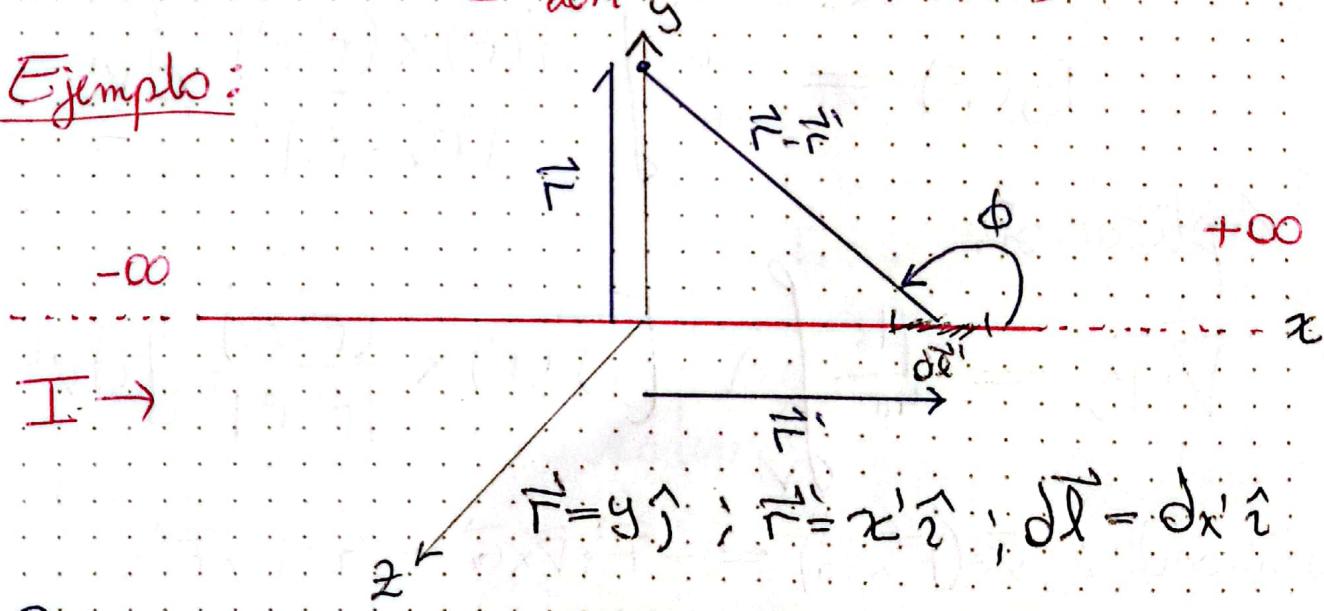
$$\therefore \nabla \cdot [\vec{j}(\vec{r}) \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}] = -\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla \times \left[-\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right] = 0$$

Luego, tenemos que

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \begin{cases} \bullet \text{No hay monopolas magnéticos aislados} \\ \bullet \text{Las líneas de campo magnético son cerradas} \end{cases}$$

Ejemplo:



$$\vec{r} = y^i; \vec{r}' = x'^i; d\vec{l} = dx'^i \hat{i}$$

$$\text{Pero } \hat{i} \times (\vec{r}-\vec{r}') = |\vec{r}-\vec{r}'| \sin \phi \hat{n}$$

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-oo}^{+oo} \frac{dx' \hat{i} \times (\vec{r}-\vec{r}')} {|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$y \text{ también } \frac{y}{x'} = \tan(\pi - \phi) = -\tan \phi$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = y \cosec(\pi - \phi) = y \cosec \phi$$

$$x' = -y \cot \phi \Rightarrow d_{x'} = y \cosec^2 \phi d\phi$$

Reemplazar

$$\begin{aligned} \vec{B}(y) &= \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cosec^2 \phi d\phi}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sin \phi \\ &= \frac{\mu_0 I k y}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\csc \phi}{y^2 \csc^2 \phi} d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(y) &= \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi y} \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi y} [-\cos \phi]_0^\pi \\ &= \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi y} [2] = \boxed{\frac{\mu_0 I \hat{k}}{2\pi y}} \end{aligned}$$

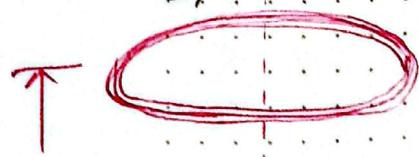
Ejemplo 2 Espira circular de radio R por la cual circula una corriente constante I

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z \hat{k} ; \vec{r}' = R \hat{s} ; d\vec{l} = R d\phi \hat{\phi} \\ |\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= (R^2 + z^2)^{3/2} & \hat{s} \times \hat{\phi} &= \hat{x} \\ d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= R d\phi \hat{\phi} \times (z \hat{k} - R \hat{s}) = R z d\phi \hat{s} + R^2 d\phi \hat{\phi} \end{aligned}$$

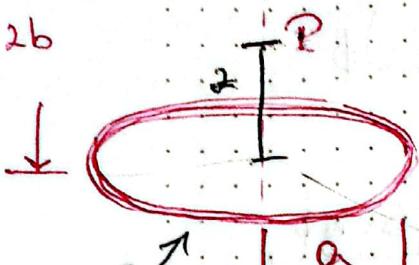
$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} [R z d\phi \hat{s} + R^2 d\phi \hat{\phi}] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} R^2 d\phi \hat{\phi} = \boxed{\frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}} \end{aligned}$$

N espiras

Bobina de Helmholtz



* Queremos calcular el campo en el punto z



* Para esto utilizamos el resultado anterior:

$$B(z) = \frac{N H_0 I a^2}{2} \left[\frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2+(2b-z)^2)^{3/2}} \right]$$

Vedemos donde el campo es max o min

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dz} &= \frac{N H_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{-\frac{3}{2} \cdot 2z}{(a^2+z^2)^{5/2}} + \frac{-\frac{3}{2}[-2(2b-z)]}{[a^2+(2b-z)^2]^{5/2}} \right\} \\ &= -\frac{3}{2} N H_0 I a^2 \left\{ \frac{2z}{(a^2+z^2)^{5/2}} - \frac{(2b-z)}{[a^2+(2b-z)^2]^{5/2}} \right\} \end{aligned}$$

Por inspección, la primera derivada se anula en
 $z = b$

$$\frac{b}{(a^2+b^2)^{5/2}} - \frac{(2b-b)}{(a^2+(2b-b)^2)^{5/2}} = 0$$

$$\frac{b}{(a^2+b^2)^{5/2}} - \frac{b}{(a^2+b^2)^{5/2}} = 0$$

Tarea

- * Evaluar la 2^{da} Derivada en $z=b$
- * Chequear que esto se anula haciendo $a = 2b$

* Calcular $B(a/2)$

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = -\frac{3}{2} N \mu_0 I a^2 \left\{ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2z^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{1}{(a^2 + (2b-z)^2)^{5/2}} \right.$$

$$\left. - \frac{5}{2} \frac{2(2b-z)^2}{(a^2 + (2b-z)^2)^{7/2}} \right\}$$

$$z=b$$

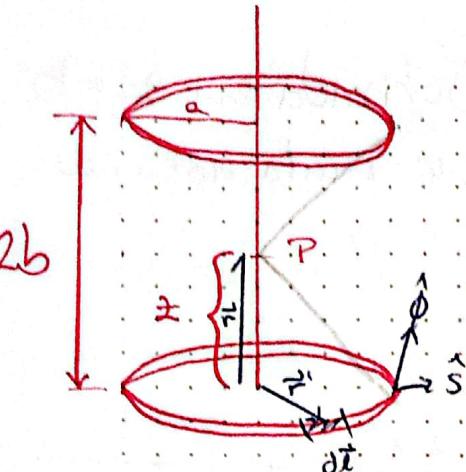
$$= -\frac{3}{2} N \mu_0 I a^2 \left\{ \frac{1}{(a^2 + b^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} + \frac{1}{(a^2 + (2b-b)^2)^{5/2}} \right.$$

$$\left. - \frac{5}{2} \frac{2(2b-b)^2}{(a^2 + (2b-b)^2)^{7/2}} \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} N \mu_0 I a^2 \left\{ \frac{1}{(a^2 + b^2)^{5/2}} - \frac{5b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} + \frac{1}{(a^2 + b^2)^{5/2}} - \frac{5b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} \right\}$$

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = -\frac{3}{2} N \mu_0 I a^2 \left\{ \frac{a^2 + b^2 - 5b^2 + b^2 + a^2 - 5b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} N \mu_0 I a^2 \left\{ \frac{2a^2 - 8b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 * \vec{r} &= z\hat{k} & * \vec{r} - \vec{r}' &= (z\hat{k} - a\hat{s}) \\
 * \vec{r}' &= a\hat{s} & * |\vec{r} - \vec{r}'| &= (z^2 + a^2)^{3/2} \\
 * d\vec{l} &= a d\phi \hat{\phi} \\
 * d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= d\phi \hat{\phi} (z\hat{k} - a\hat{s})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{s} \times \hat{\phi} &= \hat{k}; \hat{\phi} \times \hat{k} = \hat{s}; \hat{k} \times \hat{s} = \hat{\phi} \\
 \hat{\phi} \times \hat{s} &= -\hat{k}; \hat{k} \times \hat{\phi} = -\hat{s}; \hat{s} \times \hat{k} = -\hat{\phi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\phi \hat{\phi} \times (z\hat{k} - a\hat{s}) &= az d\phi (\hat{\phi} \times \hat{k}) - a^2 d\phi (\hat{\phi} \times \hat{s}) \\
 &= az d\phi \hat{s} + a^2 d\phi \hat{k}
 \end{aligned}$$

$$* \text{Biot and Savart} \quad B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Reemplazar

