第一章　绪　　论

1-1　基本要求

通过本章的学习，学生应该了解和掌握信号与系统的定义及其分类，深刻理解信号的时域运算和波形变换方法。重点掌握系统的线性、时不变、因果和稳定特性。

1-2　重点、难点学习指导

1．信号的定义与分类

(1) 信号的定义

信号是消息的表现形式，消息则是信号的具体内容。通常用数学函数式表示，也可用图像、曲线及一组数据表示。

(2) 信号的分类

信号的形式多种多样，可以从不同的角度进行分类。常用的几种分类为：确定信号和随机信号；周期信号与非周期信号；连续时间信号与离散时间信号；能量信号与功率信号等。

2．信号的时域运算与变换

信号的基本运算有8种。时域中的定义如下。

(1) 相加：$y(t)=f_1(t)+f_2(t)$

即表示同一瞬间信号瞬时值之和。

(2) 相乘：$y(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$

即表示同一瞬间信号瞬时值之积。

(3) 幅度变化：$y(t)=af(t)$

即表示在每一时刻都乘以常数 a。

(4) 信号的反褶：$f(-t)$

$f(-t)$的波形与原信号 $f(t)$的波形关于纵轴镜像对称。

(5) 信号的时移：$f(t-t_0)$

式中，t_0 为常数。$f(t-t_0)$的波形当$t_0>0$ 时，将$f(t)$右移t_0；当$t_0<0$ 时，将$f(t)$左移 t_0。

(6) 信号的尺度变换：$f(at)$

式中，a 为常数。$f(at)$的波形当$|a|>1$ 时，信号 $f(t)$的波形在时间轴上压缩到原来的$\frac{1}{|a|}$；当$|a|<1$ 时，信号 $f(t)$的波形在时间轴上扩展到原来的$\frac{1}{|a|}$。

(7) 微分运算：$y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$

(8) 积分运算：$y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$

3. 系统的定义、分类及特性

(1) 系统的定义

在电子与通信领域，系统通常是指由若干元件或大量相互联系的部件组成并具有特定功能的整体。

(2) 系统的分类

从不同角度，可以将系统进行分类，如连续时间系统与离散时间系统，即时系统和动态系统，无源系统和有源系统，集中参数系统和分布参数系统，线性系统与非线性系统，时变系统与时不变系统等。

(3) 系统的特性

当输入为$e(t)$时，输出为$r(t)$，表示为$e(t)\to r(t)$。

线性性：当 $e_1(t)\to r_1(t)$和 $e_2(t)\to r_2(t)$时，$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)\to k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$，其中$k_1$，$k_2$ 为任意常数。

时不变性：$e(t-t_0)\to r(t-t_0)$，其中 t_0 为任意常数。如$r(t)=ae(t)$。

因果性：系统在任何时刻的输出仅取决于输入的现在与过去值，而与输入的将来值无关。如 $r(t)=e(t-2)$。

稳定性：系统输入有界，其输出也是有界的。如 $r(t)=\mathrm{e}^{e(t)}$。

微分性：$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\to\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$

积分性：$\int_{-\infty}^{t} e(\tau)\mathrm{d}\tau \to \int_{-\infty}^{t} r(\tau)\mathrm{d}\tau$

4. 系统分析的方法

① 输入输出法和状态变量法。

② 时域法（经典法）和变换域法（傅里叶变换、拉普拉斯变换和 z 变换法）。

1-3　习题详解

【1-1】　说明波形如图 1-1 所示的各信号是连续信号还是离散信号。

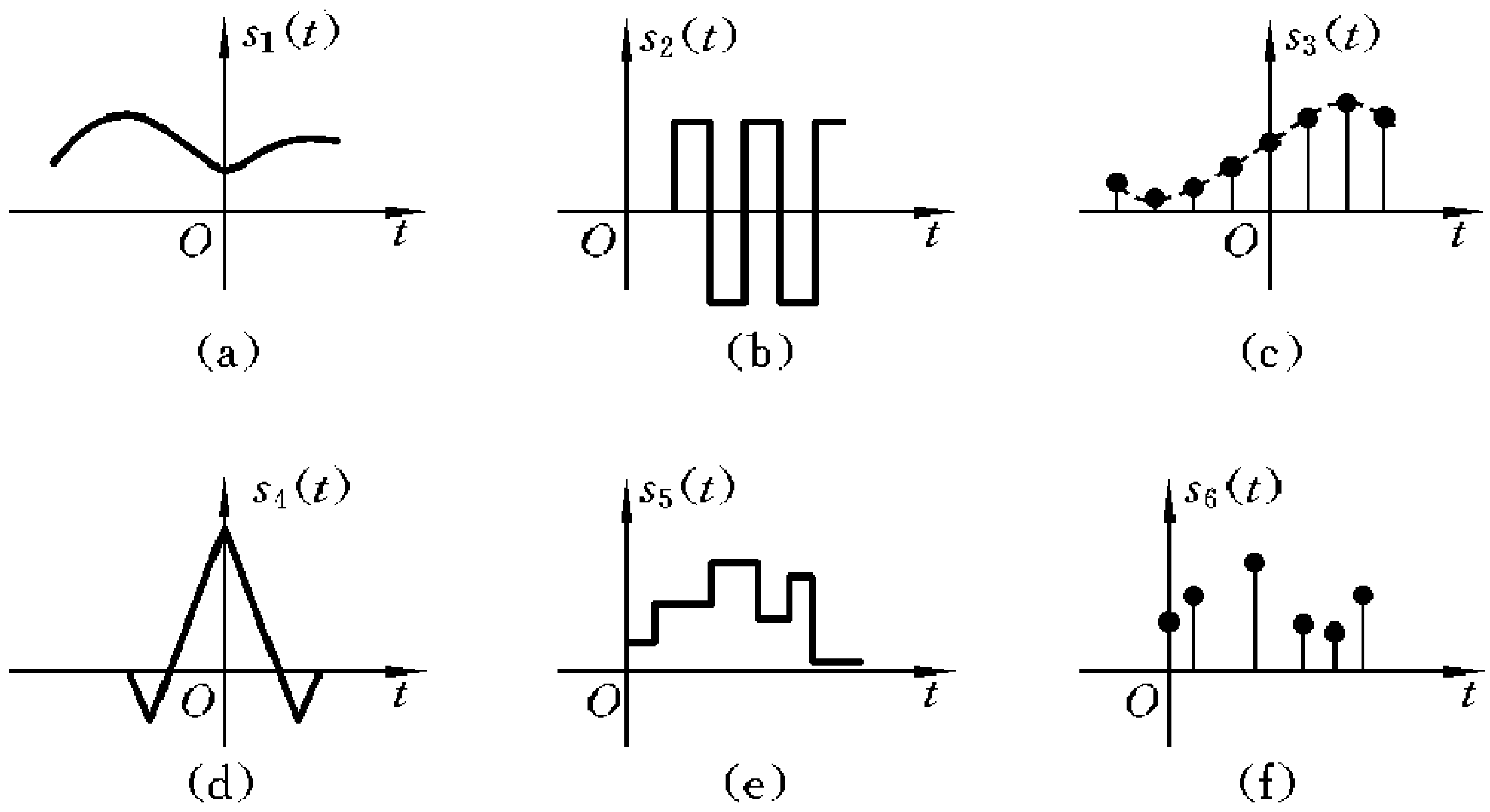


图 1-1

解　时间变量 t 连续的信号为连续信号；时间变量 t 离散的信号为离散信号。所以图1-1(a)、(b)、(d)、(e)所示信号为连续信号；图1-1(c)、(f)所示信号为离散信号。

【1-2】　说明下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号，求其周期 T。

(a) $a\sin t - b\sin(3t)$　　(b) $a\sin(4t) + b\cos(7t)$

(c) $a\sin(3t) + b\cos(\pi t)$ ，$\pi = 3$ 和 $\pi \approx 3.141\cdots$

(d) $a\cos(\pi t) + b\sin(2\pi t)$　　(e) $a\sin\dfrac{5t}{2} + b\cos\dfrac{6t}{5} + c\sin\dfrac{t}{7}$

第二章　连续时间系统的时域分析

2-1　基 本 要 求

通过本章的学习,学生应该熟练掌握典型信号的定义与性质、微分方程的建立与求解。深刻理解系统的特征多项式、特征方程、特征根的意义及求解;单位冲激响应与单位阶跃响应的意义及求解;系统全响应的三种求解方式:零输入响应和零状态响应,自由响应和强迫响应,瞬态响应和稳态响应。重点掌握卷积积分的定义、运算规律及主要性质,并会应用卷积积分法求线性时不变系统的零状态响应。

