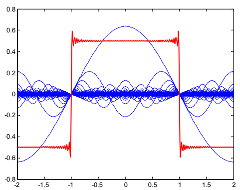
信息大类平台课：信号与线性系统

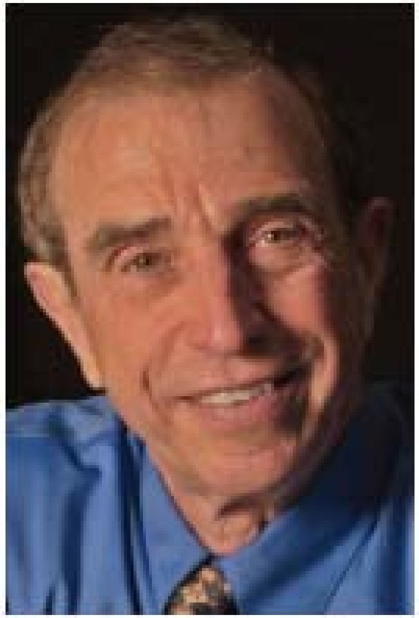
第三章 连续信号的正交分解

第5讲 周期信号的傅里叶级数

郭红星
华中科技大学计算机学院



本讲内容



- 周期信号的定义

  即每隔一段时间T，重复出现相同波形的信号

- 常见的周期信号
  - 正弦信号
  - 矩形脉冲信号
  - 三角脉冲信号
- 傅里叶级数的表示形式与重要意义
- 傅里叶级数表示的数学基础及科学思想
- 学习目标
  - 掌握周期信号的傅里叶级数表示方法
  - 初步探讨其科学意义和工程应用
  - 体会傅里叶级数理论形成过程中的科学精神

“统治”世界的十大算法

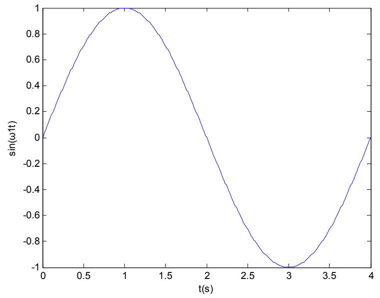
- 1、排序
- 2、傅里叶变换
- 3、迪杰斯特拉算法
- 4、RSA算法
- ……

3.1 CTFS及其意义

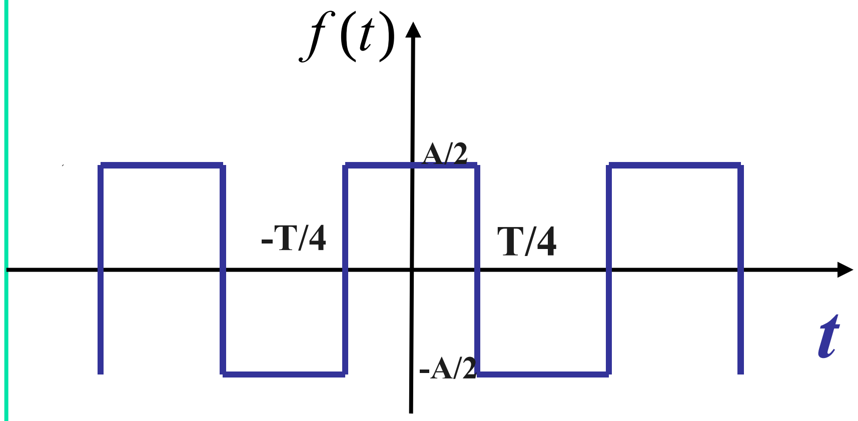
典型(近似)周期信号

- **正弦信号** $f(t)=\sin\frac{2\pi}{T}t=\sin\omega t$

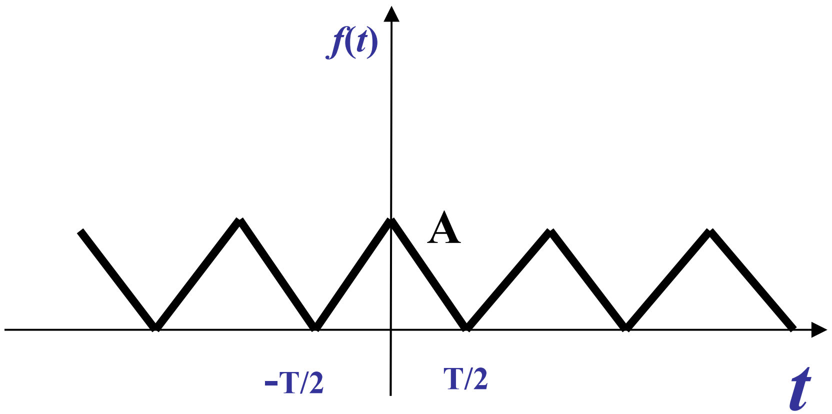
  其中，T为信号的周期，$\omega=2\pi/T=2\pi f$，ω 为角频率，f为(线性)频率



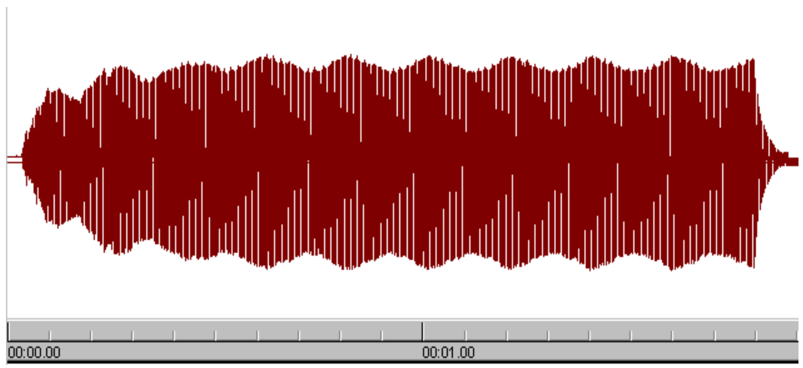
- **矩形脉冲信号**



- **三角脉冲信号**

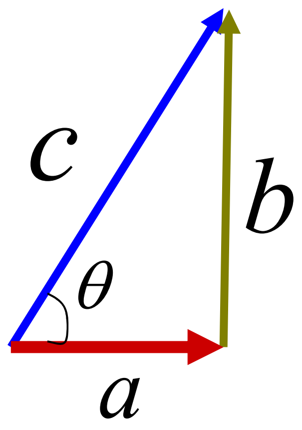


- **Pan flute**



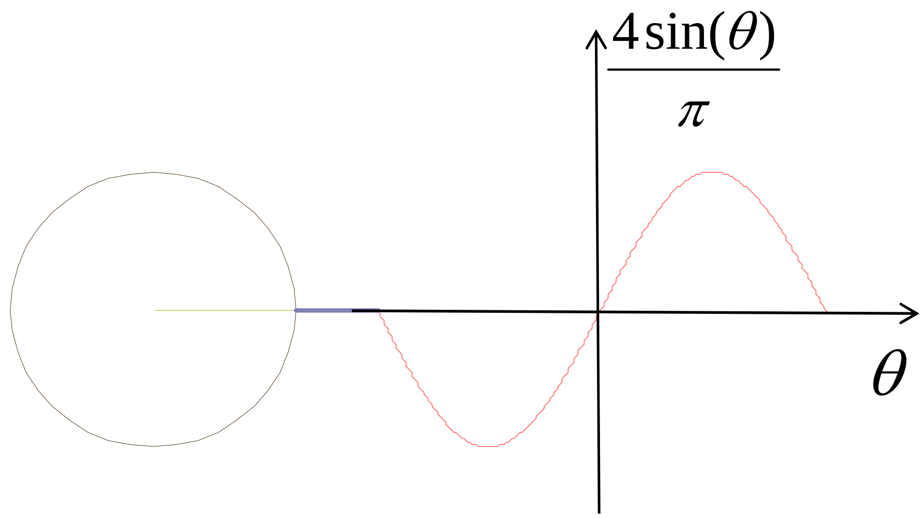
正弦信号再认识

- 为什么在中学（高中）阶段要反复学习、演练正弦（余弦）函数？



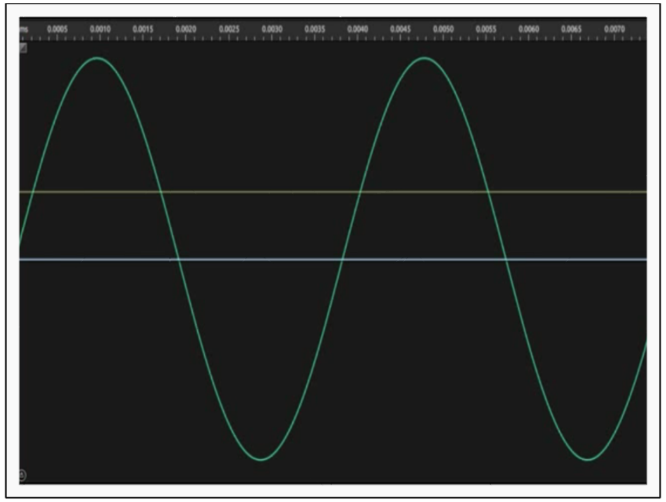
$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$

