

→ ELECTROMAGNETISMO INTERMEDIO

CONTENIDOS

I) Electrostática $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$ } P1: 27/09

II) Técnicas de Solución para eq. de Poisson

III) Magnetostática $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$ } P2: 15/11

IV) Electromagnetismo en la materia

V) Electrodinámica

- Potenciales electro magnéticos
- Tensor electromagnético
- Radiación
- Potenciales de Lorentz - Wiedemann

I) INTRODUCCIÓN

• Coordenadas cartesianas: $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = \hat{i} \\ \hat{e}_2 = \hat{j} \\ \hat{e}_3 = \hat{k} \end{array} \right. \rightarrow \text{Base Ortonormal} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \\ \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k \epsilon_{ijk} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \hat{e}_i) \cdot (B_j \hat{e}_j) = A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = A_i B_i$$

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A} \times \vec{B})_i \hat{e}_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \hat{e}_i$$

* Identidad: $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \partial_i \phi \hat{e}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \hat{e}_i \quad \left\{ \Rightarrow \vec{\nabla} = \hat{e}_i \partial_i \right.$$

① Divergencia de un vector

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (\hat{e}_i \partial_i) \cdot (A_j \hat{e}_j) = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \partial_i A_j = \partial_i A_i$$

② Rotacional de un vector

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = (\hat{e}_i \partial_i) \times (A_j \hat{e}_j) = \hat{e}_i \times \hat{e}_j \partial_i A_j = \hat{e}_k \epsilon_{ijk} \partial_i A_j$$

$$\bullet \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = (\hat{e}_i \partial_i) \cdot (f A_j \hat{e}_j) = (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \partial_i (f A_j) = \delta_{ij} [(\partial_i f) A_j + f (\partial_i A_j)] \\ = (\partial_i f) A_i + f (\partial_i A_i) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$① \text{TAREA } 2 \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$$

$$= (\hat{e}_i \partial_i) \times (\hat{e}_j \partial_j \phi) = (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) (\partial_i \partial_j \phi) = \hat{e}_k \epsilon_{ijk} (\partial_i \partial_j \phi) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

LEY DE COULOMB

$$\vec{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \left[\frac{C^2}{Nm^2} \right]$$

* Usando notación de Griffiths

$$\boxed{\vec{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r'^2} \hat{r}}$$

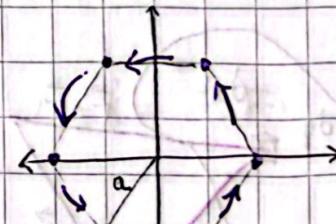
CAMPO ELÉCTRICO

- Centrado en la carga q . Q será una carga de prueba.

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}') = \lim_{Q \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}_{qQ}}{Q} \right) \quad \rightarrow \vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{q4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}' - \vec{r}|} (\vec{r}' - \vec{r})$$

→ La fuerza sobre Q se calcula:

$$\boxed{\vec{F}_{qQ} = Q \vec{E}(\vec{r}')}}$$



Ejemplo: 6 cargas q , en los vértices de un hexágono. Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio

$$\rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\rightarrow \vec{r}_k = a \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\hat{i} + a \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\hat{j}, \quad k = 1, \dots, 6$$

$$\vec{r} - \vec{r}_k = \hat{i}(x - a \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)) + \hat{j}(y - a \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right))$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_k|^2 = (x - a \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right))^2 + (y - a \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right))^2$$

• Finalmente

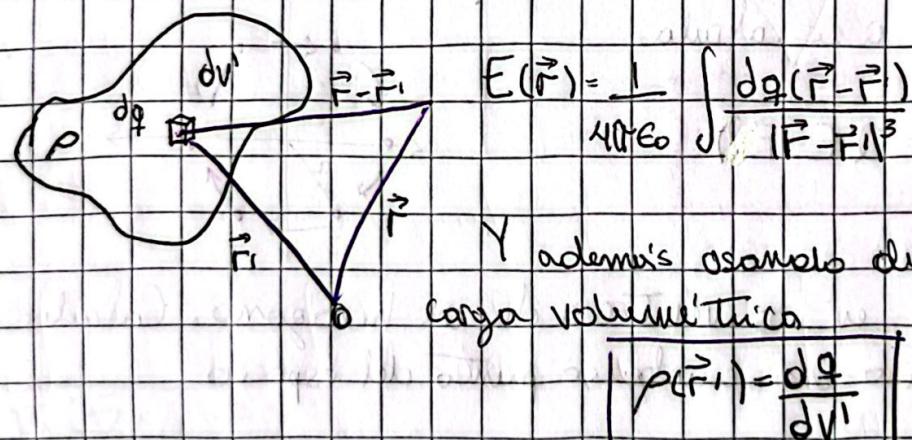
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(x - a\cos(\frac{n\pi}{3})) + j(y - a\sin(\frac{n\pi}{3}))}{[(x - a\cos(\frac{n\pi}{3}))^2 + (y - a\sin(\frac{n\pi}{3}))^2]^{3/2}}$$

I) $E(0,0) \rightarrow 0$?

II) Campo eléctrico de distribuciones continuas de cargas

* 1 carga: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$

* N cargas: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$ (iguales)



Finalmente

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')$$

• Superficial: $dq = \sigma(\vec{r}') dS'$

• Lineal: $dq = \lambda(\vec{r}') dl'$

* Derivación de la ecuación de la electricidad tórica

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

$V(\vec{r})$: Potencial electrostático en \vec{r} .

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

$$\rightarrow \text{Pues sabemos que } \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{\mu}}{\mu^2} = 4\pi \delta^3(\vec{r}) , \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

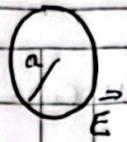
$$\rightarrow \text{Por lo tanto} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad \text{ley de Gauss}$$

→ Usando Teorema de la Divergencia

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q/V \Rightarrow \boxed{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q/S}$$

Teorema de Gauss electrostático

Ej: $\rho(r) = ar$, $a \in \mathbb{R}$



→ Calcula \vec{E} en todo el espacio (podemos usar Teo de Gauss x simetría, no depende del eje)

• Interior ($0 < r < R$)

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int ar^2 4\pi r^2 dr$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi a}{\epsilon_0} \frac{r^4}{4} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{ar^2}{4\epsilon_0} \vec{r} \text{ interior}$$

Exterior: $r > R$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi a R^4}{4}$$

Para una carga puntual en el origen

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right]$$

$$\text{Si } \vec{a} = \vec{b} \rightarrow \int \vec{E} d\vec{l} = 0 \xrightarrow{\text{Stokes}} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

• Definición:

$$V(\vec{r}) = - \int_0^r \vec{E} d\vec{l}$$

→ Close H

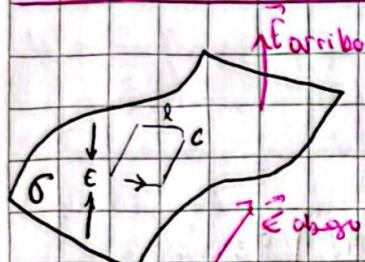
LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

FECHA: 30/08

• CONDICIONES DE BORDE DE \vec{E}

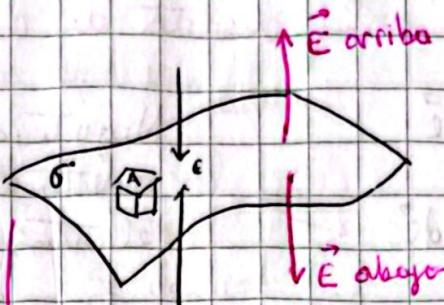
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + C.C$$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$E''_{up} - E''_{down} = 0$$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q / s$$

$$(E_{up} - E_{down}) A = \frac{1}{\epsilon_0} A \sigma \quad (E \rightarrow 0)$$

$$E_{up} - E_{down} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

• En Resumen

$$E_{up} - E_{down} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

/ . \hat{n} : Lo normal a la superficie cargada con σ

Obs: Con $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_{up}}{\partial \hat{n}} - \frac{\partial V_{abajo}}{\partial \hat{n}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\bullet \vec{\nabla} V \cdot \hat{n} = \frac{\partial V}{\partial \hat{n}} \quad \text{(Dirigido normal a la superficie)}$$

$$\bullet \vec{\nabla} V \cdot \hat{i} = \left(i \frac{\partial V}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

ENERGÍA ELECTRÍSTICA

(\hookrightarrow) Distribución discreta de cargas

$$W = \int_a^b \vec{F} d\vec{l}$$

$$= -Q \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$

$$= Q(V(b) - V(a))$$

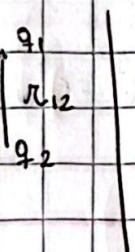
ΔV

Negativo ya que es trabajo impar para mover un electrón

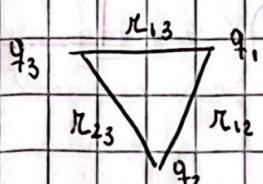
\Rightarrow Para N cargas

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 + q_2}{r_{13}} \right) q_3$$



• El Trabajo total

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

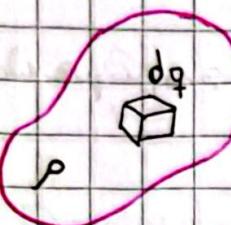
• También podemos escribir

$$\Rightarrow W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i)$$

\rightarrow Ley de Griffi Th

DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA



$$d\vec{q} = \rho dV, \text{ luego la expresión}$$

mu

$$W = \frac{1}{2} \int dV \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) \quad (*)$$

→ Usamos $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

L Si uso (*) para una carga puntual $\rightarrow \infty$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V(\vec{r})$$

* Forma de escribir integral por partes

$$\left(\int f \vec{\nabla} \vec{A} dV = - \int \vec{A} \vec{\nabla} f dV + \oint \vec{V} \vec{E} d\vec{S} \right)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V dV + \oint V \vec{E} \cdot d\vec{S} \right]$$

"Apariencia de nuevo al campo eléctrico"

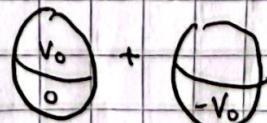
$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_V \vec{E}^2 dV + \oint_S V \vec{E} \cdot d\vec{S} \right] \rightarrow \text{Para simplificar, el volumen } V \rightarrow \infty$$

$$W_{\text{Total}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{todo}} \vec{E}^2 dV$$

Caso especial

Obs: Como $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, $\vec{\nabla}$ es un operador lineal $\rightarrow V$ satisface el principio de superposición.

Ej: Resuelve este problema (V_0) no es trivial pero se puede simplificar



Obs: Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, $\vec{\nabla}$ es un operador lineal $\rightarrow V$

Obs: La energía no satisface el principio del superposición

$$W_{\text{total}} = \frac{E_0}{2} \int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 dV = W_1 + W_2 + \text{cos} \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV$$

* De los obs (*), aparece la pregunta

"¿La energía está alojada en el campo o en la fuente?"

? De forma clásica no importa donde se encuentre la energía cuántica o la energía claramente está en los campos, por eso se estudia teoría cuántica de campos

CONDUCTORES (Electrones libres)

(i) $\vec{E} = 0$ en el interior



"Si el campo eléctrico es intenso podrían saltar los e⁻"

(ii) $\rho = 0$ en el interior ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$)

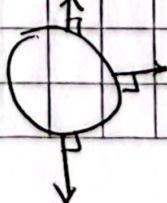
"Como hay cargas libres se neutralizan y se anula el campo"
→ Van Jackson

(iii) Cualquier carga reside en la superficie

$$\int_a^b \vec{E} d\vec{s} = \Delta V$$

"Si el campo es nulo, los cargas estarán en movimiento"

(iv) El conductor es una superficie equipotencial



"Si no los cargos empiezan a moverse"

(v) \vec{E} es perpendicular a la sup del conductor.

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

→ Paramagnética: Materias que se atrapan con campo magnético
FECHA:

→ Diamagnético: al revés, líneas de campo penetran

→ CAPACITORES

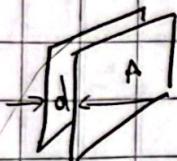
$$C = \frac{Q}{V}$$

Capacitancia [C]: fardios (F)

orden de magnitud de un capacitor real $\sim \mu\text{F}$

• Ejemplo

①

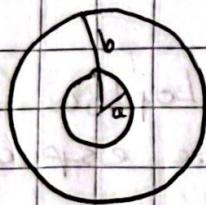


$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

"Mientras más cerca los platos mayor es la capacidad"

"Generalmente una parte

②



$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

"de Gauss para encontrar la corja"

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

• Otro Método para encontrar $V(\vec{r})$

~ Existe un Teorema de unicidad que dice

$$\rightarrow \vec{\nabla}^2 V = 0 \quad (\text{Fuerza de la distribución})$$

• Teorema: La solución de la ecuación de Laplace en V es única y determinada si V se especifica en el borde $S(V)$

~ Dem: Supongamos dos soluciones

$$\rightarrow \vec{\nabla}^2 V_1 = 0 \qquad \rightarrow \vec{\nabla}^2 V_2 = 0$$

$$\leftarrow \text{ Consideremos: } V_3 = V_1 - V_2 \rightarrow \vec{\nabla}^2 V_3 = 0$$

Como en el borde (en la superficie), coinciden V_1 y V_2 , el valor de V_3 en la superficie es cero

$$V_3 = 0 \rightarrow V_1 = V_2 \quad (\text{sol única})$$

COMBINACIÓN DE GREEN

~ Queremos calcular $\vec{\nabla}^2 V = -\frac{P}{\epsilon_0}$, $\Omega \in \mathbb{R}$

~ Donde Ω es una región finita finita del espacio y con la condición $V|_{\partial\Omega}$

* La Función de Green en Ω es el potencial de una carga puntual en \vec{r}'

$$\rightarrow P(\vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{r}, \vec{r}' \in \Omega$$

$$\text{y la función: } \vec{\nabla}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

(...) Pero en la clase 2

$$\rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Para Todo (Potencial)} \\ \text{el espacio (0 en \infty)} \end{array} \right\}$$

~ La generalización para una región finita del espacio es:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad \boxed{\text{Donde: } \vec{\nabla}^2 F = 0}$$

• FUNCIONES DE GREENS

~ Para espacio infinito

3D) Simetría esférica

$$\vec{\nabla}^2 G = \frac{1}{r} \frac{d}{dr^2} (r G) = 0 \quad | r \neq 0$$

$$\text{así } G = 1/r$$

2D) Coordenadas polares

$$\vec{\nabla}^2 G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} = 0$$

* Considerar simetría cilíndrica

$$\vec{\nabla}^2 G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \quad r \neq 0$$

$$r \frac{\partial G}{\partial r} = cte = a \rightarrow G = a \ln(r) + b$$

• Integrando

$$\int \nabla^2 G dA = -4\pi r \int \delta^2 dA \rightarrow \int \vec{\nabla} G dA$$

$$= \int \vec{\nabla} G \hat{m} dl = \int \frac{\partial G}{\partial r} dl = \int \frac{a}{r} dl \Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}_1) = -2 \ln |\vec{r} - \vec{r}_1|$$

1D) $\boxed{\frac{d^2 G}{dx^2} = 0}, x \neq 0$

$$\Rightarrow G(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ cx + d, & x > 0 \end{cases}$$

~ G debe ser continuo en $x=0$

$$\Rightarrow b = d = 0$$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = -4\pi \delta(x)$$

$$\rightarrow \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x<0} - \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x>0} = -4\pi \implies a - c = 4\pi$$

$$\rightarrow G(x, y) = -2\pi |x-y|$$

• Funciones de Green para volúmenes infinitos

$$\rightarrow \text{Como } \vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

~ Entonces: $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}')$, donde $\vec{\nabla}^2 F = 0$

TEOREMA DE GREEN

Queremos resolver: $\nabla^2 \Psi = -4\pi\rho$, $\vec{F} \in \Omega$

Con condiciones en la frontera como

$$\vec{\nabla} \cdot (\Psi \vec{\nabla} G) = \Psi \vec{\nabla}^2 G + \vec{\nabla} \Psi \vec{\nabla} G$$

$$\Psi \longleftrightarrow G$$

$$\vec{\nabla} (G \vec{\nabla} \Psi) = G \vec{\nabla}^2 \Psi + \vec{\nabla} G \vec{\nabla} \Psi$$

Restando e integrando

• Primera Identidad de Green

$$\int_{\Omega} (\Psi \vec{\nabla}^2 G - G \vec{\nabla}^2 \Psi) dV = \oint_{\partial\Omega} \left(\Psi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS$$

Eligiendo G como

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 G = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_1)$$

Entonces:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}') dV' G(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

No se
puede hacer
O
(Jackson)

• Cond. Bc de Dirichlet

~ Se usan cuando ψ esté definido en $\partial\Omega$ (borde)

• Cond. Bc de Neumann

~ Cuando $\partial\psi/\partial n$ esté definido en $\partial\Omega$

↑
Campo E en la superficie.