$$\begin{aligned}
 1 \text{ espiral} \quad B(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{az d\phi \hat{s} + a^2 d\phi \hat{k}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}
 \end{aligned}$$

$$2 \text{ espirales} \implies B(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (2b-z)^2)^{3/2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dB}{dz} &= \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} (a^2 + z^2)^{-5/2} \cdot (2z) + \frac{3}{2} (a^2 + (2b-z)^2)^{-5/2} \cdot (2(2b-z)) \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{-2(2b-z)}{(a^2 + (2b-z)^2)^{5/2}} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \frac{\mu_0 I a^2}{(a^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{2}{(a^2 + (2b-z)^2)^{5/2}}
 \end{aligned}$$

$$2 = b \implies \left\{ -\frac{b}{(a^2 + b^2)^{5/2}} + \frac{b}{(a^2 + b^2)^{5/2}} \right\} = 0$$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2 n}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{(R^2 + (z-x)^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{d}{dz} \left\{ -\frac{3}{2} \mu_0 I a^2 \left\{ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{2b-z}{(a^2 + (2b-z)^2)^{5/2}} \right\} \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} \mu_0 I a^2 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{2b-z}{(a^2 + (2b-z)^2)^{5/2}} \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} \mu_0 I a^2 \left\{ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{1}{(a^2 + (2b-z)^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2(2b-z)^2}{(a^2 + (2b-z)^2)^{7/2}} \right\}$$

$$z=b \Rightarrow \left\{ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{1}{(a^2 + (2b-z)^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{(2b-z)^2}{(a^2 + (2b-z)^2)^{7/2}} \right\}$$

$$= \boxed{\left\{ \frac{1}{(a^2 + b^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} - \frac{1}{(a^2 + b^2)^{5/2}} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} \right\} = 0}$$

$$= \left\{ \frac{1}{(a^2 + b^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} + \frac{1}{(a^2 + b^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{a^2 + b^2 - 5b^2 + a^2 + b^2 - 5b^2}{(a^2 + b^2)^{7/2}} \right\}$$

$$a=2b$$

$$= \left\{ \frac{4b^2 + b^2 - 5b^2 + 4b^2 + b^2 - 5b^2}{(4b^2 + b^2)^{7/2}} \right\} = 0$$

Ley de Ampere

→ Orsted (1820). Las corrientes producen un \vec{B}

Ahora, para Corrientes Constantes

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

y de acá podemos inferir

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \rightarrow \text{fórmula diferencial}$$

de la ley de Ampere

Integrando sobre la Σ de círculos

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} da = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Con el Teorema de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{ext}} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \hat{n} da$$

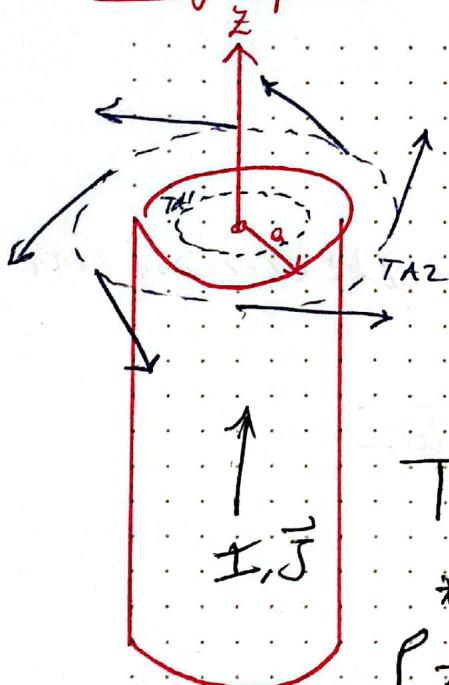
equivalencia con la ley de Gauss

$\gamma(\Sigma) \rightarrow TA$: trayectoria Amperiana

i) El \vec{B} es tangencial a la T.A.

ii) Es cte sobre cada T.A (en módulo)

Ejemplo: Campo de un alambre recto de radio R



→ Por Simetría $\vec{B} = B \hat{\phi}$
y serán T.A todos los círculos
centrados en el eje de simetría de
la distribución de corriente

$$\text{T.A.2: } R \leq s < \infty \quad I_{\text{enc}} = I$$

$$* d\vec{l} = s d\phi \hat{\phi}$$

$$\oint_{\text{T.A.2}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{T.A.2}} B \hat{\phi} \cdot s d\phi \hat{\phi} = SB \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi s B$$

Luego, Teorema de Ampere

$$\oint_{\text{T.A.2}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow 2\pi s B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}} \quad s > R$$

$$\text{TAI: } I: \pi R^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} I' = I \left(\frac{s}{R} \right)^2 \quad 0 < s \leq R \\ I' = \pi s^2 \end{array} \right.$$

$$2\pi s B = \mu_0 I' = \mu_0 \frac{s^2 I}{R^2} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\frac{s}{R} \right) \hat{\phi}}$$

Alternativamente

$$\vec{J} = J_0 \hat{k}$$



$$\Rightarrow I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} da = J_0 \pi R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{J_0 = \frac{I}{\pi R^2}} ; \quad \boxed{\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{k}}$$

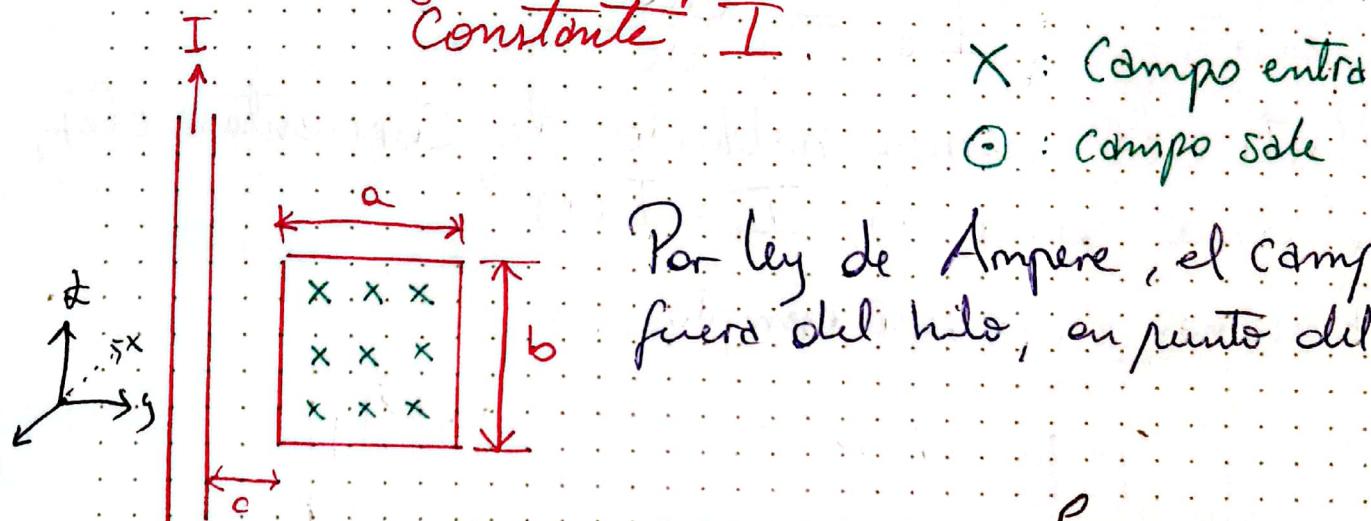
$$I' = \int \vec{J} \cdot \hat{n} da = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi s^2 = I \left(\frac{s}{R} \right)^2$$

Flujo Magnético

Se define de manera análoga al flujo eléctrico

$$\Phi_m = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} da$$

Ejemplo: Flujo magnético a través de una espira cuadrada debido al campo generado por un hilo con Corriente Constante I



Por ley de Ampere, el campo fuera del hilo, en punto del plano

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} (-i) ; \quad \Phi_m = \int \vec{B} \cdot \hat{n} da$$

$$da = dy dz (-i) \quad = \int_0^b \int_0^{c+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} dy dz$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^b dz \int_c^{c+a} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left(\frac{c+a}{c} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_m = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{c} \right)}$$

Corriente de Desplazamiento

La ley de Ampere establece que

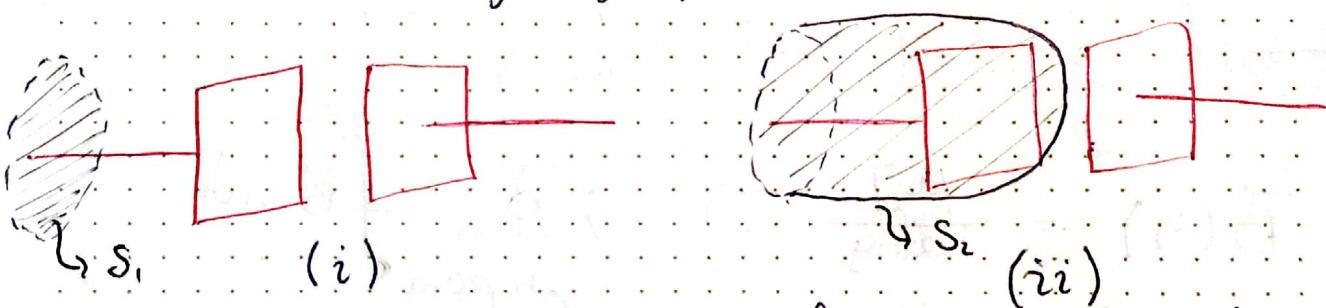
$$\int_{TA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c$$

I_c es la Corriente de Conducción oida

$$I_c = \frac{dQ}{dt}$$

Hasta aquí hemos hablado de Corrientes estás,
¿Qué pasa si $I = I(t)$?

