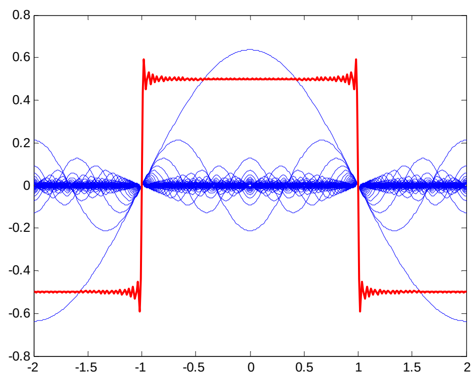
信号与系统

第4讲 系统零状态响应的卷积积分法

郭红星

华中科技大学计算机学院



上一讲内容回顾

- 连续时间系统的时域分析方法简介
- 连续时间LTI系统响应的经典解法
- 连续时间LTI系统响应的新解法
- 系统零输入响应的求解
- 系统零状态响应之单位冲激响应$h(t)$

本讲内容

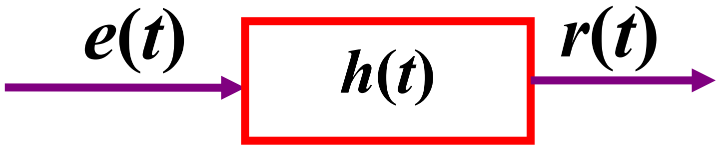
本讲要解决的问题：如何求一般激励信号作用下系统的零状态响应？

- 系统零状态响应的求解思路
- 卷积积分公式的推导及其物理含义
- 卷积积分的计算
- 卷积积分的性质
  - 着重从系统层面，物理含义上理解
  - 系统与子系统间单位冲激响应的关系
- **学习目标**
  - **掌握基于信号分解的系统零状态响应求解的思路与方法**
  - **熟悉从系统响应视角来推导和理解卷积积分性质的思想**

4.1 零状态响应的卷积法

系统零状态响应的求解

1. 所研究的问题:LTI系统对任意激励信号的零状态响应



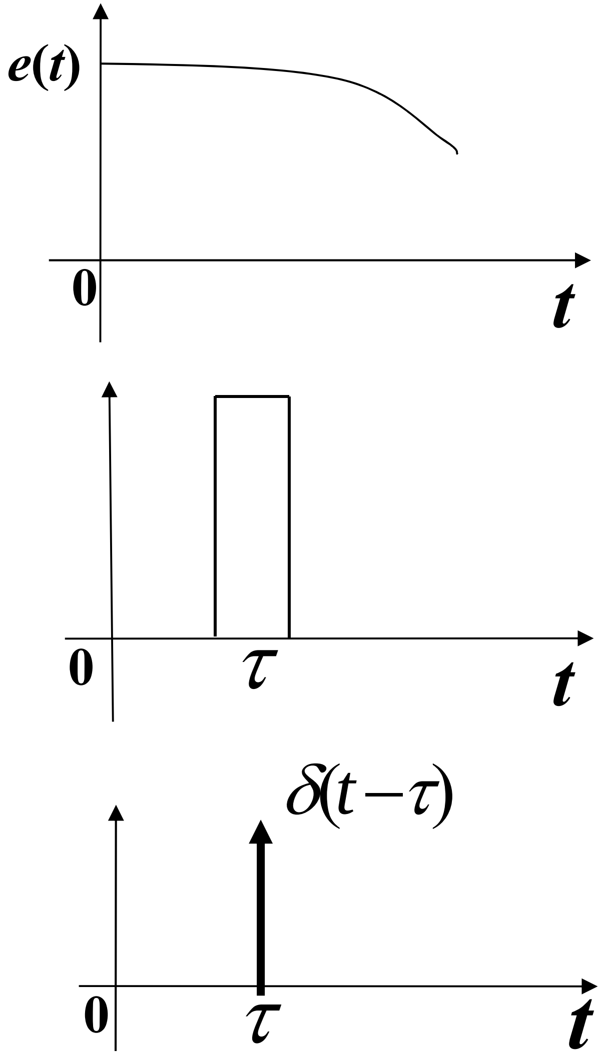
2. 已知条件

- 激励信号的可分解性
- 系统的LTI性
- 系统的单位冲激响应$h(t)$

3. 问题的转化:能否用冲激信号的组合来表示激励信号，使得求解其零状态响应转换为求解系统对一系列冲激信号响应的迭加?