2-2　重点、难点学习指导

1. 奇异信号

(1) 单位阶跃函数

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

(2) 单位冲激函数

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\\ \delta(t)=0, \quad t\neq 0\end{cases}$$

单位冲激函数与单位阶跃函数的关系

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t), \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

单位冲激函数性质:

① $\delta(t)=\delta(-t)$

② $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$

③ $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

④ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\delta(t)]=f(0)\delta'(t)$

⑤ $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

(3) 单位冲激偶函数

$$\delta'(t)=\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

单位冲激偶函数性质：

① $\delta'(t)=-\delta'(-t)$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0$

③ $\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t)$

④ $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

2. 卷积积分

(1) 定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

卷积积分上、下限的确定：

① 若 $f_1(t)$，$f_2(t)$均为因果信号，则积分的上、下限可写为$(0,t)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{0}^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

② 若 $f_1(t)$为因果信号，$f_2(t)$为一般信号，则积分的上、下限可写为$(0,+\infty)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{0}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

③ 若 $f_1(t)$为一般信号，$f_2(t)$为因果信号，则积分的上、下限可写为$(-\infty,t)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

④ 若 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 均为一般信号，则积分的上、下限可写为 $(-\infty,+\infty)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(2) 性质

① 交换律：

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

② 分配律：

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

③ 结合律：

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$

④ 积分性质：

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau=f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

⑤ 微分性质：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=f_2(t)*\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

⑥ 微分积分性质：

$$\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=f_1(t)*f_2(t)$$

⑦ 任意时间函数 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 的卷积：

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

$$f(t-T_1)*\delta(t-T_2)=f(t-T_1-T_2)$$

$$f(t-T_1)*\delta(t-T_2)=f(t-T_1-T_2)$$

$$\delta(t-T_1)*\delta(t-T_2)=\delta(t-T_1-T_2)$$

⑧ 任意时间函数 $f(t)$ 与 $\varepsilon(t)$ 的卷积：

$$f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$f(t)*\varepsilon(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t-t_0}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

⑨ 任意时间函数 $f(t)$ 与 $\delta'(t)$ 的卷积：

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)*\delta(t)=f'(t)$$
$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$
$$f(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=f^{(n)}(t-t_0)$$

3. 系统全响应的求解

时域分析有经典法和卷积积分法。经典法是直接求解描述系统输入输出关系的微分方程式的方法；卷积积分法是利用卷积积分求系统零状态响应的方法。

系统全响应可按三种方式分解：

① 全响应 $y(t)=$ 零输入响应 $y_{zi}(t)+$ 零状态响应 $y_{zs}(t)$；

② 全响应 $y(t)=$ 自由响应＋强迫响应；

③ 全响应 $y(t)=$ 瞬态响应＋稳态响应。

对于稳定系统，零输入响应必然是自由响应的一部分，零状态响应为自由响应和强迫响应两部分；自由响应对应于微分方程的齐次解，而强迫响应就是该微分方程的特解；自由响应必为瞬态响应，强迫响应中随时间衰减的部分是瞬态分量，而不随时间变化的部分为稳态分量。对于系统全响应的求解方法，学生应该重点掌握由零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$ 来求全响应的方法。系统全响应的求解可归纳为如下过程：

① 根据系统建立微分方程；

② 根据微分方程求算子方程；

③ 令算子方程的左边等于0，得到特征方程并求特征根；

④ 由特征根求系统零输入响应 $y_{zi}(t)$；

⑤ 由算子方程求冲激响应 $h(t)$；

⑥ 求系统零状态响应 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$；

⑦ 求系统全响应 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$。

2-3　习题详解

【2-1】　写出图2-1中输入 $i(t)$ 和输出 $u_1(t)$ 及 $u_2(t)$ 之间关系的线性微分方程并求转移算子。

解　图2-1所示电路的结点电流方程为

第三章　连续信号的正交分解

3-1　基本要求

本章要求掌握周期信号的频谱分析方法——傅里叶级数；要求理解非周期信号频谱密度函数的概念、周期信号与非周期信号的频谱的特点以及信号时域特性与频域特性之间的关系；能利用傅里叶变换的定义、性质，求出信号的频谱并绘制频谱图；重点掌握典型信号的频谱密度函数，灵活运用傅里叶变换的性质对信号进行正反变换。

3-2　重点、难点学习指导

1. 正交函数

(1) 两函数正交条件

① 两实函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交的条件为

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t = 0$$

② 两复函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交的条件为

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t) \mathrm{d}t = 0$$

式中，$f_1^*(t)$，$f_2^*(t)$ 分别是 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 的复共轭函数。

(2) 完备正交函数集

在区间 (t_1, t_2) 内，用正交函数集 $g_1(t)$，$g_2(t)$，…，$g_n(t)$ 近似表示函数 $f(t)$，有

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

其方均误差为

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

若$n \to \infty$,$\overline{\varepsilon^2(t)} \to 0$,即

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varepsilon^2(t)} = 0$$

则称此函数集为完备正交函数集。

2. 周期信号的傅里叶级数

任何周期为T的周期信号$f(t)$,若满足狄里赫莱条件,则可展为傅里叶级数。

(1) 三角形式的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\Omega t) + b_n\sin(n\Omega t)] \qquad ①$$

式中,$\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$;a_0,a_n,b_n为相关系数,

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t$$

式①亦可写成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

式中 $$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\quad \varphi_n = -\arctan\frac{a_n}{b_n}$$

$$a_n = A_n\cos\varphi_n,\quad b_n = A_n\sin\varphi_n$$

A_n,a_n为频率的偶函数;φ_n,b_n为频率的奇函数。

(2) 指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\dot{A}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t},\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

