PRIMERA PRUEBA
27 de Septiembre de 2024
Electromagnetismo Intermedio
LFIS322

Instrucciones: Dispone de 90 minutos para responder la prueba. El puntaje total de la prueba es 60 y el de cada pregunta esta indicado. La prueba es personal. No puede consultar formularios, cuadernos, libros ni compañeros. No sólo importa contestar sino hacerlo fundadamente.

Problema 1 (20 pts.) Una línea de carga con densidad de carga lineal infinita λ se coloca paralela y a una distancia R desde el eje de un cilindro conductor infinito de radio b mantenido a un voltaje fijo V_0 de modo que el potencial se anula en el infinito (perpendicular a la distribución infinita).

(a) encuentre la magnitud y posición de las cargas imagen

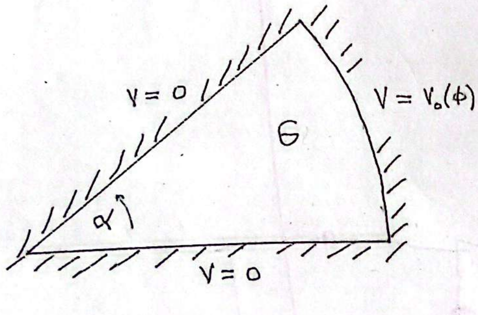
(b) encuentre el potencial V_0 del cilindro en términos de R, b y λ.

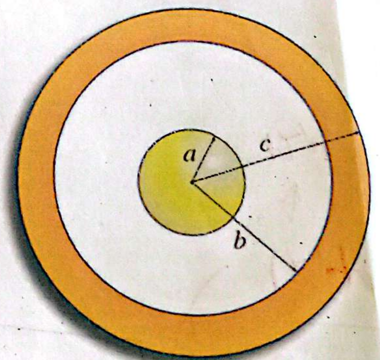
Problema 2 (20 pts.)
Considere una esfera maciza conductora de radio a (ver figura abajo) se encuentra a un potencial V_0 en toda su superficie con respecto al infinito. La esfera esta recubierta por un casquete esférico conductor de radio interno b y radio externo c.

(a) Determine el campo eléctrico y el potencial eléctrico en todo el espacio. Además encuentre las densidades de carga inducidas en los conductores.

(b) Si el casquete esférico se conecta a tierra, ¿cómo cambian sus respuestas anteriores?.

Problema 3 (20 pts.)
Resuelva mediante separación de variables el problema de condiciones de contorno en dos dimensiones que se muestra en la figura (abajo a la izquierda). Calcule el potencial en la región G.



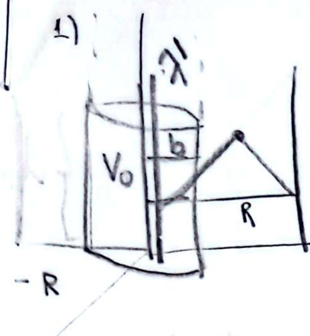


Formulario Oficial
El Laplaciano en coordenadas polares es

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Mauro Silvez

1)



x ?

→ Campo líneo

$$\int \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \rightarrow E\, 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

4,1

$$|E_{line}| = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$ ✓

$$V = -\int_{r_0}^{r+} \frac{\lambda}{2\pi r L \epsilon_0} \rightarrow V_{Line} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r+}{r_0}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r+}\right)$$ ✓

$$\Rightarrow V_T = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \lambda \ln\left(\frac{b}{r+}\right) + \lambda' \ln\left(\frac{b}{r-}\right) \right\}$$

P1	5
P2	8
P3	18
	31

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \quad | \quad \vec{r}_\lambda' = R\hat{\imath} \quad | \quad \vec{r}_{\lambda'}' = R'\hat{\imath}$$

cartesiano?