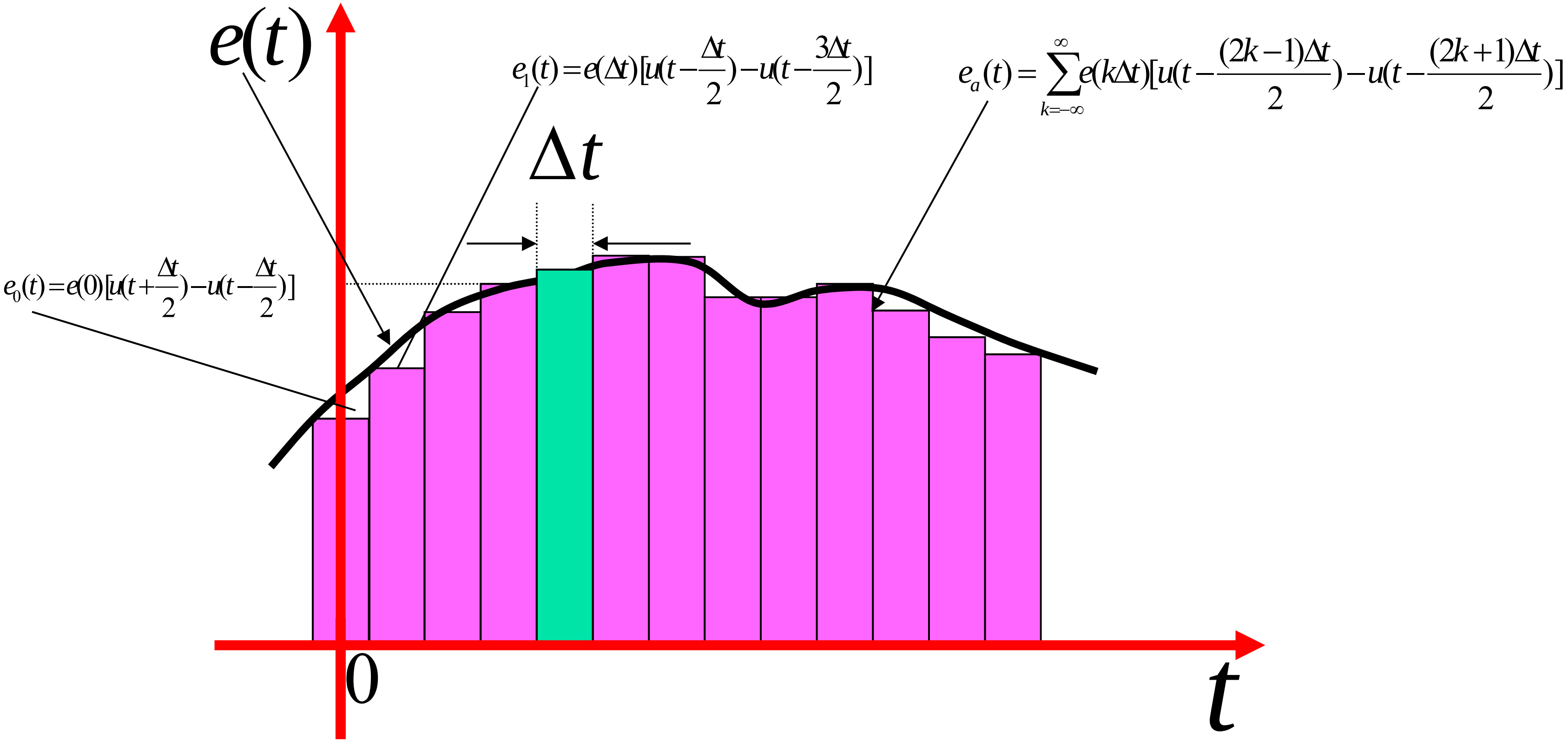
一般激励信号的分解

- **基本思路：**
  1. 可用简单信号的组合来表示一般激励信号！
  2. 其中，用**一系列脉冲近似**激励信号是一种值得一试的方法！
  3. 要是这一系列脉冲能**演化**成冲激信号就太好了？
  4. 我们的想法能实现吗？



- **下面对上述问题进行研究**

一般信号分解成脉冲分量之和



$$e(t)\approx e_a(t)=\cdots+e(0)[u(t+\frac{\Delta t}{2})-u(t-\frac{\Delta t}{2})]+e(\Delta t)[u(t-\frac{\Delta t}{2})-u(t-\frac{3\Delta t}{2})]+\cdots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e(k\Delta t)[u(t-\frac{(2k-1)\Delta t}{2})-u(t-\frac{(2k+1)\Delta t}{2})]$$

由脉冲分量之和演化为成冲激分量之和的过程

思考：当$\Delta t \to 0$时，$e_a(t) \to$？

$$e_0(t) = e(0)\Delta t\delta(t)$$

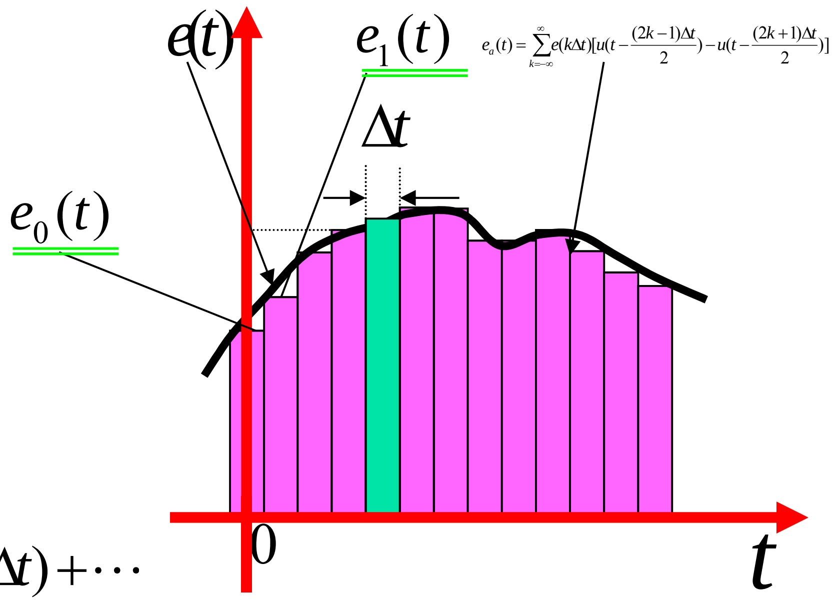
$$e_1(t) = e(\Delta t)\Delta t\delta(t-\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$e_k(t) = e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t)$$

$$e_a(t) = \cdots + e(0)\Delta t\delta(t) + \cdots + e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t) + \cdots$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t) = e(t)$$



由于Δt为无穷小量，即$\Delta t \to d\tau$，$k\Delta t \to \tau$

$$\therefore e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

实际上是冲激信号的筛选性质！

似曾相识？

根据上述结果：对于求一般激励信号下的系统的零状态响应，你有什么好的想法吗？

系统零状态响应卷积积分公式的推导

a. 把激励表示成一系列冲激信号的线性组合

$$e(t)=\lim_{\Delta t\to 0} e_a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)\Delta t\,\delta(t-k\Delta t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

b. 求冲激序列的响应

$$\delta(t)\rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow h(t)$$

$$e(k\Delta t)\Delta t\,\delta(t-k\Delta t)\rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow e(k\Delta t)\Delta t\cdot h(t-k\Delta t)$$

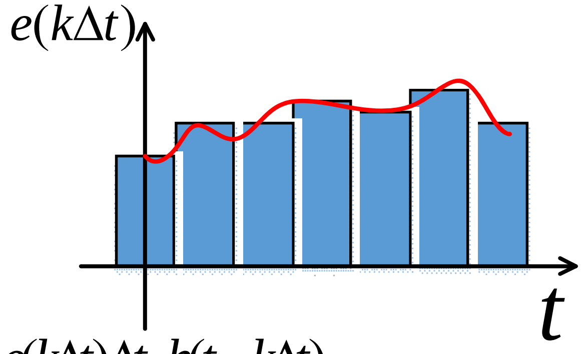
$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)\Delta t\cdot\delta(t-k\Delta t)\rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)\Delta t\cdot h(t-k\Delta t)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