→ Fijando: $G = 0$ en $\partial\Omega$ (Dirichlet)

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \psi(\vec{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} dS'$$

Fijando: $\frac{\partial G}{\partial n} = -4\pi / S'$ en $\partial\Omega$ (Neumann)
 ↑ Área

$$\Psi(\vec{r}) = \langle \psi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} G_N \frac{\partial \psi}{\partial n'} dS'$$

→ Nota: ¿Por qué $\langle \psi \rangle_S = ?$

A partir de $\vec{\nabla}^2 G = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\rightarrow \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G d\Omega' = -4\pi = \oint_{\partial\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{G} d\vec{S} = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

No podemos asumir $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ sobre $\partial\Omega$!! , podemos asumir:

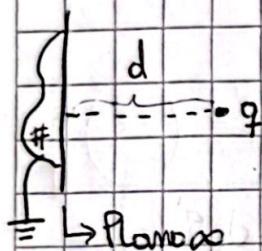
$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{-4\pi}{S} \rightarrow \langle \psi \rangle_S = \frac{1}{S} \oint_{\partial\Omega} \psi dS$$

→ En Green tenemos

→ $G = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + f(\vec{r}, \vec{r}')$, donde $f(\vec{r}, \vec{r}')$ es una función que satisface la eq de Laplace.

$$\nabla^2 F$$

MÉTODO DE IMÁGENES



Nota: No es trivial, ya que no solo tiene la contribución de q , de hecho tiene también la contribución de la distribución de carga inducida en la esp de la placa.

⇒ Planos

→ Aplicamos el Teorema de unicidad del potencial

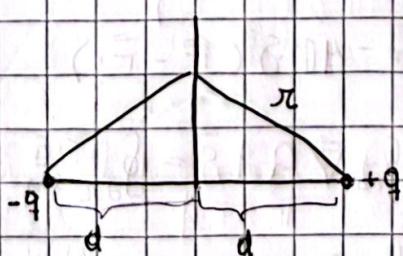
(i) $\nabla^2 V = 0$

(ii) Condiciones de borde
de V

} Se deben cumplir ambas condiciones

• Entonces el problema imagen

Basta el agregar una carga de igual mag. pero signo contrario, a una distancia d del plano.



→ $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

Así, $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_{q'}|} \right]$

• Usando coordenadas cartesianas ($x, y, z \rightarrow \infty$)

$$\rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \vec{r}_{q_+} = d\hat{u}, \vec{r}_{q_-} = -d\hat{u}$$

$$\rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_{q_+}| = |\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}(z-d)| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$\rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_{q_-}| = |\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}(z+d)| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}$$

$$\bullet V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

\therefore Cualquier punto sobre el plano satisface $z=0 \rightarrow V(x, y, z) = C$ siempre!

\rightarrow Sabemos que satisface la eq de Laplace porque usamos términos que ya conocemos que satisfacen la eq de Laplace.

Obs: Cuando $x, y, z \rightarrow \infty, V \rightarrow 0$

• Carga inducida.

\Rightarrow Una vez ya tenemos la solución podemos desluces para obtener la distribución

$$\text{Teniendo } \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \text{ (local)}$$



$$\rightarrow \vec{\nabla}V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} / \cdot \hat{n} \rightarrow \vec{\nabla}V \hat{n} = \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\bullet \boxed{\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}} \rightarrow \text{Derivar en } z \text{ y luego } \rightarrow \text{Debido a que es lineal en } z=0, \text{ quedando } \sigma(x, y)$$

\rightarrow La distribución consta en z

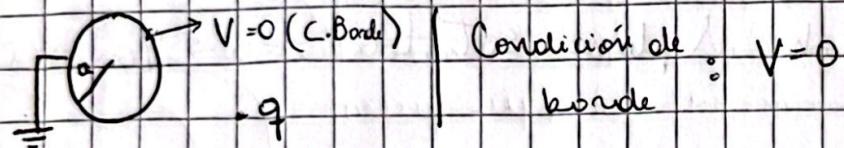
$$\rightarrow \text{Finalmente queda: } \sigma(x,y) = \frac{-q_d}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

- Si q es positiva $\rightarrow \sigma$ negativo

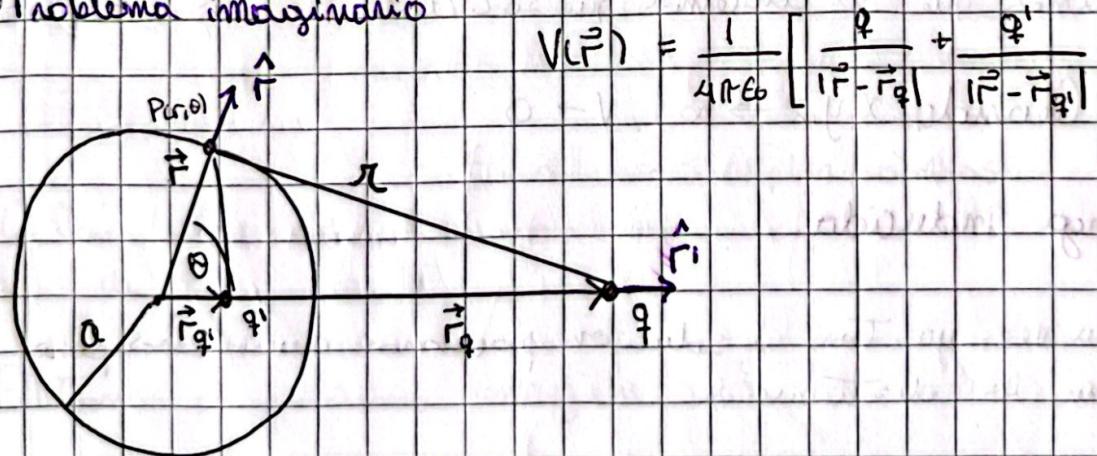
\rightarrow Podemos calcular además fuerza entre σ y q

- Chequear que funciones con σ y q y $(-q, q)$ \rightarrow Coulomb

• Carga fuente a estera conductora



• Problema imaginario



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_{q'}|} \right]$$

Tendremos que elegir q' , $\vec{r}_{q'}$ tal que $V=0$ sobre la sup $|\vec{r}|=a$

$$\text{Si: } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad \hat{r}' = \frac{\vec{r}_{q'}}{|\vec{r}_{q'}|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r}\hat{r} - \vec{r}_q\hat{r}|} + \frac{q'}{|\vec{r}\hat{r} - \vec{r}_{q'}\hat{r}'|} \right]$$

→ Evaluaciones sobre estro:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{a|\hat{r} - \frac{r_q \hat{r}}{a}|} + \frac{q'}{r_q' |\frac{a \hat{r}}{r_q} - \frac{r_q' \hat{r}'}{r_q}|} \right]$$

$\neq 0$

→ Para que se vaya a 0, se debe cumplir que:

$$\frac{a \hat{r}}{r_q} = \frac{r_q \hat{r}}{a} \quad \wedge \quad \frac{q}{a} = -\frac{q'}{r_q}$$

→ De acuerdo:

$$\boxed{\frac{r_q'}{r_q} = \frac{a^2}{r_q}} \quad \wedge \quad q' = -\frac{q r_q'}{a}$$

$$\boxed{q' = -\frac{q a}{r_q}}$$

$$|\hat{r} - \frac{r_q \hat{r}}{a}| = \sqrt{r^2 + r_q^2 - 2r r_q \cos\theta}$$

$$|\hat{r} - \frac{a^2 \hat{r}'}{r_q}| = \dots$$

$$\therefore V(r) = !$$

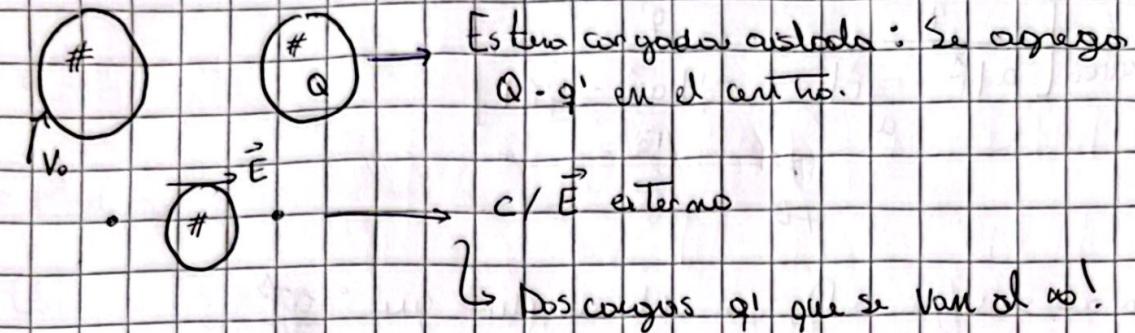
→ Distancia sup de Congo.

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}, \text{ en este caso, } \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r_q} \right) \frac{-a^2/r_q^2}{\left(1 + a^2/r_q^2 - 2a \cos\theta \right)^{3/2}}$$

{ Chequear fuerza entre σ y q !! }

• Variantes

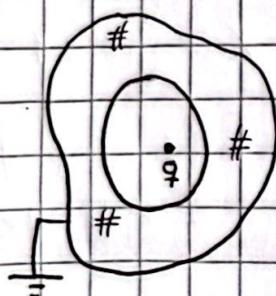


Estos corredores existen: Se agrega $Q - q'$ en el centro.

c/ \vec{E} externo

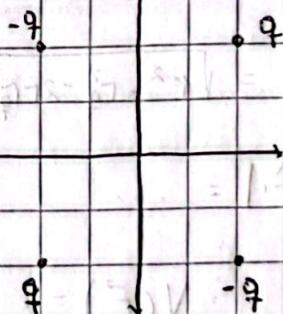
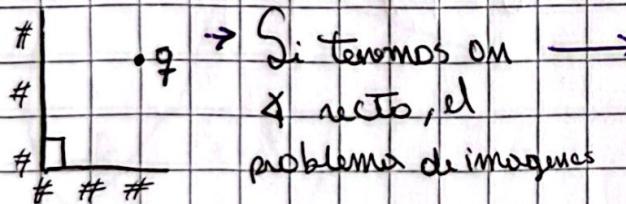
↳ Los corredores q' que se van al ∞ !

• Cavidad Conductora



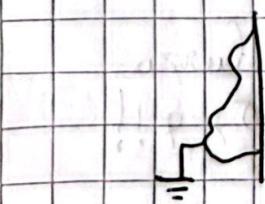
Ver variantes en Griffiths y Jackson, calcular corona sup, fuerzas, etc con método de imágenes

• Otro problema:



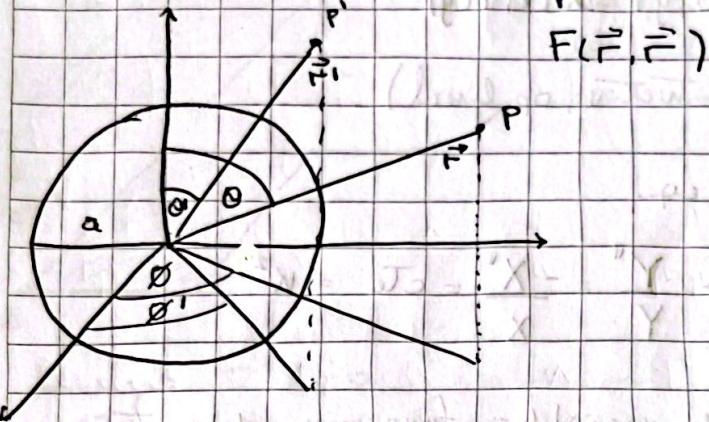
Hacer con $\chi \propto$ \rightarrow Ver Symmetry

Con distribución continua



○ Función de Green en la esfera

$$\rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{r' \underbrace{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{r'^2} \vec{r}' \right|}_{F(\vec{r}, \vec{r}')}}$$



$$\rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\frac{a^2}{r'^2} + r'^2 + a^2 - 2r'r' \cos\gamma \right)^{1/2}}$$

Donde $\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi')$

La solución

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint V(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial \vec{r}'} dS'$$

Nota: Mucha fuerza de Green en 2D

SEPARACIÓN DE VARIABLES $\nabla^2 V = 0 + C.B$

→ Consideradas cartesianas (2D)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \text{ANSATZ: } V(x, y) = X(x)Y(y)$$

(restrictivo, op lineal)

→ Ponemos el ansatz en la eq.

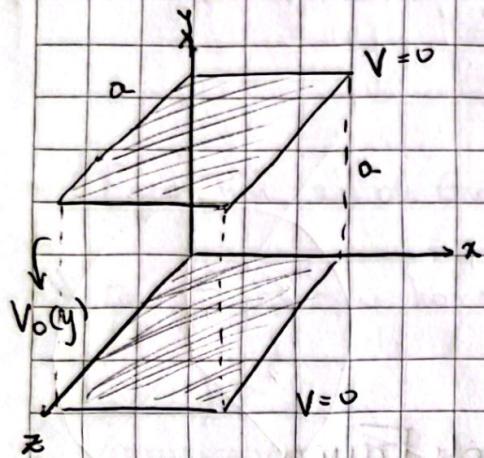
$$\rightarrow \frac{1}{Y} Y''(y) + \frac{1}{X} X''(x) = 0 \rightarrow \frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = cte = \kappa^2$$

Para que el método de separación de variables funcione, debe tener condiciones periódicas.

$$\begin{cases} X'' + \kappa^2 X = 0 \\ Y'' - \kappa^2 Y = 0 \end{cases}$$

SEPARACIÓN DE VARIABLES

2D coord. cartesianas



- C.B = (i) $V=0$ en $y=0$
- (ii) $V=0$ en $y=a$
- (iii) $V=V_0(y)$ en $x=0$
- (iv) $V=0$ en cuando $x \rightarrow \infty$

- Luego $\nabla^2 V = 0$, solución periódica se encuentra entre $y=0$ ^ $y=a$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \rightarrow V(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \rightarrow Y'' + K^2 Y = 0$$

$$\rightarrow \frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -K^2 \rightarrow V(x,y) = (Ae^{Kx} + B^{-Kx}) C \operatorname{Sen} Ky + D \operatorname{Cos} Ky$$

- Con esto imponemos las condiciones de borde usando (iv)
- (i)

$$\Rightarrow A = 0 \Rightarrow D = 0$$

- Con (i) y (iv) impuestos, queda

$$V(x,y) = \tilde{C} e^{-Kx} \operatorname{Sen}(Ky)$$

• En este pto aplicamos la cond (ii) \rightarrow periódicos

• (ii) $\text{Sen}(na) = 0 \Rightarrow na = m\pi \quad \text{con } n=1, 2, \dots, \infty$

• Luego $V(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\frac{m\pi x}{a}} \text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$

• Finalmente (iii)

$\rightarrow V = V_0(y) \quad \text{en } x=0$

$V_0(y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \rightarrow$ Series de Fourier

↓ Despejar C_m !!

• Multiplicamos por $\text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$ e积分 de 0 a a

$$\rightarrow \int_0^a V_0(y) \text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a dy C_m \text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

• Usando $\int_0^a \text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \text{Sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy = \frac{a}{2} \delta_{mn}$

• Finalmente $C_m = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy$

• Si no conozco $V_0(y)$ no puedo seguir avanzando

Suponemos $V_0(y) = V_0$

$$\rightarrow C_m = \frac{2}{\alpha} V_0 \int^{\alpha}_0 \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi y}{\alpha}\right) dy \quad \begin{cases} 0 & m \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & m \text{ impar} \end{cases}$$

{Encontrar sol de Green de solución general}.

Nota: Si es que hay un potencial en $z \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

• Coordenadas Esféricas $\nabla^2 V = 0$

$$\rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{Sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{Sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

• Asumiendo simetría azimutal (V es independiente ϕ) $\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$

Luego, $V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ y reemplazando y dividiendo por esta misma solución

• De las 2 ecs, tenemos:

$$\rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) \rightarrow \text{radial}, \quad l \rightarrow \text{el ordenador}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\Theta \operatorname{Sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{Sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \rightarrow \text{angular} \rightarrow \text{sol de periódicas}$$

- Para la solución radial, insertamos en ansatz del tipo $R = r^m$, quedando:

$$\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} (r^2 n r^{m-1}) = l(l+1) \rightarrow \frac{n}{r^m} ((m+1)r^m) = l(l+1)$$

$$\text{Sol tipo: } R(r) = A r^l + \frac{B}{r^{l+1}}$$

Para la ec angular $\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta)$ donde

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

$$\text{Así, } P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

- la solución general:

$$\rightarrow V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

↓ sol interior ↓ sol exterior

- Si no hay simetría azimutal la solución es de tipo armónicos esténicos.