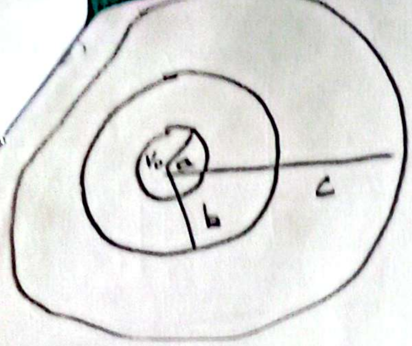
$$r+ = |\vec{r} - \vec{r}_\lambda'| = \left((x-R)^2 + y^2\right)^{1/2}$$ ✗

$$r- = |\vec{r} - \vec{r}_{\lambda'}'| = \left((x-R')^2 + y^2\right)^{1/2}$$

$$V_T = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \lambda \ln\left(\frac{b}{((x-R)^2+y^2)^{1/2}}\right) + \lambda' \ln\left(\frac{b}{((x-R')^2+y^2)^{1/2}}\right) \right\}$$

$$\Rightarrow V(b,0) = V_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \lambda \ln\left(\frac{b}{(b-R)}\right) + \lambda' \ln\left(\frac{b}{(b-R')}\right) \right\}$$

$$2\pi\epsilon_0 V_0 = \ln\left(\frac{\;}{\;-R}\right)$$



• Regiones

I) $0 < r < a$ IV) $c < r < \infty$

II) $a < r < b$

III) $b < r < c$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

→ Por Ley de Gauss: $\int \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

• En la región I: $\vec{E} = 0$ (Ya que no hay cargas dentro del conductor, sólo en la superficie) y $V_I = 0$ V_0 !!

• II) $\int \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_a}{\epsilon_0} \longrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q_a}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q_a \hat{r}}{4\pi r^2 \epsilon_0}}$

$$\boxed{V_{II} = -\int_a^b \frac{Q_a\, dr}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} \rightarrow V_{II} = V(b) - V(a) \leftarrow V(a) = V_0$$

III) $\vec{E}_{inside} = 0$ | $\Delta V = V(c) - V(b) = 0 \rightarrow \boxed{V(c) = V(b)}$

$\Delta V = V_{III} = 0$

$$\boxed{V(c) = V_0 + \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} \quad \boxed{V(a) = V_0}$$

$$\boxed{V(b) = V_0 + \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

?

IV) $\int \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_a + Q_{bc}}{\epsilon_0} \rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q_a + Q_{bc}}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q_a + Q_{bc}}{4\pi r^2 \epsilon_0}}$

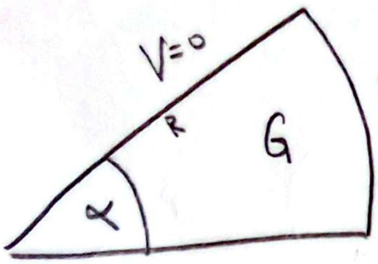
$$V_{IV} = \Delta V = \cancel{V(\infty)}_{0} - V(c) \Rightarrow \boxed{V_{IV} = -\left(V_0 + \frac{Q_a + Q_{bc}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right)}$$

$$\frac{Q_a}{A} = \sigma \quad \Bigg| \quad \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = \epsilon_0 \vec{E}_n \cdot \hat{n}$$

$$\sigma_a = \frac{\cancel{\epsilon_0} \cdot Q_a}{4\pi a^2 \cancel{\epsilon_0}} \longrightarrow \boxed{\sigma_a = \frac{Q_a}{4\pi a^2}}$$

b)

$$V(r,\phi)$$



$V(r,0)=0$, para $r<R$

$V(r,\alpha)=0$, para $r<R$

$V(R,\phi)=V_0(\phi)$, para $0<\phi<\alpha$

$$\rightarrow V(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)\longrightarrow \nabla^2V=0$$

$$\rightarrow \nabla^2V=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0$$

$$\rightarrow \frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0 \Big/ \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\rightarrow \frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0\rightarrow \begin{cases}\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=K^2\\ \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-K^2\end{cases}$$

Caso $K=0$

$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=0\longrightarrow R_0(r)=a_0+b_0\ln(r)$

$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0\longrightarrow \Phi_0(\phi)=A_0+B_0\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_K(\phi)=A_K\,\mathrm{Sen}(K\phi)+B_K\cos(K\phi)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=\frac{RK^2}{r}$$