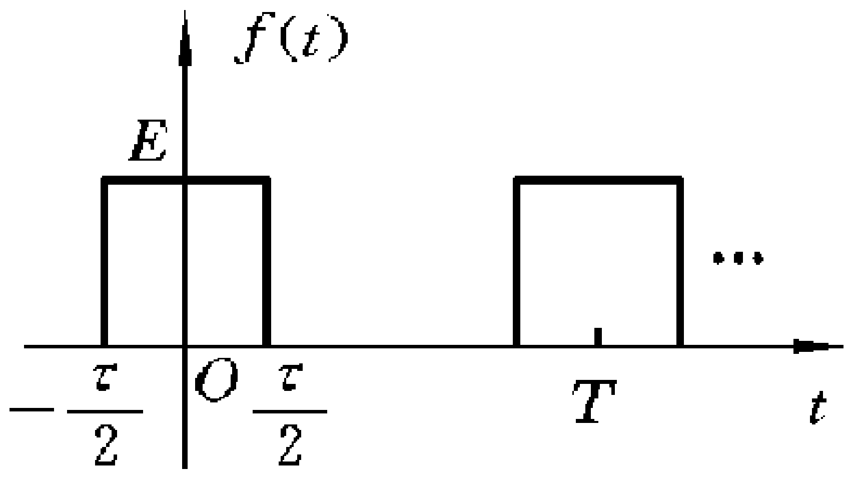
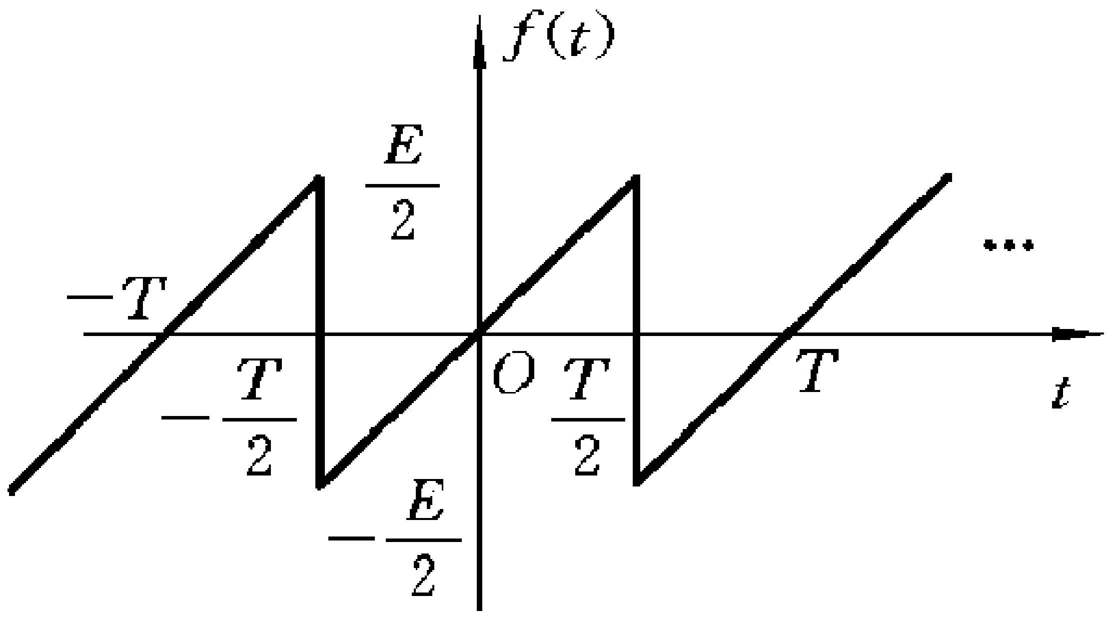
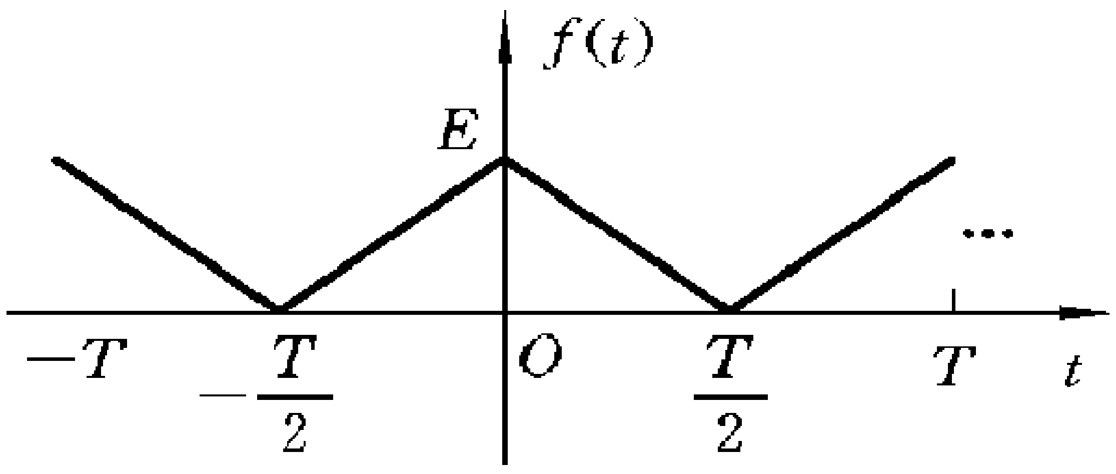
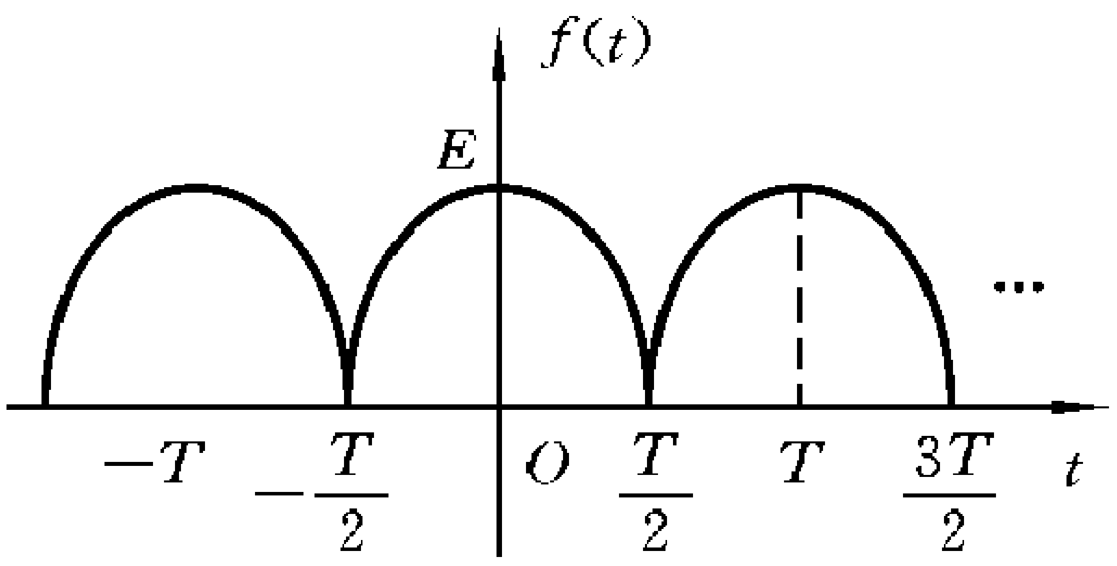
式中 $$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t = a_n - \mathrm{j}b_n$$

与三角形式的傅里叶级数比较,其相关系数存在如下关系:

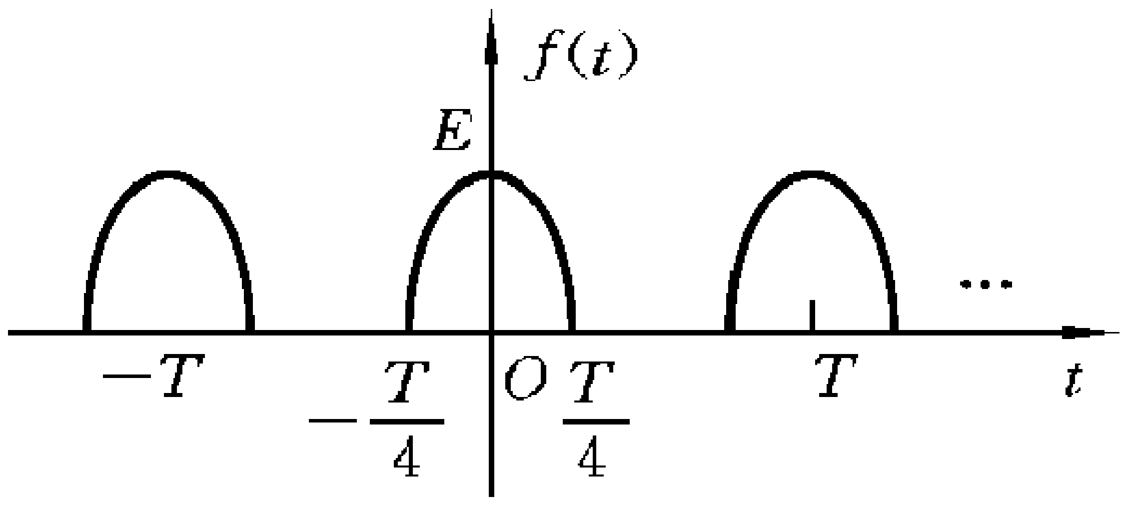
$$\dot{A}=\begin{cases}a_n+\mathrm{j}b_n, & n<0\\ a_0, & n=0\\ a_n-\mathrm{j}b_n, & n>0\end{cases}$$

为使用方便,将几种常用的周期信号的傅里叶级数列于表3-1中。

表3-1　常用周期信号的傅里叶级数

信号波形	傅里叶级数
	$\frac{E\tau}{T}\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{\frac{n\Omega\tau}{2}}\cos(n\Omega t)\right]$
	$\frac{E}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(n\Omega t)$
	$\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ $\cdot\sin^2\cdot\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\Omega t)$
	$\frac{2E}{\pi}+\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ $\cdot\frac{1}{(4n^2-1)}\cos(2n\Omega t)$

续表

<table>
<tr><th>信号波形</th><th>傅里叶级数</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\frac{E}{\pi}-\frac{2E}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)}\cdot\cos\cdot\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\Omega t)$$</td></tr>
</table>

3. 非周期信号的傅里叶变换

傅里叶变换定义式：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

由于频谱密度函数 $F(\mathrm{j}\omega)$为复函数，故可表示为

$$F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

式中，$|F(\mathrm{j}\omega)|$是 ω 的偶函数；$\varphi(\omega)$是 ω 的奇函数。

4. 周期信号的傅里叶变换

周期信号 $f(t)$可表示为指数形式的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\dot{A}_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

式中，$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$；T 为信号 $f(t)$的周期。

$f(t)$的傅里叶变换为

$$f(t)\Leftrightarrow\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{A}_n\delta(\omega-n\Omega)$$

式中
$$\dot{A}_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$$

或
$$\dot{A}_n=\frac{2}{T}F_0(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=n\Omega}$$