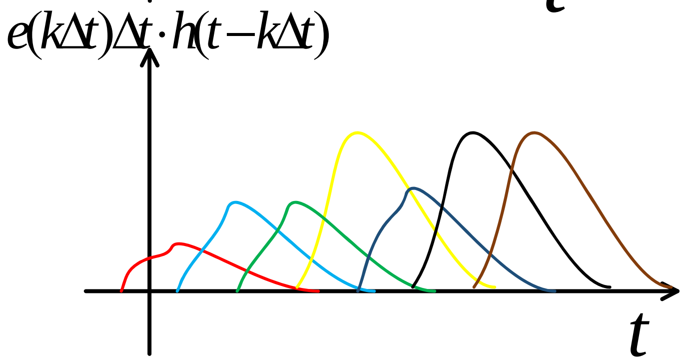
$$e(t)\rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

卷积积分公式

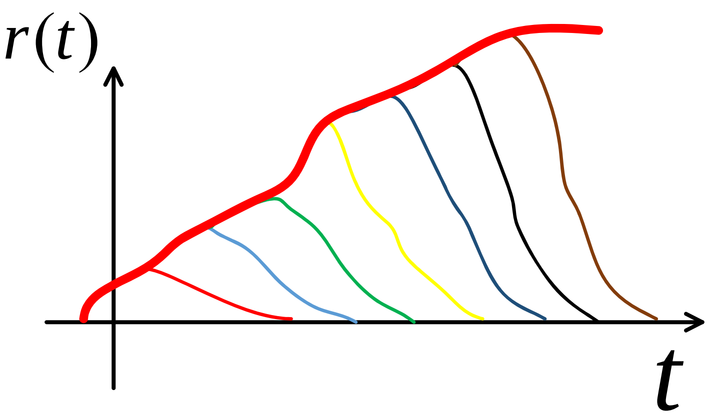
卷积积分公式的物理解释



$$e(k\Delta t)\Delta t\,\delta(t-k\Delta t)$$



$$e(k\Delta t)\Delta t\cdot h(t-k\Delta t)$$



$$r(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e(k\Delta t)\Delta t\cdot h(t-k\Delta t)$$

卷积积分计算的图解说明

$$r(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

① 将$e(t)$和$h(t)$中的自变量由t改为τ，τ成为函数的自变量

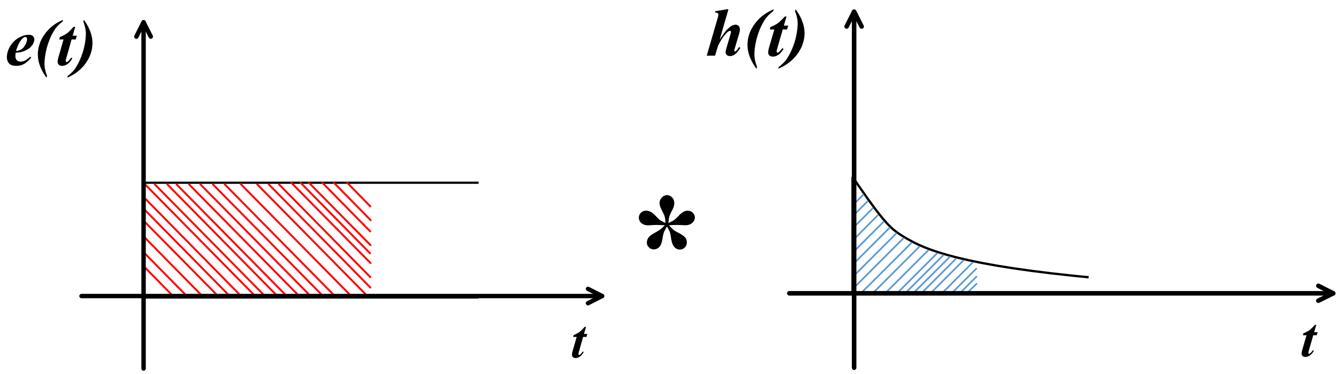
② 把其中一个信号反褶、平移

$$h(\tau) \xrightarrow{\text{反褶}} h(-\tau) \xrightarrow{\text{向右平移 } t} h(-(\tau-t))=h(t-\tau)$$

③ 将$e(\tau)$ 与$h(t-\tau)$相乘后积分

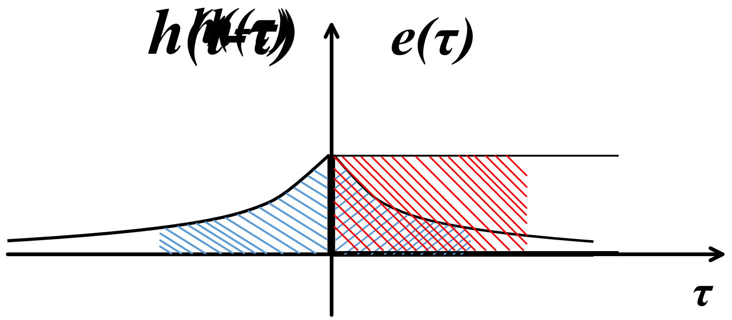
例题1：用图解法计算卷积

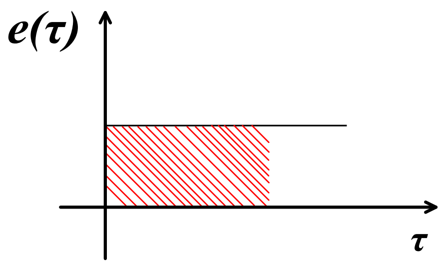
试计算$e(t)*h(t)$，其中$e(t)=u(t)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$。



