

# 图算法小结与课程总结

童咏昕

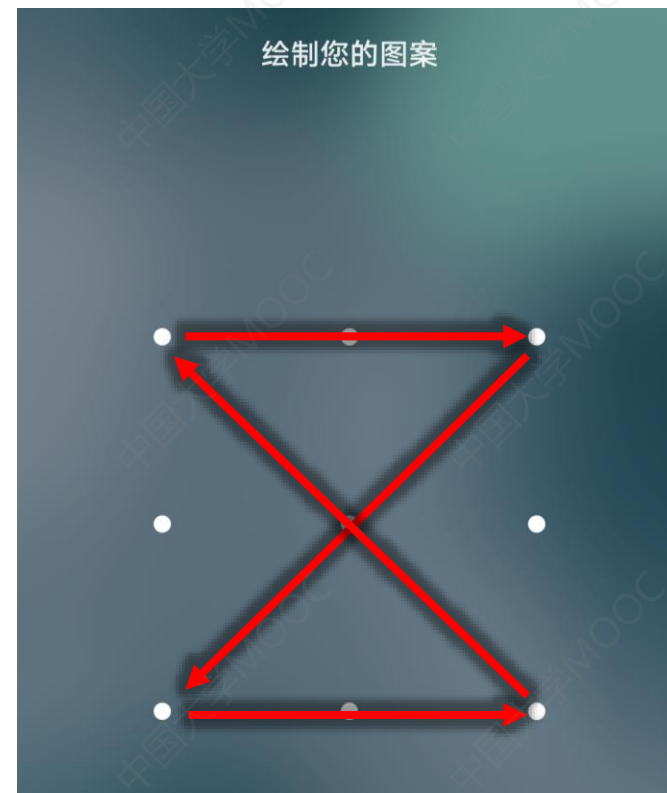
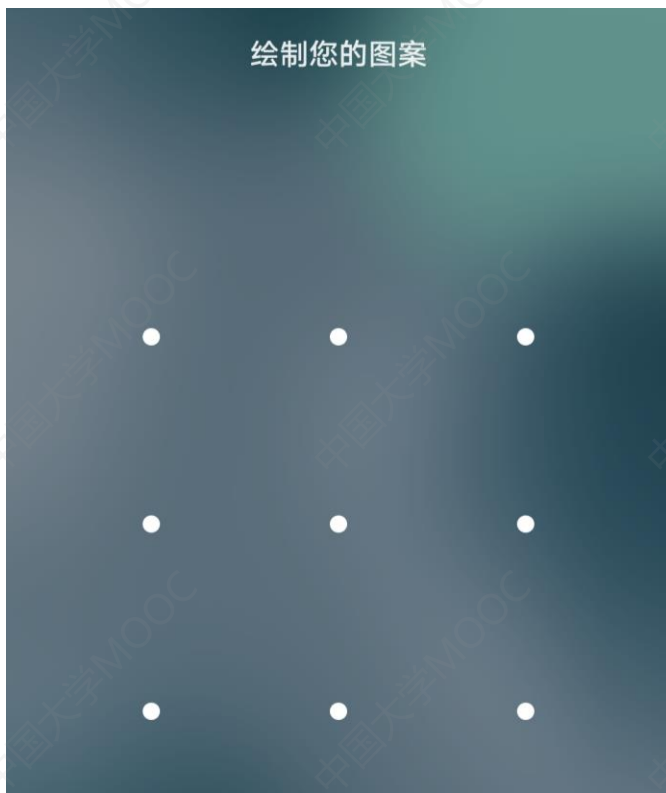
北京航空航天大学  
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

