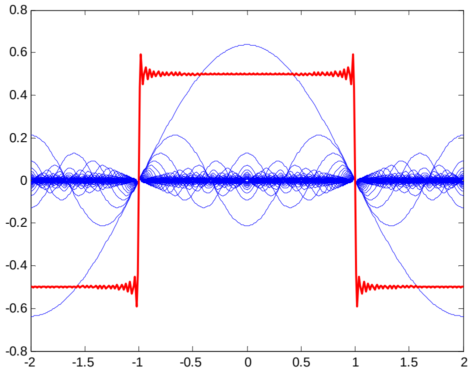
信号与系统

第13讲 z变换及其性质

郭红星
华中科技大学计算机学院



上次课回顾

- 离散线性移不变系统的建模及其响应
  - 迭代法
  - 时域经典解法
  - 零输入响应＋零状态响应
- 单位样值响应的计算
- 卷积和及其计算

- 时域分析方法的优缺点 - 讨论
- 类似连续时间系统的变换域分析方法？

本讲内容

- z变换及其性质
  - z变换的引出—不仅仅是数学定义
  - z变换的收敛域
  - z变换的性质
- 学习目标
  - 从连续信号离散化的角度理解z变换
  - 运用级数理论计算z变换并确定收敛域
  - 熟悉z变换的重要性质，了解其应用

7.1 从拉氏变换到z变换

理想抽样信号的拉普拉斯变换

- 抽样信号的时域表达式

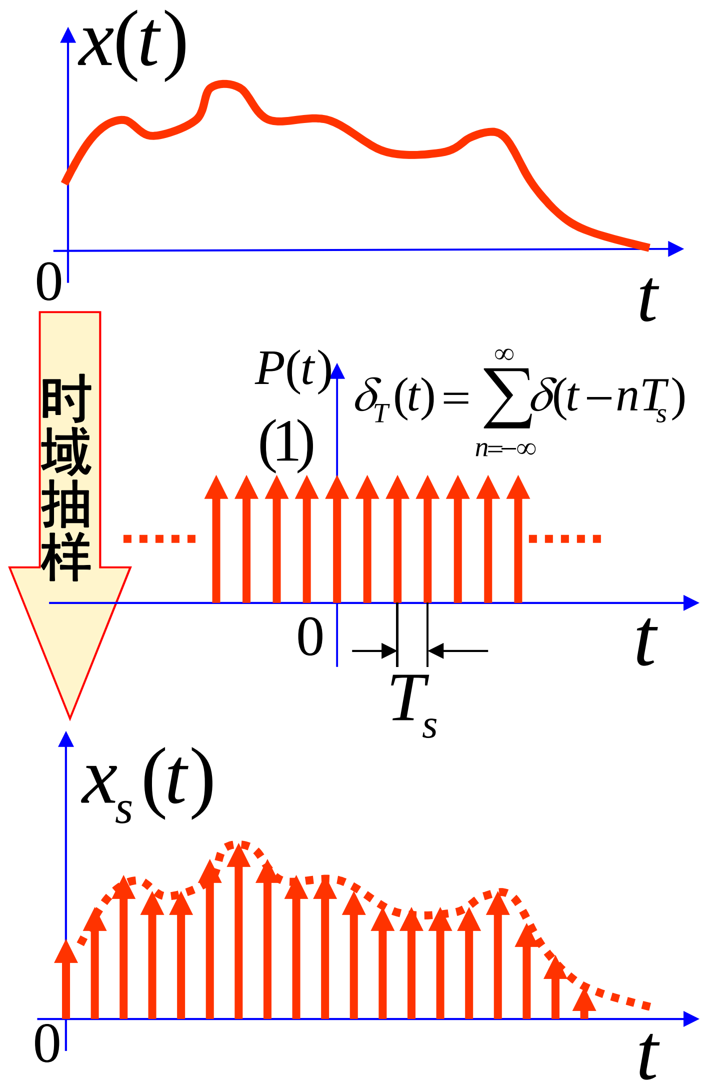
$$x_s(t) = x(t) \bullet \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

- 对上式取双边拉氏变换

$$X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right]e^{-st}dt$$

- 交换积分与求和顺序

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-snT_s}$$



借助抽样信号的拉氏变换引出z变换

令$z = e^{sT_s}$或$s = \dfrac{1}{T_s}\ln z$

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-snT_s}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad z = e^{sT_s}$$

s与z平面的关系

课本P382(第5版)倒数第三行or P350(第6版)倒数第四行，令$e^{-sTs} = z$有误

定义：一个离散时间序例的z变换为z^{-1}的一个幂级数(**洛朗级数**的特例)，z一般为复变数，每一项的系数为$x(n)$的值。其中$X(z)$称为**象函数**，$x(n)$称为**原函数**

