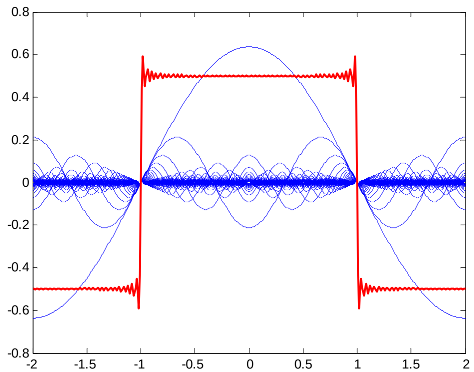
信号与系统

第9讲 用拉普拉斯变换分析系统响应

郭红星
华中科技大学计算机学院



本讲内容

- 复频域分析的数学基础
  - 拉普拉斯变换的引出及其收敛域
  - 常用信号的拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯变换的性质
- 线性系统响应的拉普拉斯变换分析法
  - 拉普拉斯反变换求解
  - 作为数学工具的拉普拉斯变换
  - S域的元器件模型
- 学习目标
  - 理解拉氏变换与傅氏变换的内在联系
  - 掌握用拉氏变换法求系统全响应的方法
  - 体会工程实践与数学理论间的关系

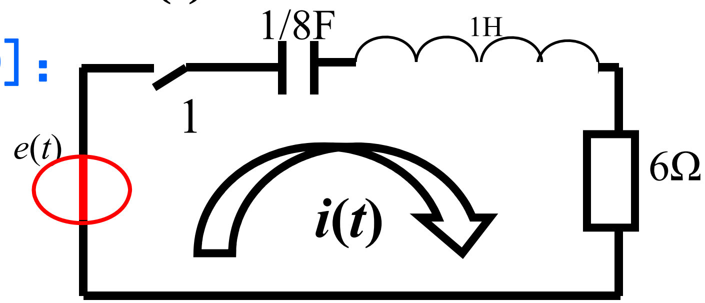
5.1 从傅氏变换到拉氏变换

回顾：第3讲例题3的传统时域解法

求下电路图中开关1合上时回路电流*i*(*t*)的单位冲激响应*h*(*t*)=?

原来的解法[见第3讲(第2章)例题3①]：

用冲激函数匹配法求$h(t)$



$$\frac{1}{c}\int i(\tau)d\tau + l\frac{di}{dt} + Ri(t) = e(t)$$

$$l\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c}i(t) = \frac{de(t)}{dt} \xrightarrow{e(t)=\delta(t)} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 6\frac{di(t)}{dt} + 8i(t) = \delta'(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} i_{zsr}(0^+) &= 1 \\ i'_{zsr}(0^+) &= -6 \end{aligned}}$$

$$\delta'(t) \Rightarrow \delta(t) \Rightarrow \underline{\underline{u(t)}}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \times 6$$

$$-6\delta(t) \Leftarrow 6\delta(t)$$

$$\underline{\underline{-6u(t)}}$$

$$h(t) = i_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t}$$

代入初始条件：$i(0^+) = 1; i'(0^+) = -6$

$$\left.\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(t) = [-e^{-2t} + 2e^{-4t}]u(t)$$

拉普拉斯变换法的提出

鸟儿虽不懂空气动力学，却会任意飞翔！

人生中最重要的问题，在绝大多数情况下，真的就只是概率问题。

因为我不能理解消化过程就拒绝晚餐吗？不，只要我满意这个结果。

法国数学家拉普拉斯（1749－1827）与 英国工程师赫维赛德（1850－1925）

傅氏变换不能解决的问题

如何解决
此问题？

- 有几种情况不满足狄里赫利条件：
  - $u(t)$
  - 增长信号$e^{\alpha t}(a>0)$
  - 周期信号$\cos\omega t$

- 若乘一衰减因子$e^{-\sigma t}$，σ为任意实数，使得$f(t)\,e^{-\sigma t}$收敛，可以满足狄里赫利条件

$$u(t)e^{-\sigma t}$$

$$e^{\alpha t}\cdot e^{-\sigma t}\quad(\sigma>\alpha)$$

$$e^{-\sigma t}\cos\omega_1 t\quad(\sigma>0)$$

从傅氏变换到拉氏变换

$$FT[e^{-\sigma t}f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

ω 一实频率， ω是振荡频率

s 一复频率，通过σ控制衰减

$$F(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

令$s=\sigma+j\omega$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

象函数

正变换

$$e^{-\sigma t}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

双边拉氏变换

原函数

反变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

$s=\sigma+j\omega,$

$then, d\omega=\frac{ds}{j}$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