Proponemos sol. de la forma $\longrightarrow R(r)=r^{\nu}$ $\begin{cases}R'=\nu r^{\nu-1}\\ R''=\nu(\nu-1)r^{\nu-2}\end{cases}$

$$\rightarrow rR'+r^2R''=RK^2\rightarrow r\cdot r^{\nu-1}\cdot\nu+r^2\cdot\nu(\nu-1)r^{\nu-2}=r^{\nu}K^2$$

$$\Rightarrow \nu^2=K^2\longrightarrow \nu=\pm K$$

$$\Rightarrow \boxed{R_K(r)=a_K r^{K}+b_K r^{-K}}$$

$$\Rightarrow V(r,\phi)=(a_0+b_0\ln(r))(A_0+B_0\phi)+\sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K r^{K}+b_K r^{-K}\right)\left(A_K\,\mathrm{Sen}(K\phi)+B_K\cos(K\phi)\right)$$

$$\begin{cases} \Phi_k(0) = 0 \Rightarrow A_k \,\mathrm{Sen}(0) + B_k = 0 \longrightarrow \boxed{B_k \equiv 0} \\ \Phi_0(0) = 0 \rightarrow 0 = A_0 + B_0 \cdot 0 \longrightarrow \boxed{A_0 \equiv 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_k(\alpha) = 0 \rightarrow A_k \,\mathrm{Sen}(k\alpha) = 0 \rightarrow \boxed{k \equiv \frac{n\pi}{\alpha}} \\ \Phi_0(\alpha) = 0 \longrightarrow 0 = B_0 \cdot \alpha \longrightarrow \boxed{B_0 \equiv 0} \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$

• Eq. radial: Dentro de la región el potencial es finito en el origen ∴ $\boxed{b_k = b_0 = 0}$

$$\Rightarrow V(r,\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cdot A_k \,\mathrm{Sen}(k\phi) \quad \text{pero} \quad k = \frac{n\pi}{\alpha}$$

?

$$\rightarrow V(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k r^k \,\mathrm{Sen}(k\phi) \leftarrow$$ Reemplazaremos después.

$$\rightarrow V(R,\phi) = V_0(\phi) = \sum A_k R^k \,\mathrm{Sen}(k\phi) \;\Big/ \int \mathrm{Sen}(k\phi)\,d\phi$$

$$\int_0^{\alpha} V_0(\phi)\,\mathrm{Sen}(k\phi)\,d\phi = \frac{1}{\pi} \sum A_k R^k$$

$$\longrightarrow A_k = \frac{\pi}{R^k} \int V_0(\phi)\,\mathrm{Sen}(k\phi)\,d\phi$$

Segunda Prueba
Electromagnetismo Intermedio

LFIS 322

November 22, 2024

Instrucciones: Dispone de 90 minutos para responder la prueba. El puntaje de cada pregunta está indicado. No puede consultar formularios, apuntes, cuadernos, teléfonos mobiles ni a sus compañeros.

1. (10 ptos) Suponga que hoy 22 de noviembre se descubre que sí existen las cargas magnéticas. Explique cómo se modifican las ecuaciones de Maxwell y porqué.

$\sigma = \vec{P} \cdot \hat{m}$

$\rho = -\vec{\nabla} \vec{P}$

2. (10 ptos) Un cubo dieléctrico de lado a, que está centrado en el origen, tiene una polarización $\mathbf{P} = k\mathbf{r}$, donde k es una constante. Calcule las cargas ligadas. Comente el resultado.

3. (15 ptos) Calcule el término monopolar y cuadrupolar de un anillo uniformemente cargado con q de radio R.

4. (15 ptos) Encuentra el potencial vectorial magnético de un alambre recto y finito que transporta una corriente I. (Coloca el alambre en el eje z, desde z_1 hasta z_2) entonces utiliza $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ para obtener el campo magnético.

5. (10 ptos) Calcule la autoinductancia de un cable coaxial por la cual pasa una corriente I, de radio interno a (en una dirección) y radio externo b (en la dirección opuesta).