Para despejar los coeficientes, debemos usar la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

$$\rightarrow \int_1^{-1} P_l'(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}$$

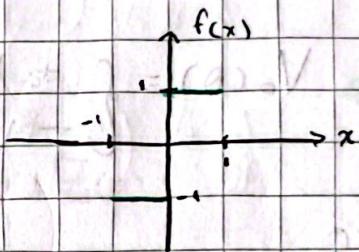
Obs: $x \in (-1, 1)$ ($x = 0$) \rightarrow la distribución no es uniforme
o a π hay que hacer cambios para usar ortogonalidad

Cualquier función definida en $x \in (-1, 1)$ se puede expandir

$$\rightarrow f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

$$\rightarrow A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx$$

Ej: $f(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



$$\rightarrow A_l = \frac{2l+1}{2} \left[- \int_1^0 P_l(x) dx + \int_0^1 P_l(x) dx \right] \rightarrow \text{solo quedan los } l \text{ pares}$$

- Para l impar: $A_l = (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx$

$$\rightarrow \int_0^1 du / \frac{\partial}{\partial u} \left[(1-u^2) \frac{\partial P_l}{\partial u} \right] + (l(l+1)) P_l = 0$$

$$\rightarrow [(1-u^2) P_l'] \Big|_0^1 + (l(l+1)) l \int_0^1 P_l dx = 0$$

- Quedando:

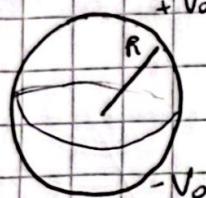
$$\int_0^1 P_l dx = \frac{P_l'(0)}{l(l+1)}$$

• Reemplazando

$$\rightarrow A_e = \frac{2e+1}{e(e+1)} P_e(0) //$$

$$f(x) = \frac{3}{2} P_1(x) - \frac{7}{8} P_3(x) + \frac{11}{16} P_5(x) + \dots$$

• Problema:



Calcular potencial en todo el espacio.

$$\rightarrow V_0(\theta) = \begin{cases} +V_0 & 0 < \theta < \pi/2 \\ -V_0 & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

• La sol. anterior

$$\rightarrow V_{int}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\theta), \quad r < R$$

$$\rightarrow V_{ext}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos\theta), \quad r > R$$

• Están ya evaluados, la condición de contorno en donde $r=R$ el potencial es continuo, quedando:

$$\rightarrow V_{int}(r, \theta) = \sum A_l r^l P_l(\cos\theta) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Se encuentran una} \\ \text{relación para los coef} \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow V_{ext}(r, \theta) = \sum \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad \left. \begin{array}{l} \\ V_{int}(R, \theta) = V_{ext}(R, \theta) \end{array} \right\}$$

Terminan ejercicios, hacerlo con fin de Green

$$\rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \dots$$

DIFERENCIACIÓN DE VARIABLES

• Coordenadas Cilíndricas (r, ϕ, z)

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$r \in (0, \infty), \phi \in (0, 2\pi), z \in (-\infty, \infty)$$

→ Por separación de variables:

$$\rightarrow V(r, \phi, z) = R(r) \Phi(\phi) Z(z)$$

• Quedando: $\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$

→ Asumiremos $\frac{Z''}{Z} = \kappa^2$ $\wedge \frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2$

• La ecuación Radical nos queda:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

• Cuyas soluciones son:

$$R(r) = A_m J_m(\kappa r) + B_m N_m(\kappa r)$$

Donde J_m y N_m son las funciones de Bessel y Neuman respectivamente. Para $m=0$

$$\Phi(\phi) = C_m \cos(m\phi) + D_m \sin(m\phi)$$

$$Z(z) = E_k e^{\kappa z} + F_k e^{-\kappa z}$$

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

Ej: Sobre la superficie de un cilindro de radio a existe una densidad de carga

$$\rightarrow \sigma(\phi) = b \operatorname{Sen}(5\phi)$$

Encuentre V en todo el espacio

$$V(r_2, \phi, z) = R(z) \Phi(\phi)$$
$$\frac{1}{2} \frac{1}{R} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \frac{dR}{dz} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0 / \Delta^3$$
$$\frac{\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \frac{dR}{dz} \right)}{R^2} + \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}{\Phi} = 0$$
$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \frac{dR}{dz} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

No depende de z

• Los soluciones: $\cancel{\frac{1}{R} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \frac{dR}{dz} \right) = k^2}$

$$\rightarrow \Phi(\phi) = A \operatorname{Cos}(k\phi) + B \operatorname{Sen}(k\phi)$$

• La eq radial

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \frac{dR}{dz} \right) = k^2$$

$$\frac{d}{dz} \left(R \frac{dR}{dz} \right) = \frac{k^2 R}{2}$$

Usando el anexo I → $R \propto \Delta^n$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\Delta} (\Delta^n \Delta^{n-1}) = n^2 \Delta^{n-1}$$

$$\rightarrow n \frac{d}{d\Delta} (\Delta^n) = n^2 \Delta^{n-1} \rightarrow n^2 \Delta^{n-1} = n^2 \Delta^{n-1} \Rightarrow R \propto \Delta^n : \text{solución tipo}$$

• Luego la solución → $R(\Delta) = C \Delta^n + D \Delta^{-n}$, ($n \neq 0$)

Obs: Cuando $n=0$ se obtiene otra solución ⇒ $\Delta \frac{dR}{d\Delta} = Ct$

$$\rightarrow \text{la otra sol: } R(\Delta) = C \ln(\Delta) + D, (n=0)$$

• ¿Pasa estos mismos en los esféricicos?

• La solución final Tiene que ver con C

$$\rightarrow V(\Delta, \phi) = \alpha_0 + b_0 \ln(\Delta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Delta^k (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)) + \right.$$

Tiene que ver con D

Si: $\Delta \rightarrow 0$ o $\Delta \rightarrow \infty$

entonces: $\Delta^k (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)) \rightarrow 0$

$$\left. \Delta^k (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)) \right]$$

• Los soluciones interiores y exteriores: Sustituyendo todo lo que $\Delta = 0$ excepto

$$\rightarrow V_{int}(\Delta, \phi) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^k [a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)]$$

$$\rightarrow V_{ext}(\Delta, \phi) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^k [c_k \cos(k\phi) + d_k \sin(k\phi)]$$

Se evalúa en $\Delta \rightarrow \infty$
eliminando todo lo que excepto

- Ahora imponemos las condiciones de contorno

- Sabemos que se cumple:

$$\rightarrow \sigma = E_0 \left(\frac{\partial V_{ext}}{\partial r} - \frac{\partial V_{int}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a}$$

Luego: $b \sin(5\phi) = -E_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{-k}{a^{k+1}} (c_k \cos(k\phi) + d_k \sin(k\phi)) - k a^{k-1} (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)) \right\}$

Entonces $c_k = d_k = 0$ Vdash excepto
 $b_k = d_k \neq 0 \rightarrow k=5$

$$\begin{aligned} b \sin(5\phi) &= -E_0 \left\{ \frac{-5}{a^6} d_5 \sin(5\phi) - 5a^4 b_5 \sin(5\phi) \right\} \\ &= -E_0 \sin(5\phi) \left\{ \frac{-5}{a^6} d_5 - 5a^4 b_5 \right\} \end{aligned}$$

Imponiendo que el potencial es continuo en la sup. del cilindro

$$V_{int} = \lambda^5 b_5 \sin(5\phi) \quad \wedge \quad V_{ext} = \lambda^5 d_5 \sin(5\phi)$$

$$\text{Como es continuo} \Rightarrow V_{int}(\lambda=a) = V_{ext}(\lambda=a)$$

$$\text{Finalmente } V(r, \phi) = \frac{b \sin(5\phi)}{10 E_0} \begin{cases} \lambda^5 \bar{a}^{-4}, & \lambda < a \\ \lambda^6 \bar{a}^{-5}, & \lambda > a \end{cases}$$

No se puede hacer función de Green en \mathbb{R} porque hay cables pero en la normal horizontal si.

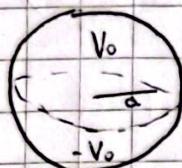
$$\Omega = \iint_{\text{senodo}} \text{senodo} d\Omega$$

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

FECHA:

* Hay veces que no estamos obligados a usar separación de variables, si no que podemos usar por ej. función de Green.

Ej:



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{V(a, \theta', \phi') a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

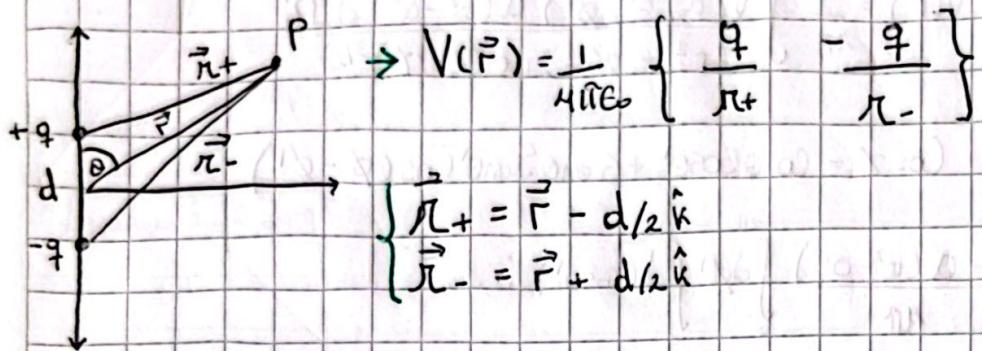
$$\rightarrow V(r, \theta, \phi) = \frac{V_0 a (r^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int d(\cos \theta') [\dots]$$

$$[\dots] = \left[(a^2 + r^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2} - (a^2 r^2 + 2ar \cos \gamma)^{-3/2} \right]$$

* Se utilizó en la segunda $\int_{\text{senodo}} \rightarrow \theta' \rightarrow \pi - \theta'$
 $\phi' \rightarrow \phi' + \pi$

→ EXPANSIÓN MULTIPOLAR

• Dipolo Físico



- $| \vec{r}_{\pm} | = \sqrt{r^2 + (d/2)^2} \mp rd\cos\theta$

$$= r \sqrt{1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + d^2/4r^2}$$

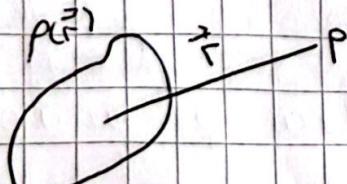
$$\Rightarrow \frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta \right)^{-1/2} \sim \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta \right)$$

↑ Como si tuviese producto punto.

- Finalmente: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd\cos\theta}{r^2}$ ↑ Se conoce como monopolo eléctrico

⇒ Calcular $V(\vec{r})$ en P asumiendo $|\vec{r}| \gg d$

- Distribución Continua (a distancias muy grandes, el término monopolar tiene que ser una carga puntual)



$$| \vec{r} - \vec{r}' |^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha$$

$$= r^2 \left(1 + r'^2/r^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\alpha \right)$$

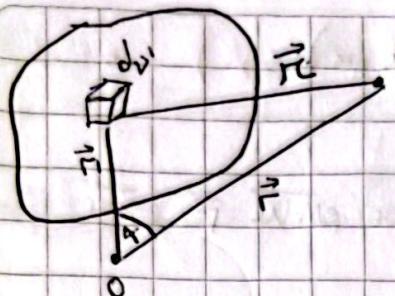
$$\rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{p(\vec{r}') d\vec{r}'}{| \vec{r} - \vec{r}' |}$$

$$| \vec{r} - \vec{r}' | = r \sqrt{1 - \frac{2r'}{r}\cos\alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2}$$

$$= r \sqrt{1 + \epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{r'}{r} \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha \right)$$

$$\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}_c$$



$$\begin{aligned}
 |\vec{r} - \vec{r}'|^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\alpha \\
 &= r^2 \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos\alpha \right) \\
 |\vec{r} - \vec{r}'| &= r \sqrt{1 - \frac{2r'}{r} \cos\alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} \\
 &= r \sqrt{1 + \epsilon} \quad \rightarrow \epsilon = \frac{r'}{r} \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos\alpha \right)
 \end{aligned}$$

Luego, $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r\sqrt{1+\epsilon}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \epsilon^2 - \frac{5}{16} \epsilon^3 + \dots \right)$

Si insertamos el valor de ϵ tenemos:

• $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos\alpha)$, P_n : Poli. de Legendre

• Finalmente, $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int d\sigma' (r')^n P_n(\cos\alpha) \rho(\vec{r}')$

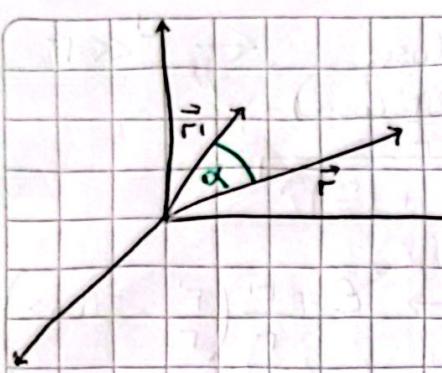
$n=0$

→ $V_{\text{nomo}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \int d\sigma' \rho(\vec{r}') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

$n=1$ → $V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int d\sigma' r' \rho(\vec{r}') \cos\alpha \quad | \quad r' \cos\alpha = \vec{r}' \cdot \hat{r}$

$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}, \quad \vec{P} = \int d\sigma' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \quad (\text{Memento dipolar})$

$n=2$ → Momento quadrupolar! (Tensor)



$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{F} - \vec{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_l^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha)$$

Donde r_l es el menor entre \vec{F} y \vec{r}
→ haciendo coincidir

- Haciendo coincidir \vec{r} con el eje x , el problema se puede resolver

$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{F} - \vec{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \alpha)$$

- Si no asumimos simetría azimuthal, debemos resolver de nuevo

$$\nabla^2 V = 0$$

→ Usamos separación de variables

$$\rightarrow V(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$$

- Obtenemos $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \rightarrow \Phi = e^{im\phi}$

→ m debe ser entero

- Para la eq. radial

$$\rightarrow R(r) = A_l r^{l+1} + B_l r^{-l}$$

- Y para θ , la solución depende de dos constantes: l y m . Función asociada de Legendre $P_m(\theta)$

$$\rightarrow P_m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

- Que satisface

$$\rightarrow \int_{-1}^1 P_m(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \text{ See'}$$

- Combinando definimos los armónicos estéricos

$$\rightarrow Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

- Que satisface

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{l'm'}^* Y_{lm} = \text{See' } \delta_{mm'}$$

$$l=0 \cdot Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l=1 \cdot Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$$

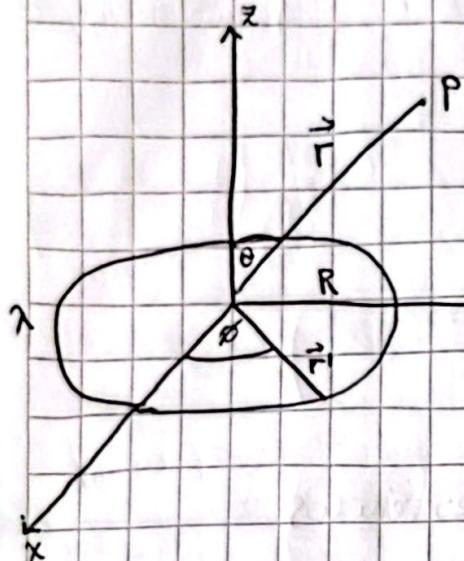
$$\cdot Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$l=2 \cdot Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}$$

$$\cdot Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}$$

$$\cdot Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_m^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$



• Encuentra los primeros tres multipolos
($m = 0, 1, 2, \dots$)

$$\rightarrow V(r, \theta)$$

$$\rightarrow \vec{F} = \hat{i} r \sin \theta \cos \phi + \hat{j} r \sin \theta \sin \phi + \hat{k} r \cos \theta$$

$$\rightarrow \vec{r}' = \hat{i} R \cos \phi' + \hat{j} R \sin \phi'$$

$$\rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}' = r R \cos \alpha = r R \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi')$$

$$\boxed{n=0} \quad V_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \lambda R d\phi' = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r}$$

→ Chequemos

$$\rightarrow Q = \int \lambda R d\phi' = \lambda R 2\pi \rightarrow \frac{Q}{2\pi} = \lambda R \quad | \quad \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\boxed{n=1} \quad V_1(\vec{r}) = 0$$

$$\boxed{n=2} \quad V_2 \neq 0 \rightarrow V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} \lambda R d\phi' (r) P_2(\cos \alpha)$$

→ Cuál es el campo para estos polos?

En física el término más importante es el quadrupolar \vec{F}

→ EXPANSIÓN MULTIPOLAR

04/10/24

en la r y φ

$$\rightarrow V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int d\lambda' (r')^n P_n(\cos\alpha) \rho(\vec{r}')$$

$$\rightarrow \vec{r} = \hat{i} r \sin\theta \cos\phi + \hat{j} r \sin\theta \sin\phi + \hat{k} r \cos\theta$$

$$\rightarrow \vec{r}' = \hat{i} R \cos\phi' + \hat{j} R \sin\phi'$$

$$\rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}' = R r \cos\alpha = R r \sin\theta \cos\phi \cos\phi' + R r \sin\theta \sin\phi \sin\phi'$$

* $\cos\alpha = \sin\theta (\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi')$

$$n=0 \quad V_0(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\phi' R \lambda = \frac{\lambda R}{2\pi r}$$

$$n=1 \quad V_1(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} d\phi' R^2 \lambda \sin\theta (\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi') = 0$$

$$n=2 \quad V_2(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{R^3}{2} \lambda \left[3 \sin^2\theta (\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi')^2 - 1 \right]$$

... Resolver ...