# 图的背景



- 一笔画问题：手机解锁图案需一笔画出



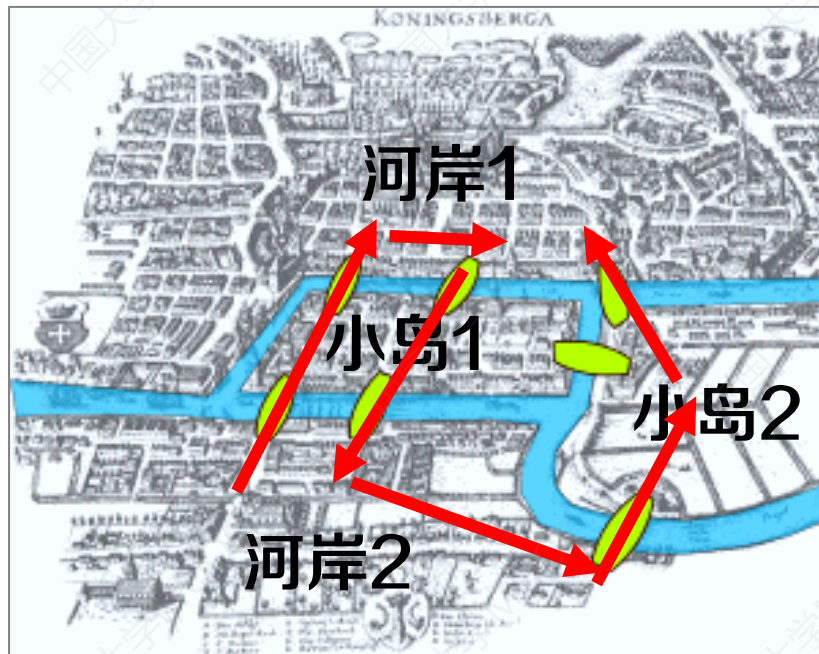
# 图的背景



- 柯尼斯堡七桥问题：七座桥连接河岸和两个小岛，步行者怎样才能**不重复、不遗漏**地一次走完七座桥？



瑞士数学家  
欧拉



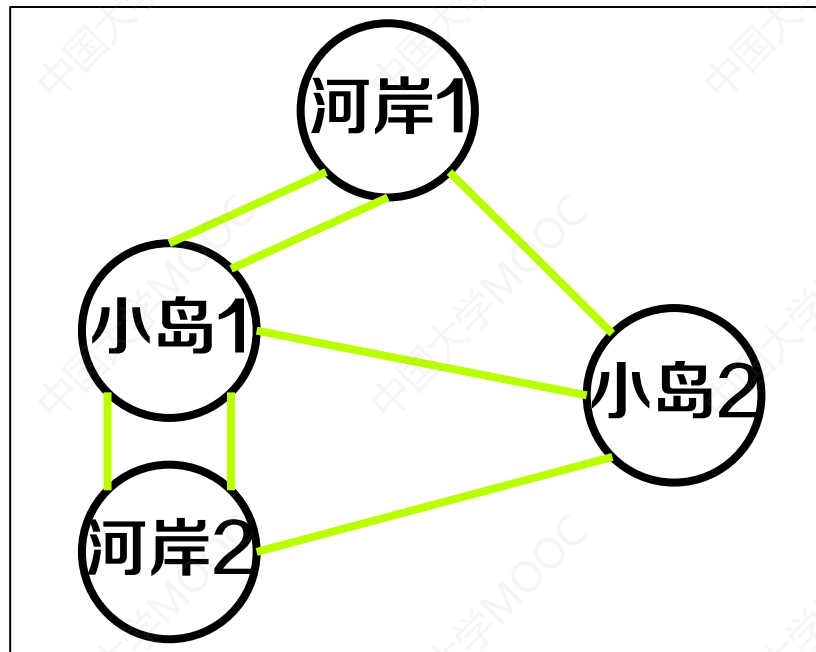
# 图的背景



- 柯尼斯堡七桥问题：七座桥连接河岸和两个小岛，步行者怎样才能**不重复、不遗漏**地一次走完七座桥？



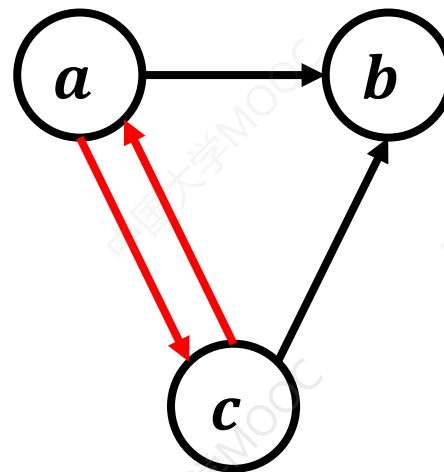
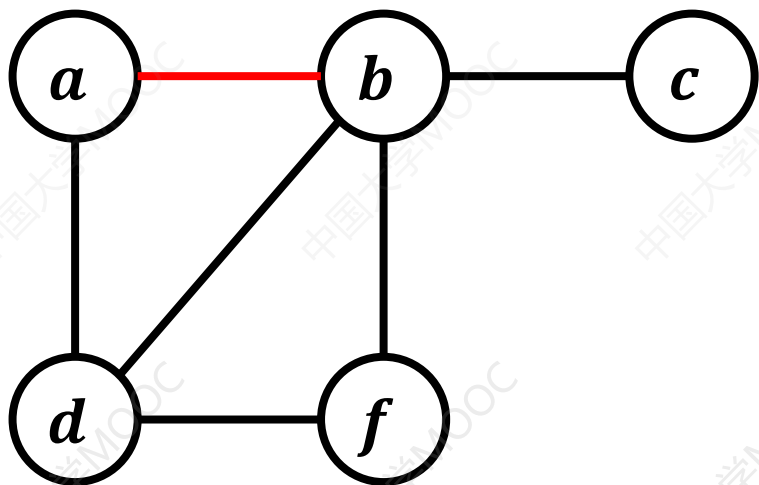
瑞士数学家  
欧拉



经过抽象之后，仅保留**点和边**的结构称为图

# 图的定义

- 图可以表示为一个二元组  $G = \langle V, E \rangle$ ，其中
  - $V$  表示非空顶点集，其元素称为顶点(Vertex)
  - $E$  表示边集，其元素称为边(Edge)
- $e = (u, v)$  表示一条边，其中  $u \in V, v \in V, e \in E$
- 无向图与有向图



