I – MATRIZES

1. **Definição:** Matriz m x n é uma tabela de m . n números reais dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais). Exemplos:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2 x 3;
2. $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2 x2;
3. $C = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & -6 \end{Vmatrix}$ é uma matriz 4 x 3.

Como podemos notar nos exemplos 1, 2 e 3 respectivamente, uma matriz pode ser representada por colchetes, parênteses ou duas barras verticais.

2. Representação de uma matriz:

As matrizes costumam ser representadas por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas de dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna ocupadas pelo elemento.

Exemplo: Uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$, onde i e j representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa, $\begin{cases} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{cases}$.

Por exemplo, na matriz anterior, a_{23} é o elemento da segunda linha com o da terceira coluna.

Exemplo 1: Seja a matriz A=$\lfloor a_{ij} \rfloor_{2\,x\,2}$, onde $a_{ij} = 2i + j$:

Genericamente, temos: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\,x\,2}$. Utilizando a regra de formação dos elementos dessa matriz, temos:

$a_{ij} = 2i + j$

$a_{11} = 2(1) + 1 = 3$
$a_{21} = 2(2) + 1 = 5$
$a_{12} = 2(1) + 2 = 4$
$a_{22} = 2(2) + 2 = 6$

Assim, A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Matrizes especiais:

3.1 Matriz linha: É toda matriz do tipo 1 x n, isto é, com uma única linha.

Ex: $A = (4 \quad 7 \quad -3 \quad 1)_{1x4}$.

3.2 Matriz coluna: É toda matriz do tipo n x 1, isto é, com uma única coluna.

Ex: $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3x1}$.

3.3 Matriz quadrada: É toda matriz do tipo n x n, isto é, com o mesmo número de linhas e colunas. Neste caso, dizemos que a matriz é de ordem n.

Ex: $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$

Matriz de ordem 2

$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \pi & \sqrt{3} \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$

Matriz de ordem 3

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

Diagonal principal de uma matriz quadrada é o conjunto de elementos dessa matriz, tais que i = j.

Diagonal secundária de uma matriz quadrada é o conjunto de elementos dessa matriz, tais que i + j = n + 1..

Exemplo:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Descrição da matriz:

- O subscrito 3 indica a ordem da matriz;
- A diagonal principal é a diagonal formada pelos elementos –1, 0 e –6;
- A diagonal secundária é a diagonal formada pelos elementos 5, 0 e 5;
- a_{11}= -1 é elemento da diagonal principal, pois i = j = 1;
- a_{31}= 5 é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 = 3 + 1.

3.4 Matriz nula: É toda matriz em que todos os elementos são nulos.

Notação: $O_{m\,x\,n}$

Exemplo: $O_{2\,x\,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.5 Matriz diagonal: É toda matriz quadrada onde só os elementos da diagonal principal são diferentes de zero.

Exemplo: $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad B_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

3.6 Matriz identidade: É toda matriz quadrada onde todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos e os da diagonal principal são iguais a 1.

Notação: I_n onde n indica a ordem da matriz identidade.

Exemplo: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ou : $I_n = [a_{ij}],\ a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se}\, i = j \\ 0, \text{se}\, i \neq j \end{cases}$

3.7 Matriz transposta: Chamamos de matriz transposta de uma matriz A a matriz que é obtida a partir de A, trocando-se ordenadamente suas linhas por colunas ou suas colunas por linhas.

Notação: A^t.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Desse modo, se a matriz A é do tipo m x n, A^t é do tipo n x m. Note que a primeira linha de A corresponde à primeira coluna de A^t e a segunda linha de A corresponde à segunda coluna de A^t.

3.8 <u>Matriz simétrica:</u> Uma matriz quadrada de ordem n é simétrica quando A= A^t.

<u>OBS</u>: Se A = - A^t, dizemos que a matriz A é anti-simétrica.

<u>Exemplo:</u> Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3x3}$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3x3}$

3.9 <u>Matriz oposta:</u> Chamamos de matriz oposta de uma matriz A a matriz que é obtida a partir de A, trocando-se o sinal de todas os seus elementos.

<u>Notação:</u> - A

<u>Exemplo:</u> Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ então $-A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

3.10 <u>Igualdade de matrizes:</u> Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são idênticos.
<u>Notação:</u> A = B.

<u>Exemplo:</u> Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e A = B, então c = 0 e b = 3

Simbolicamente: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e todo $1 \le i \le n$.

<u>Resolver a primeira lista de exercícios</u>

1ª LISTA

1-) Escreva a matriz A=$\left(a_{ij}\right)_{2x3}$, onde a_{ij}=2i+3j

2-) Escreva a matriz B=$\left(b_{ij}\right)_{3x3}$, onde $b_{ij}=\frac{i}{j}$.

3-) Escreva a matriz C=$\left(c_{ij}\right)_{4x1}$, onde $c_{ij}=i^2+j$.

4-) Escreva a matriz D=$\left(d_{ij}\right)_{1x3}$, onde $d_{ij}=i-j$.

5-) Escreva a matriz A=$\left(a_{ij}\right)_{4x3}$, onde $a_{ij}=\begin{cases}2, \text{se } i \geq j\\ -1, \text{se } i < j\end{cases}$

6-) Escreva a matriz A=$\left(a_{ij}\right)_{3x3}$, onde $a_{ij}=\begin{cases}i+j, \text{se } i = j\\ 0, \text{se } i \neq j\end{cases}$

7-) Escreva a matriz A=$\left(a_{ij}\right)_{2x3}$, onde $a_{ij}=\begin{cases}2i+j, \text{se } i \geq j\\ i-j, \text{se } i < j\end{cases}$

8-) Chama-se traço de uma matriz quadrada a soma dos elementos da diagonal principal. Determine o traço de cada uma das matrizes A $=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ \sqrt{2} & 3 & -5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

9-) Dada a matriz A= $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$, determinar:

a-) a transposta de A
b-) a oposta de A

10-) Dadas as matrizes A=$\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 3\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}x & 3\\ b & 3\end{pmatrix}$, determinar a, b e x para que A=B^t.

11-) Determinar os valores de a e b, tais que:
$$\begin{pmatrix}2a+1\\ b+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+2\\ a+3\end{pmatrix}$$

12-) Determine x e y na igualdade:
$$\begin{pmatrix}\log_3 x\\ y^2\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 5\end{pmatrix}$$

13-) Seja A=$\left(a_{ij}\right)_{2x3}$, onde a_{ij}=i + j. Determine m, n e p em B=$\begin{pmatrix}m+n & 3 & 4\\ n-1 & m-2p & 5\end{pmatrix}$ a fim de que tenhamos A=B.

14-) Determine a, b, x e y, tais que:
$$\begin{bmatrix}a+b & x+y\\ a-b & 2x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

15-) Determine x e y, tais que:

a-) $\begin{bmatrix}\log_2 x\\ |y|\\ x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 64\end{bmatrix}$.

b-) $\begin{bmatrix}2x+3y & 0\\ 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 1 & 5x+2y\end{bmatrix}$.

RESPOSTAS

1-) A= $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}$

2-) B= $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

3-) C= $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 17 \end{bmatrix}$

4-) D= $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

5-) A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6-) A= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

7-) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

8-) trA = 4 e trB = 4

9-) a-) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ b-) –A= $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

10-) a = 3, b = 2 e x = 1

11-) a = 1 e b = 1

12-) x = 81 e y= ± 3

13-) m = -2 n = 4 e p = -3

14-) a = 2, b = 1, x = 1 e y = 1

15-) a-) x = 8 e y = ± 5

b-) x = $\frac{7}{5}$ e y = $\frac{11}{15}$

4. Adição de Matrizes:

Dadas as matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\,x\,n}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{m\,x\,n}$, chamamos de soma das matrizes **A** e **B** a matriz $C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{m\,x\,n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq i \leq n$.

Notação: **A + B = C**

OBS: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** são do mesmo tipo (m x n).

Propriedades : **A, B** e **C** são matrizes do mesmo tipo (m x n), valem as seguintes propriedades:

1) **Associativa:**

$$\boxed{\mathbf{(A + B) + C = A + (B + C)}}$$

2) **Comutativa**

$$\boxed{\mathbf{A + B = B + A}}$$

3) **Elemento Neutro**

$$\boxed{\mathbf{A + O = O + A = A}}$$

onde **O** é a matriz nula m x n.

4) **Elemento Oposto**

$$\boxed{\mathbf{A + (-A) = (-A) + A = O}}$$

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Subtração de Matrizes:

Dadas as matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\,x\,n}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{m\,x\,n}$, chamamos de diferença entre as matrizes **A** e **B** a soma de **A** com a matriz oposta de **B**

Notação: **A - B = A + (-B)**

OBS: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** são do mesmo tipo (m x n).

Exemplo:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 0-2 \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

6. Multiplicação de um número real por uma matriz:

Dados um número real x e uma matriz **A** do tipo m x n , o produto de x por **A** é uma matriz do tipo m x n, obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por x.