思考：这个级数一定收敛吗？

双边z变换的收敛域

■**收敛的充分条件：** $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$

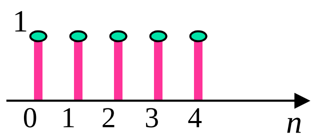
思考：如何确定其收敛区域呢？

■**根据级数理论判别**

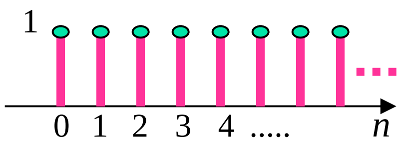
- 比值法（达朗贝尔准则） 设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$
- 根值法（柯西准则） 设 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$

① $\rho<1$，级数收敛收敛
② $\rho>1$，级数收敛发散
③ $\rho=1$，收敛性不确定

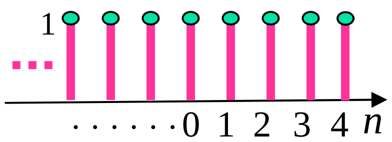
■**四类离散序列双边z变换的收敛域**



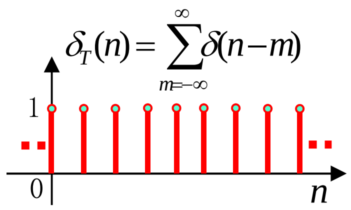
(1) 有限长序列



(2) 右边序列



(3) 左边序列



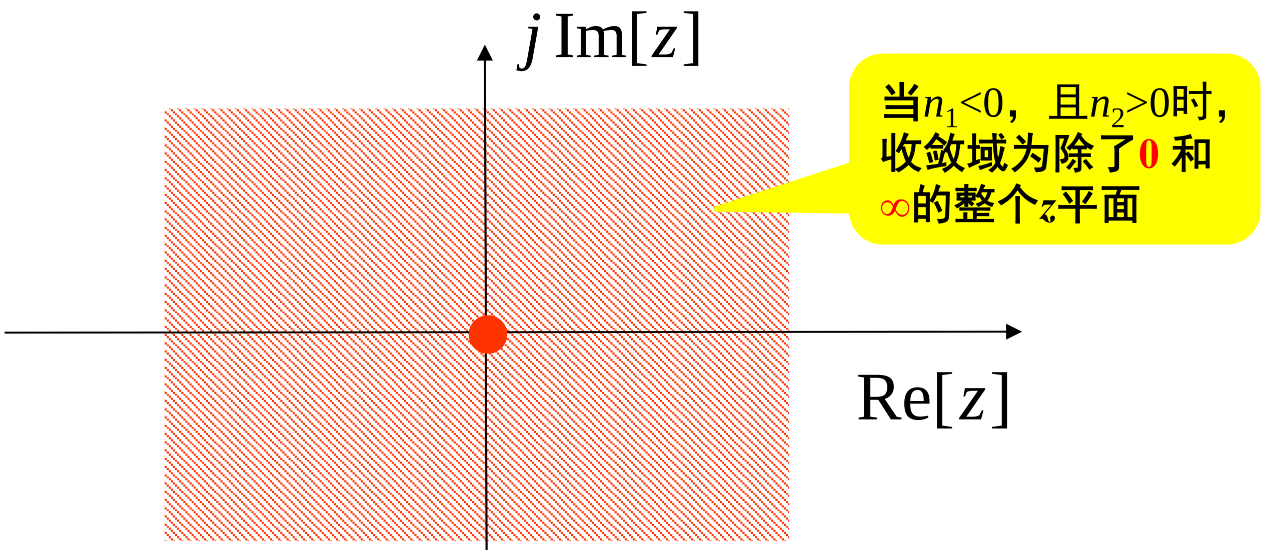
(4) 双边序列

有限序列的收敛域

（1）有限序列：在有限区间内，有非零的有限值的序列$x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \le n \le n_2$$