• Momento Dipolar (campo eléctrico)

$$\Rightarrow V_{dip}(\vec{r}, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int d\sigma' r' \rho(\vec{r}') \cos\alpha \quad | \quad r' \cos\alpha = \hat{r} \cdot \vec{r}'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int d\sigma' \rho(\vec{r}') \hat{r} \cdot \vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \underbrace{\int d\sigma' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}_{\vec{P}: \text{momento dipolar (depende de la distribución)}}$$

dirección donde apunta

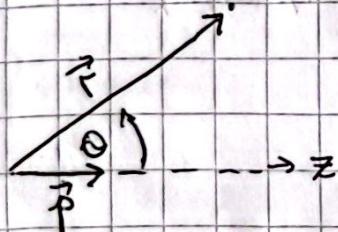
se mide

\vec{r}' no se donde apunta

$$\Rightarrow V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}}{r^2} \quad \# \text{ Casi indep del sistema condensado}$$

- Ahora en el campo:

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V \rightarrow V_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} \quad (\text{Usamos } \vec{\nabla} \text{ en coord. esféricas})$$



$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- Luego,

$$\Rightarrow \vec{E}_{dip}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\hat{r} 2 \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta \right) \quad \text{en coord esféricas}$$

$$\text{Como, } \vec{p} = \hat{r} (\vec{p} \cdot \hat{r}) + \hat{\theta} (\vec{p} \cdot \hat{\theta}) = \hat{r} p \cos\theta - \hat{\theta} p \sin\theta$$

⇒ Vemos que, $\hat{r}^2 \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta = 3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p})$$

● Momento Cuadripolar

$$V_{\text{quad}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') (r')^2 P_2(\cos\alpha')$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') (r')^2 \cdot \frac{1}{2} [3 \cos^2\alpha' - 1]$$

$$\rightarrow \text{Notamos que: } (r')^2 \cos^2\alpha' = (\hat{r} \cdot \vec{r}')^2 = (\hat{r} \cdot \vec{r}')(\hat{r} \cdot \vec{r}') = \hat{r}_i \vec{r}'_i \hat{r}_j \vec{r}'_j$$

$$V_{\text{quad}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2r^3} \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') [3 \hat{r}_i \hat{r}_j \vec{r}'_i \vec{r}'_j - (r')^2]$$

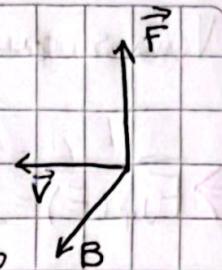
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2r^3} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') [3 \vec{r}'_i \vec{r}'_j - (r')^2 \delta_{ij}]$$

Q_{ij} (Momento Cuadripolar)

✓ Fenómenos magnéticos estacionarios

→ ~~Magnetostática~~ ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$)

• FUERZA DE LORENTZ $\Rightarrow \vec{F}_{\text{mag}} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$



$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial Z} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ | La fuerza mag. no realiza trabajo

$$\Rightarrow dW = \vec{F}_{\text{mag}} \cdot d\vec{l} = 0$$

→ No hay tiempos ni sumideros, en circuitos la carga es constante en el tiempo, lo que entra es igual a lo que sale.

→ Para un alambre cargado con λ que se mueve a velocidad \vec{v} .

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{mag}} = \int d\vec{q} (\vec{v} \times \vec{B}) = \int \lambda d\vec{l} \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{l} = \lambda \vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{mag}} = \int \vec{I} d\vec{l} \times \vec{B}}$$

Corriente
Lineal

• Lo mismo:

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{mag}} = \int \vec{n} \times \vec{B} dS, \quad \vec{n} = \sigma \vec{v} \quad (\text{Superficie})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{mag}} = \int \vec{J} \times \vec{B} dv, \quad \vec{J} = \rho \vec{v} \quad (\text{Volumen})$$

Velocidad constante
Densidad constante

→ LEY DE CONTINUIDAD (conservación de carga)

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial z} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \leftarrow \text{eq local (solo sirve en un punto)}$$

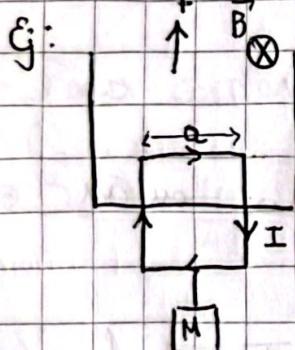
* Contexto magnetostático

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \leftarrow \text{Carga no varía en ese P.} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$$

Condición
Magnetostático.

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{mag}} = Q \vec{V} \times \vec{B}$$

(I)? Porque M se mantiene estable



$$\Rightarrow \text{Carga puntual: } \vec{F}_M = Q \vec{V} \times \vec{B}$$

$$\text{Lím: } \vec{F}_M = \int I d\ell \times \vec{B}$$

$$F_M = I a B = Mg \rightarrow I = \frac{Mg}{aB}$$

→ Fuerza magnética no realiza trabajo

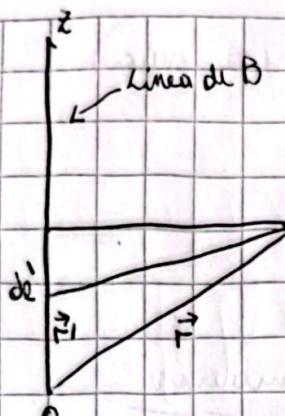
→ Batería realiza trabajo (campo \vec{E} de la fuente)

→ LEY DE BIOT-SARATZ

- Corrientes estacionarias producen campos muy independientes del tiempo.

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \vec{\pi} d\ell'}{\pi^3} \mid \cdot \vec{\pi} = \vec{r} - \vec{r}'$$

• $\hat{\pi} = \frac{\vec{\pi}}{|\vec{\pi}|}$

Ej:  Usamos coordenadas cilíndricas

$$d\vec{l}' = \hat{z}' dz' \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = r = \sqrt{d^2 + (z - z')^2}$$

$$\vec{r}' = z' \hat{z}'$$

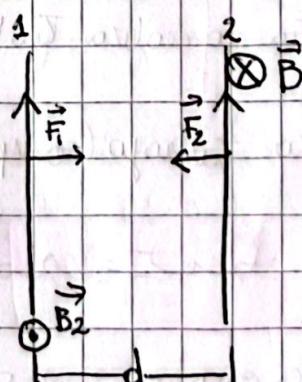
$$\vec{r} = d \hat{z} + z \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \hat{z}' \times (d \hat{z} + (z - z') \hat{z})}{(d^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

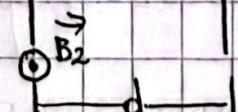
$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I d}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \hat{z}'}{(d^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi r d} \hat{z}}$$

Ej: Calcular \vec{B} debido a un circuito circular en un punto del eje.

→ Para 2 líneas paralelas de corrientes I_1, I_2 , la fuerza sobre I_2 es:

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = \int I_2 dl_2 \times \vec{B}_1$$


- Donde \vec{B}_1 es el campo del alambre 1 en dl_2

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{z}_1 \rightarrow \vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l \hat{z}_2$$


$$\Rightarrow \vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 l \hat{\vec{r}}_{21} \quad | \quad \hat{\vec{r}}_{21} \text{ donde es } d\vec{l}_2 \times \hat{\vec{s}}$$

Ecuaciones de la magnetostática

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- Para corrientes superficiales

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_K \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- Para corrientes volumétricas

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \text{Ya sabemos: } \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

⇒ Luego

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{J} \right\} dV' \quad \begin{array}{l} \vec{\nabla}: \text{ depende de } r(x, y, z) \\ \vec{J}: \text{ depende de } x', y', z' \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\rightarrow \text{Calculamos } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \text{ luego}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \int \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right]$$

• Usando

$$\begin{aligned} \cdot \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int \frac{\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\underline{\underline{\vec{\nabla}} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

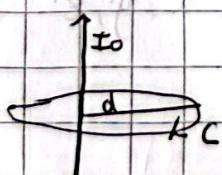
$$\cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Ley de Ampere

• Ley de Ampere forma Integral

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_c \quad | \text{ Sólo si no hay } \vec{B} \text{ de sobre la curva}$$

\rightarrow Ej: Círculo omítico



$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_0 \rightarrow B 2\pi d = \mu_0 I_0$$

$$\underline{\underline{B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi d}}}$$

Potencial Vectorial Magnético

$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (No hay fuentes ni sumideros)

$\rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, donde \vec{A} es el potencial vectorial magnético.

- Esta definición tiene que ser consistente con la Ley de Ampere.

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

- Podemos explotar la libertad del Gauge en la elección de \vec{A}

$$\rightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda \leftarrow \begin{matrix} \text{Infinitos} \\ \text{potenciales} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

- Podemos exigir $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, conocida como el gauge de Coulomb

- La ex para \vec{A} es:

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

→ LEY DE AMPERE

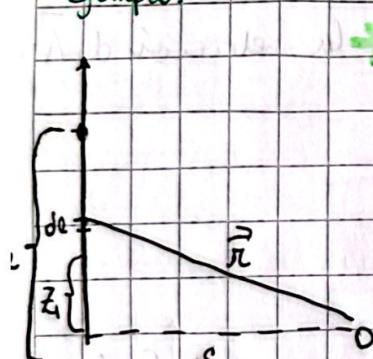
$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} / \epsilon_0$$

→ POTENCIAL VECTORIAL MAGNETICO

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \text{ Gauss - Coulomb} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

• Ejemplo:



$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz' \hat{z}}{\sqrt{z'^2 + s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \ln \left[\frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + s^2}}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + s^2}} \right] / z_1$$

$$\rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A}{\partial z} \hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + s^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + s^2}} \right] \hat{\phi}$$

• Condiciones de borde

- Así como \vec{E} es discontinua en superficies cargadas, el campo magnético es discontinua en superficies sobre las cuales circula una corriente

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\Rightarrow \int \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\Rightarrow B_{up} - B_{down} = \mu_0 I / \epsilon$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\Rightarrow B_{up} - B_{down} = \mu_0 I / \epsilon$$

- Juntando ambos

$$\Rightarrow \vec{B}_{up} - \vec{B}_{down} = \mu_0 (\hat{n}_+ + \hat{n}_-)$$

- Además: $\vec{A}_{up} = \vec{A}_{down}$

• Expansión Multipolar (para \vec{A})

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha)$$

- Donde α es el ángulo entre \vec{r} y \vec{r}' , usando:

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint d\vec{l}' (\vec{r}')^n P_n(\cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{l} + \frac{1}{r^2} \oint d\vec{l}' r' \cos \alpha + \frac{1}{r^3} \oint d\vec{l}' (\vec{r}')^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \alpha - 1) + \dots \right]$$

- El término monopolar es cero, porque

$$\Rightarrow \oint d\vec{r}' = 0$$

- El término dipolar

$$\Rightarrow \vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \oint d\vec{r}' \hat{r} \cdot r^3 \quad \left(\text{Ver Griffiths (1.62)} \right)$$

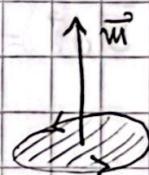
$$\oint (\hat{r} \cdot \hat{r}) d\vec{r}' = -\hat{r} \times \oint d\vec{r}'$$

- Usando la identidad.

$$\Rightarrow \vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$$

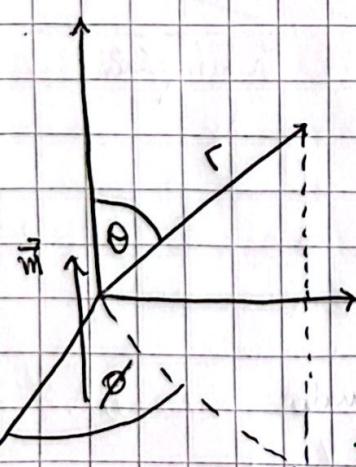
$$\Rightarrow \vec{m} = I \int d\vec{r}$$

Momento magnético



- Ejemplo: Campo magnético debido al término dipolar

- Usando coordenadas esféricas



$$\Rightarrow \vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi} \hat{\phi}$$

$$y \text{ usamos } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Donde:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sin\theta A_\phi \right) - \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r A_\phi \right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \quad \text{expresión en coord. generales?}$$

• Cap 7 Griffith

→ LEY DE OHM:

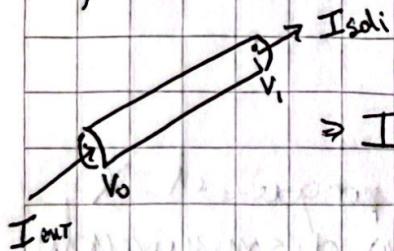
→ $\vec{J} = \sigma \vec{F} \rightarrow$ Fuerza por unidad de carga (responsable del movimiento de cargas)

• En términos de campos $\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

→ Efectivamente $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ → lo responsable de que exista una densidad de corriente es \vec{E}

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{Resistividad})$$

• En el caso de un alambre cilíndrico podemos derivar el equivalente: $V = IR$

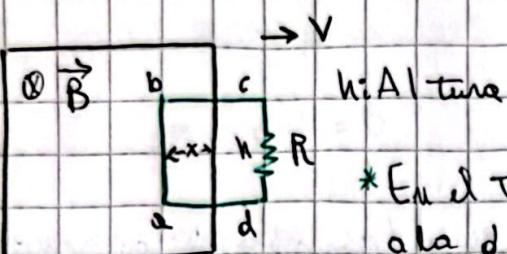


* Mov de cargas acumuladas dentro del alambre, producido por E_{ext} . Corriente pero movilizadas por E (local). Se sigue manteniendo $E_{ext} = 0$ del condensador

• En un circuito existen 2 fuerzas: $\vec{F} = \vec{E} + \vec{F}_g$

→ luego $\oint \vec{F} d\vec{l} = \oint \vec{F}_g d\vec{l} = E$ ← Que llamamos fuerza electromotriz (FEM)
[Trabajo × unidad de carga]

Ej:



* En el tiempo que los lados se mueven a la derecha, la fuerza magnética genera una corriente en sentido horario

$$\Rightarrow E = \oint \vec{F}_{magn} d\vec{l} = vBh$$

- En bc y ad no hay E debido a que $V \times B = VB \cos 90^\circ$ donde $\theta = 90^\circ$, la dirección de la fuerza es hacia arriba
- Sea Φ el flujo del campo magnético B

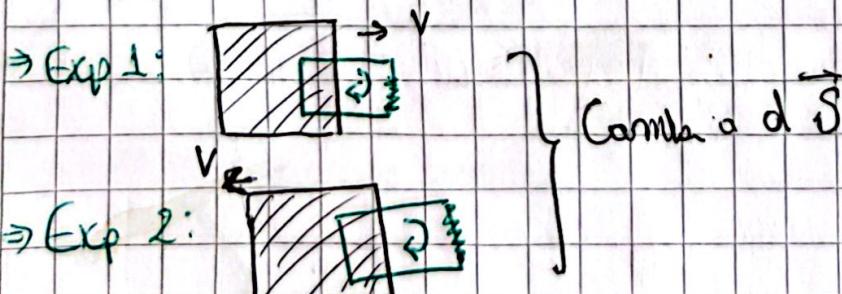
$$\Rightarrow \Phi = \int \vec{B} d\vec{A} = Bh$$

⇒ Considerando el circuito en movimiento

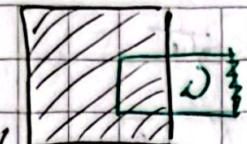
$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = Bh \frac{dx}{dt} = -Bhv \leftarrow (-) \text{ porque el } X \text{ se desplaza}$$

- Luego $\frac{d\Phi}{dt} = -E$ es la ley de Faraday - Lenz

• Inducción de Faraday (3 exp)



> Exp 3:



↓ se m mov., cambia \vec{B} → cambia \vec{B}

• "Un campo magnético \vec{B} induce un campo eléctrico \vec{E} "

• Es \vec{E} el $= \vec{E}_{\text{dip}}$?

$$\Rightarrow E = \oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

• Usando Teo. de Stokes para \vec{E}

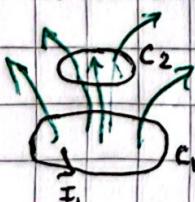
$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{conocido como ley de Faraday}$$

↑ ↗ No es el mismo \vec{E} , ya que
 $\nabla \times \vec{E} = 0$ en electrostática.

Esto sólo sucede si \vec{B} varía en t

Aquí nace la electrodinámica, la relatividad especial.

