8.2 求下列变换的 z 变换并标注收敛区。

（1）$\boldsymbol{(k-3)\varepsilon(k-3)}$

因为$Z[\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-1}$，$|z|>1$。故根据 z 域微分特性有：

$$Z[k\varepsilon(k)]=-z\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2}，|z|>1$$

若令$f(k)=k\varepsilon(k)$，则根据 z 变换的移序特性有：

$$Z[(k-3)\varepsilon(k-3)]=z^{-3}\left[\frac{z}{(z-1)^2}+zf(-1)+z^2f(-2)\right]$$
$$=\frac{z^{-2}}{(z-1)^2}，|z|>1$$

（2）$\boldsymbol{(k-3)\varepsilon(k)}$

由前问可知，$Z[k\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-1)^2}$，$|z|>1$；$Z[\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-1}$，$|z|>1$。故可得：

$$\begin{aligned}Z[(k-3)\varepsilon(k)]&=Z[k\varepsilon(k)-3\varepsilon(k)]\\&=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{3z}{z-1}\\&=\frac{4z-3z^2}{(z-1)^2}，|z|>1\end{aligned}$$

（3）$\boldsymbol{|k-3|\varepsilon(k)}$

$$\begin{aligned}|k-3|\varepsilon(k)&=(k-3)\varepsilon(k-3)+(3-k)[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-3)]\\&=(k-3)\varepsilon(k-3)+(k-3)\varepsilon(k-3)-(k-3)\varepsilon(k)\\&=2(k-3)\varepsilon(k-3)-(k-3)\varepsilon(k)\end{aligned}$$

所以由前两问结果可知：

$$\begin{aligned}Z[|k-3|\varepsilon(k)]&=\frac{2z^{-2}}{(z-1)^2}-\frac{4z-3z^2}{(z-1)^2}\\&=\frac{3z^4-4z^3+2}{z^2(z-1)^2}，|z|>1\end{aligned}$$

8.3 运用 z 变换的性质求下列序列的 z 变换。

（1）$\boldsymbol{f(k)=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^k\right]\varepsilon(k)}$

$$f(k)=\frac{1}{2}[1+(-1)^k]\varepsilon(k)=\frac{1}{2}\varepsilon(k)+\frac{1}{2}(-1)^k\varepsilon(k)$$

又因为$Z[v^k\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-v}$，$|z|>1$。所以得：

$$Z[(-1)^k\varepsilon(k)]=\frac{z}{z+1}，|z|>1$$

故$Z[f(k)]=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z+1}\right]=\frac{z^2}{z^2-1}$，$|z|>1$

（3）$\boldsymbol{f(k)=k(-1)^k\varepsilon(k)}$

由（1）知：$Z[(-1)^k\varepsilon(k)]=\frac{z}{z+1}$，$|z|>1$，故根据 z 域微分特性得：

$$Z[f(k)]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z+1}\right)=-\frac{z}{(z+1)^2}，|z|>1$$

（5）$\boldsymbol{f(k)=\cos\frac{k\pi}{2}\varepsilon(k)}$

由于$\cos\frac{k\pi}{2}=\frac{e^{\mathrm{j}\frac{k}{2}\pi}+e^{-\mathrm{j}\frac{k}{2}\pi}}{2}$，故$f(k)=\frac{\left(e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\right)^k}{2}\varepsilon(k)+\frac{\left(e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\right)^k}{2}\varepsilon(k)$。

又因为$Z[v^k\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-v}$，$|z|>1$，结合 z 变换的线性性质得：

$$Z\left[\frac{\left(e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\right)^k}{2}\varepsilon(k)\right]=\frac{1}{2}\times\frac{z}{z-e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}=\frac{z}{2(z-\mathrm{j})}，|z|>1$$

$$Z\left[\frac{\left(e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\right)^k}{2}\varepsilon(k)\right]=\frac{1}{2}\times\frac{z}{z-e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}=\frac{z}{2(z+\mathrm{j})}，|z|>1$$

故：

$$Z[f(k)]=\frac{z}{2(z-\mathrm{j})}+\frac{z}{2(z+\mathrm{j})}=\frac{z^2}{z^2+1}，|z|>1$$