- 当$n_1<0$时，收敛域不包括$z=\infty$；当$n_2>0$时，收敛域不包括$z=0$



右边序列的收敛域

（2）右边序列：只在$n \geq n_1$区间内，有非零的有限值的序列$x(n)$

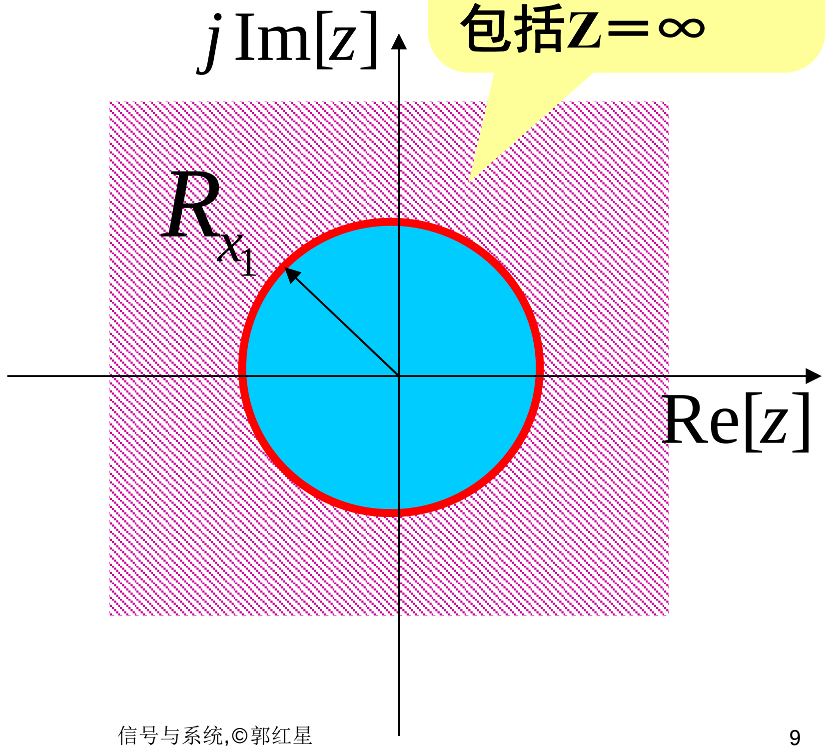
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad n_1 \leq n \leq \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|x(n) z^{-n}\right|}<1$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x(n)|}=R_{x_1}<|z|$$

$$|z|>R_{x_1}$$

收敛半径



圆外为收敛域，若$n_1<0$，则不包括$z=\infty$

左边序列的收敛域

（3）左边序列：只在$n \le n_2$区间内，有非零的有限值的序列$x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

$$X(z) \overset{m=-n}{=} \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m) z^{m} = \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n) z^{n}$$

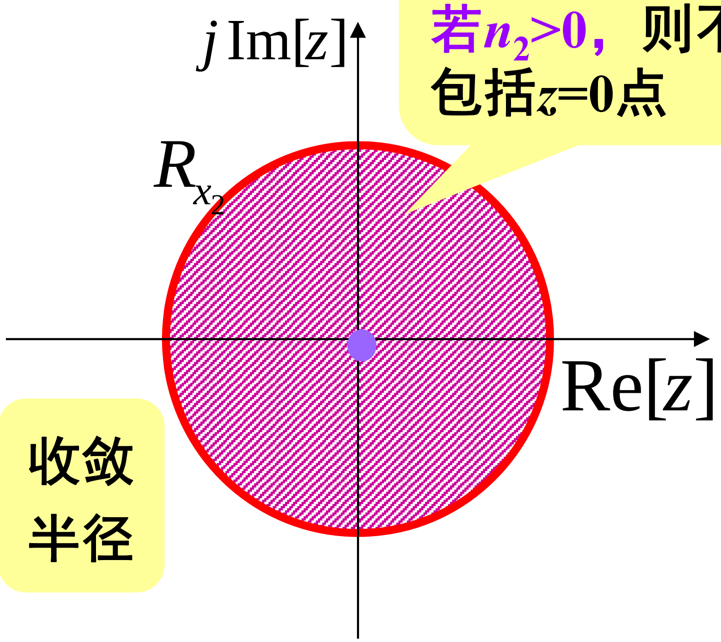
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n) z^{n}\right|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)\right|} < \left|z\right|^{-1}$$

$$\left|z\right| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)\right|}} = R_{x_2}$$

收敛半径

收敛域在圆内，若$n_2>0$，则不包括$z=0$点



双边序列的收敛域

（4）双边序列：在$-\infty \le n \le -\infty$区间内，$x(n)$都有非零的有限值

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

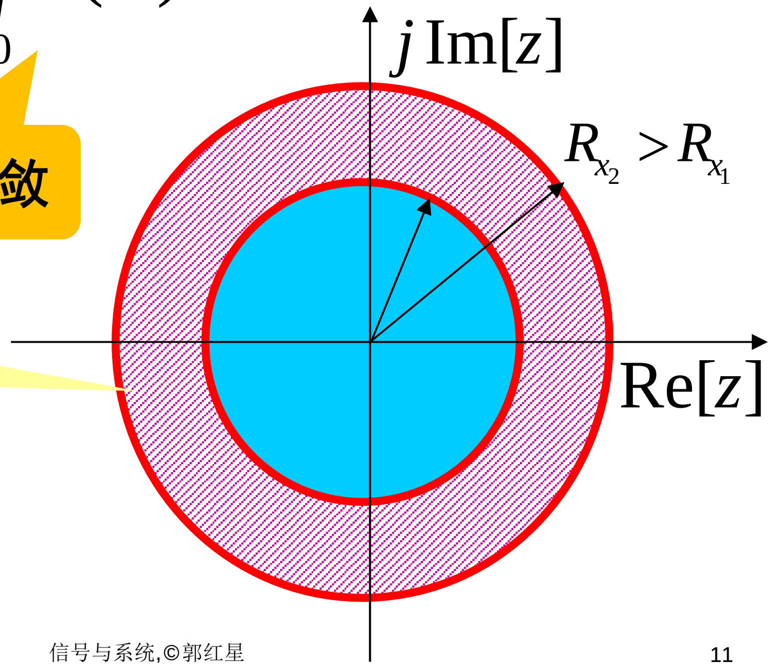
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