• $I_{\text{inductancia}} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}}{r^2}$



$$\Rightarrow \Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = I_1 M_{21}$$

→ donde M_{21} : $I_{\text{inductancia mutua}}$.

- Una expresión implícita para M_{21} , es la siguiente

$$\Rightarrow \Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

Pero $\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1}{r}$

Obs: $M_{21} = M_{12}$

Luego $M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$ | Es geométrico

- Autoinductancia (corriente varía en T)

Un circuito también puede autoinducirse una corriente

$$\Phi = I L$$

Donde L es la autoinductancia.

- Energía en campos magnéticos

El trabajo hecho sobre una corriente, contra la Feria en una vuelta completa al circuito es $(-\epsilon)$, así.

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = -\epsilon I = L I \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{dI^2}{dt}$$

$$\Rightarrow I \text{ integrando... } W = \frac{1}{2} L I^2 \quad \cancel{#}$$

Sabemos que $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Luego, $\mathcal{L}I = \oint \vec{A} d\vec{l}$

y entonces $\rightarrow W = \frac{1}{2} I \oint \vec{A} d\vec{l}$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \vec{I} d\ell \quad (\text{Para corrientes en un alambre})$$

Luego, generalizando

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{J} dV \quad // \rightarrow \text{Hacia}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_V B^2 dV - \oint_S \vec{A} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} \right]$$

\rightarrow Para planos ∞ esto no se cumple
 \downarrow términos de sup

\rightarrow Cuando le queremos cocientar podemos asumir que los corrimientos se anulan en el ∞ , y tomando el límite $V \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{Todo}} B^2 dV$$

ECUACIONES DE MAXWELL

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2 términos

añadidos.

- Estas eq. no satisfacen la conservación de los cargos eléctricos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{eq. de continuidad})$$

- Demostración que las eq. de Maxwell no satisfacen la conservación de carga

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} \neq 0 !!!$$

- Maxwell arregla esto, insertando el término:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \leftarrow \text{Un } \vec{E} \text{ variable induce un } \vec{B}$$

⇒ Si estamos lejos de la fuente las eq. de Maxwell son simecidas, pero si estamos cerca no son para nada simecidas.

→ CAMPOS ELÉCTRICOS EN LA MATERIA

• Dieléctrico: Atómicos neutros, ha y respuesta ante campo \vec{E} externo, efecto de polarización

(Griffiths): → Discusión del modelo atómico

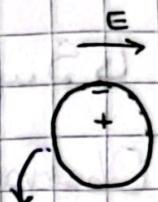
↓ VER



Se puede estimar la polarizabilidad

$$\rightarrow \alpha \approx 3\epsilon_0 V \quad (V: \text{volumen})$$

c?



Se induce dipolo eléctrico
 $\vec{P} = \alpha \vec{E}$
 ↓
 Polarizabilidad

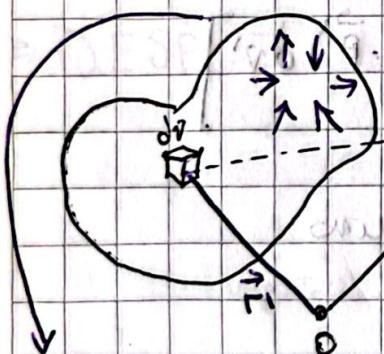
→ Analizar caso de moléculas del efecto de un \vec{E} en presencia de moléculas.



Fuerza Torque

• Material magnético

* Sabemos que el potencial eléctrico debiera a 1 dipolo.



$$\rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

* Se puede definir:

$\frac{d\vec{P}}{dr} = \vec{P}'$. Para una distribución continua

$\vec{P}' = \rho \vec{P}$ [Coulomb/m²]

Densidad de polos

∞ dipolos, distribución continua

$$\rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{r}' \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{r}}{r'^2} \quad (*)$$

, donde \vec{P} es el vector polarización

→ Se puede calcular \vec{E} sin problemas fuera del material, pero dentro los \vec{P} generan efectos locales

⇒ Es válido usar $* \vec{P}(\vec{r})$ en el interior del dielectrónico (4.2.3)

↳ Supuestamente es válido tanto dentro como fuera

- Observando que: $\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\hat{r}}{r^2}$

↳ cambio
de r a r'

- El potencial queda

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right) dV'$$

- Integrando por partes:

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{r}\right) dV' - \int_{\infty} \frac{1}{r} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}) dV' \right]$$

- Usando el Teo de la div en el 1º término

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial(r)} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}}{r} dV'$$

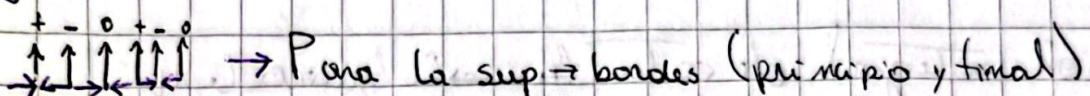
↓
Algo así como una
carga condensada
superficie inducida
por la polarización

↓
Algo así como una
densidad de cargo

$$\rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_b dS'}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_b dr'}{r}$$

- Donde $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$; $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ } Largas
ligadas
(bounded)

Ej: Dielectrónico en 1D



Ej: Pueden con $\vec{P}(\vec{r}) = \kappa \vec{r}$

\rightarrow Podemos calcular $V(\vec{r})$ con la expresión * de Largas
ligadas

\rightarrow Si \vec{P} es cte sale de la integral o $-\nabla \cdot \vec{P} = 0$

• Consecuencias

⇒ DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

$$\Rightarrow \rho = \rho_b + \rho_f$$

↓ ↓ ↓
 cargo total cargas libres (e^-)
 Largas ligadas

- Esto genera cambios en las Leyes de la electricidad

$$\Rightarrow \epsilon_0 \nabla \vec{E} = \rho = \rho_b + \rho_f$$

$$= -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_f$$

- \vec{P} solo es $\neq 0$ dentro del material

- Ley de Gauss $\rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$; $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Generalizada
para dielectrinos

Desplazamiento
Eléctrico

- La versión integral de este teorema es la ley

$$\Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = Q_f$$

↓ Cumple lo mismo

⇒ Se puede calcular Total
lo de electrones igual
que antes

que la Ley de Gauss

Otra eq de la electrostática: $\nabla \times \vec{E} = 0$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P} \rightarrow$$

Generalización para
materiales dieléctricos.

- Condiciones de Bordes para \vec{D}

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \rightarrow D_{up}^\perp - D_{down}^\perp = \sigma_f$$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P} \rightarrow D_{up}^{\parallel} - D_{down}^{\parallel} = P_{up}^{\parallel} - P_{down}^{\parallel}$$

• Dielectricos lineales

Materiales que en ciertas regiones (T° , Presión), la polarización es proporcional al campo externo \vec{E} .

$\rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \rightarrow$ lo cual da al esquema expresiones equivalentes para los términos de \vec{D}

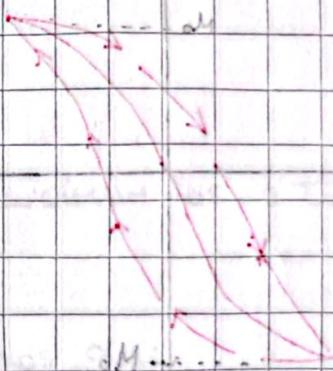
Susceptibilidad
eléctrica

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

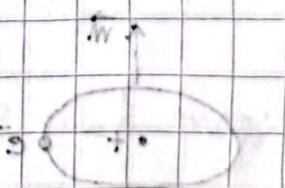
$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

(señalizan las líneas de electricidad)



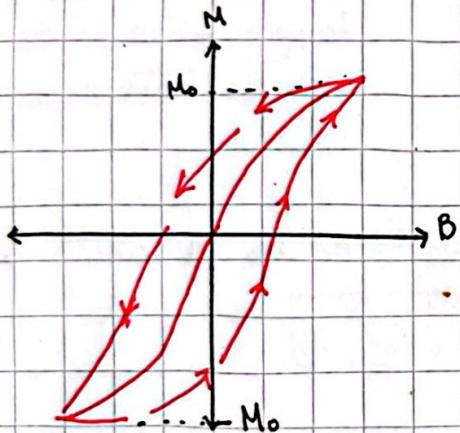
mitigación de variaciones de intensidad no se aten
casi igualmente saliendo con menor caída

señaliza mitigación de variaciones de intensidad
(señalizan apagado) $\vec{D} \times \vec{V}_p = \text{pwm} \cdot \vec{E}$ es válido



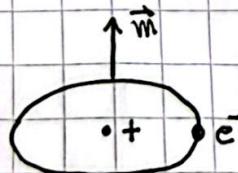
→ CAMPOS MAG. EN LA MATERIA

- Los materiales mag. se caracterizan porque se magnetizan. A posee un momento mag. que puede alinearse o no. En presencia de un B_{ext} , este momento mag. se puede orientar paralelo al campo, en cuyo caso hablamos de materiales paramagnéticos o bien orientarse en contra del \vec{B} , en cuyo caso hablamos de materiales diamagnéticos. Esta magnetización desaparece cuando $\vec{B} = \vec{0}$.
- También tenemos los mat. ferromagnéticos (imanes) que se magnetizan pero que se puede pero que se puede mantener esa magnetización cuando el B_{ext} se apaga. Este fenómeno es conocido como magnetización espontánea.



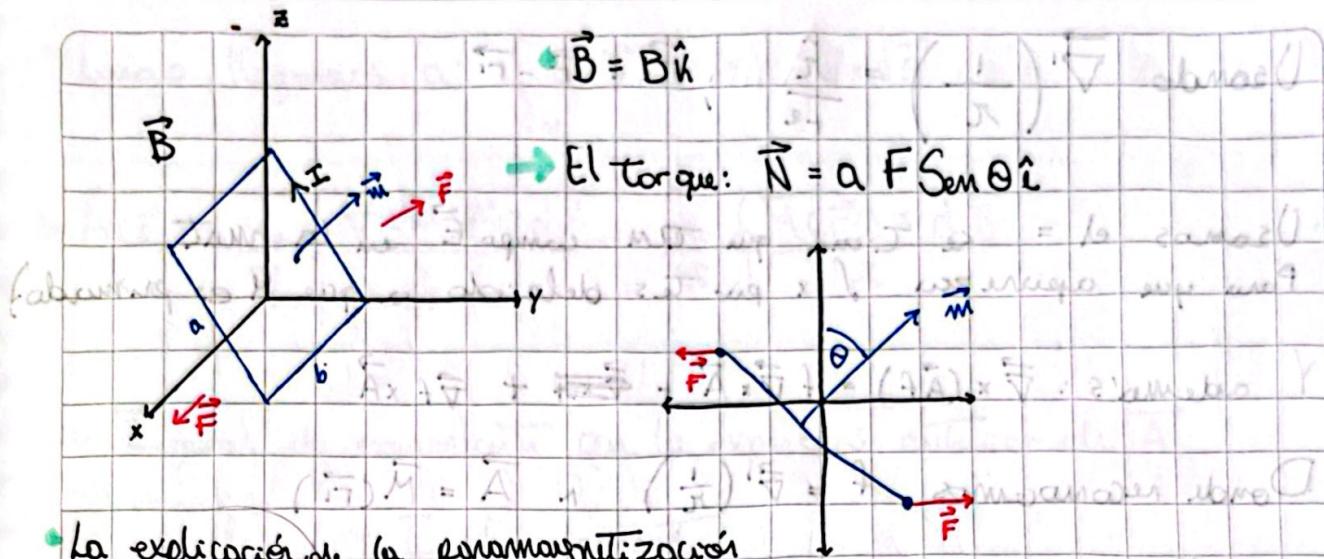
→ Sólo pasa en los ferromagnéticos (en \vec{B} causa \vec{M} y viceversa).

- Esto es un fenómeno colectivo, los átomos se comportan como pequeños dipolos magnéticos.



Los dipolos magnéticos experimentan torques viene de $\vec{F}_{mag} = q \vec{V} \times \vec{B}$ (carga monótona)

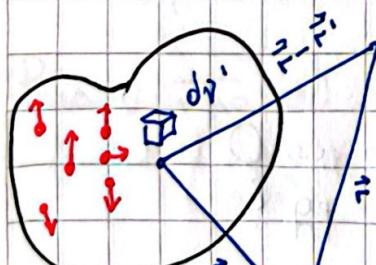
• Revisar Griffiths diamagn.



- La explicación de la paramagnetización es que el torque va a producir que \vec{m} se alinee con \vec{B} .
- $\vec{N} = \alpha F \sin \theta \hat{i}$, pero $\vec{F} = I b \vec{B}$ carga por unidad de longitud
- $\vec{N} = I \alpha B \sin \theta \hat{i} = m B \sin \theta \hat{i} = \vec{m} \times \vec{B}$

Magnetización

Efecto macroscópicos, en el cual se consideran los átomos como pequeños dipolos.



Para 1 dipolo \vec{m} sabemos que:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

• Para una distribución continua de dipolos mag:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{m}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Donde $M(\vec{r}) = \frac{d\vec{m}}{dV}$ (magnetización)

- Usando $\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\hat{r}}{r^2}$; $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_i$

- Usamos el $\vec{A} = \kappa \vec{r}$ que tenemos en la mat.
Para que aparezca $\int \vec{r} \times \vec{B}$ para despejar \vec{B} (que \vec{M} es primario)

- Y ademas: $\vec{\nabla} \times (\vec{A}f) = f \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} f \times \vec{A}$

- Donde reconocemos $f = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right)$ y $\vec{A} = \vec{M}(\vec{r}_i)$

- Obtenemos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{r} dV' - \int \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{r} \right) dV' \right\}$$

- Y a partir del teorema de la divergencia

$$\rightarrow \int \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \cdot dV = \oint \vec{V} \cdot d\vec{S} \rightarrow \text{Hacemos cambio } \vec{V} \text{ que tenemos producto cruz}$$

- Reemplazando $\vec{V} = \vec{V} \times \vec{C}$

$$\rightarrow \int_V \vec{\nabla}(\vec{V} \times \vec{C}) dV = \oint \vec{V} \times \vec{C} d\vec{S}$$

- Pero $\vec{\nabla}(\vec{V} \times \vec{C}) = \vec{C}(\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{V}(\vec{\nabla} \times \vec{C})$

- Y $d\vec{S}(\vec{V} \times \vec{C}) = \vec{C} d\vec{S} \times \vec{V} = -\vec{C} \cdot (\vec{V} \times d\vec{S})$

Luego, llegamos a: $\int \vec{\nabla} \times \vec{V} dV = - \int \vec{V} \times d\vec{S}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}') dV'}{\pi} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}$$

→ Igual de equivalente que la expresión anterior de \vec{A} .

• Ventaja:

~ Intercorrente

~ Contribución corriente ligada

~ Superficial y volumétrico

Definimos los corrientes ligadas.

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{M}$$

Otra manera:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_b \cdot dV}{\pi} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_b dS}{\pi}$$

CAMPOS MAG EN LA MATERIA

• Para dentro del mat. magnético \rightarrow si es contribución externa

$$\vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f$$

$$\frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \vec{J}_f$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

• Nueva Ley de Ampere

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f \quad \rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f / c$$

⇒ Para campos magnéticos en simetría

• CONDICIONES DE BORDERE

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M})$$

$$\rightarrow \vec{H}_{up}'' - \vec{H}_{down}'' = \vec{k}_f \times \hat{M} \quad \rightarrow \vec{H}_{up}^{\perp} - \vec{H}_{down}^{\perp} = -(\vec{M}_{up}^{\perp} - \vec{M}_{down}^{\perp})$$

- En base a estos eq. se llega a eq. de onda (Ley de Snell/Fresnel)

• MEDIDOS LINEALES

$$\rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H}, \text{ donde } \chi_m: \text{Susceptibilidad mag del material (Experimental)}$$

↓
Estamos al interior del mat → Por eso es \vec{H} y no \vec{B}

$$\rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \underbrace{\mu_0 (1 + \chi_m)}_{\mu} \vec{H}$$

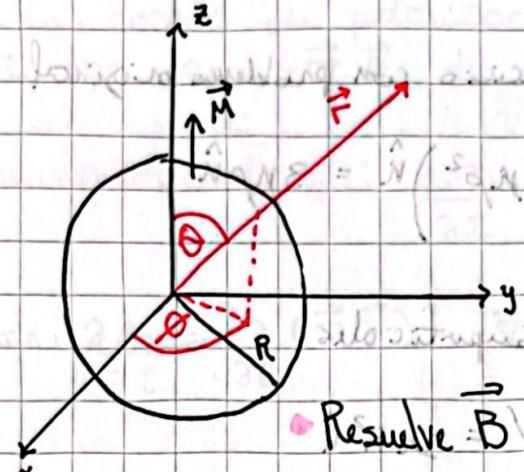
μ : Permeabilidad magnética

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

- Entonces los eqs:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f \end{array} \right.$$

e) **Ejemplo:** Encontrar \vec{B} por una esfera uniformemente magnetizada, con $\vec{M} = M_0 \hat{z}$



$$\Rightarrow \vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \quad (\text{debido a } M \text{ constante})$$

$$\Rightarrow \vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = \vec{M} \times \vec{r} \\ = M_0 (\hat{z} \times \hat{r}) = M_0 S \sin \phi \hat{\phi}$$

(Ver Griffiths Ej. 5.11)

• Resuelve \vec{B} para una esfera esténica con σ que rota, donde:

$$\vec{n} = \sigma \vec{v}$$

$$= \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi}$$

M_0

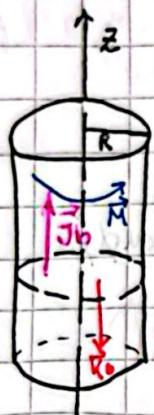
• Luego: $\vec{B}_{int} = \frac{2}{3} M_0 \vec{M}$ (interior)

$$\Rightarrow \vec{B}_{ext} = \frac{M_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}}{r^3} \right] \quad (\text{exterior})$$

Donde: $\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}$

Ejemplo: Cilindro largo de radio R con magnetización

$$\vec{M} = \kappa \rho^2 \hat{\phi} \text{ con } \kappa = \text{cte}$$



→ Intentar hacer el ejercicio con problema original

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \kappa \rho^2) \hat{\rho} = 3 \kappa \rho \hat{\rho}$$

Viendo q: hay corrientes superficiales

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{\vec{M}} = \kappa \rho^2 (\hat{\phi} \times \hat{\rho}) / \rho = -\kappa R^2 \hat{\phi}$$

OBS: La corriente total es cero. → Tienen que ser iguales (se suman $\int J_b d\ell$) y tienen sentido ya que no son cargas libres, están ligadas).

