2019 军队文职招聘考试

数学 1

概率论与数理统计

概率论的基本概念

考试大纲要求：

1、了解随机试验、样本空间、随机事件的概念，理解事件的关系与运算；

2、了解频率与概率的定义，掌握概率的性质

3、掌握古典概型、几何概型的计算，掌握条件概率、乘法公式、全概公式和贝叶斯公式等基本理论与基本方法，会利用事件的独立性

1-1样本空间

一、样本空间

二、随机事件

三、事件的关系与运算

一、样本空间

试验：将一枚硬币抛3次，观察正面H、反面T出现的情况

特点：（1）重复性

（2）完备性

（3）随机性

随机试验：E

样本空间：

样本点：E中的每个结果

二、随机事件

随机事件：在一次试验中坑出现也可能不出现的结果或事件

简称事件，记A B C

比如：事件“恰有一次正面朝上”

$$A=\{\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH}\}$$

基本事件：样本点

必然事件：Ω

不可能事件：$\varnothing$

随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

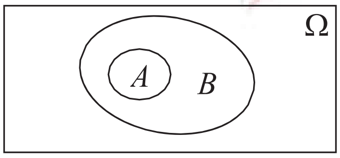
随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

随机事件
- 基本事件
- 复合事件
- 必然事件
- 不可能事件

必然事件、不可能事件：互为对立事件

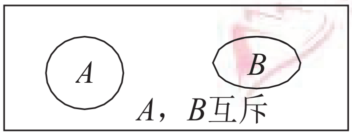
三、事件的关系与运算

1. 包含关系：　若事件 A 发生必然导致 B 发生，则称事件 B 包含事件 A,记作　$B \supset A$ 或 $A \subset B$.

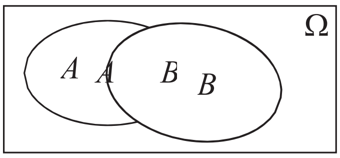


2.事件相等：若事件A 包含事件B， 而且事件B 包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 A=B.

3.互斥关系（互不相容）：A,B不可能同时发生，则称A,B互斥

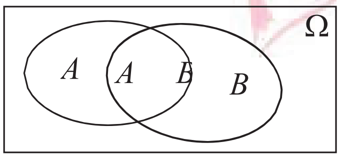


4. 事件的和：A,B至少一个发生　记为$A \quad B$



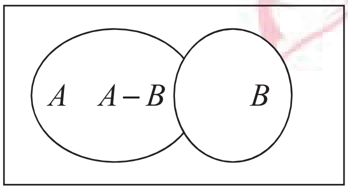
推广　称 $\overset{n}{\underset{k=1}{}} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \quad , A_n$ 的和事件;

5. 事件的积：A,B同时发生　记为$A \quad B=AB$

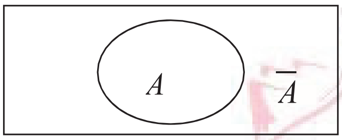


推广　称 $\overset{n}{\underset{k=1}{}} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \quad , A_n$ 的积事件;

5. 事件的差：事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的差. 记作 A- B.



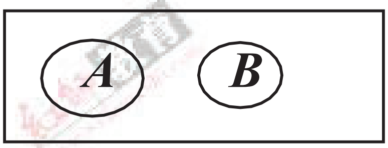
6. 事件的逆：在一次试验中，若事件 A与事件 B 中有且仅有一个发生，则称事件 B为事件A的逆事件. 记作 $B=\overline{A}$



$A \quad B=\Omega$且 $AB=\varnothing$

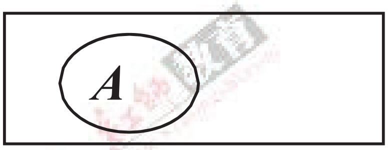
对立事件与互 斥事件的区别

A、B 互斥 ⇩



$AB=\varnothing$

A、B 对立 ⇩



$A \quad B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$

互 斥 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 对 立

1-2频率与概率

一、频率

二、概率

三、概率的性质

一、频率

设 E 为任一随机试验，A为其中的某一事件，n次试验中A发生了 n_A 次，则A发生的频率为

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

概率：设有随机试验E，若当试验的次数n充分大时，事件 A 的发生频率稳定在某数 p 附近摆动，而且随着试验次数n 的增大，摆动的幅度越来越小，则称数p为事件的概率．记为

$$P(A)=p.$$

二、概率（公理化定义）

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) **非负性**：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geq 0$;

(2) **规范性**：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$;

(3) **可列可加性**：设 $A_1, A_2,$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i,\ j=1,2,$ ，则有

$$P(A_1 \quad A_2 \quad)=P(A_1)+P(A_2)+$$

则称 P (A) 为事件A 的概率.

三、概率的性质

(1) $0\leq P(A)\leq 1$;

(2) $P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0$;

(3)若$AB=\varnothing$ $\quad P(A \quad B)=P(A)+P(B)$

(4) $P(\overline{A})=1-P(A)$

(5) $P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

(6)（加法公式）对于任意两事件 A, B 有

$$P(A \quad B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

1) 已知$P(A)=0.6,\ P(AB)=0.2$, 则$P(\overline{A}B)=$_______

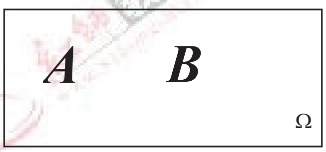
2)已知$P(A)=0.7,\ P(A\quad B)=0.8,\ P(B)=0.2$，则$P(AB)=$____

例 设事件 A, B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 求在下列三种情况下 $P(B\overline{A})$ 的值.

(1) A与B互斥; (2) $A\subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1)由图示得 $P(B\overline{A})=P(B)$,

故 $P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}$.



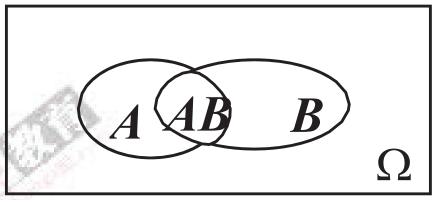
(2) 由图示得

$P(B\overline{A})=P(B)-P(A)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

(3) 由图示得

因而 $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.



1-3古典概型

一、古典概型

二、抽样方式

三、几何概型

一、古典概型（等可能概型）

特点：1）所有可能结果为有限个

2）每个基本事件发生的可能性相同

计算：设试验 E 的样本空间由n 个样本点构成， A为 E 的任意一个事件，且包含 m 个样本点，则事件 A 出现的概率记为:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

二、抽样方式

例1：(无放回抽样)设袋中有4 只白球和 2只黑球, 现从袋中无放回

地依次摸出2只球,求这2只球都是白球的概率.

解：设 $A=\{\text{摸得 2 只球都是白球}\}$,

基本事件总数为 C_6^2

A 所包含基本事件的个数为 C_4^2

故 $P(A)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}.$

例 2：(有放回抽样) 设袋中有4只红球和6只黑球,现从袋中有放回地摸球3次,求前2次摸到黑球、第3次摸到红球的概率.

解 设 $A=\{$ 前 2 次摸到黑球，第3 次摸到红球$\}$

基本事件总数为 $10\times10\times10=10^3$,

A 所包含基本事件的个数为 $6\times6\times4$,

故 $P(A)=\dfrac{6\times6\times4}{10^3}=0.144.$

例3：把4个球放到10个杯子中去,每个杯子只能放一个球,求第1 至第4个杯子各放一个球的概率.

解 第1至第4个杯子各放一个球的概率为

$$p=\frac{p_4^4}{p_{10}^4}=\frac{4\times3\times2\times1}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{210}.$$

例4：将 N 个球随机地放入n个盒子中(n>N)，求(1)每个 盒子最多有一个球的概率；(2)某指定的盒子中恰有m (m<N) 个球的概率．

解： (1) 设 $A=\{$每盒子最多有一球$\}$

$$P(A)=\frac{n(n-1)\quad(n-N+1)}{n^{N}}$$

(2) 设 $B=\{$某指定的盒子中恰有m球$\}$

$$P(B)=\frac{C_N^m(n-1)^{N-m}}{n^{N}}$$

三、几何概型

特点：1）所有可能结果为无限个

2）每个基本事件发生的可能性相同

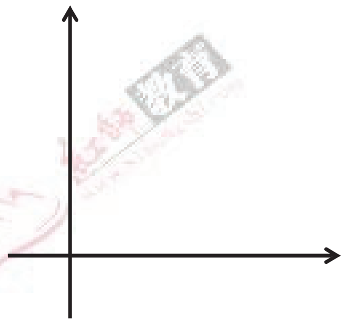
当随机试验的样本空间是某个区域，并且任意一点落在度量(长度、 面积、体积) 相同的子区域是等可能的，则事件A 的概率可定义为 $P(A)=\frac{S_A}{S}.$

说明 ：当古典概型的试验结果为连续无穷多个时,就归结为几何概型.

会面问题:

例1： 甲乙两人相约 8 点至9点在预定地点会面．先到的人等候另一人20分钟后离去，求甲乙两人能会面的概率．

解　以 x，y 分别表示甲、乙二人到达的时刻，则

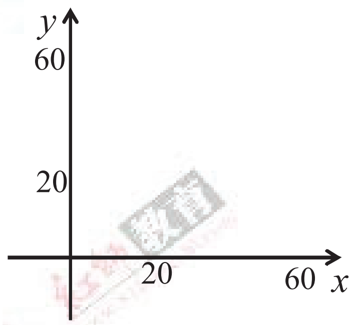


两人能会面的充要条件为:

（图中阴影部分），所以所求的概率为

$$P=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}$$

$$=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$



1.4 条件概率与全概公式

一、 条件概率

二、 乘法定理

三、 全概率公式和贝叶斯公式

一、 条件概率

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A)>0$, 称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

同理可得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

2. 性质

(1) 非负性: $P(B|A) \geq 0$;

(2) 规范性: $P(\Omega|B) = 1$, $P(\varnothing|B) = 0$;

(3) $P(A_1 \quad A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$;

(4) $P(A|B) = 1 - P(A\,B)$.

(5) 可列可加性: 设 B_1, B_2, 是两两不相容的事件, 则有

$$P\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{}} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

例1) 某种动物由出生算起活20岁以上的概率为0.8, 活到25岁以上的概率为0.4, 如果现在有一个20岁的这种动物, 问它能活到25岁以上的概率是多少?

解: 设 A 表示 " 能活 20 岁以上 " 的事件,

B 表示 " 能活 25 岁以上" 的事件,

则有 $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

因为 $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$, $P(AB) = P(B)$,

所以 $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.4}{0.8} = \dfrac{1}{2}$.