式中，$F_0(\mathrm{j}\omega)$为第一个周期信号的傅里叶变换。

为使用方便,将一些常用函数及其频谱函数列入表3-2中。

表 3-2　一些常用函数的频谱函数

序号	时间函数 $f(t)$	频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$
3	$\mathrm{sgn}t=\varepsilon(t)-\varepsilon(-t)$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$
4	1	$2\pi\delta(\omega)$
5	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$
6	$\mathrm{e}^{-\alpha\|t\|}\varepsilon(t)$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
7	$t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$
8	$\cos(\omega_c t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
9	$\sin(\omega_c t)$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$
10	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_c t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{\omega_c}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_c^2}$
11	$\cos(\omega_c t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c^2-\omega^2}$
12	$\sin(\omega_c t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]+\dfrac{\omega_c}{\omega_c^2-\omega^2}$
13	$G_\tau(t)=\varepsilon\left(t+\dfrac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)$	$\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$
14	$\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\Omega t}{2}\right)$	$G_\Omega(\omega)=\dfrac{2\pi}{\Omega}\left[\varepsilon\left(\omega+\dfrac{\Omega}{2}\right)-\varepsilon\left(\omega-\dfrac{\Omega}{2}\right)\right]$
15	$\delta_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\Omega\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\Omega),\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$

5. 傅里叶变换的基本性质

傅里叶变换的性质揭示了信号$f(t)$的时域特性与频域特性之间的关系，其基本性质列于表 3-3 中。

表 3-3　傅里叶变换的性质

性质	时域 $f(t)$	频域 $F(j\omega)$
1. 线性	$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(j\omega)$
2. 时移	$f(t-t_0)$	$F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. 频移	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F[j(\omega-\omega_0)]$
4. 尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
	$f(at-b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\omega\frac{b}{a}}$
5. 对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
6. 时域微分	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
7. 时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}F(j\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$
8. 复频域微分	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$
9. 时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$
10. 频域卷积	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$

第四章　连续时间系统的频域分析

4-1　基 本 要 求

本章要求掌握系统时域特性与频域特性之间的关系；要求理解理想低通、高通、带通和全通滤波器的概念。重点掌握系统频域响应函数的概念、线性系统零状态响应的频域分析方法及无失真传输的条件。

4-2　重点、难点学习指导

1. 系统的频率响应

(1) 定义

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{R_{zs}(\mathrm{j}\omega)}{E(\mathrm{j}\omega)}$$

式中，$E(\mathrm{j}\omega)$为激励$e(t)$的傅里叶变换；$R_{zs}(\mathrm{j}\omega)$为系统零状态响应。

(2) 物理意义

设输入信号$e(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，则系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}R_{zs}(\mathrm{j}\omega) &= h(t) * \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau = H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\end{aligned}$$

可见，系统的零状态响应$R_{zs}(\mathrm{j}\omega)$等于激励$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$乘以加权函数$H(\mathrm{j}\omega)$，此加权函数$H(\mathrm{j}\omega)$即为系统的频率响应，也是$h(t)$的傅里叶变换。

(3) 频率特性

$H(\mathrm{j}\omega)$一般为复数函数，故可写成

$$H(\mathrm{j}\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} = R(\omega) + \mathrm{j}X(\omega)$$

$|H(j\omega)|$和$\varphi(\omega)$分别称为系统的幅频特性和相频特性，总称为系统的频率特性，也称为频率响应。$|H(j\omega)|$和$R(\omega)$为ω的偶函数，$\varphi(\omega)$和$X(\omega)$为ω的奇函数。

(4) $H(j\omega)$可实现的条件

① 在时域中，必须满足当$t<0$时，$h(t)=0$，即系统必须是因果系统；

② 在频域中，系统可实现的必要条件为$H(j\omega)\neq 0$，即必须满足佩利-维纳准则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2}d\omega<\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H^2(j\omega)d\omega<\infty$$

2. 线性时不变系统零状态响应的求解步骤

① 求激励信号$e(t)$的傅里叶变换$E(j\omega)$；

② 求系统的频率响应$H(j\omega)$；

③ 求零状态响应$r_{zs}(t)$的傅里叶变换$R_{zs}(j\omega)$，即$R_{zs}(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$；

④ 求该系统的时域零状态响应，即$r_{zs}(t)=\mathscr{F}^{-1}[R_{zs}(j\omega)]$。

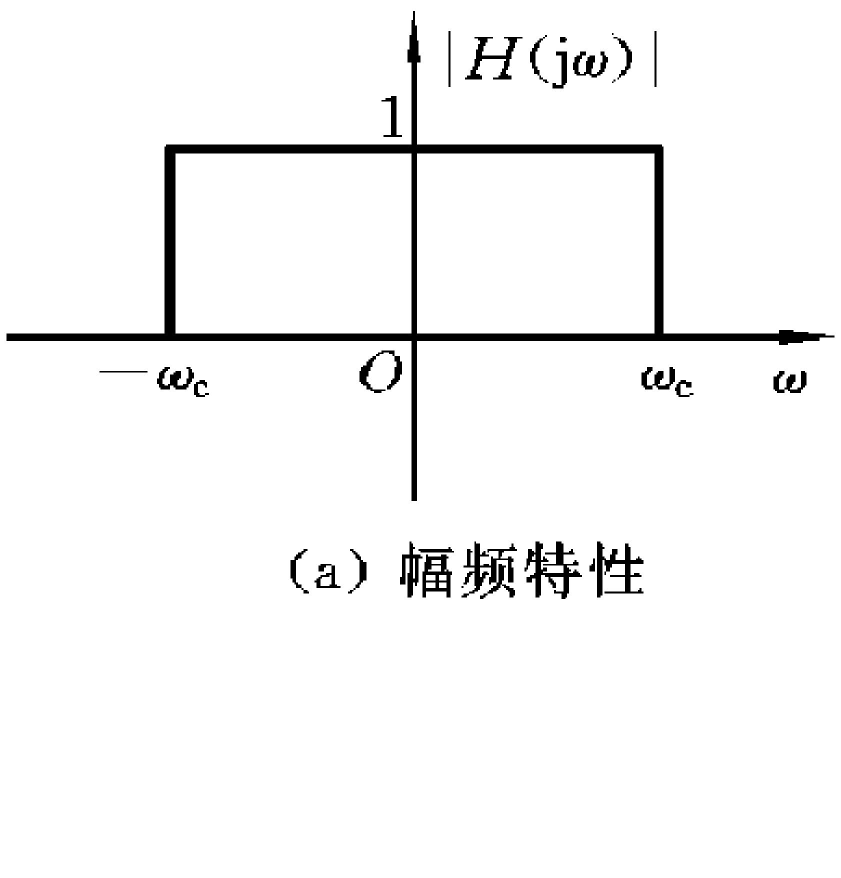
3. 理想低通滤波器及其传输特性

(1) 理想低通滤波器的频域特性

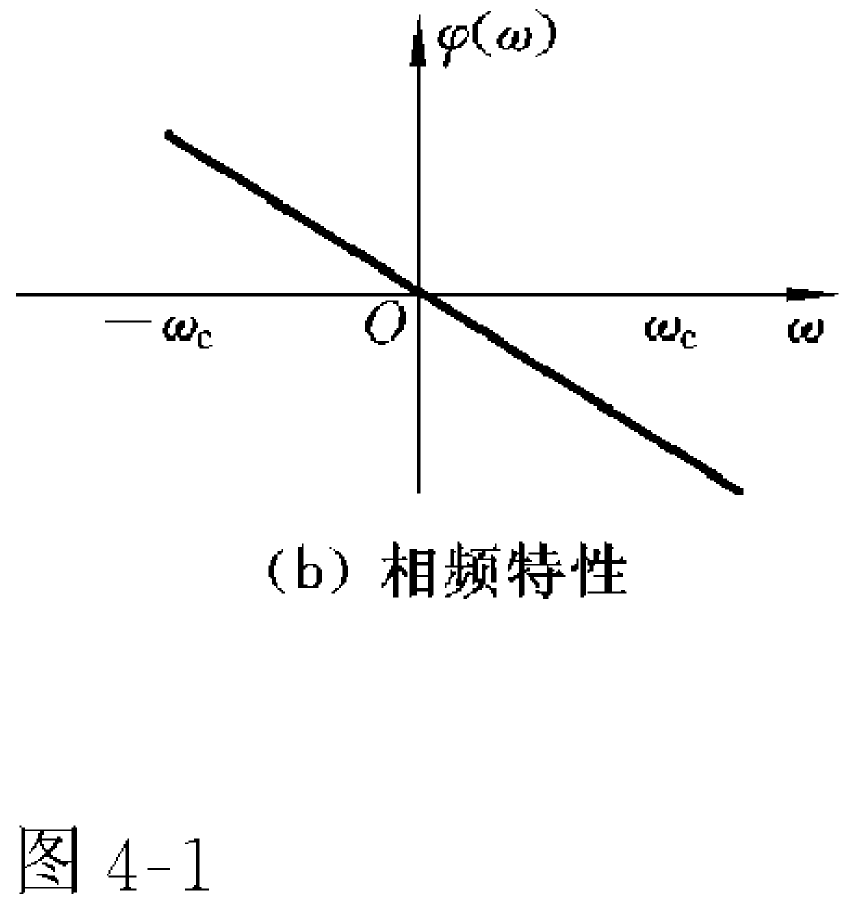
理想低通滤波器的频域特性如图4-1所示，其系统函数为

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=\begin{cases}e^{-j\omega t_0}, & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

