紅師教育
www.81hongshi.com

2019 军队文职招聘考试

数学 1

扫码关注我们

线性代数部分

第一章 行列式

考试大纲要求：

1.了解全排列与逆序数的概念，会利用对角线法则计算二、三阶行列式；
2.会利用行列式展开定理计算行列式的值
3.掌握克莱姆法则

1-1 行列式的概念

一、全排列与逆序数

1、全排列：n个数排成一列　　n！种

123的全排列:123,132,213,231,312,321

2、逆序：大数排在小数之前构成一个逆序

逆序数：排列中逆序的全体，记作t

$$t(123)=0,\ t(213)=1, t(312)=2$$

标准排列　　奇排列　　偶排列

二、二、三阶行列式

次对角线

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

主对角线

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

列标

行标

$a_{ij}\rightarrow$ 元素

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

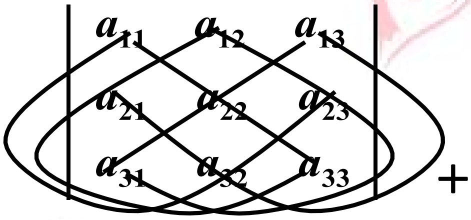
说明：1）对角线法则只适用于二阶与三阶行列式

2）三阶行列式包括3!项,每一项都是位于不同行,

不同列的三个元素的乘积,其中三项为正,三项为负.

计算方法：1）对角线法则　　　　　　　　　　　　　　2）沙路法

1）



2）
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$+ \quad + \quad +$$

三、n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,\ n$ 的一个排列
t 为这个排列的逆序数.

比如： $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$ 求 x^3 的系数.

解： $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$

对应于 $(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=x^3$, $(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-2x^3$

故 x^3 的系数为 -1.

1-2 行列式的性质

一、特殊形式行列式

二、行列式性质

一、特殊形式行列式

1）上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

2）下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

比如：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=?$$

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot 4\cdot 5\cdot 8=160.$$

3）主对角行列式
$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

4）次对角行列式
$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

二、行列式性质

$$D = \begin{vmatrix} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \end{vmatrix} \qquad D^T = \begin{vmatrix} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

性质2 互换行列式的两行（列）,行列式变号　$r_i \leftrightarrow r_j$　$c_i \leftrightarrow c_j$

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，

等于用数k 乘此行列式.

$$kr_i \quad kc_i$$

性质4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则行列式为零．

性质5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和.

则D等于两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1+a_2 & 3 \\ 2 & b_1+b_2 & 1 \\ -1 & c_1+c_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 3 \\ 2 & b_1 & 1 \\ -1 & c_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_2 & 3 \\ 2 & b_2 & 1 \\ -1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}$$

性质6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后

加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变．

$$r_i + kr_j$$

$$c_i + kc_j$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2+2r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

1-3 行列式按行（列）展开

一、余子式、代数余子式

二、展开定理

一、余子式、代数余子式

余子式：在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，

记作 M_{ij}.

代数余子式： 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{i}$

例： $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 求 $M_{12}, A_{12}, M_{22}, A_{22}$

解：

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3$$

结论：余子式与代数余子式有时相同，有时不同，主要取

决于元素所在的行列和

二、展开定理

定理： 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的

代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\quad+a_{nj}A_{nj}\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

例1） 计算行列式 $$D=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

解： 按第一行展开，得

$$D=-3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=27.$$

例2） 范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j).$$

比如： $$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=18+3+4-2-12-9=2$$

$$=(2-1)(3-1)(3-2)=2$$

推论： 一个n 阶行列式，如果其中第 i 行（列）所有元素除 a_{ij}外都为零，那末这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}$$

结论： 推论给出计算方法，结合行列式的性质和按行列展开

例3）计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1+(-2)c_3}}_{c_4+c_3}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad (i\neq j).$$

例4）已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$ 则

$A_{11}-A_{12}+3A_{13}=$_________ $2A_{11}+2A_{12}+A_{13}=$ __________

解：

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=17$$

$$A_{11}-A_{12}+3A_{13}=D=17$$

$$2A_{11}+2A_{12}+A_{13}=0$$

练习：已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ 1 & -1 & t\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$，则 $t=$ __________

$A.t=0$　　$B.t=1$　　$C.t=-1$　　$D.t=0$ 或 -1

例5） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$ "$a--b$"型行列式

解：

$$D \overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=} \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

比如： $D=\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = (1+2x)(1-x)^2$

$D=\begin{vmatrix} x & -2 & -2 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} =$ __________

1-4 克莱姆法则

一、齐次线性方程组

二、克莱姆法则

一、齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

应用克莱姆法则要求：

n 个 方 程 ， n 个 未 知 量 ， 存 在 系 数 行 列 式

二、克莱姆法则

定理 若齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$ 则该齐次线性方程组只有零解

逆否命题 若齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式D=0

例 问λ取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

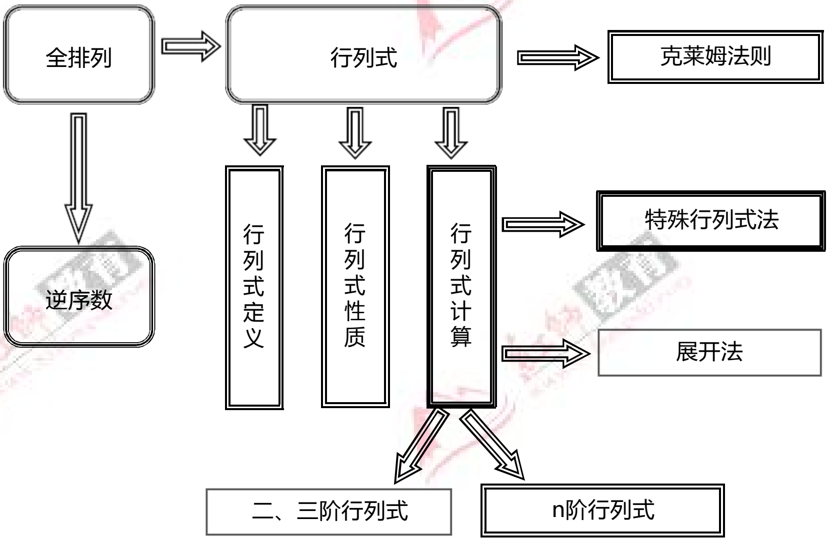
有非零解？

解: 方程组有非零解，则系数行列式等于0，即

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

$\lambda = 2$ 时齐次方程组有非零解.

主要内容总结



第二章 矩阵

考试大纲要求：

1.了解矩阵的概念，掌握特殊矩阵，理解矩阵的四则运算；

2.掌握矩阵的求逆，转置，方阵的行列式，分块矩阵行列式，分块矩阵求逆；

3.掌握矩阵的初等变换以及矩阵的秩的求法

2-1 矩阵的概念

一、矩阵概念

二、特殊形式矩阵

一、矩阵概念

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A = A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个2×4 矩阵,

二、特殊形式矩阵

1)只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 称为行矩阵(或行向量).

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 称为列矩阵(或列向量).