解: $r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$

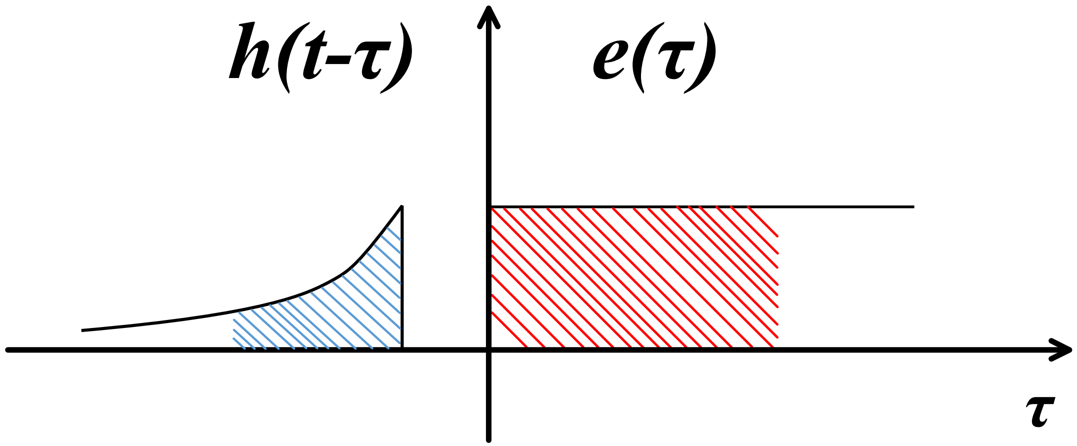
1. $-\infty \le t \le 0$ 重合面积为零：$e(t)*h(t)=0$





例题1：用图解法计算卷积(续)

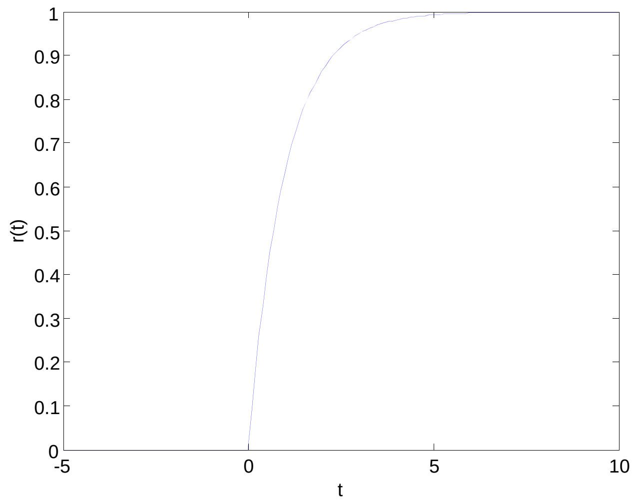
$$2.\ if\quad 0<t\leq\infty$$



请看演示

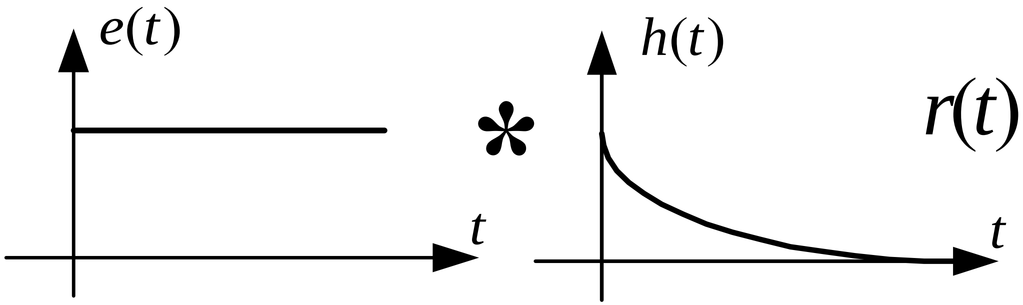
$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-(t-\tau)}d\tau=1-e^{-t}$$



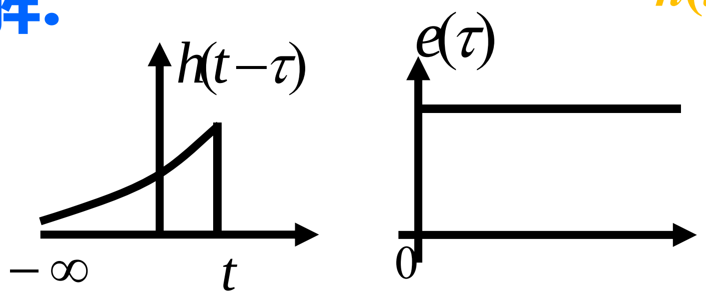
例题1的函数式解法

试计算$e(t)*h(t)$，其中$e(t)=u(t)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$。



$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

解:



