8.20 已知系统的阶跃序列响应为$\boldsymbol{r_\varepsilon(k)=k(0.5)^k\varepsilon(k)}$，试绘出该系统的模拟框图。

解法一：

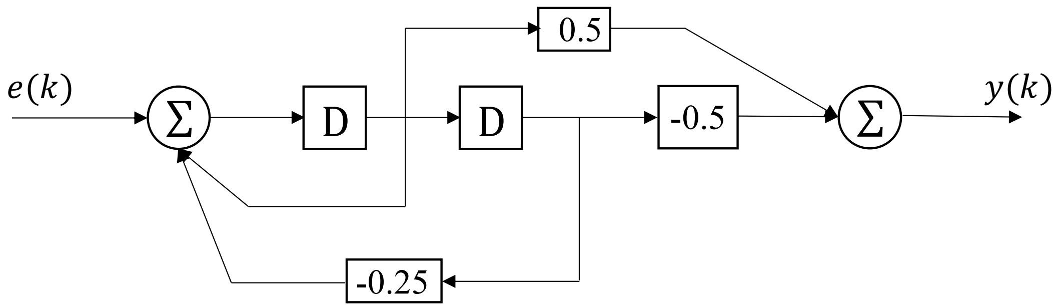
因为$r_\varepsilon(k)=k(0.5)^k\varepsilon(k)$，又知$\varepsilon(k)*h(k)=r_\varepsilon(k)$，对$\varepsilon(k)*h(k)=r_\varepsilon(k)$ 等式两边同时进行z变换，得

$$\frac{z}{z-1}\cdot H(z)=\frac{0.5z}{(z-0.5)^2}$$

所以有

$$H(z)=\frac{0.5z}{(z-0.5)^2}\cdot\frac{z-1}{z}=\frac{0.5z-0.5}{z^2-z+0.25}=\frac{0.5z^{-1}-0.5z^{-2}}{1-z^{-1}+0.25z^{-2}}$$

系统模拟框图如下所示：



解法二：

事实上，除了对等式两边同时进行 z 变换得到系统函数$H(z)$，我们还可以通过时域的解法得到系统的单位样值响应$h(k)$，再通过 z 变换求得系统函数$H(z)$。下面给出分析过程。

在连续时间系统的时域分析章节中，我们学习了卷积的微分性质：两个函数相卷积后的导数等于两函数中之一的导数与另一函数相卷积。即：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(t)*v(t)]=u(t)*\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}*v(t)$$

该性质可以推广到离散情况下的卷积和，即：

$$\nabla[u(k)*v(k)]=\nabla u(k)*v(k)=u(k)*\nabla v(k)$$

其中∇为后向差分算子（前向差分算子同理）。在本题中有：$r_\varepsilon(k)=\varepsilon(k)*h(k)$，利用上述性质则可得：

$$\nabla r_\varepsilon(k)=\nabla\varepsilon(k)*h(k)=[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)]*h(k)$$

$$= \delta(k) * h(k) = h(k)$$

题中给出，$r_\varepsilon(k) = k0.5^k\varepsilon(k)$，故可求得：

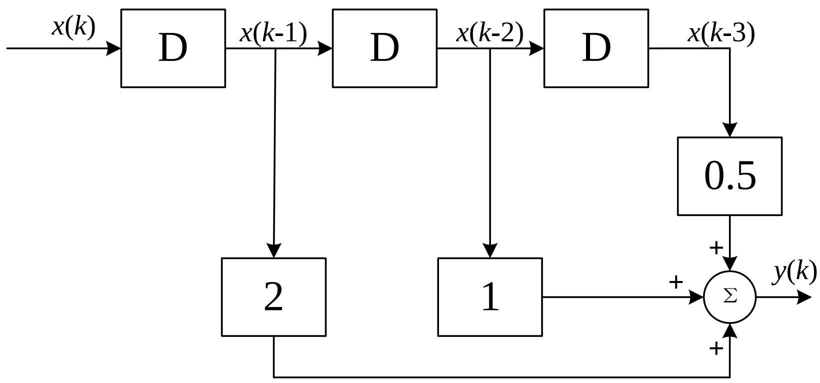
$$\begin{aligned} h(k) = r_\varepsilon(k) - r_\varepsilon(k-1) &= k0.5^k\varepsilon(k) - (k-1)0.5^{k-1}\varepsilon(k-1) \\ &= [k0.5^k - (k-1)0.5^{k-1}]\varepsilon(k-1) \\ &= 0.5^{k-1}\varepsilon(k-1) - k0.5^k\varepsilon(k-1) \\ &= 0.5^{k-1}\varepsilon(k-1) - k0.5^k\varepsilon(k) \end{aligned}$$