2）零矩阵：所有元素都为0的矩阵

3）n 阶方阵：行数与列数都等于n 的矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ 为3阶方阵

4）三角矩阵

$$A_{上}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_{下}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5）对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

6)单位矩阵 $E=E_n=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

7)同型矩阵:两个矩阵的行数相等,列数相等

8)矩阵相等$A=B$. ：两个矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$为同型矩阵,
并且对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&x&3\\y&1&z\end{pmatrix}$,

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解 $\because$ $A=B$,

$$\therefore x=2,\ y=3,\ z=2.$$

9）伴随矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$ 其中 A_{ij}为 $|A|$中各元素的代数余子式

性质：$AA^*=A^*A=|A|E$.

比如 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

10）对称矩阵

$$A=A^{T}\ \text{即}\quad a_{ij}=a_{ji}\ \ (i,j=1,2,\cdots,n)$$

例如 $A=\begin{pmatrix}12 & 6 & 1\\ 6 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 为对称阵.

如果 $A^{T}=-A$ 则矩阵A称为反对称的.

例如 $A=\begin{pmatrix}0 & 6 & -1\\ -6 & 0 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$ 为反对称阵.

2-2 矩阵的运算

一、矩阵的加减法

二、数与矩阵的乘法

三、矩阵与矩阵的乘法

四、矩阵的转置

五、方阵的行列式

一、矩阵的加减法----同型矩阵

1）加法 $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

例如：$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

2）矩阵加法的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$(3)\ -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=(-a_{ij}),$

称为矩阵A的负矩阵.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$

3）减法

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

例如：$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -5 & -14 \\ -5 & -14 & -4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

二、数与矩阵的乘法

数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

运算规律：$(1)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$

$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$

$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

例：$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&3&1\\-2&-1&4\end{pmatrix}$ 求 $3A-2B$

解：$3A-2B=3\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&3&1\\-2&-1&4\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3&9&6\\-3&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6&2\\-4&-2&8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&3&4\\1&5&-8\end{pmatrix}$$

三、矩阵与矩阵相乘

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，

那末规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $C=AB.$

矩阵相乘具体方法：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$AB=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

注意：1)只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，

两个矩阵才能相乘.

例1） $$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -24\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

例2） $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

而 $$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ **不存在.**

例3) $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(10).\neq\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$

例4) $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$,

则有 $AB=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix},BA=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow AB=BA.$

注意：2)矩阵相乘不满足交换律，即AB不一定等于BA

例5) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$,

注意：3)AB=O不能推出A=O或B=O

例6) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix}4&6\\0&0\end{pmatrix}=AC=\begin{pmatrix}4&6\\0&0\end{pmatrix}$

注意：4)矩阵相乘不满足消去律，即AB=AC不能得到B=C

矩阵乘法的运算规律

$(1)(AB)C = A(BC)$;

$(2)A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$;

$(3)\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

$(4)\ AE = EA = A$;

$(5)\ A_{n\times n}$ $A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{k个}$ $A^m A^k = A^{m+k}$,

$(A^m)^k = A^{mk}$. $(m,k为正整数)$

四、矩阵的转置

定义：把矩阵A 的行列互换位置列得到的新矩阵，叫做A

的转置矩阵，记作 A^T

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;

转置矩阵的运算性质

$(1)(A^T)^T = A$; $(2)(A+B)^T = A^T + B^T$;

$(3)(\lambda A)^T = \lambda A^T$; $(4)\ (AB)^T = B^T A^T$.

五、方阵的行列式

定义　由n　阶方阵A的元素所构成的行列式，叫做方阵A的行列式，记作 $|A|$

例 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ 则 $|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 8\end{vmatrix}=-2.$

运算性质：$(1)\ |A^T|=|A|;$

$(2)\ |\lambda A|=\lambda^n|A|;$

$(3)\ |AB|=|A||B|;\quad \Rightarrow |AB|=|BA|.$

例1）：已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，求 $|2A|$

解：法一： $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2$

$$\Rightarrow |2A|=2^2\,|A|=4\times(-2)=-8$$

法二： $|2A|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{vmatrix}=-8$

练习：已知 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,求$|3A^T|$

2-3 逆矩阵

一、逆矩阵的概念及性质

二、逆矩阵的计算方法

一、逆矩阵的概念及性质

1）定义：对于n 阶矩阵A，若存在n阶矩阵B,使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵A 是可逆的，矩阵B称为A的逆矩阵.

A的逆矩阵记作 A^{-1}.

说明 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

逆矩阵的运算性质

(1)若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2)若A可逆,数$\lambda \neq 0$,则λA可逆,且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3)若A, B为同阶方阵且均可逆, 则AB亦可逆

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(4)若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

(5)若A可逆,则有$|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

二、逆矩阵的计算方法

计算方法： 1）定理：矩阵A可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},\quad \text{其中}A^{*}\text{为矩阵}A\text{的伴随矩阵.}$$

分析：$AA^{*}=A^{*}A=|A|E\Rightarrow A\frac{A^{*}}{A}=\frac{A^{*}}{A}A=E$，

当$|A|=0$时，A称为奇异矩阵，当$|A|\neq 0$时，A称为非奇异矩阵.

由此可得A是可逆阵的充要条件是A为非奇异矩阵.

例1 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ **的逆矩阵.**

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0 \qquad \therefore A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix},$$

故
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

练习：1)已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$，则 $A^*=$______

2)三阶方阵A的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $|(2A)^{-1}|=$______

$A.1$　$B.\frac{1}{2}$　$C.\frac{1}{3}$　$D.\frac{1}{4}$

2）推论：若$AB=E$(或$BA=E$),则$B=A^{-1}$.

例1）设方阵A满足方程$A^2-A-2E=0$,证明:A可逆,并求逆矩阵.

证明 由$A^2-A-2E=0$,

得$A(A-E)=2E$ $\Rightarrow A\underbrace{\frac{A-E}{2}}_{A^{-1}}=E$

$\Rightarrow \left|A\frac{A-E}{2}\right|=1\Rightarrow |A|\neq 0,$

故A可逆.$\therefore$ $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

例2）设方阵A满足方程$A^2+A-5E=0$,则$(A+2E)^{-1}=$______

由$A^2+A-5E=0$,

得$(A+2E)(A-E)=3E$

$\Rightarrow (A+2E)^{-1}=\frac{A-E}{3}$

例3）解矩阵方程 (1) $\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$;

解 给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}$,

得 $\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}}_{E}}X=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-17 & -28\\ -4 & -6\end{pmatrix}.$$

2-4 分块矩阵

一、矩阵分块法

二、分块矩阵运算

一、矩阵分块法

1）按行分块：
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

2）按列分块：
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

3）按行列分块：
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

二、分块矩阵运算

(1) 设矩阵A与B的行数相同，列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同，列数相同，那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2)设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$为数，那末 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$.