二、乘法定理

由条件概率的定义，可推得概率的乘法定理：

乘法定理： 设$P(A)>0, P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

利用这个公式可以计算积事件的概率．

例1：已知$P(A)=0.7, P(B|A)=0.4, P(A|B)=0.5$，则$P(B)=$______

解：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.4 \Rightarrow P(AB)=0.28$

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.5 \Rightarrow P(B)=0.56$

例2 在一批由90件正品，3件次品组成的产品中，不放回接连抽取两件产品，求第一件取正品，第二件取次品 的概率．

解 设 B表示“ 第一件取正品 ” 的事件，

A 表示 “第二件取次品”的事件, 按题意

$$P(B)=\frac{90}{93},\ P(A\mid B)=\frac{3}{92}$$

由乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)=\frac{90}{93}\times\frac{3}{92}=0.0315$$

三、 全概率公式和贝叶斯公式

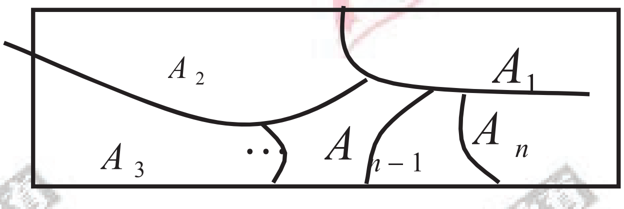
1. 样本空间的划分

定义 设 Ω 为试验E的样本空间, $B_1, B_2,\quad ,B_n$ 为 E 的一组事件, 若

(i) $A_iA_j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\quad ,n$;

(ii) $A_1\quad A_2\qquad\quad A_n=\Omega$.

则称 $A_1, A_2,\quad ,A_n$为样本空间 Ω 的一个划分.



2. 全概率公式

定理　设试验 E 的样本空间为Ω, B 为 E 的事件,

$A_1, A_2, \quad, A_n$ 为 Ω 的一个划分, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \quad, n)$, 则

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \quad + P(B|A_n)P(A_n)$$

例1 有一批同一型号的产品，已知其中由一厂生产的占 30% ，二厂生产的占 50% ，三厂生产的占 20%，又知这三个厂的产品次品率分别为2% ， 1%，1%，问从这批产品中任取一件是次品的概率是多少?

解　设事件 B 为“任取一件为次品”，

事件A_i 为“任取一件为i 厂的产品”, i =1,2,3.

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3).$$

$$= 0.02 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5 + 0.01 \times 0.2$$

$$= 0.013.$$

3. 贝叶斯公式

定理　设试验 E 的样本空间为 Ω, B 为 E 的事件,

$A_1, A_2, \quad, A_n$ 为 Ω 的一个划分, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \quad, n)$, 则

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B\ A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

例1 有一批同一型号的产品，已知其中由一厂生产的占 30% ，二厂生产的占 50% ，三厂生产的占 20%，又知这三个厂的产品次品率分别为2% ， 1%，1%，问从这批产品中任取一件是次品的概率是多少?

若已知取到的是次品，则是从一厂取到的概率为多少？

解: 设事件 B 为 “任取一件为次品”，

事件 A_i 为"任取一件为 i 厂的产品", $i = 1,2,3$.

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

$$= 0.02 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5 + 0.01 \times 0.2 = 0.013 .$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B\ A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.02 \times 0.3}{0.013} = 0.462$$

1-5独立性

一、事件的独立性

二、伯努利概型

一、事件的独立性

定义 设 A, B 是两事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件 A, B 相互独立，简称 A, B 独立.

A, B 是两事件，且 $P(A)>0$. 若 A, B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)$

若 A, B 相互独立，则下列各对事件，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$

也相互独立.

例1 两门高射炮彼此独立的射击一门敌机，设甲炮 击中敌机的概率为0.9， 乙炮击中敌机的概率为0.8，求敌机 被击中的概率．

解： 设 A 表示 “ 甲炮击中敌机 ” 的事件，

B 表示 “ 乙炮击中敌机” 的事件,

$$P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98$$

说明

事件事件的独立性与互斥是两码事，互斥性表示两个事件不能同时发生，而独立性则表示他们彼此不影响．

两事件相互独立 $P(AB) = P(A)P(B)$

两事件互斥 $AB = \varnothing$

二者之间没有必然联系

三事件相互独立的概念

定义　设 A, B, C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

注意：

三个事件相互独立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 三个事件两两相互独立

例：设事件A,B相互独立，$P(A)=0.3, P(A\quad\overline{B})=0.7$,则$P(B)=$______

解:$P(A\quad\overline{B})=P(A)+\overline{P}(B)-P(A)\overline{P}(B)=0.3+\overline{P}(B)-0.3\overline{P}(B)=0.7$

$\Rightarrow 0.7P(\overline{B})=0.4$

$P(\overline{B})=\frac{4}{7}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{7}$

二、伯努利概型

特点：1）每次试验条件一样，且结果只有两个A和$\overline{A}$, $P(A)=p$

2）每次试验结果相互独立

在 n 重伯努利概型中事件 A 发Th k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\cdots,n$$

例1 若三次射击中至少命中一次的概率为0.875，则在一次射击中命中目标的概率为______

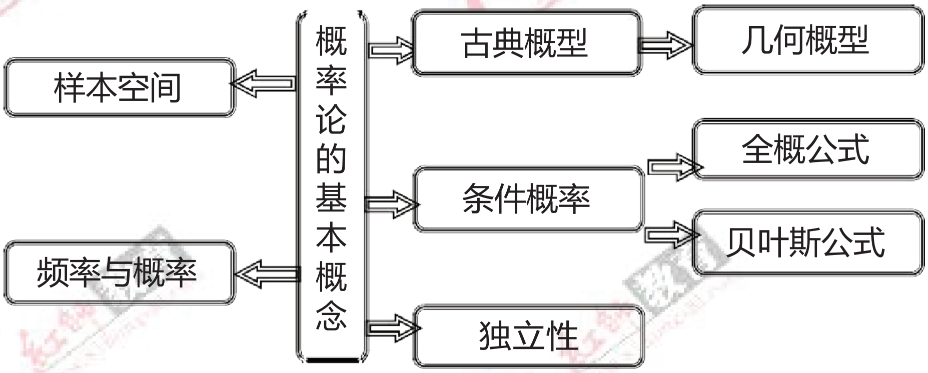
解：设在一次射击中命中目标的概率为P(A)

则 $P(\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A})=P(\overline{A})^3=1-0.875=0.125$

$\Rightarrow P(\overline{A})=0.5$

$\Rightarrow P(A)=0.5$

主要内容总结



随机变量及其分布

考试大纲要求：

1、了解随机变量和分布函数的概念

2、掌握离散型随机变量的分布规律及连续型随机变量的密度函数的计算及性质

3、熟记常见分布的分布律或密度函数

4、理解正态分布及随机变量函数的分布

2-1 随机变量和分布函数

一、 随机变量

二、 分布函数

一、随机变量

1、定义：设E是随机试验，Ω 是样本空间，$\forall\ \omega \in \Omega$

有 $X(\omega)=x$ 与之对应，则称 $X(\omega)$ 为随机变量

记作 $R.V.X$

比如：将一枚硬币抛两次，H 表示正面，T 表示反面，X 表示 H 出现的次数， 则

$\Omega=\{HH\ \ HT\ \ TH\ TT\}$

$X(HH)=2$ X(HT)=X(TH)=1 X(TT)=0

2.分布函数 $F(x)=P(X\leq x)$

性质：（1） $0\leq F(x)\leq 1$

（2）$F(x)$ 单调不减函数

（3）$F(+\infty)=1$ $F(-\infty)=0$

（4）$F(x)$ 右连续

例:随机变量X的分布函数为 $F(x)=P(X \le x)$ 则$F(x)$ 一定是______

A.连续函数　　*B*.阶梯函数
C.左连续函数　　*D*.右连续函数

2-2离散型随机变量

一、离散型随机变量及其分布律

二、常见离散型随机变量的分布

一、离散型随机变量及其分布律

1、离散型随机变量：$R.V.X$ 取值为有限个或可列无限个

2、分布律: $P_k = P\{X = x_k\} \quad k = 1,2,\cdots$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	P_1	P_2		P_k	

性质： (1) $p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \cdots;$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

例： 10件同类产品中有2件次品，从中抽3件，X表示次品数，写出X的分布律

解： $X = 0 \quad 1 \quad 2$

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^0 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15} \qquad P(X=2) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$$

分布律

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

二、常见分布及其分布律

1. 两点分布 (0-1)分布　$X \sim B(1, P)$

分布律:

X	0	1
P	P	$1-P$

2.二项分布　$X \sim B(n, p)$

分布律:　$P(X=k)=C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$　$k=0,1,2,\quad,n.$

n=1时为(0-1)分布

例：已知一批产品的次品率为0.01，从产品中任取10件，求取得至少2件次品的概率

解　$X \sim B(10、0.01)$

$$P(x \geq 2)=1-P(x<2)=1-P(x=0)-P(x=1)$$

$$=1-C_{10}^{0}(0.01)^{0}(0.99)^{10}-C_{10}^{1}(0.01)^{1}(0.99)^{9}$$

3.泊松分布 $X \sim P(\lambda)$

分布律 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},(\lambda>0)\quad k=0,1,2,\cdots,$

泊松逼近：$R.V.X_n \quad B(n,p) \quad n=1,2,$ 即

$$P(X_n=k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k} \quad k=0,1,\cdots n$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

例 $X\sim B(5000,0.001)$ 求 $P(X>1)$

解：$np=5000\times 0.001=5=\lambda>0$

$$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)$$

$$=1-e^{-5}-5e^{-5}=1-6e^{-5}$$

4.几何分布 $X \quad G(p)$

分布律：$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad k=1,2,$

5.超几何分布

分布律: $P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \qquad k=0,1,2, \quad \min\{n,M\}$

练习：$R.V.X \quad B(2,p) \quad R.V.Y \quad B(3,p)$,若$P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$,

求$P(Y\geq 1)$

解：由已知$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$

$$=1-C_2^0p^0(1-p)^2=\frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

所以$Y\sim B(3,\frac{1}{3})\Rightarrow P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)$

$$=1-C_3^0(\frac{1}{3})^0(1-\frac{1}{3})^3=\frac{19}{27}$$

练习：$R.V.X \quad B(3,p)$，若$P(X>0)=\dfrac{19}{27}$，P=________

2-3连续型随机变量

一、连续型随机变量的定义

二、常见的连续型随机变量的分布及其密度函数

三、正态分布

一、连续型随机变量的定义

定义：$F(x)$为随机变量X的分布函数，若存在$f(x)$满足

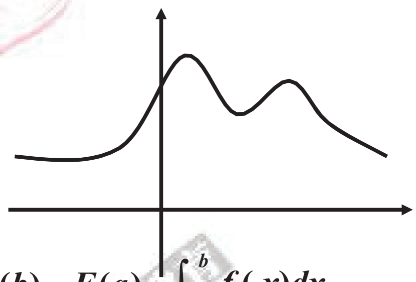
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称X为连续型随机变量，$f(x)$为X的密度函数

连续型随机变量，$F(x)$为连续函数

$f(x)$性质：(1)$f(x)\geq 0$

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$



(3)$P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx$

(4)$F'(x)=f(x)$

(5)$P(x=a)=0$

$$\Rightarrow P(a<X<b)=P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a\leq X\leq b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

例1）：$R.V.X$ $f(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

求 1)K 2)$F(x)$ 3)$P(x>1)$

解：1)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} ke^{-3x}dx=\frac{k}{3}=1\Rightarrow k=3$

$$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$2)F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 1-e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

$$3)P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F(1)=1-1+e^{-3}=e^{-3}$$

另解：

$$P(X>1)=\int_{1}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1}^{+\infty} 3e^{-3x}dx=-e^{-3x}\Big|_{1}^{+\infty}=e^{-3}$$

二、常见分布及其密度函数

1.均匀分布： $X \quad U(a,b)$

密度函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x<b \\ 1 & x\ge b\end{cases}$