Mauro Jélvez

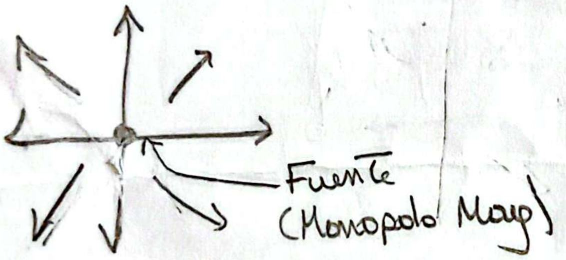
1) Tenemos que las ecuaciones de Maxwell antes del descubrimiento son:

$\to \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\to \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\to \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\to \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

(4)

• El mayor cambio será en $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ donde será $\neq 0$ ya que al igual que para $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, al otro lado de la ecuación estará el monopolo magnético (fuente de campo magnético).

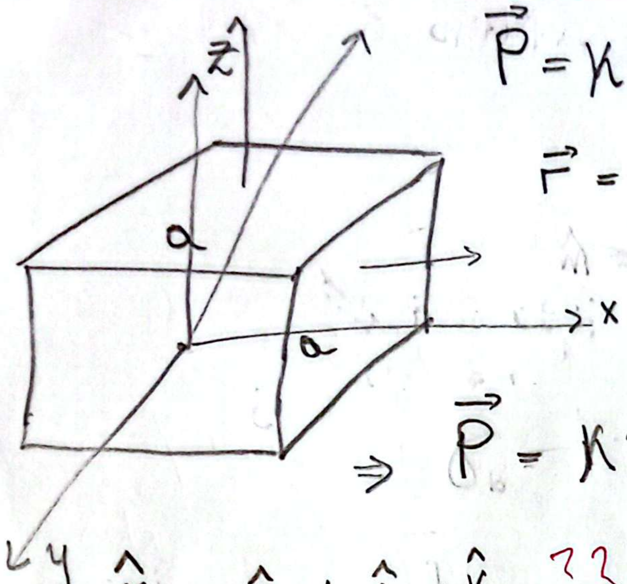


También $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ ya no sería loops cerrados para $\vec{B}$ y habría que modificar la Ley de Ampere, que hace una integral en el camino de los Loops circulares de $\vec{B}$.

P1	4
P2	8
P3	2
P4	9
P5	5
	35

4,5

2)



$$\vec{P} = k\vec{r}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = kx\hat{i} + ky\hat{j} + kz\hat{k} = k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\hat{n} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$??

$$\rightarrow \sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} = k\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$\sigma_b = k\left(x + y + z\right)\Big|_{x,y,z=a} \longrightarrow \boxed{\sigma_b = 3ak}$$

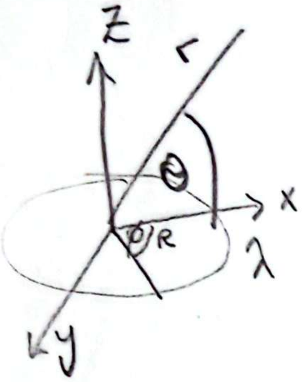
$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad \Big| \quad \vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\rho_b = -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)k$$

$$\Rightarrow \rho_b = -k\left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z}\right) \rightarrow \boxed{\rho_b = -3k}$$

$\rightarrow \rho_b$ y σ_b Tienen una forma muy parecida debido a la simetría del problema (cubo centrado en el origen)

3) $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int d\tau' \, (r')^n P_n(\cos\alpha) \, \rho(\vec{r}')$



$P_0 = 1$

$P_1 = \cos\alpha$

$P_2 = \frac{3}{2}(\cos^2\alpha - 1)$

$r' = R$

$dl = R\,d\phi$

$\frac{dq}{dl} = \lambda \rightarrow dq = \lambda\, dl$

$n=0 \rightarrow$ Mono
$n=1 \rightarrow$ Di
$n=2 \rightarrow$ Cua

- Término monopolar

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \oint \lambda\, dl' \cdot 1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \int_0^{2\pi} \lambda R\, d\phi'$$

$$\rightarrow V(\vec{r}) = \frac{\lambda R 2\pi}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q \cdot R}{4\pi\epsilon_0 r} \longrightarrow \boxed{V_0(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)}$$

Monopolo

- Término cuadrupolar ($n = 2$)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \int \lambda\, dl' \cdot R^2 \cdot \frac{3}{2}(\cos^2\alpha - 1)$$