(3)分块矩阵乘法：若A与B相乘，A的列的划分与B的行划分一致

(4) 转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

(5) 分块对角阵的行列式与求逆

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & ⋰ & & \\ A_s & & & \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & ⋰ & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

$$(6)\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

注意：分块过程中尽量分出单位阵和零矩阵能简化运算

比如： $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，**分块为**

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix},$$ **进行计算比较简单**

例1） 设$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解： $A=\left(\begin{array}{c:cc}5&0&0\\ \hdashline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$; $A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$;

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}.$$

例2） 设 A、B均为四阶方阵， 且 $|A|=|\alpha\quad r_1\ \ r_2\quad r_3|=3$，

$|B|=|\beta\quad r_1\ \ r_2\quad r_3|=1$, 则 $|A+2B|=$ ______

$|A+2B|=|\alpha+2\beta\quad 3r_1\quad 3r_2\quad 3r_3|=27\,|\alpha+2\beta\quad r_1\quad r_2\ \ r_3|$

$=27(|\alpha\quad r_1\ \ r_2\quad r_3|+2\,|\beta\quad r_1\ \ r_2\quad r_3|)$

$=\ 27\times(3+2)=135$

2-5 矩阵的初等变换

一、初等变换形式

二、三种形式矩阵

三、初等变换法求逆矩阵

一、初等变换形式

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\textbf{1)}\ \text{对换变换：} & r_i \leftrightarrow r_j \\ \textbf{2)}\ \text{倍乘变换：} & kr_i \\ \textbf{3)}\ \text{倍加变换：} & r_i + kr_j\end{array}\right\}\text{初等行变换} \\ \qquad\qquad\text{同理可得初等列变换}\end{array}\right\}\text{初等变换}$$

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{初等变换}} \mathbf{B},\quad \text{则}\mathbf{A}\text{和}\mathbf{B}\text{等价}$$

二、三种形式矩阵

1) 初等方阵： 单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow \text{初等方阵}$$

初等方阵作用：对矩阵A进行一次初等行（列）变换，相当于

左边（右）乘一个经同样变换得到的初等方阵

2）行阶梯型矩阵：

（1）零行位于矩阵下面

（2）下一行的首非零元素在上一行首非零元素右侧

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{4}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\longrightarrow \text{行阶梯形}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\longrightarrow \text{行阶梯形}$$

3) 行最简形矩阵：满足行阶梯型条件

首非零元素等于1，首非零元素所在列其余全为0

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow \text{行最简形}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow \text{行最简形}$$

例：化A为行最简形 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1&0\\2&0&1&3&-5\\0&1&3&-1&7\end{pmatrix}$

解:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1&0\\2&0&1&3&-5\\0&1&3&-1&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&-1&0\\0&-2&-3&5&-5\\0&1&3&-1&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&-1&0\\0&1&3&-1&7\\0&-2&-3&5&-5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&-1&0\\0&1&3&-1&7\\0&0&3&3&9\end{pmatrix}\longrightarrow \text{用于求矩阵的秩}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-7\\0&1&0&-4&-2\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&-4\\0&1&0&-4&-2\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}\longrightarrow \text{用于求方程组的通解}$$

三、初等变换法求逆矩阵

方法： $(A|E)\xrightarrow{\text{初等变换}}(E|A^{-1})$

举例：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

解：

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\2&-1&-1&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&-1&2&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&2&-2&1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)=(E|A^{-1})$$

注意：同时作初等行变换

$$\begin{array}{cc}(A & E)\\ \Downarrow & \Downarrow\ \text{初等行变换}\\ E & \boxed{A^{-1}}\end{array}$$

2-6 矩阵的秩

一、矩阵秩的定义

二、秩的求法

一、矩阵秩的定义

定义：矩阵A的非零子式的最高阶数称为矩阵A的秩.

记为R(A)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&3&4\\2&3&0&1&5\\1&4&2&3&1\\2&3&4&0&7\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{R(A)=4}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&0&3\\2&3&0&1\\1&4&2&3\\2&3&4&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&3\\2&3&0&1\\1&4&2&3\\0&-5&0&-6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\0&-5&-6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&-5&-6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&-5\\-5&-6\end{vmatrix}=-38$$

二、秩的求法

定理：初等变换不改变矩阵的秩

例1) 求矩阵A的秩 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\0&0&4&2\\0&0&2&1\\0&0&-6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow R(A)=2$

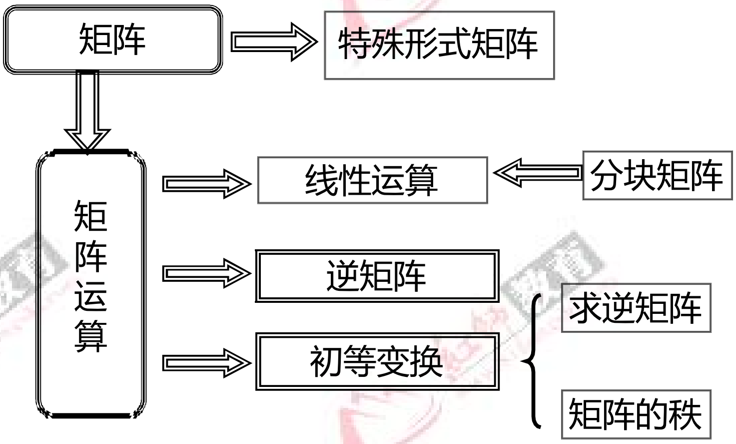
练习：已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&4&3&1\\-1&-2&k&3\end{pmatrix}$ **的秩为2，则** $k=$ ________

$A.k=-3$　　$B.k=3$　　$C.k=-5$　　$D.k=5$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&4&3&1\\-1&-2&k&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&k+1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&k+5&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k=-5$

主要内容总结



第三章 向量

考试大纲要求：

1.了解向量及向量组的概念，掌握向量组的线性表示、线性相关、线性无关概念，性质及判别法

2.会求向量组的秩及最大无关组，向量组等价

3.了解向量空间及子空间的概念，理解向量空间的基和维数，掌握欧几里得空间

3-1 向量组及其线性相关性

一、向量组

二、线性表示

三、线性相关性

一、向量组

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\longrightarrow \text{行向量}$$

$$B=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix},\longrightarrow \text{列向量}$$

向量组：若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合

三维标准向量组： $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

例如 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 有n个m维列向量

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & & a_j & & a_n \end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为矩阵A的列向量组.

同理，按行分块可得行向量组

二、线性表示

定义：给定向量组A :$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$, 若存在一组实数

k_1，$k_2,\cdots,k_m$，使得$\alpha_{m+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

称向量α_{m+1}能由向量组A线性表示

例如：$\alpha_1=(1\quad 2\quad 3),\alpha_2=(0\quad 1\quad -2),\alpha_3=(1\quad 4\quad -1)$

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

$k_1=1,k_2=2\Rightarrow$ α_3能由 α_1，α_2线性表示

向量组线性表示： 设两个向量组A:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$及

B: β_1，β_2， ，β_r, 若B组中的每个向量都能由向量组A 线性表示

则称向量组B能由向量组A 线性表示

若向量组A与向量组B能相互线性表示则称两向量组等价

例：已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$满足$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,且$k_1\cdot k_2\neq 0$说明：向量组$\alpha_1,\alpha_3$与$\alpha_2,\alpha_3$等价

分析： 要证向量组α_1,α_3与α_2,α_3等价，只需证相互线性表示

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,且k_1\cdot k_2\neq 0$$

$$\Rightarrow, k_1\neq 0, k_2\neq 0且\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3$$

$$\alpha_2=-\frac{k_1}{k_2}\alpha_1-\frac{k_3}{k_2}\alpha_3$$

$$\alpha_3=0\alpha_1+\alpha_3,\alpha_3=0\alpha_2+\alpha_3$$

$\Rightarrow$ 向量组α_1,α_3与α_2,α_3等价

三、线性相关性

1.定义：给定向量组A ：$\alpha_1,\alpha_2,\ \ ,\alpha_m$,如果存在一组不全为零的数

$$k_1,k_2,\cdots,k_m使\ \ k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则称向量组A是线性相关的，否则称它线性无关 .