# 图的概念与表示

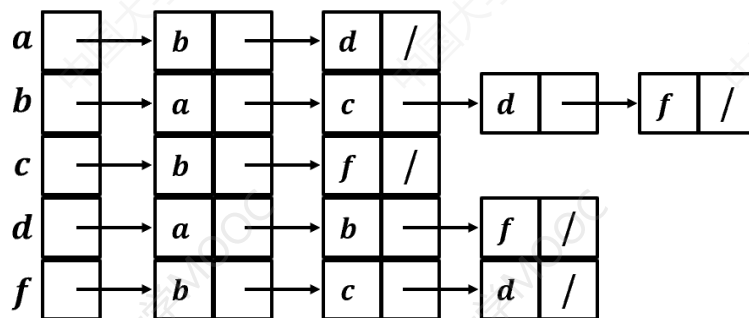
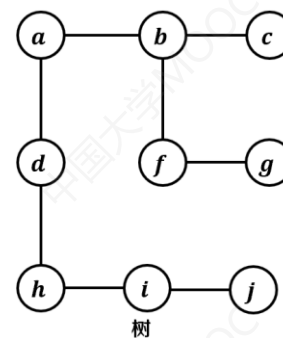
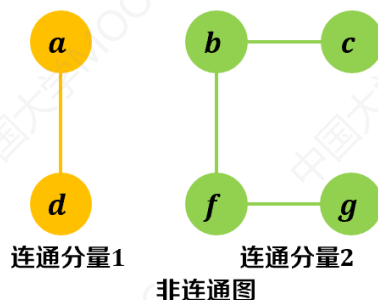
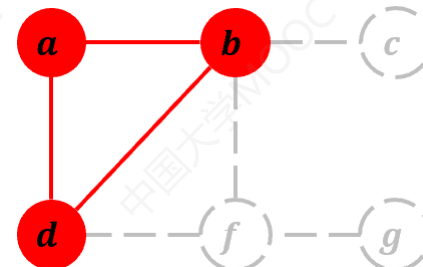
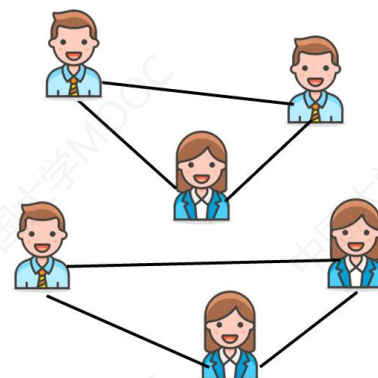


## 图的概念

- 图的定义、相邻与关联
- 顶点的度与图的度、握手定理
- 路径与环路
- 连通、连通分量
- 子图、生成子图、树

## 图的表示

- 邻接链表与邻接矩阵



		$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$a$		1	2	3	4	5
	1	0	1	0	1	0
$b$	2	1	0	1	1	1
	3	0	1	0	0	1
$c$	4	1	1	0	0	1
	5	0	1	1	1	0