思考：拉氏变换的物理含义？

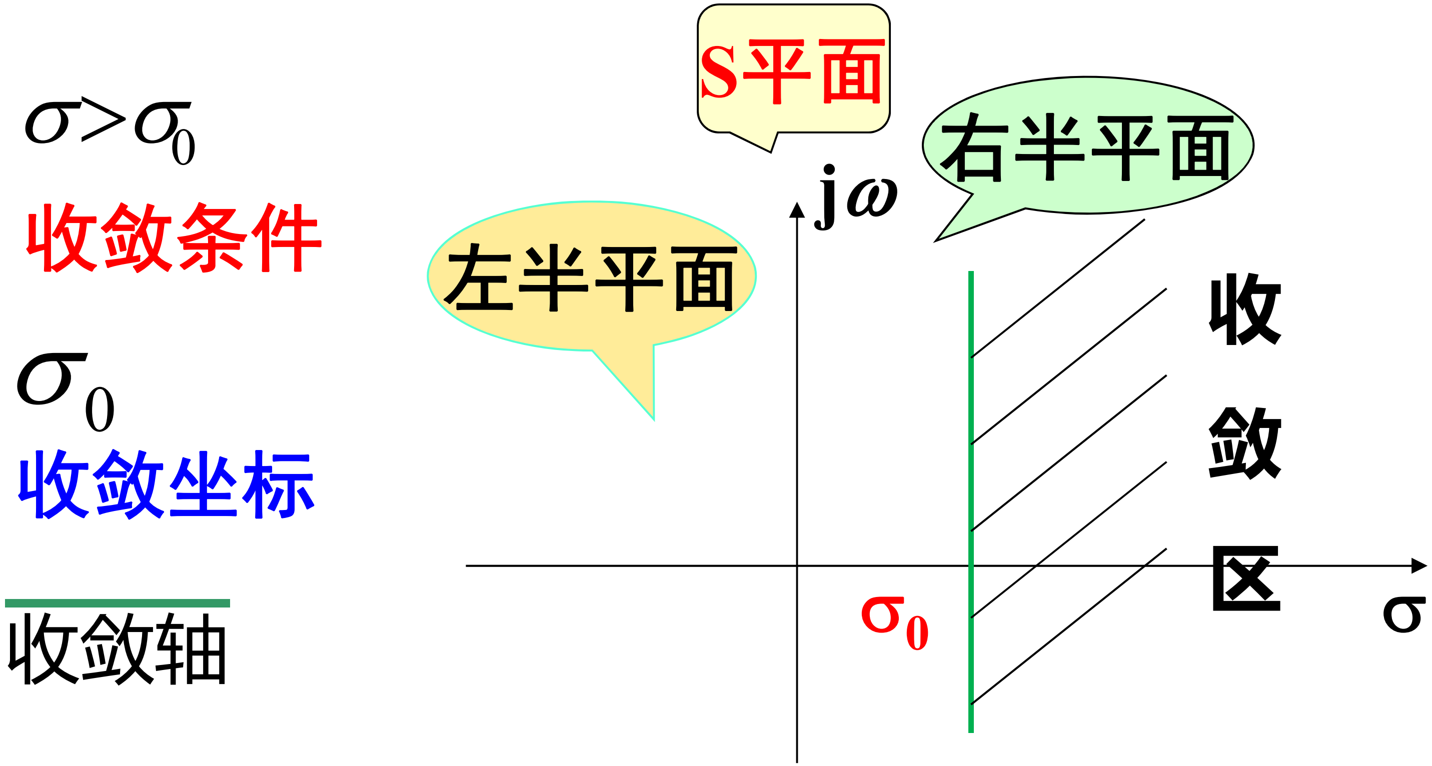
常用信号的(双边)拉氏变换

$\delta(t)$	1
$e^{\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{s-\alpha}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$

