**2-5 已知系统的微分方程与未加激励时的初始条件分别如下：**

（1）$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\boldsymbol{r(t)}+2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r(t)}+\frac{d}{dt}\boldsymbol{r(t)}=3\frac{d}{dt}\boldsymbol{e(t)}+\boldsymbol{e(t)}$，$\boldsymbol{r(0)=r'(0)=0}$，$\boldsymbol{r''(0)=1}$

解：要求系统的零输入响应$r_{zir}(t)$，故可取$e(t)=0$，若使用算子符号$p=\frac{d}{dt}$表示原方程，则原系统的齐次方程可化为：$(p^3+2p^2+p)r_{zir}(t)=0$，故原系统的特征方程为$\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=0$，故可解得系统的自然频率$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$，故原系统的零输入响应为$r_{zir}(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+C_3te^{\lambda_3 t}=C_1+C_2e^{-t}+C_3te^{-t}$，代入系统未加激励时的初始条件可整理得方程组如下：

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\-C_2+C_3=0\\C_2-2C_3=1\end{cases}$$

可解得：$C_1=1$，$C_2=C_3=-1$，

故系统的零输入响应$r_{zir}(t)=1-(1+t)e^{-t}$，$t\geq 0$。

系统的自然频率$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$

（2）$\frac{d^3}{dt^3}\boldsymbol{r(t)}+3\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r(t)}+2\frac{d}{dt}\boldsymbol{r(t)}=2\frac{d}{dt}\boldsymbol{e(t)}$，$\boldsymbol{r(0)=1}$，$\boldsymbol{r'(0)=r''(0)=0}$

解：要求系统的零输入响应$r_{zir}(t)$，故可取$e(t)=0$，若使用算子符号$p=\frac{d}{dt}$表示原方程，则原系统的齐次方程可化为：$(p^3+3p^2+2p)r_{zir}(t)=0$，故原系统的特征方程为$\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda=0$，故可解得系统的自然频率$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=-2$，故原系统的零输入响应为$r_{zir}(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+C_3e^{\lambda_3 t}=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}$，代入系统未加激励时的初始条件可整理得方程组如下：

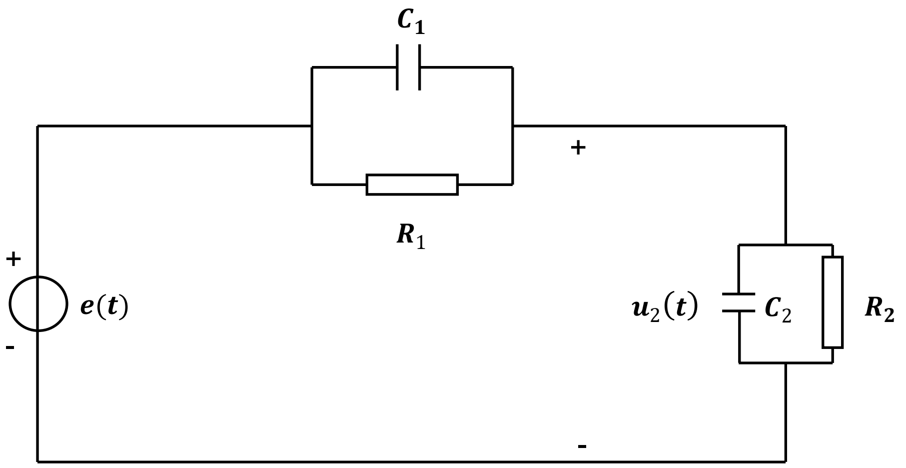
$$\begin{cases}C_1+C_2+C_3=0\\-C_2-2C_3=0\\C_2+4C_3=0\end{cases}$$

可解得：$C_1=1$，$C_2=C_3=0$，

故系统的零输入响应$r_{zir}(t)=1$，$t\geq 0$，故$r_{zir}(t)=u(t)$

系统的自然频率$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=-2$

**2-15 在下图所示电路中，元件参数为$C_1=1\ \mathrm{F}$，$C_2=2\ \mathrm{F}$，$R_1=1\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，响应电压$u_2(t)$，求冲激响应与阶跃响应。**




（法一——数学方法）

由上述电路图可以列出以下方程组

$$\begin{cases} u_1(t)+u_2(t)=e(t) \\ c_2u_1'(t)+\frac{u_1(t)}{R_1}=c_2u_2'(t)+\frac{u_2(t)}{R_2} \end{cases}$$