# 图的搜索算法



- 数组结构

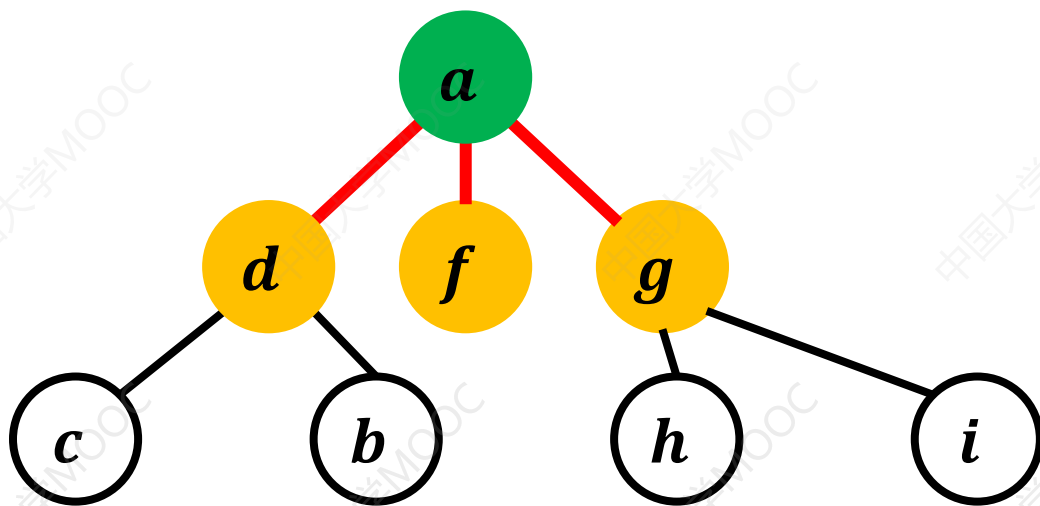
- 查询最大值：简单循环搜索所有元素，记录最大值

	1	2	3	4	5
A	4	6	8	3	5

→

- 图结构

- 查询相邻顶点：简单循环搜索各顶点关联的边
- 查询可达顶点：简单循环搜索，不能找到全部可达顶点！是否存在有效算法？



按照什么次序搜索顶点？

广度优先搜索

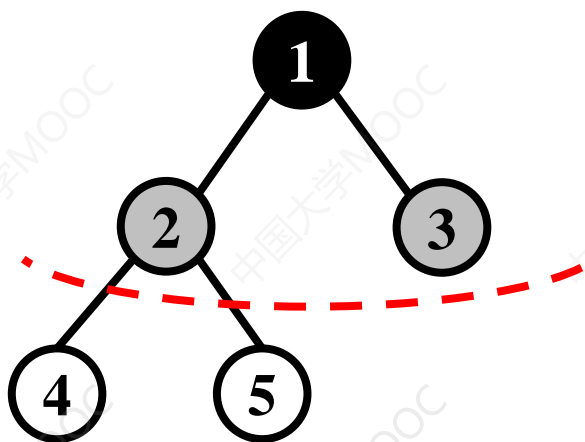
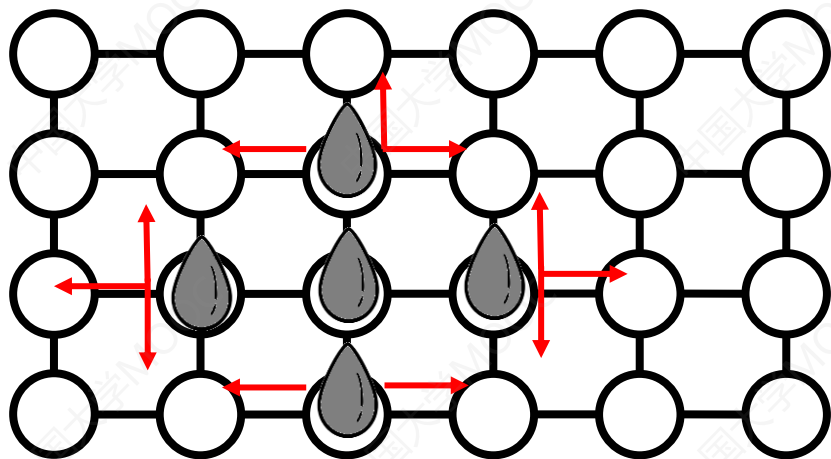
深度优先搜索



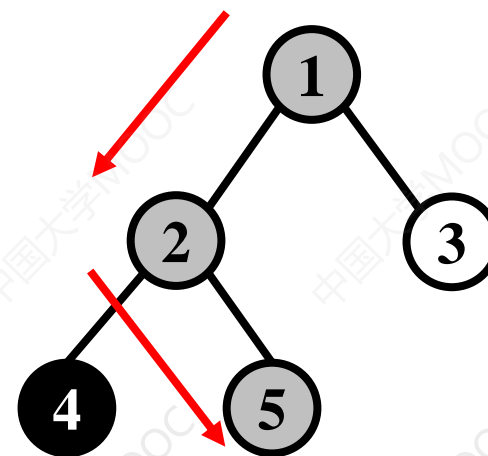
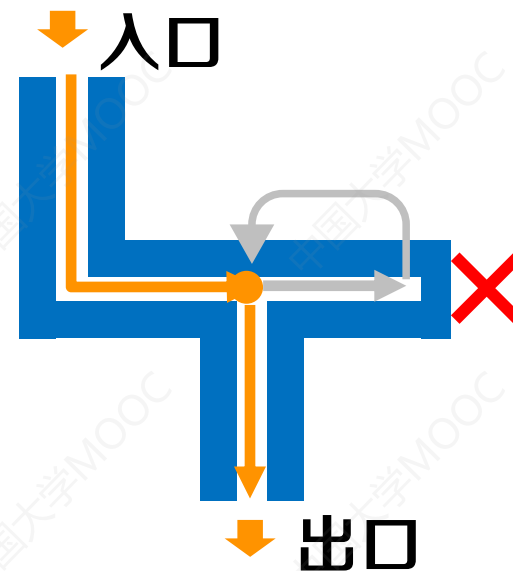
# 图的搜索算法



