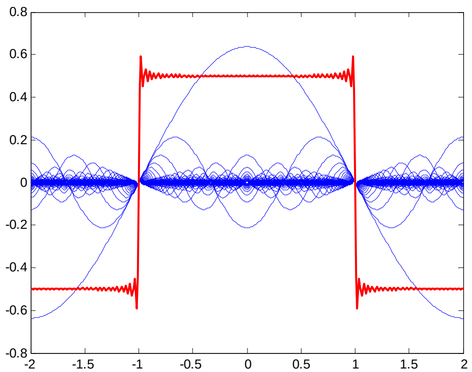
# 信号与系统

## 第8讲 信号通过系统的频域分析方法

郭红星
华中科技大学计算机学院



# 复习

- 连续时间系统的时域分析
  - 线性系统响应的时域求解
  - **零输入与零状态响应**
  - **冲激响应与卷积积分**

- 连续信号的正交分解
  - 周期信号的傅里叶级数表示
  - 非周期信号的傅里叶变换
  - 傅里叶变换的基本性质

# 本讲内容

- 信号通过系统的频域分析方法
- 理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应
  - 系统的物理可实现性
  - 吉布斯现象的理论证明及振铃效应
- 系统无失真传输及有失真时的线性畸变
  - 群时延和相位时延
  - 线性相位的本质及其重要性
- 目标
  - 掌握LTI系统频域分析方法及系统的频率响应概念
  - 认识理想低通滤波器的频响特性及振铃效应
  - 熟悉系统的时延、失真、频响、物理可实现性等重要概念

# 4.1 连续系统的频域分析方法

# 单频周期正弦信号激励下的系统响应

问题：设 $e(t)=\sin\omega_0 t$，系统单位冲激响应为$h(t)$，求响应$r(t)$。

因为$r(t)=e(t)*h(t)$，由时域卷积定理有：$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$

而：$E(j\omega)=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$　　$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

所以：$R(j\omega)=j\pi H(j\omega)[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

$=j\pi|H(j\omega_0)|[e^{-j\varphi_0}\delta(\omega+\omega_0)-e^{j\varphi_0}\delta(\omega-\omega_0)]$

其中，$\varphi_0=\varphi(\omega_0)$

CFT的奇偶性质

利用频移性质

$$r(t)=|H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

思考：系统对输入作了何种改变？

再思考：输出信号是否产生新的频率分量？

# 一般信号激励系统的响应

## 思考：如何分析系统输入为一般信号的响应？

**叠加性：**等于一系列正弦信号同时作用于系统时所引起的响应之和。

**均匀性：**正弦激励产生的响应仍是同频率的正弦信号。

时域：$e(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow r(t)$　　$r(t)=e(t)*h(t)$

激励　　　响应

频域：$E(j\omega) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow R(j\omega)$　　$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$

$$H(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}=\left|H(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$H(j\omega)$被定义为**频响函数**

相频特性

幅频特性

# 系统响应的频域求解步骤

a. 求激励的频谱 $E(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e(t)e^{-j\omega t}dt$

b. 求频响函数 $H(j\omega)=\dfrac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$

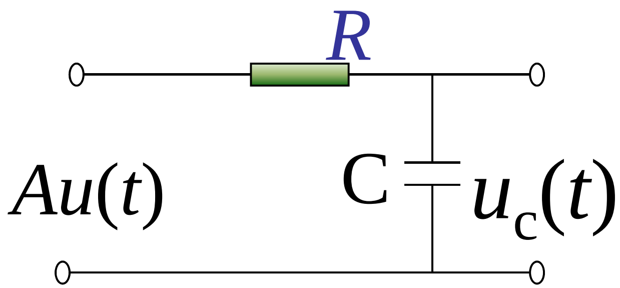
c. 计算响应的频谱 $R(j\omega)=H(j\omega)E(j\omega)$

d. 求$R(j\omega)$的傅里叶反变换

$$r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

# 阶跃信号通过RC电路的Z.S.R

- 求如图所示的电路对阶跃信号的响应$u_c(t)$




P163.图4-2

**解：**

$$a.\ Au(t)\leftrightarrow A\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]$$

b. 求系统的频响函数$H(j\omega)$

令 $\tau = RC$

$$H(j\omega)=k_c(j\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega c}}{R+\frac{1}{j\omega c}}=\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

课本上采用相量法

正弦稳态响应—相量法的理论基础就是傅里叶变换(以电容为例)