圆R_{x_2}内收敛

圆R_{x_1}外收敛

$R_{x_2} > R_{x_1}$ 有圆环状收敛域

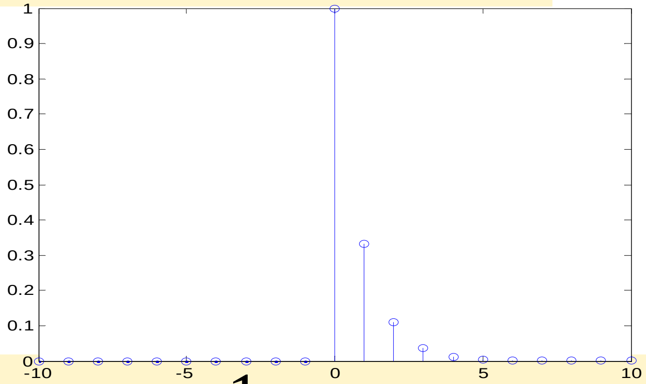
$R_{x_2} < R_{x_1}$ 没有收敛域



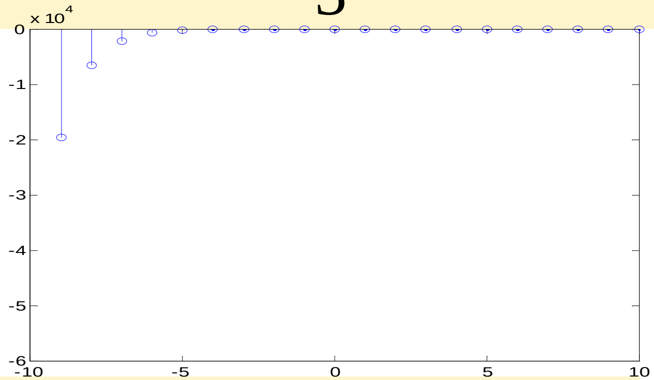
例题1

求下列序列的z变换，标明收敛域，并画零极图。

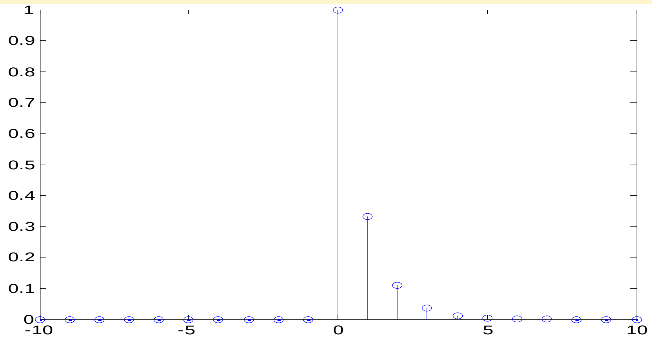
$$(1)\ x(n)=(\frac{1}{3})^n u(n)$$



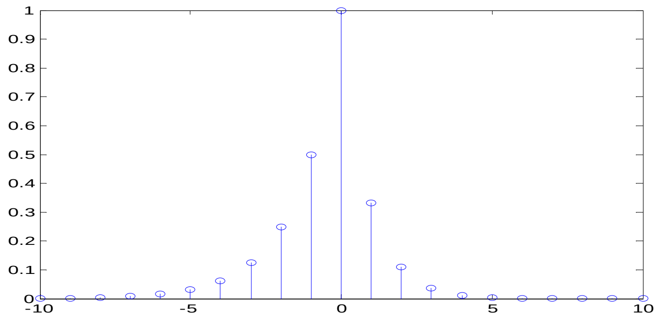
$$(2)\ x(n)=-(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$$



$$(3)\ x(n)=(\frac{1}{3})^n[u(n)-u(n-8)]$$

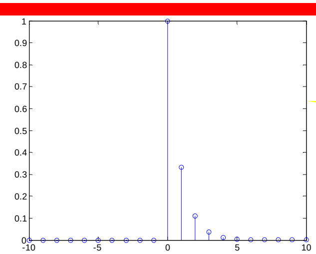


$$(4)\ x(n)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^n, & n\geq 0\\ 2^n, & n<0\end{cases}$$