思考：上述信号的双边拉氏变换总是存在吗？

双边拉氏变换的收敛域

- 给定信号$f(t)$，对应的拉氏变换为$F(s)$。在s平面上，凡是能使得$F(s)$ 存在的σ区域（或者说所有σ的集合），称为$F(s)$的收敛域。

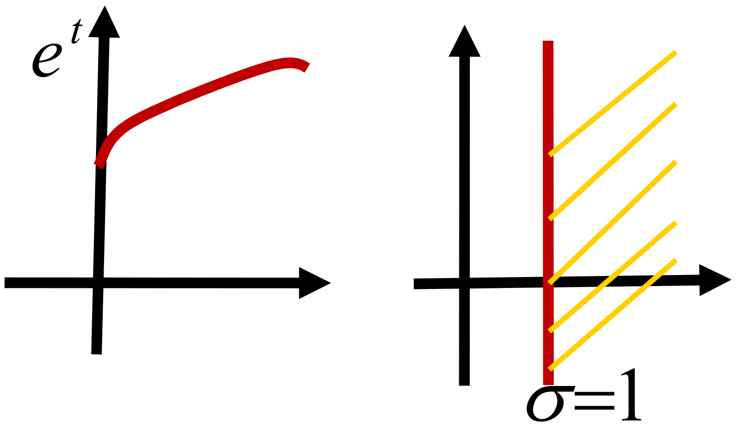


各种信号拉氏变换的收敛域

a.对于$t<t_0$为零的右边信号

$$\lim_{t\to\infty} e^{t} e^{-\sigma t} = 0 \ldots\ldots \sigma > 1$$

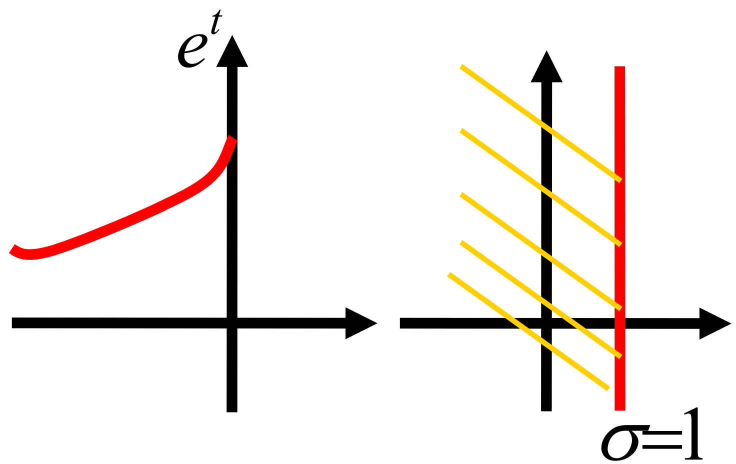
收敛域在收敛轴的右边



b.对于$t>t_0$为零的左边信号

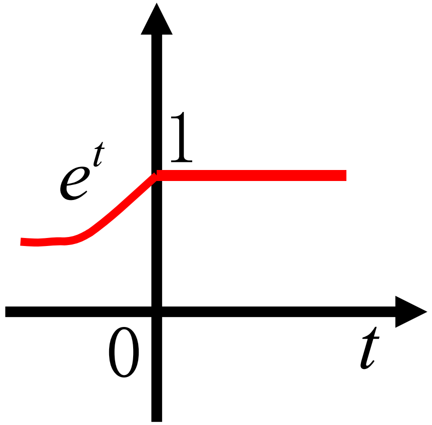
$$\lim_{t\to-\infty} e^{t} e^{-\sigma t} = 0 \ldots\ldots \sigma < 1$$

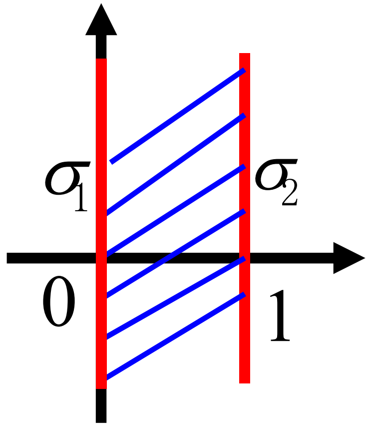
收敛域在收敛轴的左边



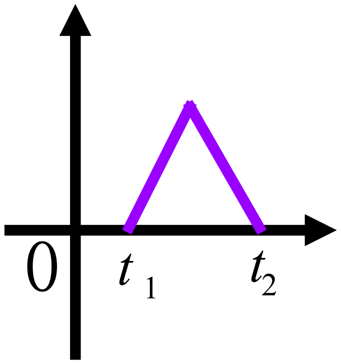
各种信号拉氏变换的收敛域

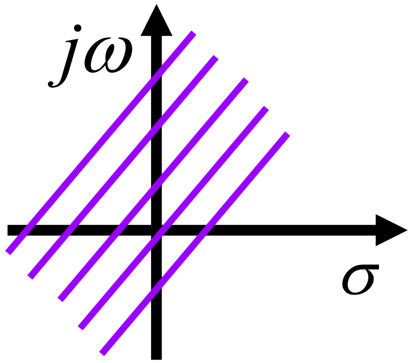
c. 对于**双边信号**, 其收敛域在$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$内(**可能为空**)