2. 指数分布 $X \quad \pi(\lambda)$

密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0\end{cases} \quad (\lambda>0)$

分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0\end{cases}$

练习：$R.V.X \quad \pi(\lambda)$ 且 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ 则λ=__

A.2　　B.$\frac{1}{2}$　　C.-1　　D.1

练习：已知$R.V.X\sim U(a,2)$　且密度函数$f\ (x)=\begin{cases}1, & a<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$，

则$a=$ ______

三、正态分布

$$X \quad N(\mu,\sigma^2) \quad \sigma>0$$

密度函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<+\infty$

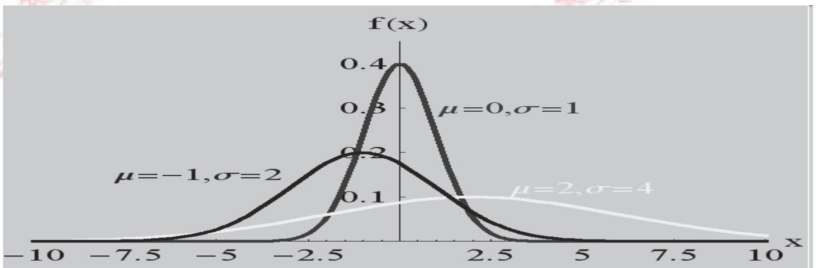
分布函数 $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$

$f(x)$性质:1)关于$x=\mu$对称

2）在$(-\infty,\mu)$单调递增,$(\mu,+\infty)$单调递减

3)$\mu\to$位置参数　　$\sigma\to$形状参数

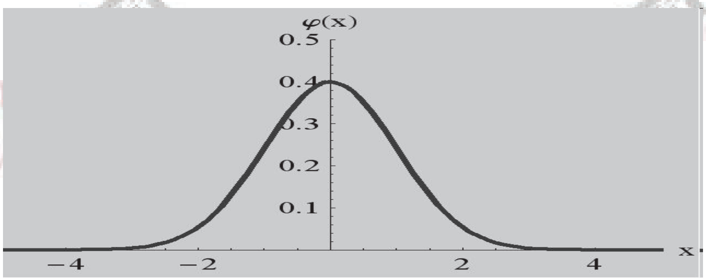
4) $x=\mu\pm\sigma$处有拐点，以x轴为渐近线



特别$\mu = 0 \quad \sigma = 1$时 $\quad X \quad N(0,1)$ 称为标准正态分布

密度函数 $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

分布函数 $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



性质： $1)\ \varphi(-x) = \varphi(x)$

$2)\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$3)\ F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

比如：$R.V.X \sim N(1,4)$,则$P(X > 3) = 1 - P(X < 3)$

$$= 1 - F(3) = 1 - \Phi(\frac{3-1}{2})$$

$$= 1 - \Phi(1)$$

例：设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\varphi(x)$和$\Phi(x)$表示标准正态分布的密度函数和分布函数，则下列结论中不正确的是________

$A.P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=2\Phi(1)-1$

$B.P(|X-\mu|>2\sigma)=1-2\Phi(2)$

$C.\varphi(-x)=\varphi(x)$

$D.\Phi(x)=1-\Phi(-x)$

解：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=F(\mu+\sigma)-F(\mu-\sigma)=\Phi(1)-\Phi(-1)$

$=2\Phi(1)-1$

$P(|X-\mu|>3\sigma)=1-P(|X-\mu|<2\sigma)=1-F(\mu+2\sigma)+F(\mu-2\sigma)$

$=1-\Phi(2)+\Phi(-2)=1-\Phi(2)+1-\Phi(2)$

$=2-2\Phi(2)$

练习：1）设$X\sim N(2,\sigma^2)$，且$P(0<X<4)=0.8$，$P(X<0)=$______

2）$X\sim N(0,1)$则$P(X>1)=$________

2-4随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

二、连续型随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

$R.V.X$ $y=g(x)$函数 $Y=g(X)$——随机变量函数

离散型随机变量函数仍为离散型

分布律

Y	
P	

例： $R.V.X$ 分布律为

X	-1	0	1
P	0.2	0.3	0.5

求:1) $2X+1$　　2) X^2-1 的分布律

解

$2X+1$	-1	1	3
P	0.2	0.3	0.5

X^2-1	-1	0
P	0.3	0.7

二、连续型随机变量函数的分布

$R.V.X$，$Y=g(x)$　则 $Y=g(X)$ 为连续型随机变量函数

利用分布函数法求 $f_Y(y)$

连续型随机变量函数仍为连续型

例：已知$R.V.X \sim U(0,1)$，试求$Y=e^X$的密度函数$f_Y(y)$

解： $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$

当 $y\le 0$时 $F_Y(y)=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$

当 $y>0$时 $F_Y(y)=P(X\le \ln y)=F_X(\ln y)$

$f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=\dfrac{dF_X(\ln y)}{dy}=f_X(\ln y)\cdot\dfrac{1}{y}$

$=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & 其它（0<y<1或y>e）\end{cases}$

综上 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & 其它\end{cases}$

练习：已知$R.V.X\sim\pi(2)$　求$Y=2X-1$的密度函数$f_Y(y)$

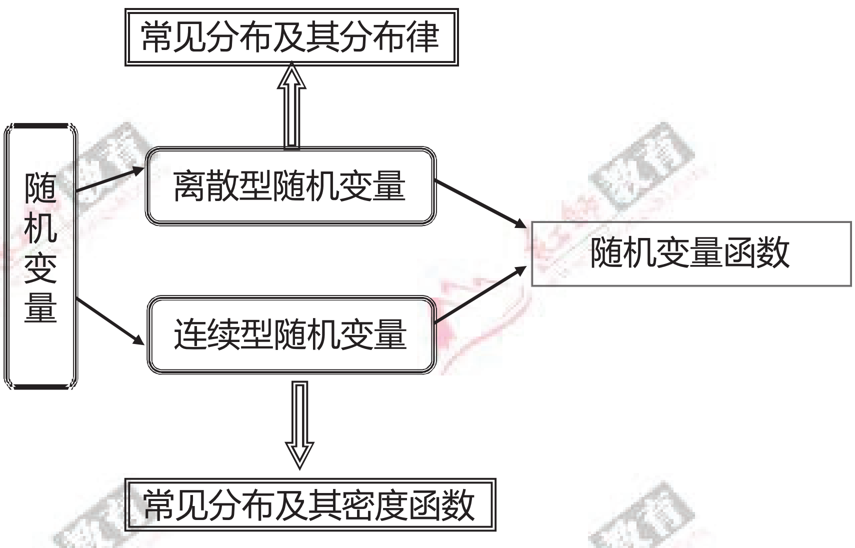
解：$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X-1\leq y)=P(X\leq\frac{y+1}{2})=F_X(\frac{y+1}{2})$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{dF_X(\frac{y+1}{2})}{dy}=f_X(\frac{y+1}{2})\cdot\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}e^{-(y+1)} & y\geq -1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

主要内容总结



二维随机变量及其分布

考试大纲要求：

1.了解二维随机变量及联合分布函数的概念；

2.掌握二维离散型随机变量的联合分布律，边缘分布律求法，条件分布及独立性判定，会求二维离散型随机变量函数的分布；

3.掌握二维连续型随机变量的联合密度函数，边缘密度函数求法，条件分布及独立性判定，了解二维连续型随机变量函数的分布；

3-1 二维随机变量概念及其分布函数

一、二维随机变量

二、联合分布函数

三、边缘分布函数及独立性

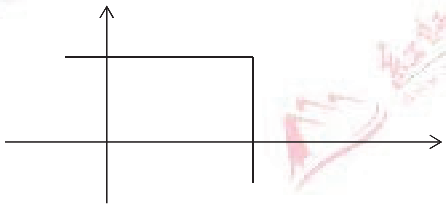
一、二维随机变量

Ω为E的样本空间，$X(\omega);Y(\omega)$是定义在Ω上的随机变量，
$(X，Y)$为二维随机变量

二、联合分布函数

$R.V.(X，Y)$　$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$为X,Y的联合分布函数

$$P(X\le x,Y\le y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}$$

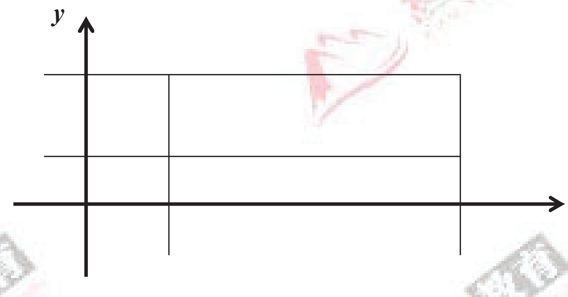


性质：1)$F(x,y)$单调不减；

2）$F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$

$F(-\infty，y)=F(x,-\infty)=0$

3)$P(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2)$
$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$



三、边缘分布函数及独立性

对X的边缘分布函数：

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,Y<+\infty)=F(x,+\infty)$$

对Y的边缘分布函数：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X<+\infty,Y\le y)=F(+\infty,y)$$

独立性：

$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)\Leftrightarrow X,Y$相互独立

3-2 二维离散型随机变量

一、二维离散型随机变量的分布律及独立性

二、二维离散型随机变量的条件分布

三、二维离散型随机变量的函数的分布

一、二维离散型随机变量分布律及独立性

1.定义:(X, Y) 的所有可能取值为有限对或可列对

2.联合分布律: $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad i, j = 1, 2,$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_j
x_1	P_{11}	P_{12}	P_{1j}
x_2	P_{21}	P_{22}	P_{2j}
x_i	P_{i1}	P_{i2}	P_{ij}

性质: 1) $P_{ij} \geq 0$ 　　2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} = 1$

例：将一枚硬币抛两次，以X表示正面的次数，Y表示反面的次数，写出X,Y的联合分布律

解: $X = 0,1,2 \qquad Y = 0,1,2$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	0

边缘分布律：

对X： $P(X=x_i)=P(X=x_i,Y<+\infty)=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}=P_{i\cdot}$

对Y： $P(Y=y_i)=P(X<+\infty,Y=y_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}=P_{\cdot j}$

X　Y	y_1	y_2	y_j	$P(X=x_i)$
x_1	P_{11}	P_{12}	P_{1j}	P_1
x_2	P_{21}	P_{22}	P_{2j}	P_2
x_i	P_{i1}	P_{i2}	P_{ij}	P_i
$P(Y=y_j)$	P_1	P_2	P_j	1

独立性：

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)\quad i,j=1,2,$$

即 $P_{ij}=P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}\quad i,j=1,2,$

称X,Y相互独立

例1）X,Y联合分布律为 α，β 为何值时，X,Y相互独立

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

解：

X \ Y	1	2	3	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	

X, Y 相互独立

$$\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\frac{1}{3}=\frac{1}{9} \Rightarrow \alpha=\frac{2}{9}$$

$$\left(\frac{1}{18}+\beta\right)\frac{1}{3}=\frac{1}{18} \Rightarrow \beta=\frac{1}{9}$$

二、二维离散型随机变量的条件分布

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P_{ij}$$

若 $P(Y=y_j)>0$，则 $(Y=y_j)$ 发生的条件下 $(X=x_i)$ 发生的概率为

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$$

同理：可得 $P(Y=y_j \mid X=x_i)$

性质：1) $P(X=x_i \mid Y=y_j)\geq 0 \quad i, j=1, 2,$

2) $\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i \mid Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}=1$