Notação: **B =** x**.A**

OBS.: Cada elemento b_{ij} de **B** é tal que $b_{ij} = x\,a_{ij}$

Propriedades : Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e x e y números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1) **Associativa:**

$$\boxed{x.(y.A) = (x.y).A}$$

2) **Distributiva de um número real em relação a adição de matrizes:**

$$\boxed{x.(A+B) = x.A + x.B}$$

3) **Distributiva de uma matriz em relação a soma de dois números reais:**

$$\boxed{(x + y).A = x.A + y.A}$$

4) **Elemento Neutro:** x.**A = A**, para x = 1, ou seja:

$$\boxed{1.A = A}$$

Exemplo:

1) $3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

7. Multiplicação de matrizes:

O produto de uma matriz por outra **não** pode ser determinado através do produto dos seus respectivos elementos. A multiplicação de matrizes **não** é análoga à multiplicação de números reais.

Assim, o produto das matrizes A=$\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\,x\,p}$ e B=$\lfloor b_{ij} \rfloor_{p\,x\,n}$ é a matriz C=$\lfloor c_{ij} \rfloor_{m\,x\,n}$, onde cada elemento c_{ij} é obtido através da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de **A** pelos elementos da j-ésima coluna de **B**.

OBS: Elementos correspondentes de matrizes do mesmo tipo m x n, são os elementos que ocupam a mesma posição nas duas matrizes. Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Os elementos $a_{13} = 4 \text{ e } b_{13} = 2$ são elementos correspondentes.

Decorrência da definição:

A matriz produto **A.B** existe apenas se o número de colunas da primeira matriz (**A**) é igual ao número de linhas da segunda matriz (**B**).

Assim: $A_{m\,x\,p} \text{ e } B_{p\,x\,n} \Rightarrow (A.B)_{m\,x\,n}$

Note que a matriz produto terá o número de linhas (m) do primeiro fator e o número de colunas (n) do segundo fator.

Exemplos:

1) Se $A_{3\,x\,2} \text{ e } B_{2\,x\,5} \Rightarrow (A.B)_{3\,x\,5}$
2) Se $A_{4\,x\,1} \text{ e } B_{2\,x\,3} \Rightarrow \text{que não existe produto}$
3) $A_{4\,x\,2} \text{ e } B_{2\,x\,1} \Rightarrow (A.B)_{4\,x\,1}$

Propriedades : Verificadas as condições de existência, para a multiplicação de matrizes são válidas as seguintes propriedades:

1) **Associativa:**

$$\boxed{\mathbf{(A.B).C = A.(B.C)}}$$

2) **Distributiva em relação à adição:**

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{a) } \mathbf{A.(B+C) = A.B + A.C} \\ \textbf{b) } \mathbf{(A+B).C = A.C + B.C} \end{array}}$$

3) **Elemento Neutro:**

$$\boxed{\mathbf{A.}I_n = I_n\mathbf{.A = A}}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Atenção: **Não valem** as seguintes propriedades:

1) Comutativa, pois, em geral, **A.B** $\neq$ **B.A**
2) Sendo $O_{m\,x\,n}$ uma matriz nula, **A.B** = $O_{m\,x\,n}$ não implica, necessariamente, que **A** = $O_{m\,x\,n}$ ou **B** = $O_{m\,x\,n}$.

Exemplos:

1) Sendo A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e B=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, vamos determinar **A.B** e **B.A e** comparar os resultados

Solução:

A.B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 1^{\underline{a}}$ linha e $1^{\underline{a}}$ coluna = 2.1 + 3.3 = 2 + 9 = 11

$a_{12} = 1^{\underline{a}}$ linha e $2^{\underline{a}}$ coluna = 2.2 + 3.4 =4 + 12 = 16

$a_{21} = 2^{\underline{a}}$ linha e $1^{\underline{a}}$ coluna = 4.1 + 1.3 = 4 + 3 = 7

$a_{22} = 2^{\underline{a}}$ linha e $2^{\underline{a}}$ coluna = 4.2 + 1.4 = 8 + 4 = 12

Assim:

$$\mathbf{A.B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 2.1+3.3 & 2.2+3.4 \\ 4.1+1.3 & 4.2+1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9 & 4+12 \\ 4+3 & 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$$\mathbf{B.A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1.2+2.4 & 1.3+2.1 \\ 3.2+4.4 & 3.3+4.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+8 & 3+2 \\ 6+16 & 9+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

Comparando os resultados, observamos que **A.B** $\neq$ **B.A**, ou seja, a propriedade comutativa para multiplicação de matrizes **não** vale.

2) Seja A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2}$ e B =$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,3}$, determine:

a) **A.B**
b) **B.A**

Solução:

$$\text{a) } \mathbf{A.B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,3} = \begin{bmatrix} 2.1+3.(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1.(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4.(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix}_{3\,x\,3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-6) & 4+0 & 6+12 \\ 0+(-2) & 0+0 & 0+4 \\ -1+(-8) & -2+0 & -3+16 \end{bmatrix}_{3\,x\,3} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

b) **B.A** = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.0 + 3.(-1) & 1.(3) + 2.(1) + 3.(4) \\ -2.(2) + 0.(0) + 4.(-1) & -2.(3) + 0.(1) + 4.4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 0 + (-3) & 3 + 2 + 12 \\ -4 + 0 + (-4) & -6 + 0 + 16 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Conclusão: Verificamos que $\mathbf{A.B} \neq \mathbf{B.A}$

8. Matriz Inversa:

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem n, se existir uma matriz A', de mesma ordem, tal que $\mathbf{A}.A' = A'.\mathbf{A} = I_n$, então A' é matriz inversa de **A.** (Em outras palavras: Se $\mathbf{A}.A' = A'.\mathbf{A} = I_n$, isto implica que A' é a matriz inversa de **A**, e é indicada por A^{-1}).

Notação: A^{-1}

Exemplo: Sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, vamos determinar a matriz inversa de **A**, se existir.

Solução:

Existindo, a matriz inversa é de mesma ordem de **A.**

Como, para que exista inversa, é necessário que $A.A' = A'.A = I_n$, ***vamos trabalhar em duas etapas:***

$1^{\underline{o}}$ Passo: Impomos a condição de que $\mathbf{A}.A' = I_n$ e determinamos A':

$$\mathbf{A}.\ A' = I_n \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1.a + 2.c & 1.b + 2.d \\ -2.a + 1.c & -2.b + 1.d \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -2a + c & -2b + d \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

A partir da igualdade de matrizes, resolvemos o sistema acima pelo método da adição e chegamos à:

$$\begin{cases} a+2c=1 \ (-2) \\ -2a+c=0 \ \ \lrcorner\oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4c=2 \\ -2a+\ \ c=0 \\ \hline 5c=2 \Rightarrow c=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$-2a+c=0$$
$$-2a+\frac{2}{5}=0 \Rightarrow a=\frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} b+2d=0 \ (-2) \\ -2b+d=1 \ \ \lrcorner\oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b+4d=0 \\ -2b+\ \ d=1 \\ \hline 5d=1 \Rightarrow d=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$-2b+d=1$$
$$-2b+\frac{1}{5}=1 \Rightarrow b=-\frac{2}{5}$$

Assim temos:

$$A' =. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$2^{\underline{o}}$ <u>Passo:</u> Verificamos se $A'\mathbf{A} = I_2$:

$$A'.\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\times 2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5 .1 + \left(-2/5\right).(-2) & 1/5 .2 + \left(-2/5\right).1 \\ 2/5 .1 + 1/5 .(-2) & 2/5 .2 + 1/5 .1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1/5 + 4/5 & 2/5 - 2/5 \\ 2/5 - 2/5 & 4/5 + 1/5 \end{bmatrix}_{2\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5/5 & 0 \\ 0 & 5/5 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Portanto temos uma matriz A', tal que: $\mathbf{A}.A' = A'.\mathbf{A} = I_2$

Logo, A' é inversa de **A** e pode ser representada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} .$$

Resolver a segunda lista de exercícios

2ª LISTA DE GEOMETRIA ANALÍTICA II

1-) Sendo A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e B=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcule:

a-) A + B b-) A – B c-) B – A

2-) Calcule x, y e z, tais que $\begin{pmatrix} 2x & z \\ x-y & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2z \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3-) Sendo A=$(a_{ij})_{3x2}$, onde a_{ij}=2i-j, e B=$(b_{ij})_{3x2}$, com $b_{ij} = i^2 + j$, calcule:

a-) A – B b-) B – A c-) $(A+B)^t$

4-) Verifique experimentalmente que, se A e B são matrizes do mesmo tipo, então $(A+B)^t = A^t + B^t$.

Sugestão: Considere A e B as matrizes encontradas no exercício 3.

5-) Sendo A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e B=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, determinar as matrizes X e Y, tais que: X + Y = A + B e 2X – Y = A – B.