$h(t-\tau)$→非零下限为$-\infty$
$u(\tau)$→非零下限为0

卷积积分下限为0

$h(t-\tau)$→非零上限为t
$u(\tau)$→非零上限为∞

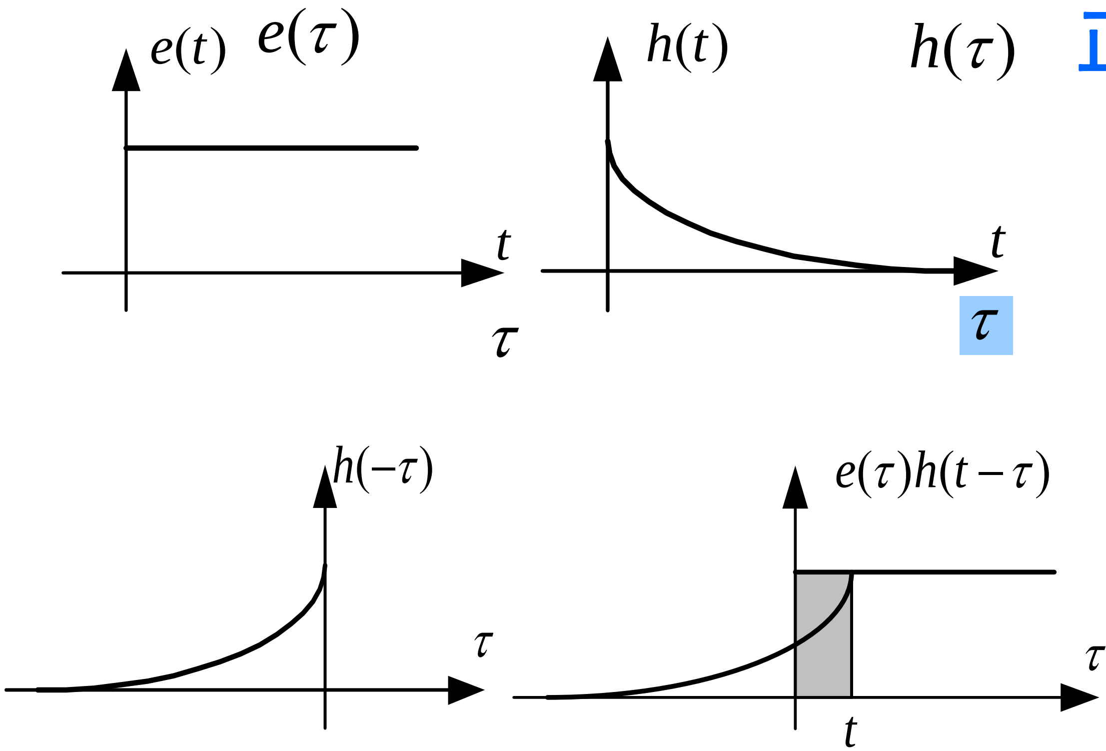
卷积积分上限为t

若两个函数的左边界分别为t_{l1}，t_{l2},右边界分别为 t_{r1}，t_{r2}，积分的下限为$\max[t_{l1}, t_{l2}]$;积分的上限为$\min[t_{r1},t_{r2}]$

例题1的函数式解法(续)

$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{-(t-\tau)}d\tau=1\cancel{-}e^{-t}$$