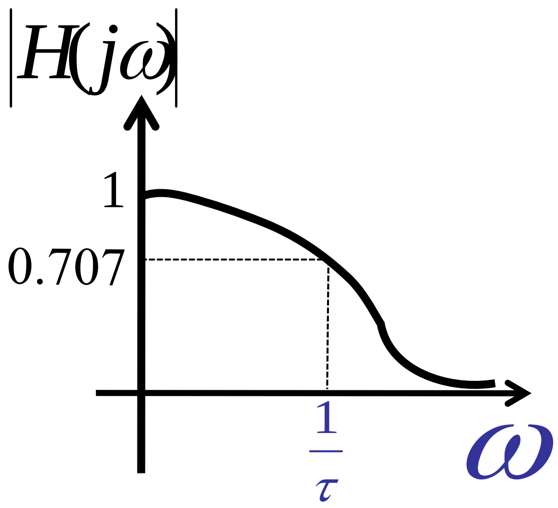
电子元件等效导纳？傅里叶变换

# RC电路对阶跃信号的响应

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2\tau^2)}}$$

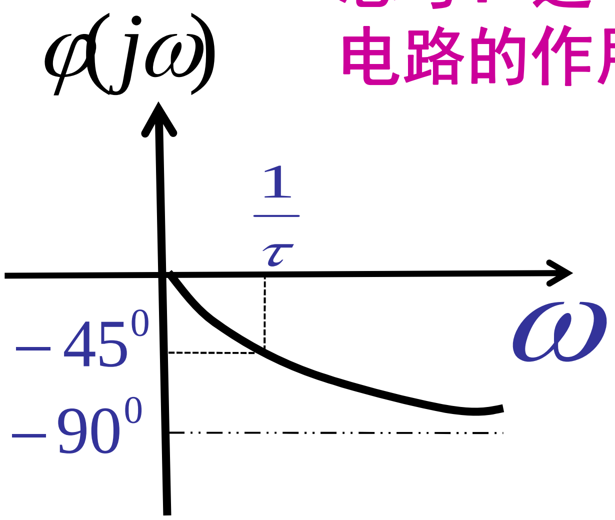
$$\varphi(j\omega) = -arctg\omega\tau$$

思考：这个RC电路的作用？




RC低通滤波器

■幅频响应特性曲线




■相频响应特性曲线

# RC低通滤波器对阶跃信号的响应

C. $$U_c(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}][\frac{1}{1+j\omega\tau}]$$

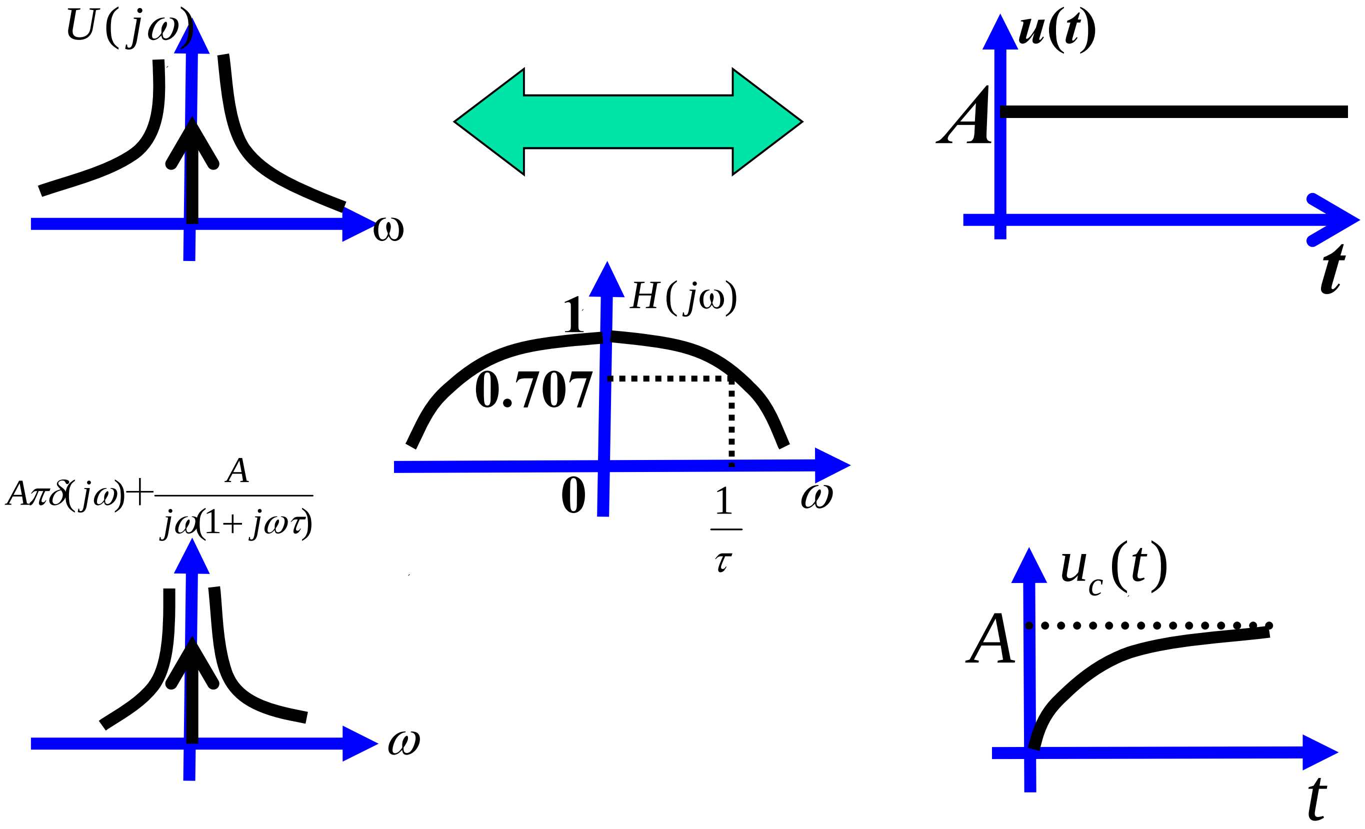
$$=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}][1-\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}]=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}]-A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}]\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$

$$=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}]-A\frac{\tau}{1+j\omega\tau}=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}]-\frac{A}{j\omega+\frac{1}{\tau}}$$