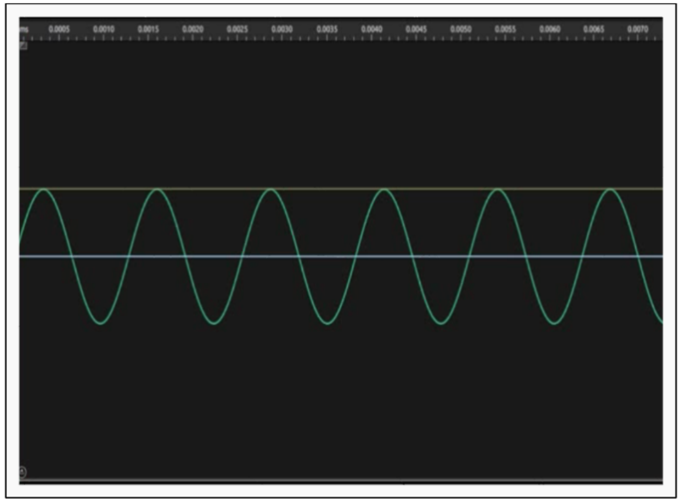
$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$



不同频率正弦信号的听觉感知

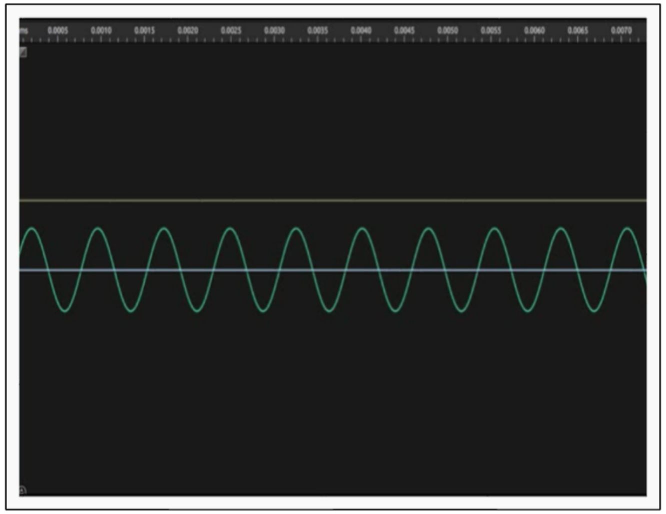
1倍频率音频

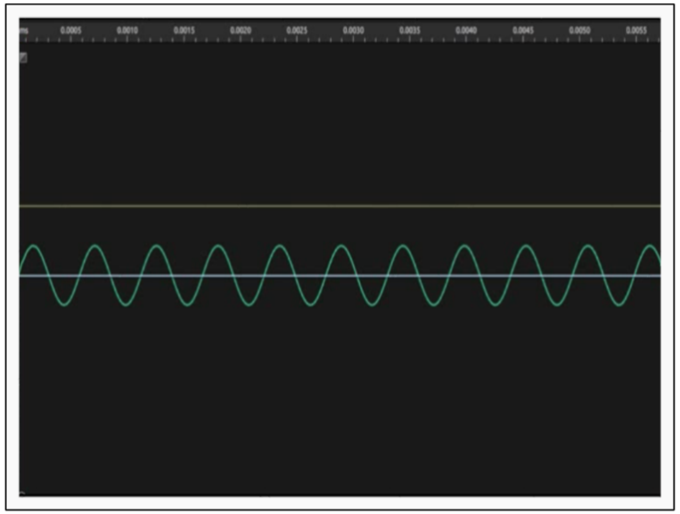




3倍频率音频

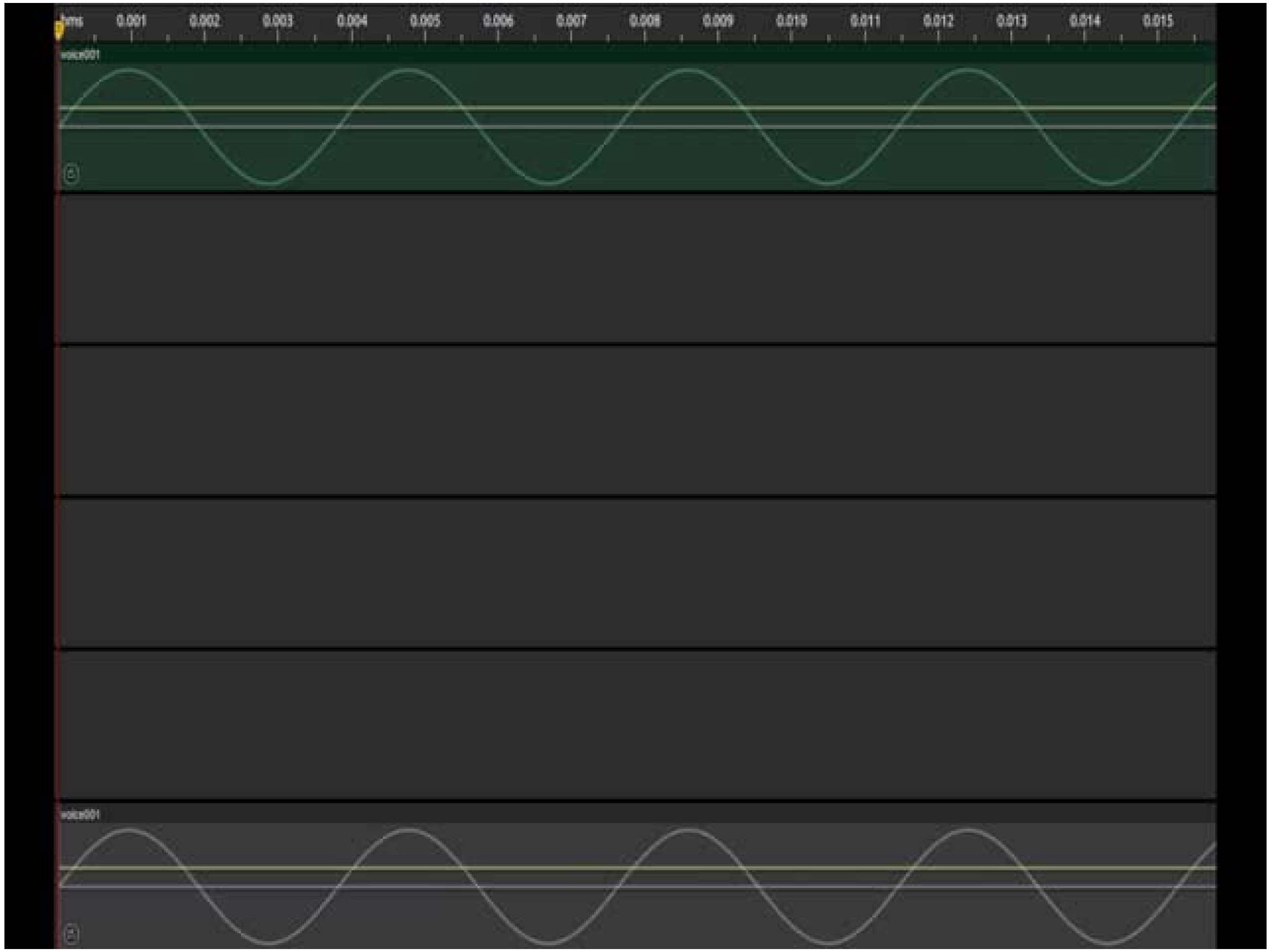
5倍频率音频





7倍频率音频

多个频率正弦信号的线性组合



正弦波叠加形成合成波的过程–有图有真相

$N=1$

$N=2$

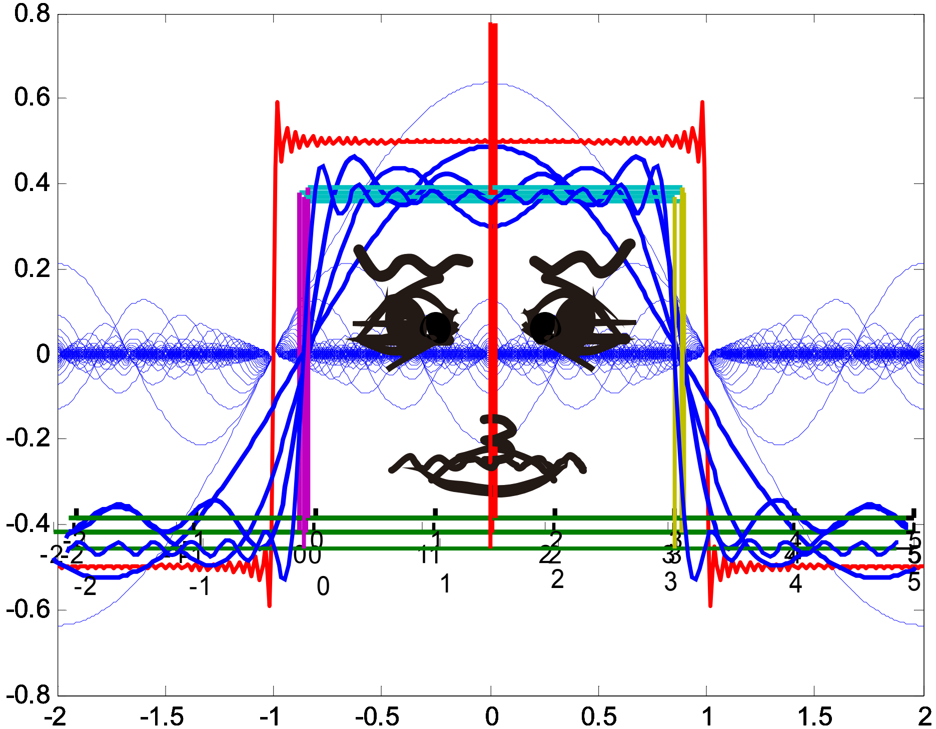
思考：你有什么发现？

■真郁闷

■自然萌

$N=3$

$N=9$



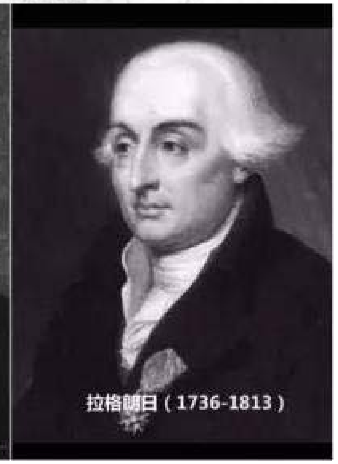
思考：其逆过程成立吗？

■萌萌哒

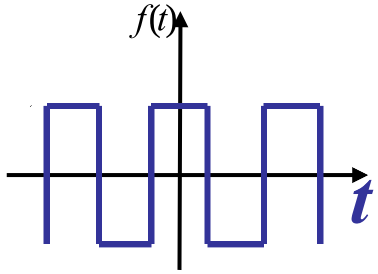
■天然呆

