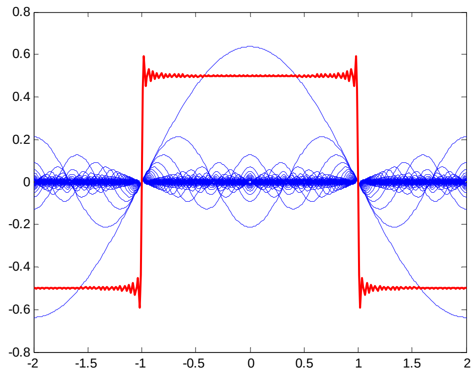
信号与系统

第14讲 用z变换分析离散时间系统

郭红星

华中科技大学计算机学院



上次课内容回顾

- z变换的引出
- z变换的收敛域
- z变换的性质

例8-4解答— Revisited

- 对方程两边同时求z变换，根据z变换的线性性，有

$$ZT[y(k+2)]-ZT[y(k+1)]-ZT[y(k)]=0$$

- 再用z变换的移序性质，可得

$$z^2[Y(z)-y(0)-z^{-1}y(1)]-z[Y(z)-y(0)]-Y(z)=0$$

- 将初始条件$y(0)=1$，$y(1)=2$代入上式，整理得:

$$(z^2-z-1)Y(z)=z^2+z$$

- 由此可得

$$Y(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z-1}$$

如何求反z变换？

- 这正是z变换法解差分方程的基本思想

本讲内容

- 离散时间系统的z变换分析法
  - 反z变换的求解
  - 用z变换法求解差分方程，分析系统响应
  - 系统函数与系统稳定性分析
- 学习目标
  - 掌握用z变换求离散系统全响应的方法
  - 熟悉通过系统函数分析系统稳定性的途径
  - 认识系统函数分解与系统的构成关系

7.3　反z变换的计算

幂级数展开法

- z变换实际上是一个涉及z的正幂和负幂的幂级数，这个级数的系数就是离散时间序列的序列值。因此，若能把$F(z)$展开为一个z的幂级数，就可求得逆z变换。

- 若z变换象函数是有理函数，即其分子分母皆为多项式，可采用多项式长除法，分别展开为z 的负幂无限或正幂无限的幂级数，再确定各个序列值。

- 长除法只适用于有理形式的z变换象函数，且收敛域限于某个圆周的内部或外部。泰勒级数展开法适用于有理形式或一些非有理形式的z变换。

逆z变换公式的推导

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \Longleftrightarrow f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \downarrow \sum$$

$$t\to nT \quad dt\to T$$

$$f(t)\to f(nT)\to f(n)$$

$$e^{st}\to e^{snT}\to z^{n}$$

$$F(s)\to T\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)e^{-snT}\to TF(z)$$

$$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \downarrow \oint_c$$

$$\because z=e^{sT},$$

$$\therefore \frac{dz}{ds}=Te^{sT}=Tz$$

$$ds\to\frac{1}{T}\frac{dz}{z}$$

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n} \Longleftrightarrow f(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)z^{n-1}dz$$

逆z变换计算公式

- 逆z变换指由变换的象函数及收敛域求其原函数的过程。反变换公式为：

$$x(n) = ZT^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

- 上式表明：原函数可由它们的象函数以复指数序列加权后的路径积分求得。反z变换的积分路径是收敛域内一个以原点为中心的逆时针方向的圆周

- 那么如何求取上面的围线积分呢？

围线积分法(留数法)

- **根据复变函数理论，可用留数定理求解析函数的路径积分**，把逆z变换的积分表示为围线C内包含的$X(z)z^{n-1}$的各极点的留数之和

$$x(n)=ZT^{-1}[X(z)]=\sum \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{c内诸极点}$$

- 在使用这种方法时要注意以下三点：
  - 对于同一个表达式$X(z)$，当给定的收敛域不同时，所选择的积分围线也不相同，最后将得到不同的逆变换序列 $x(n)$
  - 收敛域内围线所包围的极点是针对$X(z)z^{n-1}$，而非仅仅指$X(z)$，**特别要关注当$n<1$时，$z=0$也是一个极点**
  - **对于双边z变换，它的收敛域一般为z平面上的圆环，用留数定理求双边z变换的反变换较复杂**