**d.对输出的频谱函数$U_c(j\omega)$进行傅里叶反变换得：**

$$u_c(t)=A(1-e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$$

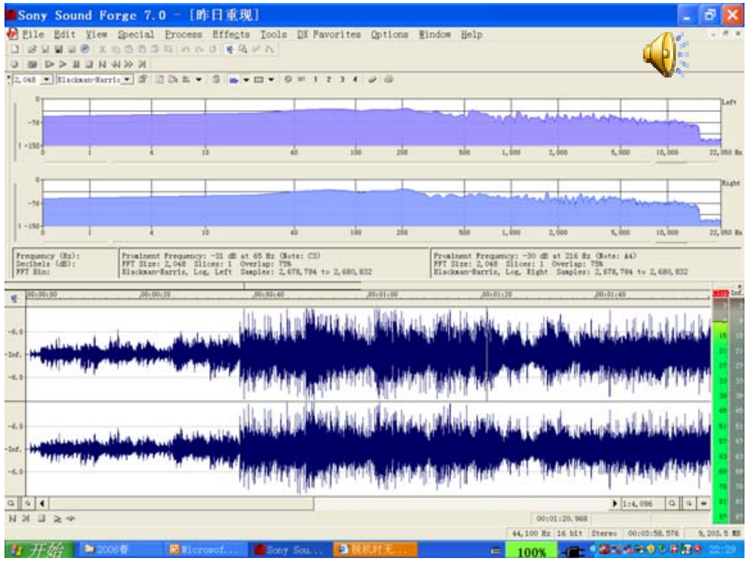
# RC低通滤波器响应的物理解释

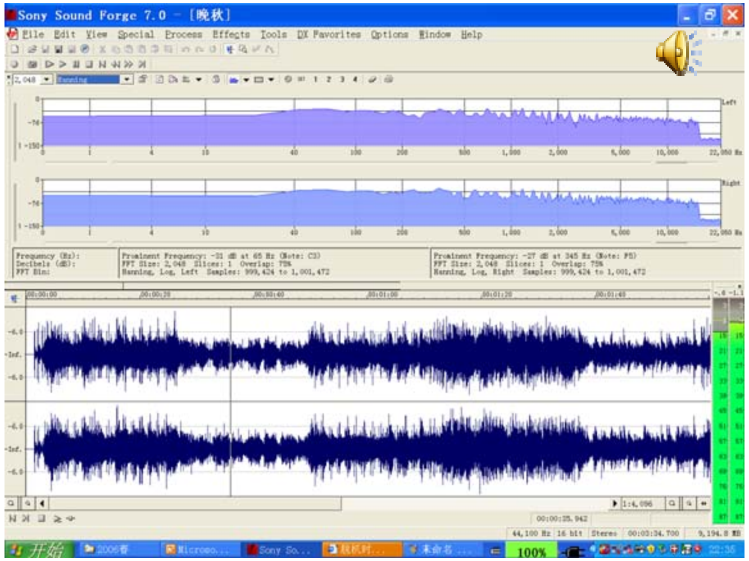


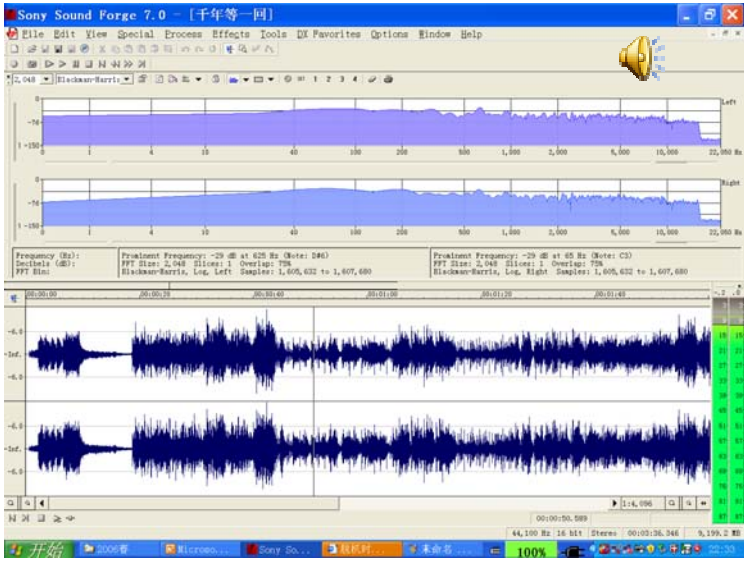

■输入信号经过低通滤波器后，高频分量受到衰减，因此输出不能象输入那样陡峭；冲激谱线仍然存在，所以输出中仍存在直流分量。

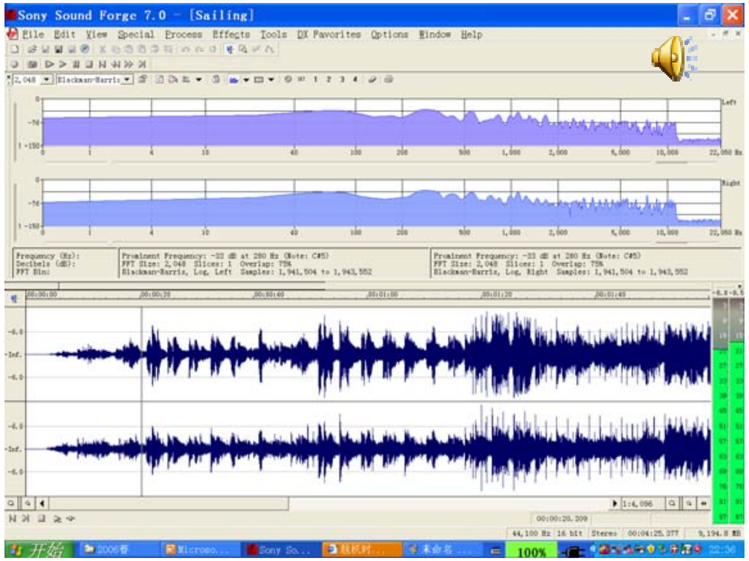