思考：这个结果对吗？



错在定义域的确定上，

正确的结果为：

$$=(1-e^{-t})u(t)$$

使用函数法时，定义域的确定！

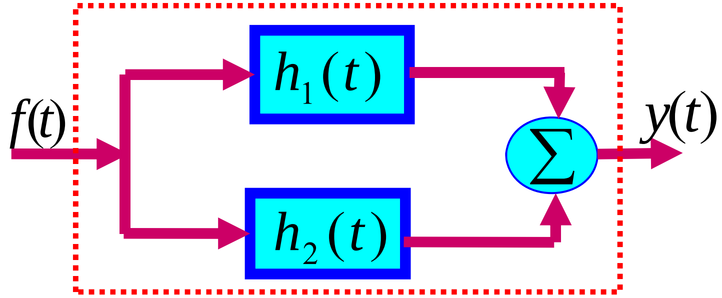
4.2 卷积的性质及应用

卷积的性质：卷积代数

①　分配律（distributive law）

$$f*[h_1+h_2]=f*h_1+f*h_2$$

$$h=h_1+h_2$$



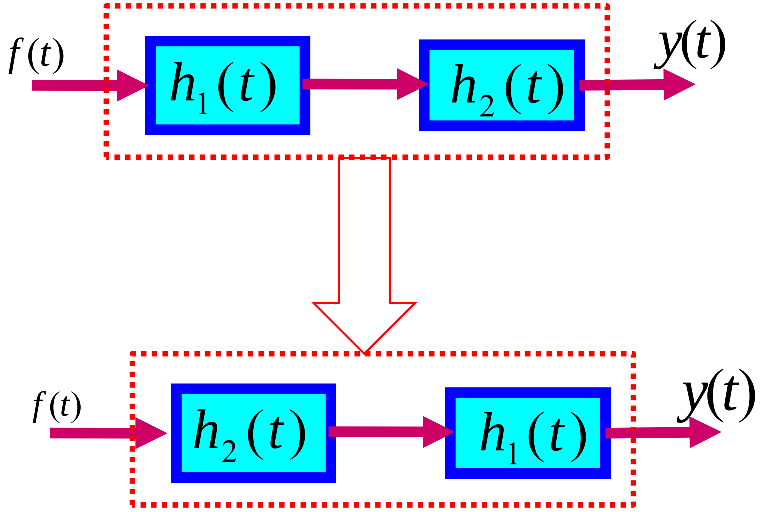
②　结合律（associative law）

$$[f*h_1]*h_2=f*[h_1*h_2]$$

③　交换律（commutative law）

$$h_1*h_2=h_2*h_1$$

$$h=h_1*h_2$$

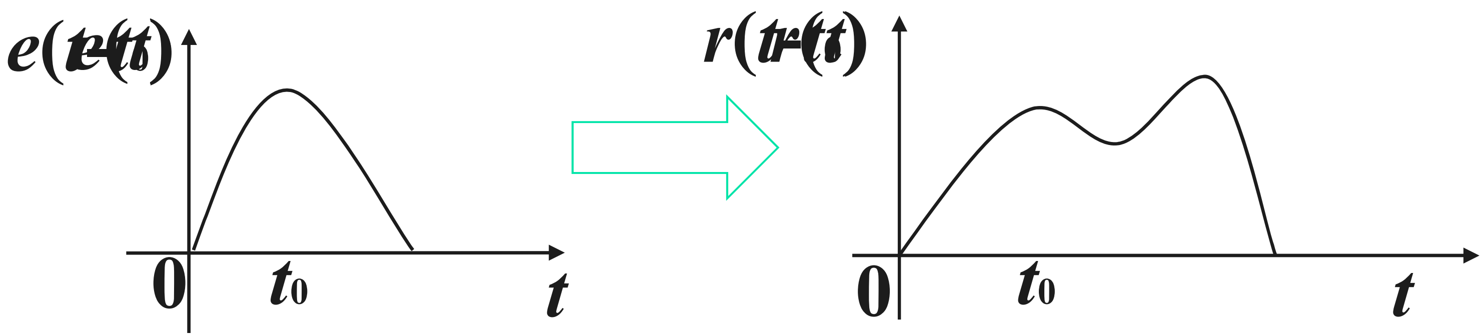


$$h=h_2*h_1$$

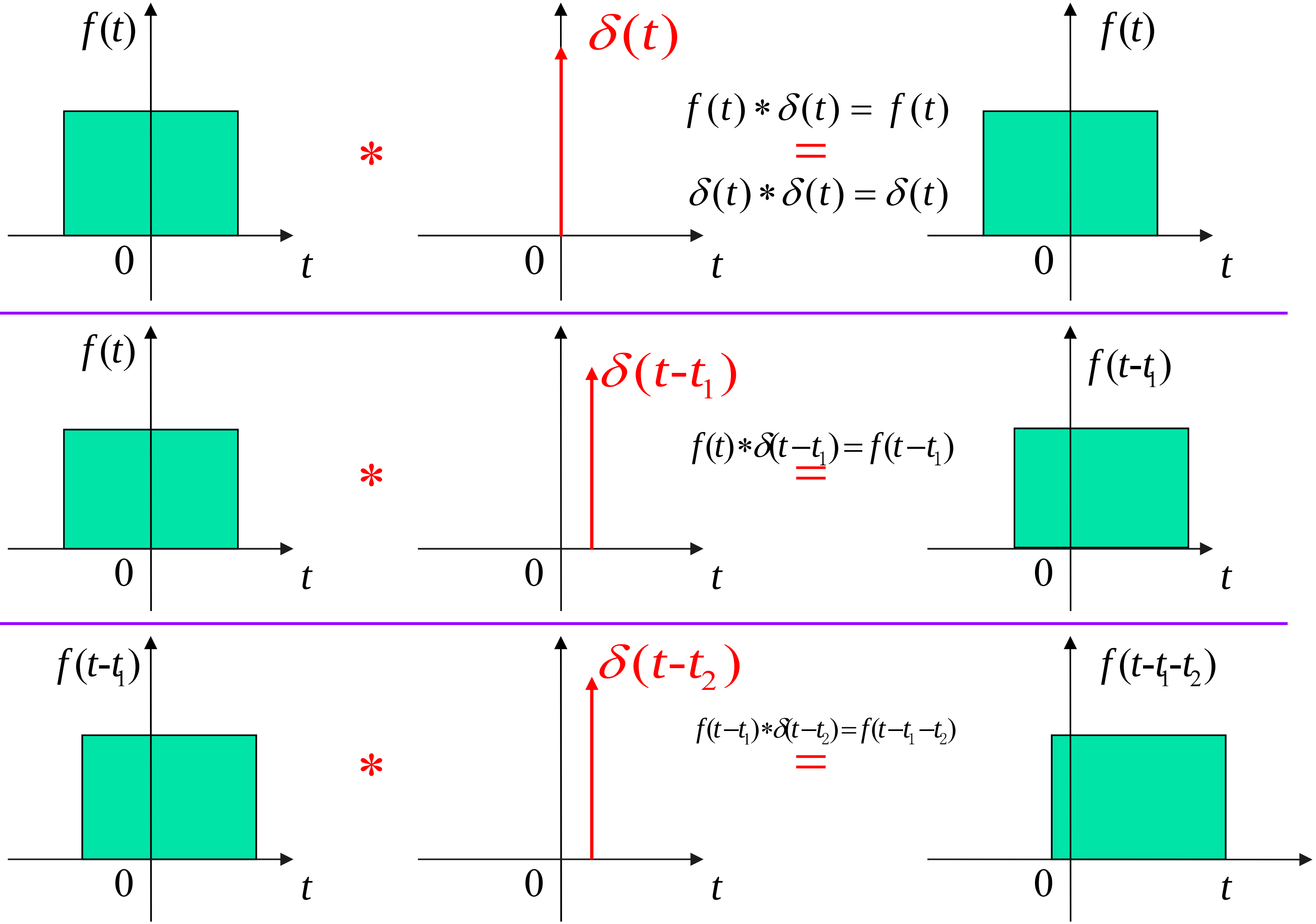
卷积积分的移不变性

设 $e(t)*h(t)=r(t)$, 则 $e(t-t_0)*h(t)=r(t-t_0)$

$$e(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow r(t)=e(t)*h(t)$$



单位冲激信号的卷积特性



$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$$

$$f(t) * \delta(t-t_1) = f(t-t_1)$$

$$f(t-t_1) * \delta(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$$

单位冲激信号微积分的卷积特性

$$1.e(t)*\delta^{'}(t)=e^{'}(t)$$

微分运算

$$e(t)\rightarrow \boxed{h(t)=\delta'(t)} \rightarrow r(t)=e(t)*h(t)=e'(t)$$

$$2.e(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau$$

积分运算

不用证明！
直观理解？

卷积的微分和积分性质

1. 两函数相卷积后的导数等于两函数之一的导数与另一函数相卷积

$$\frac{d}{dt}[f_1 * f_2] = \frac{df_1}{dt} * f_2 = f_1 * \frac{df_2}{dt}$$

2. 两函数相卷积后的积分等于两函数之一的积分与另一函数相卷积

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1 * f_2]dt = f_1 * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau$$

卷积的微分和积分性质的推广

若 $f_1 * f_2 = s(t)$，则：

$$f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n)}(t) = s^{(m+n)}(t)$$

$$f_1 * f_2 = \frac{df_1}{dt} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau = \frac{d^2 f_1}{dt^2} * \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau$$

与典型奇异信号相关的几个特例

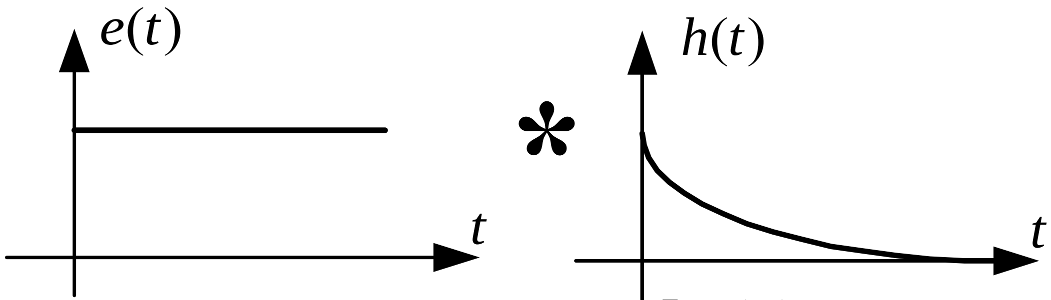
$$f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t)$$

$$f(t) * \delta^{(k)}(t - t_0) = f^{(k)}(t - t_0)$$

$$f(t) = f(t) * \delta'(t) * u(t) = f'(t) * u(t)$$

例题1的利用卷积性质解法

试计算$e(t)*h(t)$，其中$e(t)=u(t)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$。