三、二维离散型随机变量函数的分布

离散型(X,Y)　$g(x,y)$二元函数

$Z=g(X,Y)$二维离散型随机变量函数

例1)：(X,Y)的联合分布律为

$X\backslash Y$	1	2
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

求： 1)$P(X+Y>2)$　2)$P(XY\le 3)$　3)$P(X=Y)$

解：

P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
X+Y	2	3	3	4
XY	1	2	2	4
X-Y	0	-1	1	0

$$P(X+Y>2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$$

$$P(XY\le 3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

$$P(X=Y)=P(X-Y=0)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

例2）已知X，Y独立同分布，且X的分布律为$P(X=-1)=\frac{1}{2}$，

$P(X=1)=\frac{1}{2}$，则$P(X=Y)=$______

$A.0$　　$B.\frac{1}{4}$　　$C.\frac{1}{2}$　　$D.1$

解：

P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
(X,Y)	(-1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(1,1)
X-Y	0	-2	2	0

$$P(X=Y)=P(X-Y=0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

练习：已知X，Y独立同分布，且X的分布律为$P(X=1)=\frac{1}{2}$，

$P(X=0)=\frac{1}{2}$，则$P(X+Y\le 1)=$______

$A.0$　　$B.\frac{1}{4}$　　$C.\frac{1}{2}$　　$D.\frac{3}{4}$

3-3 二维连续型随机变量

一、二维连续型随机变量概念

二、二维连续型随机变量边缘分布及独立性

三、二维连续型随机变量的条件分布

四、二维连续型随机变量函数的分布

一、二维连续型随机变量概念

1、定义：设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$ 如果存在非负函数 $f(x,y)$ 使对任意实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

则称 (X,Y) 为二维连续型随机变量，$f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的密度函数

或 X 和 Y 的联合密度函数.

$f(x,y)$
性质

(1) $f(x,y)\geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$

(3)若$f(x,y)$在(x,y)连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$

(4) 设D是xOy平面上的一个区域，点(X,Y)落在D内的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

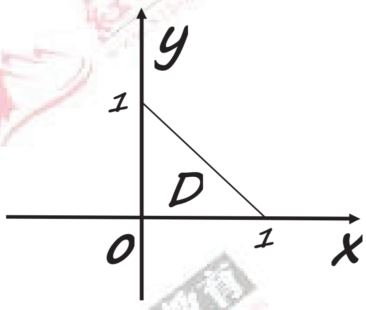
例2 设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-3x-4y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

试求(1)常数k;(2) $P\{(x,y)\in D\}$, 其中平面区域D由x轴、y轴、$x+y=1$围成, 如右图

解 (1)由概率密度性质2

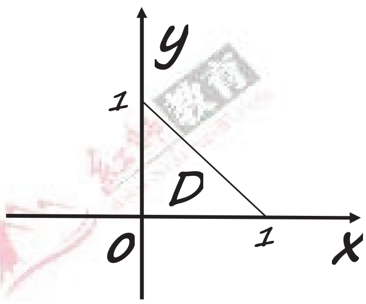
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ke^{-3x-4y}dxdy$$
$$=\frac{k}{12}=1\Rightarrow k=12$$



(2) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}12e^{-3x-4y}dy$$

$$=1-4e^{-3}+3e^{-4}$$



2、均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

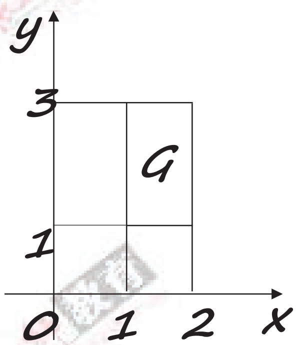
例：若 (X,Y) 在区域 $G=\{(x,y)|1<x<2,1<y<3\}$ 上服从均匀分布

求（1）(X,Y) 的密度函数（2） $P(X<1.5,Y<2)$

解：（1）G的面积为2，则

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P\{X<1.5,Y<2\}=\dfrac{1\times 0.5}{1\times 2}=\dfrac{1}{4}$



二、连续型随机变量的边缘分布及独立性

1、边缘分布：设二维连续型随机变量(X,Y) 的概率密度为$f(x,y)$

则$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x,$ 记

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$为二维随机变量（$X,Y$）关于$X$的边缘密度函数

同理：$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y,$

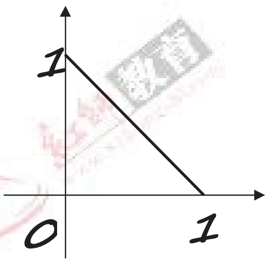
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

例 1）设二维随机变量(X,Y) 在区域 $G=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$

上服从均匀分布，求(X,Y)的边缘密度函数.

解：（1）G的面积S=$\frac{1}{2}$，则

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



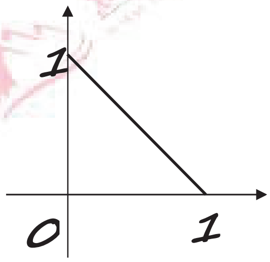
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{1-x}2dy, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^{1-y}2\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$



例2设二维随机变量 (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$ 求X和Y的边缘密度函数.

解:

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^1 8xydy\\ 0\end{cases}=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 8xydx\\ 0\end{cases}=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

2、独立性

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)\Leftrightarrow X,Y\text{ 相互独立}$$

例1）设二维随机变量 (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8y, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ 则X与Y

A.独立同分布　　*B*.独立但不同分布

C.不独立但同分布　　*D*.不独立也不同分布

分析：$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^1 8y\,dy\\ 0\end{cases}=\begin{cases}4(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 8y\,dx\\ 0\end{cases}=\begin{cases}8y^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)\Rightarrow X,Y\text{不独立也不同分布}$$

练习：设X和Y相互独立，$f(x)=\begin{cases} e^{x}, 0<x<1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$，$f(y)=\begin{cases} e^{-y}, \quad y>0 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$

求（X,Y）的联合密度函数

三、二维连续型随机变量的条件分布

设（X, Y）是二维连续型随机变量，$f_X(x)>0, f_Y(y)>0$,则称

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

为在条件$Y=y$下X的条件分布函数，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在条件$Y=y$下X的条件密度函数

同理：$F_{Y|X}(y|x)=P(Y\le y|X=x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$

为在条件$X=x$下Y的条件分布函数，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

为在条件$X=x$下Y的条件密度函数

四、二维连续型随机变量函数的分布

1.$Z=X+Y$的分布

设（X,Y）的密度函数为$f(x,y)$，则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dx]dy$$

令$x=u-y$

$$F_z(z)=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)dy]du$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$$

根据对称性$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

2. $Z=\dfrac{X}{Y}$的分布

设（X,Y）的密度函数为$f(x,y)$，则$Z=\dfrac{X}{Y}$的分布函数为

$$F_z(z)=P(Z\le z)=P(\frac{X}{Y}\le z)$$

$$=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy$$

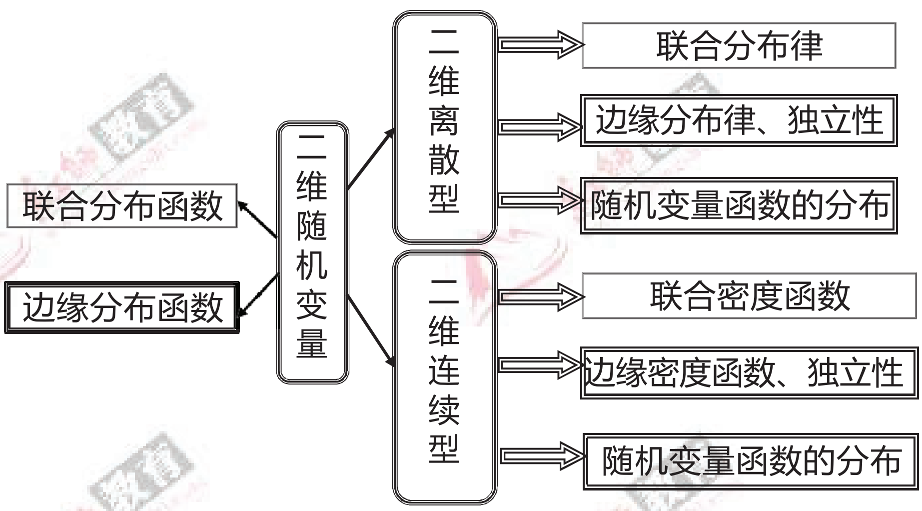
$$=\int_{-\infty}^{0}[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)dx]dy+\int_{0}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)dx]dy$$

令$u=\dfrac{x}{y}$

$$F_z(z)=\int_{-\infty}^{z}[\int_{0}^{+\infty} yf(uy,y)dy-\int_{-\infty}^{0} yf(uy,y)dy]du$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy$$

主要内容总结



随机变量的数字特征

考试大纲要求：

1.理解随机变量的数学期望，方差的概念和计算

2.掌握随机变量的数学期望的性质，方差、标准差的性质

3.会计算常用分布的期望和方差

4.了解协方差、相关系数、矩和协方差矩阵的概念

4-1 数学期望

一、数学期望的概念

二、随机变量函数的数学期望

三、数学期望的性质

一、数学期望的概念

1、离散型：随机变量X的分布律为$P\{X=x_i\}=p_i$， $i=1,2,\quad .$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i.$$

常见离散型随机变量的数学期望：

$$1)X\sim B(1,p)\Rightarrow E(X)=p$$

$$2)X\sim B(n,p)\Rightarrow E(X)=np$$

$$3)X\sim P(\lambda)\Rightarrow E(X)=\lambda$$

$$4)X\sim G(p)\Rightarrow E(X)=\frac{1}{P}$$

例 1：已知$R.V.X\sim P(\lambda)$,且$P(X=0)=P(X=1)$,则$E(X)=$________

解：$P(X=0)=P(X=1)\Rightarrow \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}=\frac{\lambda\, e^{-\lambda}}{1!}\Rightarrow \lambda=1$

$E(X)=\lambda=1$

例 2：已知$R.V.X\sim B(10,0.2)$,则$E(X)=$________

解：$X\sim B(10,0.2)\Rightarrow n=10,\ p=0.2$

$E(X)=np=2$

2、连续型：随机变量X的密度函数为$f(x)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

例：随机变量X的密度函数$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，求$E(X)$

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx$

$=0$

常见连续型随机变量的数学期望：

1)$X\sim U(a,b)\Rightarrow E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

2)$X\sim \pi(\lambda)\Rightarrow E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

3)$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)\Rightarrow E(X)=\mu$

4)$X\sim N(0,1)\Rightarrow E(X)=0$

例 1：已知$R.V.X\sim\pi(2)$,则$E(X)=$________

解：$R.V.X\sim\pi(2)$，$\lambda=2$

$E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}$

练习：已知$R.V.X\sim N(-3,2)$,则$E(X)=$________

二、随机变量函数的数学期望

1、一维随机变量函数

$\boldsymbol{Y=g(X)}$，$\boldsymbol{X}$为离散型：分布律$P\{X=x_k\}=p_k\quad(k=1,2,\ \ \ )$,

$$E(Y)=E[g(x)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

$\boldsymbol{Y=g(X)}$，$\boldsymbol{X}$为连续型：密度函数为$\boldsymbol{f(x)}$

$$E(Y)=E[g(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

例1）设X的分布律为

X	-2	0	1	3
p	1/3	1/2	112	112

求 $E(X^3)$

解 $E(X^3)=(-2)^3\times\frac{1}{3}+0^3\times\frac{1}{2}+1^3\times\frac{1}{12}+3^3\times\frac{1}{12}=-\frac{1}{3}$

例2）设连续随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$ 求$Y=e^X$的期望.