8.8 求下列 z 变换的原序列

（1）$F(z) = 7z^{-1} + 3z^{-2} - 8z^{10}, |z| > 0$

（2）$F(z) = 2z + 3 + 4z^{-1}, 0 < \ |z| < +\infty$

（3）$F(z) = \frac{z^4-1}{z^4-z^3}, \quad |z| > 1$

（4）$F(z) = \frac{z-5}{z+2}, \quad |z| > 2$

解：

（1） 因为 $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k} = 7z^{-1} + 3z^{-2} - 8z^{10}$

所以 $f(k) = 7\delta(k-1) + 3\delta(k-2) - 8\delta(k-10)$

（2） 因为 $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k} = 2z + 3 + 4z^{-1}$

所以 $f(k) = 2\delta(k+1) + 3\delta(k) + 4\delta(k-1)$

（3） 因为 $F(z) = \frac{z^4-1}{z^4-z^3} = \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{z^3(z-1)} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$

所以 $f(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2) + \delta(k-3) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-4)$

（4） 因为 $F(z) = \frac{z-5}{z+2} = \frac{z}{z+2} - \frac{5}{z+2}$

所以 $f(k) = (-2)^k\varepsilon(k) - 5(-2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$

8.21 已知某离散系统函数的分母多项式如下，求系统稳定时常数 $\boldsymbol{P}$ 的取值范围。

（1）$\boldsymbol{D(z)=z^2+0.25z+P}$

首先假定该离散系统为因果系统，此时可使用两种方法求解 P 的取值范围：罗斯-霍维茨判据法；极点在单位圆内判断方法。下面给出两种方法的分析过程。

方法一：罗斯-霍维茨判据法（不要求掌握）

令$z=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$，代入$D(z)$并化简，有

$$
\begin{aligned}
G(\lambda) &= D\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)=\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2+0.25\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)+P \\
&=\frac{\left(\frac{5}{4}+P\right)\lambda^2+2(1-P)\lambda+\frac{3}{4}+P}{(\lambda-1)^2}
\end{aligned}
$$

$G(\lambda)=0$的根就是其分子多项式的根，用罗斯-霍维茨准则对分子多项式进行判定：

$$
\begin{array}{lll}
A_2 & \frac{5}{4}+P & \frac{3}{4}+P \\
A_1 & 2(1-P) & \\
A_0 & \frac{3}{4}+P &
\end{array}
$$

要使系统稳定，须满足

$$
\begin{cases}
\frac{5}{4}+P>0 \\
2(1-P)>0 \\
\frac{3}{4}+P>0
\end{cases}
\qquad \text{解得} \ -\frac{3}{4}<P<1
$$

方法二：利用极点在单位圆内（要求掌握）

该系统函数特征方程为 $\lambda^2+0.25\lambda+P=0$，$\Delta=\frac{1}{16}-4P$

当$\Delta=0$时，有$P=\frac{1}{64}$ ，$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{8}$，因为$|\lambda_1|=|\lambda_2|<1$，故可知极点在单位圆内，系统稳定。

当$\Delta>0$时，有$P<\frac{1}{64}$ ，$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{1-64P}$，为使得系统稳定，有：

$$
\begin{cases}
|\lambda_1|<1 \\
|\lambda_2|<1
\end{cases}
$$

解得$P>-\frac{3}{4}$，故此时，$-\frac{3}{4}<P<\frac{1}{64}$。

当$\Delta<0$时，有$P>\frac{1}{64}$ ，$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{8}\pm\frac{j}{8}\sqrt{64P-1}$，为使得系统稳定，有

$$\begin{cases}|\lambda_1| < 1\\ |\lambda_2| < 1\end{cases}$$

解得$P < 1$，故此时，$\frac{1}{64} < P < 1$。

综上，要使得系统稳定，须使$-\frac{3}{4} < P < 1$

事实上，在离散系统中，由于存储器的存在，非因果的离散系统也是物理上能够实现的。因此下面将给出，在原系统不一定为因果系统的情况下，P 的取值范围讨论方法。

离散系统稳定的充分必要条件是系统的单位样值响应绝对可和，即：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