注意：

1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关,当且仅当$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$时,有

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=0 \text{ 成立.}$$

2)向量组只包含一个向量α时,若$\alpha=0$则说α线性相关,

若$\alpha\neq 0$,则说α线性无关.

3)包含零向量的任何向量组是线性相关的.

4）向量个数与维数相同时，线性相关则向量组构成的

行列式等于0,线性无关则行列式不等于0

例：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\k\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$线性相关，求$\boldsymbol{k}$

解：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\k\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$线性相关

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\3&k&0\end{vmatrix}=-3+2k-k=0$$

$$\Rightarrow k=3$$

2.线性相关性的判定

定理1 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ （当$m\geq 2$ 时）线性相关的充分必要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示．

定理2 设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,而向量组$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,b$ 线性相关,则向量b 必能由向量组A线性表示,且表示式是唯一的.

定理3:1) m个n维向量组成的向量组，当维数n小于向量个数m时一定线性相关.

2)若向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关,则向量组$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$也线性相关.反言之,若向量组$B$ 线性无关,则向量组A也线性无关.

3）设 $\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}$, $b_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{r+1,j} \end{pmatrix}$, $(j=1,2,\cdots,m)$,

即α_j添上一个分量后得向量b_j.若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,

则向量组$B:b_1,b_2,\cdots,b_m$也线性无关.

反言之，若向量组B线性相关,则向量组A也线性相关.

例 设向量组$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$线性相关，向量组$\alpha_2\alpha_3\alpha_4$线性无关

试问α_1能否由$\alpha_2\alpha_3$线性表示？

解： $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$线性无关

$\Rightarrow \alpha_2\alpha_3$线性相关无关 $\longrightarrow$ 定理3

向量组$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$线性相关

$\Rightarrow$ α_1能由 $\alpha_2\alpha_3$ 线 性 表 示 且 表 示 式 唯 一

$\longrightarrow$ 定理2

3-2 向量组的秩和最大无关组

一、秩与最大无关组概念

二、向量组的秩与矩阵秩的关系

一、秩与最大无关组概念

定义： 设有向量组A，如果在A中能选出r个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，满足

（1）向量组$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关

（2）向量组A中任意$r+1$个向量（如果A中有$r+1$个向量的话）都线性相关，

$\longrightarrow$ 向量组的秩　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ $\longrightarrow$ 向量组的一个最大无关组

只含零向量的向量组无最大无关组，规定秩为0.

二、矩阵的秩与向量组秩的关系

定理1：矩阵的秩等于其行（列）向量组的秩

定理2：$A \xrightarrow{\text{初等变换}} B$

1)A与B的行向量组等价，

2)列向量组线性相关性相同

计算方法：秩取非零行的行数

最大无关组取首非零元素所在的列

例1）:求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-5\\6\\-5\\9\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-4\\3\\-5\end{pmatrix}$,

的秩及一个最大无关组

解: 将向量组写成矩阵形式:

$$A=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)=\begin{pmatrix}2&3&-5&4\\0&-2&6&-4\\-1&1&-5&3\\3&-1&9&-5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & -2 & 6 & -4\\ 2 & 3 & -5 & 4\\ 3 & -1 & 9 & -5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & -2 & 6 & -4\\ 0 & 5 & -15 & 10\\ 0 & 2 & -6 & 4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad R(A)=2\Rightarrow \text{向量组的秩为2}$$

α_1,α_2为向量组的一个最大无关组

例2)：求向量组$\alpha_1=(2\quad 1\quad 4\quad 3)$，$\alpha_2=(-1\quad 1\quad -6\quad 6)$，

$\alpha_3=(-1\quad -2\quad 2\quad -9)$，$\alpha_4=(1\quad 1\quad -2\quad 7)$，$\alpha_5=(2\quad 4\quad 4\quad 9)$，

的秩及一个最大无关组

解：将向量组写成矩阵形式：按列写向量

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T & \alpha_4^T & \alpha_5^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3 \Rightarrow$向量组的秩为3

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为向量组的一个最大无关组

3-3 向量空间

一、向量空间的概念

二、向量空间的基与维数

三、基变换与坐标变换

一、向量空间的概念

定义1　设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于加法及乘数两种运算封闭，那么就称集合V为向量空间．

说明：　1）集合 V对于加法及乘数两种运算封闭指

若$\alpha \in V, \beta \in V$, 则$\alpha + \beta \in V$;

若$\alpha \in V, \lambda \in R$, 则 $\lambda\alpha \in V$.

2）n 维向量的集合是一个向量空间,记作 R^n

例　判别下列集合是否为向量空间

$$V_1 = \left\{ x = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \middle| x_2, \cdots, x_n \in R \right.$$

$$V_2 = \left\{ x = (1, x_2, \cdots, x_n)^T \middle| x_2, \cdots, x_n \in R \right.$$

解：　因为对于V_1的任意两个元素

$$\alpha = (0, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (0, b_2, \cdots, b_n)^T \in V_1,$$

有　$\alpha + \beta = (0, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)^T \in V_1$

$\lambda\alpha=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^T\in V_1.$

V_1是向量空间.

V_2不是向量空间.

因为若$\alpha=(1,a_2,\cdots,a_n)^T\in V_2$,

则$2\alpha=(2,2a_2,\cdots,2a_n)^T\notin V_2$.

不满足数乘封闭，所以不是向量空间

由向量组$a_1,a_2,\quad,a_m$所生成的向量空间为

$$V=\{x=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\quad+\lambda_ma_m|\lambda_1,\lambda_2,\quad,\lambda_m\in R\}$$

定义2 设有向量空间V_1及V_2，若向量空间 $V_1\subset V_2$ ，就说V_1是 V_2的子空间.

二、向量空间的基与维数

定义3 设V是向量空间，如果 r个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$

且满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) V中任一向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示.

那末，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 就称为向量空间V的一个基

r称为向量空间V 的维数，并称V为 r 维向量空间.

说明：

（1）只含有零向量的向量空间称为0维向量空间，因此它没有基.

（2）若把向量空间V看作向量组，那末V的基就是向量组的最大无关组，V的维数就是向量组的秩.