傅里叶(Jean Baptiste Fourier，1768-1830)

- 1807年，他有一个疯狂的想法:
  - 任何周期信号都可表示为不同 频率正弦信号（谐波）的加权和
- 几乎没有人相信他的想法
  - 包括拉格朗日(1736-1813)，拉普拉斯(1749-1827)，泊松及其他大牛—拉格朗日一直反对该论文发表
  - 1822年才发表于“热传导的解析理论”中，直到1878年才被翻译为英文
- 然而，这却是真的!
  - 这就是傅里叶级数



周期信号的傅里叶级数表示



$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

$$(\omega_1=\frac{2\pi}{T})$$

基波频率

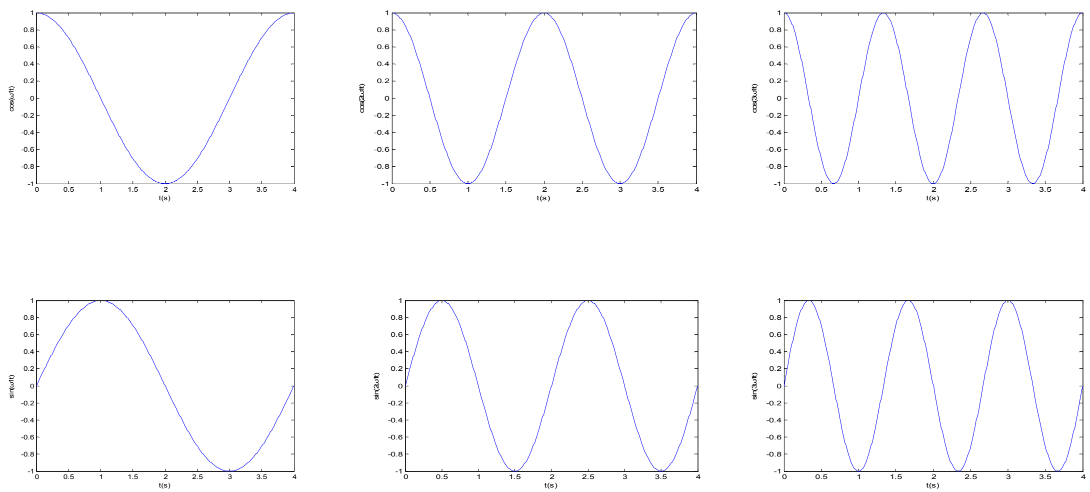
高等数学级数知识

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(t)dt \quad (\text{直流分量})$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin n\omega_1 t dt$$