6-) Dadas as matrizes A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e C=$\begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ calcule:

a-) 3.(A – B) + 3.(B – C) + 3.(C – A)

b-) 2.(A - B) – 3.(B – C) – 3.C

c-) a matriz X, tal que

3.(X – A) + 2.B = 4.(X – A + 2.C)

7-) Sendo A=$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e B=$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine as matrizes X e Y, tais que 3X – Y = 2A – B e X + Y = A – B

8-) Determine a relação existente entre as matrizes A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e B=$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

9-) Sendo a matriz A= $\begin{bmatrix} 2 & 3 & c \\ 3 & 4 & y \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ simétrica, determine c e y.

10-) Sendo A=$(a_{ij})_{2x2}$, onde a_{ij}=2i-j, e B=$(b_{ij})_{2x2}$, com $b_{ij} = j - i$, determine X tal que 3A + 2X = 3B.

11-) Sendo A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes X e Y no sistema $\begin{cases} 2X + 3Y = B \\ 3X + 2Y = A \end{cases}$.

12-) Sendo A= $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e B=-2A, determine a matriz X, tal que $2X - 3A = \frac{1}{2}B$

13-) Dadas as matrizes A=$(a_{ij})_{6x4}$, tal que a_{ij} = i - j, B=$(b_{ij})_{4x5}$, tal que com $b_{ij} = j - i$ e C = AB, determine o elemento c_{42}.

14-) Sendo A=$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $A^2 + 4A - 5I_2$.

15-) Determine a matriz X, tal que $X + 2A = (A.B - A)^t$, sendo A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

16-) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}_{3x3}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule:

a-) A.B
b-) B.A
c-) A.C
d-) C.A

17-) (UFPA) A matriz $A=(a_{ij})_{3x3}$ é definida de tal modo que $a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}, \text{se } i \neq j \\ 0 \quad , \text{se } i = j\end{cases}$. Então, A é igual a:

a-) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b-) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c-) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d-) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e-) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18-) (PUC-SP) Dadas as matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$, quadradas de ordem 2, com $a_{ij}=3i+4j$ e $b_{ij}=-4i-3j$, se C=A + B, então C^2 é igual a:

a-) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b-) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c-) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d-) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e-) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19-) Verifique se $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}_{2x2}$ é inversa de $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

20-) Determinar, se existir, A^{-1} em cada caso:

a-) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b-) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

21-) Sendo $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule $(A^{-1})^{-1}$.

22-) As matrizes A, B e C são invertíveis e de mesma ordem 2. Sendo B. $A^{-1}=I_2$ e C.B = A, determine C e C^{-1}.

23-) (MACK) A é uma matriz mxn e B é uma matriz mxp. A afirmação falsa é:
a-) A + B existe se, e somente se, n = p
b-) A= A^t implica m = n (A^t = transposta de A)
c-) A.B existe se, e somente se, n = p
d-) A. B^t existe se, e somente se, n = p
e-) A^t.B sempre existe

Respostas

1) a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$
2) x=2, y=-9 e z=-7
3) a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 15 \\ 3 & 8 & 15 \end{bmatrix}$
4) -------------
5) X=$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ e Y=$\begin{bmatrix} \frac{11}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$
6) a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -14 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -118 & -101 \\ 6 & -139 \end{bmatrix}$
7) X=$\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{9}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$ e Y=$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{bmatrix}$
8) A= $-B^t$
9) c=0 e y=2
10) X=$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$
11) X=$\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ e Y=$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$
12) X=$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
13) 2
14) $\begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$
15) X=$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$
16) a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) AC= A d) CA= C
17) alternativa a)
18) alternativa b)
19) Sim, B é inversa de A
20) a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$
21) A inversa da inversa de uma matriz A é a própria matriz A.
22) C= $C^{-1} = I_2$
23) Alternativa c)

II – DETERMINANTES

Definição: Determinante é um número associado a uma matriz quadrada.

Aplicações dos determinantes na matemática:

- Cálculo da matriz inversa;
- Resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- Cálculo da área de um triângulo, quando são conhecidas as coordenadas dos vértices.

1. Determinante de primeira ordem

Dada uma matriz quadrada de $1^{\underline{a}}$ ordem **M**=$[a_{11}]$, chamamos de determinante associado à matriz **M** o número real a_{11}.

Notação: det **M** ou $|a_{11}| = a_{11}$

Exemplos:

1. $M_1 = [5] \Rightarrow \det M_1 = 5 \text{ ou } |5| = 5$
2. $M_2 = [-3] \Rightarrow \det M_1 = -3 \text{ ou } |-3| = -3$

2. Determinante de segunda ordem

Dada a matriz **M**=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição, temos que o determinante associado a essa matriz, ou seja, o determinante de $2^{\underline{a}}$ ordem é dado por:

$$\det M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - (a_{12}a_{21})$$

Assim:

$$\det M = a_{11}a_{22} - (a_{12}a_{21})$$

Exemplo: Sendo **M**=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, então:

det **M**=$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$

Logo: det **M** = -2

Conclusão: O determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

3. Menor Complementar

Chamamos de menor complementar relativo ao elemento a_{ij} de uma matriz **M**, quadrada e de ordem n > 1, o determinante MC_{ij}, de ordem n – 1, associado à matriz obtida de **M** quando suprimos a linha e a coluna que passam por a_{ij}.

Exemplo 1: Dada a matriz **M=**$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, para determinarmos o menor complementar relativo ao elemento a_{11} (MC_{11}), retiramos a linha 1 e a coluna 1;

MC = menor complementar

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ logo, } MC_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

Da mesma forma temos que o MC relativo ao elemento a_{12} é dado por:

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{bmatrix}, \text{ logo, } MC_{12} = |a_{21}| = a_{21} \text{ e assim por diante.}$$

Exemplo 2: Dada a matriz **M=**$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, de ordem 3, vamos determinar:

a) MC_{11}
b) MC_{12}
c) MC_{13}
d) MC_{21}

Solução:

OBS.: Vamos denotar “menor complementar” por MC

a) retirando a linha 1 e a coluna 1 da matriz dada acima $\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, temos que:

$$MC_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{22}a_{33} - (a_{23}a_{32})$$

b) retirando a linha 1 e a coluna 2 da matriz dada acima, temos que:

$$MC_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{21}a_{33} - (a_{23}a_{31})$$

c) retirando a linha 1 e a coluna 3 da matriz dada acima, temos que:

$$MC_{13}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=a_{21}a_{32}-(a_{22}a_{31})$$

d) retirando a linha 2 e a coluna 1 da matriz dada acima, temos que:

$$MC_{21}=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=a_{12}a_{33}-(a_{13}a_{32})$$

4. Cofator

Chamamos de cofator (ou complemento algébrico) relativo ao elemento a_{ij} de uma matriz quadrada de ordem n o número A_{ij}, tal que $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot MC_{ij}$.

Exemplo 1: Dada **M=**$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, os cofatores relativos a todos os elementos da matriz **M** são:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot \underbrace{a_{22}}_{MC_{11}}=(-1)^{2}\cdot a_{22}=+a_{22};$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot \underbrace{a_{21}}_{MC_{12}}=(-1)^{3}\cdot a_{21}=-a_{21};$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot \underbrace{a_{12}}_{MC_{21}}=(-1)^{3}\cdot a_{12}=-a_{12};$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot \underbrace{a_{11}}_{MC_{22}}=(-1)^{4}\cdot a_{11}=+a_{11}.$$

Assim, podemos também determinar a matriz dos cofatores (que será denotada por $\overline{A}$) como sendo:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Sendo **M=**$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, vamos calcular os cofatores A_{22}, A_{23} e A_{31}:

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}=(-1)^{4}\cdot[a_{11}a_{33}-(a_{13}a_{31})]=(+1)\cdot[a_{11}a_{33}-(a_{13}a_{31})];$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=(-1)^{5}\cdot[a_{11}a_{32}-(a_{12}a_{31})]=(-1)\cdot[a_{11}a_{32}-(a_{12}a_{31})];$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=(-1)^{4}\cdot[a_{12}a_{23}-(a_{13}a_{22})]=(+1)\cdot[a_{12}a_{23}-(a_{13}a_{22})].$$

5. Matriz Adjunta

A matriz transposta da matriz dos cofatores de uma matriz **A** é chamada adjunta de **A.**

Assim: $\mathrm{adj}A = \left(\overline{A}\right)^t$

6. Teorema de Laplace

Definição: O determinante de uma matriz quadrada $M = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times m}$ $(m \geq 2)$ pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz **M** pelos respectivos cofatores.

Assim, fixando $j \in N$, tal que $1 \leq j \leq m$, temos:

$$\det M = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$$

onde, $\sum_{i=1}^{m}$ é o somatório de todos os termos de índice i, variando de 1 até m, $m \in N$ e A_{ij} é o cofator ij.