（3）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间V的一个基，则V可表示为

$$V=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_r\in R\}$$

例 设矩阵$A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$，验证$a_1,a_2,a_3$是$R^3$的一个基

解 要证a_1,a_2,a_3是R^3的一个基，只要证a_1,a_2,a_3线性无关

$$\begin{vmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{vmatrix}=-27\neq 0$$

$\Rightarrow a_1,a_2,a_3$线性无关

$\Rightarrow a_1,a_2,a_3$是$\mathbf{R}^3$的一组基

三、基变换与坐标变换

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是线性空间$V_n$的两个基，且有

$$\begin{cases}\beta_1=p_{11}\alpha_1+p_{21}\alpha_2+\cdots+p_{n1}\alpha_n\\\beta_2=p_{12}\alpha_1+p_{22}\alpha_2+\cdots+p_{n2}\alpha_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\beta_n=p_{1n}\alpha_1+p_{2n}\alpha_2+\cdots+p_{nn}\alpha_n\end{cases},$$

$$\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

基变换公式

定理 设V_n中的元素α,

在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,

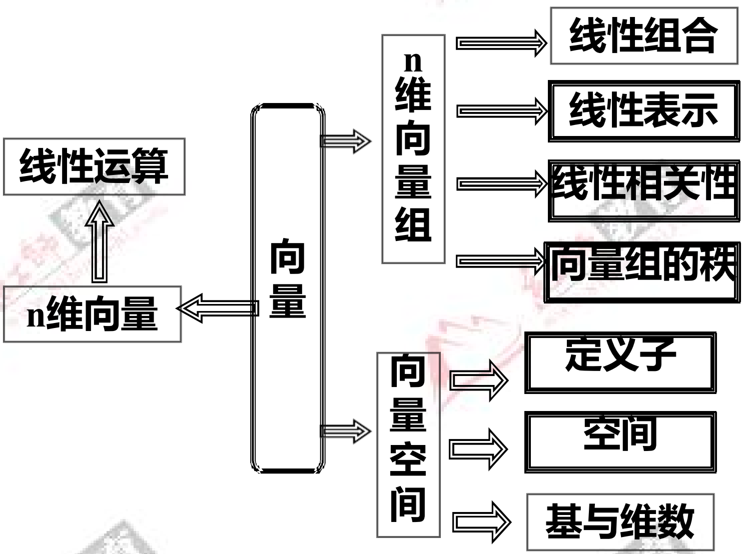
在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为$(x_1',x_2',\cdots,x_n')^T$,

若两个基满足关系式 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

则有坐标变换公式:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},\quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

主要内容总结



线性方程组

考试大纲要求：

1.了解线性方程组的概念，掌握线性方程组的解的结构及解的分类，会求基础解系；
2.理解同解方程组的概念，掌握方程组的消元法
3.掌握方程组有解，无解的条件，会求齐次和非齐次方程组的通解

4-1 消元法

一、线性方程组的分类

二、消元法概念

三、与矩阵联系

一、线性方程组的分类

1.齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

2.非齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

一、线性方程组的初等变换

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=3① \\ 2x_1+2x_2-x_3=6② \\ 3x_1-7x_2+13x_3=8③ \end{cases}$$

$②-2\times①,\ ③-3\times①$ 倍乘变换

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=3① \\ 2x_2-3x_3=0② \\ -x_2+x_3=-1③ \end{cases}$$

$②+2\times③,\ ②\leftrightarrow③$

倍加变换，对换变换

得到同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ \quad -x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad -x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$ 唯一解

二、与矩阵联系

方程组的初等变换与矩阵的初等变换一致：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -7 & 13 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

4-2 齐次线性方程组

一、齐次方程组解的情况

二、齐次方程组通解

一、齐次方程组解的情况

1.齐次方程组形式 1）
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \longrightarrow \text{系数矩阵} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \text{解向量}$$

2) $Ax = 0.$ $\longrightarrow$ 齐次方程组

2.解的情况分析

- 齐次方程组
  - 只有零解
    - m个方程n个未知量 $R(A)=n$
    - n个方程n个未知量 克莱姆法则
  - 有非零解
    - m个方程n个未知量 $R(A)<n$
    - n个方程n个未知量 克莱姆法则

练习：n元齐次线性方程组只有零解的充分必要条件是___

$A.|A|=0$　　$B.|A|\neq 0$　　$C.R(A)=n$　　$D.R(A)<n$

二、齐次方程组通解

1.齐次方程组解的结构

1）若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的解.

2）若 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$ 的解，k 为实数，则 $x=k\xi_1$ 也是 $Ax=0$ 的解 .

结论：方程组的全体解向量所组成的集合，对于加法和数乘运算是封闭的，构成一个向量空间，称此向量空间为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间 .

2、基础解系

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 称为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 满足

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的一组线性无关的解;

(2) $Ax=0$ 的任一解都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示

求法：将自由未知数令为标准向量组，基础解系中向量个数为 n-R(A)

例1： 4元齐次方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$的基础解系为______

解：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$ x_3, x_4为自由未知数，令为标准向量组

基础解系：$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例2 齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$的基础解系中所含解向量个数为____

$A.1$ $B.2$ $C.3$ $D.0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

基础解系中含有$n - R(A) = 4 - 2 = 2$个解向量

练习：已知$R(A)=2,\xi_1,\xi_2$是4元齐次方程组$Ax=0$的两个线性无关解，则

$Ax=0$的基础解系是____

$A.\xi_1$　　$B.\xi_2$　　$C.\xi_1,\xi_2$　　$D.\xi_1$，ξ_2，$\xi_1-\xi_2$

3、齐次方程组通解 $R(A)<n$

定义：若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是 $Ax=0$ 的基础解系，则其通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\quad+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数.

结论：求齐次方程组的通解，只需求出基础解系的线性组合即可

例1 求线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系，并求出通解

解： 对系数矩阵施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R(A)=2<5$$

同解方程组：$\begin{cases} x_1=-2x_3-x_4+2x_5 \\ x_2=x_3-3x_4+x_5 \end{cases}$

令x_3, x_4, x_5为标准向量组，得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

其中k_1, k_2, k_3为任意常数.

x_3, x_4, x_5 为自由未知数

令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2, x_5 = k_3$

方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k_1 - k_2 + 2k_3 \\ k_1 - 3k_2 + k_3 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中k_1, k_2, k_3为任意常数.

4-3 非齐次线性方程组

一、非齐次方程组解的情况

二、非齐次方程组通解

一、非齐次方程组解的情况

1.非齐次方程组形式

$$1)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \longrightarrow \text{系数矩阵} \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \text{解向量}$$

$$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \longrightarrow \text{增广矩阵}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \text{解向量} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \longrightarrow \text{常数列}$$

$2)Ax=b \longrightarrow$ 非齐次方程组

$3)x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b \longrightarrow$ 非齐次方程组

线性方程组 $Ax=b$ 有解

向量b能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$等价;

矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$与矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,$ $b)$的秩相等.

2.解的情况分析

1)m个方程n个未知量

$$\text{非齐次方程组}\begin{cases}\text{无解 } R(B)\neq R(A)\\ \text{有解 } R(B)=R(A)\begin{cases}\text{唯一解 } R(B)=R(A)=r=n\\ \text{无穷多解 } R(B)=R(A)=r<n\end{cases}\end{cases}$$

2)n个方程n个未知量:

$$\text{非齐次方程组}\begin{cases}\text{唯一解} & |D|\neq 0\\ \text{无解或无穷多解} & |D|=0\end{cases}$$

二、非齐次方程组通解

1.非齐次方程组解的结构

(1)设$x=\eta_1$及$x=\eta_2$都是$Ax=b$的解,则$x=\eta_1-\eta_2$为对应的齐次方程组$Ax=0$的解.