解:

$$E(e^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^x f(x)dx$$
$$=\int_0^{+\infty}e^x 2e^{-2x}dx=2$$

2、二维随机变量函数

$Z=g(X,Y),(X,Y)$为离散型： 分布律为

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i.j=1,2,\quad ,$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i,j}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$Z=g(X,Y),(X,Y)$为连续型:密度函数为$f(x,y)$,

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

例：设(X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$ 求 $E(X), E(XY)$.

解： $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)dxdy=\frac{7}{12}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{1}{3}$$

三、数学期望的性质

$$\begin{cases}1)\ E(C)=C;\ E(CX)\\ 2)\ =CE(X);\\ 3)\ E(X+Y)=E(X)+E(Y);\\ 4)\ X,Y\text{独立}\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y).\end{cases}$$

性质3和性质4都可以推广到有限个随机变量.

例 1：已知$R.V.X \sim \pi(\frac{1}{2}), R.V.Y \sim B(3,0.6)$则$E(X+2Y)=$________

解：$E(X+2Y)=E(X)+2E(Y)$

$=2+2\times3\times0.6=5.6$

4-2方差

一、方差的概念

二、方差的性质

一、方差的概念

方差：$D(X)=E[X-E(X)]^2$

标准差：$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

方差计算公式：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

常见分布的方差

1)$X\sim B(1,p)\Rightarrow E(X)=p$，$D(X)=1-p$

2)$X\sim B(n,p)\Rightarrow E(X)=np, D(X)=np(1-p)$

3)$X\sim P(\lambda)\Rightarrow E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$

4)$X\sim U(a,b)\Rightarrow E(X)=\dfrac{a+b}{2}, D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

5)$X\sim \pi(\lambda)\Rightarrow E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

6)$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$

7)$X\sim N(0,1)\Rightarrow E(X)=0, D(X)=1$

例1　**设随机变量 X 具有概率密度**

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解:　$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\,\mathrm{d}x=0,$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}$$

例 2：已知$R.V.X\sim P(\lambda)$,且$P(X=1)=P(X=2)$,则λ=_______ $E(X^2)=$_______

解：$P(X=1)=P(X=2)\Rightarrow\dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\dfrac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}\Rightarrow\lambda=2$

$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=2+2^2=6$

例 3：已知$R.V.X \sim U(a,b)$,且$E(X)=6, D(X)=3$,则$a=$______$b=$_______

解：$X \sim U(a,b) \Rightarrow \begin{cases} E(X)=\dfrac{a+b}{2}=6 \\ D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=3 \end{cases}$

$\Rightarrow a=3, b=9$

二、方差的性质

$$\begin{cases} 1^0\ D(C)=0; \\ 2^0\ D(CX)=C^2D(X); \\ 3^0\ \text{当X,Y独立时，}\ D(X \pm Y)=D(X)+D(Y). \end{cases}$$

例 1：已知$R.V.X \sim N(0,2)$,则$E(2X+3)=$______$D(2X+3)=$________

解：$X \sim N(0,2) \Rightarrow E(X)=0, D(X)=2$

$E(2X+3)=2E(X)+3=3$

$D(2X+3)=4D(X)=8$

例 2：已知$R.V.X\sim B(10,0.5), R.V.Y\sim N(1,4)$则$E(X-2Y)=$ __

$D(X-2Y)=$ ____

解：$X\sim B(10,0.5)\Rightarrow E(X)=5, D(X)=2.5$

$Y\sim N(1,4)\Rightarrow E(Y)=1, D(Y)=4$

$E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=5-2\times1=3$

$D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)=2.5+4\times4=18.5$

$$\begin{cases}1^0\ D(C)=0;\\ 2^0\ D(CX)=C^2D(X);\\ 3^0\ \text{当X,Y独立时，}\ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).\end{cases}$$

练习：已知$R.V.X\sim N(5,9), R.V.Y\sim N(1,4)$，且$X,Y$相互独立
则$Z=X-2Y+1\sim$______

4-3协方差、相关系数、矩

一、协方差

二、相关系数和矩

三、协方差矩阵

一、协方差

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$X=Y$时, $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$.

协方差的性质：

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$;

(3) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(4) $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\mathrm{Cov}(X,Y)$ a, b, c, d为常数;

(5) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

二、相关系数和矩

相关系数：$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

k阶原点矩：$A_k=E(X^k)$

k阶中心矩：$\mu_k=E[(X-E(X)]^k$

$\mu_2=D(X)$

三、协方差矩阵

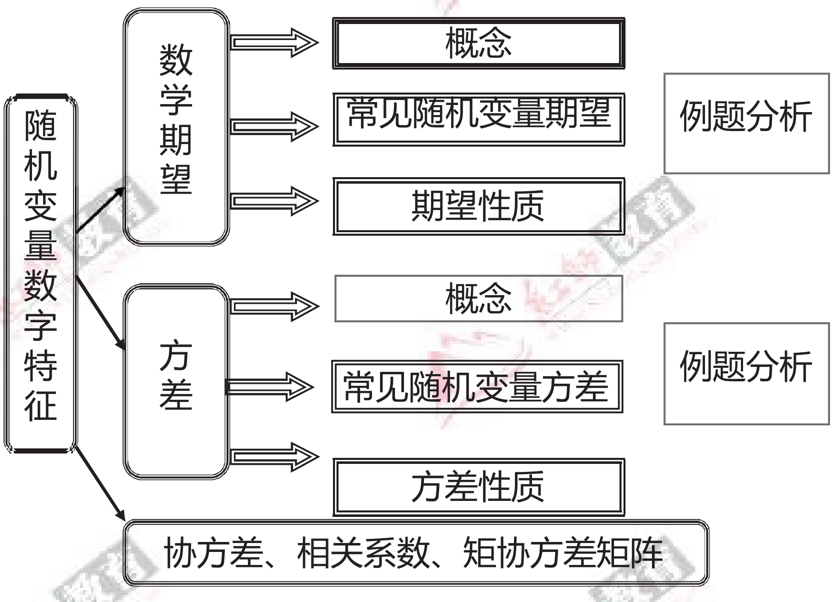
定义：设n维$R.V.(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的二阶混合中心矩

$\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)\ i, j = 1, 2, \cdots, n$都存在，则称矩阵

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

为n维$R.V.(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的协方差矩阵

主要内容总结



大数定律及中心极限定理

考试大纲要求：

1.掌握切比雪夫不等式
2.了解依概率收敛的概念，了解切比雪夫大数定律，辛钦大数定律，伯努利大数定律，独立同分布大数定律的基本理论
3.了解独立同分布中心极限定理，李雅普诺夫中心极限定理和棣莫夫-拉普拉斯中心极限定理的基本理论

5-1大数定律

一、切比雪夫不等式

二、依概率收敛

三、大数定律

一、切比雪夫不等式

定理1（切比雪夫不等式）：设随机变量 X 的期望和方差分别为 E(X)和D(X)，则对任意的 $\varepsilon>0$，下列不等式成立：

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

或

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

例 1）已知随机变量 X，期望 $E(X)=11$，方差 $D(X)=9$，由切比雪夫不等式估计 $P(2<X<20)\geq$ _______

解：$P(2<X<20)=P(|X-11|<9)\Rightarrow\varepsilon=9$

$$P(|X-11|<9)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{9}{9^2}=\frac{8}{9}$$

例2）已知随机变量 X，期望 $E(X)=13$，方差 $D(X)=4$，由切比雪夫不等式知 $P(|X-13|\geq c)\leq 0.01$，则 $c=$ ________

解：$P(|X-13|\geq c)\leq 0.01=\dfrac{4}{\varepsilon^2}\Rightarrow \varepsilon=20$

$P(|X-13|\geq \varepsilon)\leq \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}\Rightarrow c=20$

二、依概率收敛

设有随机变量X和随机变量序列 $X_1, X_2, \quad , X_n,$ 相互独立，若对任意实数 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1.$$

则称随机变量序列 $\{X_n\}$依概率收敛于X，简记为

$$X_n\xrightarrow{P}X$$

三、大数定律

定理2（切比雪夫大数定律）

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，其数学期望 $E(X_k)$ 和方差 $D(X_k)(k=1,2,\cdots)$ 都存在且方差一致有界，即 $D(X_k)<C(k=1,2,\cdots)$

则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

定理3（独立同分布大数定律）

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布（即它们是相互独立的，且分布函数都一样），且 $E(X_k)=\mu \quad D(X_k)=\sigma^2(k=1,2,\cdots)$ 存在，则 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 依概率收敛于 μ，即

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

定理4（伯努利大数定律）

设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p.$$

定理5（辛钦大数定律）

设随机变量 $X_1, X_2, \quad, X_n, \quad$ 独立同分布，且 $E(X_k) = \mu(k=1,2, \quad)$
则 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 依概率收敛于μ，即

$$Y_n \xrightarrow{P} \mu.$$

5-2 中心极限定理

定理6（独立同分布的中心极限定理）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 \neq 0 (k = 1, 2, \cdots)$ 存在，则随机变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意实数 x 满足

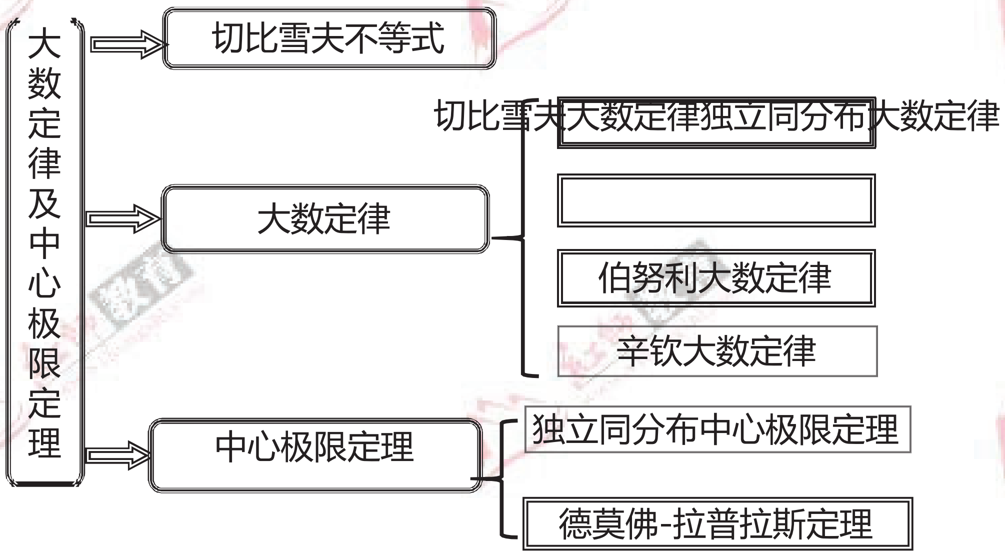
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

定理7（德莫佛-拉普拉斯定理）

设随机变量 $\eta_n \sim B(n, p), n = 1, 2, \cdots$，则对任意实数 x，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

主要内容总结


大数定律及中心极限定理
切比雪夫不等式
大数定律
切比雪夫大数定律独立同分布大数定律
伯努利大数定律
辛钦大数定律
中心极限定理
独立同分布中心极限定理
德莫佛-拉普拉斯定理

样本及抽样分布

考试大纲要求：

1、了解总体、个体、简单随机样本、样本统计量的概念，知道常用的统计量和样本矩

2、掌握样本均值、样本方差及样本矩的计算，掌握统计学三大分布、正态总体的常用抽样分布

6-1 样本与统计量

一、随机样本

二、统计量

一、随机样本

总体 ：一般而言,总体是指所研究问题的有关对象的全体所构成的集合,在数理统计中,总体就是一个服从某概率分布的随机变量或随机变量的分布函数.