## ● 算法思想



广度优先搜索：步步为营



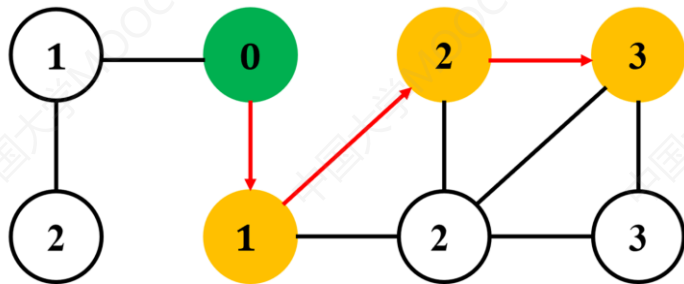
深度优先搜索：勇往直前



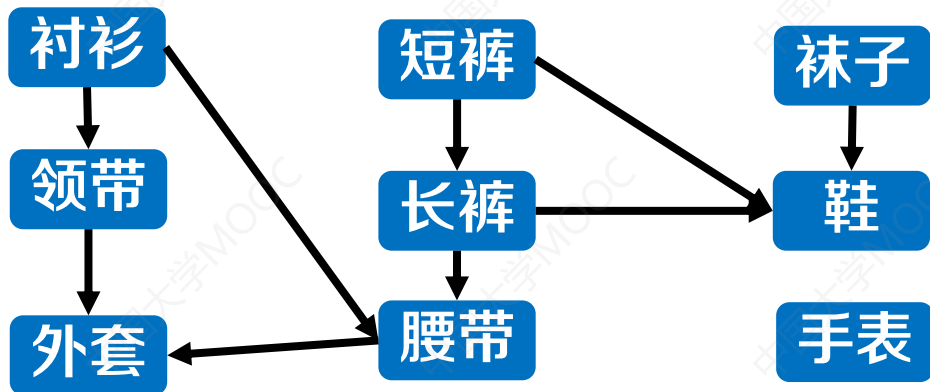
# 图的搜索算法



- 算法应用



无权图的最短路径



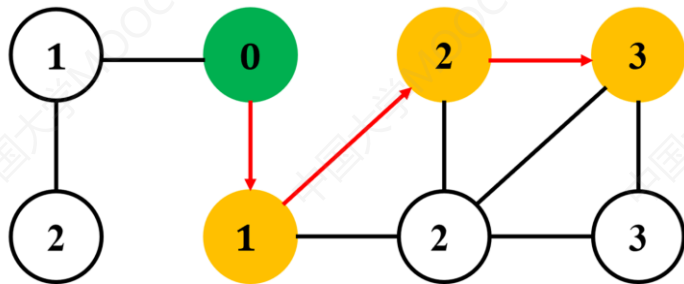
拓扑排序

广度优先搜索

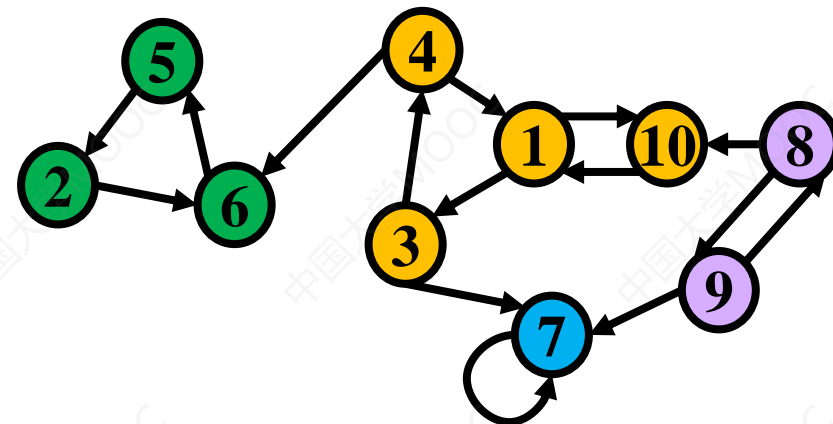
# 图的搜索算法



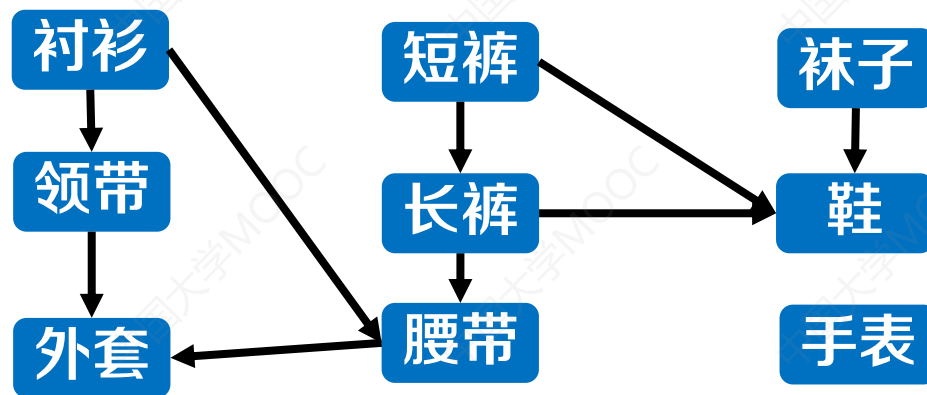
## 算法应用



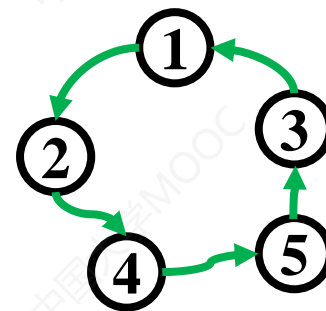
无权图的最短路径



强连通分量



拓扑排序



环路的存在性判断

广度优先搜索

深度优先搜索

# 贪心策略的算法



## • 最小生成树

```
A ← ∅  
while 没有形成最小生成树 do  
    | 寻找A的安全边(u, v)  
    | A ← A ∪ (u, v)  
end  
return A
```

通用框架	Prim算法	Kruskal算法
成环判断	始终保持一棵树，不断扩展	森林合成一棵树，不相交集合并
轻边发现	优先队列	全部边排序
求解视角	微观视角，基于当前点选边	宏观视角，基于全局顺序选边
算法思想	都是采用贪心策略的图算法	