Exemplo : Calcular com o auxílio do Teorema de Laplace, os seguintes determinantes:

a) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ b) $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Solução:

a) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

Aplicando Laplace na coluna 1, temos:

$$D_1 = \underbrace{2}_{a_{11}} \underbrace{(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}_{A_{11}(\text{cofator}11)} + \underbrace{(-2)}_{a_{21}} \underbrace{(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}_{\text{Cofator}A_{21}} + \underbrace{0}_{a_{31}} \underbrace{(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{Cofator}A_{31}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1 = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1 = 2(6 - 10) + 2(18 + 20) = 2(-4) + 2(38) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1 = -8 + 76 = 68$$

b) Como três dos quatro elementos da 2ª linha são nulos, convém aplicar Laplace nessa linha.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = 0 + 0 + 2(-1)^{2+3} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{\substack{D \\ MC_{23}}} \Rightarrow$$ <u>OBS</u>.: Então podemos rescrever D_2 como:

$$D_2 = -2D \qquad \text{(I)}$$

Agora precisamos calcular o valor de D para substituirmos em (I) Para isso aplicamos Laplace na 3ª linha (mais conveniente, pois um dos elementos é nulo), e obtemos:

$$D = -1(-1)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{MC_{31}} + 3(-1)^{3+3} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}_{MC_{33}} \Rightarrow$$

$$D = -1(3-1) + 3(-2-9) = -1(2) + 3(-11) = -2 - 33 \Rightarrow$$

$$D = -35$$

Finalmente, substituindo esse valor em (I), obtemos:

$$D_2 = -2D \Rightarrow D_2 = -2(-35) \Rightarrow$$

$$D_2 = 70$$

7. <u>Regra de Sarrus</u>

Dispositivo prático para calcular o determinante de 3ª ordem.

<u>Exemplo 1:</u> Calcular o seguinte determinante através da Regra de Sarrus.

$$\mathbf{D=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Solução:

$1^{\underline{a}}$ *Passo:* Repetir a duas primeiras colunas ao lado da $3^{\underline{a}}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$2^{\underline{a}}$ *Passo:* Encontrar a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos com os elementos das paralelas a essa diagonal.

OBS.: A soma deve ser precedida do sinal positivo, ou seja:

$$= +(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

$3^{\underline{a}}$ *Passo:* Encontrar a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos com os elementos das paralelas a essa diagonal.

OBS.: A soma deve ser precedida do sinal negativo, ou seja:

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Assim:

$$D = -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

OBS.: Se desenvolvêssemos esse mesmo determinante de $3^{\underline{a}}$ ordem com o auxílio do teorema de Laplace, veríamos que as expressões são idênticas, pois representam o mesmo número real.

Exemplo 2: Calcular o valor dos seguintes determinantes:

a) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solução:

a)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix} =$$

$$= -(3 + 8 + 12) + (2 - 18 - 8) = -23 - 24 = -47$$

b) $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Aplicando Laplace na $2^{\underline{a}}$ linha, temos:

$$D_2 = 0 + 0 + 1(-1)^{2+3} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{D_2^{'}} + 2(-1)^{2+4} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{D_2^{''}} \Rightarrow$$

$$D_2 = (-1)D_2^{'} + 2D_2^{''}$$

- Cálculo de $D_2^{'}$: Como, na $2^{\underline{a}}$ linha, dois elementos são nulos, é conveniente aplicar Laplace; assim:

$$D_2^{'} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(0-1) = 1$$

- Cálculo de $D_2^{''}$: Utilizando a Regra de Sarrus, temos:

$$D_2^{''} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. =$$

$$= -(0 - 2 - 1) + (0 + 0 + 0) = 3$$

Portanto,

$$D_2 = (-1)D_2^{'} + 2D_2^{''} \Rightarrow$$

$$D_2 = -1(1) + 2(3) = -1 + 6 \Rightarrow$$

$$D_2 = 5$$

8. Matriz de Vandermonde

Chamamos de matriz de Vandermonde toda matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, com a seguinte forma:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ a_1 & a_2 & \Lambda & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \Lambda & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \Lambda & a_n^3 \\ M & M & M & M \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & M & a_n^{n-1} \\ & & & \end{bmatrix}$$

Observe que cada coluna dessa matriz é formada por potências de mesma base com expoentes inteiros, que variam de 0 até n-1.

O determinante da matriz de Vandermonde é dado por:

$$\det V = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1) \cdot \Lambda \cdot (a_n - a_{n-1}) \cdot \Lambda \cdot (a_n - a_1)$$

Exemplo: Calcular o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

Solução:

Como podemos escrever a matriz M na forma:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^1 & 3^1 & 4^1 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{bmatrix}$$

Então dizemos que a matriz M é uma Matriz de Vandermonde com $a_1 = 2, a_2 = 3 \, e \, a_3 = 4$.

Assim,

$$\det M = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1) = (3-2)(4-3)(4-2) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES:
(de matriz quadrada de ordem n)

As propriedades a seguir são relativas a determinantes associados a matrizes quadradas de ordem **n.** Estas propriedades, muitas vezes nos permite simplificar os cálculos.

P_1-) Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplos:

1-) $\begin{vmatrix} 4 & 9 & -8 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$

2-) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$

P_2-) Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

1-) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ pois, $L_1 = L_3$

P_3-) Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então o seu determinante é nulo.

Exemplo:

1-) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ pois $C_3 = 2C_1$

P_4-) Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então o seu determinante é nulo.

Exemplos:

1-) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$ pois $C_1 + C_2 = C_3$

2-) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 0$ pois $2L_1 + L_2 = L_3$

OBS.: **Definição de combinação linear**:
Um vetor v é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, se existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tal que:

$$v = a_1 . v_1 + \ldots + a_k . v_k$$

P_5-) Teorema de Jacobi: O determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

Exemplo:

1-) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$

Substituindo a 1ª coluna pela soma dessa mesma coluna com o dobro da 2ª, temos:

$$\begin{array}{c} C_1 + 2C_2 \\ \begin{vmatrix} 1+2\cdot 2 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot 2 & 1 & 2 \\ 2+4\cdot 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_6-) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

Det A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$ Det A^t = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

P_7-) Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

Exemplos:

1-) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$ Multiplicando C_1 por 2, temos: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) = -8$

2-) $\begin{vmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -145$ Multiplicando L_1 por $\frac{1}{5}$, temos: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\cdot(-145) = -29$

P_8-) Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Exemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Trocando as posições de L_1 e L_2, por exemplo, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +4$$

P_9-) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos:

1-) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c$

2-) $\begin{vmatrix} x & g & h \\ 0 & y & i \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot z$

P_{10}-) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal secundária são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal, multiplicado por $(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$.

Exemplos:

1-) $\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & x \end{vmatrix} = -a \cdot b$

2-) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & x \\ c & y & z \end{vmatrix} = -a \cdot b \cdot c$

P_{11}-) Para A e B matrizes quadradas de mesma ordem n, temos:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

Observação: Como $A \cdot A^{-1} = I$, na propriedade acima, temos:

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}}$$

Exemplo:

Se $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ e $A \cdot B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 8 \end{vmatrix}$, então:

$$\underbrace{\det(AB)}_{10} = \underbrace{\det A}_{5} \cdot \underbrace{\det B}_{2}$$

P12-) Se $k \in \Re$, então $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$.

Exemplo:

Sendo k=3, $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ e $k \cdot A = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{vmatrix}$, temos:

$$\underbrace{\det(k \cdot A)}_{54} = \underbrace{k^n}_{3^2} \cdot \underbrace{\det A}_{6}$$

P13-) $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

9. Regra de Chió

A regra de Chió é mais uma técnica que facilita muito o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$).

Essa regra nos permite passar de uma matriz de ordem n para outra de ordem n-1, de igual determinante.

Exemplos:

1) Vamos calcular o determinante associado à matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ com o auxílio da regra de Chió:

Passo 1: Para podermos aplicar essa regra, a matriz deve ter pelo menos um de seus elementos igual a 1. Assim fixando um desses elementos, retiramos a linha e a coluna onde ele se encontra.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix} \\ \uparrow \end{array}$$

Passo 2: Em seguida subtraímos do elemento restante o produto dos dois correspondentes que foram eliminados (um da linha e outro da coluna).

$$\begin{vmatrix} 2-(5 \cdot 3) & 4-(3 \cdot 3) \\ 2-(5 \cdot 4) & 6-(4 \cdot 3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-(15) & 4-(9) \\ 2-(20) & 6-(12) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -5 \\ -18 & -6 \end{vmatrix}$$

Passo 3: Multiplicamos o determinante assim obtido por $(-1)^{i+j}$, onde i representa a linha e j a coluna retiradas (neste caso, $2^{\underline{a}}$ linha e $2^{\underline{a}}$ coluna).

$$\det A = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -13 & -5 \\ -18 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (78-90) \Rightarrow$$

$$\det A = -12$$

10. Inversão de matrizes com o auxílio da teoria dos determinantes

A inversa de uma matriz quadrada de ordem n pode ser calculada pela aplicação do seguinte teorema:

A matriz inversa A^{-1} de uma matriz **A** (quadrada de ordem n) existe se, e somente se, $\det A \neq 0$ e é dada por:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A}$$

OBS.: adj A é a matriz transposta da matriz dos cofatores: adj A = $\left(\overline{A}\right)^t$

Exemplos:

1) Verificar se a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ admite inversa

Solução:

A matriz A admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Assim, como:

$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$, existe a matriz inversa de [a]

2) Calcular x para que exista a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ x & -1 & 0 \\ -2 & 1 & x \end{bmatrix}$

Solução:

Verificar se existe a matriz inversa de A ($\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$)

Então: $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ x & -1 & 0 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -3 \\ x & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix}$

$$= (-3x + 0 + 2x) - (4 + 0 - 3x^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2 - x - 4 \neq 0$$

Assim, $\exists A^{-1} \Leftrightarrow x \neq \frac{4}{3}$ e $x \neq -1$

3) Calcular, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ com o auxílio da fórmula $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A}$

<u>Solução:</u>

<u>Passo 1</u>: Calcular o determinante de A para ver se existe inversa.