$n=1$	$n=2$	$n=3$
基波分量	二次谐波	三次谐波



周期信号的傅里叶级数表示

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

利用三角函数积化和差公式

$c_0=a_0$ $c_n=\sqrt{a^2{}_n+b^2{}_n}$ $\phi_n=-\arctan\dfrac{b_n}{a_n}$

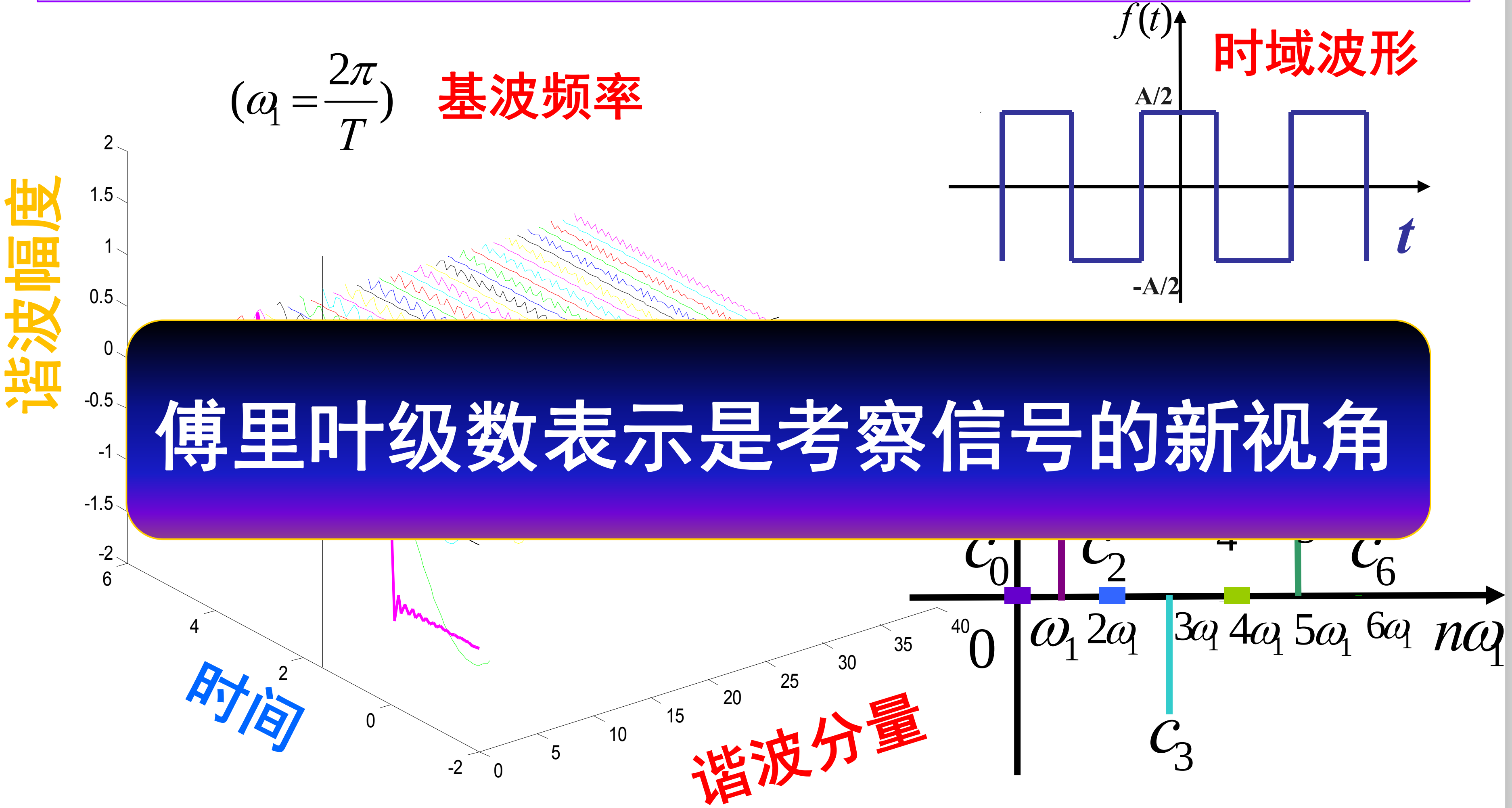
$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\phi_n)$$

思考：用傅里叶级数表示周期信号有什么好处？

矩形波的谐波表示过程示意图

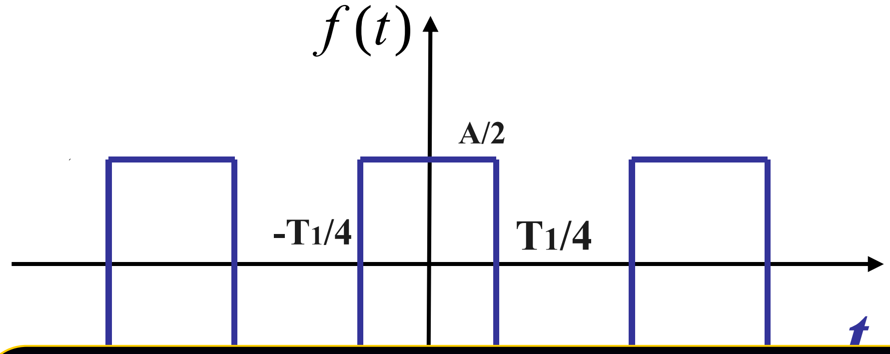
$$f(t)=\frac{2A}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\cdots\right)$$

$\left(\omega_1=\frac{2\pi}{T}\right)$ 基波频率



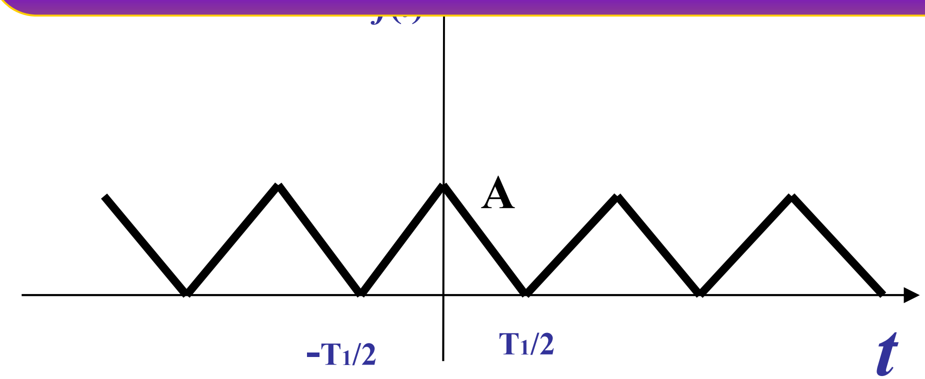
傅里叶级数表示是考察信号的新视角

傅里叶级数表示的作用

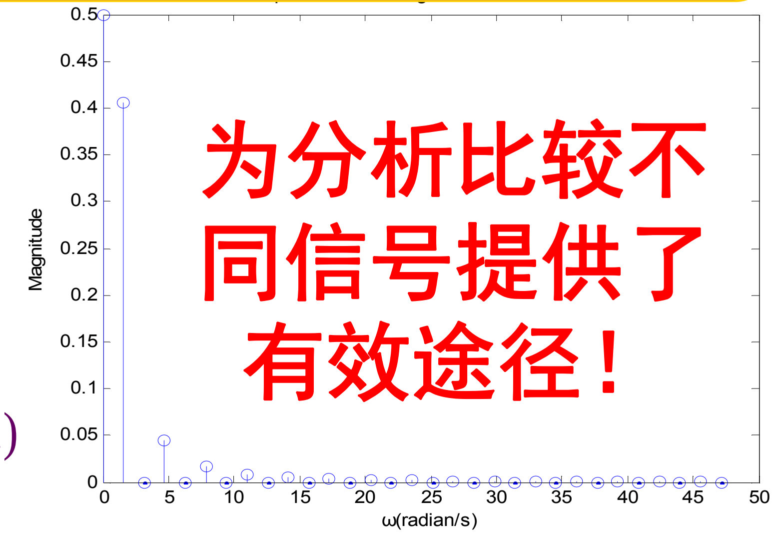


这两个信号到底有什么不同？

傅里叶级数表示为考察不同信号提供了共同的基准



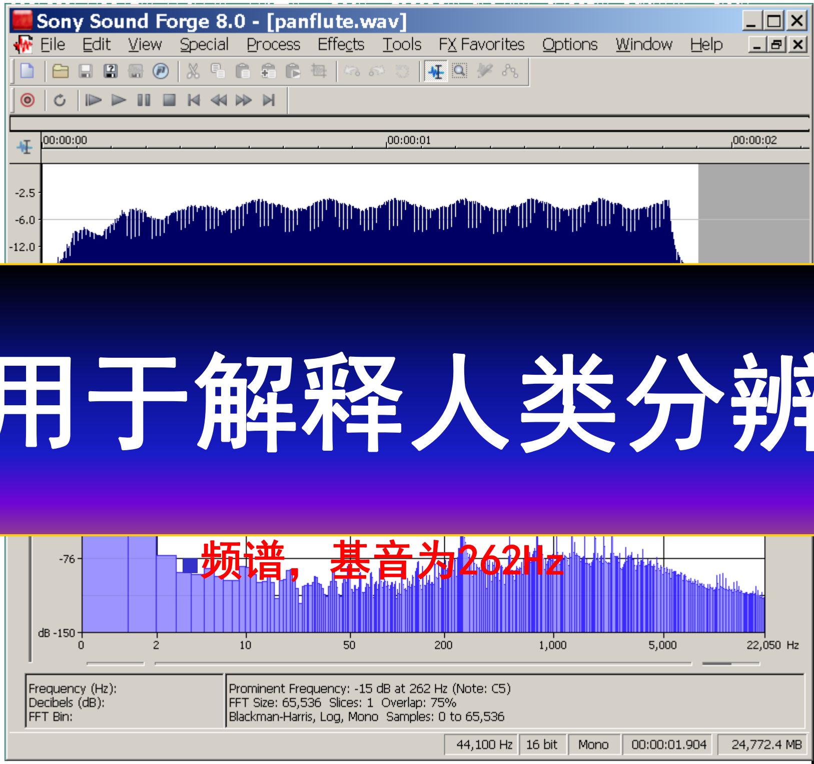
$$f(t)=\frac{A}{2}+\frac{4A}{\pi^2}(\cos\omega_1 t+\frac{1}{9}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{25}\cos 5\omega_1 t+\ldots)$$