故可根据单位样值响应的类型（即左边序列、双边序列、右边序列），来讨论极点所在的区域。对于左边序列，极点需要在单位圆外，才能保证系统稳定；对于双边序列，需要一个极点在单位圆内部，一个极点在单位圆外部；对于右边序列，需要极点在单位圆内。

原系统的极点即为$D(z)$的零点，故令$D(z) = 0$，可得方程$\left(z + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64} - P$。下面根据 P 的取值分情况讨论：

- $P \le \frac{1}{64}$

  此时可解出原系统的极点$z_1 = -\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{1}{64} - P}$，$z_2 = -\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{64} - P}$。可解得$z_1 < z_2$。

  若$h(n)$为左边序列：则说明两个极点均在单位圆外，此时有三种可能：

  （1）$z_1 < z_2 < -1$;（2）$z_1 < -1 < 1 < z_2$;（3）$1 < z_1 < z_2$。又由于$z_1 < -\frac{1}{8}$，$z_2 > -\frac{1}{8}$，故可以知道，情况（1）与情况（3）均不可能，故通过情况（2）可解出 P 的取值范围：$P < -\frac{5}{4}$。

  若$h(n)$为双边序列：则说明两个极点一个在单位圆内一个在单位圆外，由于$z_1 < z_2$，且$|z_1| > |z_2|$，故可能的情况仅有：$z_1 < -1 < z_2 < 1$。由此可解得：$-\frac{5}{4} < P < -\frac{3}{4}$。

若$\boldsymbol{h(n)}$为右边序列：则说明两个极点均在单位圆内，即$-1 < z_1 < z_2 < 1$，

可解得：$P > -\frac{3}{4}$

故得出：$P \le \frac{1}{64}$且$P \ne -\frac{3}{4}$，$P \ne -\frac{5}{4}$

- $P > \frac{1}{64}$

此时两个极点共轭，即$z_1 = -\frac{1}{8} - \mathrm{j}\sqrt{P - \frac{1}{64}}$，$z_2 = -\frac{1}{8} + \mathrm{j}\sqrt{P - \frac{1}{64}}$。此时$z_1$与$z_2$的模相等，即$\|z_1\| = \|z_2\| = P$。

若$\boldsymbol{h(n)}$为左边序列：则说明两个极点均在单位圆外，即$P > 1$。

若$\boldsymbol{h(n)}$为双边序列：因为两个极点模相等，故不存在一个极点在单位圆内一个极点在单位圆外的情况，所以该情况舍去。

若$\boldsymbol{h(n)}$为右边序列：则说明两个极点均在单位圆内，即$P < 1$

故得出：$P > \frac{1}{64}$且$P \ne 1$

综上所述：$P \in R$且$P \ne 1$，$P \ne -\frac{3}{4}$，$P \ne -\frac{5}{4}$

（2）$\boldsymbol{D(z) = z^3 - 0.5z^2 + 0.25z + P}$

同样首先假定该系统为因果系统，下面给出前述两种方法求解 P 的取值范围。

方法一：罗斯-霍维茨判据法（不要求掌握）

令$z = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$，代入$D(z)$并化简，有

$$G(\lambda) = D\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) = \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^3 + 0.5\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2 + 0.25\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) +$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{4} + P\right)\lambda^3 + \left(\frac{9}{4} - 3P\right)\lambda^2 + \left(\frac{13}{4} + 3P\right)\lambda + \frac{7}{4} - P}{(\lambda-1)^2}$$

$G(\lambda) = 0$的根就是其分子多项式的根，用罗斯-霍维茨准则对分子多项式进行判定：

A_3	$\frac{3}{4} + P$	$\frac{13}{4} + 3P$
A_2	$\frac{9}{4} - 3P$	$\frac{7}{4} - P$
A_1	$\frac{6 - 4P - 8P^2}{\frac{9}{4} - 3P}$	0
A_0	$\frac{7}{4} - P$	