Pensemos en el siguiente ejemplo



* No hay movimiento de Q entre las placas, el Condensador acumula Q

* No hay corriente dentro de las placas

$$(1) \int_{TA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \xrightarrow{\text{contradicción}} \int_{TA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Esta contradicción se soluciona agregando un nuevo término, llamado Corriente de desplazamiento

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} ; \quad \Phi_e = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow I_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

y reescribimos la ley de Ampere

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 (I_c + I_d) \quad I = I_c$$

o bien

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

Notemos que

$$\int_{S_2} \vec{J} \cdot \hat{n}_2 d\vec{a} - \int_{S_1} \vec{J} \cdot \hat{n}_1 d\vec{a} \neq 0$$

Entonces

$$\int_{S_1 + S_2} \vec{J} \cdot \hat{n} d\vec{a} \neq 0 \Rightarrow \text{de carga en las masas}$$

Escribimos

$$\int_{S_1 + S_2} \vec{J} \cdot \hat{n} d\vec{a} = - \int \frac{\partial P}{\partial t} dv$$

o bien

$$\int \nabla \cdot \vec{J} dv = - \int \frac{\partial P}{\partial t} dv$$

Y d que el volumen es arbitrario

$$\nabla \cdot \vec{J} - \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Ecación de
Continuidad
(conservación de Q
eléctrica)

Tenemos que $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ y aplicando la divergencia

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}$$
$$= 0 \neq 0 \quad (\text{inconsistencia})$$

Veamos que por un lado

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0$$

Así, solucionamos la inconsistencia haciendo

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Ley de Ampere - Maxwell (Ley de Ampere generalizada)

Def Intensidad del Campo magnético ó Campo magnético

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

y la ley de Ampere - Maxwell

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Encontrar \vec{P} en todo el espacio

- * Donde hay mayor potencial es en la primera esfera

$$\text{Por simetría} \Rightarrow \vec{D} = D(r) \hat{r}$$

Teorema de Gauss generalizado $\Rightarrow \int_{\text{SA}} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{\text{in}}$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2$$

En $r=b$ no hay Q libre, de manera $D_1 = D_2$
luego

$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \text{ en } r=b$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_1 a^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{r} \quad \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_2 b^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{r}$$

Calcularemos la diferencia de potencial entre los #

$$\Delta \Phi = V = - \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta \Phi = V = - \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_c^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$V = - \int_c^b \frac{Q}{4\pi \epsilon_2} \frac{dr}{r^2} - \int_b^a \frac{Q}{4\pi \epsilon_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon_2 r} \Big|_c^b + \frac{1}{\epsilon_1 r} \Big|_b^a \right\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon_2} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right] + \frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \right\}$$

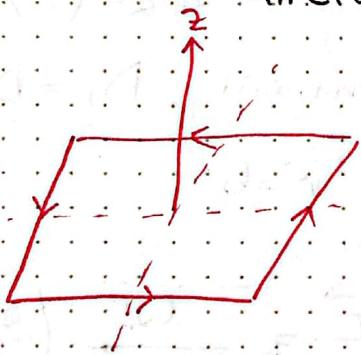
$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] + \frac{1}{\epsilon_2} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]}$$

$$Q = CV$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{CV}{4\pi\epsilon_1 a^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 ; E_2 = \frac{CV}{4\pi\epsilon_2 a^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2$$

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{P}_1 = \chi_1 \vec{E}_1 ; \vec{P}_2 = \chi_2 \vec{E}_2$$

$$\vec{P}_1 = \frac{\chi_1 CV}{4\pi\epsilon_1 a^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 ; \vec{P}_2 = \frac{\chi_2 CV}{4\pi\epsilon_2 a^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2$$



Espira cuadrada de lados a
por la cual circula una corriente
 I . Determinar el campo

i) Consideraremos sólo una recta del circuito

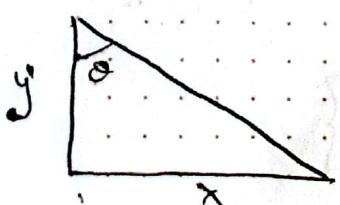
* $\vec{r} = x \hat{i}$

* $\vec{r}' = y' \hat{j}$

* $d\vec{l} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = d\vec{l} = dy' \hat{j}$

* $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (x^2 + y'^2)^{3/2}$

* $B(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{-x dy' K}{(x^2 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I x}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dy' K}{(x^2 + y'^2)^{1/2}}$



$$\tan \theta = \frac{x}{y'} \Rightarrow y' = x \cot \theta$$

$$dy' = -x \csc^2 \theta d\theta$$

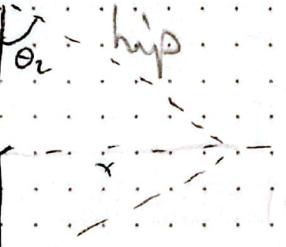
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-x \csc^2 \theta d\theta}{(x^2 + x^2 \cot \theta)^{3/2}} = -x \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\csc^2 \theta d\theta}{x^3 \csc^5 \theta} = -\frac{1}{x^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

$$= + \frac{1}{x^2} \left\{ \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right\}$$

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{x^2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{k}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{k}$$

Close #25 13/06/23

a_{12}  * $\vec{I} dl = I dy \hat{j}$

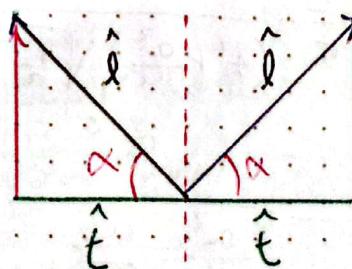
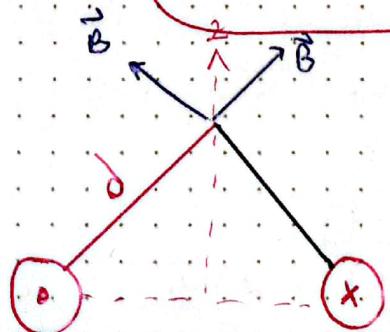
* $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{k}$

$\theta_1 = \pi - \theta_2 \rightarrow \cos \theta_1 = \cos(\pi - \theta_2) = -\cos \theta_2$

$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} 2 \cos \theta_2 \hat{k}, \quad \cos \theta_2 = \frac{a/2}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + x^2}}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a/x}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + x^2}} \hat{k}$$

(i) Segmento del alambre a



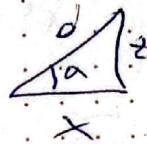
4 n por sistema de espiras

$$\vec{B}_T = 4 B_n \hat{n}$$

$$\vec{K} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{n}$$

El campo total a una distancia d es

$$\vec{B}(d) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a/d}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + d^2}} \cdot 4 \sin \alpha \hat{n}$$



$$\sin \alpha = \frac{x}{d}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a/d}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + d^2}} \cdot \frac{x}{d}$$

$$d^2 = x^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a x}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + x^2 + (\frac{a}{2})^2}} \cdot \frac{x^2 + (\frac{a}{2})^2}{x^2 + (\frac{a}{2})^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{(a/2)}{d}$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\cancel{a} x^2}{x^2 + (\frac{a^2}{4})} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}} K} \quad (2)$$

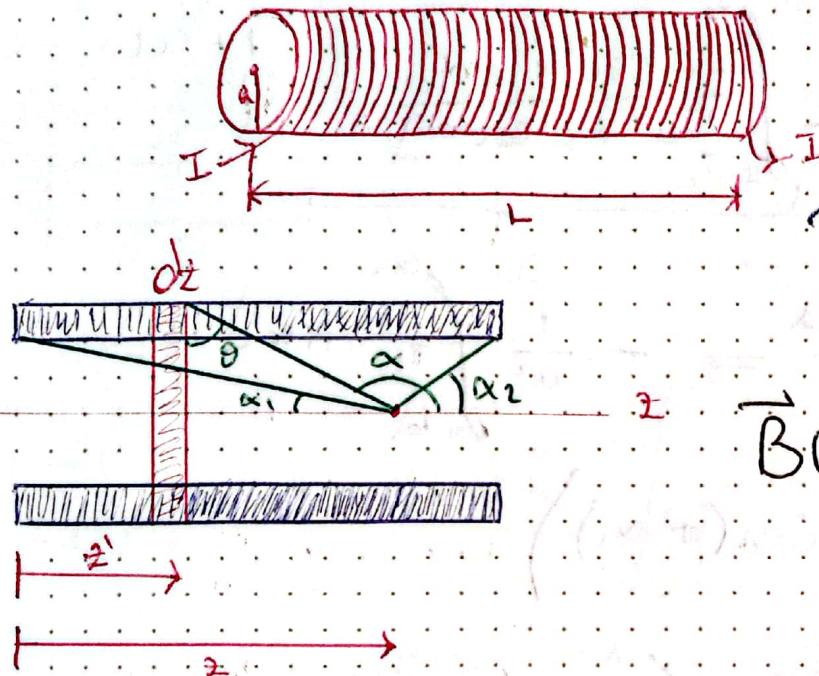
Nota: El campo calculado en (2) a partir de (1) impone un abuso de lenguaje en el sentido que se usan los mismos vectores unitarios, pero que no son la misma distancia x en (1) no es la misma x del sistema utilizado para describir (2).

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a^2}{(x^2 + \frac{a^2}{4}) \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}} \hat{k}$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a^2}{\frac{a^2}{4} \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{a}$$

Solenoide Es un sistema que se compone de un número N de vueltas de alambre sobre una geometría dada, y por la cual circula una corriente I .