# 贪心策略的算法



- 单源最短路径

	广度优先搜索	Dijkstra算法	Bellman-Ford算法
适用范围	无权图	带权图 (所有边权为正)	带权图
松弛次数	--	$ E $ 次	$ V  \cdot  E $ 次
数据结构	队列	优先队列	--
运行时间	$O( V  +  E )$	$O( E  \cdot \log V )$	$O( E  \cdot  V )$

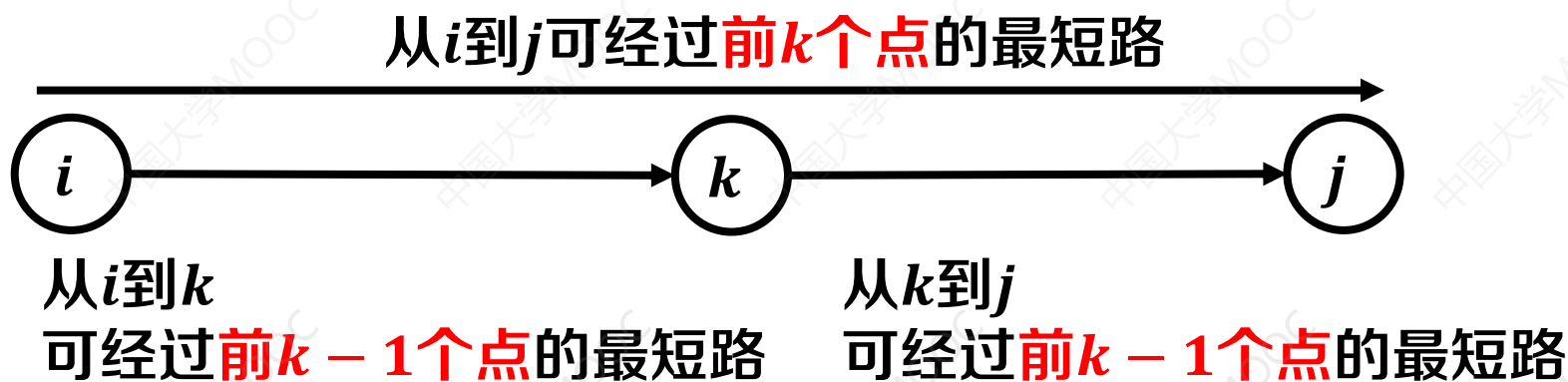
# 动态规划的算法



- 所有点对最短路径（Floyd算法）

$$D_k[i, j] = \min\{D_{k-1}[i, j], D_{k-1}[i, k] + D_{k-1}[k, j]\}$$

最优子结构



问题结构分析

递推关系建立

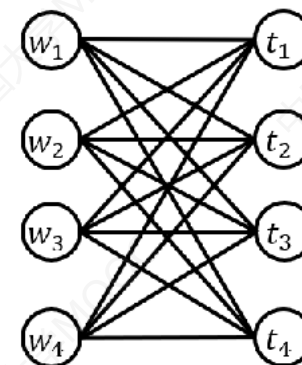
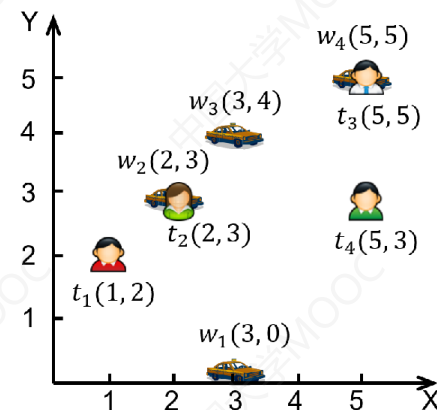
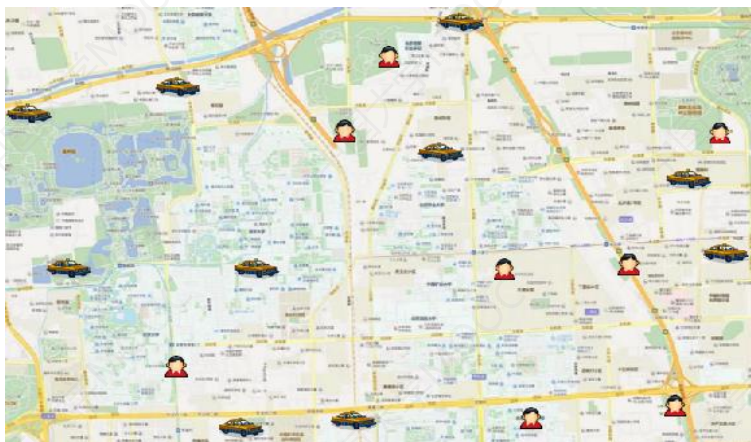
自底向上计算