# 4.2 理想低通滤波器与信号失真

# 音频的波形与频谱

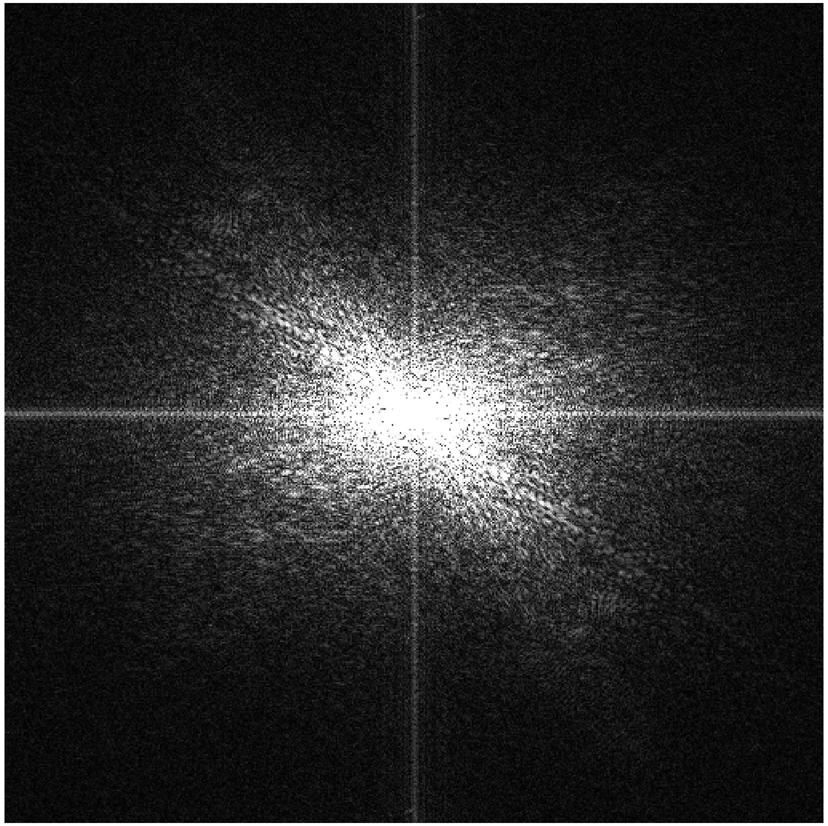

Sony Sound Forge 7.0 - [昨日重现]


Sony Sound Forge 7.0 - [晚秋]


Sony Sound Forge 7.0 - [千年等一回]

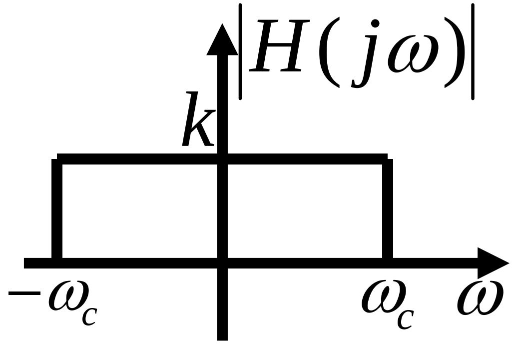

Sony Sound Forge 7.0 - [Sailing]

# Lena灰度图像及其频谱



# 理想低通滤波器(ILPF)

$$H(j\omega)=\begin{cases} k & -\omega_c<\omega<\omega_c \\ 0 & \omega\text{为其它值} \end{cases}$$