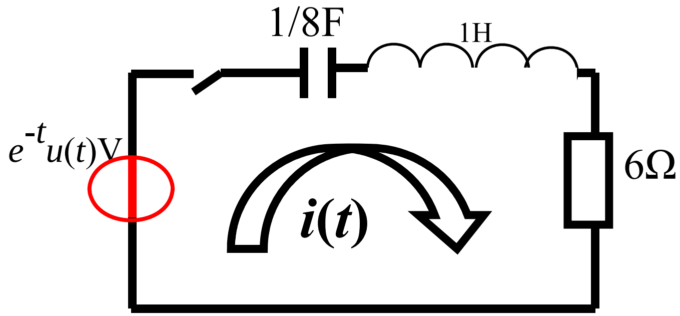
解: $$r(t)=e(t)*h(t)=\frac{de(t)}{dt}*\int_0^t h(\tau)d\tau$$

$$=\delta(t)*\int_0^t e^{-\tau}d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=(1-e^{-t})u(t)$$

例题2：系统零状态响应的求解

▪电路系统如上图所示，t=0以前开关断开，系统处于零状态，t=0时刻，开关合上。试求$i(t)$的零状态响应



解：由第3讲结果知，系统单位冲激响应为：

$$h(t)=[-e^{-2t}+2e^{-4t}]u(t)$$

系统的零状态响应为：

$$i(t)=e(t)*h(t)=h(t)*e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(-e^{-2\tau}+2e^{-4\tau})u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t(-e^{-2\tau}+2e^{-4\tau})e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t(-e^{-2\tau}+2e^{-4\tau})e^{\tau}d\tau$$

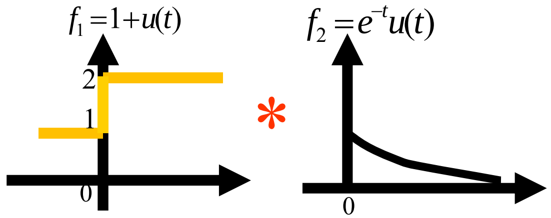
$$=e^{-t}\int_0^t(-e^{-\tau}+2e^{-\tau})d\tau=e^{-t}(e^{-\tau}-\frac{2}{3}e^{-3\tau})\Big|_0^t=e^{-t}(e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-3t}-\frac{1}{3})$$

$$=e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{-4t}-\frac{1}{3}e^{-t}(A)\qquad t\geq 0$$

与第3讲中经典法的结果相同

例题3（课外自学）

■计算右图中两信号的卷积



解：方法一图解法，将f_2反褶、平移

$t<0$时： $f_1*f_2=\int_{-\infty}^{t}1\times e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}e^{\tau}\Big|_{-\infty}^{t}=e^{0}-0=1$

$t>0$时： $f_1*f_2=\int_{-\infty}^{0}e^{-(t-\tau)}d\tau+\int_{0}^{t}2e^{-(t-\tau)}d\tau=2-e^{-t}$

$$=1+(1-e^{-t})u(t)$$

方法二利用卷积的微积分性质直接计算

$$f_1*f_2=\frac{df_1}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau=\delta(t)*\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}u(\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-\tau}d\tau=(1-e^{-t}\cancel{)}u(t)$$

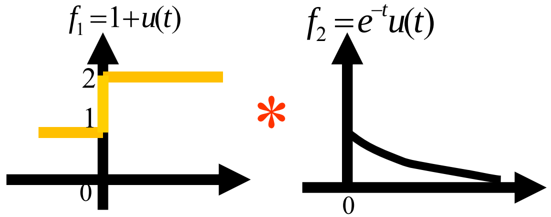
与图解法的结果不同？

■注意积分常数的问题 $\int_{-\infty}^{t}\frac{df_1(\tau)}{d\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)\neq f_1(t)$

$$\boxed{f_1*f_2=\frac{df_1}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau \text{需要} \qquad f_1=\int_{-\infty}^{t}\frac{df_1}{d\tau}d\tau}$$

例题3解答(课外自学)

- 方法二:用微分积分性质的正确计算



$$f_1 * f_2 = [1+u(t)]*[e^{-t}u(t)]$$

$$= 1*e^{-t}u(t) + u(t)*e^{-t}u(t)$$

$1 * e^{-t}u(t)$
$\neq e^{-t}u(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \frac{du(t)}{dt} * \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}u(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{\tau-t}d\tau + \delta(t) * \int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau$$

$$= 1 + \int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau = \boxed{1+(1-e^{-t})u(t)}$$