例8-4解答— 留数法

- 由于

$$Y(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z-1}$$

- $Y(z)z^{n-1}$包含两个极点：

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

注意：与课本P329页的结果的表达式不同的原因是初始条件的定义有区别。P329页给出的初始条件为$y(1)=1$，$y(2)=1$；而这里的例8 - 4中初始条件为$y(0)=1$，$y(1)=2$。即定义的基准点不一样。

- 计算这两个极点的留数和，得：

$$y(n)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(n)$$

部分分式展开法

例题1:求$F(z)=\dfrac{-\frac{5}{3}z+1}{z^2-\frac{7}{3}z+\frac{2}{3}}$的原函数$f(n),n\geq 0$

解: $f(n)$为右边序列

因为 $F(z)=\dfrac{-\frac{5z}{3}+1}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}=a+\dfrac{bz}{z-\frac{1}{3}}+\dfrac{cz}{z-2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}-\dfrac{z}{z-2}$

待定系数
确定过程?

所以 $f(k)=\dfrac{3}{2}\delta(k)+(\dfrac{1}{3})^k u(k)-2^k u(k)$

收敛域为 $\boxed{|z|>2}$

用留数法试一试!

部分分式展开法是将一个有理形式的多项式分式展开成低阶次有理分式的线性组合

例8-4解答— 部分分式法

- 由于

$$Y(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z-1}$$

$$y(n)=ZT^{-1}[Y(z)]=\sum \mathrm{Res}\left[Y(z)z^{n-1}\right]_{c内诸极点}$$

- 进行部分分式展开有：

$$Y(z)=\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}z}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}z}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

思考：为什么这里没有与上一题类似的$\delta(n)$项呢？而且与留数法结果一致！

- 利用线性性，进行反z变换得：

$$y(n)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(n)$$

7.4 离散LTI系统的z变换分析法

用(单边)z变换法求系统响应—例题2

例题2：

$$y(n)-by(n-1)=x(n)$$

$$x(n)=a^n u(n) \qquad y(-1)=1 \qquad y(n)=?$$

解:

$$Y(z)-bz^{-1}[Y(z)+zy(-1)]=X(z)$$

里面已含有初始条件

$$[1-bz^{-1}]Y(z)=X(z)+by(-1)$$

$$Y(z)=\frac{X(z)+by(-1)}{1-bz^{-1}}$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right]+\frac{bz}{z-b}$$

完全解

$$y(n)=ZT^{-1}[Y(z)]=\left[\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})+b^{n+1}\right]u(n)$$

用单边z变换求系统全响应的解析

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n+r)$$

其特征方程为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$$

x(n+r),y(n+k)均为左移序列，两边取单边z变换得：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^k \left(Y(z) - \sum_{l=0}^{k-1} y(l) z^{-l}\right) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^r \left(X(z) - \sum_{m=0}^{r-1} x(m) z^{-m}\right)$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^k = \sum_{k=0}^{N}[a_k z^k \bullet (\sum_{l=0}^{k-1} y(l) z^{-l})] + \sum_{r=0}^{M} b_r z^r [X(z) - \sum_{m=0}^{r-1} x(m) z^{-m}]$$

零输入响应

零状态响应

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N}[a_k z^k \bullet (\sum_{l=0}^{k-1} y(l) z^{-l})] + \sum_{r=0}^{M} b_r z^r [X(z) - \sum_{m=0}^{r-1} x(m) z^{-m}]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^k}$$

特征根就是极点

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^k = 0$$

状态引起的自由响应

自由响应由两部分组成

激励引起的自由响应

系统稳定性的定义及条件

- 稳定性的定义:输入有界则输出必定有界
- 系统稳定的充要条件是单位样值响应绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- 因果稳定系统的充要条件为：$h(n)$是因果序列的而且是有界的，即：

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) \\ \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases}$$

系统不稳定实例:

① 音响系统的啸叫(自激)

② 开关电源系统的涌流

系统稳定充要条件的证明

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

$$|y(n)|\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)||x(n-k)|\le M\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|$$

必要性

$$|x(n)|\le M<\infty$$

充分性

$$\therefore\quad\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty$$

离散系统稳定的充要条件为*h*(*n*)绝对可和

离散系统的系统函数

定义： 系统零状态响应$y(n)$的z变换$Y(z)$与输入$x(n)$的z变换$X(z)$之比

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

实际与系统输入输出无关，仅由系统特性决定

若$x(n)$是因果序列，则在系统零状态下：

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r) \Rightarrow Y(z)\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}=X(z)\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}$$