Sabemos que

$\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}' = rR\cos\alpha$

$$\cos\alpha = (\cos\phi'\,\hat{i} + \sin\phi'\,\hat{j})(\sin\theta\cos\phi'\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi'\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k})$$

$$\cos\alpha = \sin\theta\cos^2\phi + \sin\theta\sin^2\phi = \sin\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \sin\theta$$

$\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}' = rR\sin\theta$

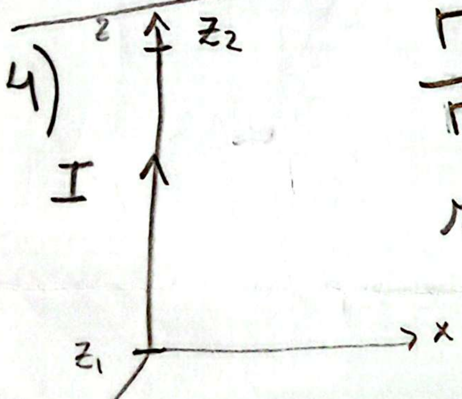
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\int_0^{2\pi} \lambda R\,d\phi \cdot R^2 \cdot \frac{3}{2}\left(\sin^2\theta - 1\right)$$

$$q$$

$$V(\vec{r}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda R^3 \cos^2\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\cdot 2\pi$$

$$\boxed{\Rightarrow V_2(\vec{r}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{q\cos^2\theta}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3}$$

4)



$$\vec{r} = r\hat{\rho} + z\hat{k}$$

puede ser cero.

$$\vec{r}\,' = z'\hat{k}$$

$$\mathcal{r} = |\vec{r} - \vec{r}\,'| = \left(r^2 + (z-z')^2\right)^{1/2}$$

$u = z - z'$ $\quad u(z_1) = z - z_1$

$du = -dz'$ $\quad u(z_2) = z - z_2$

$\tan\theta = \frac{u}{r}$

$u = r\tan\theta$

$du = r\sec^2\theta\, d\theta$

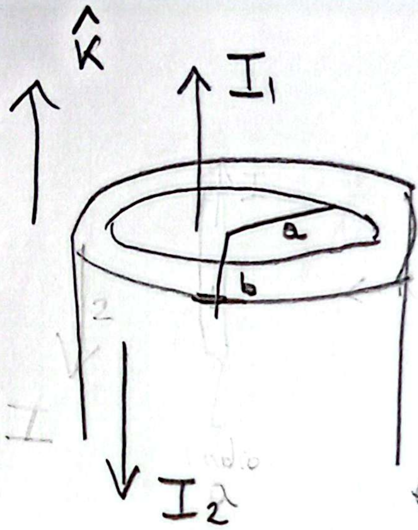
$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz'}{\left(r^2 + (z-z')^2\right)^{1/2}}$$

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz'}{\left(r^2 + (z-z')^2\right)^{1/2}} = -\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\left(r^2 + u^2\right)^{1/2}}$$

$$= -\int_{u_1}^{u_2}\frac{r\sec^2\theta\, d\theta}{r^2\left(1+\tan^2\theta\right)^{1/2}} = -\frac{1}{r}\int_{u_1}^{u_2}\sec\theta\, d\theta\left(\frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right)$$

Escaneado con CamScanner

5)



Campo para linea de carga

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Sabemos que el potencial $\vec{A}$ apunta en la misma dirección que I

$$\Rightarrow \vec{B_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\phi} \quad \Big| \quad \Rightarrow \vec{B_2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}(-\hat{\phi})$$

$$L = \oint\oint \frac{\vec{dl_2}\cdot\vec{dl_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|} = \begin{cases} \vec{dl_2} = b\,d\phi\,(-\hat{\phi}) \\ \vec{dl_1} = a\,d\phi\,(\hat{\phi}) \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{array}{l} \vec{r_2} = b\,\hat{r} \\ \vec{r_1} = a\,\hat{r} \end{array}$$

$$L = \frac{4\pi^2 \cdot ab\,(-1)}{(a^2+b^2 \quad b^2)^{1/2}}$$

Mauro Jélvez

RECUPERATIVA
TERCERA PRUEBA
17 de Diciembre de 2024
Electromagnetismo Intermedio
LFIS322

Instrucciones: Dispone de 90 minutos para responder el examen. El puntaje total de la prueba es 60 y el de cada pregunta esta indicado. La prueba es personal. No puede consultar formularios, cuadernos, libros ni compañeros. No sólo importa contestar sino hacerlo fundadamente.