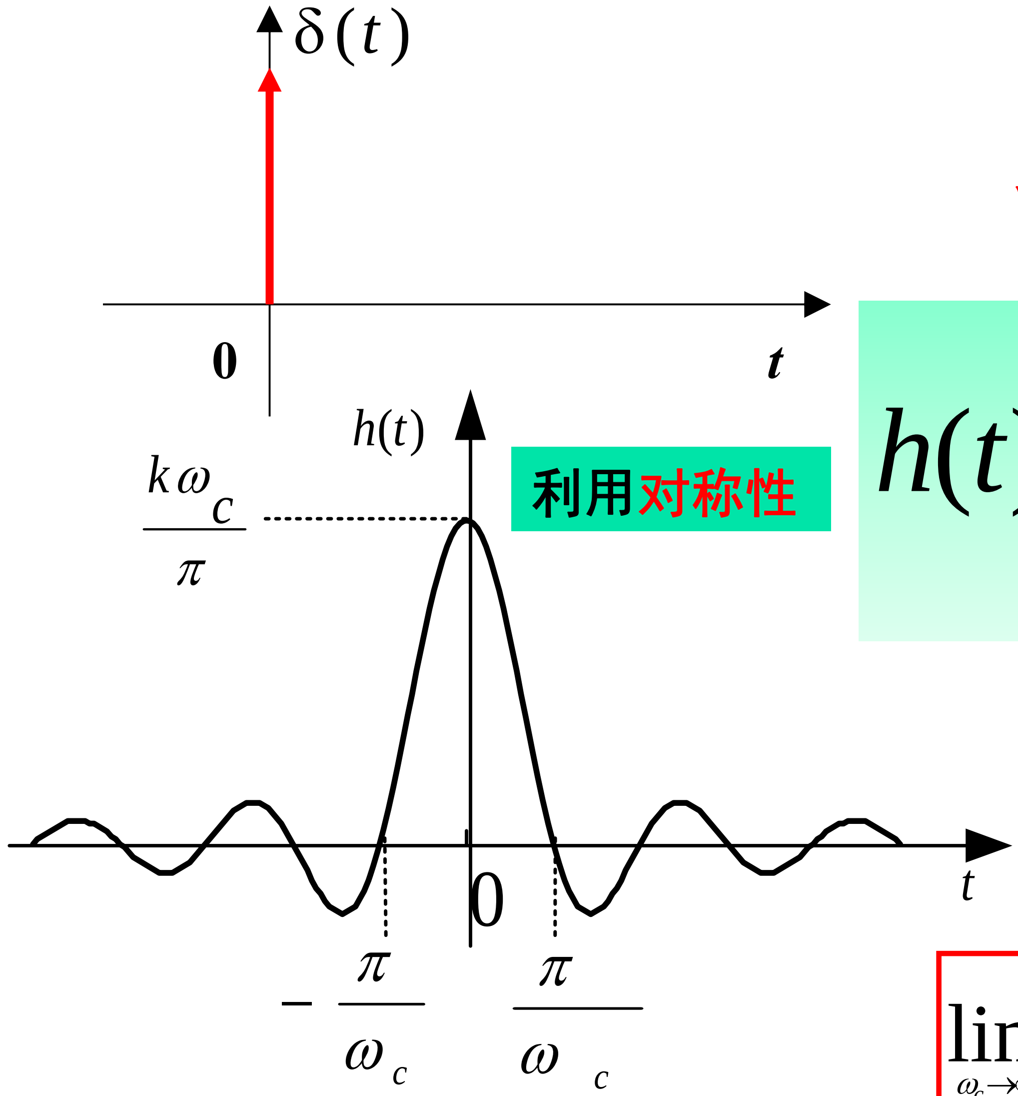



为简单起见，这里假设相位特性为0，对应课本上$t_0$=0的情形

■ILPF的单位冲激响应


$$h(t)\leftrightarrow H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

# 理想低通滤波器的单位冲激响应




思考：理想低通滤波器是物理可实现的吗？

$$h(t)=\frac{k\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$$

$h(t)$波形分析：

- 波形呈等间隔振荡衰减
- 振荡间隔为$\frac{3\pi}{2\omega_c}$，过零点为$\frac{k\pi}{\omega_c}$
- 主峰发生在$t$=0处

$$\boxed{\lim_{\omega_c\to\infty}h(t)=\lim_{\omega_c\to\infty}\frac{k\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)=k\delta(t)}$$

# 系统的物理可实现性及其判定

1.时域—因果性

$$t<0,\quad h(t)=0$$

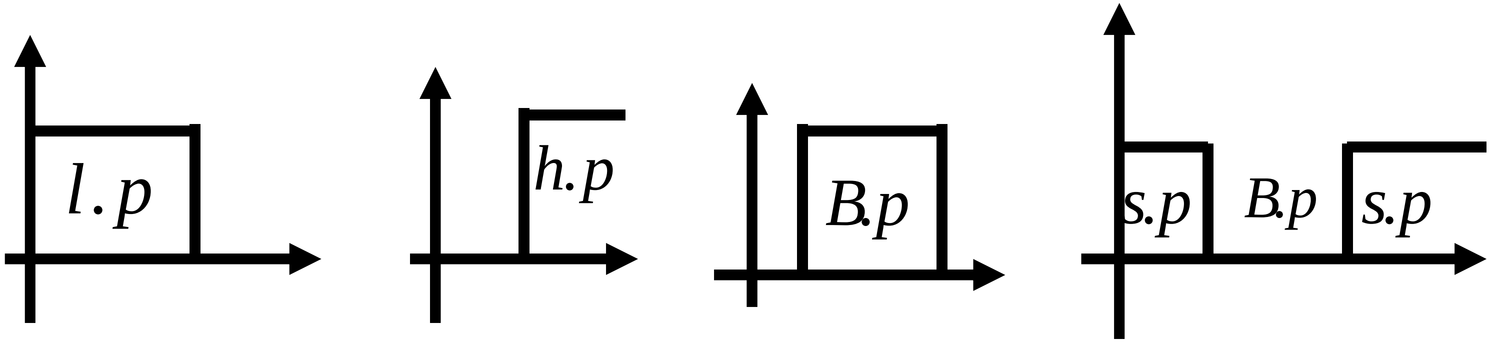
2.频域—频响函数$H(j\omega)$在某些离散频率处可以是零，但在一有限频带内不能为零

限制了衰减速度

$$\left|H(j\omega)\right|\neq 0$$

■上述准则是物理可实现系统的必要条件，而不是充分条件。

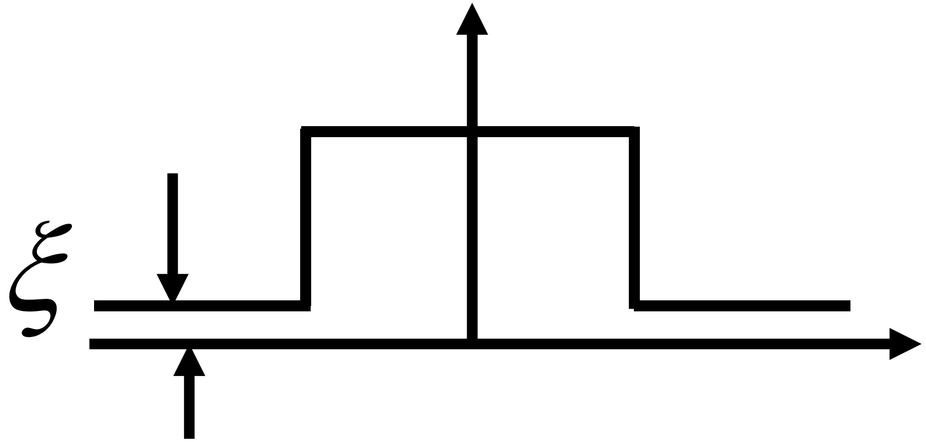
# 一些理想系统的物理可实现性




都不能实现

思考：为什么？

I.L.P可以任意逼近.