最优方案追踪

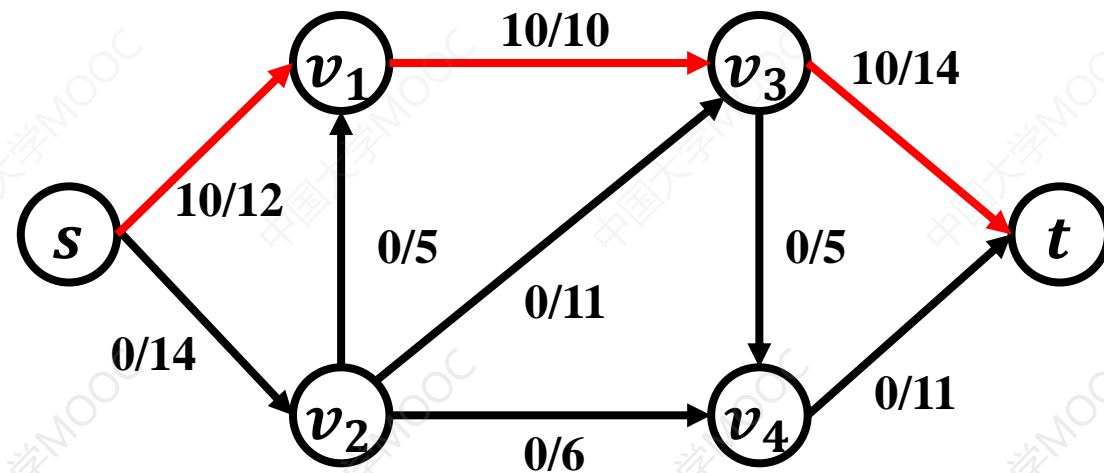
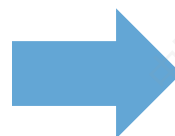
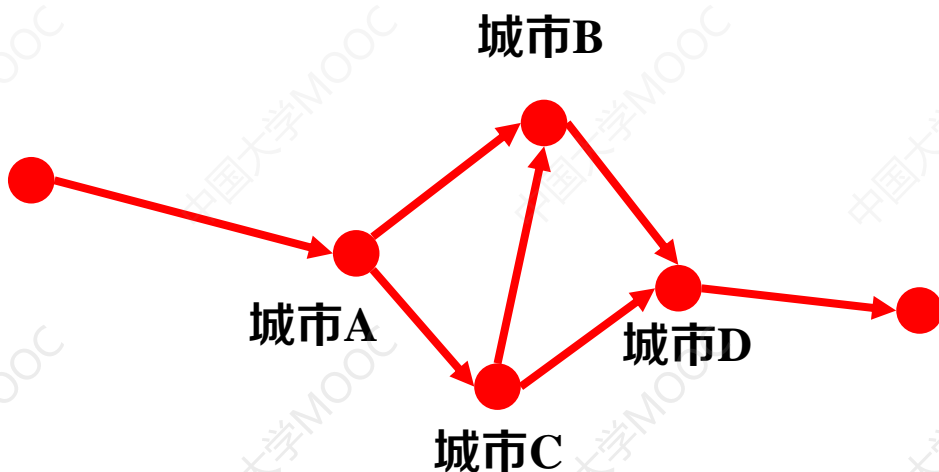
# 网络流问题



- 最大二分匹配问题（Hungarian算法）



- 最大流问题（Ford-Fulkerson算法）



流网络  $G = \langle V, E, C \rangle$

	Hungarian算法	Ford-Fulkerson算法
核心思想	寻找交替路径，增加匹配数	寻找增广路径，扩充流量
图的结构	二分图	流网络
边的性质	匹配边、非匹配边	流量、容量、残存容量
增益过程	找到一条交替路径， 匹配数增加一	找到一条增广路径， 流量增加路径的最小剩余容量