个体：总体中的每个元素.

总体的容量：总体中个体的数量.

有限总体：容量为有限的总体.

无限总体：容量为无限的总体.

$X_1, X_2, \quad , X_n$ 为取自总体X的一组样本，相互独立,且与 X 分布相同.

$X_1, X_2, \quad , X_n$ 称为来自于总体 X 的一个简单随机样本,简称样本

n称为样本容量.

设$(X_1, X_2, \quad, X_n)$为来自总体X的一个样本.

总体X的分布函数为$F(x)$, 概率密度为$f(x)$,

(1)样本$(X_1, X_2, \quad, X_n)$的联合分布函数为

$$F(x_1, x_2, \quad, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i);$$

(2)样本$(X_1, X_2, \quad, X_n)$的概率密度为

$$f(x_1, x_2, \quad, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i);$$

(3)若总体X的分布律为$P\{X = x_i\} = p(x_i)(i = 1, 2, \quad)$

则样本$(X_1, X_2, \quad, X_n)$的分布律为$\prod_{i=1}^{n} p(x_i)$.

例1 设总体 X 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的指数分布, $(X_1, X_2, \ \ , X_n)$ 是来自总体的样本, 求样本$(X_1, X_2, \ \ , X_n)$ 的概率密度.

解：总体X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

因为$X_1, X_2, \ \ , X_n$ 相互独立, 且与X 有相同的分布,

所以 $(X_1, X_2, \ \ , X_n)$的概率密度为

$$f_n(x_1, x_2, \ \ , x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} & x_i>0\\ 0, & x_i\le 0\end{cases}$$

二、统计量

1.定义：设 $X_1, X_2, \ \ , X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $g(X_1, X_2, \ \ , X_n)$

是$X_1, X_2, \ \ , X_n$ 的函数, 若g中不含未知参数, 则称

$g=g(X_1, X_2, \ \ , X_n)$ 是统计量

.统计量的分布称为抽样分布.

如果$(x_1, x_2, \ \ , x_n)$是$(X_1, X_2, \ \ , X_n)$的观测值,

则称 $g(x_1, x_2, \ \ , x_n)$ 是 $g(X_1, X_2, \ \ , X_n)$的观测值.

例：设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ已知，σ^2未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的样本，则下列样本函数中不是统计量的是________

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　B. $\max_{1\le i\le n}\{X_i\}$

C. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

2.常用统计量-----样本矩

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是这一样本的观测值.

(1)样本平均值　$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;$

其观测值　$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$

(2)样本方差　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2\right).$

其观测值

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right).$$

(3)样本标准差

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2};$$

其观测值

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

(4) 样本 k 阶(原点)矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,\ k = 1, 2, \cdots;$

其观测值 $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k,\ k = 1, 2, \cdots.$

(5)样本 k 阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k,\ k = 2, 3, \cdots;$

其观测值 $b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k,\ k = 2, 3, \cdots.$

例：设总体X的均值$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，且$X_1, X_2, \quad X_n$为取自这个总体的样本，则对样本均值$\overline{X}$有$E(\overline{X})=$______

$D(\overline{X})=$______对于样本方差S^2有$E(S^2)=$______

解：$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=E(\frac{1}{n}n\mu)=\mu$

$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$

$E(S^2)=\sigma^2$

6-2 抽样分布

一、χ^2分布

二、t 分布

三、F 分布

四、正态总体的样本均值与样本方差的分布

一、χ^2分布（卡方分布）

定义: 设总体X服从标准正态分布$N(0,1)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$

是其样本.样本的平方和称为χ^2统计量, 记为$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$

它的分布律称为自由度为n 的χ^2 分布, 记为

$$\chi^2 \sim \chi^2(n)$$

其中自由度n是指式子$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$右端包含的

独立变量的个数.

例1： 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从正态分布N(0,2),

则 $\dfrac{X^2+Y^2}{2} \sim$ ________

$A.N(0,4)$ $B.N(0,2)$ $C.\chi^2(2)$ $D.\chi^2(4)$

解：$X \sim N(0,2) \Rightarrow \dfrac{X-0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$Y \sim N(0,2) \Rightarrow \dfrac{Y-0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

χ^2分布的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

χ^2分布的数学期望和方差

若$\chi^2\sim\chi^2(n)$，则$E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$.

χ^2分布的可加性

设$\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$, $\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$, 并且χ_1^2, χ_2^2相互独立, 则

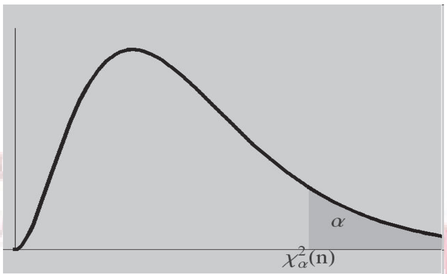
$$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2).$$

(此性质可以推广到多个随机变量的情形)

χ^2分布的分位点

对于给定的正数α, $0<\alpha<1$，称满足条件$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上侧α 分位点.



例2：设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,4)$的样本，记$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$，

若X服从χ^2分布，则$a=$______ $b=$__________自由度为_______

解：X_1,X_2,X_3,X_4独立且同服从$N(0,4)$

则(X_1-2X_2)服从$N(0,20)$，而$(3X_3-4X_4)$服从$N(0,100)$

$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$, $\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\sim N(0,1)$且相互独立

所以$\chi^2=\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}$服从自由度为2的$\chi^2$分布

$\Rightarrow a=\frac{1}{20}, b=\frac{1}{100}$

二、t 分布

1.定义：设 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(n)$, 且 X, Y 独立, 则称随机变量

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $t\sim t(n)$.

t 分布的概率密度函数为

$$h(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<t<+\infty$$

例 1）：已知 X, Y 相互独立，且 $X\sim N(2,4)$, $Y\sim\chi^2(n)$,

则 $T=\dfrac{\frac{X-2}{2}}{\sqrt{Y/n}}\sim$ ________

提示：$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

例 2）：已知 X_1, X_2 相互独立，且 $X \sim N(0,9), Y \sim \chi^2(9)$，

则 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y}} \sim$ ________

解：$\dfrac{X-0}{3} \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(9)$

$$\frac{\dfrac{X-0}{3}}{\sqrt{Y/9}} = \frac{X}{\sqrt{Y}} \sim t(9)$$

t分布的概率密度曲线如图

显然图形是关于

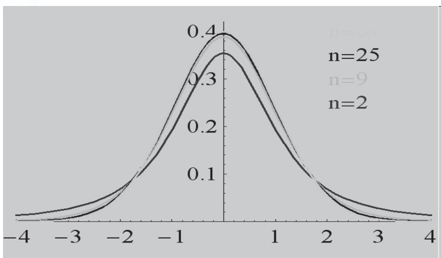
$t=0$对称的.

当n充分大时, 其图形类似于标

准正态分布概率密度的图形.

n越大,曲线的“峰”越陡峭,

n较小时曲线变平坦.



因为$\lim\limits_{n\to\infty} h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, 所以当$n$足够大时$t$分布近似于$N(0,1)$分布,

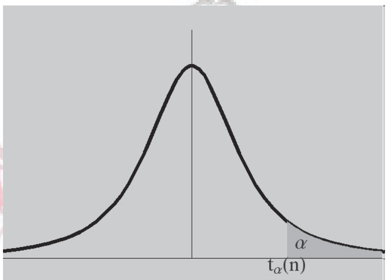
但对于较小的n, t分布与$N(0,1)$分布相差很大.

2. t分布的性质：

设 $T \sim t(n)$ ，则当 $n>2$时有 $E(T)=0, D(T)=\frac{n}{n-2}$

3. t分布的分位点$t_\alpha(n)$

对于给定的α，$0<\alpha<1$ 满足条件$P\{t>t_\alpha(n)\}=\alpha$ 的 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上侧α 分位点.



由分布的对称性知

$$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n).$$

当$n>45$时，$t_\alpha(n)\approx z_\alpha$.

三、F分布

1.定义：设$U\sim\chi^2(n_1), V\sim\chi^2(n_2)$, 且$U$, V独立, 则称随机变量

$$F=\frac{U\ n_1}{}$$

服从自由度为(n_1,n_2) 的 F分布, 记为 $F\sim F(n_1,n_2)$.
其中n_1为第一自由度, n_2为第二自由度

F分布的概率密度函数为

$$\phi(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma((n_1+n_2)/2)(n_1/n_2)^{n_1/2}y^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)[1+(n_1y/n_2)]^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

2. F分布的性质：　$F \sim F(n_1, n_2)$. 　则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$.

例：设随机变量 $X \sim F(n, n)$. 　则 $P(X < 1) =$__________.

解：若 $X \sim F(n, n)$. 　则 $\frac{1}{X} \sim F(n, n) \Rightarrow P(X < 1) = P(\frac{1}{X} < 1)$

所以 $P(X < 1) = 1 - P(X > 1) = 1 - P(\frac{1}{X} < 1) = 1 - P(X < 1)$

$\Rightarrow P(X < 1) = 0.5$

四、正态总体的样本均值与样本方差的分布

定理1　设总体 $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n}$ 是X的一个样本，则

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

$\boxed{\text{标准化样本均值}}$ $\Rightarrow$ 目的：估计总体数学期望 μ.

推论1 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是X的一个样本,则样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

推论2 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 而$X_1, X_2, \cdots, X_n$是它的一个样本,

则样本的任一确定的线性组合也服从正态分布

$$\sum_{i=1}^{n} k_i X_i \sim N\left(\mu\sum_{i=1}^{n} k_i, \sigma^2\sum_{i=1}^{n} k_i^2\right)$$

其中常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$不全为零.

定理2 设总体X ~ $N(\mu, \sigma^2)$，而$X_1, X_2, \cdots, X_n$是它的一个样本，$\overline{X}$与S^2分别为样本均值与样本方差，则有

(1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

$\Downarrow$

目的：估计σ^2.

(2) $\overline{X}$与S^2独立.