零状态

因果输入序列

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

系统函数与单位样值响应的关系

- 系统零状态响应为激励与单位样值响应的卷积和

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

- 由卷积定理 $Y(z)=X(z)H(z)$

- 所以 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}$

系统函数是单位样值响应$h(n)$的z变换

$H(z)$极点分布与单位样值响应

$$h(n)=ZT^{-1}[H(z)]=ZT^{-1}\left[G\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}\right]$$

$$=ZT^{-1}\left[A_0+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}\right]$$

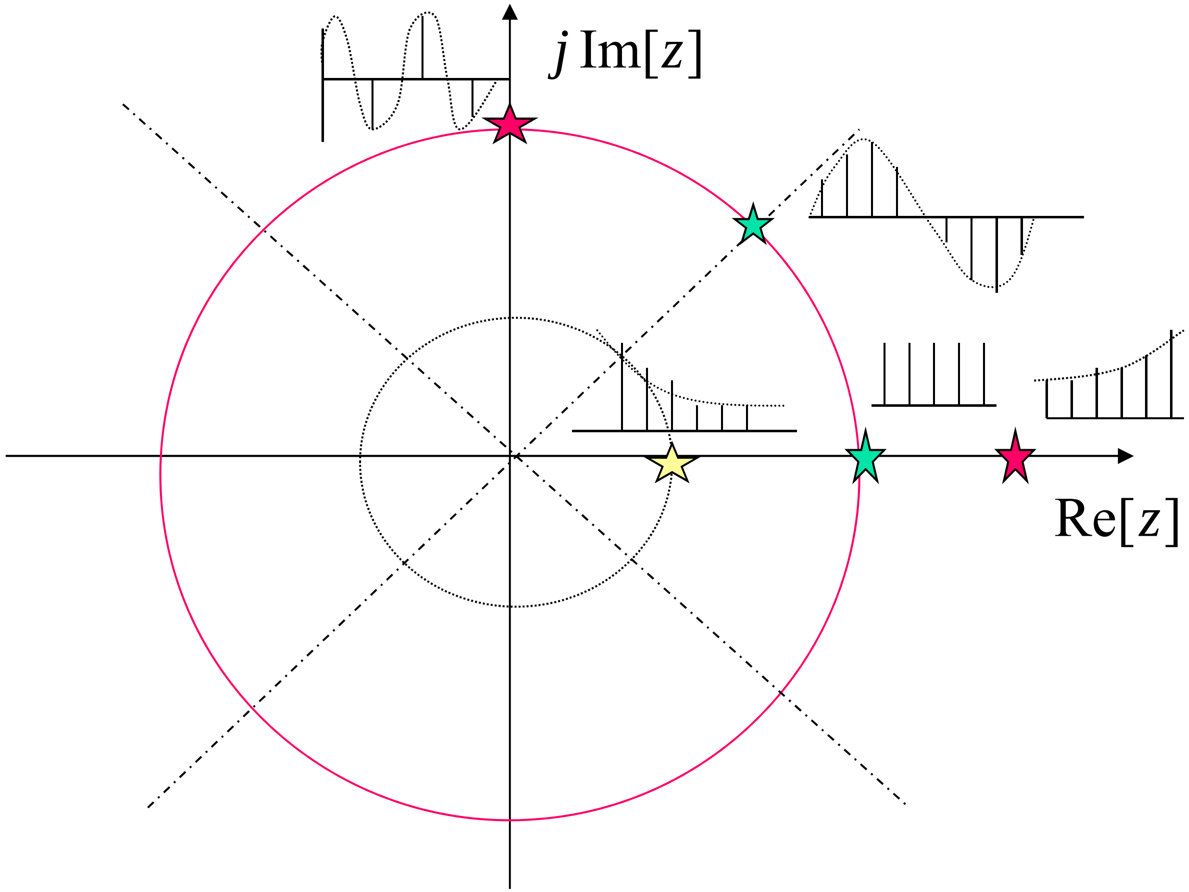
$$=A_0\delta(n)+\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^n u(n)$$