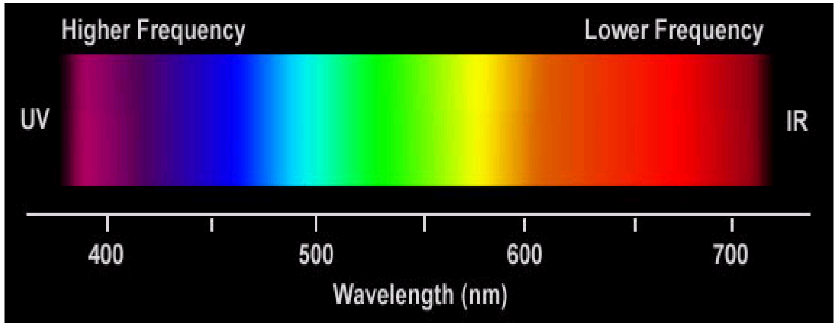


为分析比较不同信号提供了有效途径！

傅里叶级数表示的科学意义

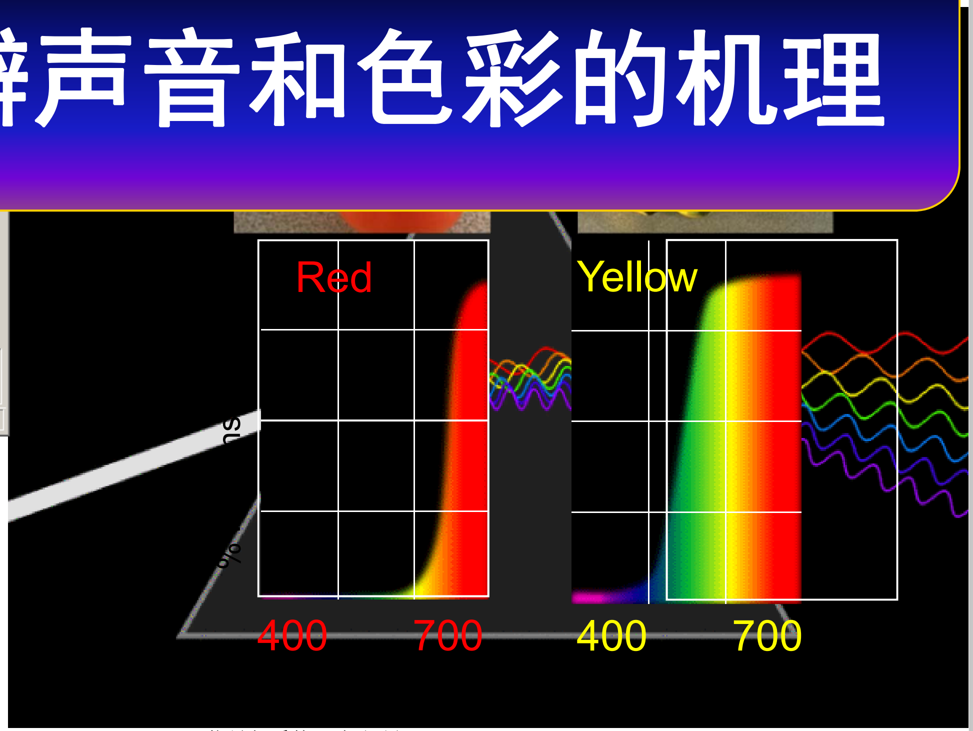
■请听一段乐器的声音





用于解释人类分辨声音和色彩的机理

■乐音的音调由乐音信号的基音（基波分量）确定，音色由于泛音成分（各次谐波分量）不同，频谱结构各异，使得人听起来明显感觉不同



傅里叶级数表示的应用价值

■请听一首MP3歌曲

■首先对信号进行傅里叶变换，利用**人类听觉系统对不同频率信号感知敏感程度不同**的特点及其他技术，将音频数据**压缩了10倍**以上

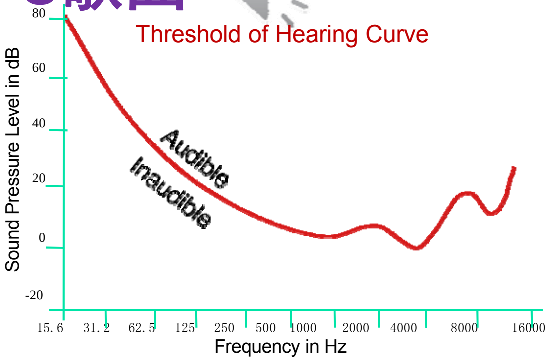
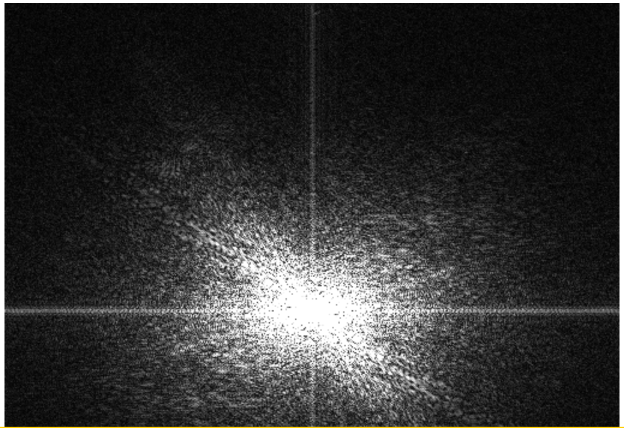