要使系统稳定，须满足

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}+P>0 \\ \dfrac{9}{4}-3P>0 \\ \dfrac{6-4P-8P^2}{\dfrac{9}{4}-3P}>0 \\ \dfrac{7}{4}-P>0 \end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{4}<P<\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$

方法二：利用极点在单位圆内

设原系统的极点为$z=a+b\mathrm{j}$，且原系统为因果系统，故要使系统稳定，则需满足：$a^2+b^2<1$。又因为原系统的极点即为$D(z)$的零点，故将$z=a+b\mathrm{j}$代入原方程可得如下方程组：

$$\begin{cases} a^3-3ab^2-0.5a^2+0.5b^2+0.25a+P=0 \cdots\cdots ① \\ 3a^2b-b^3-ab+0.25b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①可知，$P=-(a^3-3ab^2-0.5a^2+0.5b^2+0.25a)$，因此可通过求等式右边的表达式取值范围来得出 P 的取值范围。下面将根据 b 的取值分情况讨论。

- $b=0$

  此时根据①式可得出：$P=-(a^3-0.5a^2+0.25a)$，$-1<a<1$。根据导数分析可知，函数$f(a)=-(a^3-0.5a^2+0.25a)$在区间$-1<a<1$内单调递减，故此时可得出 P 的取值范围$P\in(-\frac{3}{4},\frac{7}{4})$。

- $b\neq 0$

  当$b\neq 0$时，由②式可得：

$$3a^2-b^2-a+0.25=0 \cdots\cdots ③$$

  若令函数$f(a,b)=a^3-3ab^2-0.5a^2+0.5b^2+0.25a$，则有：$P=-f(a,b)$。故问题转化为：求函数$f(a,b)$在区域$a^2+b^2<1$内，且满足③式条件时的取值范围。二元函数的取值范围求解原则：求函数在区域内的极值（若存在）以及函数的边界值，比较两者大小得出取值范围。

区域内极值：根据拉格朗日乘数法，令：

$$L(a,b,\lambda)=f(a,b)+\lambda(3a^2-b^2-a+0.25)$$

对$L(a,b,\lambda)$关于各变量求偏导数并令其为 0，可列出如下方程组：

$$\begin{cases}L'_a(a,b,\lambda)=3a^2-3b^2-a+0.25+6\lambda a-\lambda=0\\ L'_b(a,b,\lambda)=-6ab+b-2\lambda b=0\\ L'_\lambda(a,b,\lambda)=3a^2-b^2-a+0.25=0\end{cases}$$

可知上述方程组无实数解，故函数$f(a,b)$在区域$a^2+b^2<1$内不存在极值。

边界值：即函数在边界$a^2+b^2=1$且满足③式条件时的取值。故可列出如下方程组：

$$\begin{cases}3a^2-b^2-a+0.25=0\\ a^2+b^2=1\end{cases}$$

可解得：$a=\frac{1\pm\sqrt{13}}{8}$。

结合上述方程组求$f(a,b)$如下：

$$\begin{aligned}f(a,b)&=a^3-3ab^2-0.5a^2+0.5b^2+0.25a\\&=3a^3-2a^3-ab^2-2ab^2-a^2+0.5a^2+0.5b^2+0.25a\\&=a(3a^2-b^2-a+0.25)-2a(a^2+b^2)+0.5(a^2+b^2)\\&=-2a+0.5\end{aligned}$$

故当$a=\frac{1+\sqrt{13}}{8}$，解得$f(a,b)=\frac{1-\sqrt{13}}{4}$；当$a=\frac{1-\sqrt{13}}{8}$，解得$f(a,b)=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$。

故$P=-f(a,b)\in\left(-\frac{1+\sqrt{13}}{4},\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)$。

又因三次方程在复平面内必存在三个根（包括重根），三个根中可能存在复根，因此需要同时满足$b=0$和$b\neq 0$的情况，故对 P 的取值范围求交集得到：

$$P\in\left(-\frac{3}{4},\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)$$

对于（2）问，也可以讨论离散系统在不一定是因果系统的情况下，P 的取值范围。但由于讨论过程超出本课程范畴，故此处不再给出。如果同学们对此有兴趣，可自行研究或与老师、助教讨论。