d.凡是**有始有终**能量信号,对于整个s平面都收敛。



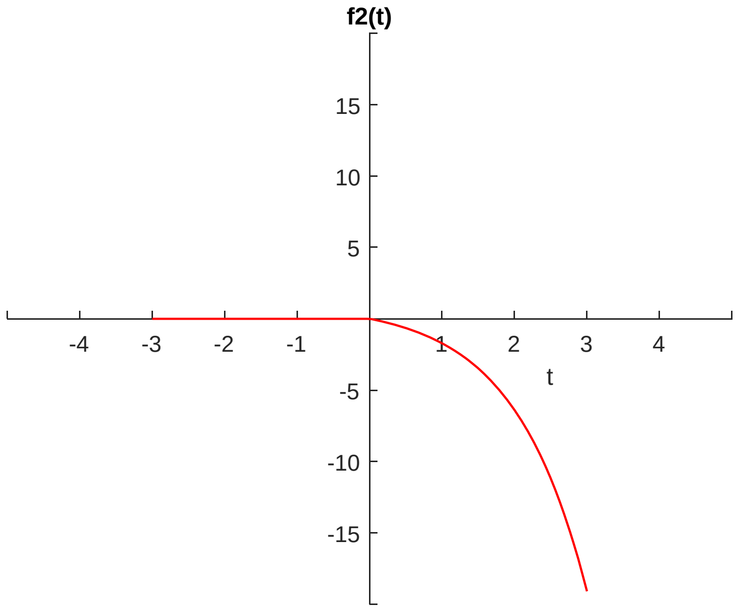


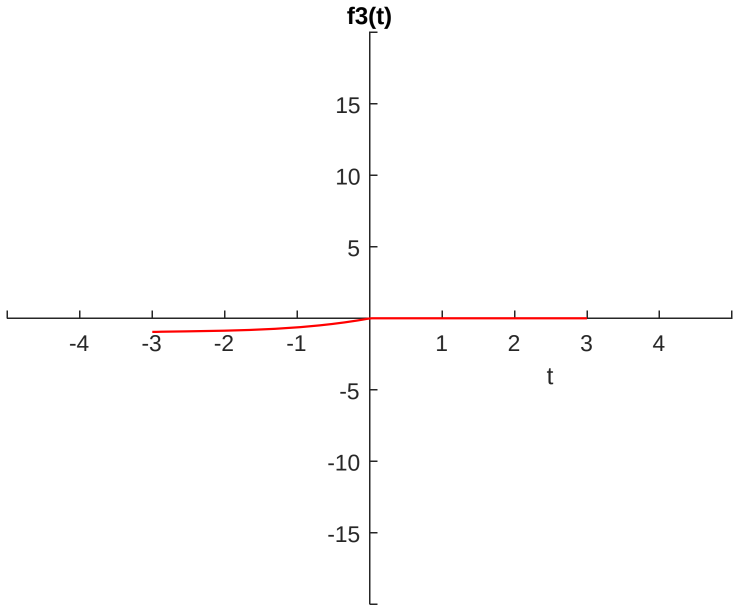
只有t_1>0时，收敛域才包括∞；
只有t_2<0时，收敛域才包括−∞

拉氏变换收敛域的重要性

$$f_2(t) = u(t) - e^t u(t) \quad \sigma > 1$$

$$f_3(t) = -u(-t) + e^t u(-t) \quad \sigma < 0$$





$$f_2(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

$$f_3(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

不同原函数，收敛域不同，对应相同的象函数

拉氏变换与傅氏变换的关系

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

变换下限
从0^-开始

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

单边拉氏变换

$F(s) \leftrightarrow f(t)$

$-\infty < \omega < \infty \leftrightarrow 0 \le t < \infty$

$\sigma = 0;$
$f(t) = 0 \; for \; t < 0$

$t \ge 0$

傅氏变换

$F(j\omega) \leftrightarrow f(t)$

$-\infty < \omega < \infty \leftrightarrow -\infty < t < \infty$

$\sigma = 0$

双边拉氏变换

$F(s) \leftrightarrow f(t)$

$-\infty < \omega < \infty \leftrightarrow -\infty < t < \infty$

思考：能否直接由信号的
拉氏变换导出傅氏变换？

$f(t)e^{-\sigma t}$

傅氏变换

$F(\sigma + j\omega) \leftrightarrow f(t)e^{-\sigma t}$

$-\infty < \omega < \infty \leftrightarrow -\infty < t < \infty$

$s = \sigma + j\omega$

本课程中拉氏变换缺省指的是单边拉氏变换！

拉氏变换的基本性质

线性	$\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot L[f_i(t)]$
时移	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$? \ F(s)$
频移	$f(t)e^{-\alpha t}$	$F(s+\alpha)$
尺度变换	$f(at), a>0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$

线性性质的应用

例题1：正弦/余弦信号的拉氏变换

$$e^{\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\cos\omega_0 t$$

$$f(t)=u(t)\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+j\omega_0}+\frac{1}{s-j\omega_0}\right)$$