1- Solenoide Circular



Para una espira el campo es

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Sea m el número de vueltas por unidad de longitud

$$m = \frac{N}{L}$$

• en el segmento entre z' y $z'+dz'$ tenemos $m dz'$ espiras, y por lo tanto la corriente en este segmento es

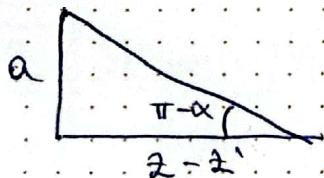
$$dI = Im dz'$$

Así, la contribución de este segmento al campo en el punto z es

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{Im a^2 dz'}{[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \hat{k}$$

Luego, el campo total

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I \pi a^2 k}{2} \int_0^L \frac{dz}{[a^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$



$$z - z' = a \cot(\pi - \alpha) = -a \cot \alpha$$

$$dz = -a \csc^2 \alpha d\alpha$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I \pi a^2 k}{2} \int_{\pi - \alpha}^{\alpha_2} \frac{-a \csc^2 \alpha d\alpha}{[a^2 + a^2 \cot^2 \alpha]^{3/2}} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$I = \int_{\pi - \alpha_1}^{\alpha_2} \frac{-a \csc^2 \alpha d\alpha}{a^3 \csc^3 \alpha} = \frac{1}{a^2} \int_{\pi - \alpha_1}^{\alpha_2} -\sin \alpha d\alpha$$

$$\frac{1}{a^2} (\cos \alpha_2 - \cos(\pi - \alpha_1))$$

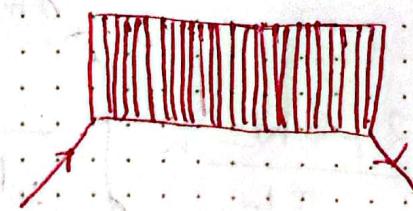
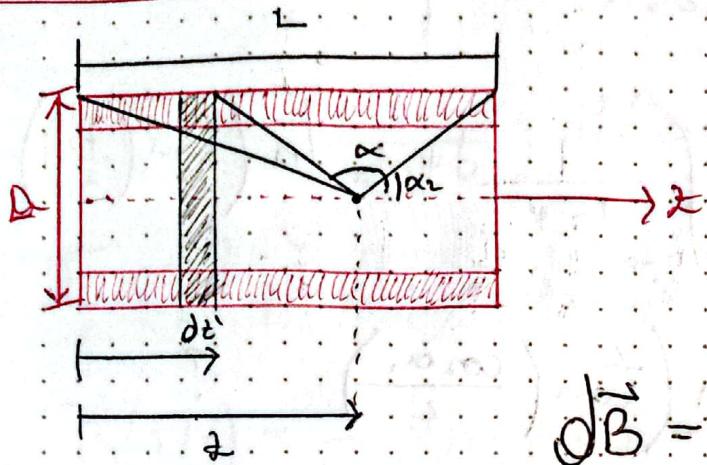
$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I N \alpha^2 k}{2 L \alpha^2} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0 I N k}{2 L} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)}$$

- Tarea:
- Calcular el campo en el centro del solenoide $(a, L) \rightarrow$ terminos
 - Determinar el campo cerca del centro considerando que $L \gg a$ (Taylor)

Centro de la espira Cuadrada

Solenoid Cuadrado



La contribución del elemento dz' al campo en z es

$$dB = \frac{\mu_0 I m \alpha^2 k}{2\pi} \frac{dz'}{\left((z-z')^2 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \sqrt{(z-z')^2 + \frac{\alpha^2}{4}}}$$

$$m = \frac{N}{L}$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I m \alpha^2 k}{2\pi} \int_0^L \frac{dz'}{\left((z-z')^2 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \sqrt{(z-z')^2 + \frac{\alpha^2}{4}}}$$

$$\begin{cases} z-z' = \frac{a}{\sqrt{2}} \cot \alpha \\ -dz' = -\frac{a}{\sqrt{2}} \csc^2 \alpha d\alpha \end{cases} \quad \begin{aligned} (z-z')^2 + \frac{\alpha^2}{4} &= \frac{\alpha^2}{2} (1 + \cot^2 \alpha) \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \csc^2 \alpha \end{aligned}$$

$$(z-z')^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{2} \cot^2 \alpha + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} (1 + 2 \cot^2 \alpha)$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I \alpha^2}{2\pi L} \int_{\pi-\alpha}^{\alpha} \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \csc^2 \alpha d\alpha}{\frac{\alpha^2}{4} (1 + 2 \cot^2 \alpha) \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \csc \alpha \right)}$$

$$= \frac{2 \mu_0 N I}{\pi L} \int_{\pi-\alpha}^{\alpha} \frac{\csc \alpha d\alpha}{1 + 2 \cot^2 \alpha}$$

$$1 + 2 \cot^2 \alpha = 1 + 2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha) = \csc^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha)$$

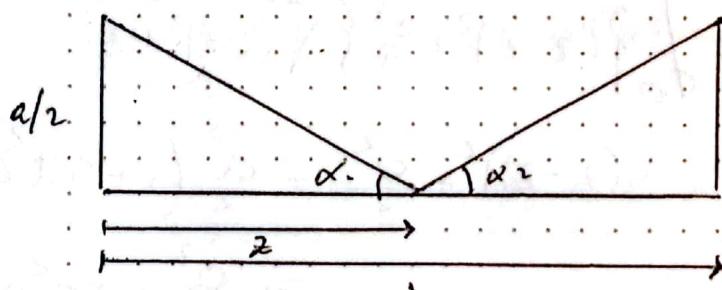
$$\vec{B}(z) = \frac{2\mu_0 NI}{\pi L} \hat{k} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\csc^2 \alpha \, d\alpha}{\csc^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha)}$$

$$= \frac{2\mu_0 NI}{\pi L} \hat{k} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \quad \left. \begin{array}{l} \psi = \cos \alpha \\ d\psi = -\sin \alpha \, d\alpha \end{array} \right\}$$

$$\int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha}{1 - \psi^2} \cdot \frac{1}{-\sin \alpha} \, d\alpha = \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{1 - \psi^2} \, d\psi = \ln \left(\tan \left(\frac{\psi}{2} \right) \right)$$

$$= \ln \left(\tan \left(\frac{\cos \alpha_2}{2} \right) \right) - \ln \left(\tan \left(\frac{\cos \alpha_1}{2} \right) \right) \quad ?$$

$$\int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \quad \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \tan x \\ -\sin \alpha \, d\alpha = \sec^2 x \, dx \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = \arctan(\cos(\pi - \alpha_1)) \\ x_2 = \arctan(\cos \alpha_2) \end{array}$$



$$\tan \alpha_2 = \frac{a/2}{L-z} \Rightarrow \alpha_2 = \arctan \left(\frac{a/2}{L-z} \right)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{a/2}{z} \Rightarrow \alpha_1 = \arctan \left(\frac{a/2}{z} \right)$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sec^2 x \, dx}{1 + \tan^2 x} = - \int_{x_1}^{x_2} dx = x_1 - x_2$$

$$\cos \alpha_2 = \cos \left(\arctan \left(\frac{a/2}{L-z} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a/2}{L-z} \right)^2}}$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \left(\arctan \left(\frac{a/2}{z} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a/2}{z} \right)^2}}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{2\mu_0 I N \hat{k}}{\pi L} \{ x_1 - x_2 \}$$

$$x_2 = \arctan \left\{ \frac{\frac{L-z}{z}}{\sqrt{(L-z)^2 + \frac{a^2}{4}}} \right\}$$

$$x_1 = \arctan \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{2 \mu_0 I N}{\pi L} \left\{ \arctan \left(\frac{L-z}{\sqrt{(L-z)^2 + \frac{a^2}{4}}} \right) + \arctan \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}} \right) \right\}$$

En el punto medio $z = L/2$ $|x_1| = x_2$

$$\vec{B}(L/2) = - \frac{4 \mu_0 N I k}{\pi L} \arctan \left(\frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} \right)$$

$$= - \frac{4 \mu_0 N I k}{\pi L} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{L}\right)^2}} \right)$$

$$\text{Si } a \ll L \Rightarrow \frac{a}{L} \ll 1 \Rightarrow \arctan \left(1 + \left(\frac{a}{L} \right)^2 \right) \xrightarrow{-1/2} \pi/4$$

$$\vec{B}(L/2) \approx - \frac{\mu_0 N I k}{L}$$

Potencial Vectorial Magnético

En electrostática, la relación $\nabla \times \vec{E} = 0$ nos permite introducir el potencial escalar eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla \Phi \implies \nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

Entonces podríamos pensar que la relación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ nos permite introducir un potencial vectorial \vec{A} en magnetostática.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \implies \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Ley de Ampere $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, luego

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\boxed{\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}}$$

Clase #27

Tenemos la libertad de agregar un término que deje invariante el campo físico, al igual que en electrostática se introduce un campo que satisface $\nabla F = 0$

$$\Rightarrow \vec{\Phi}' = \vec{\Phi} + \vec{F}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\vec{\Phi}' = -\vec{\nabla}\vec{\Phi} - \vec{\nabla}\vec{F} = -\vec{\nabla}\vec{\Phi} = \vec{E}$$

En el caso magnético, podemos incluir un campo que satisface $\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{G}$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A} =$$

Podríamos hacer $\vec{G} = \vec{\nabla}\lambda$, tal que satisface \vec{B} permanece invariante

Se dice que estas funciones son invariantes de Gauge

$$\text{Hagamos } \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$$

$$i) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}') = 0$$

$$\begin{aligned} ii) \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\lambda)) - \vec{\nabla}^2(\vec{\nabla}\lambda) \end{aligned}$$

Gauge de Lorentz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

+ ecuación
de Poisson

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{Si } \vec{J} \rightarrow 0 \text{ como } \vec{r} \rightarrow \infty$$

También podemos escribir

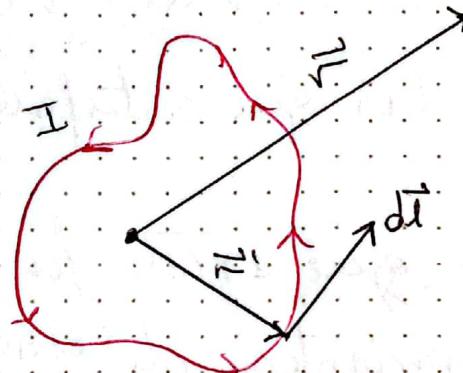
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Línes de Corriente

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') d\vec{e}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Corriente
superficie.