这种低通滤波器将频率低于某一频率ω_c的所有信号无失真传输，而将频率



(a) 幅频特性



(b) 相频特性

图4-1

高于 ω_c 的信号完全抑制，ω_c 称为截止频率。相移特性是通过原点的直线。

(2) 理想低通滤波器的冲激响应

理想低通滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$$

理想低通滤波器的冲激响应是一个延时的抽样响应，峰值位于 t_0 时刻，其波形如图 4-2 所示。

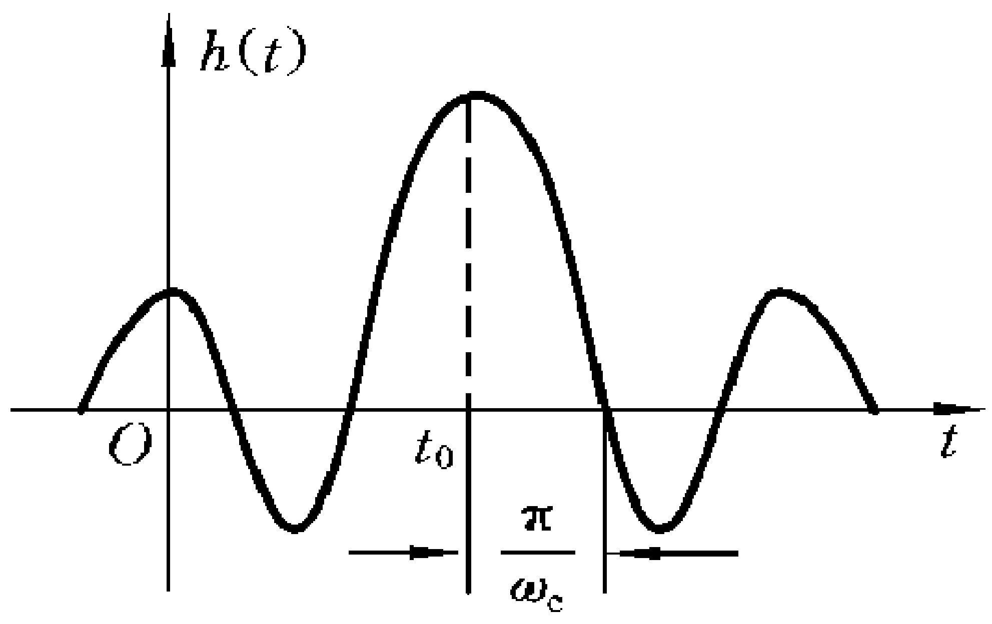


图 4-2

由图可以看出，激励信号 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时刻加入，但响应在 t 为负值时就已经出现，由此表明系统是非因果的，违背因果规律的系统是物理不可实现的。然而，有关理想滤波器的研究并不因其无法实现而失去价值，实际滤波器的分析与设计往往需要理想滤波器的理论作指导。

(3) 理想低通滤波器的阶跃响应

理想低通滤波器的阶跃响应为

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_c(t - t_0)]$$

响应的波形如图 4-3 所示，其最大峰值所对应的时刻为 $t_0+\dfrac{\pi}{\omega_c}$。由图可见，理想低通滤波器的截止频率 ω_c 越大，输出 $g(t)$ 上升越快。如果定义输出由最小值到最大值所需时间为上升时间 t_r，则

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c}$$

式中，f_c 为滤波器带宽。可见，阶跃响应的上升时间与系统的带宽成反比。这一重要结论具有普遍意义，适用于各种实际滤波器。

4. 无失真传输的条件

时域：　$r(t)=ke(t-t_0)$

频域：　$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

或　$|H(\mathrm{j}\omega)|=k,\quad \varphi(\omega)=-\omega t_0$

式中，k 和 t_0 均为常数。

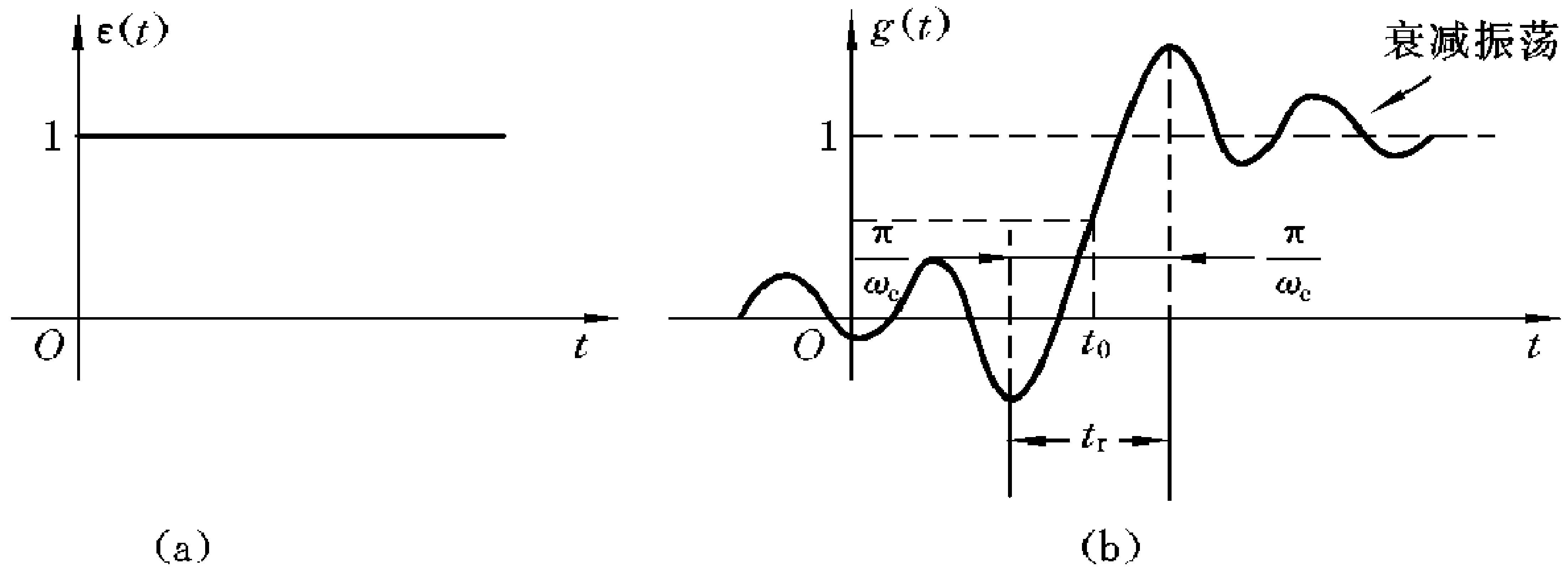


图 4-3

4-3　习 题 详 解

【4-1】　正弦交流电压$A\sin(\pi t)$，经全波整流产生如图4-4(b)所示的周期性正弦脉冲信号。求此信号通过图4-4(a)所示的RC 电路滤波后，输出响应中不为零的前三个分量。