$$=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\sin\omega_0 t$$

$$f(t)=u(t)\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

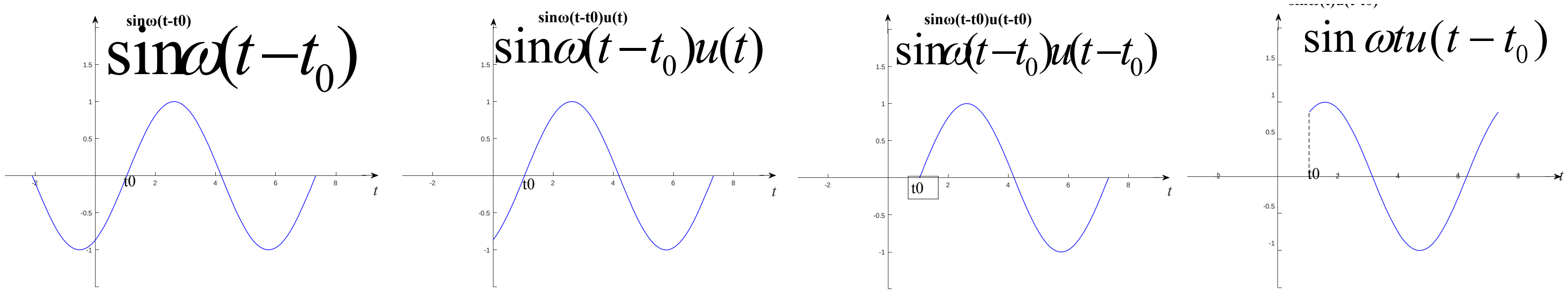
$$F(s)=\left(\frac{-1}{s+j\omega_0}+\frac{1}{s-j\omega_0}\right)\frac{1}{2j}$$

$$=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

时域平移特性

1.信号$f(t)$时移的四种情形： 以$f(t)=\sin\omega t$为例，波形如下：

a. $f(t-t_0)$　　b. $f(t-t_0)u(t)$　　c. $f(t-t_0)u(t-t_0)$　　d. $f(t)u(t-t_0)$



2. 拉氏变换的时移性质

思考：为何拉氏变换的时移特性会是这种形式？

设$f(t)\leftrightarrow F(s)$，则：$f(t-t_0)u(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}F(s)\quad t_0>0$

3. 傅氏变换的时移性质

设$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$，则：$f(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$

时域微分性质及其推导

- 若象函数为有理真分式$f(t) \leftrightarrow F(s)$，则 $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow$?

推导：

$$\because L[f'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} df(t)$$

$\int udv = uv - \int vdu$ 分部积分性质

令：$u = e^{-st} \quad v = f(t) \quad du = -se^{-st}dt$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} f(t) s e^{-st} dt = \lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) - f(0^-) + sF(s)$$

$\because f(t)$的拉氏变换存在，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$

$$= sF(s) - f(0^-)$$

注意：第6/5版p226/243最上面的公式有误

$$\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) \cdots f^{n-1}(0^-) = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0^-)$$

时域积分特性

- 若$f(t)\leftrightarrow F(s)$，则：

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$ 或：

思考：为什么拉氏变换具有这样的微积分性质?

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$$

0^-

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)\Rightarrow\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$$