一般p_k为复数。它在z平面的分布位置决定了系统$h(n)$特性。A_0为$z=0$时$H(z)$的值。

条件: $M \le N$

时域特征根法的理论基础

$H(z)$极点分布影响$h(n)$的示意图



对稳定的因果系统，全部极点位于单位圆内，收敛域为：

$$|z| > 1$$

注意：对于非因果系统，收敛域并不是在圆外区域，极点不限于单位圆内。

例题3及解答

例3：已知系统函数$H(z)=\dfrac{-\frac{5}{3}z}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}$，试说明分别在(1) $|z|\geq 2$；(2) $\frac{1}{3}\leq|z|\leq 2$两种情况下系统的稳定性：

解：（1）$2\leq|z|$，右边序列

$$H(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}\qquad p_1=\frac{1}{3}\quad p_2=2\quad |z|>2$$

因果系统，但有极点在单位圆外，不稳定

$$h(n)=[(\frac{1}{3})^n-2^n]u(n)$$

发散

例题3及解答

（2） $\frac{1}{3} \le |z| \le 2$，双边序列，非因果系统，

右序　　　　　　左序

$$h(n) = (\frac{1}{3})^n u(n) + 2^n u(-n-1)$$

$2^{-\infty}$ 有界

所以，该非因果系统是稳定的。

非因果系统也可以稳定

注意：本题求解过程使用了双边z变换

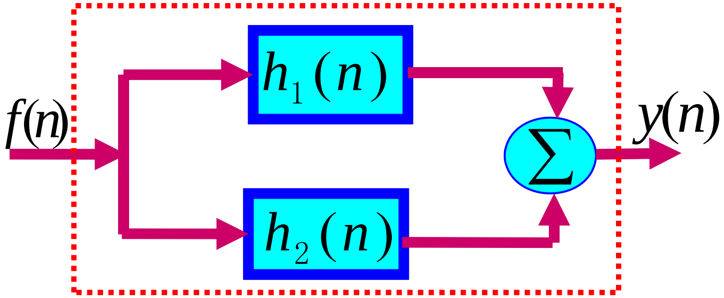
时域卷积性质与系统联接关系

① 分配律（distributive law）

$$f*[h_1+h_2]=f*h_1+f*h_2$$

$$F\times[H_1+H_2]=F\times H_1+F\times H_2$$

$h=h_1+h_2 \Rightarrow H=H_1+H_2$

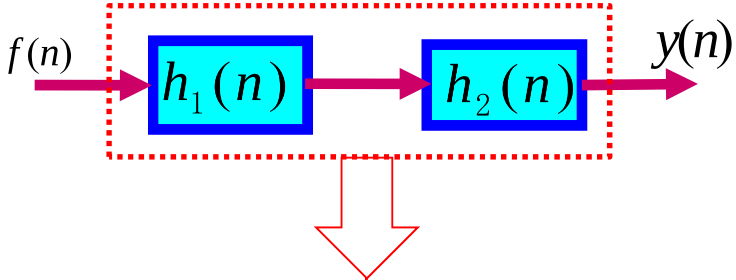


② 结合律（associative law）

$$[f*h_1]*h_2=f*[h_1*h_2]$$

$$[F\times H_1]\times H_2=F\times[H_1\times H_2]$$

$h=h_1*h_2 \Rightarrow H=H_1\times H_2$

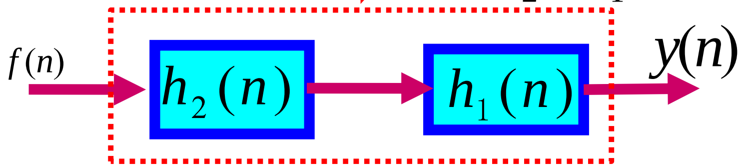


③ 交换律（commutative law）

$$h_1*h_2=h_2*h_1$$

$$H_1\times H_2=H_2\times H_1$$

$h=h_2*h_1 \Rightarrow H=H_2\times H_1$



小结

- 反z变换为围线积分—部分分式展开法
- 用z变换法可一次性得到系统的全响应
- 根据系统函数可以研究系统的时域特性
- **根据系统函数可以研究系统的稳定性**

课外作业

阅读：8.4—8.6；预习：8.7节

作业：8.7的偶数小题、8.18的奇数小题

- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如张三（学号U2019148xx）第一周作业第一题图片名为： U2019148xx U2019148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。