$\det A = (-2)4 - 3(-1) = -8 + 3 = -5$

Como $-5 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

<u>Passo 2</u>: Calcular os cofatores dos elementos de A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |4| = 4$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |-1| = 1$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |3| = -3$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |-2| = -2$$

Assim, a matriz dos cofatores é dada por: $\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

<u>Passo 3</u>: Cálculo da matriz adjunta de A.:

$$adjA = \left(\overline{A}\right)^t \Rightarrow adjA = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>Passo 4</u>: Cálculo da matriz inversa de A (A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

<u>Resolver a terceira lista de exercícios de GA I</u>

3ª LISTA DE GA I

1) Calcular o valor dos determinantes das seguintes matrizes:

a) A= $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0,\overline{3} \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ b) A= $[a_{ij}]_{2x2}$, onde $a_{ij} = i + j$.

2) Calcular o valor de $x \in R$ na igualdade $\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 4 & x+3 \end{vmatrix}$ =0

3) O conjunto solução de $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$ é:

a) $\{x \in R \mid x \neq 1\}$ b){0;1} c){1} d){-1} e) {0}

4) Determinar a matriz formada pelos cofatores dos elementos da matriz A= $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

5) Dada a matriz A= $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Calcule $\overline{A}$, conhecida como matriz dos cofatores, e a matriz adjunta de A.

6) Calcule os seguintes determinantes, aplicando o Teorema de Laplace:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

7) O determinante $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & -1 \\ -1 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ representa o polinômio:

a) $x^2 + 1$
b) $-x^2 - 1$
c) $3x^2 - 1$
d) $3(x^2 + 1)$
e) $3(x+1)(x-1)$

8) (Fuvest – SP) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, onde $2a = e^x + e^{-x}$ e $2b = e^x - e^{-x}$ é igual a:

a) 1 b) –1 c) e^x d) e^{-x} e) 0

9) Utilizando a regra de Sarrus, calcule: $\begin{vmatrix} -0,\dot{3} & 0,5 & 1 \\ 2^0 & -1^2 & 1 \\ 1\frac{1}{2} & \sqrt[3]{-8} & 0 \end{vmatrix}$

10) Sendo A= $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) det A
b) det A^t

11) Calcular x na igualdade $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

12) Calcular x na igualdade $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & x-3 \\ x^2 & 4 & x^2-6x+9 \end{vmatrix} = 0$

13) Sendo A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 9 & 16 & 1 \\ -8 & 27 & 64 & -1 \end{bmatrix}$, calcular det A.

14) Utilizando as propriedades dos determinantes, calcule os determinantes justificando os valores obtidos:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 55 & 42 & 18 \\ 28 & 34 & 72 \\ 27 & 8 & -54 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 9 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 8 & 21 & 17 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

15) (MACK-SP) Se $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ x & 4 \end{bmatrix}$, A= $\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}$ e B = A^t, então det(A.B) vale:

a) 8 b) 4 c) 2 d) –2 e) –4

16) (FAAP-SP) Dada a matriz A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, calcule o determinante da matriz inversa de A.

17) Determine, se existir, a inversa de cada uma das matrizes:

a) A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ b) B= $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Respostas

1) a) 3 b) 1 c) –1
2) x= -4 ou x=1
3) alternativa c)
4) $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 6 & 7 & -4 \\ -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$
5) $\overline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ e

adjA= $\left(\overline{A}\right)^t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6) a) 0 b) –2
7) alternativa d)
8) alternativa a)
9) $-\frac{5}{12}$
10) a) –2 b) –2
11) x=1 ou x=-4
12) x=2 ou x=5
13) 600
14) a) 0 b) 0 c) 0 d) –60 e) 2
15) alternativa b)
16) $-\frac{1}{3}$
17) a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & -\frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}$

III – SISTEMAS LINEARES

1 Equação linear

É Toda equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais que recebem o nome de *coeficientes das incógnitas* $x_1, x_2, \ldots x_n$ e b é um número real chamado *termo independente*.

OBS: Quando $b = 0$, a equação recebe o nome de *linear homogênea*.

Exemplos:

Equações Lineares	*Equações Não-Lineares*
1) 3x – 2y + 4z = 7	1) xy 3z + t = 8
2) x + y –3z - $\sqrt{7}$ t = 0 (homogênea)	2) x^2 - 4y = 3t - 4
3) –2x + 4z = 3t – y + 4	3) $\sqrt{x}$ - y + z = 7

2 Sistema Linear

Definição: Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de *m* equações e *n* incógnitas.

2.1 Solução do Sistema Linear

Chamamos de solução do sistema a n-upla de números reais ordenados $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ que é, simplesmente, solução de todas equações do sistema.

2.2 Matrizes associadas a um Sistema Linear

2.2.1 Matriz incompleta

É a matriz **A**, formada pelos coeficientes da incógnitas do sistema.

Exemplos:

Seja o sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 4x+y+z=7 \\ -2x+y+z=4 \end{cases}$$

Matriz incompleta:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Matriz Completa

É a matriz **B,** que obtemos ao acrescentarmos à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema. Assim a matriz completa referente ao sistema anterior é:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3 Sistemas Homogêneos

Um sistema é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações são nulos.

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ -x+4y-3z=0 \\ \sqrt{2}\,x+3y=4 \end{cases}$$

2.3.1 Soluções de um Sistema Homogêneo

A n-upla (0, 0, 0, ..., 0) é sempre solução de um sistema linear homogêneo com *n* incógnitas e recebe o nome de *solução trivial*. Quando existem, as demais soluções são chamadas *não-triviais*.

2.4 Classificação de um sistema linear quanto ao número de soluções

- possível $\begin{cases} \text{determinado (solução única)} \\ \text{indeterminado (infinitas soluções)} \end{cases}$
- impossível (não tem solução)

Exemplos:

1. $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

Tem solução única: o par ordenado (3, 5). Portanto o sistema é possível e determinado.

2. $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

Tem infinitas soluções: algumas são dadas pelos pares ordenados: (0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), $\ldots$. Portanto o sistema é possível e indeterminado.

3. $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x - y = 10 \end{cases}$

4.
Não tem um par ordenado que satisfaz simultaneamente as equações. Portanto o sistema é impossível.

2.5 Sistema Normal

Um sistema é normal quando tem o mesmo número de equações (m) e de incógnitas (n) e o determinante da matriz incompleta associada ao sistema é diferente de zero, ou seja, se $m = n$ e det $\mathbf{A} \neq 0$, o sistema é normal.

OBS.: Todo sistema normal é possível e determinado e portanto tem solução única.

Exemplo: Determinar $k \in R$, de modo que o sistema $\begin{cases} kx + y = 3 \\ x + ky = 5 \end{cases}$ seja normal.

Solução: Para o sistema ser normal temos que observar duas condições: m=n e det$\mathbf{A} \neq 0$

1ª condição: m = 2 e n = 2 $\Rightarrow m = n$

No sistema, o número de equações (m = 2) é igual ao número de incógnitas (n = 2)

2ª condição: det $\mathbf{A} \neq 0$

det $\mathbf{A}$ = $\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 1$

Logo, o sistema é normal para qualquer k real diferente de 1 e de –1.

2.6 Regra de Cramer

Todo sistema normal tem uma única solução dada por $x_i = \frac{D_i}{D}$, onde $i \in \{1, 2, 3, \Lambda\ , n\}$, *D*= det**A** é o determinante da matriz incompleta associada ao sistema e D_i é o determinante obtido através da substituição, na matriz incompleta, da coluna *i* pela coluna formada pelos termos independentes.

Exemplo: Resolver com o auxílio da Regra de Cramer, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

Solução:

Temos: $m = n = 2$ (1ª condição) e $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8 \neq 0$ (2ªcondição)

Portanto, como o sistema é normal, podemos utilizar a Regra de Cramer para resolvê-lo.