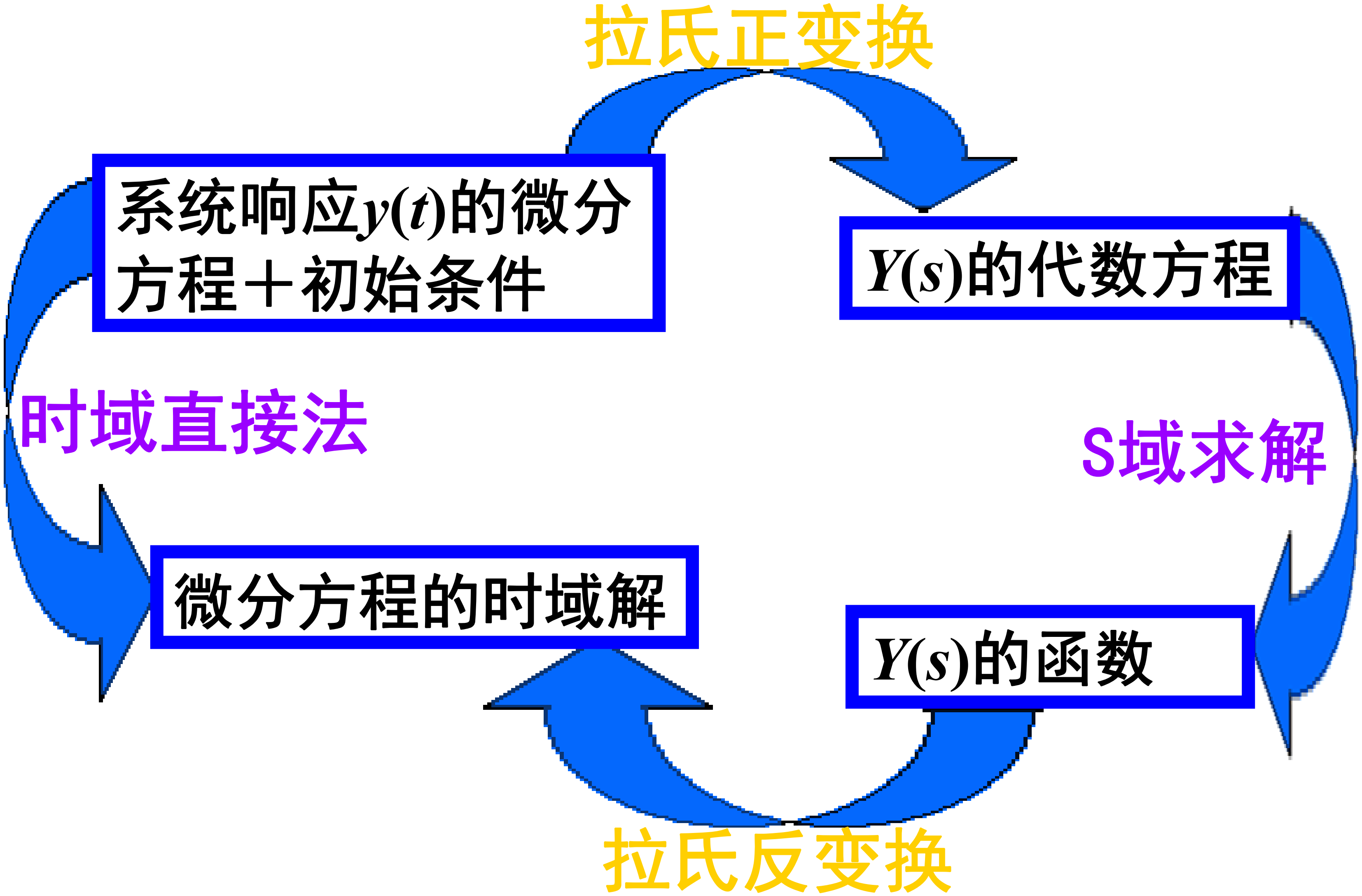
拉氏变换的基本性质

线性	$\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot L[f_i(t)]$
时移	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
频移	$f(t)e^{-\alpha t}$	$F(s+\alpha)$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
微分积分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^-)$
	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$

时域微积分性质是算子表示法的理论基础

5.2 LTI系统响应的拉氏变换法

用拉氏变换法求系统响应的步骤



第3讲例题3的拉氏变换解法

新的解法： $\dfrac{d^2 i(t)}{dt^2} + 6\dfrac{di(t)}{dt} + 8i(t) = \delta'(t)$

对上述系统方程(激励为单位冲激信号)，两边同时进行拉氏变换先求出$I(s)$，然后进行反变换得$i(t)$

$$s^2 I(s) + 6sI(s) + I(s) = s$$

$$I(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 8}$$

$$\therefore h(t) = L^{-1}[I(s)] = ?$$

Laplace反变换的求取

① 围线积分法--留数法(p216-p219)

② 查表法（p209.表5-1）

③ 部分分式分解法(p210-p216)

④ 利用拉氏变换的性质求反变换(p221-232)

⑤ 借助数字计算机求反变换

第3讲例题3的拉氏反变换求取

$$I(s)=\frac{s}{s^2+6s+8}$$

■象函数$I(s)$为有理真分式

$$=\frac{a}{s+2}+\frac{b}{s+4}$$

其中： $a=\frac{s}{(s+4)}\Big|_{s=-2}=-1$

$$b=\frac{s}{(s+2)}\Big|_{s=-4}=2$$

$$\therefore h(t)=L^{-1}[I(s)]=L^{-1}[\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+4}]$$

$$=(-e^{-2t}+2e^{-4t})u(t)$$

关于拉氏变换法的讨论

- 这是一种变换的观点:作为数学工具
- 优点:
  - 将时域的微积分方程转换为复频域的代数方程
- 不足:
  - 仍然需要列出时域的微积分方程，在时域思考

- 另外一种思路是S域元件模型法：直接在S域思考

RLC的s域的元件模型(p238)

时域

$u_R(t)=R\cdot i_R(t)$

$u_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt}\qquad L=\dfrac{\varphi}{i}$