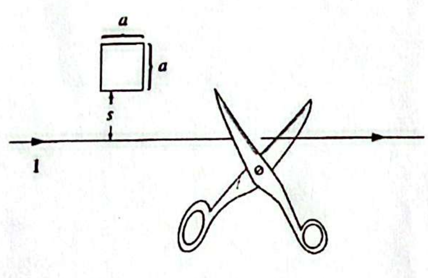
Problema 1 (15 pts.)

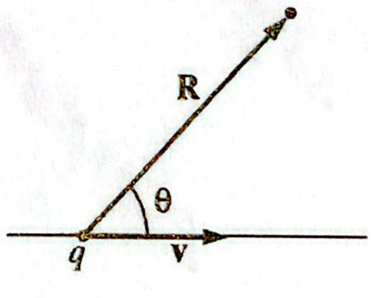
(a) Considere dos cargas puntuales iguales q, separadas por una distancia $2a$. Construya el plano equidistante de las dos cargas. Al integrar el tensor de tensión de Maxwell sobre este plano, determine la fuerza de una carga sobre la otra.

(b) Haga lo mismo con las cargas de signo opuesto.

Problema 2 (20 pts.)Una espira cuadrada, lado a, resistencia R, se encuentra a una distancia s de un alambre recto infinito que transporta corriente I (ver figura). Ahora alguien corta el cable, de modo que I cae a cero. ¿En qué dirección fluye la corriente inducida en la espira cuadrada y qué carga total pasa por un punto dado de la espira durante el tiempo que fluye esta corriente? Si no le gusta el modelo de tijera, baje la corriente gradualmente con el modelo:

$$I(t) = \begin{cases} (1-\alpha t)I, & \text{para } 0 < t < 1/\alpha, \\ 0, & \text{para } t > 1/\alpha. \end{cases}$$





Problema 3 (25 pts.)

(a) (5 pts.) Encuentre los potenciales retardados de una carga que se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}_0$. Asuma que inicialmente (en $t = 0$) la posición de la carga es $\mathbf{w} = \mathbf{v}t$.

(b) (10 pts.) Asumiendo que la aceleración de la carga y el vector $\mathbf{R}$ forman un ángulo θ (ver figura), muestre que

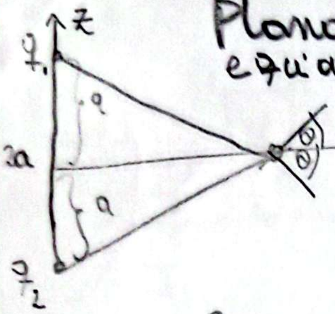
$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R\sqrt{1 - v^2\sin^2\theta/c^2}}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi(\mathbf{r},t).$$

(c) (10 pts.) Calcule el campo eléctrico generado por una carga que se mueve con velocidad constante.

$$T_{ij} = \epsilon_0\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right]$$

1) $\vec{B}=0$ | Para dos cargas iguales q_1 tiene componente

Plano en $z=0$ equidistante



$E_z^{Total} = 0$ (Debido a que $+\hat{k}$ y q_2 $(-\hat{k})$

$\hookrightarrow E_z = 0$

$\rightarrow \vec{E}_{Total} = \dfrac{2q}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{r}^2} \cos\theta\, \hat{r}$ | $\mathcal{r} = (r^2 + a^2)$

$\hookrightarrow r^2 = x^2 + y^2$

$\cos\theta = \dfrac{r}{\mathcal{r}}$

$\rightarrow E^2 = \left(\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \dfrac{\cos^2\theta}{\mathcal{r}^4}$

$\rightarrow E^2 = \left(\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{\mathcal{r}^4} \cdot \dfrac{r^2}{\mathcal{r}^2} = \left(\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \dfrac{r^2}{(r^2+a^2)^3}$