Campo Magnético de un Circuito Distante



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}$$

$$= r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} \quad (1+y)^{-m} \approx 1+my+\dots$$

Y que $r' \ll r$; $x = \frac{r'}{r} \ll 1$

$$\therefore |\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} (1 - 2x \vec{r} \cdot \vec{r}' + x^2)^{1/2} = \frac{1}{r} (1 + x \vec{r} \cdot \vec{r}' + O(x^2))$$

$$\therefore |\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_S \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) d\vec{l} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left\{ \int_S d\vec{l} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2} \int_S (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l} \right\}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \int_S (\vec{r} - \vec{r}') d\vec{l}'$$

Identidad

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}); d\vec{l}' = \vec{r}'$$

$$\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

En nuestro caso: $\vec{B} = d\vec{r}$; $\vec{A} = \vec{r}$; $\vec{C} = \vec{r}'$

$$d\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') = \vec{r}' \times (d\vec{r}' \times \vec{r}') + \vec{r}'(d\vec{r}' \cdot \vec{r}')$$

Ahora

$$d\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') = 0$$

$$\begin{aligned} d[\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}')] &= d\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{r}') \\ &= d\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + d\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') - \vec{r}' \times (d\vec{r}' \times \vec{r}') \end{aligned}$$

$$d\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') = \frac{1}{2} d[\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}')] + \frac{1}{2} \vec{r}' \times (d\vec{r}' \times \vec{r}')$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ \frac{1}{2} \int_S d[\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}')] + \frac{1}{2} \left(\int_S \vec{r}' \times d\vec{r}' \right) \times \vec{r}' \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{I}{2} \int_S \vec{r}' \times d\vec{r}' \right\} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Def: Momento dipolar magnético \vec{m} de un circuito

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_S \vec{r}' \times d\vec{r}'$$

$$\Rightarrow \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{Válido para } r \gg r$$

Calculamos la inducción magnética

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right\}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{m} \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right\}$$

$$\left\{ (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right\}_x = m_x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} m_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} + \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$= \frac{1}{2} m_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2} m_x \left\{ \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - x \left(\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (2x) \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} m_x \left\{ \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \right\}$$

$$= \frac{m_x \hat{i}}{r^3} - \frac{3m_x x \hat{z} \hat{i}}{r^5} = \frac{m_x \hat{i}}{r^3} - \frac{3m_x x z \hat{i}}{r^5}$$

Análogamente

$$\left[(\vec{m} \cdot \vec{D}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right]_y = \frac{m_y \hat{j}}{r^3} - \frac{3m_y y \hat{z} \hat{j}}{r^5}$$

$$\left[(\vec{m} \cdot \vec{D}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right]_z = \frac{m_z \hat{k}}{r^3} - \frac{3m_z z \hat{x} \hat{k}}{r^5}$$

Sumando las 3 contribuciones

$$\left[(\vec{m} \cdot \vec{D}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \frac{\vec{m}}{r^3} - 3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^5}$$

$$\begin{aligned} * \vec{D} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\}}$$

Dipolo magnético (comparar con la expresión del dipolo eléctrico)

Nota El campo de un circuito distante no depende de su forma geométrica detallada, sino que de su momento magnético \vec{m} .

Potencial escalar magnético

El potencial escalar magnético resulta útil en situaciones donde no hay corrientes macroscópicas, i.e.,

$$\vec{J} = 0 \implies \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0.$$

En estas regiones podemos escribir

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \varphi_m \quad \begin{matrix} \text{Potencial} \\ \text{escalar} \\ \text{magnético} \end{matrix}$$

Además, siempre se satisface que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\mu_0 \vec{\nabla} \varphi_m) = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \varphi_m = 0}$$

φ_m satisface la ecuación de Laplace, con las apropiadas condiciones de borde

Nota

Vemos que el dipolo magnético se puede escribir como

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \right)$$

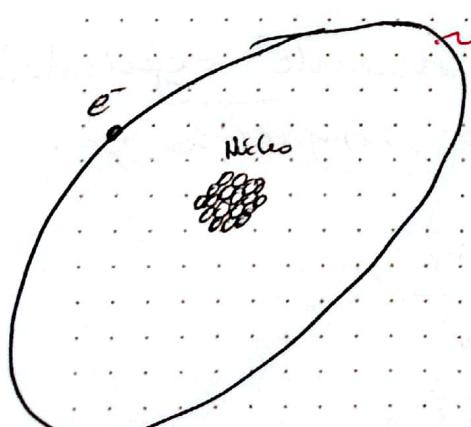
Luego, el potencial escalar para el dipolo magnético es

$$V_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Propiedades magnéticas de la materia

Hasta acá hemos estudiado campos magnéticos generados por corrientes, i.e., campos que podríamos calcular usando la ley de Biot-Savart.

Si un alambre que lleva corriente se roda de un medio material, el campo se verá afectado.



La órbita pasa a ser un loop de corriente (atómica)

\Rightarrow Existe un momento magnético \vec{M}

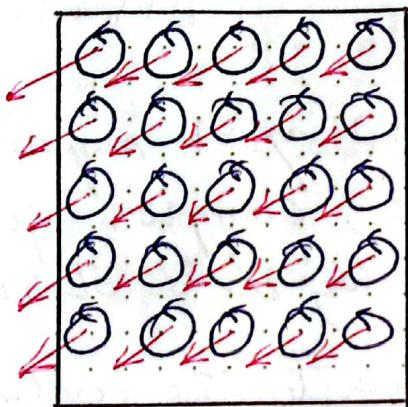
Def Magnetización \vec{M}

Sea \vec{m}_j el momento magnético del j -ésimo átomo

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_j}{\Delta V}$$

Magnetización: Momento dipolar magnético por unidad de volumen

Eskemáticamente, un material magnético se podría visualizar como sigue



Desde el punto de vista macroscópico, los efectos magnéticos se pueden calcular a partir de \vec{M} y sus derivadas

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$$

Densidad de corriente de magnetización

\vec{J}_m es una densidad de corriente equivalente que generaría el mismo campo magnético que el mismo \vec{M}



$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V}$$

$$\Delta \vec{m} = \vec{M} \Delta V$$

$$\text{Entonces, } \Delta \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\Delta \vec{M} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Contribución de un pequeño volumen de material magnetizado al campo en el punto \vec{r}

$$\Delta \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\text{Notemos que } \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

$$* \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{F}) = (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{F} + \varphi \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$- (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{F} = \vec{F} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} - \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{F})$$

$$\text{En este caso: } \vec{F} = \vec{M}, \varphi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{M} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \times \vec{M} - \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Luego,

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

$$-\oint_{S(r)} \frac{\vec{M} \times d\vec{e}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \oint_{S(r)} d\vec{a} \cdot \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S(r)} \frac{\vec{M} \times \hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{a}'$$

$$\vec{k}_m = \vec{M} \times \hat{n}' / s(r)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S(r)} \frac{\vec{k}_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{a}'$$

Clase #29 Electro

27/06/2023

Para Calcular \vec{B} partamos con

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{D} \times \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV$$

$$* \vec{D} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{D} \cdot \vec{G}) \vec{F} - (\vec{D} \cdot \vec{F}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{D}) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{D}) \vec{G}$$

$$\text{En nuestro caso } \vec{F} = \vec{M}(\vec{r}') \Rightarrow \vec{D} \cdot \vec{F} = 0$$

$$\wedge (\vec{G} \cdot \vec{D}) \vec{F} = 0$$

$$\therefore \vec{D} \times \vec{M} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \left\{ \vec{D} \cdot \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) \right\} \vec{M}(\vec{r}') - (\vec{M} \cdot \vec{D}) \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right)$$

Entonces tendremos que $\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_{II}$, donde

$$\vec{B}_I = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\vec{M} \cdot \vec{D}) \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) dV$$

$$\vec{B}_{II} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\vec{M} \cdot \vec{D}) \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) dV$$

En la primera integral

$$\begin{aligned} \vec{D} \cdot \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) &= \vec{D} \cdot \left(-\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \\ &= 4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') \end{aligned}$$

$$\vec{B}_I(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \cdot 4\pi J(\vec{r}-\vec{r}') dV'$$

$$\boxed{\vec{B}_I(\vec{r}) = \mu_0 \vec{M}(\vec{r})}$$

En la segunda integral

$$\vec{\nabla}(F \cdot G) = (F \cdot \vec{\nabla})G + F \times (\vec{\nabla} \times G) + (G \cdot \vec{\nabla})F + G \times (\vec{\nabla} \times F)$$

$$\vec{F} = \vec{M}(\vec{r}') \Rightarrow (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} = \vec{0} \wedge \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{0}$$

$$\vec{G} = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \left(\vec{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{R}}{R^3} + \vec{M} \times \left\{ \vec{\nabla} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right\}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}_I(\vec{r}) = -\mu_0 \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \left(\vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV \right\}$$

$$\vec{B}_I(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right\}$$

Potencial escalar magnético debido a un material magnético

$$P_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{II}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} \varphi_m(\vec{r})$$

De este forma tenemos que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) - \mu_0 \vec{\nabla} \varphi_m(\vec{r})$$

Nota: En los puntos exteriores donde la magnetización es cero, $\vec{M} = \vec{0}$, el campo de inducción magnética es igual al gradiente de potencial escalar, el que, a su vez, es la integral de los campos dipolares.