定理3 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差，则有

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

分析：$U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，$V = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

且两者独立，由 t 分布的定义知

$$T = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n-1}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

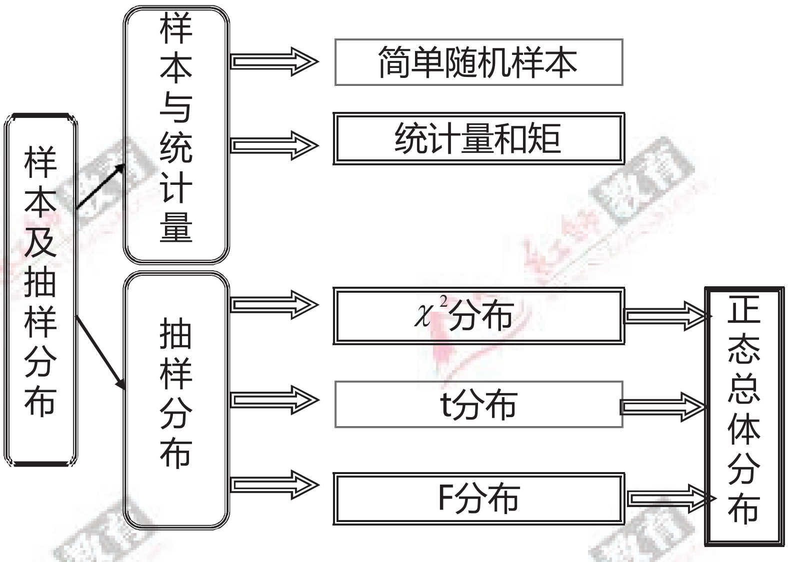
定理4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是具有相同方差的两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，且这两个样本相互独立，

$$\overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2$$

则有 $$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

主要内容总结



参数估计

考试大纲要求：

1、掌握参数的矩估计、极大似然估计法，理解估计量的评选标准

2、了解置信区间的概念，会求单个正态总体的置信区间

7-1参数的点估计

一、矩估计法

二、极大似然估计法

三、估计量的评选标准

一、矩估计法

理论依据：样本的k阶原点矩依概率收敛于总体的k阶原点矩

样本k阶原点矩为 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

总体k阶原点矩为 $\mu_k=E(X^k)$

矩估计方法： $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k=\mu_k=E(X^k)$

$k=1,2,$ 待估参数的个数

例1 设总体X服从泊松分布,$X\sim\pi(\lambda)$,但参数λ未知,$(X_1, X_2,\dots,X_n)$

是来自总体X的样本,求未知参数λ的矩估计量.

解： X的分布律 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0,1,2,$

总体的一阶矩 $E(X)=\lambda$

$A_1=\mu_1$

即$A_1=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\mu_1=E(X)=\lambda$

用样本矩代替总体矩得λ的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

例2 设总体 X 服从参数为 n, p 的二项分布，其中 p $(p>0)$ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，求 p 的矩估计量．

解：总体的一阶矩 $E(X)=np$

$$A_1=\mu_1 \quad 即 A_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\mu_1=E(X)=np$$

根据矩估计法得 $p=\dfrac{\overline{X}}{n}$,

因此得到 p 的矩估计量为 $\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

特别地n=1时X~B(1, p),即X服从(0,1)分布,则有

$$\hat{p}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

例3设总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 都存在,且有 $\sigma^2>0$, 但 μ 和 σ^2 均为未知,

又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本, 求 μ 和 σ 的矩估计量.

解: 令 $\begin{cases} A_1=\mu_1 \\ A_2=\mu_2 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} A_1=\overline{X}=\mu_1=E(X)=\mu \\ A_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\sigma^2+\mu^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu=\overline{X},$$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

因此矩估计量分别为 $\hat{\mu}=\overline{X}$, $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

总体均值与方差的矩估计量的表达式不因不同的总体分布而异.

二、极大似然估计法

1、似然函数

若总体X为连续型，其概率密度为 $f(x;\theta), \theta \in \Theta$

则似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\quad x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

若总体X为离散型，分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta)$

则似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\quad x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)$$

$L(\theta)$看作参数θ的函数.

最大似然估计法就是用使 $L(\theta)$达到最大值的 $\hat{\theta}$ 去估计 θ，即

$$L(x_1,x_2,\quad x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta} L(x_1,x_2,\quad x_n;\theta)$$

称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\quad ,x_n)$ 为θ的最大似然估计值. 称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\quad ,X_n)$为$\theta$的最大似然估计量.

2、**求最大似然估计的步骤:**

1)写出似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\quad,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

2)求似然函数的最大值点.

对似然函数取对数得对数似然函数

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)$$

似然方程 $\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=0$

似然方程的解即为 θ的最大似然估计值

$$\hat{\theta}(x_1,x_2,\quad x_n)$$

θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\quad X_n)$

注：若有多个未知参数, 则可解方程组

$$\frac{\partial[\ln L(\theta)]}{\partial\theta_i}=0$$

例1 设$X_1,X_2,\dots X_n$是取自总体$X\sim B(1,\ p)$的一个样本，求参数p的极大似然估计.

解 X的分布律为 $P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1$

似然函数 $L(p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

其中$x_1,x_2,\dots,x_n$在集合$\{0,1\}$中取值.

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p),$$

令 $\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}=0$

解得p的最大似然估计值 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\bar{x}.$

p的最大似然估计量为

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\bar{X}.$$

这一估计量与矩估计量是相同的.

例2 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2为未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自X的一个样本值，求μ和σ^2的最大似然估计量.

解 X的概率密度为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

X的似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2)=0\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right]=0,\\ -\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0,\end{cases}$$

由 $\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right]=0$ 解得

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x},$$

由 $-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$ 解得

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,$$

故 μ 和 σ^2 的最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu}=\bar{X},$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

它们与相应的矩估计量相同.

练习：设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的一个样本，$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

其中 $\theta>0$为未知参数　求θ的极大似然估计量.

解：似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}, & 0<x_i<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

θ的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

三、估计量的评选标准

1、无偏性 $X_1, X_2, \quad, X_n$为来自总体 X的一组样本，

设$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \quad, X_n)$是参数$\theta$的估计量 若$E(\hat{\theta}) = \theta$，

则称$\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计量.

例1 设总体X的均值μ及方差σ^2都存在，且 $\sigma^2>0$，X_1，$X_2,\ldots,X_n$

是来自总体X的样本，判断下列估计量是否为无偏估计量？

1) $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(\hat{\mu}) = E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$2)\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(S^2) = E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2)$$

$$= \frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)]$$

$$= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)) = \sigma^2$$

说明：无论总体服从什么分布，样本均值和样本方差都分别是总体均值和总体方差的无偏估计.

二、有效性

比较参数θ的两个无偏估计量$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$，如果在样本容量n相同的情况下，

$\hat{\theta}_1$的观察值较$\hat{\theta}_2$更密集在真值θ的附近，则认为$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$理想.

即方差 $D(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 \qquad (E(\hat{\theta}) = \theta)$

$= E(\hat{\theta} - \theta)^2$ **越小越好.**

定义 设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

均是θ的无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$，

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

例 设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0$ 存 在 ，(X_1,X_2)是

来自总体X的样本,试讨论未知参数μ 的三个估计量无偏性与有效性.

$$\hat{\mu}_1=\frac{3}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2,\quad \hat{\mu}_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2,\quad \hat{\mu}_3=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2.$$

解 $E(\hat{\mu}_1)=E(\hat{\mu}_2)=E(\hat{\mu}_3)=\mu$

μ 的三个估计量均为无偏估计量

$$D(\hat{\mu}_1)=(\frac{9}{16}+\frac{1}{16})\sigma^2=\frac{5}{8}\sigma^2,$$

$$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{2}\sigma^2,\quad D(\hat{\mu}_3)=\frac{5}{9}\sigma^2,$$

由 于 $D(\hat{\mu}_2)<D(\hat{\mu}_3)<D(\hat{\mu}_1)$ $\therefore$ $\hat{\mu}_2$最 有 效.

三、相合性

定义 若$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\ \ ,X_n)$为参数$\theta$的估计量,若对于任意$\theta$, 当$n\to\infty$时,$\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\ \ ,X_n)$ 依概率收敛于θ, 则称$\hat{\theta}_n$为θ 的 **相合估计量(或一致估计量).**

矩估计一般都具有相合性. 比如:

- **样本均值是总体均值的相合估计;**
- **样本标准差是总体标准差的相合估计;**

一般地有：

(1)样本k阶矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^k$ 是总体k阶矩$E(X^k)$的相合估计；

样本矩的函数也是总体矩的连续函数的相合估计量.

(2)未知参数的最大似然估计量在一定条件下也是相合估计量

7-2 区间估计

一、区间估计的概念

二、正态总体的均值和方差的置信区间

三、 单侧置信区间，（0-1）分布参数的区间估计

一、区间估计的概念

总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ，$\theta\in\Theta$（Θ 是 θ 可能取值的范围），$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，若对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$，存在两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

满足 $P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha$

则称区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为置信区间的置信下限和置信上限.

置信度又称置信水平.

二、正态总体的均值和方差的置信区间

设给定置信度为 $1-\alpha$，并设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差.

(1) $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

(3) $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2已知 μ的一个置信度为 $1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$ **简记为** $$\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

置信区间的长度为 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$.

(2) σ^2为未知，μ的置信度为 $1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

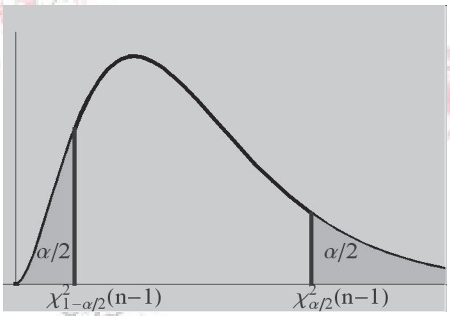
简记为 $$\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

2. 方差 σ^2 的置信区间

根据实际需要，只介绍 μ 未知的情况

方差 σ^2的置信度为 $1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$



三、 单侧置信区间，（0-1）分布参数的区间估计

1.单侧置信区间的概念

1)定义 对于给定的a $(0<a<1)$, 由X的一个样本$X_1, X_2 \quad, X_n$

确定的统计量$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2 \quad, X_n)$ 满足$P\{\theta > \underline{\theta}\} = 1-\alpha$

称区间$(\underline{\theta}, +\infty)$ 是θ的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间.

称$\underline{\theta}$是θ 的置信水平为$1-\alpha$ 的单侧置信下限.

同理可得到单侧置信上限的概念.

