Operador Unitario, Autoadjunto y Normal

Roberto Alvarado

May 19, 2023

Universidad San Francisco de Quito

Autoadjunto

Sea un operador linear acotado $T : H \longrightarrow H$ se le llama autoadjunto o Hermitiano si

$$T = T^*$$

Unitario

Sea un operador linear acotado $T : H \longrightarrow H$ se le llama unitario si T es biyectivo y

$$T^* = T^{-1}$$

Normal

Sea un operador linear acotado $T : H \longrightarrow H$ se le llama normal si

$$T^* T = TT^*$$

Para el operador adjunto

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{*}y\rangle$$

Cuando se trata de un operador autoadjunto

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

Auto adjunto o Unitario implica Normal

Autoadjunto

$$TT^* = T^*T$$

$$TT = TT$$

Unitario

$$TT^* = T^*T$$

$$TT^{-1} = T^{-1}T$$

$$I = I$$

Normal no implica Autoadjunto o Unitario

Sea $T = 2iI$, el adjunto es $T^* = -2iT$, y el inverso es $T^{-1} = -\frac{1}{2}iT$ cumple que

$$TT^* = T^*T$$

Pero

$$T \neq T^*$$

Y a la vez

$$T \neq T^{-1}$$

Producto interior definido

$$\langle x, y \rangle = \xi_0 \overline{\delta}_0 + \cdots + \xi_n \overline{\delta}_n$$

en notación matricial

$$\langle x, y \rangle = x^T \overline{y}$$

Sea $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un operador linear acotado. Teniendo una base para $\mathbb{C}^n$, tenemos que podemos representar T y T^* como matrices cuadradas de dimensión n, respectivamente A y B.

Adjunto Hermitiano

$$\langle Tx, y\rangle = (Ax)^T\overline{y} = x^T A^T \overline{y}$$

$$\langle x, T^* y\rangle = x^T \overline{By}$$

$$\langle x, T^* y\rangle = x^T \overline{B}\,\overline{y}$$

Autoadjunto

$$x^T A^T \overline{y} = x^T \overline{B} \overline{y}$$

Entonces para que sea autoadjunto

$$B = \overline{A^T}$$

Recuerdo de matrices

Hermitiana si $\overline{A}^T = A$
Hermitiana asimétrica si $\overline{A}^T = A$
Unitaria si $\overline{A}^T = A^{-1}$
Normal si $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$

Simétrica si $A^T = A$
Ortogonal si $A^T = A^{-1}$

Operadores y Matrices en $\mathbb{C}^n$

Matriz Hermitiana si T es auto-adjunta

Matriz Unitaria si T es unitario

Matriz Normal si es normal

Operadores y Matrices en $\mathbb{R}^n$

Matriz Simétrica si T es auto adjunta
Matriz Ortogonal si T es unitario

Auto-adjunto

Sea $T : H \longrightarrow H$ un operador linear acotado

- Si T es autoadjunto entonces $\langle Tx, x\rangle$ es real $\forall x \in H$

$$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle$$

- Si H es complejo, y $\langle Tx, x \rangle$ es real $\forall x \in H$ entonces el operador es autoadjunto

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^* x \rangle} = \langle T^* x, x \rangle$$

$$T - T^* = 0$$

Autoadjunto de un producto

Sea S,T dos operadores lineales autoadjuntos, ST es autoadjunto si y solo si

$$ST = TS$$

$$ST = (ST)^* = T^* S^* = TS$$

$$(ST)^* = T^* S^* = TS = ST$$

Secuencia de operadores autoadjuntos

Sea (T_n) una secuencia de de operadores lineales autoadjuntos en H. Supongamos que converge a T

$$T_n \longrightarrow T \qquad \|T_n - T\| \longleftarrow 0$$

Entonces T es un operador linear acotado autoadjunto en H.

Demostración

Tenemos que demostrar que

$$\| T - T^* \| = 0$$

Sabemos que

$$\| T_n^* - T^* \| = \| T_n - T \|$$

Demostración

$$\| T - T^* \| \leqq \| T - T_n \| + \| T_n - T_n^* \| + \| T_n^* - T \|$$

$$= 2 \| T_n - T \| \longrightarrow 0$$

$$\| T - T^* \| = 0$$

$$T = T^*$$

Operador Unitario

Sea U,V un operador unitario sobre H.

- U es isométrico

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^* Ux \rangle = \langle x, Ix \rangle = \|x\|^2$$

Operador Unitario

- $\|U\| = 1$ siendo $H \neq \{0\}$
- U^{-1} es unitario

$$(U^{-1})^* = U^{**} = U = (U^{-1})^{-1}$$

Operador Unitario

- UV es unitario UV es biyectivo

$$(UV)^* = V^* U^* = V^{-1} U^{-1} = (UV)^{-1}$$

Operador Unitario

- U es normal

$$(UV)^* = V^* U^* = V^{-1} U^{-1} = (UV)^{-1}$$

Operador Unitario

- Un operador linear acotado T en un espacio de Hilbert es unitario si y solo si T es isométrico y sobreyectiva

Demostración

$$\langle TT^* x, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \langle Ix, x \rangle$$

Entonces

$$\langle (T^* T - I)x, x \rangle = 0$$

Entonces

$$TT^* = I$$

...

$$T^* = T^{-1}$$