Figure : Threshold of Hearing Curve

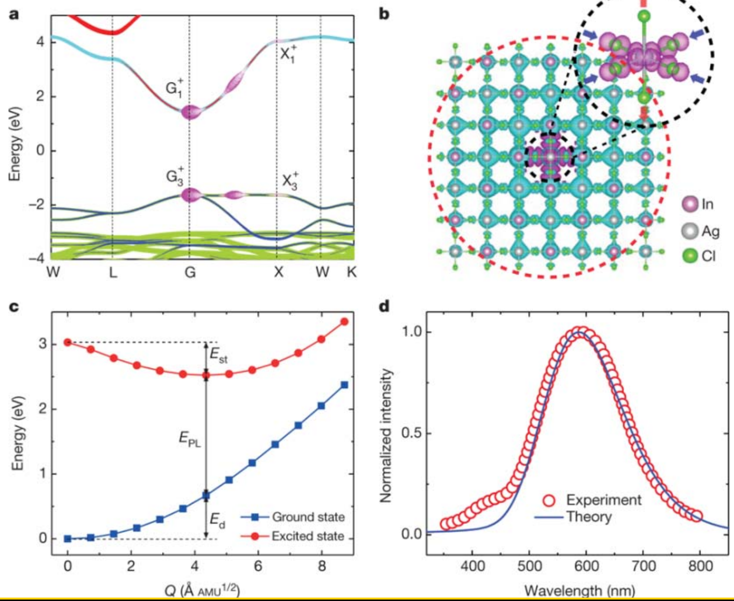


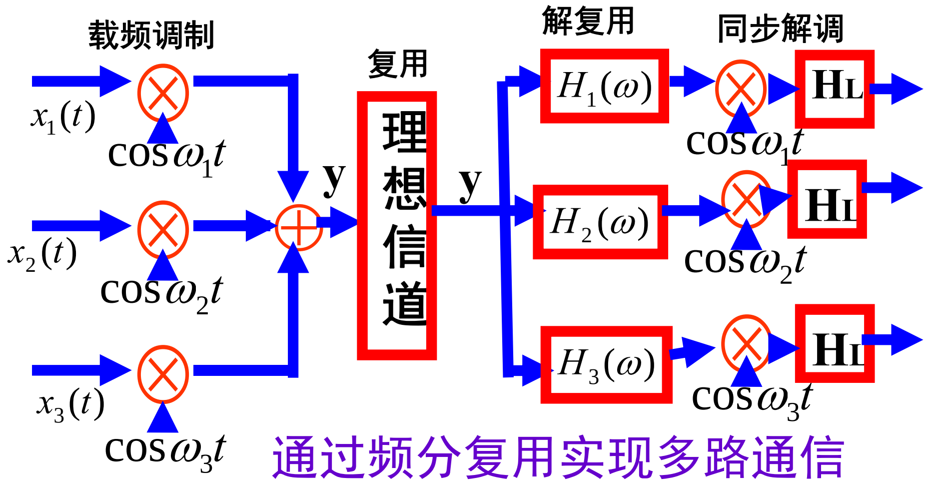
使大数据变“小”的理论基础之一

原始图像

用JPEG2000压缩40倍的图像

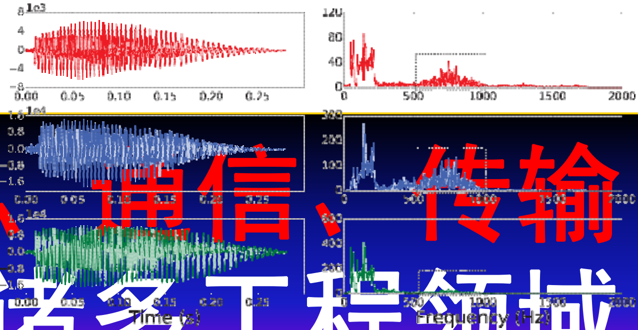
傅里叶级数表示的工程应用





通过频分复用实现多路通信

Figure: Original (top), recorded (middle) and recovered (bottom) voice signals. The modulated voice command dif- fers from both the original signal and the recorded one in the frequency range between 500 and 1000 Hz.



广泛应用于发光、显示、通信、传输

乃至信息与系统安全等诸多工程领域

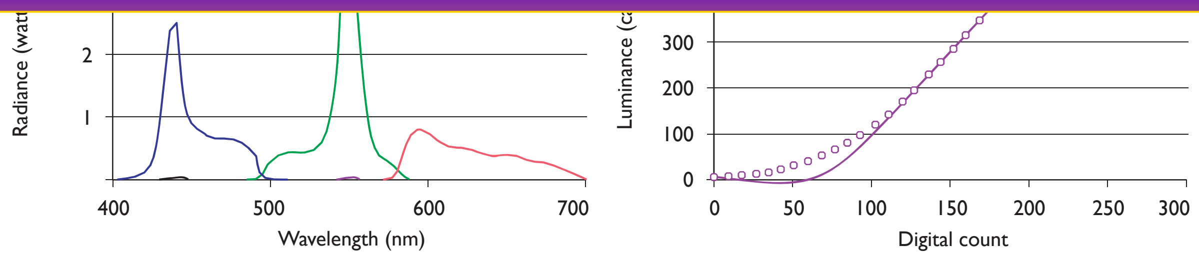
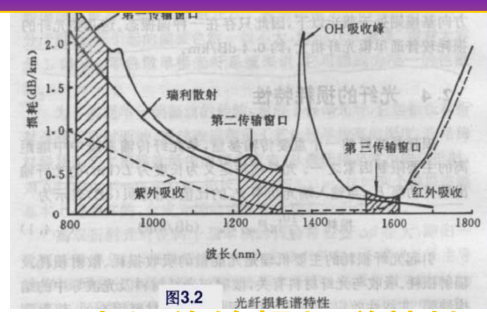


Figure (A)The spectral power distributions of the three primaries in an LC display.(B)The transduction function of the same display.



光纤传输损耗谱特性

3.2 CTFS的理论基础

傅里叶级数的收敛条件

- 同时满足如下三个条件的信号能用傅里叶级数表示（充分条件）
  1. ① 在一个周期内，若有间断点存在，间断点的数目应是有限个
  2. ② 极大值和极小值数目是有限个
  3. ③ 绝对可积性，即 $\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} |f(t)| dt < \infty$

- 狄里赫利(1805-1859)条件(1829年给出)，工程中遇到的信号通常都能满足

思考：傅里叶级数的理论基础是什么？

即为什么能这样分解？

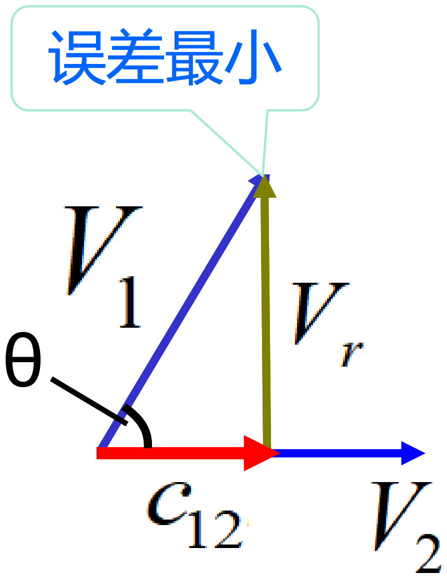
矢量的近似表示与正交

- 用矢量 V_2 来近似表示矢量V_1，V_r 是它们的差，如下式：

$$V_1 - c_{12}V_2 = V_r$$

点积

$$c_{12}V_2 = V_1\cos\theta = \frac{V_1V_2\cos\theta}{V_2} = \frac{V_1\cdot V_2}{V_2}$$



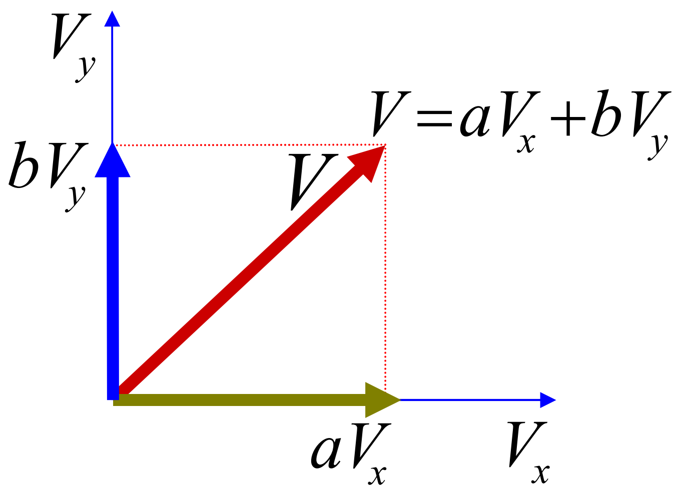
$$c_{12} = \frac{V_1\cdot V_2}{V_2^{\ 2}}$$

c_{12}表示V_1和V_2互相接近程度

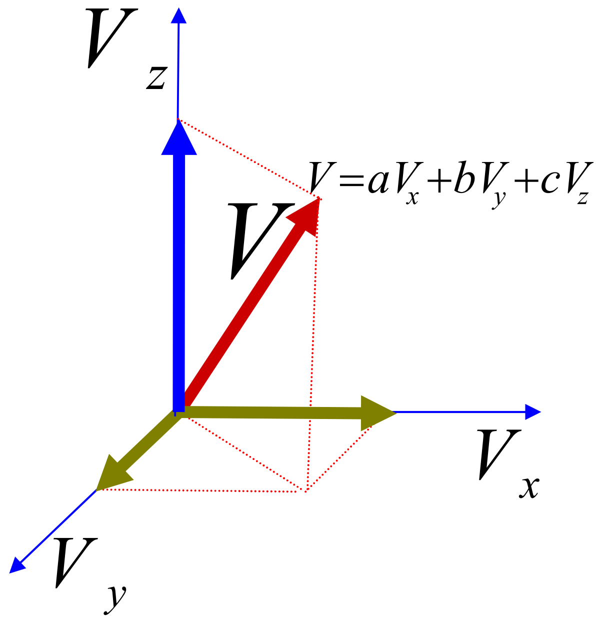
- 当V_1，V_2完全重合，则θ=0°，c_{12}=1
- 随夹角增大，c_{12}减小
- 当 θ=90°，V_1和V_2相互垂直，c_{12}=0，两矢量点积为0