(2) 设$x=\eta$是方程 $Ax=b$的解, $x=\xi$ 是方程$Ax=0$的解,则 $x=\xi+\eta$ 仍是方程$Ax=b$ 的解.

(3)设$x=\xi$是方程组$Ax=0$的通解，$x=\eta$是方程组 $Ax=b$的一个特解,则$x=\xi+\eta$ 是方程组 $Ax=b$ 的通解.

结论：

非齐次方程组的通解

||

齐次通解 + 非齐次一个特解

↓ ↓

齐次方程组已讲 不唯一

例1）设A是$m\times3$矩阵,且$R(A)=1$.如果非齐次线性方程组
$Ax=b$的三个解向量η_1,η_2,η_3满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的通解.

解 $\because A$是$m\times3$矩阵,$R(A)=1$,

$\therefore Ax=0$的基础解系中含有$3-1=2$个线性无关的解向量.

$$\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

为$Ax=0$的基础解系中的解向量.

$$\eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\eta_1=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix}$$

故$Ax=b$的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},$$ **其中k_1,k_2为任意实数.**

例2）求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$

解： **对增广矩阵 B 施行初等行变换：**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(B) = R(A) = 2 < 4 \Rightarrow$ 方程组有无穷多解

同解方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \dfrac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 令 $x_2 = k_1, x_4 = k_2$

方程组通解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + \frac{1}{2} \\ k_1 \\ 2k_2 + \frac{1}{2} \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

例3） 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\2\\10\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$

a,b满足什么条件时β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示式不唯一

并求出一般表示式

解：这是非齐次线性方程组有无穷多解的问题，即表达式

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}a\\2\\10\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$$ 有无穷多解

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta)=\begin{pmatrix}-1&-2&a&\vdots&1\\1&1&2&\vdots&0\\4&5&10&\vdots&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-2&a&\vdots&1\\0&-1&a+2&\vdots&1\\0&-3&4a+10&\vdots&4+b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1&-2&a&\vdots&1\\0&-1&a+2&\vdots&1\\0&0&a+4&\vdots&1+b\end{pmatrix}$$

当 $a+4=0$且$1+b=0$时方程组有无穷多解

即$a=-4,b=-1$时β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且不唯一

下面求一般表达式

将$a=-4, b=-1$代入增广矩阵得最简形:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组：$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2x_3 - 1 \end{cases}$ 令$x_3 = k$

通解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in R$

一般表达式：

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha_1 + (2k-1)\alpha_2 + (-k)\alpha_3$$

例4）k 为何值时方程组$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \end{cases}$

有唯一解，无解，无穷多解

解：

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)^2 \neq 0$$

$k \neq -2$且$k \neq 1$时 方程组有唯一解

当$k = -2$时

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&3&-3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$R(B)=3\neq R(A)=2$ $\Rightarrow$ 当$k=-2$时方程组无解

当$k=1$时 $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(B)=R(A)=1<3$ $\Rightarrow$ 方程组有无穷多解

练习：1）设方程组$\begin{pmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$有无穷多解，则$a=$____

$A.a=0$ $B.a=1$ $C.a=-2$ $D.a=2$

练习：2）关于方程组的解下列说法正确的是______

$\boldsymbol{A}$.方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解；

$\boldsymbol{B}$.方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解；

$\boldsymbol{C}$.方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$无解，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解；

$\boldsymbol{D}$.方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解；

练习：3）设向量组$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，则方程租$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\\a_3x+b_3y=c_3\end{cases}$有唯一解

的充要条件为____

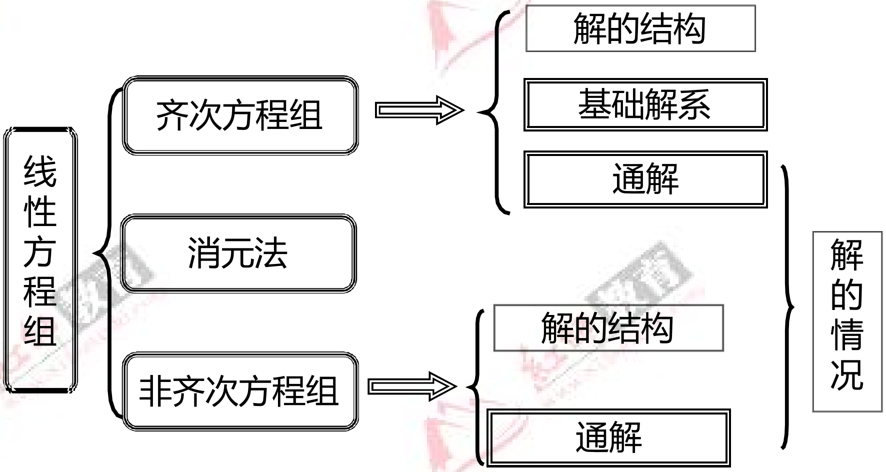
$\boldsymbol{A}$.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$线性相关；

$\boldsymbol{B}$.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$线性无关；

$\boldsymbol{C}$.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$线性相关，而$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$线性无关；

$\boldsymbol{D}$.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$线性无关

主要内容总结



矩阵的相似化简

考试大纲要求：

1.了解向量的内积与正交；

2.理解相似矩阵、正交矩阵以及线性变换的概念；

3.会求矩阵的特征值与特征向量，掌握特征值、特征向量的性质，会利用正交线性变换化实对称矩阵为对角阵

5-1 预备知识

一、向量的内积与正交

二、正交矩阵与正交线性变化换

一、向量的内积与正交

内积： **设有n维向量**

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\text{令}\quad [x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

称$[x,y]$为向量x与y的内积.

正交： **当$[x,y]=0$时，称向量x与y** 正交.

正交向量组：若一非零向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组.

性质：**若n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一组两两正交的非零向量，**

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

向量的模（范数）： $\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，

规范化（单位化）：向量除以它的范数

标准正交向量组： $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

施密特正交化：由线性无关向量组$a_1,\cdots,a_r$构造出正交向量组$b_1,\cdots,b_r$的过程

$$b_1=a_1$$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1,$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_r=a_r-\frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}b_2-\cdots-\frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}b_{r-1}$$

例 已知$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,求一组非零向量$a_2,a_3$,使$a_1,a_2,a_3$两两正交.