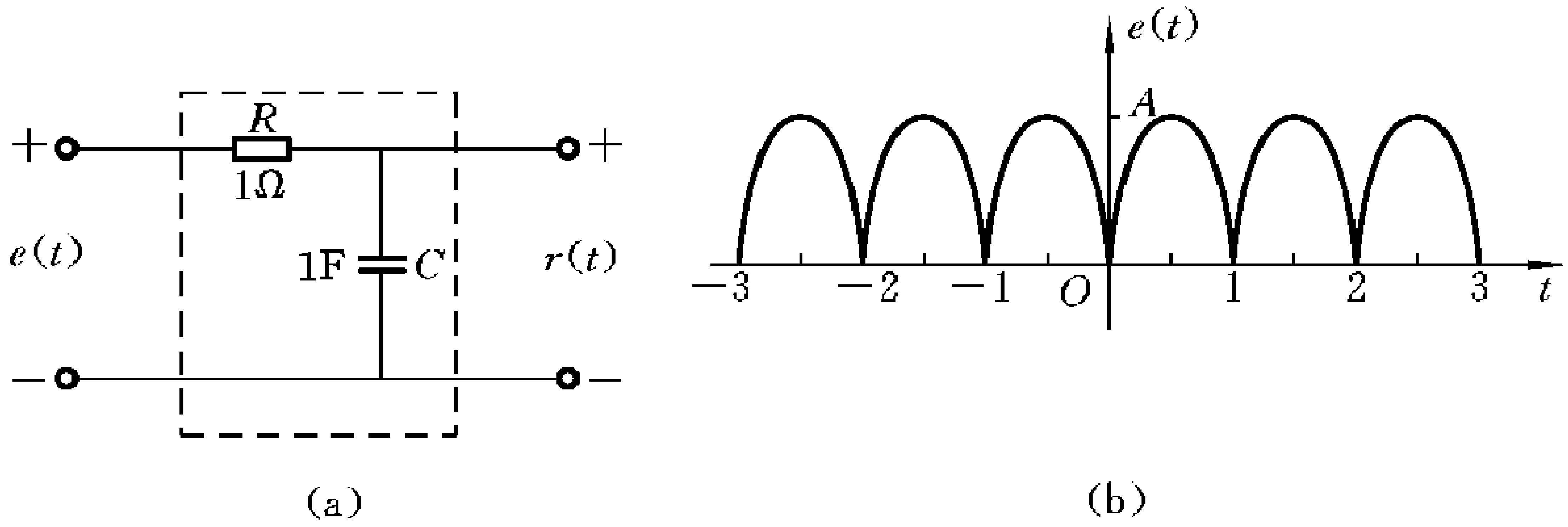


图 4-4

解　由图 4-4(b)可知$T=2$，所以

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

又

$$e(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\pi t)+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(n\pi t)$$

第五章　连续时间系统的复频域分析

5-1　基本要求

本章要求学生深刻理解拉普拉斯变换的定义、收敛域以及拉普拉斯变换与傅里叶变换之间的关系。熟练掌握拉普拉斯变换的性质、卷积定理的意义及它们的运用。能根据时域电路模型画出等效s域电路模型，并求解其全响应、零输入响应、零状态响应和冲激响应。能根据系统函数画出系统的直接模拟框图、串联实现形式、并联实现形式和级联实现形式的模拟框图和信号流图。本章重点是掌握用拉普拉斯变换的定义和性质求解拉普拉斯变换与反变换。

5-2　重点、难点学习指导

1. 拉普拉斯变换

(1) 定义

信号的单边拉普拉斯变换对

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

信号的双边拉普拉斯变换对

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

(2) 拉普拉斯变换存在的条件及收敛域

拉普拉斯变换$F(s)$存在的条件是被积函数为收敛函数，即

$$\int_{0^-}^{+\infty}|f(t)\mathrm{e}^{-st}|\mathrm{d}t<+\infty$$

在S平面上，上式的存在取决于s值的选择，也就是σ的选择。σ的取值范

围称为拉普拉斯变换的收敛域,也即:若$\sigma>\sigma_0$,使$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=0$,则$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$在$\sigma>\sigma_0$的全部范围内收敛,其积分存在,故拉普拉斯变换就存在。

(3) 常用函数的拉普拉斯变换

常用函数的拉普拉斯变换如表5-1所示。

表5-1　常用函数的拉普拉斯变换表

序号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta'(t)$	s
3	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
4	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
5	$t^n\varepsilon(t)$(n为正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
7	$t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
8	$\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
10	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
11	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
12	$t\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
13	$t\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

(4) 拉普拉斯变换的基本性质

拉普拉斯变换的性质揭示了信号 $f(t)$ 的时域特性与复频域特性之间的关系，利用这些性质可以使运算和分析得到简化。现将拉普拉斯变换的基本性质列于表 5-2 中。

表 5-2　拉普拉斯变换的性质及定理

序号	名称	结论
1	线性性质	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s)$
2	时移性质	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)\mathrm{e}^{-st_0}$
3	尺度变换性质	$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
4	频移性质	$f(t)\mathrm{e}^{\pm s_0 t} \leftrightarrow F(s\mp s_0)$
5	时域微分性质	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow sF(s)-f(0^-)$ $\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \leftrightarrow s^n F(s)-s^{n-1}f(0^-)$ $-s^{n-2}f'(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$
6	时域积分性质	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0^-)$ $f^{(-n)}(t)=(\int_{-\infty}^{t})^n f(x)\mathrm{d}x$ $\leftrightarrow \frac{F(s)}{s^n}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{s^{n-m+1}}f^{(-m)}(0^-)$
7	复频域微分性质	$-tf(t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$ $(-t)^n f(t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$
8	复频域积分性质	$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_{s}^{+\infty} F(\eta)\mathrm{d}\eta$
9	初值定理	$f(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$，$F(s)$ 为真分式

续表

序号	名称	结论
10	终值定理	$f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$,$F(s)$为真分式
11	时域卷积定理	$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)\cdot F_2(s)$
12	复频域卷积定理	$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}F_1(s)*F_2(s)$

2. 拉普拉斯反变换的求解

(1) 部分分式展开法

首先应用海维赛展开定理将$F(s)$展成部分分式,然后将各部分分式逐项进行反变换,最后叠加起来即为原函数$f(t)$。

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-s_n}$$

$$k_i=(s-s_i)F(s)\big|_{s=s_i}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

若$F(s)$的极点s_1为p阶重极点,$(n-p)$个互不相等的单根$s_2,s_3,\cdots,s_{n-p+1}$,则

$$F(s)=\frac{k_{11}}{(s-s_1)^p}+\frac{k_{12}}{(s-s_1)^{p-1}}+\cdots+\frac{k_{1p}}{(s-s_1)}+\sum_{i=2}^{n-p+1}\frac{k_i}{s-s_i}$$

$$k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}s^{i-1}}[(s-s_1)^pF(s)]\bigg|_{s=s_i}\quad (i=1,2,\cdots,p)$$

(2) 留数法

留数法是将拉普拉斯变换的积分运算转化为求被积函数$F(s)$各极点上留数的运算,即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{\text{极点}}[F(s)\mathrm{e}^{st}\text{ 的留数}]$$

若s_i为$F(s)$的一阶极点,则

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_i]=[(s-s_i)F(s)\mathrm{e}^{st}]\bigg|_{s=s_i}$$

若s_i为$F(s)$的p阶极点,则

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_i]=\frac{1}{(p-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(p-1)}}{\mathrm{d}s^{(p-1)}}[(s-s_i)^pF(s)\mathrm{e}^{st}]\bigg|_{s=s_i}$$

第六章　连续时间系统的系统函数

6-1　基 本 要 求

深刻理解系统函数的定义以及物理意义，能用多种方法求解系统函数。掌握系统极、零点的定义并能会画极零图。

本章重点是：能根据不同形式的系统求解出其系统函数，理解系统稳定性的意义，学会用系统的极点、罗斯-霍维茨判据来判定系统的稳定性。

6-2　重点、难点学习指导

1．系统函数 $H(s)$

(1) 定义

系统函数 $H(s)$ 定义为系统在零状态条件下，输出信号的拉普拉斯变换与输入信号的拉普拉斯变换之比，即

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{E(s)}$$

系统函数又称传输函数。当输入信号 $f(t)=\delta(t)$ 时，$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]$。

(2) 系统频率特性

$$H(\mathrm{j}\omega)=H(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

式中，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 为幅频特性，$\varphi(\omega)$ 为相频特性。

(3) 极零点分布图

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

式中，H_0 为常数；$z_1,z_2,\cdots,z_m$ 为 $H(s)$ 的零点；$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 $H(s)$ 的极点。在 s 平面上，零点用“○”表示，极点用“×”表示，将 $H(s)$ 的零点和极点全部画在 s 平面上得到的图称为系统的极零点分布图。

① 极零点分布规律：

a．极零点分布与实轴成镜像对称；

b．考虑到无穷远处可能存在零点或极点，则极点和零点的总数相等。

② 全通函数：如果系统函数在 s 平面右半平面的零点和在 s 平面左半平面的极点关于虚轴镜像对称，则这种网络函数称为全通函数。例如

$$H(s)=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

式中

$$p_1=p_2^*=-z_1^*=-z_2$$

③ 最小相移函数：如果系统函数 $H(s)$ 不仅全部极点位于 s 平面左半平面，而且全部零点也位于 s 平面左半平面（包括虚轴），则称这种函数为最小相移函数。

(4) 求解 $H(s)$ 的方法

① 由系统的冲激响应 $h(t)$ 求解，即 $H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\}$；