* se obtiene todo a partir de la magnetización \vec{M} y sus derivadas

Vamos con un poco más de detalles

$$\vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |^3} = \vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{| \vec{r} - \vec{r}' |} \right)$$

$$= \vec{\nabla}' \left\{ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |} \right\} - \frac{1}{| \vec{r} - \vec{r}' |} \vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\therefore \varphi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |} \right) dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{| \vec{r} - \vec{r}' |} \vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}') dV$$

Usando el teorema de la Divergencia

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{n}' dA'}{| \vec{r} - \vec{r}' |} - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |} dV$$

Def: Densidad de polos magnéticos

$$\rho_m(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r})$$

Densidad de la intensidad de polos magnéticos

$$J_m(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \cdot \hat{n}$$

De esta manera,

$$\rho_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} \frac{J_m(\vec{r}') d\Omega'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m(\vec{r}') d\Omega'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ejemplo: Imán

- * Se puede caracterizar macroscópicamente con una magnetización constante

$$\vec{M} = M_0 \Rightarrow \rho_m = 0 ; J_m = \sigma \text{ (cte)}$$

$$J_{mb} = -J_{mb2} \rightarrow \text{Polos del imán}$$

La carga total de polarización

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{M} dv = \oint_S \vec{M} \cdot \hat{n} ds$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{M} \cdot \hat{n} ds - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{M} dv = 0$$

$$\oint_S \rho_m ds - \int_V \rho_m dv = 0$$

Añ, podemos escribir, finalmente

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{P_m(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{SCM}} \frac{M_m(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV' + \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$$

Fuente de Campos Magnéticos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')} {|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV' - \mu_0 \vec{\nabla} P_m(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$$

Def. Campo Magnético

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

De este forma

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')} {|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV' - \vec{\nabla} P_m(\vec{r})$$

Ecucciones de Campo magnéticos

Hasta el día en magnetostática, podemos escribir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \wedge \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Aquí debemos incluir $\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \vec{J}_m$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_m$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad / \frac{1}{\mu_0}$$

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}) = \vec{J}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$$

Integraremos sobre todo la Σ que contiene el sistema de circuitos y medios magnéticos.

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Teorema de Stokes

$$\boxed{\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}}$$

La otra ec. la integraremos en el volumen

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dv = 0$$

Teorema de la Divergencia

$$\boxed{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0}$$

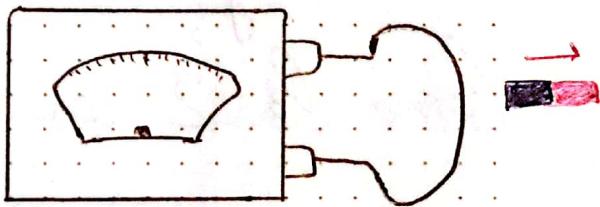
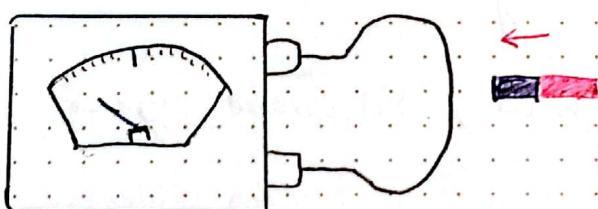
Ley de Faraday

Experimentos simultáneos, Henry (USA) y Faraday (UK) muestran que corrientes eléctricas pueden ser inducidas por campos magnéticos variables.

FEM: Fuerza electromotriz

La magnitud de la FEM inducida en un circuito es igual a la razón de cambio del flujo magnético Φ .

Galvanómetro



El cambio en el Φ_m se debe al mover relativo entre el circuito y el imán.

Se genera corriente aún si no hay fuentes eléctricas (baterías, pila, etc.)

Podemos enunciar:

La FEM inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez de cambio del Φ_m a través del circuito ??

$$\boxed{E = -\frac{d\Phi_m}{dt}} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n} da$$

formulario

Por otro lado, la FEM se puede determinar como

$$\mathcal{E} = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a}$$

* No hay (-)
pq \vec{E} no
define (+)

ignorando

- * Si \vec{B} es cte. no hay inducción

- * \vec{E} y \vec{B} campos dinámicos

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Como la Σ es arbitraria, se tiene que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Forma diferencial
de la ley de
Faraday

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Forma
integral

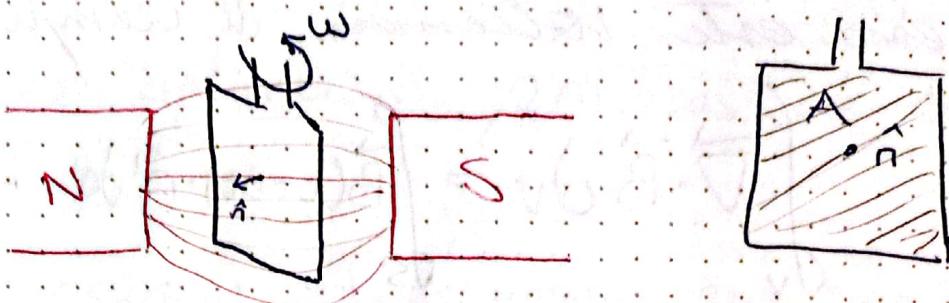
Nota:

i) En Campos estaticos, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

ii) El signo (-) de la ley de Faraday indica que el sentido de la FEM inducida tiende a oponerse al cambio que la produce

Lenz: "El sentido de la corriente inducida es tal que se opone a la causa que lo produce"

Dinamo:



El flujo que atraviesa a la espira en un tiempo arbitrario t

$$\alpha \Rightarrow \hat{n} \cdot \vec{B}$$

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = BA \cos \alpha$$

Si el sistema rota con velocidad cte

$$\alpha = wt$$

$$\Phi_m = BA \cos wt$$

$$\Rightarrow \text{FEM: } \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = WB \sin wt$$

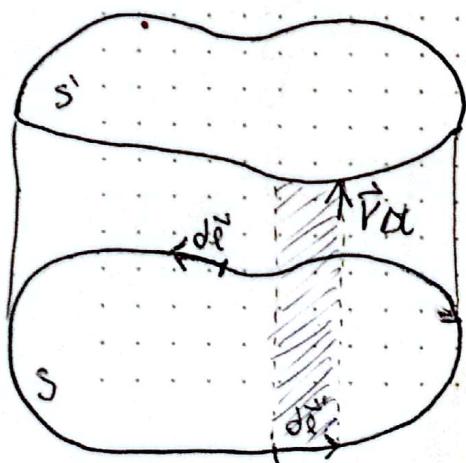
Es decir, se genera una corriente sinusoidal

Ley de Faraday para circuitos en movimiento

La variación del flujo

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int \vec{B}(t+\Delta t) \cdot d\vec{a} - \int \vec{B}(t) \cdot d\vec{a}}{\Delta t}$$



En el movimiento del circuito se genera un volumen delimitado por los Σ , S, s' y el manto

Aplicaremos el teorema de la divergencia en este volumen al tiempo $t + \Delta t$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \int_{S'} \vec{B}(t+\Delta t) \cdot \hat{n}' da' + \int_S \vec{B}(t+\Delta t) \cdot (\vec{d}l \times \vec{v} dt)$$
$$- \int_S \vec{B}(t+\Delta t) \cdot \hat{n} da$$

Ahora

$$\vec{B}(t+\Delta t) \approx \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t + \dots$$

Aplicando el teorema de Stokes ($da' = da$)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

03/07/23

Inductancia: Variación de $\Phi_m \Rightarrow$ Aparece una Campo magnético FEM y una Corriente inducida
Vamos algunas aplicaciones prácticas de este fenómeno

* Autoinductancia: Consideremos un circuito estacionario y rígido

Cuando cambia el flujo sobre él, lo único que cambia es la corriente, no la geometría

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d\Phi_m}{dI} \frac{dI}{dt}$$

Se define el coeficiente de inducción

formulario

$$L = \frac{d\Phi_m}{dI} = \frac{\Phi_m}{I} \text{ (n cte)}$$

Para un solenoide:

$$L = N \frac{\Phi_m}{I}$$

formulario

Así, la FEM inducida queda expresada como

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \rightarrow \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$[L] = \left[\frac{V \cdot T}{A} \right] = \text{Henry} = [H]$$

l : largo del solenoide

$$m = \frac{N}{l}$$

$$L = N \frac{\Phi_m}{I} = N \mu_0 n A / \frac{l}{l} = \left(\frac{N}{l} \right) \mu_0 n (A \cdot l)$$

$$L = \mu_0 n^2 V$$

V : volumen del solenoide

* Inductancia Mutua:

Hemos considerado sólo circuitos aislados de modo que el flujo que lo atraviesa se debe a la corriente en el circuito mismo.