例题1解答

(1) $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$

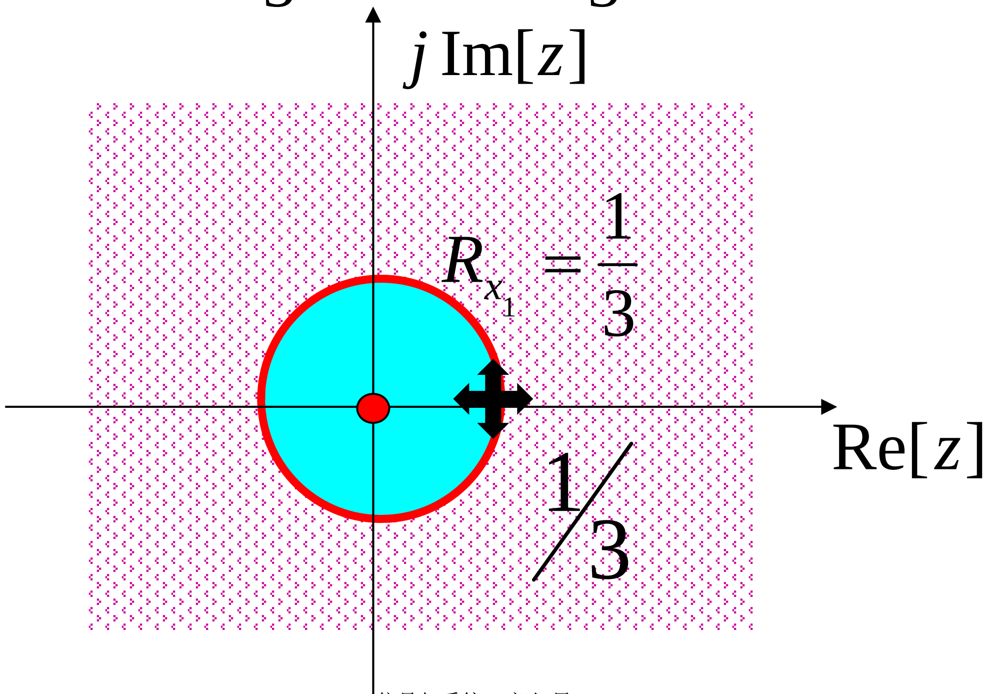


右边序列

解： $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$

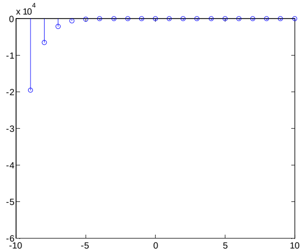
$\because \left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|<1$

$\therefore |z|>\frac{1}{3}$



例题1解答

(2) $x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$



左边序列

解：$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \overset{n=-m}{=} -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-m}$

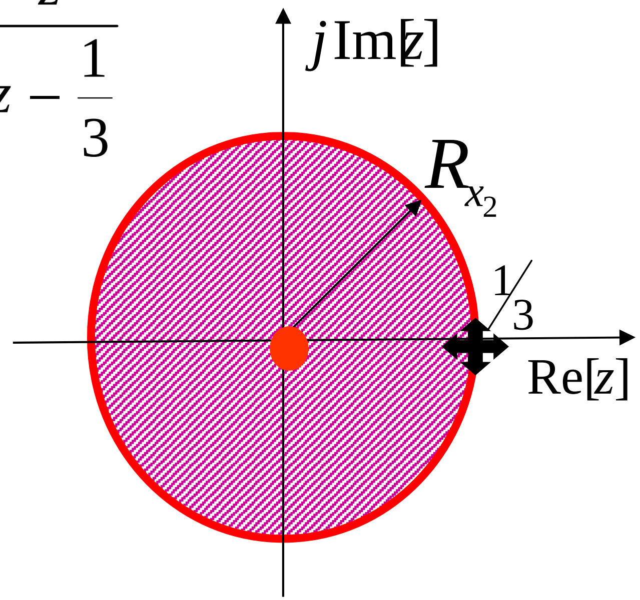
$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty}(3z)^m = 1 - \frac{1}{1-3z} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$\because |3z| < 1$