② 根据 s 域电路模型，按基本定义式求响应像函数与激励像函数的比，即得 $H(s)$；

③ 对零状态系统的微分方程进行拉普拉斯变换，求 $H(s)$；

④ 根据系统的模拟图求解；

⑤ 由系统的信号流图根据梅森公式求解。

2．系统的稳定性

(1) 系统稳定条件

若系统对有界激励产生的响应也是有界的，则该系统称为稳定系统，否则称为不稳定系统。稳定系统的必要条件是 $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=0$，其充要条件是系统的单位冲激响应 $h(t)$ 绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\mathrm{d}t<+\infty$$

① 在复频域中，$H(s)$ 的全部极点必须位于 s 平面的左半平面。

② 在复频域中，若 $H(s)$ 的极点中除了左半开平面上有极点外，只要在 $\mathrm{j}\omega$ 轴上有一对单阶的共轭极点，或在坐标原点处有一个单极点，则此系统就是临界稳定的。

③ 在复频域中，若 $H(s)$ 的极点中只要有一个极点位于 s 平面的右半开平面，则系统就是不稳定的；若出现的极点在虚轴上且是重阶的，则系统也是不稳定的。

(2) 罗斯-霍维茨判别法

由于$h(t)$的形式取决于$H(s)$的极点，故可根据$H(s)$极点在s平面上的分布来判断系统的稳定性。对于高阶系统，求特征根很不容易，但可用罗斯-霍维茨准则来判别。

具有实系数的n阶方程，其特征方程为

$$D(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$$

要使$D(s)=0$的根全部位于s平面的左半开平面上的充要条件是

① 多项式的全部系数a_i符号相同；

② 无缺项；

③ 罗斯-霍维茨阵列中第一列数的符号相同。若第一列数符号不全相同，则符号改变的次数就是$D(s)=0$所具有的正实部根的个数。

6-3　习题详解

【6-1】 求图6-1中电路的系统函数。

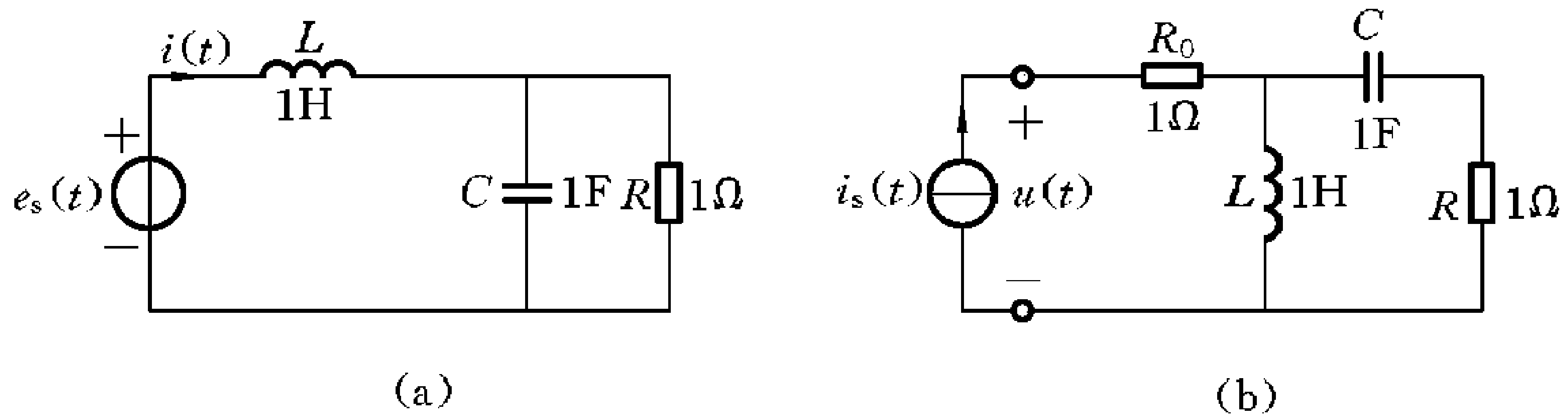


图6-1

解　(a) 由图6-1(a)所示电路图得转移导纳函数

$$H(s)=\frac{I(s)}{E_s(s)}=\frac{1}{Ls+\dfrac{1}{Cs+\dfrac{1}{R}}}=\frac{1}{s+\dfrac{1}{s+1}}=\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

(b) 由图6-1(b)所示电路图得转移阻抗函数

$$H(s)=\frac{U(s)}{I_s(s)}=R_0+\frac{1}{\dfrac{1}{Ls}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{Cs}+R}}=1+\frac{1}{\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{s}+1}}=\frac{2s^2+2s+1}{s^2+s+1}$$

【6-2】 求图6-2中电路的系统函数，并绘其极零点分布图。

第七章　离散时间系统的时域分析

7-1　基 本 要 求

熟练掌握典型序列的性质、序列的运算。深刻理解线性系统全响应的可分解性，熟练掌握零输入响应、单位样值响应和零状态响应的时域求解方法。要牢固掌握将系统等效为一个差分方程、一个差分算子和单位样值响应的方法。要深刻理解抽样定理的内容，抽样信号频谱与原信号频谱之间的关系。本章重点掌握香农抽样定理，根据系统差分方程画系统模拟框图，根据模拟框图列写差分方程。

7-2　重点、难点学习指导

1. 常用序列之间的关系

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(k-n)$$

2. 离散信号的卷积和

(1) 定义

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(i) f_2(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_2(i) f_1(k-i)$$

式中，$f_1(k)$和$f_2(k)$为一般序列。

当$f_1(k)$和$f_2(k)$都是因果序列时，

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$$

当$f_1(k)$是因果序列，$f_2(k)$是一般序列时，

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

当 $f_1(k)$ 是一般序列，$f_2(k)$ 是因果序列时，

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$$

(2) 性质

① 交换律：

$$f_1(k) * f_2(k) = f_2(k) * f_1(k)$$

② 结合律：

$$[f_1(k) * f_2(k)] * f_3(k) = f_1(k) * [f_2(k) * f_3(k)]$$

③ 分配律：

$$[f_1(k) + f_2(k)] * f_3(k) = f_1(k) * f_3(k) + f_2(k) * f_3(k)$$

④ 卷积和的求和：

$$\sum_{i=-\infty}^{k} [f_1(i) * f_2(i)] = \left[\sum_{i=-\infty}^{k} f_1(i)\right] * f_2(k) = f_1(k) * \left[\sum_{i=-\infty}^{k} f_2(i)\right]$$

⑤ $f(k)$ 与 $\delta(k)$ 的卷积和：

$$\begin{cases} f(k) * \delta(k) = f(k) f(k) * \delta(k-n) = f(k-n) \\ f(k) * \delta(k+n) = f(k+n) \\ f(k-n_1) * \delta(k-n_2) = f(k-n_1-n_2) \end{cases}$$

⑥ $f(k)$ 与 $\varepsilon(k)$ 的卷积和：

$$\begin{cases} f(k) * \varepsilon(k) = \sum\limits_{i=-\infty}^{k} f(i) \\ f(k) * \varepsilon(k-n) = \sum\limits_{i=-\infty}^{k-n} f(i) = \sum\limits_{i=-\infty}^{k} f(i-n) \end{cases}$$

⑦ 位移序列的卷积和：

$$\begin{cases} f_1(k) * f_2(k-n) = f_1(k-n) * f_2(k) \\ f_1(k) * f_2(k+n) = f_1(k+n) * f_2(k) \end{cases}$$

3. 抽样定理

香农抽样定理：为了能从抽样信号 $f_s(t)$ 中恢复出信号 $f(t)$，必须满足两个条件：

① 被抽样的信号 $f(t)$ 必须是限带信号，其带宽为 ω_m（或 f_m）；

② 抽样频率 $\omega_s \geqslant 2\omega_m$（或 $f_s \geqslant 2f_m$），或抽样间隔 $T_s \leqslant \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m}$。其最低允许抽样频率 $f_N = 2f_m$ 或 $\omega_N \geqslant 2\omega_m$ 称为奈奎斯特频率，其最大允许抽样间隔 $T_N = \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m}$ 称为奈奎斯特抽样间隔。

4. 系统全响应的求解

与连续时间系统时域分析一样，离散时间系统时域分析也有经典法和卷积求和法。经典法就是直接求解描述系统输入输出关系的差分方程式的方法。而卷积求和法是利用卷积求和求系统零状态响应的方法。