1º Passo: Calcular D_x e D_y

- Substituindo, na matriz incompleta $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a coluna c_1 pela coluna formada pelos termos independentes, encontramos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21 - 3 = -24$$

- - Substituindo, agora, c_2 pela coluna dos termos independentes, encontramos:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 14 = -8$$

2º Passo: Encontrar x e y:

Assim:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-24}{-8} = 3$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8}{-8} = 1$$

Logo, (x, y) = (3, 1) é a solução do sistema dado.

b) $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^{x+1} + 2^y - 2^z = 9 \\ 2^x - 2^{y+1} + 2^{z+1} = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^x.2^1 + 2^y - 2^z = 9 \\ 2^x - 2^y.2^1 + 2^z.2^1 = 2 \end{cases}$

Solução:

Da maneira como é apresentado o sistema não é linear. Assim, para torná-lo linear, fazemos as substituições:

$2^x = a, \quad 2^y = b$ e $2^z = c$, obtendo:

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ 2a + b - c = 9 \\ a - 2b + 2c = 2 \end{cases}$$

Agora temos um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas ($m = n$) e determinante da matriz incompleta diferente de zero, veja:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -1 - 2 - 4 + 2 - 1 - 4 = -7 - 3 = -10 \neq 0$$

1º Passo: Calcular D_a, D_b e D_c substituindo as colunas 1, 2 e 3, respectivamente, pelos termos independentes:

$$D_a = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 1 \\ 9 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix} = -2 - 14 - 18 + 14 - 2 - 18 = -34 - 6 = -40$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -9 + 2 - 28 + 18 - 7 + 4 = -35 + 15 = -20$$

$$D_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -7 + 18 + 4 + 2 + 9 - 28 = 7 - 17 = -10$$

Portanto, por Cramer vem:

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{-40}{-10} = 4 \qquad b = \frac{D_b}{D} = \frac{-20}{-10} = 2 \qquad c = \frac{D_c}{D} = \frac{-10}{-10} = 1$$

Voltando a transformação feita anteriormente (afinal queremos os valores de x, y e z) temos:

$2^x = a \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$2^y = b \Rightarrow 2^y = 2 \Rightarrow 2^y = 2^1 \Rightarrow y = 1$

$2^z = c \Rightarrow 2^z = 1 \Rightarrow 2^z = 2^0 \Rightarrow z = 0$

Logo, (x, y, z) = (2, 1, 0) é a solução do sistema dado.

c) $\begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 2x - \;\; y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$

Solução:

Temos $m = n = 3$ e $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = -1 + 9 + 8 + 3 + 4 + 6 = 29 \neq 0$

Portanto, como o sistema é normal, apresentando uma única solução e, além do mais, o sistema é homogêneo, esta solução única será a solução trivial (0, 0, 0).
Logo, (x, y, z) = (0, 0, 0).

2.7 Discussão de um Sistema Linear

Para discutir um sistema linear de *n* equações e *n* incógnitas, calculamos o determinante D da matriz incompleta. Assim, se

$D \neq 0 \Rightarrow$ Sistema é *possível e determinado* (SPD), ou seja tem solução única.
$D = 0 \Rightarrow$ Sistema pode ser *possível e indeterminado* (SPI) (ter infinitas soluções) ou *impossível* (SI) (não ter solução).

Observações:

1) Se o $D \neq 0$, o sistema será SPD e portanto teremos uma única solução para o problema.
2) Se o $D = 0$, sistema poderá ser SPI ou SI. Para identificarmos de ele é SPI ou SI teremos que encontrar todos os D_i's para saber se o sistema é possível e indeterminado ou impossível. De que forma?

   Se todos os D_i forem iguais a 0, teremos um SPI
   Se pelo menos um D_i diferente de zero, teremos um SI.

Exemplos:

1) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Temos:

m = n = 3

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Logo, o sistema é possível e determinado, apresentando solução única.

2) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

Temos:

m = n = 3

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$$

Sendo D = 0 e $D_x \neq 0$, o sistema é impossível, não apresentando solução.

3) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$

Temos:

m = n = 3

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Logo temos, D = 0, $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = 0$. Portanto, o sistema é possível e indeterminado, apresentando infinitas soluções.

2.8 Sistemas equivalentes

Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Exemplo: Sendo

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \text{ e } S_2 = \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

o par ordenado (x, y) = (1, 2) satisfaz ambos e é único. Logo, S_1 e S_2 são equivalentes: $S_1 \sim S_2$.

2.8.1 Propriedades dos sistemas equivalentes

1) Trocando de posição as equações de um sistema, obtemos um outro sistema equivalente.

   Exemplo:
   Sendo:

$$S_1 = \begin{cases} x + y + 2z = 1 \quad (I) \\ x \quad - z = 3 \quad (II) \\ \quad y + z = 2 \quad (III) \end{cases} \text{ e } S_2 = \begin{cases} x \quad - z = 3 \quad (II) \\ \quad y + z = 2 \quad (III) \\ x + y + 2z = 1 \quad (I) \end{cases}$$

   temos, $S_1 \sim S_2$.

2) Multiplicando uma ou mais equações de um sistema por um número **k**, **k** $\in R^*$**,** obtemos um sistema equivalente ao anterior.

   Exemplo:
   Dado $S_1 = \begin{cases} x + 2y = 3 & (I) \\ x - y = 0 & (II) \end{cases}$, multiplicando a equação (II) por 3, obtemos:

$$S_2 = \begin{cases} x + 2y = 3 \\ (x - y = 0) \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

   Assim, temos $S_1 \sim S_2$.

3) Adicionando a uma das equações de um sistema o produto de outra equação desse mesmo sistema por um número **k**, **k** $\in R^*$**,** obtemos um sistema equivalente ao anterior.

   Exemplo:
   Dado $S_1 = \begin{cases} x + 2y = 4 & (I) \\ x - y = 1 & (II) \end{cases}$, substituindo neste sistema a equação (II) pela soma da equação (I), multiplicada por (-1), com a equação (II), obtemos:

$$S_1' = \begin{cases} (x + 2y = 4) \cdot (-1) \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow S_1' = \begin{cases} -x - 2y = -4 \\ \underline{x - y = 1} \\ -3y = -3 \end{cases}$$

Logo:

$$S_2 = \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \quad -3y = -3 \end{cases}$$

Assim, , pois (x, y) = (2, 1) é solução de ambos os sistemas.

2.9 Sistemas escalonados

A técnica de escalonar um sistema linear é muito mais utilizada, pois com essa técnica podemos encontrar soluções para sistemas que não tenham o mesmo número de equações e incógnitas (o que não é permitido na Regra de Cramer). Além disso, quando queremos resolver sistemas lineares cujo número de equações (e de incógnitas) excede três, não é conveniente utilizar a Regra de Cramer, por se tornar muito trabalhosa. Por exemplo, um sistema com quatro equações e quatro incógnitas requer o cálculo de cinco determinantes de 4ª ordem. Neste caso, usamos a técnica de escalonamento, que facilita a resolução e a discussão de um sistema.

Dado um sistema linear:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \mathrm{M} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \Lambda + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, dizemos que S está *escalonado* se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não-nulo aumenta de equação para equação.

Exemplos:

1) $S_1 = \begin{cases} 3x - \ y = 6 \\ \quad 2y = 3 \end{cases}$

2) $S_2 = \begin{cases} 4x - \ y + \ z = 9 \\ \quad 2y - 3z = 2 \\ \quad\quad 4z = -5 \end{cases}$

3) $S_3 = \begin{cases} 2x - 4y + 5z = 8 \\ \quad 4y - \ z = 0 \end{cases}$

4) $S_4 = \begin{cases} 2x + 3y - 2z + t = 1 \\ \quad 2y + 2z + t = 4 \\ \quad\quad 3t = 7 \end{cases}$

2.9.1 Procedimentos para escalonar um sistema

1) Fixamos como 1ª equação uma das que possuam o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.
2) Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações.
3) Anulamos todos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação.
4) Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Exemplos:

1) Vamos escalonar o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação, aplicando as propriedades:

- Trocamos de posição a 1ª e a 3ª equações:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

- Trocamos a 2ª equação pela soma do produto da 1ª equação por (-3) com a 2ª equação:

$$\begin{cases} (x - 2y + z = 2) & \cdot(-3) \\ 3x + 2y - 4z = 0 & \lrcorner\oplus \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 8y - 7z = -6 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

- Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 1ª equação por (-2) com a 3ª equação:

$$\begin{cases} (x - 2y + z = 2) & \cdot(-2) \\ 8y - 7z = -6 \\ 2x - y + z = 5 & \lrcorner\oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 8y - 7z = -6 \\ 3y - z = 1 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita, a partir da 3ª equação:

- Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 2ª equação por $\left(-\frac{3}{8}\right)$ com a 3ª equação:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ (8y - 7z = -6) & \cdot\left(-\frac{3}{8}\right) \\ 3y - z = 1 & \lrcorner\oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 8y - 7z = -6 \\ \frac{13}{8} z = \frac{26}{8} \end{cases}$$

Agora, como o sistema está escalonado, podemos resolvê-lo:

$$\frac{13}{8} z = \frac{26}{8} \Rightarrow \quad z = 2$$

Substituindo este valor em $8y - 7z = -6$, vem:

$$8y - 7 \cdot 2 = -6 \Rightarrow \quad 8y = 8 \Rightarrow \quad y = 1$$

Substituindo, agora, $y = 1$ e $z = 2$ em $x - 2y + z = 2$, vem:

$x-2\cdot 1+2=2 \Rightarrow \quad x=2$

Portanto, o sistema é *possível e determinado,* admitindo uma única solução que é dada por: (x, y, z) = (2, 1, 2).

