Prueba 1
26 de Septiembre de 2025
Electromagnetismo Intermedio
LFIS322

Instrucciones: Dispone de 90 minutos para responder la prueba. El puntaje total de la prueba es 60 y el de cada pregunta esta indicado. La prueba es personal. No puede consultar formularios, cuadernos, libros ni compañeros. No sólo importa contestar sino hacerlo fundadamente.

Problema 1 (20 pts.) Una densidad de carga lineal λ se coloca paralela y a una distancia R desde el eje de un cilindro conductor de radio b mantenido a un voltaje fijo de modo que el potencial se anula en el infinito.

1. encuentre la magnitud y posición de las cargas imagen
2. encuentre el potencial V_0 del cilindro en términos de R, b y λ.

Problema 2 (20 pts.) En coordenadas cilíndricas, considere la región dentro de un cilindro de radio R, infinito en z. La condición de frontera en la superficie es:

$$V(R, \phi) = V_0 \cos(2\phi), \qquad \text{independiente de } z.$$

(a) Escriba la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para un potencial $V(r, \phi)$ independiente de z.

(b) Resuelva mediante separación de variables, identificando las ecuaciones radiales y angulares.

(c) Determine la solución general $V(r, \phi)$ que cumple la condición de borde dada.

Problema 3 (20 pts.) Dos esferas conductoras concéntricas de radios $a < b$ se mantienen a potenciales

$$V(a) = 0, \qquad V(b) = V_0.$$

(a) Resuelva la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y determine el potencial en la región $a < r < b$.

(b) Calcule el campo eléctrico en dicha región.

(c) Deduzca la capacitancia del sistema.

Formulario Oficial

En esta prueba puede usar las siguientes expresiones:

- Laplaciano en coordenadas:
  - Cartesiano:
  $$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
  - Cilíndrico (independiente de z):
  $$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$
  - Esférico (dependencia radial):
  $$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)$$

Soluciones

Problema 1 (20 pts)

Enunciado. Una línea de carga infinita, de densidad lineal λ, corre paralela al eje z y a distancia R del centro de un cilindro conductor de radio b ($R > b$). El potencial se anula en el infinito.
(a) Encuentre la magnitud y posición de las cargas imagen.
(b) Encuentre el potencial del cilindro V_0 en términos de R, b, λ.

Solución. El problema es bidimensional (independiente de z). El potencial debido a una línea infinita de carga (en 2D) es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\ln(\text{distancia}) + \text{cte}.$$

El método de imágenes para un cilindro conductor de radio b indica que la línea real situada a distancia R del centro se reemplaza, para imponer $V = \text{cte}$ en $r = b$ y $V(\infty) = 0$, por una *única* línea imagen dentro del cilindro, sobre la misma línea radial, a una distancia

$$\boxed{a = \frac{b^2}{R}}$$

del centro y con densidad lineal

$$\boxed{\lambda' = -\lambda\,.}$$

En un punto de la circunferencia $r = b$ con ángulo θ respecto a la recta que une el centro con las líneas, las distancias a la línea real e imagen son

$$d_1 = \sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta}, \qquad d_2 = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ba\cos\theta}, \quad a = \frac{b^2}{R}.$$

Se cumple la *identidad de inversión* $d_1/d_2 = R/b$ (independiente de θ). Por tanto,

$$V(r\!=\!b,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln d_1 + \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\ln d_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\!\left(\frac{R}{b}\right),$$

que es constante en la superficie y además $V(\infty) \to 0$ porque el término proporcional a $(\lambda + \lambda')\ln r$ cancela.

(b) Potencial del cilindro. Evaluando en $r = b$:

$$\boxed{V_0 \equiv V(r\!=\!b) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\ln\!\left(\frac{R}{b}\right).}$$

Problema 2 (20 pts)

Enunciado. En un cilindro de radio R (infinito en z), con V independiente de z, se impone

$$V(R,\phi) = V_0\cos(2\phi).$$

(a) Escriba la ecuación de Laplace en cilíndricas para $V(r,\phi)$.
(b) Resuelva por separación de variables, identificando las ecuaciones radiales y angulares.
(c) Determine $V(r,\phi)$ que satisface la condición de borde.

(a) Ecuación de Laplace. Con V independiente de z,

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0\,.}$$

(b) Separación de variables. Buscamos $V(r,\phi) = R(r)\,\Phi(\phi)$. Sustituyendo:

$$\frac{1}{R}\Big(r^2R'' + rR'\Big) + \frac{1}{\Phi}\Phi'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\Phi}\Phi'' = -n^2, \qquad r^2R'' + rR' - n^2R = 0.$$

Las soluciones son

$$\Phi_n(\phi) = \cos(n\phi),\ \sin(n\phi), \qquad R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}.$$

La regularidad en el eje ($r = 0$) requiere $B_n = 0$.

(c) Solución con la condición $V(R,\phi) = V_0\cos 2\phi$. La condición angular selecciona sólo el modo $n = 2$ con coseno. Por continuidad en $r = R$:

$$A_2R^2 = V_0 \;\Rightarrow\; A_2 = \frac{V_0}{R^2}.$$

Luego,

$$\boxed{V(r,\phi) = V_0\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos(2\phi), \qquad 0 \le r \le R.}$$

Problema 3 (20 pts)

Enunciado. Dos esferas conductoras concéntricas de radios $a < b$ tienen

$$V(a) = 0, \qquad V(b) = V_0.$$

(a) Halle $V(r)$ en $a < r < b$.
(b) Calcule $\vec{E}$ en $a < r < b$.
(c) Deduzca la capacitancia C.

(a) Potencial. En $a < r < b$, $\nabla^2 V = 0$ y por simetría esférica

$$V(r) = A + \frac{B}{r}.$$

Contornos:

$$A + \frac{B}{a} = 0, \qquad A + \frac{B}{b} = V_0.$$

Restando: $B\big(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\big) = -V_0 \Rightarrow B = -\dfrac{ab\,V_0}{b-a}$, y

$$A = V_0 - \frac{B}{b} = V_0 + \frac{aV_0}{b-a} = \frac{bV_0}{b-a}.$$

Así,

$$\boxed{V(r) = A + \frac{B}{r} \;=\; V_0\,\frac{b(r-a)}{(b-a)\,r} \;=\; V_0\,\frac{1-\frac{a}{r}}{1-\frac{a}{b}}\,, \qquad a < r < b.}$$

(b) Campo eléctrico.

$$\boxed{E_r(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{ab\,V_0}{(b-a)\,r^2}\,, \qquad a < r < b, \quad \vec{E} = E_r\,\hat{r}.}$$

(c) Capacitancia. La carga en la esfera interna (Gauss):

$$Q = 4\pi\varepsilon_0\,a^2\,E_r(a) = 4\pi\varepsilon_0\,a^2\,\frac{ab\,V_0}{(b-a)\,a^2} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{ab}{b-a}\,V_0.$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{ab}{b-a}\,.}$$