Usando Ley de Ampere (Por completo en la curva)

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \kappa \rho^2 \hat{\phi} = \mu_0 \vec{M} & , \rho < R \\ 0 & , \rho > R \end{cases}$$

→ porque corriente total es 0

GLOS. DE MAXWELL EN LA MATERIA

- Para las cargas de polarización que varían con el tiempo $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ de sucesos

$$\Rightarrow \text{Conservación de Carga: } \frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p = 0$$

- Donde $\frac{\partial \rho_b}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \Rightarrow \vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

- Luego, $\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \text{Identificando los campos. } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \bullet \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{array} \right.$$

$$(i) \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$(ii) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(iii) \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

\hookrightarrow (Faraday)

\hookrightarrow (Ampere)

B) Métodos para resolver problemas mag.

(A) MÉTODO GENERAL

- Potencial vectorial magnético ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$) y si tenemos la relación $\vec{H} = \vec{H}[\vec{B}]$ (no necesariamente lineal), entonces el problema se resuelve:

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H}[\vec{\nabla} \times \vec{A}] = \vec{J}$$

- En el caso particular de un medio lineal (Eso significa que $\vec{B} = \mu \vec{H}$) la eq. queda:

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{J}$$

- Explicitamente queda: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu \vec{J}$

- Usando el Gauge de Coulomb $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

- Llegamos a la eq de Poisson para \vec{A}

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}}$$

(B) Cuando $\vec{J} = 0$ (Método potencial escalar magnético)

- Como $\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_M$ (*)

↑ P.o.T. escalar

- Asumiendo una relación $\vec{B} = \vec{B}[\vec{H}]$, la eq $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ se reduce a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}[-\vec{\nabla} \phi_M] = 0$$

- Que en el caso de materiales lineales se reduce a

$$\vec{\nabla}(\mu \vec{\nabla} \phi_M) = 0$$

↑ No necesariamente es CTI.

- Asumiendo que M tiene por partes finitas en \neq regiones, en la región la ecuación es:

$$\vec{\nabla}^2 \phi_M = 0$$

↑ Especie de "fuerza magnética" \rightarrow Joule

(C) Ferromagnético duro (M dada y $\vec{J} = 0$)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla}^2 \phi_M = \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \rho_M$$

Y sabemos la solución (por Green).

$$\phi_M(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

↑ En primordios

Si \vec{M} no varía mucho y está localizado entonces podemos simplificar:

$$\phi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int M(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

- Usando el Teorema de conservación $\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{r} \right) = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$

- Nos queda

$$\rightarrow \phi_M(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \vec{\nabla} \cdot \int \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

- Además, asumiendo que calculamos ϕ_M lejos de la región donde \vec{M} es no nula, podemos escribir

$$\rightarrow \phi_M \approx -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \int \vec{M}(\vec{r}') dV'$$

$$\rightarrow \phi_M \approx \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

- Volviendo al ejercicio de la estrella magnetizada.

- Calculando $\phi_M = -\frac{MR \cos \theta}{3}$

$$\rightarrow H_{int} = -\vec{\nabla} \phi_M = \frac{M}{3} \hat{k} = \frac{\vec{M}}{3}$$

- Y luego $\vec{B}_{ext} = \mu_0 (\vec{H}_{int} + \vec{M}) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$

Foto: sombra de una estrella magnetizada en un campo uniforme \vec{M} idéntico

$$v_b \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla} (\mu_0 M) = \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla} M$$

⇒ Jackson: P(217 - 219) - (236 - 237)

Leyes de Maxwell

(i) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \rightarrow$ Ley de Gauss → Volumen (Eq. Local)

(ii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$; $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \rightarrow$ No existencia de cargos magnéticos

(iii) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow$ Faraday - Lenz

(iv) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow$ Ampere - Maxwell

- Como ya no tenemos $\nabla \times \vec{E} \neq 0$ no podemos usar el potencial vectorial electrostático, no pasa lo mismo con el \vec{B} , ya que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. $\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \text{Gauge!}$

Leyes de conservación

- Conservación de la carga $\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ (local) $\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \end{cases}$
- ⇒ Demostrar que las leyes de Maxwell satisfacen las leyes de conservación

⇒ Cómo se modifica si agrego campo magnético? es decir cargo mag.

$$\boxed{J^{\mu} = (\rho, \vec{J}) \rightarrow \partial^{\mu} J_{\mu} = 0 \quad | \quad \partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \right) - \frac{1}{c} = 0$$

① Conservación de la Energía.

- La densidad de energía electromagnética:

$$\rightarrow U_{em} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) dV$$

- A partir de la expresión del trabajo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \quad | d\vec{l} = \vec{v} dt$$

- Como $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$, sólo queda

$$dW = q \vec{E} \vec{v} dt \quad y \text{ haciendo } q \rightarrow \rho dV \wedge \rho \vec{v} = \vec{J}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{E} \cdot \vec{J}$$

↳ \int ya que de I corriente \rightarrow pasa a la densidad de corriente

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \int (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV} \quad (*) \rightarrow \text{Potencia liberada} \times \text{Unidad de volumen}$$

- $\vec{E} \cdot \vec{J}$ es Trabajo \times unidad de T por unidad de volumen

Modificaremos las eq de Maxwell

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \epsilon_0$$

$$\rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{v} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{Pero, } \vec{V} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$= \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

Así:

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

Reemplazando \vec{J} en (*), obtenemos:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) dV - \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{E} \times \vec{B} dS$$

Aérea

Se define como $\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ Vector de Poynting

En forma completa:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} U_{em} - \oint \vec{S} d\vec{a} \rightarrow \text{Ley de conservación de campos eléctricos y magnéticos}$$

Si no se realiza trabajo sobre las cargas en el volumen $\frac{dU}{dt}$. Entonces:

$$\int \frac{\partial U}{\partial t} dV = - \oint \vec{S} d\vec{a} = - \oint \vec{V} \cdot \vec{J} dV$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \text{Ley de conservación de energía electromagnética}$$

Donde $U = U_{em} + U_{mec}$

→ **Ley de Poynting:** El trabajo hecho por la carga es la disminución de la energía molas el flujo de los campos tierra.

Conservación de momento Lineal

- $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$; $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt}$ = momentum mecánico

$$= \int (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

\vec{f} → Es parte de densidad de fuerza

- Escribiremos lo anterior en función de los campos, usando las eq de Maxwell

$$\rightarrow \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Así, $\vec{f} = \epsilon_0 [\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{B} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - c^2 \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})]$

• Usando

$$\rightarrow \vec{B} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ donde } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{Lo cambio por ley de Faraday}$$

• Tomando la forma:

$$\rightarrow \vec{f} = \epsilon_0 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t}$$

• Donde se agregó $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} = 0$

↑ campo → Este \vec{f} es sim.

- Entonces $\frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} + \frac{d}{dt} \epsilon_0 \int (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \int \vec{f}^* dV$

• → Este término se pasó a la izq si en dir.

• El término \vec{f}^* se puede escribir en términos de un tensor.

$$\rightarrow T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 [E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E} + c^2 \vec{B} \cdot \vec{B}) \delta_{\alpha\beta}]$$

• Conocido como el Tensor de Maxwell o Tensor electromagnético

$$\text{La eq. queda } \frac{d}{dt} (P_{\text{mec}} + P_{\text{campo}}) = \int_V \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} dV$$

• Donde P_{mec} es la energía mecánica ($E^2/2$) y P_{campo} es la energía del campo.

$$\rightarrow P_{\text{campo}} = \epsilon_0 \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) dV \quad \text{Divergencia} \rightarrow \text{de un tensor}$$

$$\rightarrow P_{\text{campo}} = \mu_0 \epsilon_0 \int_V \vec{S} dV \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

$$(\text{Integrando}) = [\vec{S} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{S}] \frac{1}{2} + [\vec{E} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{B}] \frac{1}{2} = \vec{S} \cdot \vec{B}$$

$$(\text{Calculando integrando}) : \vec{S} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{S} \quad \text{no cumple}$$

$$\vec{S} \otimes \vec{S} \cdot \vec{T} = \vec{T}$$

$$(\text{Calculando integrando}) : \vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{A} \quad \text{cumple}$$

$$\text{entonces } \vec{S} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{S} \quad \text{no cumple}$$

$$\text{entonces } \vec{S} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{S}$$

$$\vec{S} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{A}) = \vec{S} \cdot \vec{T} \cdot \vec{A} =$$

$$(\text{Calculando integrando}) : \vec{T} \cdot \vec{A} = (\vec{T} \cdot \vec{A}) \quad \text{cumple}$$

$$\text{entonces } \vec{T} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{T}$$

$$\rightarrow \vec{F} = \int dV [\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}] \rightarrow \text{Equivalente, Ley de Lorentz}$$

$$\vec{F} = \int \vec{f} dV, \text{ donde } \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

- Luego de arreglos, queda:

$$\rightarrow \vec{f} = \epsilon_0 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]$$

$$- \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Vector → Pues en la Ley de
continuidad es escalar

↳ Este es nuestro problema

- Se introduce el tensor de Maxwell debido a que necesitamos seguir la estructura de las ecuaciones de continuidad $\partial P / \partial T + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ donde nuestro resultado es un vector (gracias al tensor)

$$\rightarrow T_{ij} = \epsilon_0 [E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2] + \frac{1}{\mu_0} [B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2] \rightarrow \text{Componentes}$$

- Luego, así como un vector $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$, también podemos escribir para un tensor.

$$\rightarrow \vec{\Pi} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

- Luego, como $A_i = \vec{A} \cdot \hat{e}_i$ así también puedo calcular

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{\Pi} &= A_i \vec{e}_i \cdot T_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = A_i T_{ij} \vec{e}_i \delta_{ij} \rightarrow \text{La } \delta \text{ no tiene} \\ &= A_j T_{ij} \vec{e}_i = (\vec{A} \cdot \vec{\Pi})_i \hat{e}_i \quad \text{importancia, ya que } \delta \text{ es simétrico.} \end{aligned}$$

Donde $(\vec{A} \cdot \vec{\Pi})_i = A_j T_{ij} \rightarrow$ Con esto podemos crear el término de la conservación

- Calcularemos la derivada de T_{ij} → Lo mismo que en \vec{E}

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi})_{;i} = \partial_j (E_0 [E_i E_j - \frac{1}{2} \partial_{ij} E^2]) + (\vec{B} \dots)$$

$$= E_0 \{ (\partial_j E_i) E_j + E_i \partial_j E_j - \frac{1}{2} \partial_i E^2 \} + (\vec{B} \dots)$$

$$= E_0 \{ E_j \partial_j (E_i) + E_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_i E^2 \} + \dots$$

$$= E_0 \{ \vec{E} \cdot \vec{\nabla} (E_i) + E_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_i E^2 \} + \dots$$

- Es debido a esto, que

$$\boxed{\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} - E_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int dV [\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}] = \int dV \vec{f}$$

- La fuerza total

$$\Rightarrow \vec{F} = \int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} - E_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int dV \vec{S}$$

- Usando el Término de la div.

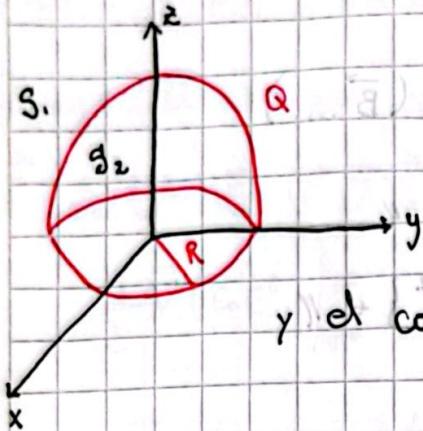
$$\Rightarrow \vec{F} = \int dV \vec{\Pi} \cdot \vec{dA} - E_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int dV \vec{S}$$

↓ Si las fuentes están confinadas, éste término, a la distancia se vuelve a cero ya que \vec{S} decrece.

$$(E_x + E_y + E_z) \cdot 0 = 0$$

$$(E_x^{\text{orig}} - E_x^{\text{fin}}) \left(\frac{0}{R_{\text{orig}}} \right) = 0$$

Ej: Calcular la fuerza sobre el hemisferio norte de radio R y carga Q



Los cuerpos son estóicos, luego el 2° término es cero.

$$S_1: d\vec{A} = R^2 \operatorname{sen}\theta d\phi \hat{r}$$

$$\text{y el campo } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{r}$$

Tienen que estar evaluados en lo sup

- Como debemos usar coord. cartesianas (Debido al \vec{T}_{ij})

$$\Rightarrow \hat{r} = \hat{i} \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \hat{j} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \hat{k} \cos\theta$$

- Necesitamos las componentes en \vec{z} : T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}

- Porque $(\vec{\Pi} d\vec{A})_z = T_{zx} dA_x + T_{zy} dA_y + T_{zz} dA_z$

- Calculando las componentes:

$$\Rightarrow T_{zx} = \epsilon_0 E_z E_x = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\phi$$

$$\Rightarrow T_{zy} = \epsilon_0 E_z E_y = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\phi$$

$$\Rightarrow T_{zz} = \epsilon_0 E_z^2 - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)$$

$$= \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

- Después de juntarlos todo en \int , la fuerza debida al hemisferio es:

$$\Rightarrow \vec{F}_h = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{F}_h = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{8R^2} //$$

Para el disco, si: $d\vec{A} = -\hat{u}_r dr r d\phi$ $\begin{cases} r = [0, R] \\ \theta = [0, \pi] \\ \phi = [0, 2\pi] \end{cases}$

El campo es el: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} (\hat{i} \cos\phi + \hat{j} \sin\phi)$

Haciendo lo mismo de antes (solo existe $\hat{z} \times d\vec{A}_z$)

$$\vec{F}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3Q^2}{10R^2} //$$

Revisar = \vec{E} en el Griffiths, ya que se evalúa distinto.

* Estos problemas nos hacen pensar en qui' volumen usar para resolver el prob.

esquema evaluando distintos volumenes

$$Q \cdot \frac{V_{ext}}{V_{ext} + V_{int}} = Q$$

$$I \cdot \frac{V_{ext}}{V_{ext} + V_{int}} = E \cdot \text{cavidad}$$

$$N \cdot I \cdot R = C \cdot \text{cavidad}$$

CONSERVACIÓN MOMENTUM LINEAL

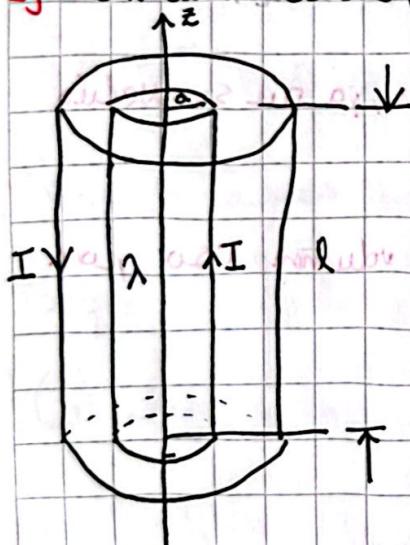
- Si extendemos el volumen a todo el espacio $\vec{r} \rightarrow \infty$
Esto implica que el término

$$\Rightarrow \oint \vec{P} dA \rightarrow 0 \rightarrow \text{entonces } \vec{P}_{\text{nuc}} + \vec{P}_{\text{ext}} = \text{cte}$$

- Si definimos como la densidad P_{nuc} como la densidad de momentum mecánico y P_{ext} es la densidad de momentum en los campos ($P_{\text{ext}} = \mu_0 \vec{J}$), entonces

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (P_{\text{nuc}} + P_{\text{ext}}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Ej: Un cable coaxial.