2) Vamos escalonar o sistema $\begin{cases} x-2y+\ \ z=3 \\ 2x+\ \ y+\ \ z=1 \\ 3x-\ \ y+\ 2z=2 \end{cases}$

<u>1º passo:</u> Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação, aplicando as propriedades:

- Trocamos a 2ª equação pela soma do produto da 1ª equação por (-2) com a 2ª equação:

$$\begin{cases} (x-2y+\ z=3) & \cdot(-2) \\ 2x+\ y+\ z=1 & \hookleftarrow\oplus \\ 3x-\ y+2z=2 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+\ z=\ 3 \\ \quad 5y-\ z=-5 \\ 3x-\ y+2z=\ 2 \end{cases}$$

- Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 1ª equação por (-3) com a 3ª equação:

$$\begin{cases} (x-2y+\ \ z=\ 3) & \cdot(-3) \\ \quad 5y-\ \ z=-5 & \\ 3x-y+\ 2z=\ 2 & \hookleftarrow\oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+\ z=\ 3 \\ \quad 5y-\ z=-5 \\ \quad 5y-\ z=-7 \end{cases}$$

<u>2º passo:</u> Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita, a partir da 3ª equação:

- Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 2ª equação por (-1) com a 3ª equação:

$$\begin{cases} x-2y+\ \ z=\ 3 & \\ \quad (5y-\ z=-5) & \cdot(-1) \\ \quad 5y-\ z=-7 & \hookleftarrow\oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+\ \ z=\ 3 \\ \quad 5y-\ z=-5 \\ \qquad\quad 0=-2 \end{cases}$$

Dessa forma fica escalonado. Como não existe valor real de z, tal que $0\cdot z=-2$, o *sistema é impossível* e portanto não tem solução.

3) Vamos escalonar o sistema $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z-\ \ t=\ 6 \\ 2x+\ \ y-2z+\ t=-1 \\ x-\ 2y+\ z+2t=-3 \end{cases}$

<u>1º passo:</u> Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação:

- Trocamos a 2ª equação pela soma do produto da 1ª equação por (-2) com a 2ª equação:

$$\begin{cases} (x+y+z-t=6) & \cdot(-2) \\ 2x+y-2z+t=-1 & \hookleftarrow\oplus \\ x-2y+z+2t=-3 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases}$$

- Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 1ª equação por (-1) com a 3ª equação:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 & \cdot(-1) \\ -y-4z+3t=-13 & \\ x-2y+z+2t=-3 & \hookleftarrow\oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ -3y+0z+3t=-9 \end{cases}$$

<u>2º passo:</u> Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita, a partir da 3ª equação:

- Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 2ª equação por (-3) com a 3ª equação:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 & \\ (-y-4z+3t=-13) & \cdot(-3) \\ -3y+0z+3t=-9 & \hookleftarrow\oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ +12z-6t=30 \end{cases}$$

O sistema está escalonado. Entretanto, o número de equações (**m**) é menor que o número de incógnitas (**n**). Assim, o sistema é *possível e indeterminado*, admitindo infinitas soluções. A diferença entre o número de incógnitas (**n**) e o número de equações (**m**) de um sistema nessas condições é chamada *grau de indeterminação* (**GI**):

$$\boxed{GI = n - m}$$

Para resolvermos um sistema indeterminado, procedemos do seguinte modo:

- Consideramos o sistema em sua forma escalonada:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ +12z-6t=30 \end{cases}$$

- Calcular o grau de indeterminação do sistema nessas condições:

  GI = n – m = 4 – 3 = 1

Como o grau de indeterminação é **1**, atribuímos a uma das incógnitas um valor α, supostamente conhecido, e resolvemos o sistema em função desse valor.

Fazendo $t=\alpha$ e substituindo esse valor na 3ª equação, obtemos:

$$12z-6\alpha=30 \Rightarrow 12z=30+6\alpha \Rightarrow z=\frac{30+6\alpha}{12} \Rightarrow z=\frac{5+\alpha}{2}$$

Conhecidos **z** e **t,** substituímos esses valores na 2ª equação $\left(-y-4z+3t=-13\right)$:

$$-y-4\cdot\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)+3\alpha=-13\Rightarrow\quad -y-10-2\alpha+3\alpha=-13\Rightarrow\quad -y+\alpha=-13+10\Rightarrow\quad -y=-\alpha-3$$

$$\Rightarrow\quad y=\alpha+3$$

Conhecidos **z** e **t** e **y,** substituímos esses valores na 1ª equação $\left(x+y+z-t=6\right)$:

$$x+\alpha+3+\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)-\alpha=6\Rightarrow\quad 2x+2\alpha+6+5+\alpha-2\alpha=12\Rightarrow\quad 2x+\alpha+11=12\Rightarrow\quad 2x=1-\alpha$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{1-\alpha}{2}$$

Assim, a solução do sistema é dada por:

$$S=\left\{\left(\frac{1-\alpha}{2},\ \alpha+3,\ \frac{5+\alpha}{2},\ \alpha\right)\right\},$$

sendo $\alpha\in R$.

Para cada valor que seja atribuído a α, encontraremos uma quádrupla que é solução para o sistema.

<u>**OBS.:**</u> Se **GI** >1, então daremos valores $\alpha,\beta,\ldots$ a todas as incógnitas livres (que não iniciam equações).

4ª LISTA DE GA I

1) Verifique se os sistemas abaixo são normais:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+2z=5 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-3y-z=6 \\ x+4y+7z=17 \\ -x+6y+6z=19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y+z=8 \\ x+y-z=0 \\ 3x+4y=9 \end{cases}$

2) Determine os valores de $k \in R$, para que os sistemas sejam normais:

a) $\begin{cases} x+ky+2z=0 \\ -x+ky+3z=0 \\ -2x+y+kz=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (k-1)x+4y=2k \\ (k+1)x-2y=1+3k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ kx+2y+3z=7 \\ k^2x+4y+9z=1 \end{cases}$

3) Resolva os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-3z=9 \\ 3x-y+4z=-5 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1-2x}{-3y}=\dfrac{7y-2}{5x-3}=1 \end{cases}$

4) Determine para quais valores de k o sistema $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+ky=2 \end{cases}$ é:

a) possível e determinado;
b) possível e indeterminado;
c) impossível.

5) (UFPR) O sistema de equações $\begin{cases} 7x+y-3z=10 \\ x+y+z=6 \\ 4x+y+Pz=Q \end{cases}$ é:

a) Impossível, se $P \neq -1$ e $Q \neq 8$.
b) Indeterminado, se $P \neq -1$ e $Q \neq 8$.
c) Indeterminado, se $P \neq -1$ e $Q=8$.
d) Impossível, se $P=-1$ e $Q \neq 8$.
e) Impossível, se $P \neq -1$ e $Q=8$.

6) Escalone, classifique e resolva os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 5x+y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+\dfrac{z}{2}=6 \\ 4x+y+z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x+2y-2z=-5 \\ 3x-y+3z=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-2z=4 \\ 3x+4y-z=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1+2x}{2y}=\dfrac{5y-1}{4x+3}=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-4y=7 \\ 3x+y=3 \\ 5x+3y=34 \end{cases}$

7) (Fatec-SP) Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R$ 5,40 por 2 latas de refrigerante e uma porção de batatas fritas. O segundo pagou R$ 9,60 por 3 latas de refrigerante e 2 porções de batatas fritas.
Nesse local e nesse dia, a diferença entre o preço de uma porção de batas fritas e o preço de uma lata de refrigerante era de:
a)R$2,00 b)R$1,80 c)R$1,75
d)R$1,50 e)R$1,20

8) (Unifor-CE)Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. Se a terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do de laranjas em 4 unidades, então nesse pacote há:
a) igual número de balas dos dois tipos
b) duas balas de hortelã a mais que de laranja
c) 20 balas de hortelã
d) 26 balas de laranja
e) duas balas de laranja a mais que de hortelã

9) (UCDB-MT) O sistema $\begin{cases} -x+2y+z-2=0 \\ x+2y-2z=0 \\ x-4y+10z-6=0 \\ 2x+7y-5z-2=0 \end{cases}$ é:

a) impossível
b) homogêneo
c) determinado
d) indeterminado com uma variável arbitrária.
e) Indeterminado com duas variáveis arbitrárias.

