7.5 判断下列信号是否是周期性信号，如果是则其周期为多少？

解：离散周期性信号的判断方法是：若存在正整数 N，使得$x(n+N)=x(n)$，则$x(n)$为周期序列且周期为 N。

（1）$\sin(\boldsymbol{k})$

假设$\sin(k+N)=\sin(k)$，故有$N=2m\pi$，其中$m\in N^{+}$，此时 N 不为正整数，故该信号不是周期信号。

（2）$\mathbf{e}^{\mathbf{j}0.4\boldsymbol{\pi k}}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.4\pi(k+N)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.4\pi k}\times\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.4\pi N}$， 当$N=5m,m\in N^{+}$时， $\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.4\pi N}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi}=1$， 故有：$\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.4\pi(k+N)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.4\pi k}$，所以原信号为周期信号，最小正周期为 5。

（3）$\sin(\mathbf{0.2}\boldsymbol{\pi k})+\cos(\mathbf{0.3}\boldsymbol{\pi k})$

$$\sin[0.2\pi(k+N)]+\cos[0.3\pi(k+N)]$$
$$=\sin(0.2\pi k+0.2\pi N)+\cos(0.3\pi k+0.3\pi N)$$

当$N=20m,m\in N^{+}$时有：

$\sin(0.2\pi k+0.2\pi N)=\sin(0.2\pi k+4\pi)=\sin(0.2\pi k)$

$\cos(0.3\pi k+0.3\pi N)=\cos(0.3\pi k+6\pi)=\cos(0.3\pi k)$

即$\sin[0.2\pi(k+20)]+\cos[0.3\pi(k+20)]=\sin(0.2\pi k)+\cos(0.3\pi k)$，故原信号为周期信号且最小正周期为 20。

（4）$\cos(\mathbf{0.512}\boldsymbol{\pi k})$

$\cos[0.512\pi(k+N)]=\cos(0.512\pi k+0.512\pi N)$，当 $0.512\pi N=2m\pi$时,有：$\cos[0.512\pi(k+N)]=\cos(0.512\pi k)$，其中$m\in N^{+}$。因此可得：$N=\frac{2m}{0.512}=\frac{125m}{32}$，故当$m$取 32 时，$N=125$。此时原信号为周期信号且最小正周期为 125。

（5）$\mathbf{sgn}\left[(-\mathbf{0.23})^{\boldsymbol{k}}\right]$

$\mathrm{sgn}\left[(-0.23)^{k+N}\right]=\mathrm{sgn}\left[(-0.23)^{k}(-0.23)^{N}\right]$，当 N 取偶数时，$(-0.23)^{N}>0$，即$(-0.23)^{k}(-0.23)^{N}$与$(-0.23)^{k}$同号，故 $\mathrm{sgn}\left[(-0.23)^{k+N}\right]=\mathrm{sgn}\left[(-0.23)^{k}\right]$，故当$N=2m,m\in N^{+}$时，原信号为周期信号，最小周期为 2。

（6）$\sin(\boldsymbol{\pi k})\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})$

当$k<0$ 时，$\sin(\pi k)\,\varepsilon(k)=0$；当$k\geq 0$ 时，$\sin(\pi k)\,\varepsilon(k)=\sin(\pi k)=0$，

故$N=m$，$m\in N^{+}$，满足$x(k+N)=x(k)$，故其为周期信号，最小正周期为1。

7.6 一个有限长连续时间信号，时间长度为2min，频谱包含有直流及100 Hz分量的连续时间信号。为便于计算机处理，对其抽样以构成离散信号，求最小的理想抽样点数。

解：

由题意有：该信号的最大频率为$f_{max}=100\text{Hz}$。故根据采样定理有，最小的采样频率$f_{smin}=2f_{max}=200\text{Hz}$。所以最大采样时间间隔$T_{smax}=\frac{1}{f_{smin}}$，计算得：$T_{smax}=\frac{1}{200}\text{s}$。