正交矢量集及典型例子

- 由两两正交的矢量组成的矢量集合，称为**正交矢量集**



二维正交集



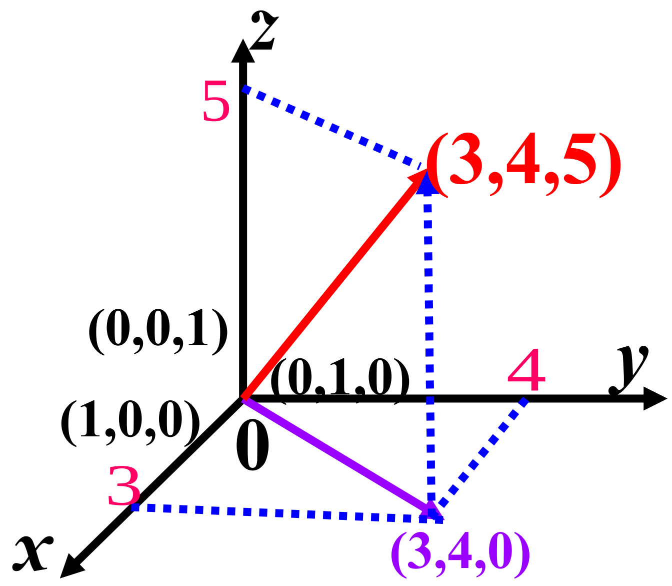
三维正交集

矢量的代数表示与正交分解

$$\mathbf{x},\mathbf{y} \in \{V_x, V_y, V_x\}$$

$$V_x = [1,\ 0,\ 0]$$
$$V_y = [0,\ 1,\ 0]$$
$$V_z = [0,\ 0,\ 1]$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = \begin{cases} 0\,for & \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 1\,for & \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



$$[3,4,5] = 3[1,0,0] + 4[0,1,0] + 5[0,0,1]$$

从有限
到无限

$$[a, b, c, \cdots,] = a[1,0,0,\cdots,] + b[0,1,0,\cdots,] + c[0,0,1,\cdots,]$$

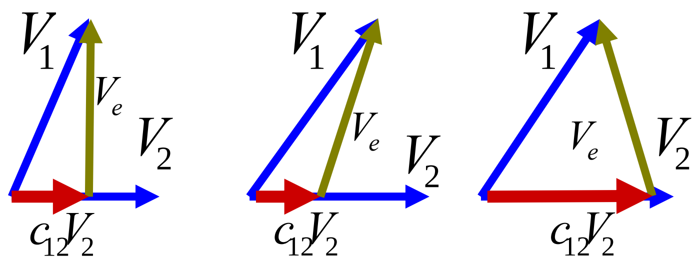
从离散
到连续

$$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_i g_i(t) + \cdots$$

函数的近似表示

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \qquad (t_1 < t < t_2)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt$$



令 $\dfrac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0$，则误差 $\overline{\varepsilon^2}$ 最小

函数的正交

$$\frac{d}{dc_{12}}\left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t)-c_{12}f_2(t)]^2\right\}dt=0$$

$$\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dc_{12}}f_1^2(t)dt-2\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)dt+2c_{12}\int_{t_1}^{t_2}f_2^2(t)dt\right]=0$$

$$-2\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)dt+2c_{12}\int_{t_1}^{t_2}f_2^2(t)dt=0$$

■解得 $c_{12}=\dfrac{\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}f_2^2(t)dt}$ $\xrightarrow{\text{两个函数的正交条件}}$ $\boxed{\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)dt=0}$

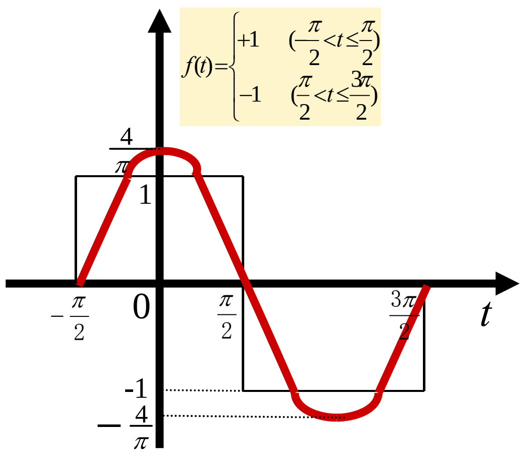
若c_{12}=0，则$f_1(t)$不包含$f_2(t)$ 的分量，则称$f_1(t)$ 和$f_2(t)$ 正交。

例题1-函数的近似表示与正交

试用cos$t$ 在区间$(\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$来近似(1)$f(t)$和(2)余弦sin$t$

解(1)： $c_{12}=\dfrac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t)\cos t dt}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt}=\frac{1}{\pi}[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos t)dt]=\frac{4}{\pi}$

所以：$f(t)\approx\dfrac{4}{\pi}\cos t$



(2) 因为 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t\cos t dt=0$

所以 $c_{12}=0$

说明sin$t$ 中不包含 cos$t$ 分量，即sin$t$ 和cos$t$ 正交。

正交函数集

n个函数$g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)$构成一函数集，

如在区间（t_1, t_2）内满足正交特性，即

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt = K_i$$

- 则此函数集称为正交函数集

正交函数集的完备性

- 正交信号彼此之间极端的“不相似”
- 完备正交函数集$\{g_r(t)\}$是指：在集外不存在与集内互为正交的函数$x(t)$，使得：

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_r(t) dt = 0$$

- 则$\{g_r(t)\}$是完备的正交函数集，也即所有的正交函数都包含此正交函数集中

用完备正交函数集表示信号

- 信号(函数)$f(t)$由完备正交函数集的线性组合表示

$$f(t)=c_1g_1(t)+c_2g_2(t)+\cdots+c_ig_i(t)+\cdots$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}c_rg_r(t)$$

- 由最小方均误差准则，$\dfrac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial c_i}=0$要求系数$C_i$满足

$$c_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)g_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}g_i^{\,2}(t)dt}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)g_i(t)dt$$

- 归一化正交函数集：

$$\int_{t_1}^{t_2}g_i^2(t)dt=1 \qquad c_i=\int_{t_1}^{t_2}f(t)g_i(t)dt$$

信号的有限项近似表示误差

- 信号$f(t)$可由完备集中的n个正交函数的线性组合所近似

$$f(t)\approx c_1g_1(t)+c_2g_2(t)+\cdots+c_ng_n(t)=\sum_{r=1}^{n}c_rg_r(t)$$

- 有限项近似的误差：

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt-\sum_{r=1}^{n}k_rc_r^2\right]$$

- 对归一化正交函数集有：

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt-\sum_{r=1}^{n}c_r^{\,2}\right]$$

- 证明过程见附录

傅里叶级数表示的理论基础与科学思想

- 因为：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega_1 t.\sin m\omega_1 t dt=0,\forall m,n$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega_1 t.\cos m\omega_1 t dt=\begin{cases}\frac{T}{2}=k_n, m=n\\ 0, m\neq n\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin n\omega_1 t.\sin m\omega_1 t dt=\begin{cases}\frac{T}{2}=k_n, m=n\\ 0, m\neq n\end{cases}$$