10) (Cefet-PR) Para a festa do Natal, uma crche necessitava de 120 brinquedos. Recebeu uma

doação de R$370,00. Esperava-se comprar carrinhos a R$2,00 cada, bonecas a R$3,00 e bolas a R$3,50. Se o número de bolas deveria ser igual ao número de bonecas e carrinhos juntos, a solução seria comprar:

a) 60 bonecas, 30carrinhos e 30 bolas
b) 20 bonecas, 40carrinhos e 60 bolas
c) 30 bonecas, 30carrinhos e 60 bolas
d) 25 bonecas, 45carrinhos e 70 bolas
e) 40 bonecas, 20carrinhos e 60 bolas

11) (Unificado- RJ) Para que valores de k existe uma única matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tal que $\begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ -1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

a) $k \neq -1$
b) k=-2
c) k=-2 ou k=1
d) $k \neq -2$ e $k \neq 1$
e) $k \neq 2$ e $k \neq -1$

12) (UF-AL) O sistema $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ bx - y = 1 \end{cases}$, nas variáveis reais x e y, é:

a) possível e determinado, $\forall$ a, $b \in R$.
b) possível e indeterminado se a = 2b.
c) possível e determinado se a $\neq$ 2b. $\forall$ a, $b \in R$.
d) possível e indeterminado se a = -2b.
e) impossível se a = -2b.

13) (F. M. Triângulo Mineiro-MG) Em três mesas de uma lanchonete o consumo ocorreu da seguinte forma:

Mesa	**Hambúrguer**	**Refrigerante**	**Porção de fritas**
1ª	4	2	2
2ª	6	8	3
3ª	2	3	1

A conta da 1ª mesa foi R$18,00 e da 2ª mesa R$30,00. Com esses dados:

a) é possível calcular a conta da 3ª mesa e apenas o preço unitário do refrigerante.
b) é possível calcular a conta da 3ª mesa, mas nenhum dos preços unitários dos três componentes do lanche.
c) é possível calcular a conta da 3ª mesa e além disso, saber exatamente os preços unitários de todos os componentes do lanche.
d) não é possível calcular a conta da 3ª mesa, pois deveriam ser fornecidos os preços unitários dos componentes do lanche.
e) é impossível calcular a conta da 3ª mesa e os preços unitários dos componentes do lanche, pois deve ter havido um erro na conta da 1ª ou da 2ª mesa.

Respostas

1) a) Sim b) Sim c) Não

2) a) S={$k \in R$ | $k \neq \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$ }

b) S={$k \in R$ | $k \neq -\frac{1}{3}$ }

c) S={$k \in R$ | $k \neq 2$ e $k \neq 3$}

3) a) S={(1, 2)}
b) S={(2, -1, -3)}
c)S={(-4, -3)}

4) a) $k \neq 4$ b) $\nexists$ $k \in R$ c) k = 4

5) alternativa d)

6) a) possível e determinado; S=$\left\{\left(\frac{5}{14}, \frac{3}{14}\right)\right\}$

b)possível e indeterminado; S=$\left\{\left(\frac{4-\alpha}{4}, -4,\ \alpha\right) p/\ \forall\, \alpha \in R\right\}$

c) possível e determinado; S=$\{(1,-2,1)\}$

d)possível e indeterminado; S=$\{(2-5\alpha,\ 4\alpha,\ \alpha)\, p/\ \forall\, \alpha \in R\}$

e) possível e determinado; S=$\left\{\left(\frac{3}{2}, 2\right)\right\}$

f) sistema impossível; S=$\{\ \}$

7) alternativa b)

8) alternativa a)

9) alternativa c)

10) alternativa e)

11) alternativa e)

12)alternativa e)

13) alternativa a)

LISTA EXTRA DE SISTEMAS LINEARES

1-) Resolva os sistemas abaixo e classifique-os como SPS, SPI ou SI.

a-) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-2z=12 \end{cases}$ b-) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3y+2x+4z=5 \\ 7y-2z+4x=13 \end{cases}$ c-) $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-4y+6z=5 \\ 2x-6y+9z=12 \end{cases}$

d-) $\begin{cases} 5732x+2134y+2134z=7866 \\ 2134x+5732y+2134z=670 \\ 2134x+2134y+5732z=11464 \end{cases}$ e-) $\begin{cases} x+3y+5z+7w=12 \\ 3x+5y+7z+w=0 \\ 5x+7y+z+3w=4 \\ 7x+y+3z+5w=16 \end{cases}$ f-) $\begin{cases} x+z=2 \\ y+z=4 \\ x+y=5 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

g-) $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ 2x+y-2z+2t=0 \\ x+6y=-2 \end{cases}$

2-) Determine para que valores de m e n o sistema $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+2y-z=4 \\ 3x+y+mz=n \end{cases}$ seja:

a-) Indeterminado
b-) impossível

Respostas

1-) a-) SI (0 = -1) **b-)** SPI S={(x, y, z) = $\left(-2-17\alpha,\ 3+10\alpha,\ \alpha\right)$}

c-) SI (0 = -3) **d-)** SPD S={(x, y, z) = (1, -1, 2)}

e-) SPD S={(x, y, z, w) = (1, -1, 0, 2)} **f-)** SI (0 = -11/2)

g-) S={(x, y, z, t) = $\left(\frac{6-24\alpha}{27},\ \frac{-10+4\alpha}{27},\ \frac{1+5\alpha}{27},\ \alpha\right)$}

2-) a-) m = 2 e n = 5

b-) m = 2 e n $\neq 5$

IV - APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

Exemplos

1) Três irmãos, Paula, Júlia e André, ao confrontarem suas contas de telefone celular, ficaram curiosos em saber quanto custou um minuto de cada tipo de ligação realizada. As rrês contas apresentaram ligações para telefones fixos e móveis (celulares) e ligações internacionais para Buenos Aires, onde moram seus primos.
   A tabela informa o tempo (em minutos) das ligações que cada um efetuou e o valor correspondente da conta, já descontado o preço da assinatura.

	Fixo	**Móvel**	**Internacional (Buenos Aires)**	**Valor**
Paula	10 min	6 min	2 min	12,20
Júlia	14 min	4 min	3 min	13,40
André	8 min	5 min	5 min	14,70

   Vamos denominar x, y e z os preços do minuto de ligação para telefones fixos, para telefones móveis e para Buenos Aires, respectivamente.

   Desta forma,

   - A conta de Paula é dada por: $10x + 6y + 2z = 12{,}20$
   - A conta de Júlia é dada por: $14x + 4y + 3z = 13{,}40$
   - A conta de André é dada por: $8x + 5y + 5z = 14{,}70$

   As três equações acima constituem um exemplo de aplicação de sistema linear.

2) (EU-RJ) Observe a tabela de compras realizadas por Mariana:

Loja	**Produtos**	**Preço unitário (R$)**	**Despesa (R$)**
A	Caneta	3,00	50,00
	Lapiseira	5,00	
B	Caderno	4,00	44,00
	Corretor	2,00	

Sabendo que ela adquiriu a mesma quantidade de canetas e cadernos, além do maior número possível de lapiseiras, o número de corretores comprados foi igual a:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14

3) (PUC) Alfeu, Bento e Cintia foram a uma certa loja e cada qual comprou camisas escolhidas entre três tipos, gastando nessa compra os totais de R$134,00, R$ 115,00 e R$ 48,00, respectivamente.

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ tais que:

- os elementos de cada linha de A correspondem às quantidades dos três tipos de camisas compradas por Alfeu (1ª linha), Bento (2ª linha) e Cíntia (3ª linha);
- os elementos de cada coluna de A Correspondem às quantidades de um mesmo tipo de camisa;
- os elementos de X correspondem aos preços unitários, em reais, de cada tipo de camisa.

Nessas condições, o total a ser pago pela compra de uma unidade de cada tipo de camisa é:

a) R$53,00 b) R$55,00 c) R$57,00 d) R$62,00 e) R$65,00

4) (Vunesp-SP) Um orfanato recebeu uma certa quantidade x de brinquedos para ser distribuída entre as crianças. Se cada criança receber três brinquedos, sobrarão 70 brinquedos para serem distribuídos; mas, para que cada criança possa receber cinco brinquedos, serão necessários mais 40 brinquedos. O número de crianças do orfanato e a quantidade x de brinquedos que o orfanato recebeu são, respectivamente:

a) 50 e 290 b) 55 e 235 c) 55 e 220 d) 60 e 250 e) 65 e 265

5) (U.F. Uberlândia-MG) Gumercindo decidiu dividir sua fazenda de 30 alqueires entre seus dois filhos João e José. Essa divisão seria diteramente proporcional à produção que cada filho conseguisse em uma plantação de soja. Eles produziram juntos 1,5 tonelada de soja, sendo que José produziu 250 kg a mais que João. Como foi dividida a Fazenda?

6) Ao ser indagado sobre o valor do pedágio, um caixa respondeu: “Quando passaram 2 carros de passeio e 3 ônibus, arrecadou-se a quantia de R$26,00; quando passaram 2 ônibus e 5 caminhões, a quantia arrecadada foi de R$47,00, e quando passaram 6 carros de passeio e 4 caminhões, arrecadou-se a quantia de R$52,00”. Qual foi o valor do pedágio para cada tipo de veículo citado?