$\therefore |z| < \frac{1}{3} = R_{x_2}$

收敛半径

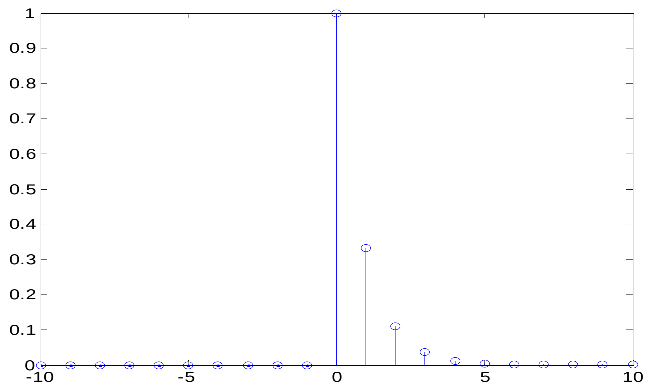
$n_2 = -1 < 0 \quad z$可以为 0



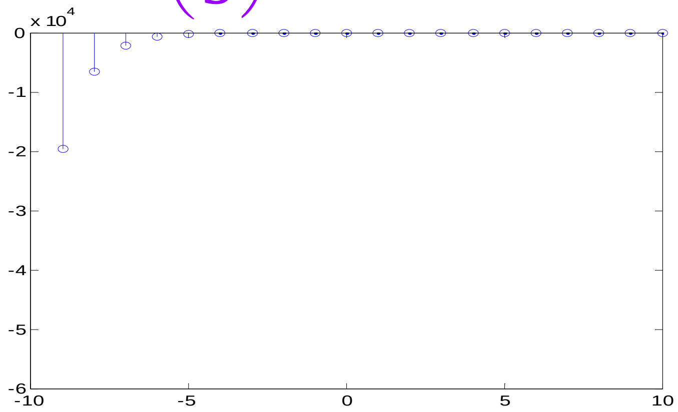
从上面的例子，你发现了什么？

(1) $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

(2) $x(n)=-\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$



$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

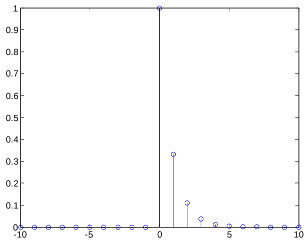


$|z|>\frac{1}{3}$ $|z|<\frac{1}{3}$

- 完全不同的两个序列的z变换表达式完全相同，收敛域不同—z变换的收敛域很重要！

例题1解答

(3) $x(n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n[u(n)-u(n-8)]$



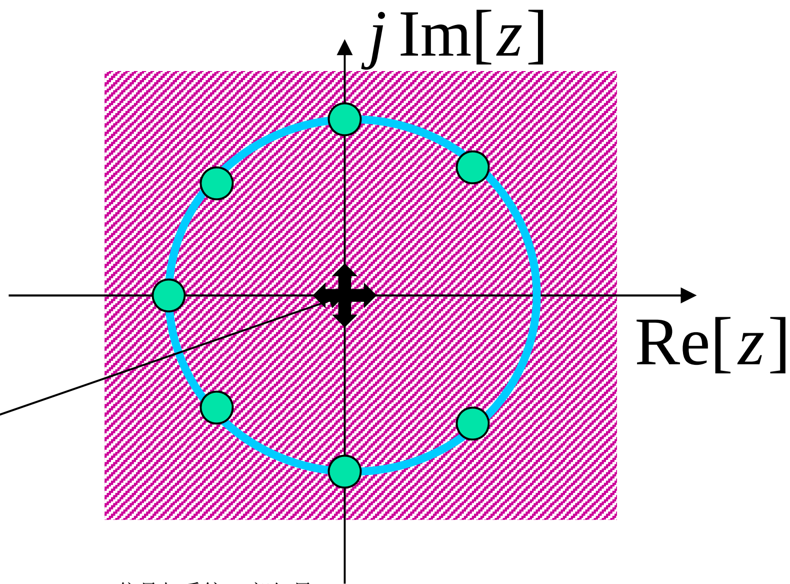
有限长序列

解： $X(z)=\sum_{n=0}^{7}\left(\dfrac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\dfrac{1-(\frac{1}{3}z^{-1})^8}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\dfrac{z^8-(\frac{1}{3})^8}{z^7(z-\frac{1}{3})}$

$z^8=(\frac{1}{3})^8e^{j2k\pi}$

$z=\frac{1}{3}e^{j\frac{2k\pi}{8}}$ → **7个零点 (k=1,2…,7)**

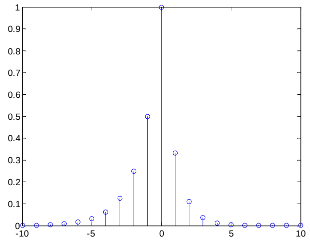
$z=0$ → **7阶极点**



■收敛域为除了 0 的整个z平面

例题1解答

(4) $x(n)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^n & n\geq 0\\ 2^n & n<0\end{cases}$



