Quiz 1 – Electromagnetismo Intermedio

Clase 1–2: Vectores, notación indicial y cálculo vectorial

Instrucciones: Tiempo máximo: 15 minutos. Justifique todos los pasos. El razonamiento es tan importante como el resultado. No puede consultar cuadernos, libros, telefonos ni compañeros.

1. **(Notación indicial – 3 pts)**
   Evalue:
   (a) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}$
   (b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$

2. **(Propiedad del gradiente – 4 pts)**
   Si $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ calcule:
   (a) $\nabla\frac{1}{r}$

3. **(Notación indicial aplicada – 5 pts)**
   Partiendo de la definición:
$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k,$$
   demuestre:
$$\nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{C}).$$

Total: 12 puntos.

Pauta de corrección – Quiz 1 (Clase 1–2)

Vectores, notación indicial, δ_{ij}, ε_{ijk}, cálculo vectorial

Soluciones

1. **(Notación indicial – 3 pts)**

   (a) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ljk}$
   Usamos la identidad de doble épsilon en 3D:

   $$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

   Contrayendo además en $m = j$,

   $$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 3\,\delta_{il} - \delta_{il} = 2\,\delta_{il}.$$

   $$\boxed{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ljk} = 2\,\delta_{il}}.$$

   (b) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk}$
   Es el número de permutaciones pares menos impares de $\{1, 2, 3\}$, todas con módulo 1:

   $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3! = 6.$$

   $$\boxed{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6}.$$

2. **(Propiedad del gradiente – 4 pts)**
   Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Entonces

   $$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) r^{-1} = -r^{-2}\,\nabla r = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = -\frac{(x, y, z)}{r^3} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

   $$\boxed{\nabla(1/r) = -(x, y, z)/r^3 = -\hat{\mathbf{r}}/r^2}.$$

3. **(Notación indicial aplicada – 5 pts)**
   Partimos de

   $$\nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \partial_i\big[(\vec{B} \times \vec{C})_i\big] = \partial_i\left(\varepsilon_{ijk} B_j C_k\right).$$

   Aplicando producto:

   $$\partial_i(\varepsilon_{ijk} B_j C_k) = \varepsilon_{ijk}(\partial_i B_j) C_k + \varepsilon_{ijk} B_j (\partial_i C_k).$$

   Para el primer término, permutamos cíclicamente los índices de ε (no cambia el signo):

   $$\varepsilon_{ijk}(\partial_i B_j) C_k = C_k\,\varepsilon_{kij}\,\partial_i B_j = \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{B}).$$

   Para el segundo término, reetiquetamos índices mudos y usamos $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$:

   $$\varepsilon_{ijk} B_j (\partial_i C_k) = -\,B_j\,\varepsilon_{jik}\,\partial_i C_k = -\,\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{C}).$$

   Por tanto,

   $$\boxed{\nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{C})}.$$