Consideremos K circuitos, denotados por $1, 2, \dots$, entonces el flujo que atraviesa el j -ésimo circuito es

$$\Phi_{mj} = \Phi_{mji} + \Phi_{mij} + \dots + \Phi_{mjj} + \dots + \Phi_{mjK}$$

Si los cambios son debido únicamente a las corrientes

$$\frac{d\Phi_{mij}}{dt} = \frac{d\Phi_{mij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt}$$
 } *formulario*

Def: $M_{ij} = \frac{d\Phi_{mij}}{dI_j}$ Inductancia mutua
formulario

Se puede demostrar (hacerlo) $\Rightarrow M_{ij} = M_{ji}$

Tambien $M_{ij} = L_i$

Ejemplo: Dos solenoides

La corriente I_1 en el circuito 1 produce una inducción magnética

$$B = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$$

$$\therefore \Phi_{m1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} I_1$$

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{m1}}{dI_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A$$

$$\Phi_{m1} = \mu_0 \frac{N_1}{l} N_1 A I_1 \Rightarrow L_1 = \mu_0 N_1^2 V_1$$

$$(A_1 = A_2 = A)$$

$$\Phi_{m2} = \mu_0 \frac{N_2}{l} N_2 A_2 I_2 \Rightarrow M_{12} = \frac{d\Phi_{m2}}{dI_2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A_2$$

$$\Rightarrow M_{12} = M_{21}$$

$$\Phi_{m2} = \mu_0 \frac{N_2}{l} N_2 A I_2 \Rightarrow L_2 = \mu_0 N_2^2 V_2 \quad (V_1 = V_2 = V)$$

Notemos, de esto último fórmula

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2} \xrightarrow{\text{en general}}$$

$$M_{ij} = K \sqrt{L_i L_j}$$

$|K| \leq 1$: Coeficiente de acoplamiento

Si $I_1 < I_2$ igual sentido $0 < k \leq 1$ } fórmula
Si $I_1 < I_2$ sentido contrario $-1 \leq k < 0$ }

Fórmula de Newmann

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \oint_{S_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|r_2 - r_1|}$$

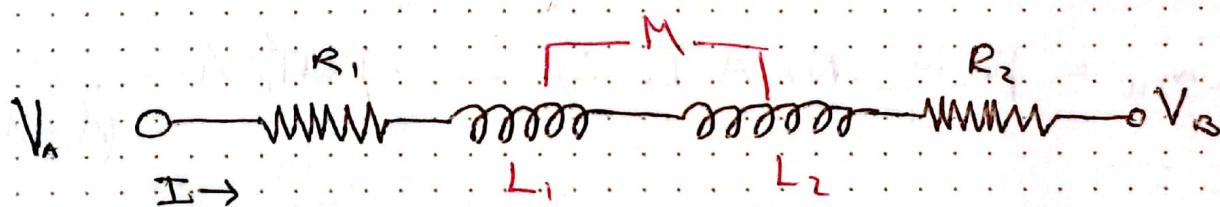
Inductancias mutuas

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \oint_{S_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_1}{|r_1 - r_1|}$$

Autoinductancia

Inductancias en serie y paralelo

Inductancia en Serie



$$V_A - IR_1 - L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} - IR_2 = V_B$$

$$V_A - V_B \equiv V = I(R_1 + R_2) + \frac{dI}{dt}(L_1 + L_2 + M)$$

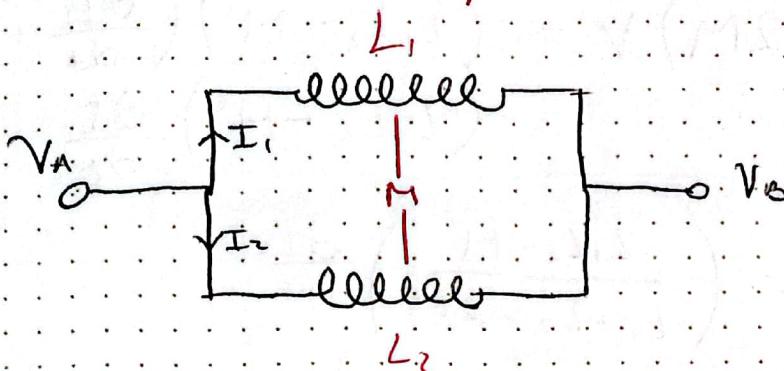
$$V = R_{eq} \cdot I + L_{eq} \frac{dI}{dt}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + M = L_1 + L_2 + K \sqrt{L_1 L_2}$$

Inductancia en paralelo

formulas



- $V_A - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = V_B$

$$\Rightarrow V = V_A - V_B = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \quad (1)$$

- $V_A - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = V_B$

$$\Rightarrow V = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \quad (2)$$

Con (1) · L₂: $L_2 V = L_1 L_2 \frac{dI_1}{dt} + L_2 M \frac{dI_2}{dt}$

Con (2) · M: $MV = M L_1 \frac{dI_1}{dt} + M^2 \frac{dI_2}{dt}$

$$V(L_2 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_1}{dt} \quad (A)$$

Con (1) · M: $MV = M L_1 \frac{dI_1}{dt} + M^2 \frac{dI_2}{dt}$

con (2) · L₁: $L_1 V = L_1 L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_1 M \frac{dI_1}{dt}$

$$V(M - L_1) = (M^2 - L_1 L_2) \frac{dI_2}{dt} \quad (B)$$

Sentando (A) + (B)

$$(L_1 + L_2 - 2M)V = (L_1 L_2 - M^2) \left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \right)$$
$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{dI}{dt}$$

$$V = \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \right) \frac{dI}{dt}$$

formularios

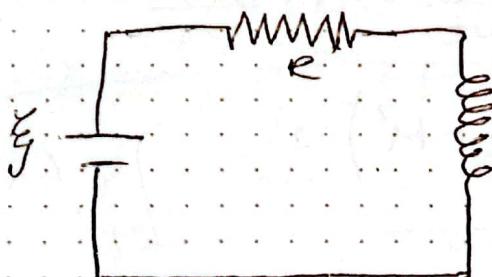
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

Inductancia
en paralelo

Energía en un Campo Magnético

Inductancia: En un circuito impide a la batería establecer una corriente instantánea

Para generar esta corriente, la batería debe realizar un trabajo contra el inductor



$$\epsilon - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\epsilon - RI}{L}$$

$$x = \frac{\epsilon}{L} - \frac{RI}{L} - \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = x$$

$$dx = -\frac{R}{L} dI$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} dt$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} dt \quad | \int$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\frac{R}{L} t \Rightarrow x = x_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$\tau = \frac{L}{R}$ tiempo característico del circuito LR

$$\frac{\mathcal{E} - RI}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Calse #31

04/04/23

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt} / I$$

$$I\mathcal{E} = RI^2 + LI \frac{dI}{dt} \Rightarrow \text{Conservación de energía}$$

$I\mathcal{E}$: Energía suministrada por la batería

RI^2 : Energía disipada en la resistencia por efecto Joule

$LI \frac{dI}{dt}$: Energía almacenada por el inductor

$$\Rightarrow \frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(U_m - \frac{1}{2} LI^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{1}{2} LI^2 + U_0$$

sin perdida de generalidad

formulario

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Energía por unidad de volumen: Pensemos en un solenoide

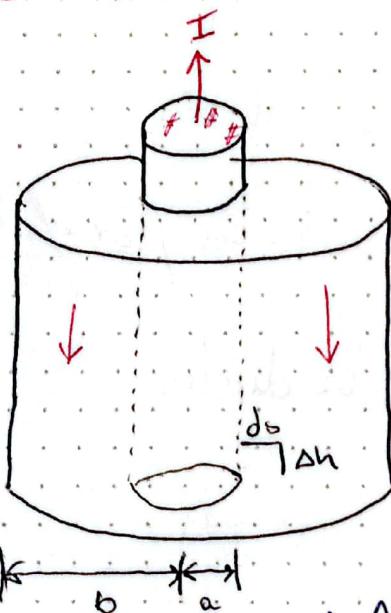
$$\Rightarrow L = \mu_0 n^2 A l \quad \wedge \quad B = \mu_0 n I \Rightarrow I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

$$\frac{U_m}{Al} = U_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \frac{B^2}{\mu_0 n^2}$$

$$\Rightarrow : U_m = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

Expresión válida para cualquier región donde existe un campo magnético

Ejemplo: Cable Coaxial, cable muy dipolo



a) Calcular L

$$\nabla B = 0$$

b) Calcular U_m

R1 | $0 < s < a \quad B \approx 0$

(Prácticamente, $a \approx 0$)

R3 | $b < s < b \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$

Calcularemos el flujo $\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_a^b B da$

$$= \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi s} da ds = \frac{\mu_0 I dh}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

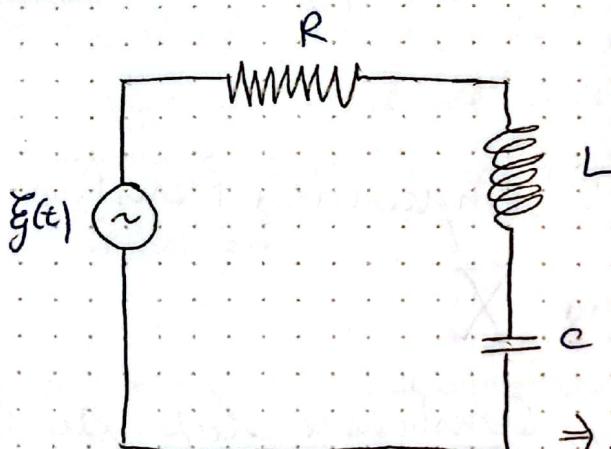
$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \Delta h \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\tilde{L} = \frac{L}{\Delta h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \begin{array}{l} \text{Inductancia} \\ \text{por unidad de} \\ \text{largo} \end{array}$$

b) $U_m = \frac{1}{2} L I^2$

$$= \boxed{\Delta h \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Circuitos RLC



La ecuación para este malla:

$$E(t) - RI - L \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} \int I(t') dt' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C} I \quad (*)$$

Alternativamente,

→ "Coeficiente de disipación"

$$E(t) = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q$$

"Restitutiva"

menor R & L , mayor C
la restitución del sistema

Inductancia \Leftrightarrow Masa } Inercia, oponerse

$\rightarrow CL = 220V$ sonz

$$E(t) = E_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}[E e^{i\omega t}]$$

y escribirnos $E = E_R + i E_I$

También $I = I_R + i I_I$

Entonces, (*) se puede escribir.

$$\dot{E}_e + i\dot{E}_I = \left(R\dot{I}_e + L\ddot{I}_e + \frac{1}{C}I_R \right) + i \left(R\dot{I}_I + L\ddot{I}_I + \frac{1}{C}I_I \right)$$

o de la misma manera

$$iWe^{iwt} = \left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right) I_o e^{iwt} / -\frac{i}{\omega}$$

$$E_o e^{iwt} = \left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right) I_o e^{iwt} = Z I_o e^{iwt}$$

formulario

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Impedancia del Circuito

Z: Combi de dos partes

- formulario*
- Parte R (Resistencia): Impedancia Resistiva
 - Parte I : Reactancia X

La reactancia, de nuevo, combi de dos partes

formulario } $X_L = \omega L$: Reactancia inductiva

formulario } $X_C = \frac{1}{\omega C}$: Reactancia Capacitiva

Nota: El hecho que la impedancia sea Q significa que la corriente no esté en fase con el voltaje aplicado

En efecto,

$$Z = |Z| e^{i\theta}, \text{ donde } |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{I_L}{R} \right)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R} \right)$$

Luego, la corriente compleja

$$I_z(t) = \frac{E_0}{|Z|} e^{i(wt - \theta)}$$

y la Corriente física

$$I_p(t) = \frac{E_0}{|Z|} \cos(wt - \theta) \quad \text{formulario}$$

Nota:

Si $\theta > 0$, la corriente adelanta una fase específica después que el voltaje, y se dice que se retrasa respecto al voltaje. En caso contrario ($\theta < 0$) se adelanta.