$u_c(t)=\dfrac{1}{c}\int_0^t i_c(\tau)d\tau+u_c(0^-)u(t)\qquad c=\dfrac{q}{u}$

LT

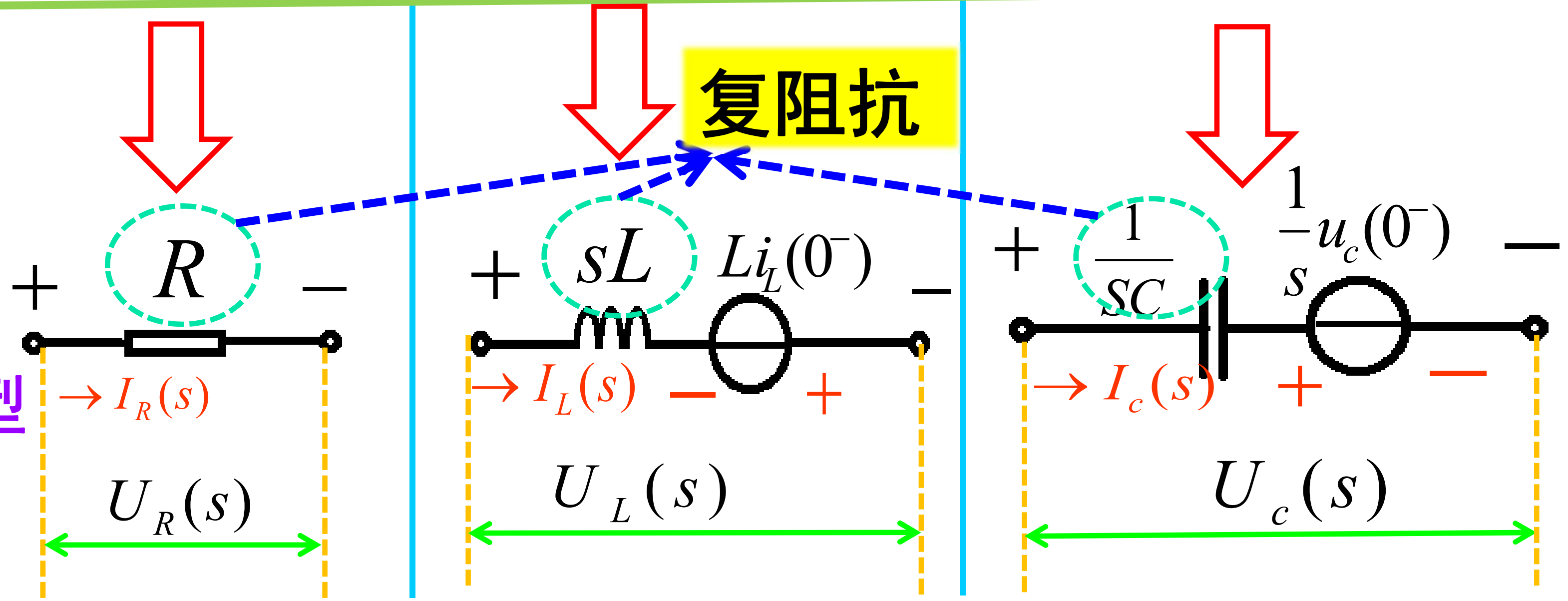
S域

$U_R(s)=RI_R(s)$

$U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0^-)$

$U_c(s)=\dfrac{1}{sc}I_c(s)+\dfrac{1}{s}u_c(0^-)$

S域模型



基于s域元件模型的电路系统分析方法的步骤

①将已知电动势、恒定电流进行拉氏变换

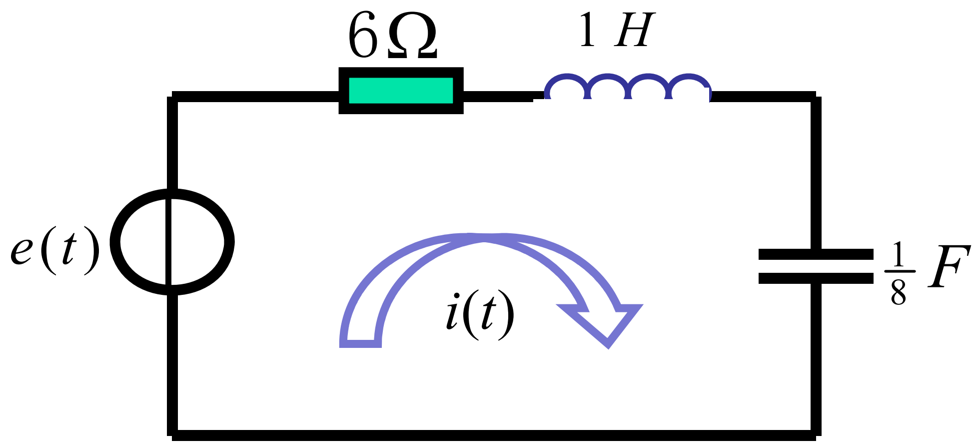
②根据原电路图画出s域等效电路图

③根据电路基本定律求解s域运算电路，求出待求量的象函数

④对求得的象函数进行反变换得原函数

例题2：电路系统响应的s域模型法

电路如下图所示，求：



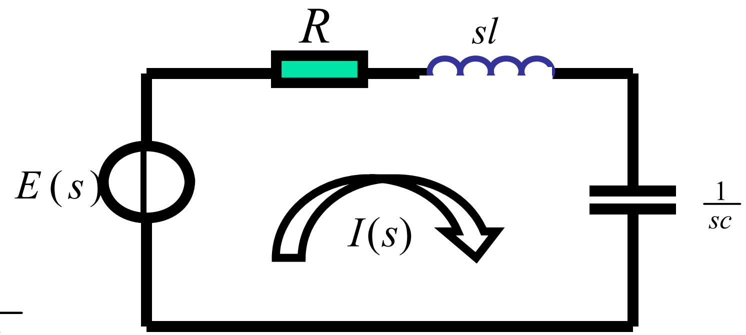
① 用s域模型法求回路电流的单位冲激响应$h(t)$=?