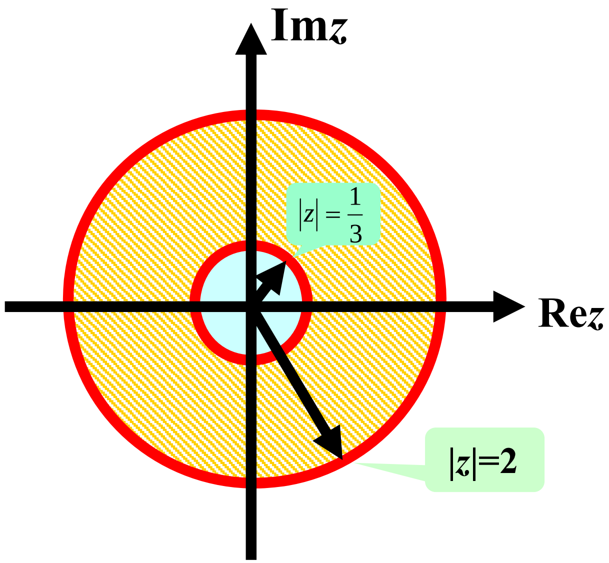
双边序列

解： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\boxed{[\ldots+(2^{-1}z)^2+(2^{-1}z)]}+\boxed{[1+(3^{-1}z^{-1})+(3^{-1}z^{-1})^2+\ldots]}$

$\therefore\ |z2^{-1}|<1$, 即$|z|<2$

$\therefore\ |z^{-1}3^{-1}|<1$, 即$|z|>\frac{1}{3}$

$$\boxed{X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}}$$



$X(z)$的收敛域为： $2>|z|>\frac{1}{3}$

单边z变换的定义及典型序列的z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

本课程通常所说的z变换指的是单边z变换，如果是双边z变换，则要明确说明

- 单位样值序列 $ZT[\delta(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1 \quad (|z|\geq 0)$

- 指数序列 $ZT[a^n u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a} \quad (|z|>a)$

- 单位阶跃序列 $ZT[u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1} \quad (|z|>1)$

7.2 z变换的性质

z变换的基本性质（课本358-363页）

- 线性
- 序列指数加权(z域尺度变换)
- 序列线性加权(z域微分)
- 卷积定理
- 移序性
- 初值定理和终值定理(自学)

线性

- 对离散时间信号，若有：

$$f_1(n) \leftrightarrow F_1(z), f_2(n) \leftrightarrow F_2(z)$$

- 则

$$af_1(n)+bf_2(n) \leftrightarrow aF_1(z)+bF_2(z)$$

利用线性性，可以很容易求得正弦、余弦等典型序列的z变换

正弦和余弦序列的z变换

$$ZT[e^{j\omega_0 n}]=\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}，\quad ZT[e^{-j\omega_0 n}]=\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}$$

$$ZT\,[\sin\omega_0 n\,]=\,?$$

没有必要单纯记结果，
关键要知道求解思路。

$$=ZT[(e^{j\omega_0 n}\text{-}e^{-j\omega_0 n})/2j]$$

$$=\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}\text{-}\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)/2j$$

$$=\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

$$ZT[\cos\omega_0 n]=ZT[(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})/2]$$

$$=\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)/2$$

$$=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

z域尺度变换特性

- 对离散时间信号，若有：$f(n) \leftrightarrow F(z)$
- 则 $a^n f(n) \leftrightarrow F\left(\dfrac{z}{a}\right)$

$$ZT[\cos\omega_0 n] = \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$$

指数加权余弦序列$\beta^n \cos\omega_0 n$的z变换

$$ZT[\beta^n \cos\omega_0 n] = \frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\beta\cos\omega_0 + \beta^2} \quad (|z| > \beta)$$

z域微分特性

- 对离散时间信号，若有：$f(n) \leftrightarrow F(z)$
- 则 $$nf(n) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$$

利用z域微分性质求斜变序列$nu(n)$的z变换

$$ZT[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nu(n)z^{-n} = -z\frac{d\left(\frac{z}{z-1}\right)}{dz} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

时域卷积定理

- 对离散时间信号，若有：

$$f_1(n) \leftrightarrow F_1(z),\ f_2(n) \leftrightarrow F_2(z)$$

- 则

$$f_1(n) * f_2(n) \leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$$

z变换的移序(位移)性质

- 对离散时间信号，若有： $f(n) \leftrightarrow F(z)$
- 则左移序列 $f(n+m) \leftrightarrow ?$
- 而右移序列 $f(n-m) \leftrightarrow ?$
- **要根据*x*(*n*)分别左移、右移的双边、(单边)*z*变换**