对$h(k)$进行 z 变换得：

$$\begin{aligned} H(z) = Z[h(k)] &= \frac{1}{z} \times \frac{z}{z-0.5} - \frac{0.5z}{(z-0.5)^2} \\ &= \frac{0.5z-0.5}{(z-0.5)^2} \end{aligned}$$

故同理可绘出系统框图。

8.24 求如图所示的三阶非递归滤波器的系统函数，并绘出其极零图与粗略的幅频响应曲线。假设输入信号的抽样间隔为 1 ms。



解：根据系统框图可以写出系统的差分方程如下：

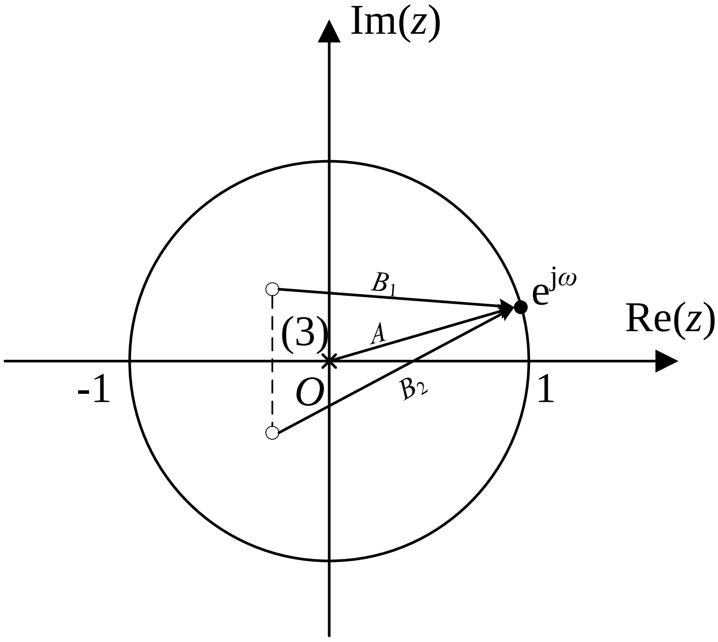
$$y(k) = 0.5x(k-3) + x(k-2) + 2x(k-1)$$

故对等式两边同时做 z 变换可得系统函数：

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= 0.5z^{-3} + z^{-2} + 2z^{-1} \\ &= \frac{2\left(z + \frac{1}{4} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(z + \frac{1}{4} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{z^3} \end{aligned}$$

所以系统的零点为$z_1 = -\frac{1}{4} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}$，$z_2 = -\frac{1}{4} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}$，极点$p_1 = p_2 = p_3 = 0$。

所以可绘出系统的极零图如下图所示：



由题知，采样间隔$T_s = 1\ \mathrm{ms}$，所以可根据统函数$H(z)$可写出系统的频响函数：

$$H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T_s}\right) = 0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\Omega T_s} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega T_s} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega T_s}$$

$$= [0.5\cos(3\Omega T_s) + \cos(2\Omega T_s) + 2\cos\Omega T_s]$$

$$- \mathrm{j}[0.5\sin(3\Omega T_s) + \sin(2\Omega T_s) + 2\sin\Omega T_s]$$

故若令：

$$R = 0.5\cos(3\Omega T_s) + \cos(2\Omega T_s) + 2\cos\Omega T_s$$

$$I = 0.5\sin(3\Omega T_s) + \sin(2\Omega T_s) + 2\sin\Omega T_s$$

则有：

$$\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T_s}\right)\right| = \sqrt{R^2 + I^2} = \sqrt{5.25 + 5\cos\Omega T_s + 2\cos(2\Omega T_s)}$$

根据Ω的取值不同，可列出$\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T_s}\right)\right|$的取值如下表所示：

$\Omega(\times 10^3\mathrm{rad/s})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T_s}\right)\right|$	3.5	3.25	2.96	2.60	1.80	1.32	1.31	1.39	1.5

再根据对称性可知，幅频响应曲线在区间$(0，2\pi\times10^3)$内关于$\Omega=\pi\times10^3$对称，故可绘出粗略的幅频响应曲线如下图所示：