2)单侧置信区间的构造

若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 均值μ及方差σ^2均未知 $X_1, X_2 \quad, X_n$

是来自X的一个样本, 根据 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

得到 μ 的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(X - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \infty\right)$$

μ的置信水平为$1-\alpha$ 的单侧置信下限

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$$

由 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

得到 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$$

2.(0-1）分布参数的区间估计

设总体 X 服从(0—1)分布， 其分布律为

$$f(x;p) = P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

其中 p 为未知参数，

求 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

考虑统计量 $W=\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}=\dfrac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

由李雅普诺夫定理， 当n充分大时

$$W=\frac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$$

由 $P\left\{\dfrac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}<C\right\}=1-\alpha$

有 $P\left\{\dfrac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

上式等价于

$$P\left\{(n+z_{\alpha/2}^2)p^2-(2n\bar{X}+z_{\alpha/2}^2)p+n\bar{X}^2<0\right\}=1-\alpha$$

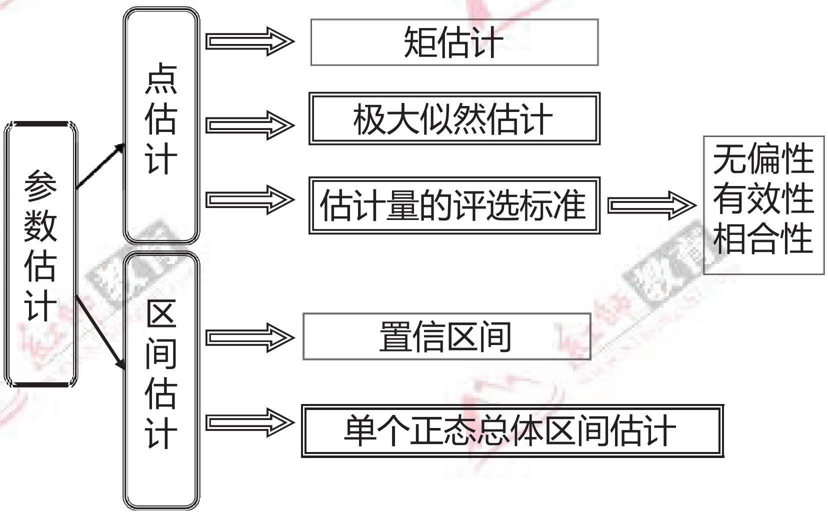
若记 $a=n+z^2_{\alpha/2}$, $b=-(2n\bar{x}+z^2_{\alpha/2})$, $c=n\bar{x}^2$,

得到 $P\left\{\dfrac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)<p<\dfrac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\right\}=1-\alpha$

由此得p的置信水平为$1-\alpha$置信区间

$$\left(\frac{1}{2a}\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)\right)$$

主要内容总结


参数估计
点估计
区间估计
矩估计
极大似然估计
估计量的评选标准
无偏性
有效性
相合性
置信区间
单个正态总体区间估计

假设检验

考试大纲要求：

1、理解假设检验的基本思想，了解检验可能产生的两种错误

2、掌握单个正态总体均值和方差的假设检验，两个正态总体均值和方差的假设检验，假设检验与区间估计的关系等基本理论和基本方法

3、了解分布拟合检验

7-1假设检验的基本概念

一、假设假设的基本思想

二、检验问题

三、显著性检验

一、假设假设的基本思想

例： 质量检测问题. 根据长期的经验和资料的分析，某砖瓦厂所生产的砖的“抗断强度”服从正态分布，方差σ^2=1.21. 今从该厂生产的一批砖中，随机抽取6块，测得抗断强度（kg/cm²）如下： 32.56，29.66，31.64，30.00，31.87，31.03

问这一批砖的平均抗断强度可否认为是32.50kg/cm²?

命题“砖的平均抗断强度μ =32.5 ”正确与否仅涉及如下两个参数集合：

$$H_0: \mu = 32.5 \quad H_1: \mu \neq 32.5$$

这两个非空参数集合都称作统计假设，简称假设.

我们的任务是利用样本去判断假设

“$\mu \in H_0$”是否成立. 这里的“判断”在统计学中称为检验或检验法则.

如何利用样本值对一个具体的假设进行检验?

基本思想小概率原理:

“一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的”.

问题：根据样本值判断 $\mu=32.5$ 还是 $\mu\neq32.5$.

提出两个对立假设

$$H_0:\mu=\mu_0=32.5 \quad 和 \quad H_1:\mu\neq\mu_0=32.5$$

再利用已知样本作出判断是接受假设H_0(拒绝假设H_1), 还是拒绝假设H_0(接受假设H_1).

如果作出的判断是接受H_0, 则砖的平均抗断强度可认为是32.5

否则，认为不是32.5.

由于要检验的假设涉及总体均值，故可借助于样本均值来判断.

因为$\bar{X}$是μ的无偏估计量,所以若H_0为真,则$|\bar{x}-\mu_0|$不应太大,即偏大的可能性小

衡量$|\bar{x}-\mu_0|$的大小可归结为衡量 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的大小,

于是可以选定一个适当的正数k,使得

$\dfrac{x-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq k$时，拒绝假设$H_0$,

反之, 当$\dfrac{x-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<k$时，接受假设$H_0$.

因为当H_0为真时$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,

由标准正态分布分位点的定义得

$P\{|U|\geq z_{\alpha/2}\}=\alpha$

若取 $k=z_{\alpha/2}$,　　则$P\{|U|\geq k\}=\alpha$,　当 α 较 小时

若 $\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_{\alpha/2}$,则拒绝$H_0$, $\dfrac{x-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}$时, 接受$H_0$.

以上所采取的检验法是符合小概率原理的.

由于通常α总是取得很小, 一般取 $\alpha=0.01$, $\alpha=0.05$,

因而当H_0为真, 即$\mu=\mu_0$时, $\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\alpha/2}\right\}$是一个小概率事件

在假设检验中, 数 α 称为显著性水平.

一、检验问题

1. 原假设：在假设检验中，常把一个被检验的假设称为原假设，用H_0表示通常将不应轻易加以否定的假设作为原假设

2. 备择假设：当H_0被拒绝时而接收的假设称为备择假设，用H_1表示

- 由样本对原假设进行判断总是通过一个统计量完成的，该统计量称为检验统计量.

- 使原假设被接受的样本观测值所在区域称为接受域.
- 使原假设被拒绝的样本观测值所在区域称为拒绝域.

在上例中,采用检验统计量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

拒绝域

$$W = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) : \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \ge k = z_{\alpha/2} \right\}$$

k 称为检验统计量的临界值.

3. 两类错误、显著性水平

由于样本具有随机性，检验可能犯以下两类错误：

➢其一是H_0为真但样本观测值落在拒绝域中，从而拒绝原假设H_0，这种错误称为第一类错误或弃真错误，其发生的概率称为犯第一类错误的概率，通常记为α.

➢ α称为显著性水平

➢ 其二是H_0不真（即H_1为真），但样本观测值落在接受域中，从而接受原假设H_0，这种错误称为第二类错误或取伪错误，其发生的概率称为犯第二类错误的概率，通常记为β.

例：在假设检验时，对于 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$,则称________为犯第一类错误。

$A.H_1$真，接受H_1　　　　$B.H_1$不真，接受H_1

$C.H_1$真，拒绝H_1　　　　$D.H_1$不真，拒绝H_1

分析：犯第一类错误，即弃真错误，即H_0真，但拒绝H_0

或者H_1不真，接受H_1

例：对于正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 α=0.05下接受 $H_0: \mu=\mu_0$，那么在显著性水平 α =0.01下______

$A.$必接受H_0　　$B.$必拒绝H_0，接受H_1

$C.$可能接受也可能拒绝H_0　　$D.$拒绝H_0，可能接受也可能拒绝H_1

分析：$\alpha=P$(拒绝$H_0|H_0$为真)，α越小拒绝H_0的概率越小则接受H_0的概率越大

所以$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时必接受H_0

练习：对于正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 α=0.05下拒绝了原假设 $H_0: \mu=\mu_0$，那么在显著性水平 α =0.1时，下列结论正确的是______

$A.$必接受H_0　　$B.$必拒绝H_0

$C.$可能接受也可能拒绝H_0　　$D.$以上结论均不正确

分析：$\alpha=P$(拒绝$H_0|H_0$为真)，α越大拒绝H_0的概率越大则接受H_0的概率越大

所以$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.1$时必拒绝H_0

4. 单边、双边检验

- 当备择假设H_1在原假设H_0一侧时的检验称为单边检验；
- 当备择假设H_1分散在原假设H_0两侧时的检验称为双边检验.

8-2正态总体均值的假设检验

一、单个正态总体均值的假设检验

二、两个正态总体均值的假设检验

一、单个正态总体均值的假设检验

正态总体方差已知时均值的检验法

原假设	备择假设	检验统计量及其分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\lvert z\rvert\geq z_{\alpha/2}$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$z\geq z_\alpha$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$z\leq -z_\alpha$

例2　一种元件，要求其使用寿命不得低于1000 h. 现从一批这种元件中随机抽取25件，测得其寿命平均值为950 h. 已知该种元件寿命服从标准差σ=100h的正态分布$N(\mu,\sigma^2)$. 试在显著性水平α=0.05下确定这批元件是否合格？已知$z_{0.05}=1.645$

解：依题意提出假设　$H_0:\mu\geq\mu_0=1000$，$H_1:\mu<1000$

这是一个左边检验问题，采用统计量

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

此检验问题的拒绝域为

$$z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq -z_\alpha$$

当α=0.05，n=25时，z_α=1.645，由观测值得

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{950-1000}{100/\sqrt{25}}=-2.5$$

可见 $z=-2.5<-1.645$，所以拒绝H_0，即认为这批元件不合格.

正态总体方差未知时均值的检验法

原假设	备择假设	检验统计量及其分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$t\geq t_\alpha(n-1)$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$t\leq -t_\alpha(n-1)$

例2　某厂生产乐器用合金弦线，其抗拉强度服从均值为10560(kg/cm²)的正态分布．现从一批产品中抽取10根，测得其抗拉强度为(kg/cm²)

10 512 10 623 10 668 10 554 10 776　10 707 10 557 10 581 10 666 10 670

问这批产品的抗拉强度有无显著提高？

原假设为______备择假设为_______选用统计量为______拒绝域为_____

$$H_0: \mu \le \mu_0 = 10560,\quad H_1: \mu > 10560$$

由于σ²未知，故选用统计量： $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

检验问题的拒绝域为： $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)$

二、两个正态总体均值的假设检验

两个正态总体方差均已知时均值的检验法

原假设	备择假设	检验统计量及其分布	拒绝域
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \ne \mu_2$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
$\mu_1 \le \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$z \ge z_\alpha$
$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$z \le -z_\alpha$

两个正态总体方差相等且均未知时均值的检验法

原假设	备择假设	检验统计量及其分布	拒绝域
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$	$\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(m+n-2)$
$\mu_1\leq\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$		$t\geq t_{\alpha}(m+n-2)$
$\mu_1\geq\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$		$t\leq -t_{\alpha}(m+n-2)$

8-3正态总体方差的假设检验

一、单个总体方差的假设检验

二、两个总体方差的假设检验

一、单个总体方差的假设检验

正态总体均值已知时方差的检验法

原假设	备择假设	检验统计量及其分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\alpha/2}(n)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n)$

正态总体均值未知时方差的检验法

原假设	备择假设	检验统计量及其分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

二、两个总体方差的假设检验

两个正态总体均值均已知时方差的检验法

原假设	备择假设	检验统计量及其分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$F=\dfrac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(m,n)$	或$F\geq F_{\alpha/2}(m,n)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$F\geq F_{\alpha}(m,n)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$F\leq F_{1-\alpha}(m,n)$

两个正态总体均值均未知时方差的检验法

原假设	备择假设	检验统计量及其分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(m-1,n-1)$	$F\leq F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或 $F\geq F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$F\geq F_{\alpha}(m-1,n-1)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$F\leq F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$

8-4分布拟合检验

分布拟合检验：设总体X的分布函数$F(x)$未知，$X_1, X_2,\ X_n$为取自总体X的样本，给定显著性水平α，要求检验假设

$H_0: F(x)=F_0(x)$，$H_1: F(x) \neq F_0(x)$

其中$F_0(x)$为已知分布函数

皮尔逊定理：设$F_0(x)$是不含未知参数的任意分布函数，如果H_0为真，则当$n \to \infty$时

$\chi^2=\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$的极限分布为$\chi^2(k-1)$

主要内容总结