- El conductor lleva una carga uniforme por unidad de longitud λ y una corriente estable hacia arriba I .

- El conductor exterior tiene carga continua y corriente continua. Cualquier momentum almacenado por los campos es estable

1.- Tenemos que calcular tanto \vec{E} como \vec{B} y sus intensas

$$\int \vec{B} dI$$

$$\rightarrow \text{Por Gauss: } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{\phi}$$

$$\rightarrow \text{Luego, } \vec{g} = \frac{\lambda I \hat{u}_z}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2}$$

• Integrando $\vec{P}_m = \mu_0 \epsilon_0 \int \vec{J} d\tau = \frac{\mu_0 \lambda I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{u}$ //

→ Hallar posos intermedios → Griffiths

y esta cuando dura a

- Si el cilindro tiene mayor resistencia, la $I = I$ es variable lo cual induce un campo \vec{E} el cual ejerce una fuerza sobre los conductores

!

$$\boxed{\int \vec{F} \cdot d\vec{t} = \vec{P}_{\text{net}}}$$

$$[(B \times \vec{J}) \times \vec{r}] \cdot \vec{d}l = \mu_0 \times \vec{J} = \mu_0 \text{ currente}$$

entonces al cerrar $\times 2\pi l / bV$ en los 7 círculos se abren?

• Término

anterior anterior es que el cerrar los círculos de resistencia
que cierran los contactos y la apertura que los círculos de
D - oper

el dispositivo para abrir los círculos con un interruptor de la misma
resistencia que cierra se abre cuando las tensiones se abren
? Si es así el efecto de la tensión es menor abriendo

→ cerrar \rightarrow el efecto de la tensión es menor al ser el
mismo efecto contrario al que crea la apertura manteniendo
(sin apertura) porque

CONSERVACIÓN ALMACENAMIENTO MAGNETICO.

- Campos pueden almacenar energía

$$\Rightarrow U_{\text{m}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

- El momento lineal

$$\Rightarrow \vec{P}_{\text{m}} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

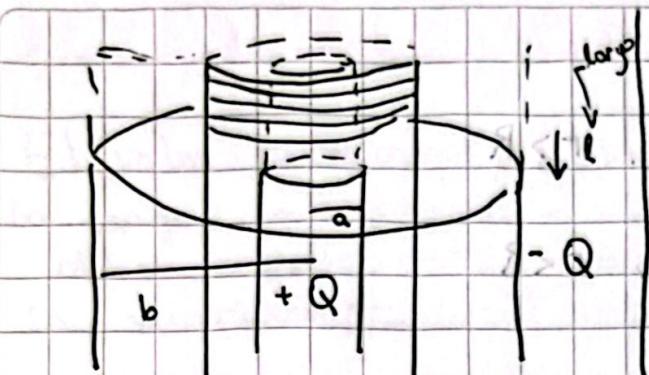
$$\bullet \text{Entonces } \vec{L}_{\text{m}} = \vec{F} \times \vec{P}_{\text{m}} = \epsilon_0 [\vec{F} \times (\vec{E} \times \vec{B})]$$

Ej: Solenoide de radio r de n vueltas \times unidad de longitud \times corriente I .

Coaxialmente hay 2 cilindros de long. l , el cilindro interno de radio a lleva carga Q y el externo de radio b lleva carga $-Q$.

Asumir $l \gg b$ para que los efectos de borde sean despreciables cuando la corriente del solenoide se reduce los cilindros cuando comienzan a rotar. De dónde viene el \vec{l} ?

Antes que la corriente se apague I es cte \rightarrow Luego se transfiere energía desde I pero que los cilindros comienzan a rodar (energía mec.)



- Antes de apagón I:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi R l} \cdot \frac{\hat{z}}{z}, \quad (a < z < b)$$

- Entre los cilindros y $\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n I \hat{u}$, ($\rho < R$)

- En el interior situaremos la sumatoria de los integrals

- La dimensión de momento $\Rightarrow P_{cm} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l \rho} \hat{x}$ ($a < \rho < R$)

- Y entonces: $\Rightarrow \vec{l}_{cm} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l \rho} \hat{u}$

- El momento angular total

$$\Rightarrow \vec{l}_{cm} = \vec{l}_{cm} N = \vec{l}_{cm} \pi (b^2 - a^2) l$$

- Finalmente $\vec{l}_{cm} = -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q (b^2 - a^2) \hat{u}$ \rightarrow Almacenando en los campos.

- Cuando se apaga I: El cambio en \vec{B} produce una corriente circular (viene del campo rotacional \vec{E})

- Siempre se elige un círculo: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

- Obtenemos:

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \cdot \frac{a^2}{r} \hat{\phi}, & r > R \\ -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} r \hat{\phi}, & r < R \end{cases}$$

- El torque del cilindro externo es

$$\Rightarrow \vec{N}_b = \vec{r} \times (-Q \vec{E}) = \frac{1}{2} \mu_0 n Q R^2 \frac{dI}{dt} \hat{n}$$

- A partir del cual obtenemos el momento angular.

$$\Rightarrow \vec{L}_b = \frac{1}{2} \mu_0 n Q R^2 \hat{n} \int_{\frac{R}{2}}^{\frac{3R}{2}} \frac{dI}{dt} dt = \frac{1}{2} \mu_0 n I Q R^2 \hat{n}$$

- Repitiendo lo mismo en el circuito interno:

$$\Rightarrow \vec{L}_a = \frac{1}{2} \mu_0 n I Q a^2 \hat{n}$$

- La suma de \vec{L}_a y \vec{L}_b tendrá $T_{máx} = \alpha \cdot L_{máx}$ almacenado

- En cualquier momento que la cierra valga media se inversa.

POTENCIALES RETARDADOS

- El valor de un campo dependiente del tiempo que se demora la carga en generar el campo, por lo tanto se deben evaluar estos campos en un t anterior a la medición. También aparecen potenciales adelantados
- Los ob. que observamos son \vec{E} y \vec{B} , no potenciales; los retardados cuales son los retardados por lo cual no hay problemas con la causalidad
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- $\vec{R} \vec{V} = \vec{B} \Rightarrow$ $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}$
- El potencial escalar eléctrico ya no se puede utilizar debido a que ya no se cumple que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.
- Si se usa el vectorial.
- La 1^a a partir de $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
- Usando esto en la Ley de Faraday
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Quedando: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$
- Luego, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

- Reemplazando en la ley de Gauss

$$\rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Y reemplazando en la eq de Ampere - Maxwell

$$\rightarrow (\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \vec{\nabla} (\vec{V} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\mu_0 \vec{J} \quad (2)$$

- Así, podemos introducir la libertad de Gauge, para imponer restricciones extra para hacer más simples las expresiones. Usando:

$$\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha} \rightarrow \phi' = \phi + \beta$$

Si $\vec{\nabla} \times \vec{\alpha} = 0$ se genera el campo $\vec{\alpha}$

También, los 2 potenciales ϕ' , \vec{A}' dan el campo eléctrico.

$$\rightarrow \vec{\nabla} \vec{\beta} + \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \left(\vec{\beta} + \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} \right) = 0$$

Basta exigir que se cumpla para fijar la libertad de Gauge.

Los transformaciones: $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda$ $\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$ Dyan los campos \vec{E} y \vec{B} intactos.

- En la versión estática exigimos el gauge de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, luego (1) queda

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Causalidad}$$

- En electrodinámica el gauge de Coulomb nos no nos desacopla la eq (2)

- Acá usaremos el gauge de Lorentz ($\partial^\mu A_\mu = 0$)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{Con esto fijamos la cté } \lambda \text{ permitiendo la relación entre potencial y campo}$$

- Con esto, las eqs se reducen ($\square \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$) ($\partial^\mu \partial_\mu =$

$$\Rightarrow \square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \& \quad \Rightarrow \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \Rightarrow \square A^\mu = J^\mu$$

Es el operador D'Alembertiano, queremos resolver

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$$

Vamos a usar la función de Green en espacio-tiempo. Pedimos una localización y potencial en el ∞ sea 0

- Intentar hacerlo en green

ELECTRODINÁMICA

$$\rightarrow \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} ; \rightarrow \nabla \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- Gauge de Lorentz $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\partial^\mu A_\mu = 0)$

- Para que el potencial genere radiación debe acelerar o desacelerar.

- Radiación en sincrotrón (emisiones astromómicas)

POTENCIALES RETARDADORES

- Funciones de Green \rightarrow (No intenso término de sup) \rightarrow fuente localizada

$$\rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad V \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

- Asumimos que existe un $G(\vec{r}, \vec{r}')$ que satisface la misma ecuación.

$$\rightarrow \nabla_r^2 G = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad / \rho(\vec{r}') e \int d^3 r'$$

$$\rightarrow \int d^3 r' \nabla_r^2 G \rho(\vec{r}') = -4\pi \int \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'$$

$$\rightarrow \nabla^2 \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r' = -4\pi \rho(\vec{r})$$

- Reemplazando $\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 V$

- $\nabla^2 \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r' = -4\pi \rho(\vec{r}) = 4\pi \epsilon_0 \nabla^2 V$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r'$$

- Sabemos que $G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

- Para campos independientes del tiempo.

$$\rightarrow \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$$

- Así que $\phi \rightarrow 0$ cuando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) (Evaluar muy lejos de la fuente localizada)

- Asumimos $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$

- Multiplicamos por ρ y δ en $d^3 r$ y en $dt / \rho(\vec{r}', t') \int d^3 r' dt'$

- Nos queda

$$\rightarrow \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \rho(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \quad (\text{Sol formal})$$

- ¿Cuánto vale G ? Usando Fourier

$$\rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega, t') e^{-i\omega t} d\omega$$

Vale en espacio de Fourier

• Reemplazaremos (*) y obtendremos ($\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 \tilde{G} + \kappa^2 \tilde{G}) e^{-i\omega t} dw = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$$

$$• \text{Usando } \delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} dw$$

• Obtenemos

$$\rightarrow (\nabla^2 + \kappa^2) \tilde{G} = -2\sqrt{2\pi} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{i\omega t'}$$

• Así: \tilde{G} satisface $(\nabla^2 + \kappa^2) \tilde{G} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

└ Resolv

• Cuya solución es:

$$\rightarrow \tilde{G} = \frac{A e^{i\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{B e^{-i\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

• Esta solución converge cuando $\kappa|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow 0$, donde se cumple que $A + B = 1$

Potenciales Retardados

$$• \text{Elegimos } \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{i\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

• Reemplazando

$$\rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G} e^{-i\omega t} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G} e^{i\omega(t-t')} dw$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot e^{-i\omega(t-t')} dw$$

$$\kappa = \omega/c$$

- Comprobamos $\delta(t - t') = \dots$

argumentos de δ

$$\therefore = \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right)$$

Tiempo que se demora
 en llegar una señal de un
 tiempo a otro

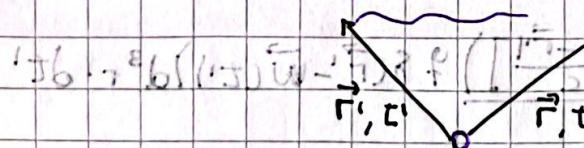
Potencial Retardado se fuese +
 , si es adelantado.

- Para poder usar la función de Green para resolver la eqz. de potencial $\phi(\vec{r}, t)$ debemos usarla en un caso particular sino es muy difícil de solucionar.

- El potencial retardado es:

$$\rightarrow \text{Campo} \rightarrow \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}]) \rho(\vec{r}', t') d^3 r' dt'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\rightarrow \text{Potencial} \rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}]) \vec{j}(\vec{r}', t') d^3 r' dt'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



izquierdo aviso a comisión (kontrol) lanzaron b a suavizar
dicho a comisión, lanzaron b al comisionado

$$\vec{r}, t = (\vec{r}, t) \text{ campo } (\vec{r}, t) \text{ campo } - \vec{r}, t = (\vec{r}, t) \text{ campo } - \vec{r}, t = (\vec{r}, t) \text{ campo }$$

GRADIENTES DE LÍNEA FIJA

potenciales de línea fija (Lienard - Wiedert)

- Una carga puntual que se mueve por la trayectoria
- El tiempo retardado se determina a partir de la ecuación
- $|\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r)$
- $t_r \rightarrow$ Donde evaluamos
- Para un cargo puntual
- $\rho(\vec{r}', t') = q \delta(\vec{r}' - \vec{w}(t'))$
- $\vec{j}(\vec{r}', t') = q \vec{V}(t') \delta(\vec{r}' - \vec{w}(t'))$
- Donde $\vec{V} = \frac{d\vec{w}}{dt}$ → Vel. a la que se mueve la partícula
- Luego, $\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}]) \delta(\vec{r}' - \vec{w}(t')) d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$
- Si tomamos la integral temporal (Mildford) llegamos a una expresión, si tomamos la integral espacial, llegamos a otra.

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t' - [t - R(t')/c])}{R(t')} \text{ donde } R(t') = |\vec{r} - \vec{w}(t')|$$

- Usando $\delta(f(x)) = \sum_{f(x_0)=0} \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x)|}$

- Entonces $f(t) = t' - t + R(t')$ $\Rightarrow \frac{df}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} \Big|_{t=t_r}$

- Como es un sólo término, la suma no existe

- $\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t_r)} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} \right) \Big|_{t=t_r}$

- Se puede arreglar de la siguiente manera:

- $\frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} \Big|_{t'=t_r} = -\vec{p} \cdot \vec{R} \Big|_{t_r} \quad (\vec{c} \vec{p} = \vec{d}\vec{w} = \vec{v})$

- Así $\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \vec{p} \cdot \vec{R}]|_{t_r}}$ (El \vec{A} es lo mismo, pero en el numerador va $q\vec{v}$)

- Donde $t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}$; $\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{w}(t)$

- Ver y Griffiths $\vec{w} = \vec{v}_0 t$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$: considerar que la variable es

$$\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{c} - \frac{\vec{v}_0}{c} \cdot t = (\vec{r}_0 - \vec{r}) - \vec{v}_0 t = \vec{r}_0 - \vec{r} - \vec{v}_0 t$$

$$(\vec{r}_0 - \vec{r})(\vec{v}_0 - \vec{v}) + \vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

POTENCIAS LINEALES - WIECHERT

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t_r)|_{tr}}$$

- donde $t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}$; $\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{w}(t)$; $\vec{\beta} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{w}}{dt}$

Ej: Encuentra potenciales de L-W para una carga q que se mueve con \vec{v}_0 cte.

$$1) \vec{w}(t) = \vec{v}_0 t$$

$$2) \text{Calculamos } t_r; R(t_r) = |\vec{r} - \vec{v}_0 t_r| = c(t - t_r)$$

• Así, explícitamente.

$$\rightarrow r^2 + v_0^2 t_r^2 - 2\vec{r}\vec{v}_0 t_r = c^2(t^2 - 2t t_r + t_r^2)$$

• De acá

$$\rightarrow t_r = \frac{c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0 \pm \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0)^2 + (c^2 - v_0^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{c^2 - v_0^2}$$

• Para determinar el signo hacemos: $v_0 \rightarrow 0 \quad \left\{ t_r = t - \frac{r}{c} \right.$

• Se elige $(-)$ porque t_r debe ser menor a t

$$\text{Luego } \vec{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{R} = R(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}) = c(t - t_r) \left[1 - \frac{\vec{v}_0}{c} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{v}_0 t_r}{c(t - t_r)} \right]$$

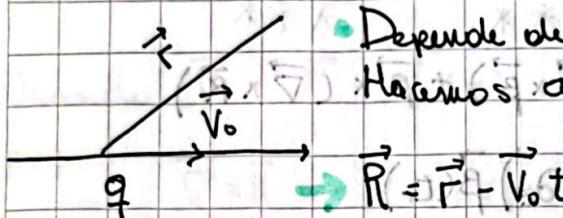
$$\therefore \frac{1}{c} \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0)^2 + (c^2 - v_0^2)(r^2 - c^2 t^2)}$$

• Finalmente

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{\sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{V}_0)^2 + (c^2 - V_0^2)(r^2 - c^2t^2)}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qcV_0}{\sqrt{...}}$$

• Ahora se calcula \vec{E} y \vec{B} sin problemas



• Dependencia de \vec{R} con dirección de $\vec{V}_0 \rightarrow$ Radiación.

