



Electromagnetismo (LFIS 211)

Licenciatura en Física mención Astronomía / Ciencias Atmosféricas / Computación Científica
 Profesor: J.R. Villanueva e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 1: Métodos matemáticos para la teoría electromagnética.

A. Problemas

1. Sean los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$, y $\vec{C} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. Calcular:
 - (a) la suma de los vectores $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$;
 - (b) las magnitudes y los cosenos directores de los tres vectores;
 - (c) los vectores unitario en la dirección de los tres vectores;
 - (d) los productos escalares $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{C}$ y $\vec{B} \cdot \vec{C}$ y el ángulo entre cada par de vectores;
 - (e) los productos vectoriales $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{C}$ y $\vec{B} \times \vec{C}$;
 - (f) el triple producto $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ (*¿son coplanares los vectores?*);
 - (g) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B}$
2. Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$$

e interpretando el resultado geométricamente, demuestre la *ley de los cosenos*.

3. Demuestre la *ley de los senos* para un triángulo mediante el uso del producto cruz de un vector con $\vec{A} + \vec{C} = \vec{B}$.
4. Pruebe que la proyección de la suma de dos vectores sobre un eje es igual a la suma de las proyecciones de los vectores sobre el mismo eje.
5. Dado cuatro puntos con radios vectores \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} y \vec{D} , suponga

$$[(\vec{D} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A})] \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = 0.$$

Pruebe que los puntos son coplanares.

6. Pruebe que

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (AB)^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2.$$

7. Un vector \vec{A} es descompuesto en un vector radial \vec{A}_r y un vector tangencial \vec{A}_t . Si \hat{r} es un vector unitario en la dirección radial, muestre que

$$(a) \quad \vec{A}_r = \hat{r}(\vec{A} \cdot \hat{r}), \\ (b) \quad \vec{A}_t = -\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}).$$

8. Si \vec{A} es un vector constante y \vec{r} es el vector desde el origen hasta el punto (x, y, z) ,

(a) demuestre que la ecuación de un plano es

$$(\vec{r} - \vec{A}) \cdot \vec{A} = 0,$$

(b) demuestre que la ecuación de una esfera es

$$(\vec{r} - \vec{A}) \cdot \vec{r} = 0.$$

9. Demuestre que

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \sin \alpha \\ \vec{B} &= \hat{i} \cos \beta + \hat{j} \sin \beta \end{aligned}$$

son vectores unitarios en el plano xy formando ángulos α, β con el eje x . Por medio de un producto escalar, obtenga la fórmula para $\cos(\alpha - \beta)$.

10. Sean $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ una base ortonormal. ¿Es

$$\vec{a}_1 = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 3\hat{e}_3, \quad \vec{a}_2 = \hat{e}_1 - 4\hat{e}_3, \quad \vec{a}_3 = 4\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3$$

una base? ¿Lo es

$$\vec{b}_1 = \hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3, \quad \vec{b}_2 = 2\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 - \hat{e}_3, \quad \vec{b}_3 = 3\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3?$$

11. Resolver

- (a) $\int \frac{dx}{1+x^2}$
- (b) $\int \frac{x dx}{1+x^2}$
- (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
- (d) $\int \frac{dx}{[a^2+(z-x)^2]^{3/2}}$
- (e) $\int \sin^2 \theta d\theta.$
- (f) $\int \frac{(z-r \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(z^2+r^2-2zr \cos \theta)^{3/2}}.$
- (g) $\int r(1+r)e^{-br} dr.$

12. Calcular $\vec{\nabla}f$, donde f es una función escalar dada por

- (a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.
- (c) $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$.
- (d) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$.
- (e) $f(r, \theta, \phi) = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{-1/2}$.
- (f) $f(r, \theta, \phi) = \frac{\sin \theta e^{i\phi}}{r^2}$.
- (g) $f(r, \theta, \phi) = 2 \arcsin(r - a\theta) \sinh(\phi)$.
- (h) $f(r, \theta, \phi) = e^\phi \sin(\theta) \ln(a/r)$.
- (i) $f(\rho, z, \phi) = \rho z \sin(\phi) + z^2 \cos^2(\phi) + \rho^2$.