解：α_2,α_3 应满足方程 $\alpha_1^T x=0$ 即 $x_1+x_2+x_3=0$

它的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

把基础解系正交化

$$a_2=\xi_1,\quad a_3=\xi_2-\frac{[\xi_1,\xi_2]}{[\xi_1,\xi_1]}\xi_1.$$

其中$[\xi_1,\xi_2]=1,[\xi_1,\xi_1]=2$,于是得

$$a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

即为所求

二、正交矩阵与正交线性变化换

正交矩阵：$AA^T=E\Rightarrow A^T=A^{-1}$

正交矩阵条件：A的列向量都是单位向量且两两正交．

例： **验证矩阵**

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\text{是正交矩阵.}$$

正交线性变换 :P为正交阵，线性变换$y=Px$ 称为正交线性变换．

例:设矩阵A为正交阵，则下列说法错误的是_____

$A.A^{T}$为正交矩阵　　　　$B.A^{-1}$为正交矩阵

$C.\ 2A$为正交矩阵　　　　$D.A^{2}$为正交矩阵

5-2 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量概念及求法

二、特征值 与特征向量的性质

一、特征值与特征向量的概念及求法

定义: 设A是n阶方阵,如果数λ和n维非零列向量

x使$Ax=\lambda x$成立,则

λ称为方阵A的特征值,

非零向量x称为A对应于特征值λ的特征向量.

说明：1）矩阵A为方阵

2） $x \neq 0$

3） x 为列向量

分析：$Ax=\lambda x \Rightarrow (A-\lambda E)x=0$

$\because$ x 为非零列向量

$\Rightarrow (A-\lambda E)x=0$有非零解

$\Rightarrow |A-\lambda E|=0 \longrightarrow$ 特征方程

$|A-\lambda E| \longrightarrow$ 特征多项式

$\Rightarrow (A-\lambda E)x=0$

的非零解即为A对应于特征值的特征向量

求特征值、特征向量步骤：

1)写出矩阵的特征多项式 $|A-\lambda E|$

2) 求出特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 的所有特征根 λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n

3)对于特征值 λ_i,求齐次方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的非零解,

就是对应于 λ_i 的特征向量.

例1） 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解： A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

当 $\lambda_1=2$ 时, 解方程 $(A-2E)x=0.$ 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

所以$k\,p_1(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征值.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时,解方程$(A-E)x=0$.由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

所以$k\,p_2(k\neq 0)$是对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征值.

例2）设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求A的特征值与特征向量．

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$

令 $-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

得A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1=-1$时，解方程$(A+E)x=0$.由

$$A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$

故对应于$\lambda_1=-1$的全体特征向量为

$$k\,p_1 \qquad (k\neq 0).$$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时,解方程$(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为：$p_2=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$, $p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$,

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为:

$k_2p_2+k_3p_3\quad(k_2,k_3$不同时为0).

二、特征值 与特征向量的性质

1)设n阶方阵$A=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

2）若 λ 是矩阵A的特征值，x 是A的对应于 λ的特征向量，则

(1) λ^m是A^m的特征值(m是任意常数).

(2) 当A可逆时,λ^{-1}是A^{-1}的特征值.

3）属于不同特征值的特征向量是线性无关．

4）属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量．

例：1)三阶方阵A的特征值为$1,-1,2$,则$B=2A^3-3A^2$的特征值为______

解：

A^3的特征值$1,-1,8$

A^2的特征值$1,1,4$

$2A^3-3A^2$的特征值$-1,-5,4$

练习：

1）三阶方阵A有一个特征值为1,则A^2+A-2E有一个特征值为______

$A.1$　　$B.-1$　　$C.0$　　$D.2$

练习 :2)已知$\lambda=0$是$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}$的特征值,则$a=$______

$A.1$　　$B.-1$　　$C.2$　　$D.-2$

练习：

3）三阶方阵A的特征值为$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，则$|A^{-1}-E|=$______

$A.\frac{1}{6}$　　$B.6$　　$C.0$　　$D.1$

5-3 相似矩阵

一、相似矩阵与相似变换

二、矩阵对角化条件

一、相似矩阵与相似变换

A与B相似： $P^{-1}AP=B$ 相似变换矩阵：P

性质：

1) $|A|=|B|$

2) A与B的特征方程相同

3) A的特征值等于B的特征值

4) A与B等价

5) A的秩等于B的秩

1)已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似,则

$x=$____, $y=$ ______

解：A与B相似 $|A|=|B|$

$\Rightarrow -2=-2y\Rightarrow y=1$

A与B的迹相同$\Rightarrow 2+x=2+y-1$

$\Rightarrow x=0$

1) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似,则

$x=$____, $y=$____

解：A与B相似 $|A|=|B|$

$$\Rightarrow -2=-2y\Rightarrow y=1$$

$$A\text{与}B\text{的迹相同}\Rightarrow 2+x=2+y-1$$
$$\Rightarrow x=0$$

二、矩阵对角化条件

定理1　如果 n阶矩阵 A 的n 个特征值互不相等，则 A与对角阵相似．

推论　若n阶方阵A与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$

相似,则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$即是$A$的$n$个特征值.

定理2　n阶矩阵A与对角矩阵相似(即A能对角化)的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

例1　判断下列实矩阵能否化为对角阵？

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -5 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

解：

$$(1)\ 由|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7.$

将 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入 $(A-\lambda_1 E)x=0$，得方程组

$$\begin{cases}-x_1-2x_2+2x_3=0\\ -2x_1-4x_2+4x_3=0\\ 2x_1+4x_2-4x_3=0\end{cases}$$

解得基础解系　$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$

同理，　对 $\lambda_3=-7$，由 $(A-\lambda E)x=0$，

求得基础解系　$\alpha_3=(1,2,2)^T$

即 A 有3个线性无关的特征向量，因而 A 可对角化.

(2) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -5 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3$$

所以A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$

把$\lambda=-1$代入$(A-\lambda E)x=0,$

解得基础解系　$\xi=(1,1,-1)^T,$

故 A 不能化为对角矩阵.

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

例2 设$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$ A能否对角化？若能对角化，则求出

可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP$为对角阵.

解：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 6 & 0\\ -3 & -5-\lambda & 0\\ -3 & -6 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

所以A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-2.$

将$\lambda_1=\lambda_2=1$代入$(A-\lambda E)x=0$得方程组

$$\begin{cases}3x_1+6x_2=0\\-3x_1-6x_2=0\\-3x_1-6x_2=0\end{cases}$$ 解得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_3=-2$代入$(A-\lambda E)x=0$,得方程组的基础解系$\xi_3=(-1,1,1)^T$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

注意：矩阵 P 中的列向量和对角矩阵中特征值的位置要相互对应．

5-4 实对称矩阵对角化

一、实对称矩阵性质

二、正交线性变换化将实对称矩阵对角化

一、实对称矩阵性质

(1)特征值为实数；

(2)属于不同特征值的特征向量正交；

(3)特征值的重数和与之对应的线性无关的特征向量的个数相等；

(4)必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值．

二、正交线性变换化将实对称矩阵对角化

$P^{-1}AP=\Lambda$ 若P为正交矩阵，则 $P^{T}AP=\Lambda$

利用正交矩阵将对称阵化为对角阵的步骤：

(1)求特征值；

(2)找特征向量；

(3)将特征向量正交化（施密特正交化）；

(4)最后单位化．

（2）（3）步可合并为直接写出正交的特征向量

例　求正交线性变换化实对称矩阵为对角阵

$$(1)A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix},\qquad (2)A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

解： 第一步 求特征值

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

得　$\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=-2.$

第二步　由$(A-\lambda_i E)x=0$,求出A的特征向量

对 $\lambda_1=4$,由$(A-4E)x=0$,得

$$\begin{cases}2x_1+2x_2=0\\2x_1+3x_2+2x_3=0\\2x_2+4x_3=0\end{cases}\quad \text{解之得基础解系}\quad \xi_1=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

对 $\lambda_2=1$,由$(A-E)x=0$,得

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0\\2x_1+2x_3=0\\2x_2+x_3=0\end{cases}\quad \text{解之得基础解系}\quad \xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

对 $\lambda_3=-2$,由$(A+2E)x=0$,得

$$\begin{cases}-4x_1+2x_2=0\\2x_1-3x_2+2x_3=0\\2x_2-2x_3=0\end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

第三步　将特征向量正交化

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3是属于A的3个不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量,

故它们必两两正交.