（1）序列移序的双边*z*变换

$$ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)] = z^{m} X(z)$$

z变换的移序性质

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

（2）序列左移的单边z变换

$$ZT[x(n+m)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-n}$$

$$=z^{m}\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-(n+m)}=z^{m}\sum_{k=m}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=z^{m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

$$=z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

（3）序列右移的单边z变换

$$ZT[x(n-m)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n-m)z^{-n}$$

$$=z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}x(n-m)z^{-(n-m)}=z^{-m}\sum_{k=-m}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=z^{-m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

$$=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

z变换的移序性质

（4）对于因果序列$x(n)$

$$\because \quad \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-k} = 0$$

$$ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right]$$

例8-4解答一 Revisited

- 对方程两边同时求z变换，根据z变换的线性性，有

$$ZT[y(k+2)]-ZT[y(k+1)]-ZT[y(k)]=0$$

- 再用z变换的移位特性，可得

$$z^2[Y(z)-y(0)-z^{-1}y(1)]-z[Y(z)-y(0)]-Y(z)=0$$

- 将初始条件代入上面的方程，整理得：

$$(z^2-z-1)Y(z)=z^2+z$$

- 由此可得

$$Y(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z-1}$$

关键问题：如何求反变换？

- 这正是z变换法解差分方程的基本思想

小结

① z变换与拉普拉斯变换的关系密切

② 双、单边z变换的定义与收敛域

③ z变换的一些性质类似于拉氏变换，但要注意移序性在单、双边变换上明显区别

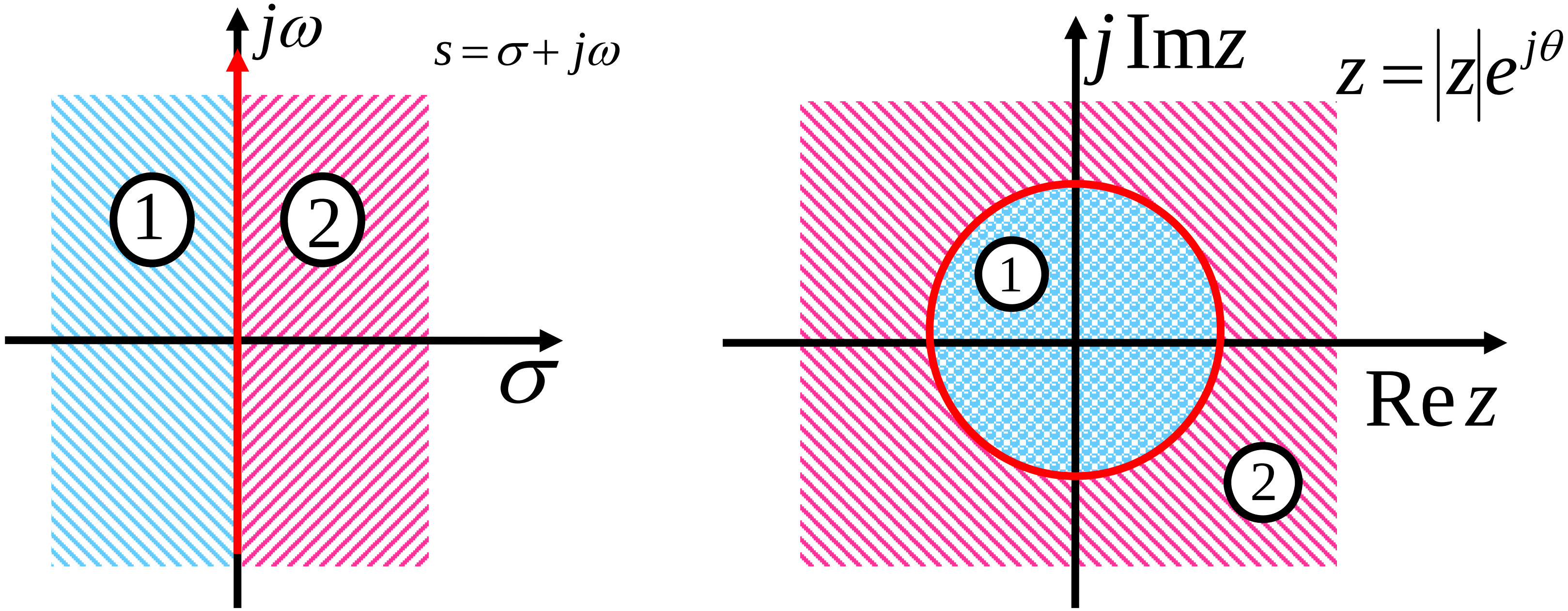
④ z反变换如何求？

课外作业

- 阅读：8.1—8.3节；预习：8.4节
- 作业：8.9、8.13两题

- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如张三（学号U2019148xx）第一周作业第一题图片名为： U2019148xx U2019148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。

从 s 平面到 z 平面的映射



$$z=e^{sT_s}=e^{(\sigma+j\omega)T_s}$$

$$=|z|e^{j\theta}$$

$$|z|=e^{\sigma T_s}=e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}}$$

$$\theta=\omega T_s=\frac{2\pi\omega}{\omega_S}$$