系统全响应可按以下三种方式分解：

① 全响应 $y(k)$ = 零输入响应 $y_{zi}(k)$ + 零状态响应 $y_{zs}(k)$；

② 全响应 $y(k)$ = 自由响应 + 强迫响应；

③ 全响应 $y(k)$ = 瞬态响应 + 稳态响应。

对于系统全响应的求解方法，学生应该重点掌握由零输入响应 $y_{zi}(k)$ 和零状态响应 $y_{zs}(k)$ 来求全响应。这可归纳为如下过程：

① 根据系统建立差分方程；

② 根据差分方程求算子方程；

③ 令算子方程的左边等于 0，得到特征方程，并求特征根；

④ 由特征根求系统零输入响应 $y_{zi}(k)$；

⑤ 由算子方程求冲激响应 $h(k)$；

⑥ 求系统零状态响应 $y_{zs}(k) = e(k) * h(k)$；

⑦ 求系统全响应 $y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$。

7-3　习 题 详 解

【7-1】 绘出下列离散信号的图形。

(1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\varepsilon(k)$　　(2) $2\delta(k) - \varepsilon(k)$

(3) $\varepsilon(k) + \sin\frac{k\pi}{8}\varepsilon(k)$　　(4) $k(2)^{-k}\varepsilon(k)$

第八章　离散时间系统的变换域分析

8-1　基 本 要 求

本章要求学生深刻理解 z 变换的定义、收敛域以及 z 变换与拉普拉斯变换之间的关系。熟练掌握 z 变换的性质，卷积定理的意义和它们的运用。会根据 z 变换的定义和性质求解 z 变换与反 z 变换。用 z 变换分析法来分析离散时间系统，并求其响应，包括全响应、零输入响应、零状态响应和单位样值响应。深刻理解系统函数 $H(z)$ 的定义、物理意义及其零极点概念，会用多种方法求解 $H(z)$。能根据 $H(z)$ 画出系统的模拟框图，以及根据模拟框图求出 $H(z)$。掌握由 $H(z)$ 的极点来判断系统的稳定性。重点掌握 z 变换、反 z 变换及其性质，线性时不变系统 z 域分析以及系统函数的意义和作用。

8-2　重点、难点学习指导

1. z 变换

(1) 定义

离散时间信号 $f(k)$ 的 z 变换定义为

双边 z 变换：　$$F(z)=\mathscr{Z}\{f(k)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

单边 z 变换：　$$F(z)=\mathscr{Z}\{f(k)\}=\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

(2) 收敛域

级数 $f(k)$ 收敛的充分必要条件是该级数绝对可和，即

双边 z 变换：$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(k)z^{-k}|<+\infty$$

单边 z 变换：$\sum_{0}^{+\infty}|f(k)z^{-k}|<+\infty$

在 z 平面上，满足上式的 z 的取值范围称为 $F(z)$ 的绝对收敛域，简称收敛域。

(3) 常用信号的 z 变换

常用信号的单边 z 变换如表 8-1 所示。

表 8-1　常用信号的单边 z 变换

序号	$f(k)$	$F(z)$
1	$\delta(k)$	1
2	$\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
3	$a^k\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
4	$e^{\alpha k}\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$
5	$k\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
6	$k^2\varepsilon(k)$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
7	$ka^k\varepsilon(k)$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
8	$\sin(\beta k)\varepsilon(k)$	$\dfrac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$
9	$\cos(\beta k)\varepsilon(k)$	$\dfrac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$

(4) z 变换的基本性质

单边 z 变换的性质如表 8-2 所示。

表8-2　单边 z 变换的性质

序号	名称	时域	z 域
1	线性	$a_1f_1(k)+a_2f_2(k)$	$a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$
2	移位 $(m>0)$	$f(k-m)\varepsilon(k)$	$z^{-m}F(z)+z^{-m}\sum\limits_{k=-m}^{-1}f(k)z^{-k}$
		$f(k-m)\varepsilon(k-m)$	$z^{-m}F(z)$
		$f(k+m)\varepsilon(k)$	$z^{m}F(z)-z^{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}f(k)z^{-k}$
3	z 域尺度变换	$a^kf(k)$	$F\left(\dfrac{z}{a}\right)$
4	时域卷积	$f_1(k)*f_2(k)$	$F_1(z)\cdot F_2(z)$
5	频域卷积	$f_1(k)\cdot f_2(k)$	$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C\dfrac{F_1(\eta)\cdot F_2\left(\dfrac{z}{\eta}\right)}{\eta}\mathrm{d}\eta$
6	z 域微分	$kf(k)$	$-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$
7	初值定理	$f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z)$	
8	终值定理	$f(\infty)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)F(z)$	

(5) 反 z 变换

若已知 $F(z)$ 及其收敛域，则

$$f(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{F(z)\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

称为 $F(z)$ 的反 z 变换。求反 z 变换的方法有三种：幂级数展开法、部分分式展开法、留数法。

① 幂级数展开法：将 $F(z)$ 展开成 z^{-k} 的幂级数，则 z^{-k} 的系数就是 $f(k)$ 的

相应项。

② 部分分式展开法：若$\dfrac{F(z)}{z}$为有理真分式，则可将$\dfrac{F(z)}{z}$展开成部分分式，然后乘以z得$F(z)$，再利用常用z变换进行反z变换求出$f(k)$。

③ 留数法：

$$f(k)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

$$=\sum_i \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]\Big|_{C内诸极点z_i}\qquad (k\geqslant 0)$$

式中，C为包围$F(z)z^{k-1}$全部极点的闭合路径；z_i为$F(z)z^{k-1}$的极点；Res表示极点的留数。

(6) s域与z域的关系

① z变换$F(z)$与拉普拉斯变换$F(s)$的关系：

$$F(s)=F(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT}}$$

$$F(z)=F(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

可见拉普拉斯变换中复变量s与z变换中复变量z满足关系$z=\mathrm{e}^{sT}$或$s=\dfrac{1}{T}\ln z$。

② 映射关系：根据$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$与$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$之间的变换关系，有

$\sigma=0$时，$|z|=1$，即s平面的$\mathrm{j}\omega$轴映射成z平面的单位圆周；

$\sigma<0$时，$|z|<1$，即s平面的左半平面映射成z平面的单位圆内；

$\sigma>0$时，$|z|>1$，即s平面的右半平面映射成z平面的单位圆外。

2. 离散时间系统的系统函数$H(z)$

(1) 系统函数定义

系统零状态响应与激励的z变换之比，即

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}$$

(2) 系统稳定条件

① 系统稳定的充分必要条件是其单位函数响应绝对可和，即

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$$

② 稳定的因果系统其收敛域为 $|z| \geqslant 1$，即 $H(z)$ 的全部极点必须落在单位圆之内。

(3) 离散时间系统的频率特性

$$H(e^{j\omega T}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = |H(e^{j\omega T})| e^{j\varphi(\omega)}$$

式中，$H(e^{j\omega T})$ 为系统频率特性，是频率 ω 的周期函数；$|H(e^{j\omega T})|$ 称为幅频特性，是 ω 的偶函数，$\varphi(\omega)$ 称为相频特性，是 ω 的奇函数。

(4) 离散系统的正弦稳态响应

若已知激励 $f(k) = A\cos(\omega Tk + \theta)\varepsilon(k)$，系统频率特性 $H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})| e^{j\varphi(\omega T)}$，则系统的正弦稳态响应为

$$y(k) = A|H(e^{j\omega T})|\cos[\omega Tk + \theta + \varphi(\omega T)]\varepsilon(k)$$

3. 离散时间系统的 z 变换分析法

离散时间系统的 z 域分析的一般步骤：

① 建立系统差分方程；

② 对差分方程两边同时进行 z 变换，得 z 域代数方程；

③ 求解 z 域代数方程，求得响应的 z 域解；

④ 对 z 域解进行反 z 变换，求得响应的时域解。

8-3 习题详解

【8-1】 利用定义式求下列序列的 z 变换并标注收敛区。

(1) $f(k)=\{1,-1,1,-1,1,\cdots\}$　　(2) $f(k)=\{0,1,0,1,0,\cdots\}$

(3) $f(k)=\delta(k-k_0)(k_0>0)$　　(4) $f(k)=\delta(k+k_0)(k_0>0)$

(5) $f(k)=0.5^k\varepsilon(k-1)$　　(6) $f(k)=-\varepsilon(-k-1)$

解 (1) 由 z 变换的定义得

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k} = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - \cdots = \frac{1}{1-z^{-2}} + \frac{-z^{-1}}{1-z^{-2}}$$