与图解法的结果相同

前沿：Deep Convolutional Neural Networks

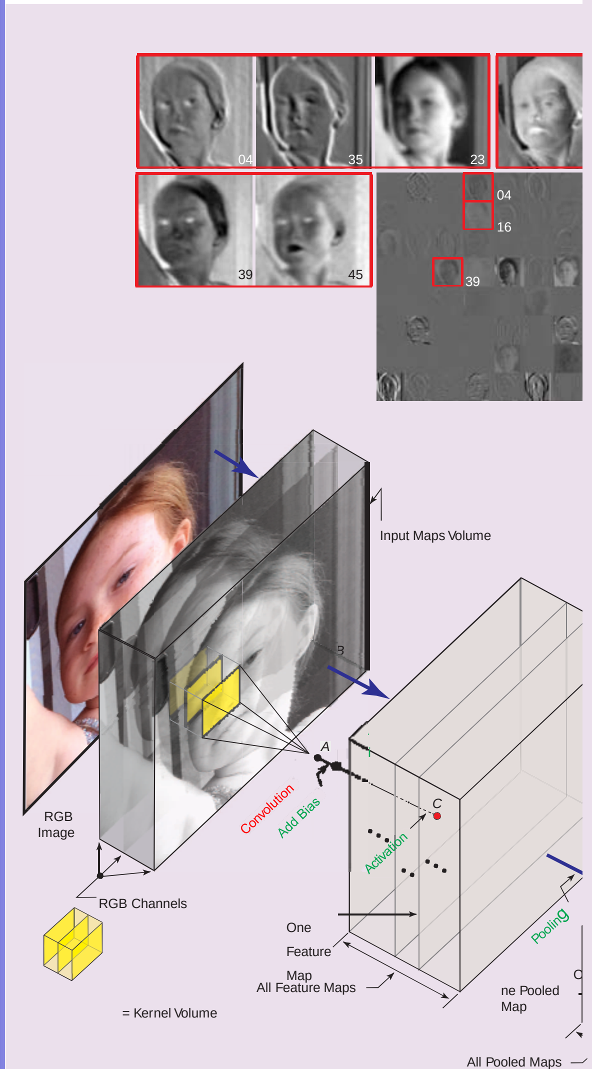


Figure 1 The components of one stage of a CNN, consisting of an input maps volume, a feature maps volume, and an optional pooled maps volume. The maps in the input volume correspond to the three channels of the RGB image shown. The stage has 96 feature maps and 96 pooled maps. The highlighted feature maps, displayed as images and identified numerically, illustrate the types of features that a CNN is capable of extracting from an input image.

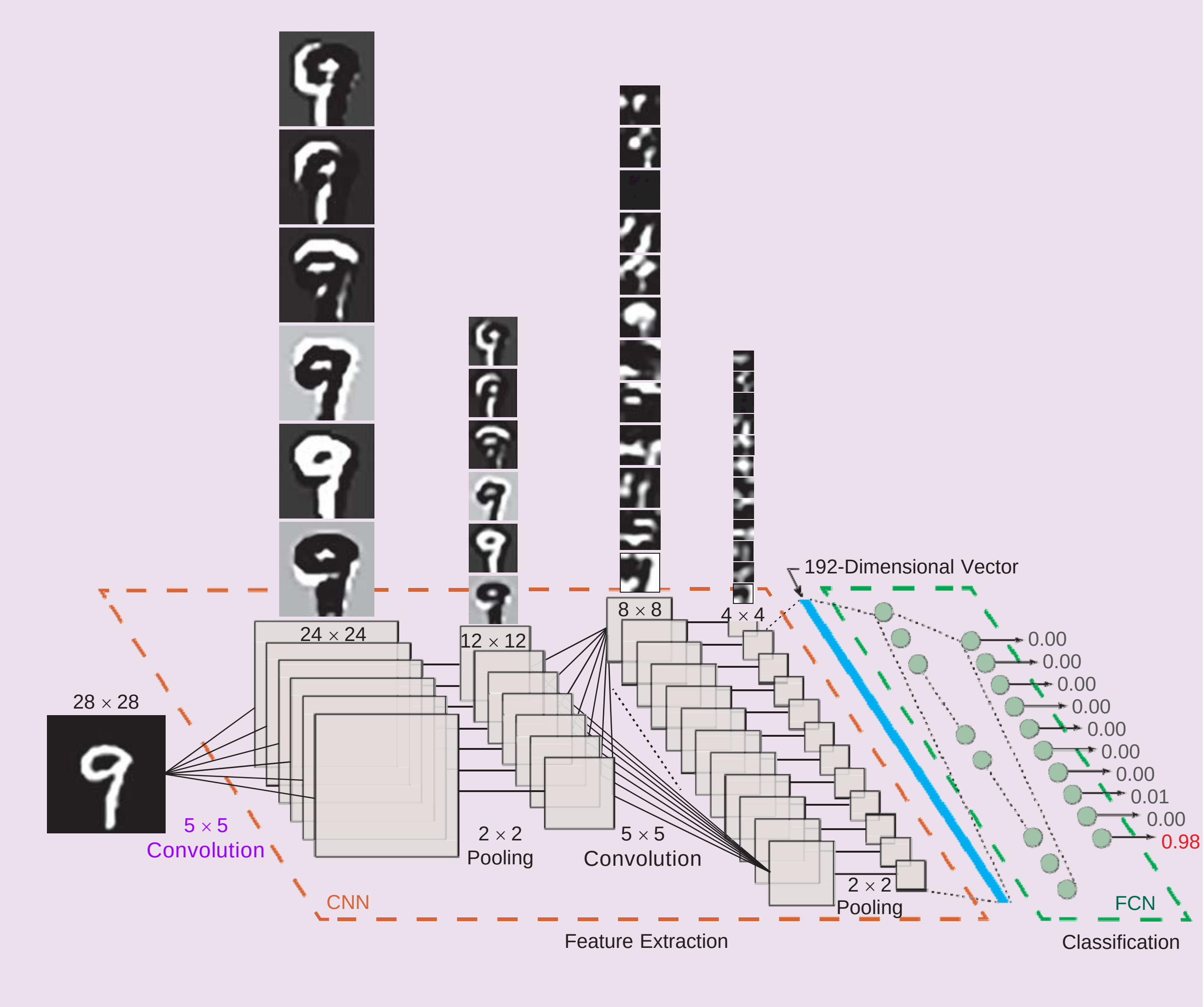


Figure 3 A CNN trained to extract features that are then used by an FCN to classify handwritten numerals. The input image shown is from the National Institute of Standards and Technology database. (A formatted version of this database is available for experimental work at yann.lecun.com/exdb/mnist.)

小结

- 一般激励信号可分解为冲激信号的线性叠加
- LTI系统的零状态响应可利用卷积积分法求取
- 计算卷积积分有多种方法，要注意确定积分限，不要忘记定义域
- 卷积积分是一种数学运算，关键是要理解其物理意义，并学会从系统响应角度考察其重要性质
- 利用卷积积分性质可以简化卷积计算过程，但要注意容易疏忽的问题
- 卷积的最新应用—CNNs(DL、AI)

课外作业

- 阅读：2.7,2.8;自学2.9; 预习:3.1
- 作业：2.19, 2.22两题

- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如张三（学号U2018148xx）第一周作业第一题图片名为： U2018148xx U2018148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为： U2018148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为： U2018148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。