6,5

$(\overleftrightarrow{\mathbb{T}} \cdot d\vec{A})_z = T_{zx}\, \cancel{dA_x} + T_{zy}\, \cancel{dA_y} + T_{zz}\, dA_z$
$\quad 0 \qquad 0$

ya que la normal z es $\perp$ al plano

$\rightarrow (\overleftrightarrow{\mathbb{T}}\, d\vec{A})_z = T_{zz}\, dA_z$ | $dA_z = -r\,dr\,d\phi$

$\rightarrow T_{zz} = \epsilon_0 \left[\cancel{E_z^2}_{\,0} - \dfrac{1}{2}E^2\right] \rightarrow T_{zz} = -\dfrac{\epsilon_0}{2}\left(\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \dfrac{r^2}{(r^2+a^2)^3}$

$\rightarrow \oint T_{zz}\, dA_z = +\dfrac{\epsilon_0}{2}\left(\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \dfrac{r^3\, dr\, d\phi}{(r^2+a^2)^3}$

$= \dfrac{\epsilon_0}{\cancel{2}}\left(\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \cancel{2}\pi \underbrace{\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{r^3\, dr}{(r^2+a^2)^3}}_{I}$ | $u = r^2 + a^2$, $r^2 = u - a^2$, $\dfrac{du}{2} = r\,dr$, $u(0) = a^2$, $u(\infty) = \infty$

$\rightarrow I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{a^2}^{\infty} \dfrac{(u-a^2)\, du}{u^3} = \dfrac{1}{2}\left\{ \left(-\dfrac{1}{u}\right)\Big|_{a^2}^{\infty} - \dfrac{a^2}{2}\left(-\dfrac{1}{u^2}\right)\Big|_{a^2}^{\infty} \right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{ \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{a^2}{2a^4} \right\} = \dfrac{1}{2a^2}\left\{ 1 - \dfrac{1}{2} \right\} = \dfrac{1}{2a^2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4a^2}$

$\Rightarrow \boxed{F_z = \dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{1}{(2a)^2}}$ (a)

Mauro Jélvez

Ahora las cargas en Z no se anulan

ya que $E_{q(-)} = -\dfrac{q\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}(-\hat{r})$

$\Rightarrow E_z \neq 0 \longrightarrow E_z = \dfrac{2q\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

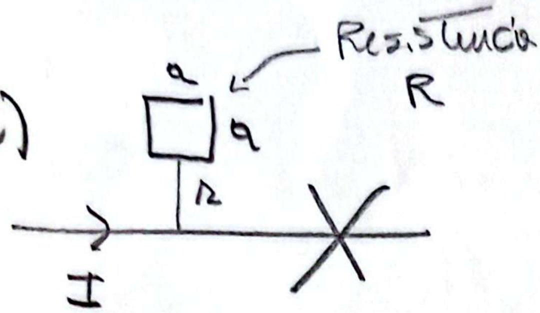
$$T_{zz} = \epsilon_0\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}\cdot\frac{r^2}{r^2}\left\{1-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\rightarrow T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{r^2}{(r^2+a^2)^3} \quad / \; dA_z = -r\,dr\,d\phi$$

$$\Rightarrow \oint T_{zz}\,dA_z = -\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\cdot 2\pi \underbrace{\int_0^\infty \frac{r^3}{(r^2+a^2)^3}dr}_{\frac{1}{(2a)^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{F_z = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{(2a)^2}}$$

2)



$$\xi = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$\Phi_b = B \cdot A$ / $\int \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

$$B\, 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \Big| \; A = a^2$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 (1-\alpha t) I}{2\pi r}$$

El campo de la línea es saliente al plano ⊙

$$\rightarrow \Phi_b = \frac{\mu_0 I_0 a^2 (1-\alpha t)}{2\pi r}$$

$$\rightarrow \xi = -\frac{d\Phi_b}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 a^2}{2\pi r}(-\alpha) \rightarrow \xi = \frac{\mu_0 I_0 a^2 \alpha}{2\pi r}$$

$$\xi = I' R \longrightarrow I' = \frac{\mu_0 I_0 a^2 \alpha}{2\pi r R}$$

Corriente inducida en la espira

→ La carga que pasa será

$$I' = \frac{dq'}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 a^2 \alpha}{2\pi r R} \Big/ \int dt$$