根据题意知：原信号的时间长度为2 min，故求得最小的理想抽样点数

$$N_{min}=\frac{2\times 60}{\frac{1}{200}}=24000\text{ 个}$$

7.11连续时间系统中，常用有限时间积分器求取信号的平均值，即$\boldsymbol{y(t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}$，试证明可以将上述积分方程转换为下列差分方程来近似求解。

$$\boldsymbol{y(k)=\frac{1}{N}[x(k)+x(k-1)+\ldots+x(k-N+1)]=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x(k-j)}$$

解：令$\tau=NT$，可得 $y(t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{NT}\int_{t-NT}^{t}x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$，如果时间段$T$足够小，可以认为在$T$内，$x(t)$保持区间左端点的值不变，则$y(t)$可近似为黎曼和，即

$$y(t)=\frac{1}{NT}\sum_{j=0}^{N-1}x(t-jT)T$$

$$y(t)=\frac{1}{N}[x(t)+x(t-T)+\ldots+x(t-NT+T)]$$

当$t=kT$时，即可得$y(kT)$，通常记为$y(k)$。所以有

$$y(k)=\frac{1}{N}[x(k)+x(k-1)+\ldots+x(k-N+1)]=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x(k-j)$$

7.26 求下列差分方程所示系统的零状态响应。

（1）$\boldsymbol{y(k+1)+2y(k)=e(k+1)}$, $\boldsymbol{e(k)=2^k\varepsilon(k)}$

解：当激励为$\delta(k)$时，有　$h(k+1)+2h(k)=\delta(k+1)$

特征方程为　　$\lambda+2=0$，解得$\lambda_1=-2$，

故可设　　$h(k)=C_1(-2)^k$，　C_1、k为常数且$k\geq 0$，

由系统方程易知$h(0)=1$，故可得$C_1=1$，则$h(k)=(-2)^k\varepsilon(k)$.

故系统零状态响应为

$$
\begin{aligned}
y_{zs} &= e(k)*h(k)\\
&=\left[2^k\varepsilon(k)\right]*\left[(-2)^k\varepsilon(k)\right]\\
&=\left[\frac{2^{k+1}-(-2)^{k+1}}{2-(-2)}\right]\varepsilon(k)\\
&=\frac{1}{2}\left[2^k+(-2)^k\right]\varepsilon(k)
\end{aligned}
$$

（3）$\boldsymbol{y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=e(k)}$, $\boldsymbol{e(k)=3^k\varepsilon(k)}$

解：当激励为$\delta(k)$时，有$h(k+2)+3h(k+1)+2h(k)=\delta(k)$，

特征方程为　$\lambda^2+3\lambda+2=0$，解得$\lambda_1=-1,\lambda_1=-2$，

易知$\begin{cases}h(0)=0\\h(1)=0\\h(2)=1\end{cases}$, 若$h(k)=\ C_1(-1)^k+\ C_2(-2)^k$ (C_i、k为常数，且$k\geq 0$)

发现无法使左侧方程组成立，为使其成立，在$h(k)$中加入$\delta(k)$项。

令$h(k)=\ C_1(-1)^k+\ C_2(-2)^k+\ C_3\delta(k)$，($C_i$、$k$为常数)

有$\begin{cases}h(0)=\ C_1+\ C_2+\ C_3=0\\h(1)=-C_1-2\ C_2=0\\h(2)=\ C_1+4\ C_2=0\end{cases}$　解得$\begin{cases}C_1=-1\\C_2=\frac{1}{2}\\C_3=\frac{1}{2}\end{cases}$

可得　$h(k)=\left[-(-1)^k+\frac{1}{2}(-2)^k+\frac{1}{2}\delta(k)\right]\varepsilon(k)$.

故系统零状态响应为

$$
\begin{aligned}
y_{zs} &= e(k)*h(k)\\
&=\left[\ 3^k\varepsilon(k)\ \right]\ *\left\{\left[-(-1)^k+\frac{1}{2}(-2)^k+\frac{1}{2}\delta(k)\right]\varepsilon(k)\right\}\\
&=\left[\frac{1}{2}3^k-\frac{3^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3+1}+\frac{1}{2}\frac{3^{k+1}-(-2)^{k+1}}{3+2}\right]\varepsilon(k)\\
&=\left[\frac{1}{20}3^k-\frac{1}{4}(-1)^k+\frac{1}{5}(-2)^k\right]\varepsilon(k)
\end{aligned}
$$