- 于是，三角谐波函数构成(完备)正交函数集

$$\{\cos n\omega_1 t\}_{n\to\infty}$$

$$\{\sin n\omega_1 t\}_{n\to\infty}$$

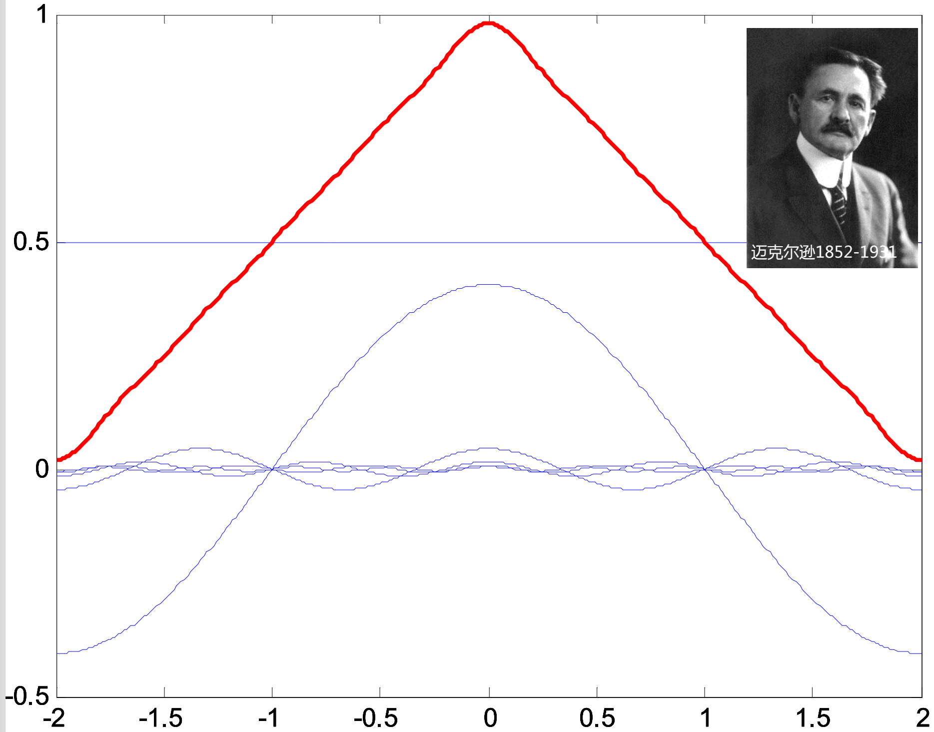
- 所以：$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$
- 其中：

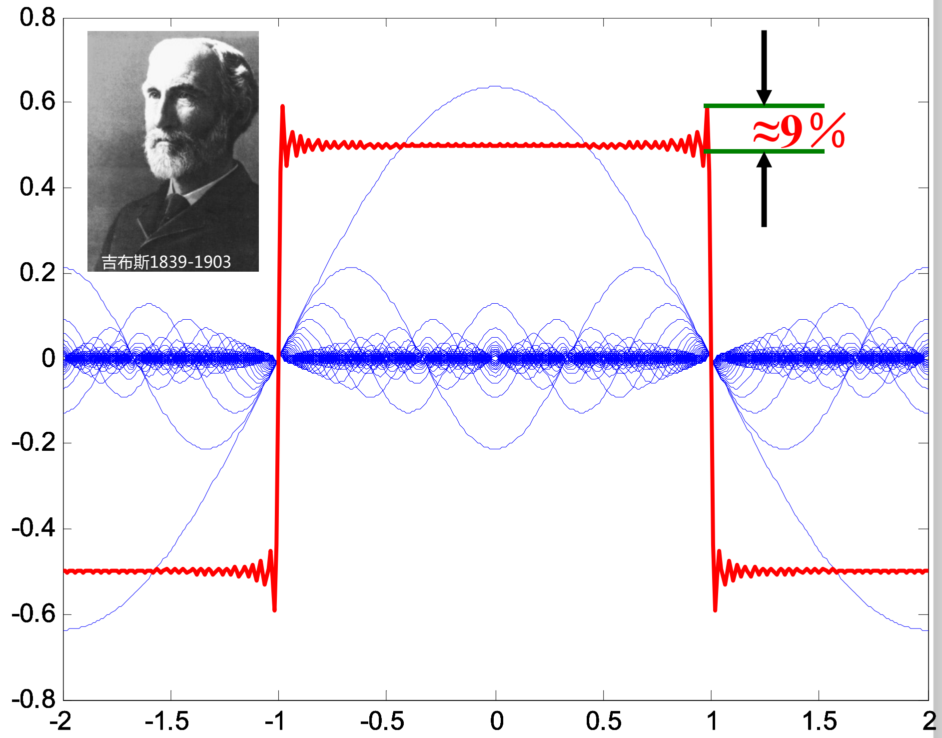
$$\begin{cases}a_0=\dfrac{\int_T f(t)\cdot 1dt}{\int_T 1dt}=\dfrac{1}{T}\int_T f(t)dt\ \text{(直流分量)}\\ a_n=\dfrac{\int_T f(t)\cos n\omega_1 tdt}{\int_T \cos^2 n\omega_1 tdt}=\dfrac{\int_T f(t)\cos n\omega_1 tdt}{k_n}=\dfrac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega_1 tdt\\ b_n=\dfrac{\int_T f(t)\sin n\omega_1 tdt}{\int_T \sin^2 n\omega_1 tdt}=\dfrac{\int_T f(t)\sin n\omega_1 tdt}{k_n}=\dfrac{2}{T}\int_T f(t)\sin n\omega_1 tdt\end{cases}$$

- 不同谐波正弦信号构成完备正交函数集，因而可以用不同频率的正弦（余弦）函数可以作为基本信号来表示一般（复杂）信号
- 正弦函数非常简单，运算方便，是把复杂的问题分解为简单问题的组合来解决这一重要思想的直接体现

有限项傅里叶级数表示的误差

$$f(t) \approx S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$





- *N*越大，则其误差愈小
- 那么，是不是当*N*→∞时，就完全相同（逼近）？

•吉布斯现象，迈克尔逊（Albert Abrahan Michelson-1907年诺贝尔物理学奖）发现(1898)，吉布斯证明(1899)

•拉格朗日反对的理由

小结

- 复杂源自简约—复杂信号可以表示为简单不同频率正弦信号(谐波)的线性加权组合
- 感知内在机理—人类听觉系统和视觉系统本质上使用了谐波分析的方法来感知听觉(声音)和视觉(图像)信号
- 必备常规武器—信号的傅里叶级数表示提供了考察信号的新视角，具有极其重要的科学意义和实际应用价值
  - 是认识和研究信号与系统的第一外语
  - 在“统治”当今世界的10大算法中排名第二

课后思考题？

- 对于非周期信号，还能将其分解为不同频率正弦信号的线性加权组合吗？

- 提示：非周期信号是周期信号的周期趋近于无穷大时的极限情形

课外作业

- 阅读3.1－3.3; 预习:3.4、3.5
- 作业： 3.3(验证部分只做第(2)组函数), 3.5两题

- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如张三（学号U2018148xx）第一周作业第一题图片名为： U2018148xx U2018148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为： U2018148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为： U2018148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。

附录：信号的有限项近似表示误差推导

- 信号$f(t)$可由完备集中的n个正交函数的**线性组合**所近似

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

- **有限项近似的误差：**

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)\right]^2 dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f^2(t) - 2f(t)\sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t) + \left[\sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)\right]^2\right]dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - 2\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t)\sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)\right]dt + \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)\right]^2 dt\right]$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - 2\sum_{r=1}^{n} c_r \int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt + \sum_{r=1}^{n} c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)dt\right]$$

- **因为：** $c_r = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^{\,2}(t)dt} = \dfrac{1}{k_r}\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt$

- **所以：** $\overline{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - 2\sum_{r=1}^{n} c_r k_r c_r + \sum_{r=1}^{n} c_r^2 k_r\right] = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} k_r c_r^2\right]$

- **对归一化正交函数集有：**

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r^{\,2}\right]$$

- **详细证明见郑君里教材上册 P328(第二版) P345(第三版)**