Electromagnetismo (LFIS 211)

Licenciatura en Física
Profesor: J.R. Villanueva   e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 11

1. Un alambre delgado y recto tiene una longitud ℓ y está recorrido por una corriente de intensidad I. Calcular en un punto P cualquiera situado muy lejos del alambre ($r \gg \ell$):
   (a) el potencial vector magnético $\vec{A}$;
   (b) el vector inducción magnética;
   (c) mostrar a partir de (b) que las líneas de campo en el plano xy son circunferencias.

2. Demuestre que el potencial vector magnético para dos alambres largos, rectos y paralelos, que conducen una corriente de la misma intensidad I en sentidos opuestos, está dado por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \widehat{n}, \tag{1}$$

   donde r_2 y r_1 son las distancias desde el punto del campo hasta los alambres, y $\widehat{n}$ es un vector unitario paralelo a los alambres.

3. Considere el siguiente conjunto de conductores: un alambre recto infinitamente largo rodeado por una cáscara cilíndrica delgada de metal (a un radio b) dispuesta coaxialmente con el alambre. Los conductores llevan corriente de igual intensidad I, pero en sentido opuesto. Halle el potencial vector magnético del sistema.

4. (a) Demuestre que

$$\oint_{\zeta} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \Xi_m, \tag{2}$$

   donde Ξ_m es el flujo magnético que pasa a través de la superficie limitada por el circuito ζ.
   (b) Utilice (a) y la ley de Ampere para encontrar $\vec{A}$ a una distancia r tanto hacia afuera como hacia adentro de solenoide muy largo.

5. (a) Demuestre por diferenciación directa de la ecuación

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \mathrm{d}v', \tag{3}$$

   que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.
   (b) Demuestre que $\vec{A} + \vec{\nabla}\psi$, donde ψ es una función arbitraria, es también el potencial vector del mismo campo $\vec{B}$ que $\vec{A}$.
   (c) Demuestre que la selección apropiada de ψ permite que el potencial vector de $\vec{B}$ pueda tener el valor de divergencia que se desee.

6. (a) Demuestre que todas las igualdades siguientes son posibles potenciales vector del campo uniforme $\vec{B} = B\,\widehat{k}$:

$$\vec{A}_1 = -B\,y\,\widehat{\imath}; \quad \vec{A}_2 = B\,x\,\widehat{\jmath}; \quad \vec{A}_3 = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}. \tag{4}$$

   (b) ¿Para cuál de estos campos sucede que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$?

   (c) Demuestre que $\vec{A}_1 - \vec{A}_2$ es el gradiente de una función $\vec{\nabla}\psi$.

7. Demuestre que el campo externo $\vec{B}$ de un alambre largo y recto que conduce una corriente I se deduce del potencial escalar

$$\varphi_m = -\frac{I}{2\pi}\phi, \tag{5}$$

en coordenadas cilíndricas, y que φ_m satisface la ecuación de Laplace. ¿Por qué no es esta φ_m un armónico cilíndrico (como sería el caso para el potencial electrostrático de una línea de carga)?

8. El ángulo de inclinación magnética se define como el ángulo entre la dirección del campo de inducción magnética de la tierra y el plano tangente a la superficie terrestre. Deduzca una expresión para el ángulo de inclinación en función de la altitud geométrica, suponiendo que la inducción es un campo dipolar.

9. Un circuito de forma cuadrada (de lado a) se encuentra sobre el plano xy (el origen está en el centro del cuadrado y sus lados son paralelos a los ejes). Si por el circuito circula una corriente de intensidad I, calcule el campo de inducción magnética $\vec{B}$

   (a) en el centro del cuadrado;

   (b) en el punto $(a/2, 0, a/2)$;

   (c) en el punto $(a, 0, 0)$;

   (d) en el punto $(a/2, 0, -a/2)$.

10. (a) Haga una gráfica en Mathematica de las superficies equipotenciales del potencial escalar magnético para un dipolo magnético (en el plano $\phi = 0$). Grafique al menos 10 líneas del campo inducción magnética.

   (b) Determine la dirección del campo magnético como una función de r y θ.

   (c) Determine la dependencia de r respecto a θ de una línea de campo magnético determinada.

11. (a) Demuestre que el potencial escalar magnético para un punto del eje z de una espira circular de radio a está dado por

$$\varphi_m = \frac{I}{2}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right]. \tag{6}$$

   (b) Desarrolle esta fórmula según el teorema del binomio para obtener una expresión válida para $z < a$ y $z > a$.

12. Una esfera de radio R con una densidad superficial de carga σ (rígidamente unida) gira sobre un eje que pasa por su centro con una velocidad angular constante ω. Demuestre que el campo magnético en un punto exterior es un campo dipolar y halle el momento dipolar equivalente.

13. Dos dipolos $\vec{m}_1$ y $\vec{m}_2$ están en el mismo plano; $\vec{m}_1$ está fijo, pero $\vec{m}_2$ puede girar libremente sobre su centro. Demuestre que, en el equilibrio, $\tan\theta_1 = -2\tan\theta_2$, donde θ_1 y θ_2 son los ángulos entre $\vec{r}$ y $\vec{m}_1$ y $\vec{m}_2$, respectivamente ($\vec{r}$ es el desplazamiento vectorial entre $\vec{m}_2$ y $\vec{m}_1$).