② 当起始状态为$i(0)=0, i'(0)=1A/s$, 输入信号$e(t)=e^{-t}u(t)$，求系统的完全响应$i(t)$。

例题2解答

(1) 用s域模型求解：

因求单位冲激响应，电路状态为零，s域等效电路如右图所示，先求出$H(s)\leftrightarrow h(t)$



$$I(s)=\frac{E(s)}{R+sl+\frac{1}{sc}}=\frac{E(s)}{6+s+\frac{8}{s}}$$

当$e(t)=\delta(t)$时, $i(t)=h(t)$，故$E(s)=1$，$I(s)=H(s)$

$$I(s)=H(s)=\frac{1}{6+s+\frac{8}{s}}=\frac{s}{s^2+6s+8}$$

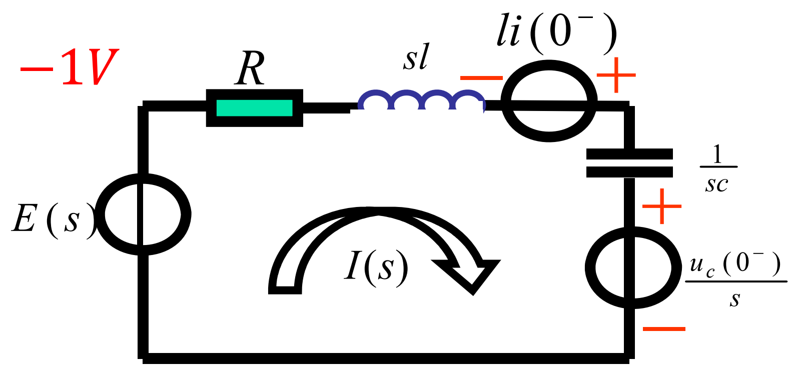
$$\therefore h(t)=L^{-1}[H(s)]=L^{-1}[\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+4}]$$

$$=(2e^{-4t}-e^{-2t})u(t)$$

例题2解答

(2)已知$i(0)=0$,$i'(0)=1A/s$，故$u_c(0^-)=-1V$

含非零状态的s域电路如右图所示：



$$I(s)=\frac{E(s)-\frac{1}{s}u_c(0^-)+i(0^-)}{6+s+\frac{8}{s}}$$

$$=\underbrace{\frac{sE(s)}{s^2+6s+8}}_{\text{Z.S.R}}+\underbrace{\frac{-u_c(0^-)+si(0^-)}{s^2+6s+8}}_{\text{Z.I.R}}=\frac{\frac{s}{s+1}}{s^2+6s+8}+\frac{1}{s^2+6s+8}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{-\frac{2}{3}}{s+4}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+4}$$

$$H(s)=\frac{s}{s^2+6s+8}$$

同第3讲例题1的结果，$i'(0^+)=2A/s$

$$\therefore i(t)=L^{-1}[I(s)]=L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{-\frac{2}{3}}{s+4}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+4}\right]$$

同第3讲例题2的结果，$i'(0^-)=1A/s$

同第3讲例题3③及第4讲例题2的结果，$i'(0^+)=1A/s$

$$=\underbrace{-\frac{1}{3}e^{-t}+e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{-4t}}_{\text{Z.S.R}}\underbrace{+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t}}_{\text{Z.I.R}}=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{7}{6}e^{-4t}\qquad t\geq 0$$

小结

- 拉普拉斯变换是对傅氏变换的推广，是系统微积分方程算子法表示与求解的理论基础
- 理解拉氏变换存在收敛域的机理及其重要性
- 利用拉普拉斯变换分析线性系统响应有明显优势
  - 函数简化：指数、超越函数—初等函数
  - 运算简化：将元件在时域的微积分关系转换为复频域的代数关系
  - 系统响应求解过程简化：可自动计入系统初始条件，一次得到系统的全响应
  - 因果关系明确：系统状态和激励对响应的贡献很明确
  - 直观：利用系统函数的零极点分布，可以直观地研究系统的时频特性—下次课内容

课外作业

- 阅读5.1-5.8，预习5.9
- 作业:5.8、 5.18两题

- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名+hw+周次+P图片序号.jpg。如张三（学号U2019148xx）第一周作业第一题图片名为： U2019148xx U2019148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。

电路基本定理的运算形式

kirchhoftis定律

- **K.I.L**
  - 对于任意的节点，在同一时刻流入该节点的电流代数和恒等于零即：

$$\sum i(t)=0 \rightarrow \sum I(s)=0$$

- **K.V.L**
  - 沿任意闭合回路，各段电压的代数和恒等于零，即：

$$\sum u(t)=0 \rightarrow \sum V(s)=0$$