- 如何获得最好的逼近—这就引出了滤波器的设计问题
- 如何“取出”信号中部分频率—窗函数的设计问题

# ILPF的单位阶跃响应$r_u(t)$

$$\because\ u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau,$$

$$\therefore\ r_u(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

这里取$k=1$

$$=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c\tau)d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx=-\int_{\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.....(1)$$

利用傅氏变换的对称性计算

$$Si(y)=\int_{0}^{y}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{y}Sa(x)dx..(2)$$

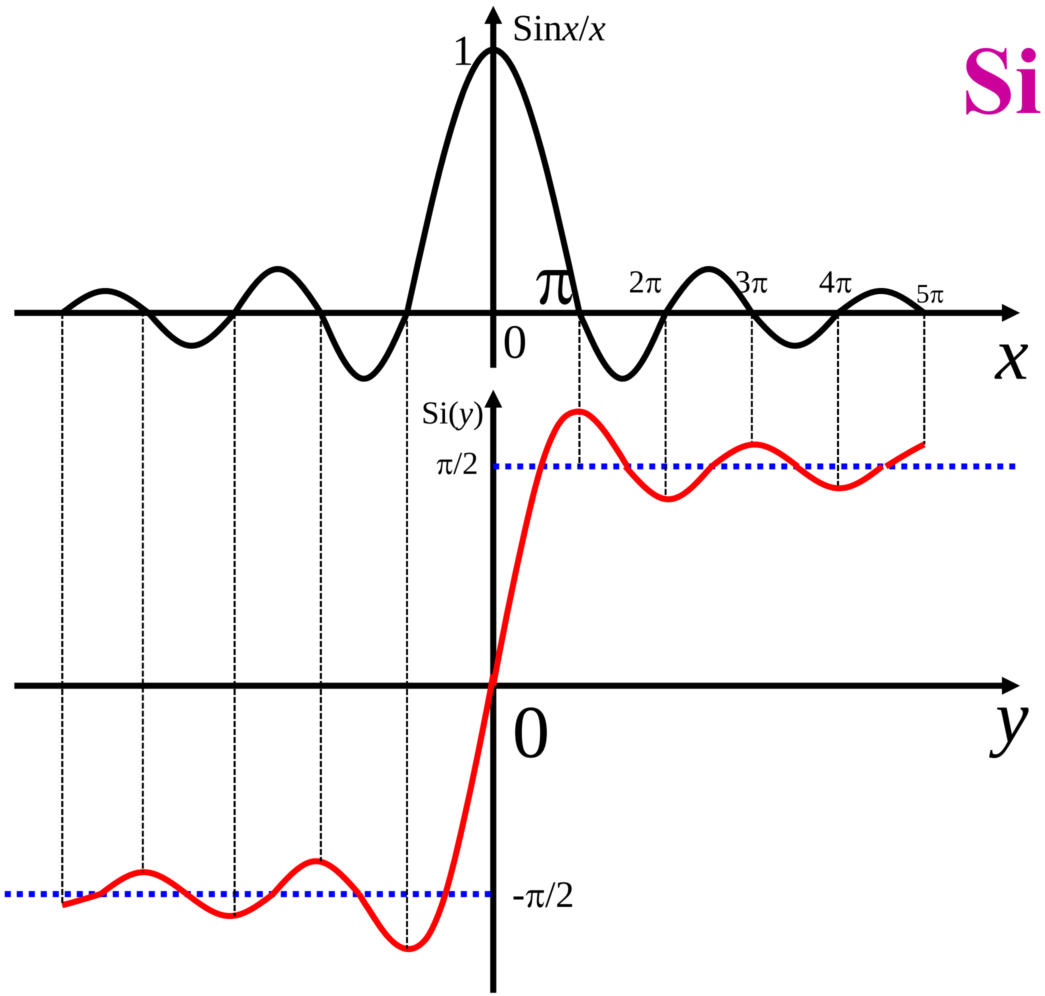
这就是所谓的正弦积分

令：$x=\omega_c\tau, dx=\omega_c d\tau, d\tau=\dfrac{dx}{\omega_c}$

$$r_u(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega_c t}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{0}^{\omega_c t}\frac{\sin x}{x}dx\right]$$

$$r_u(t)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\omega_c t)\right]$$