$$q'(t) = \frac{\mu_0 I_0 a^2 \alpha t}{2\pi r R} + q'_0$$

La ξ produce una corriente en sentido contrario oponiéndose al cambio

→ Para $t \rightarrow \infty$ / $q' \rightarrow 0$ por el corte en la línea por lo que $q'_0 = 0$

$$\Rightarrow q(t) = \frac{\mu_0 I_0 a^2 \alpha t}{2\pi r R}$$

Mauro Jélvez

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \vec{\beta}\vec{R}]\big/_{t_r}} \quad \Big| \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{V}_0}{c^2} \phi(\vec{r},t)$$

$$R(t) = |\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - w(t)| = |\vec{r} - \vec{V}_0 t|$$

$$R(t_r) = c(t - t_r) \quad \Big| \quad \vec{\beta} = \frac{1}{c}\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\vec{V}_0}{c}$$

$$|\vec{r} - \vec{V}_0 t_r| = c(t - t_r) \;/^2$$

$$(r^2 - 2\vec{r}\vec{V}_0 t_r + V_0^2 t_r^2) = c^2(t^2 - 2t t_r + t_r^2)$$

$$t_r^2(c^2 - V_0^2) + t_r(2\vec{r}\vec{V}_0 - 2tc^2) + (c^2t^2 - r^2) = 0$$

$$t_r = \frac{2(\vec{r}\cdot\vec{V}_0 - tc^2) \pm \sqrt{4(\vec{r}\vec{V}_0 - tc^2)^2 + 4(c^2 - V_0^2)(c^2t^2 - r^2)}}{2(c^2 - V_0^2)}$$

$$t_r = \frac{(\vec{r}\cdot\vec{V}_0 - tc^2) - \sqrt{(\vec{r}\cdot\vec{V}_0 - tc^2)^2 + (c^2 - V_0^2)(c^2t^2 - r^2)}}{(c^2 - V_0^2)}$$

$$\rightarrow [R - \vec{R}\vec{\beta}]\big/_{t_r} = R\left(1 - \frac{\vec{V}_0\hat{R}}{c}\right) \longrightarrow \text{com } \hat{R} = \frac{\vec{R}(t_r)}{|R(t_r)|} = \frac{\vec{r} - \vec{V}_0 t_r}{c(t - t_r)}$$

$$\Rightarrow R\left[1 - \frac{\vec{V}_0\hat{R}}{c}\right] = \boxed{\frac{\sqrt{(\vec{r}\cdot\vec{V}_0 - tc^2)^2 + (c^2 - V_0^2)(c^2t^2 - r^2)}}{c}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{c}{\sqrt{(\vec{r}\cdot\vec{V}_0 - tc^2)^2 + (c^2 - V_0^2)(c^2t^2 - r^2)}}} \quad (a)$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{V}_0 / c}{\sqrt{(\vec{r}\cdot\vec{V}_0 - tc^2)^2 + (c^2 - V_0^2)(c^2t^2 - r^2)}}}$$

b) $R(t) = |\vec{r} - \vec{V}_0 t| = (r^2 + V_0^2 t^2)^{1/2}$

?

$\vec{r} \cdot \vec{V}_0 \longrightarrow r V_0 \cos\theta$

$(r V_0 \cos\theta - t c^2)^2 = r^2 V_0^2 \cos^2\theta - 2 r V_0 \cos\theta \, t c^2 + t^2 c^4$

$(c^2 - V_0^2)(c^2 t^2 - r^2) = c^4 t^2 - c^2 r^2 - V_0^2 c^2 t^2 + V_0^2 r^2$

$= -c(r^2 + V_0^2 t^2) + V_0^2 r^2 + c^4 t^2$

$= -R + V_0^2 r^2 + c^4 t^2$

$\Rightarrow r^2 V_0^2 (\cos^2\theta + 1) - R + 2c^4 t^2 - 2 r V_0 \cos\theta \, t c^2$

$r^2 V_0^2 \sin^2\theta - R + 2c^2 t (c^2 t - r V_0 \cos\theta)$

3c) $E = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$ | $R(\vec{r}, t)$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$