第四步　将特征向量单位化　令 $\eta_i=\dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|}$,　$i=1,2,3.$

得 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix}$,　$\eta_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$,　$\eta_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$.

作 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\-1&-2&2\end{pmatrix}$,

则 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

(2) $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(2-\lambda)^2=0$$

特征值$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$

$\lambda_1=-1$ 解（$A+E$）$x=0$

$$A+E=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 解（$A-2E$）$x=0$

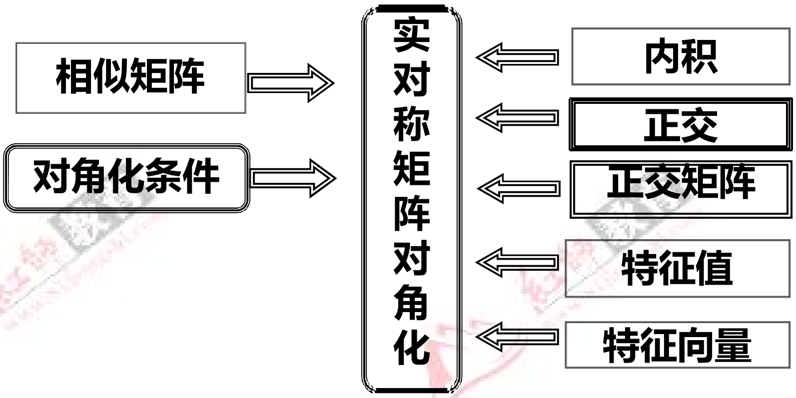
$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 同解方程$x_1=-x_2-x_3$

$$\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

单位化： $\eta_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

$$P=(\eta_1\quad\eta_2\quad\eta_3)\Rightarrow P^TAP=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$$

主要内容总结



二次型

<u>考试大纲要求</u>：

1.了解二次型的概念，掌握二次型的矩阵表示形式；会求二次型的秩，理解惯性定理

2.理解二次型的标准形和规范形

3.会用正交线性变换和配方法化二次型为标准形，理解正定二次型的概念性质及判别方法

6-1 二次型及标准型概念

一、二次型

二、二次型表示方法

三、标准型

一、二次型

定义1 含有n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

二、二次型的矩阵表示方法

$$f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则二次型可记作$f=x^TAx$,其中A为对称矩阵.

对称矩阵A叫做二次型 f 的矩阵;

f 叫做对称矩阵A的二次型;

对称矩阵A的秩叫做二次型 f 的秩.

例 1　写出二次型$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$的矩阵.

解：$\boldsymbol{a_{11} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{33} = -3,}$

$\boldsymbol{a_{12} = a_{21} = 2,\qquad a_{13} = a_{31} = 0,}$

$\boldsymbol{a_{23} = a_{32} = -3.}$

$$\therefore\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

例2：矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$对应的二次型

解：$\boldsymbol{f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3}$

例3）二次型 $\boldsymbol{f=-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3}$ 的秩为________

$A.1$　　　$B.3$　　　$C.0$　　　$D.2$

解：$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=3$

练习：二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+4x_2^2$的秩为______

练习：设 $f=ax_1^2+x_2^2-2x_3^2-2bx_2x_3\ (b>0)$ 所对应的矩阵 A 的特征值之和为1，特征值之积为-12，则___

$A.a=2,b=1$　　　　$B.a=2,b=2$

$C.a=1,b=2$　　　　$D.a=1,b=1$

三、标准型

只含有平方项的二次型 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$

称为二次型的标准形（或法式）.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2$$

正惯性指数：二次型对应的标准型中正项的个数

负惯性指数：二次型对应的标准型中负项的个数

符号差：正惯性指数与负惯性指数之差

例：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2x_3$ 的秩为____正惯性指数为______

负惯性指数为_____符号差为_______

解：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=3$

$$A-\lambda E=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$

$\Rightarrow$ 正惯性指数为2，负惯性指数为1，符号差为1

6-2 二次型化标准形方法

一、正交变换法

二、配方法

一、正交变换法

1. 将二次型表成矩阵形式$f = x^T Ax$,求出A;

2. 求出A的所有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$;

4. 将特征向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$正交化,单位化, 得
$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$, 记$P = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$;

5. 作正交变换$x = Py$,则得f的标准形$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

例 :将二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
化为标准型.

解：
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda E = \begin{matrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{matrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0$$

特征值$\lambda_1=5$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$

$\lambda_1=5$ 解（$A-5E$）$x=0$

$$A-5E=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=\lambda_3=-1$ 解（$A+E$）$x=0$

$$A+E=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程$x_1=-x_2-x_3$

$$\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

单位化：$$\eta_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

正交线性变换

$$P=(\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

标准形： $f = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

二、配方法

1. 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形;

2. 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij} \neq 0 \quad (i \neq j)$, 则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \qquad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i,j)$$

例 化二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

解:

含有平方项

含有 x_1 的项配方

$$f=\boxed{x_1^2}+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

$$=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2$$

去掉配方后多出来的项

$$\boxed{-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3}+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= y_1^2 + y_2^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (|C| = 1 \neq 0).$$

例2 化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 成标准形,并求所用的变换矩阵.

解: 由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ $\left(即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$

代入 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3,$

得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$

再配方，得

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3 \end{cases}$ $\left(即 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)$

得 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \left(C = -2 \neq 0 \right).$$

6-3 正定二次型

一、正定二次型概念

二、正定二次型判定

一、正定二次型概念

定义1 设有实二次型 $f(x)=x^TAx$,如果对任何$x\neq 0$,都有$f(x)>0$,

则称f为正定二次型,并称对称矩阵A是正定的;如果对任何$x\neq 0$

都有$f(x)<0$,则称 f为负定二次型,并称对称矩阵A是负定的.

例如 $f=x^2+4y^2+16z^2$ 为正定二次型

二、正定二次型判定

定理1　实二次型为正定的充分必要条件是：它的标准形的n个系数全为正.

推论:矩阵A为正定的充分必要条件是：A的特征值全为正 .

定理2 对称矩阵A为正定的充分必要条件是：的各阶主子式为正，即

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

例:当t取何值时,二次型$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$是正定的.

解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\qquad 1 > 0,\ \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow -1 < t < 1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} < t < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{5} < t < 0,$$

主要内容总结