# 正弦积分的说明




## Si(y)是Sa(x)的积分

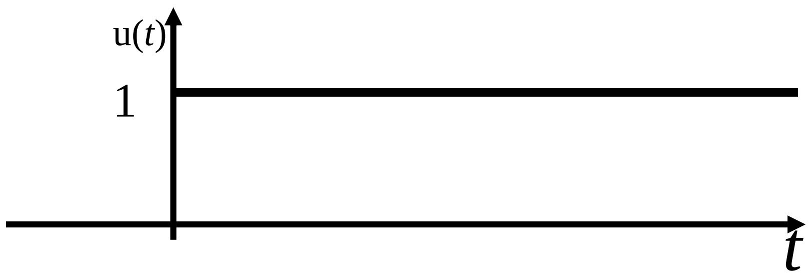
① Sa(x)在±nπ处变号，所以Si(y)在±nπ处出现**极值**。

② Si(y)是奇函数，即 Si(-y)= -Si(y)。

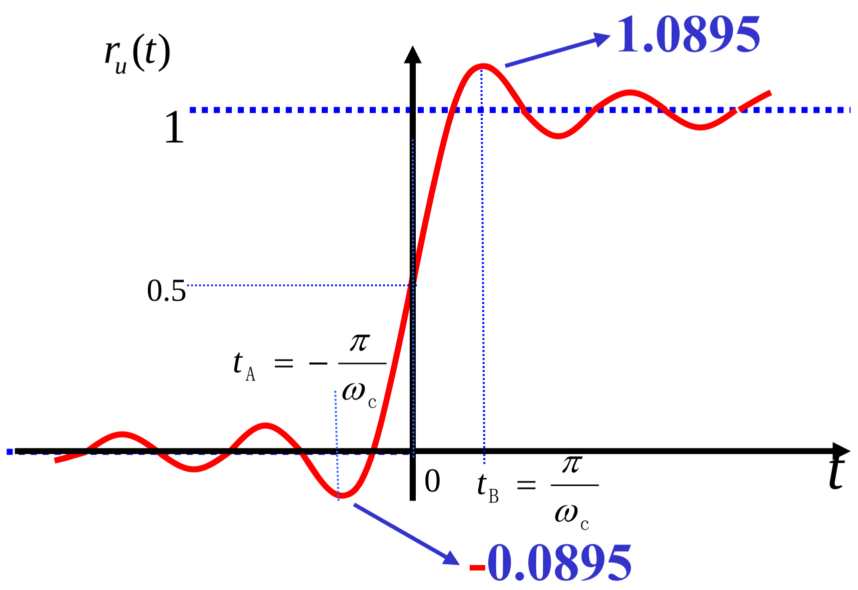
③ Si(0)=0, Si(∞)= π/2。

④ 在y=0附近， 近似为直线。

# ILPF的单位阶跃响应$r_u(t)$




$$r_u(t)=[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\omega_c t)]$$




## Gibbs现象

a. $r_u(t)$随$t$的振荡为Gibbs波纹

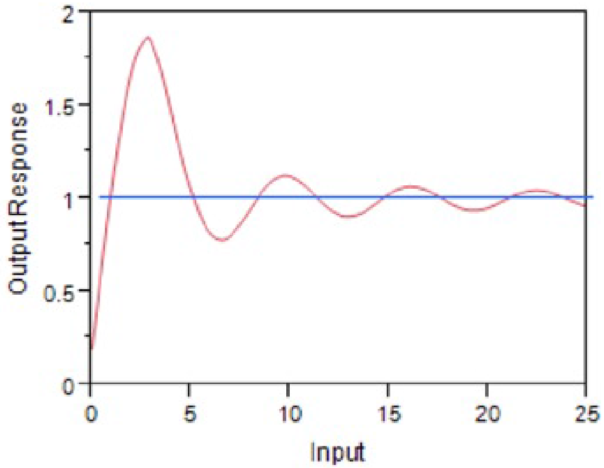
b. 在输入信号的跳变位置会出现上冲和下冲

c. 当 $\omega_c \to \infty, r_u(t) \to u(t-t_0)$

$$r_u(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{Si(-\infty)}{\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 & t<0\\ \frac{1}{2}+\frac{Si(\infty)}{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 & t>0\end{cases}$$