Conexión de impedancias en serie y paralelo

Si se conectan dos impedancias en serie, entonces fluye la misma corriente a través de cada una de ellas. Los voltajes a través de las impedancias son

$$V_1 = IZ_1 \quad \wedge \quad V_2 = IZ_2$$

$$\text{luego } V = V_1 + V_2 = I(Z_1 + Z_2)$$

$$\Rightarrow Z = Z_1 + Z_2 + \dots$$

$$\text{En este caso } Z_1 = R, \quad Z_2 = iwl, \quad t_3 = -\frac{i}{wC}$$

Para impedancias en paralelo el voltaje en sus terminales son iguales, y las corrientes

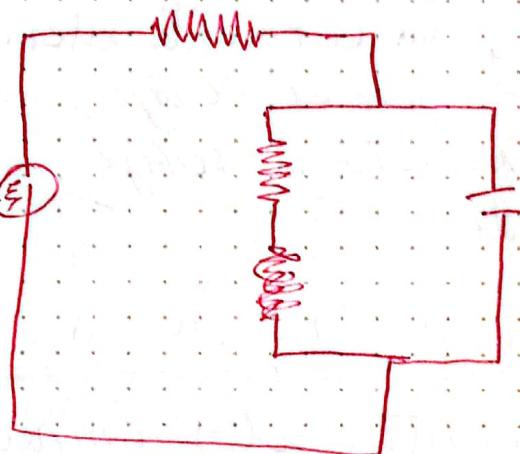
$$I_1 = \frac{V}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{V}{Z_2}, \dots$$

Como $I = I_1 + I_2 + \dots = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \dots$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots$$

Tarea: Determinar I_d corriente recta circuito

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t}$$



Potencia y factores de potencia

$V(t)$ e $I(t)$ son G

La potencia instantánea

$$P(t) = \operatorname{Re}[V(t)] \operatorname{Re}[I(t)] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{formulario} \\ \text{formulario} \end{array} \right.$$

Sin embargo, en la práctica es más útil conocer la potencia media, promediada durante un ciclo completo o un tiempo muy largo

$$\bar{P} = \overline{\operatorname{Re}[V(t)] \operatorname{Re}[I(t)]} = \frac{1}{2} |I_0| V_0 \cos \theta$$

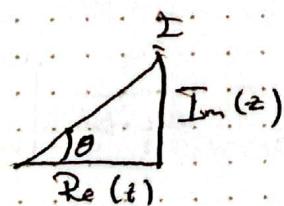
donde $(\frac{1}{2})$ proviene de promediar $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t$

Corolario: Factor de potencia de un circuito de corriente alterna ($\cos \theta$)

Es posible mostrar que

$$\overline{\operatorname{Re}[I_0 e^{i\omega t}] \operatorname{Re}[V_0 e^{i\omega t}]} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[I_0 * V_0] \quad (V_0 \text{ es R})$$

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{formulario} \\ \text{formulario} \end{array} \right.$$



$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{|Z|^2} \operatorname{Re}(Z)$$

Nota: Los valores efícientes de los voltajes y las corrientes se definen como

$$V_{ef} = \frac{\sqrt{2}}{2} |V_0| \quad \wedge \quad I_{ef} = \frac{\sqrt{2}}{2} |I_0|$$

$$|z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

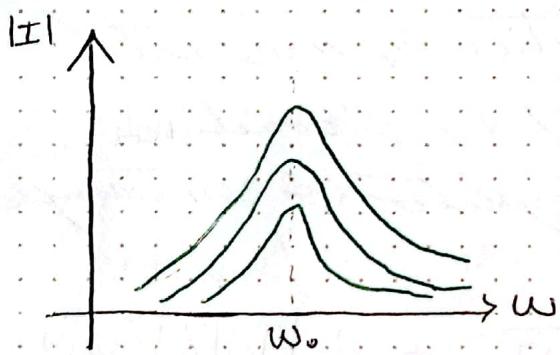
Resonancia

Es claro que la impedancia depende de la frecuencia, y esta tiene su valor mínimo cuando

$$\omega^2 \equiv \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

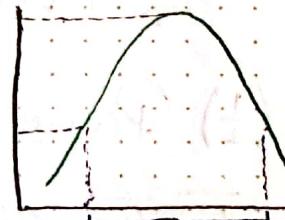
Esta frecuencia la impedancia es igual a R

Curvas de Resonancia:



Se define el ancho de la curva de resonancia como el intervalo de π frecuencias de potencia mitad P , es decir que satisfacen

$$P(\omega) = \frac{1}{2} P(\omega_0)$$



$$\therefore \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{|z(\omega)|^2} R = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{R^2} R$$

$$|z(\omega)|^2 = 2R^2 \Rightarrow \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = R$$

$$|z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Escribiremos $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$$\left| \omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C + \Delta\omega C} \right| = R \Rightarrow \left| \omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \right| = R$$

$$\text{Si } \Delta\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

$$\left| \omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C} + \frac{\Delta\omega}{C \omega_0^2} \right| = \left| \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \right) + 2\Delta\omega L \right| = 2|\Delta\omega L| = R$$

$$\Rightarrow 2|\Delta\omega| = \frac{R}{L} \Rightarrow \frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0^2}$$

$$\rightarrow El \ ancho \sim 2|\Delta\omega|$$

El factor de calidad Q del circuito

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|}$$

Resonancia
↓

Misma frecuencia

Ecuaciones de Maxwell y sus bases empíricas

2as ecuaciones de Maxwell son

$$1 - \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampere-Maxwell}$$

$$2 - \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Ley de inducción de Faraday}$$

$$3 - \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{Ley de Gauss generalizada}$$

$$4 - \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Ley de } \vec{Z} \text{ de monopolos magnéticos}$$

Comentarios

→ Son leyes empíricas: Proviene de las observaciones

→ Son ecuaciones básicas que rigen el campo electromagnético, producido por las fuentes ρ y \vec{J}

hom → no contiene fuentes; inhom → contiene fuentes

Si hay cuerpos materiales, se deben conocer las propiedades constitutivas $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ y $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$ las cuales se determinan → Empíricamente
 Teoría microscópica de la materia

Además, una tercera relación constitutiva para lo corriente corresponde a la ley de ohm

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E})$$

Por último, la dinámica de las partículas cargadas queda determinada por la ley de fuerzas de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Energía Electromagnética

Energía electrostática : $U_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dv$ formulario

Energía magnetostática : $U_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dv$

En el caso no estático

$$\vec{H} \cdot (2) - \vec{E} \cdot (1)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} *$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} **$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{H} - (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Identidad: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = - \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

$$* \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial (\vec{E} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{2} \right)$$

$$*\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right\} - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Suma de las densidades
de energía eléctrica
y magnética

Razón de
calentamiento
por efecto
Joule

Integrando sobre un volumen fijo

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = - \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

Teorema de la divergencia

$$\int_{S(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} da = - \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

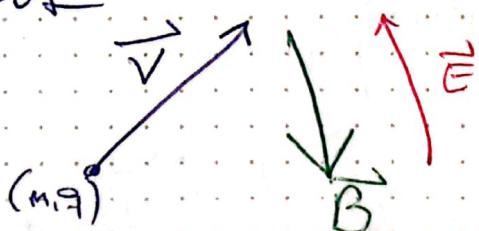
$$-\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dv + \oint_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} da$$

Potencia Transferida
al C.E.M a través
del movimiento de
Quie en el volumen

razón de cambio
de la energía EM
almacenada en
el volumen

Término
superficial

Supongamos



Entonces, la razón a la que las fuerzas mecánicas realizan trabajo sobre la partícula es (Potencia)

m: mecánica

$$\vec{F}_m \cdot \vec{v} = -q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = -q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Pero. } \vec{J} = \sum_i N_i q_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \sum_i N_i \vec{F}_m \cdot \vec{v}_i = - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Densidad de
potencia que
se transfiere al
campo

Definimos $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$: Vector Poynting

junto $\Pi = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$: Demanda de energía de C.E.M

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E}}$$

$\vec{J} \cdot \vec{E}$: trabajo realizado por el campo local sobre las partículas cargadas

Nota: i) Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \leftarrow \text{Conservación local de la energía}$$

ii) Si $\vec{J} \cdot \vec{E} = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \neq 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \leftarrow \text{Conservación global de la energía}$$

Ecuación de ondas:

Es posible mostrar que a partir de las ecuaciones de Maxwell, podemos obtener

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

ecuación de ondas en un medio lineal y homogéneo en el que $\rho = 0$

También una ecación equivalente para \vec{E}
Finalmente en el vacío, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$; $\rho = 0$
 $\epsilon_0 \mu_0 = c^2$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$