13. Calcular $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ y $\vec{\nabla} \times \vec{v}$, donde \vec{v} es una función vectorial dada por

- (a) $\vec{v}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + 3xz^2 \hat{j} - 2xz \hat{k}$.
- (b) $\vec{v}(x, y, z) = xy \hat{i} + 2yz \hat{j} + 3xz \hat{k}$.
- (c) $\vec{v}(x, y, z) = y^2 \hat{i} + (2xy + y^2) \hat{j} + 2yz \hat{k}$.
- (d) $\vec{v}(r, \theta, \phi) = \frac{\cos \theta}{r^2} \hat{r} + r \sin \theta \cos \phi \hat{\theta} + \cos \theta \hat{\phi}$.
- (e) $\vec{v}(r, \theta, \phi) = r(\sin^2 \phi \sin \theta \hat{r} - \sin \theta \cos \phi \hat{\theta} + \cos \theta \hat{\phi})$.
- (g) $\vec{v}(\rho, z, \phi) = \rho \sin \phi \hat{\rho} + \rho^2 z \hat{\phi} + z \cos \phi \hat{z}$.
- (h) $\vec{v}(\rho, z, \phi) = \rho^2 \cos \phi \hat{\rho} + \rho^2 \sin \phi \hat{\phi}$.

14. Dibuje la función vectorial

$$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2},$$

y calcule su divergencia. Explique el resultado.

15. Si \vec{r} es un vector que va del origen al punto (x, y, z) , demuestre las fórmulas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3; \quad \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0; \quad (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{u},$$

donde \vec{u} es un vector arbitrario.

16. (a) Encuentre las constantes a, b, c , tal que

$$\vec{A} = (x_1 + 2x_2 + ax_3)\hat{e}_1 + (bx_1 - 3x_2 - x_3)\hat{e}_2 + (4x_1 + cx_2 + 2x_3)\hat{e}_3$$

sea irrotacional.

(b) Muestre que \vec{A} puede ser expresado como el gradiente de una función escalar.

17. Si \vec{A} es un vector constante y \vec{r} es el vector desde el origen hasta el punto (x, y, z) , demuestre que

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A}.$$

18. Demuestre que el vector unitario normal a la superficie $\varphi(\vec{r}) = \text{constante}$ es

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}.$$

Encuentre \hat{n} para el elipsoide

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

19. Sean f y g funciones escalares, y \vec{A} y \vec{B} funciones vectoriales, demuestre las siguientes identidades vectoriales

- (a) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f,$
- (b) $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A},$
- (c) $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f),$
- (d) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}),$
- (e) $\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} f),$
- (f) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$

20. ¿Es $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ necesariamente perpendicular a \vec{F} para cualquier función vectorial \vec{F} ? Justifique su respuesta.

21. Para dos funciones escalares cualesquiera Φ y Ψ , demuestre que

$$\nabla^2(\Phi\Psi) = \Phi\nabla^2\Psi + \Psi\nabla^2\Phi + 2\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi.$$

22. Evaluar el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{i} + (y^2 + e^{xz^2})\hat{j} + \sin xy\hat{k},$$

a través de la superficie frontera de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$.

23. Si \vec{A} y \vec{B} son vectores constantes, muestre que

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{r}) = \vec{A} \times \vec{B}$$

24. (a) Muestre que $\vec{u} \times \vec{v}$ es solenoidal si \vec{u} y \vec{v} son irrotacionales.
 (b) Si \vec{A} es irrotacional, muestre que $\vec{A} \times \vec{r}$ es solenoidal.
 (c) Si una función vectorial $\vec{f}(x, y, z)$ es de vorticidad (es decir, no irrotacional) pero el producto de \vec{f} y una función escalar $g(x, y, z)$ es irrotacional, muestre que

$$\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$$

25. Estudia si los siguientes campos son conservativos en el dominio A que se indica en cada caso.
Cuando el campo sea conservativo calcula la función potencial que se anula en el origen

- (a) $\vec{F}(x, y) = (x - y)\hat{i} + (y + y^2x)\hat{j}$, $A = \mathbb{R}^2$.
- (b) $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 3y^2x)\hat{i} + (-y^3 + 3yx^2)\hat{j}$, $A = \mathbb{R}^2$.
- (c) $\vec{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x)\hat{i} + (-x^2 \sin y - \sin x)\hat{j}$, $A = \mathbb{R}^2$.
- (d) $\vec{F}(x, y, z) = 2xy^3z^4\hat{i} + 3x^2y^2z^4\hat{j} + 4x^2y^3z^3\hat{k}$, $A = \mathbb{R}^3$.

26. Si r es la magnitud del vector que va desde el origen al punto (x, y, z) y $f(r)$ es una función arbitraria de r , demuestre que

$$\vec{\nabla}f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}, \quad \vec{\nabla} \times [f(r)\vec{r}] = \vec{0}.$$

27. Demuestre que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(r) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{d\vec{F}}{dr}.$$

28. Si $\xi = \vec{A} \cdot \vec{r}$, demuestre que

$$\vec{\nabla}\varphi(\xi) = \vec{A} \frac{d\varphi}{d\xi}.$$