Hacemos aparecer un \vec{z}

$$\text{Luego } (c^2t - \vec{r} \cdot \vec{V}_0)^2 + (c^2 - V_0^2)(r^2 - c^2t^2) = (r \cdot V_0)^2 - r^2 V_0^2 + c^2 R^2$$

Poniendo atención
a esto.

$$(\vec{r} \cdot \vec{V}_0)^2 - r^2 V_0^2 = [(\vec{R} + \vec{V}_0 t) \cdot \vec{V}_0]^2 - (\vec{R} + \vec{V}_0 t)^2 V_0^2$$

$$\text{Quedando, } = (\vec{R} \cdot \vec{V}_0)^2 - R^2 V_0^2 = -R^2 V_0^2 \operatorname{Sen}^2 \theta //$$

$$\text{Finalmente } \phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{R^2 \sqrt{1 - \frac{V_0^2 \operatorname{Sen}^2 \theta}{c^2}}}$$

Cuando $V_0 \ll c$ queda la expresión de una partícula

* Caso campo de 1 carga en MeV.

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \vec{p} \cdot \vec{R}] / c}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{V}}{c^2} \phi(\vec{r}, t)$$

• Usaremos $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$+\vec{\nabla}\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{[R - \vec{p}\vec{R}]^2} \right] \vec{\nabla}(R - \vec{p}\vec{R})_{tr}$$

• Como $R = c(t - t_r)$ entonces el grad de R:

$$\rightarrow \vec{\nabla}R = -c\vec{\nabla}t_r$$

• Usando la identidad:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{p} \cdot \vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{p} + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{R} + \vec{R} \times (\vec{\nabla} \times \vec{p}) + \vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{R})$$

$$\text{Luego, } \vec{R} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = (R_x \partial_x + R_y \partial_y + R_z \partial_z) \vec{p}(t_r)$$

$$= R_x \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt_r}}_{\vec{a}} \partial_x t_r + \dots * = \vec{p} - c\vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{\nabla} t_r)$$

Tiene que ir con
aceleración.

$$** = -\frac{\vec{a}}{c} \times \vec{\nabla} t_r$$

$$= \frac{\vec{a}}{c} \cdot \vec{R} \cdot \vec{\nabla} t_r \quad \vec{a} \equiv \vec{v} \text{ (aceleración)}$$

• Finalmente

$$\rightarrow \vec{\nabla}\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[R - \vec{p}\vec{R}]^2} \right] [\vec{p} + (c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a}) \frac{\vec{\nabla} t_r}{c}]$$

• A partir de la ecuación de la velocidad angular constante durante el movimiento:

$$\rightarrow |\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r) = R$$

$$\rightarrow -c \vec{\nabla} t_r = \vec{v} \cdot \vec{R} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{R} \cdot \vec{R}}{2\sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}} = \frac{\vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{R})}{2\sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}}$$

$$= \frac{1}{R} [(\vec{R} \cdot \vec{\nabla}) \vec{R} + \vec{R} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{R})]$$

• Pero

$$(\vec{R} \cdot \vec{\nabla}) \vec{R} = \vec{R} - \vec{v}(\vec{R} \cdot \vec{\nabla} t_r) \quad | \quad \vec{\nabla} \times \vec{R} = \vec{v} \times \vec{\nabla} t_r$$

• Usando $\vec{R} = \vec{r} - \vec{w}(t_r)$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{R} = -\vec{\nabla} \times \vec{w}(t_r) = -c \vec{B} \times \vec{\nabla} t_r$$

$$\rightarrow -c \vec{\nabla} t_r = \frac{1}{R} [\vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{v}) \vec{\nabla} t_r]$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} t_r = \frac{-\vec{R}}{R_c - \vec{R} \cdot \vec{v}}$$

$$\rightarrow -\frac{d\vec{A}}{dt} \Rightarrow \text{Se hace de la misma forma que en el punto anterior}$$

• Definiendo $\vec{\mu} = \hat{c} \vec{R} - \vec{v}$

• El campo eléctrico $E(\vec{r}, t)$ tiene componentes \vec{E}_r y \vec{E}_θ (decrece como $1/r^2$) y \vec{E}_ϕ (decrece como $1/r$)

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{(\vec{R} \cdot \vec{\mu})^3} \left[(c^2 - v^2) \vec{\mu} + \vec{R} \times (\vec{\mu} \times \vec{a}) \right]$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{R}}{c} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

- Estamos usando las eq de Maxwell con todas sus dep.

→ R : Distancia donde estás calculando los campos, para llegar a términos como el campo electrostático, basta hacer $V=0$.

* ¿Qué pasa cuando $\vec{\mu} = \hat{R} - \frac{\vec{V}_0}{c}$?

RADIACIÓN

- La potencia irradiada.

$$\rightarrow P = \oint_S \vec{s} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{E} \times \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\rightarrow \vec{s} = \frac{1}{\mu_0 c} [\vec{E} \times (\hat{R} \times \vec{E})] = \frac{1}{\mu_0 c} (E^2 \hat{R} - (\hat{R} \cdot \vec{E}) \vec{E})$$

- Con los términos columbianos, no hay ninguna chance de intercambio de energía a distancias muy largas $\oint \vec{E} \times \vec{B} \sim \frac{1}{R^4}$

- Usando sólo los términos de radiación

$$\rightarrow \vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(R \cdot \vec{\mu})^3} [\vec{R} \times (\vec{\mu} \times \vec{a})] \rightarrow E \perp R$$

→ Radiación Maxima

→ Ver constucción de Thompson

También podemos escribir

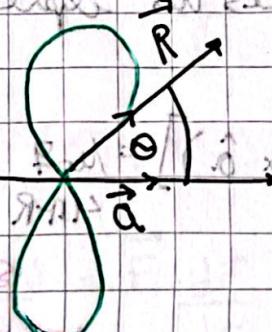
$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} [(\hat{R} \cdot \vec{a}) \hat{R} - \vec{a}]$$

$$\vec{S}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left(\frac{\sin^2 \theta}{R^2} \right) \hat{R}$$

$$\text{Luego, } P = \oint \vec{S}_{rad} \cdot d\vec{A}$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} (\text{Fórmula de Larmor})$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \sin \theta d\theta d\phi$$



Una bala en el aire

RADIACIÓN

$$\Rightarrow \vec{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_{\text{rad}}^2 \hat{R} \quad *$$

- El campo eléctrico de radiación

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{(R \cdot \vec{u})^3} [\vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{\alpha})]$$

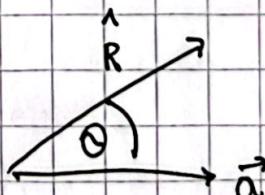
- La aprox que se hace para E_{rad} viene dada por la suposición de que la carga está instantáneamente en reposo en T_r , luego $\vec{u} = c\hat{R}$ (c es const) \rightarrow límite relativista.

- Esta aprox. hace que nuestra expresión sea más simple.

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{R} [\hat{R} \times (\hat{R} \times \hat{\alpha})] = \frac{\mu_0 q}{4\pi R} [(\hat{R} \cdot \hat{\alpha}) \hat{R} - \hat{\alpha}]$$

Se hace prod punto
consigo mismo para
obtener *

$$\Rightarrow \vec{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi R} \right)^2 [\alpha^2 - (\hat{R} \cdot \hat{\alpha})^2] \hat{R}$$



$$\Rightarrow \vec{S}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2 \alpha^2}{16 \pi^2 c} \left(\frac{\sin^2 \theta}{R^2} \right) \hat{R}$$

• Integrando

$$\rightarrow P = \oint S_{\text{rad}} d\vec{\alpha} = \frac{\mu_0 q^2 \alpha^2}{6\pi c} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Fórmula de} \\ \text{horror no} \\ \text{relativista} \end{array} \right.$$

- Para una velocidad arbitraria, el tiempo es

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left(\alpha^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{\alpha}}{c} \right|^2 \right) \quad \left. \begin{array}{l} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Generalización
de Lienard

Versión Relativista

- Cuando \vec{v} y $\vec{\alpha}$ son lineales \Rightarrow bremsstrahlung (Ej. II.11)
- Cuando $\vec{v} \perp \vec{\alpha} \Rightarrow$ (espirales o circulaciones) \rightarrow Sincrotrón (Prob. II.16)

RADIACIÓN POR REACCIÓN

$$\rightarrow \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{(verifica que el resultado es el mismo)}$$

- Supuesto \rightarrow Partícula cargada acelerando/desacelerando tiene menor energía que una partícula no cargada.
- Esto indicaría que hay una fuerza que se contrapone a la partícula cargada.
- Una carga acelerada emite radiación. Esta emisión de energía, se libera a expensas de la energía cinética.
- La radiación ejerce una fuerza \vec{F}_{rad} en contra de la carga.

→ Poco ingenio

$$\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{V} = -\frac{m q^2}{6 \pi c} \vec{a}^2 \rightarrow \text{Esto está mal} \rightarrow \text{Solo es el promedio}$$

- Ya que se tiene que el lado derecho es como un promedio ya que viene de una \int en unos ángulos específicos y donde se calcularía solo alrededor de la carga por lo cual se pierden términos que pueden dar cuenta de los períodos de energía.

- La energía periódica por la carga en un intervalo de t , debe ser = a la energía que se llevan los campos más la energía injectada en los campos de velocidad.

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{V} dt = -\frac{m q^2}{6 \pi c} \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}^2 dt$$

- La misma carga gana esto finita. Autofinita (Ejercicio del Torno de Bohr)

- El lado derecho $\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} dt \rightarrow$ Usando integración por partes

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_{\text{rad}} - \frac{m q^2}{6 \pi c} \vec{a} \right) \vec{V} dt = 0$$

Esto implica que:

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \vec{a} \quad (\text{Fórmula de Abraham-Lorentz})$$

Por causalidad no puede haber por lo tanto:

Ej: 7, 10, 11

$$(\text{no se cumple la causalidad}) \quad \vec{a} = \vec{0}, \quad (1 - \beta v) \theta = \frac{1}{5} \vec{v}$$

Entonces el vector velocidad es constante

$$\frac{d}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$(1 - \beta v) \vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1 - \beta v}{1 + \beta v} \right) \vec{v} \cdot (1 - \beta v) \theta = \vec{v}$$

$$(\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

$$(1 - \beta v) \vec{v} \cdot \vec{v} + (1 - \beta v) \vec{v} \cdot (1 - \beta v) \theta =$$

$$\downarrow$$
$$v (1 - \beta v) \theta \text{ mag se da en}$$
$$(1 - \beta v) \theta \text{ can}$$

$$v = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

• Clase ejercicios

- Forma

E_x Maxwell completa y no tienen la forma?
E y B satisfacen eq de onda?

Mostrar potenciales

Teo de Poynting (conservación de energía)

Conservación de momento

Transformación de Lorentz, función de Green

Potenciales de Liénard

Fórmula de Larmor

Ej: $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \theta(vt - r) \hat{r}$, $\vec{B} = 0$ (También se pueden ver en terminos de potenciales)

→ Mostrar que satisfagan Ec de Maxwell y de ρ y \vec{J} .
 $\theta(x)$ función escaño

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \theta(vt - r) \vec{\nabla} \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \vec{\nabla} (\theta(vt - r))$$

↳ $\nabla(f\vec{A})$

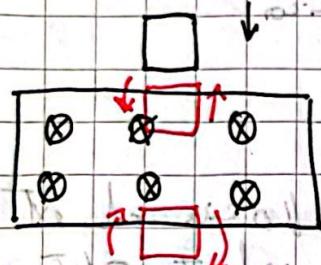
$$= -\theta(vt) \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \delta(vt - r)$$

↓
x eso sólo se pone $\theta(vt)$ y no $\theta(vt - r)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \checkmark$$

- Chequemos También $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \checkmark \rightarrow$ Si \vec{E} tiene componentes \hat{x}, \hat{y} o \hat{z} puede tener resistor
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{J} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot V \delta(vt - r) \hat{r} //$

Ejemplo 202.1



V se calcula con módulo

$$(1) \quad V = (8 \times 7) \cdot q = (7) \cdot 7$$

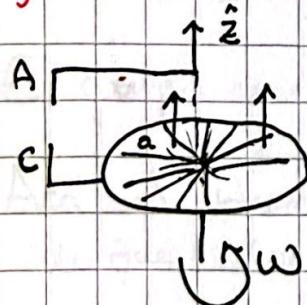
Hay 2 fases cuando la primera parte de la espira entra y se genera un campo inducido, lo que se genera una corriente

$$\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int \vec{I} d\vec{l} \times \vec{B} \rightarrow \text{donde por 2da Ley de Newton}$$

$$Mg = Iab = M\ddot{x}$$

Ej. Disco de Faraday



Radio a, con w cte en presencia de

un campo mag. $\vec{B} = B_0 \hat{u}$

Calcula la fem A y C

La FEM es como el potencial entre los bordes, es como la energía por unidad de carga.

- Una forma de hacerlo

- Supongamos que q es un portador del corriente en el disco. C/u de estos portadores se mueve c/ velocidad

$$\vec{V} = \omega r \hat{\theta}$$

- Como el disco esté sumergido en \vec{B} , los portadores están sometidos a la fuerza magnética.

$$\rightarrow \vec{F}(r) = q(\vec{V} \times \vec{B}) = qB\omega r \hat{z} \quad (1)$$

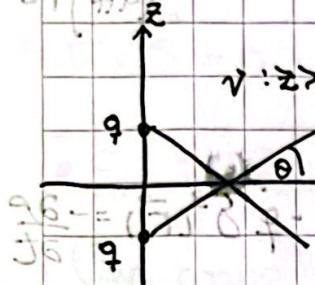
Esta fuerza desplaza las cargas (+). Por lo que el exterior del disco que contiene a un portador + o - que el eje.

Luego, la FEM inducida será igual al trabajo por el campo de fuerzas (1) por unidad de corriente.

$$V_c - V_A = \int_0^a B\omega r dr = \frac{1}{2} B\omega a^2$$

Ej. Tensión de Maxwell

- Calcular la fuerza de dos cargas q separadas por una distancia d, usando el Tensión de Maxwell

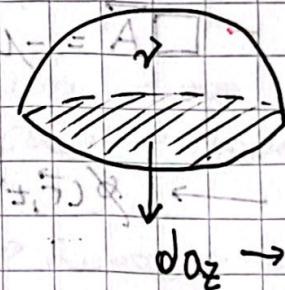


$$\vec{F} = \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

= 0 no hay \vec{B}
(sin mov)

- Nos imaginamos "un somo" sobre los cargas, donde al \rightarrow se irá a 0

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_{\text{plano}} + \int_{\text{estru}}$$



$d\vec{a}_z \rightarrow$ neg

$$\Rightarrow (\vec{\Pi} \cdot d\vec{a})_z = T_{zx} d\vec{a}_x + T_{zy} d\vec{a}_y + T_{zz} d\vec{a}_z$$

- El campo desplazante tiene 2 los \vec{E}_q

- Aquí el volumen es z positivo, pero si son q f dep de que los Cargas encuadres.

$$\Rightarrow \vec{E} = 2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q}{r^2} \cos\theta \hat{r}$$

$$\Rightarrow (\vec{\Pi} \cdot d\vec{a}_z) = T_{zz} d\vec{a}_z = \epsilon_0 (E_{zz} - \frac{1}{2} E^2) (r dr d\phi)$$

Ej. Electrostática Electrodinámico

- Una carga $q(t)$ en el origen $\rho(\vec{r}, t) = q(t) \delta^3(\vec{r})$, es alimentada por una corriente $\vec{J}(\vec{r}, t) = -\left(\frac{1}{4\pi}\right) \frac{\dot{q}}{r} \hat{r}$ donde $\dot{q} = \frac{d q}{dt}$

a) Se conserva la carga?

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \text{ donde } \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\dot{q}}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\dot{q}}{4\pi} \delta^3(\vec{r}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

b) Encuentre los potenciales $\phi(\vec{r}, t)$ y $\vec{A}(\vec{r}, t)$, con el gauge de Coulomb

$$\rightarrow \square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \text{se reemplaza}$$

$$2 \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dr}{r} \quad \rightarrow \phi(\vec{r}, t) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para $\vec{A}(\vec{r}, t)$, lo primero es comprobar que $\vec{B} = 0$, ya que \vec{A} tiene componente radial.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \therefore \text{es } 0$$

c) Encuentre los campos y chequee que satisfacen las ec de Maxwell

$$\rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ; \quad \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Donde } -\vec{\nabla} \phi = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q \hat{r}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} //$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ej: Potencias de Lienard

- Una carga q se mueve en un círculo de radio R con ω CTE. Encuentre el potencial de Lienard - ψ

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{[R - \vec{p} \cdot \vec{r}]} ; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \vec{v}}{c^2} \cdot \frac{1}{[R - \vec{p} \cdot \vec{r}]} \vec{e}_r$$

→ Carga Lienard { • Función, fuerza
• Electrón → Modelo de Bohr

- Abraham - Lorentz → Runaway solutions

- Comprobar si se cumplen los Gauge:

$$\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda ; \quad \psi' = \psi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

• Coulomb $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

• Lorentz $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$