- 理想低通滤波器响应的动态演示Demo2

# Gibbs现象所引起的振铃效应



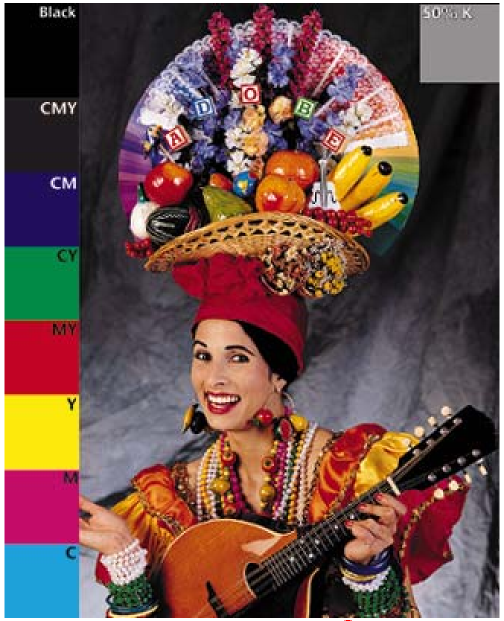

Oscillating output in Gibb's phenomenon

Original image

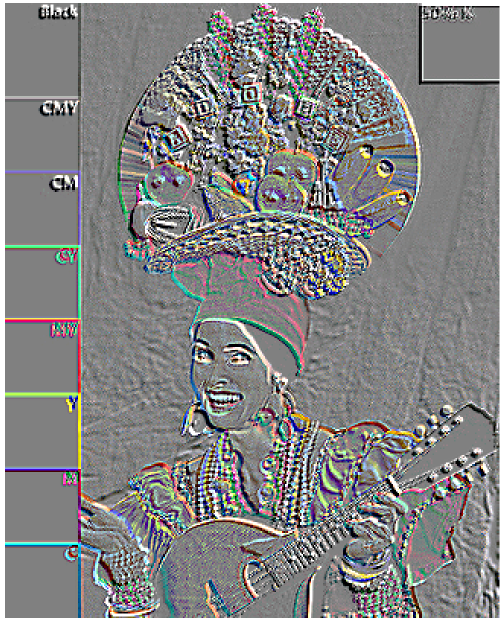
Image with ringing artifact

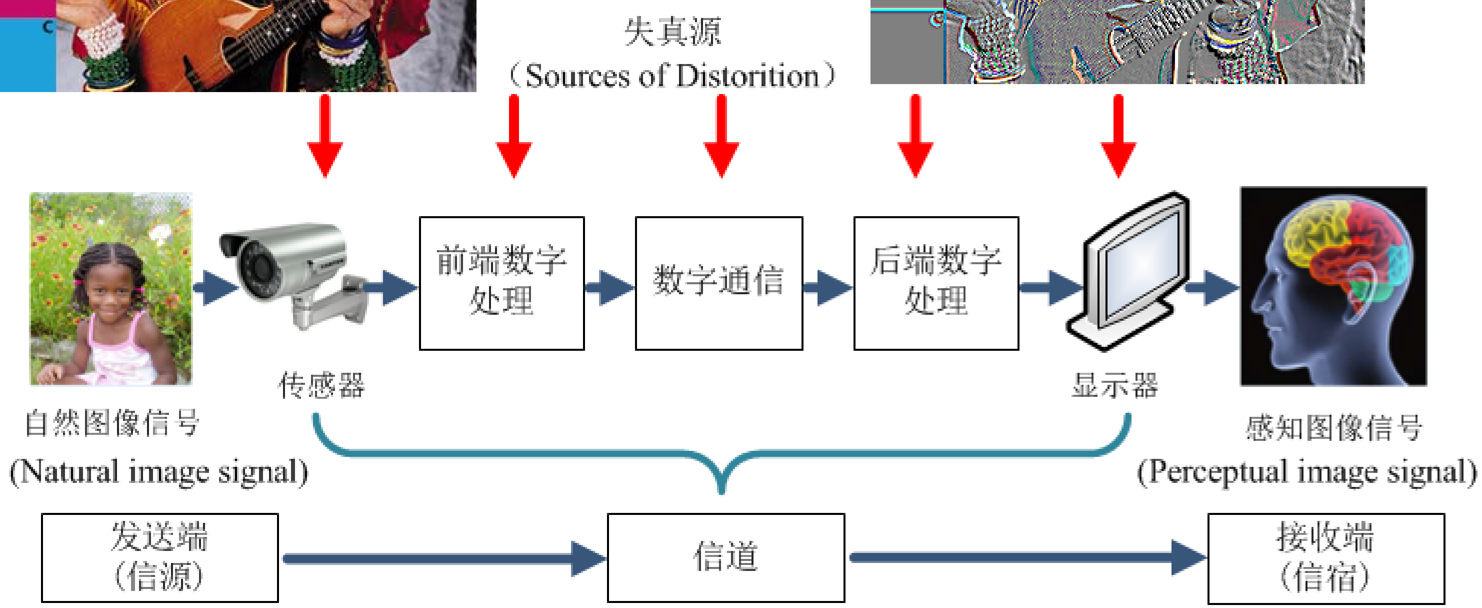
# 信号(图像)传输与失真

正常




失真





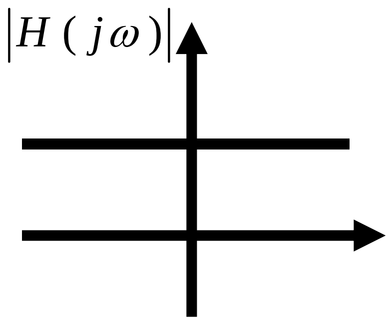
# 无失真传输的系统要求

- 从时域波形上看，输出仅对输入作线性缩放和延时，则系统输出无失真,即：$r(t) = ke(t - t_0)$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t)=k\delta(t-t_0)$$

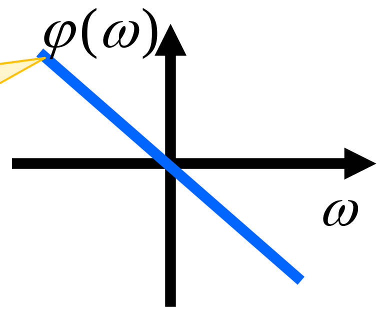
$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$a.|H(j\omega)| = k$$




$$b.\varphi(\omega) = -\omega t_0$$

如何理解线性相位？



# 相位时延和群时延

$$\cos[\omega t+\varphi(\omega)]=\cos[\omega(t+\frac{\varphi(\omega)}{\omega})]$$

① 相位时延：$t_p=-\varphi(\omega_i)/\omega_i$ 。其为系统对某个给定频率分量所产生的延时。

② 群时延：$t_g=-\varphi'(\omega)=-d\varphi(\omega)/d\omega$。其为系统对输入信号的所有频率分量所产生的延时。

# 振幅失真和相位失真

① 振幅失真:$|H(j\omega)|=k$不能满足而引起的失真

② 相位失真:$\varphi(\omega)=-\omega t_0$不能满足而引起的失真

思考，振幅失真和相位失真哪个的影响相对更大？

⇕

信号的幅度谱和相位谱哪一个更重要？

# 小结

- 线性系统的作用可以通过系统频响函数来表征，其只会改变输入信号各频率分量的大小和相位，不会产生新的频率分量
- 理想低通滤波器在物理上是不可实现的，只能想方设法去逼近
- **信号在传输的过程中会产生失真，线性失真可分为幅度失真和相位失真两个方面，后一个影响相对更大**
- 理解群时延和相位时延间的关系，及滤波器线性相位要求的本质—群时延为常数

# 课外作业

- 阅读4.1-4.3, 4.8;预习:5.1-5.2
- 作业:4.2, 4.12两题

- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如张三（学号U2019148xx）第一周作业第一题图片名为： U2019148xx U2019148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。