Quiz 2 – Electromagnetismo Intermedio (LFIS322)

Clases 1–5

Tiempo máximo: 20 minutos. Justifique sus respuestas.

1. **(Notación indicial – 2 pts)** Demuestre usando notación indicial que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0.$$

2. **(Gradiente y potencial – 2 pts)** Sea

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}.$$

Calcule el gradiente ∇f y discuta su dirección en relación al vector posición $\vec{r}$.

3. **(Ley de Gauss – 4 pts)** Una esfera maciza de radio R tiene densidad de carga uniforme ρ.

   (a) Calcule el campo eléctrico en el interior ($r < R$).

   (b) Calcule el campo eléctrico en el exterior ($r > R$).

4. **(Potencial de una varilla cargada – 4 pts)** Una varilla delgada de longitud L, cargada uniformemente con densidad lineal λ, está situada sobre el eje x entre $x = 0$ y $x = L$.

   (a) Calcule el potencial $V(P)$ en un punto P sobre el eje y, a una distancia a del origen.

   (b) A partir de V, obtenga la componente E_y del campo eléctrico en P.

Puntaje total: 12 pts.

Soluciones – Quiz 2 (Clases 1–5)

1. **(Notación indicial – 3 pts)** Demostrar que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

   Solución (notación indicial):

   $$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k) = \varepsilon_{ijk}\, \partial_i \partial_j A_k.$$

   Como $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ (conmutan) es simétrica en $i \leftrightarrow j$, mientras que ε_{ijk} es antisimétrica en $i \leftrightarrow j$, su contracción es nula:

   $$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0}.$$

2. **(Gradiente y potencial – 3 pts)** Para $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

   Solución: Sea $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces

   $$\nabla f = -2(x, y, z)\, e^{-r^2} = -2\, \vec{r}\, e^{-r^2}.$$

   Dirección: ∇f apunta *opuesta* a $\vec{r}$ (hacia el origen); su módulo decrece rápido por el factor e^{-r^2}.

   $$\boxed{\nabla f = -2(x, y, z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}}.$$

3. **(Ley de Gauss – 4 pts)** Esfera maciza de radio R con densidad uniforme ρ.

   Interior $r < R$:

   $$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}\,\hat{r}}.$$

   Exterior $r > R$: $Q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$,

   $$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}}.$$

4. **(Potencial de una varilla cargada – 5 pts)** Varilla delgada de longitud L sobre el eje x (de 0 a L) con densidad lineal λ. Punto P en el eje y a distancia a del origen.

   Potencial en $P = (0, a)$:

   $$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\ln\big(x + \sqrt{x^2 + a^2}\big)\Big]_0^L.$$

   $$\boxed{V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + a^2}}{a}\right)}.$$

   Campo E_y a partir de V:

   $$E_y(P) = -\frac{\partial V}{\partial a} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a}{\sqrt{L^2 + a^2}\,\big(L + \sqrt{L^2 + a^2}\big)} - \frac{1}{a}\right).$$

   Esto simplifica elegantemente usando $R = \sqrt{L^2 + a^2}$:

   $$\frac{1}{a} - \frac{a}{R(L + R)} = \frac{L}{aR} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_y(P) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{a\sqrt{L^2 + a^2}}}.$$

   (Para $\lambda > 0$ y $a > 0$, $E_y > 0$: el campo apunta en $+\hat{y}$, *alejándose* de la varilla cargada.)