# 课程总结



分而治之

分解原  
问题

解决子  
问题

合并问  
题解

动态规划

问题结构  
分析

递推关系  
建立

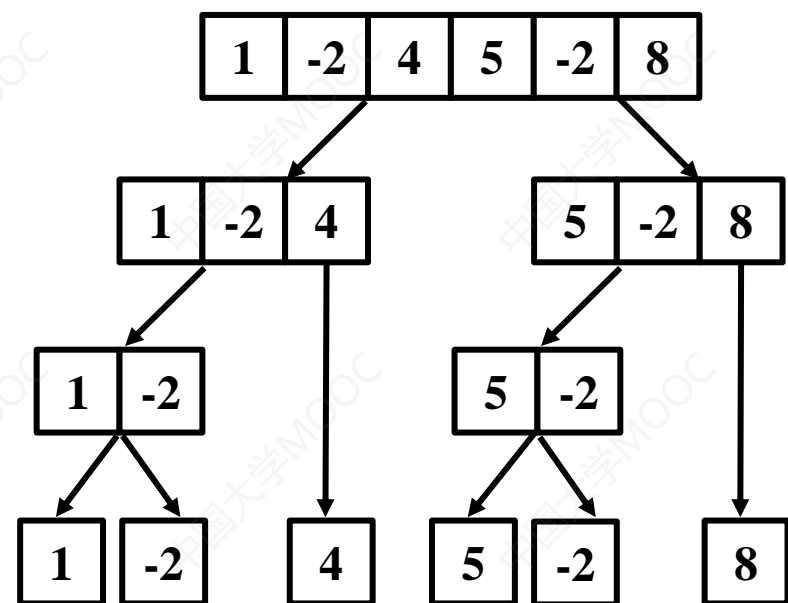
自底向上  
计算

最优方案  
追踪

贪心策略

提出贪心  
策略

证明策略  
正确

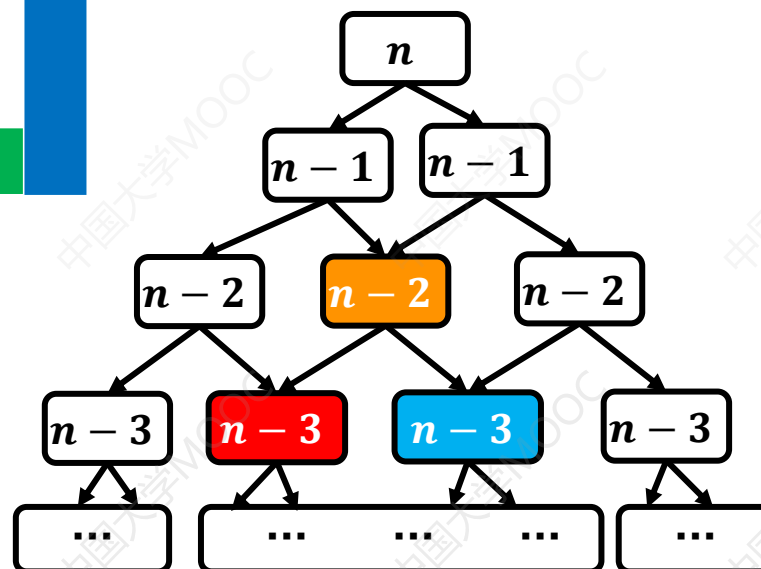


独立子问题

分而治之

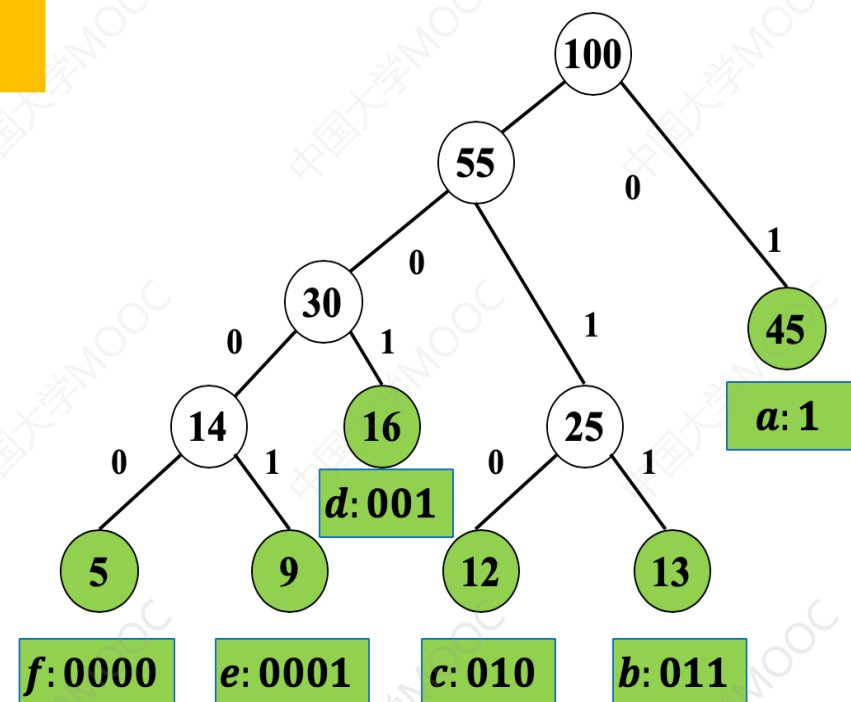
重叠子问题

动态规划



单一子问题

贪心策略



# 课程总结



## 算法设计与分析

### 分而治之篇

归并排序

递归式求解

最大子数组

逆序对计数

快速排序

次序选择

### 动态规划篇

0-1背包

最长公共子序列

最长公共子串

编辑距离

钢条切割

矩阵链乘法

全点对最短路径

### 贪心策略篇

部分背包

霍夫曼编码

活动选择

最小生成树

单源最短路径

### 图算法篇

广度优先搜索

深度优先搜索

环路存在性判断

拓扑排序

强连通分量

最大二分匹配

最大流算法