可以解出系统方程为 $3u_2'(t)+\frac{3}{2}u_2(t)=e'(t)+e(t)$

当激励信号为$\delta(t)$时，可列出系统方程为$3h'(t)+\frac{3}{2}h(t)=\delta'(t)+\delta(t)$。对该方程的形式进行分析，如果$h(t)$仅包含$\delta(t)$项，由于$\delta'(t)$仅来自于$\delta(t)$项，所以该项系数为常数，而方程左右两边系数不同，所以可以推出矛盾。

所以可判断$h(t)$包含$\delta(t)$项与$\varepsilon(t)$项，因此可令$h(t)=f_1(t)\delta(t)+f_2(t)\varepsilon(t)$，同前述分析可以知道，$f_1(t)$为常数，即$f_1(t)=C_1$。然后对$h(t)$求导，可以得到$h'(t)=f_1(t)\delta'(t)+[f_1'(t)+f_2(t)]\delta(t)+f_2{}'(t)\varepsilon(t)$，其中$f_1(t)=C_1$，$f_1'(t)=0$，故将$h(t)$和$h'(t)$代入原方程可得：

$$3C_1\delta'(t)+\left[3f_2(t)+\frac{3}{2}C_1\right]\delta(t)+\left[3f_2'(t)+\frac{3}{2}f_2(t)\right]\varepsilon(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

由方程两边的对应关系可以得到方程组：

$$\begin{cases} 3C_1 = 1 \\ 3f_2(0) + \frac{3}{2}C_1 = 1 \\ 3f_2'(t) + \frac{3}{2}f_2(t) = 0 \end{cases}$$

（这里需要注意第二个方程，由于$\delta(t)$在$t > 0$时取值均为 0，所以只有在$t = 0$时，方程两边的$\delta(t)$的系数才一定相等）

所以可解得：

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ f_2(0) = \frac{1}{6} \\ f_2(t) = C_2 e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}t} \end{cases}$$

故冲激响应$h(t) = \frac{1}{3}\delta(t) + \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t)$。

**（法二——冲激函数匹配法）**

由上述电路图可以列出以下方程组

$$\begin{cases} u_1(t) + u_2(t) = e(t) \\ c_2 u_1'(t) + \frac{u_1(t)}{R_1} = c_2 u_2'(t) + \frac{u_2(t)}{R_2} \end{cases}$$

可以解出系统方程为 $3u_2'(t) + \frac{3}{2}u_2(t) = e'(t) + e(t)$

当激励信号为$\delta(t)$时，得到 $3h'(t) + \frac{3}{2}h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$

由于此系统为线性时不变系统，故可将系统方程分解为以下两部分：

$$3u_2'(t) + \frac{3}{2}u_2(t) = e(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$3u_2'(t) + \frac{3}{2}u_2(t) = e'(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

当单位冲激信号经过①、②后，系统产生的响应式为

$$3h_1'(t) + \frac{3}{2}h_1(t) = \delta(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots③$$

$$3h_2'(t) + \frac{3}{2}h_2(t) = \delta'(t)$$

由于此系统为线性时不变系统，分析可知，系统的冲激响应应为$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$，且通过③式求出$h_1(t)$后，将$h_1(t)$微分则能得到$h_2(t)$，现对③式使

用冲激函数匹配法求解如下：

③式等式右边有$\delta(t)$，可知$\delta(t)$由$h_1'(t)$贡献，为使得等式左边存在$\delta(t)$，则$h_1'(t)$中存在$\frac{1}{3}\ \delta(t)$，故$h_1(t)$中存在$\frac{1}{3}\ \varepsilon(t)$。由冲激信号的特性，可知$h_1(0^-)=0$，又因为故$h_1(t)$中存在$\frac{1}{3}\ \varepsilon(t)$，则 $h_1(0^+)=\frac{1}{3}$. 在$t>0$时，系统的激励为 0，有$3h_1'(t)+\frac{3}{2}h_1(t)=0$，解此微分方程得$h_1(t)=ce^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t)$, $c$为常数。又因为$h_1(0^+)=\frac{1}{3}$，得$c=\frac{1}{3}$，故$h_1(t)=\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t)$

则 $h_2(t)=h_1^{'}(t)=-\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t)+\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\delta(t)$,

$h(t)=h_1(t)+h_2(t)=\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t)+\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\delta(t)=\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t)+\frac{1}{3}\delta(t)$

则阶跃响应为

$$r_t(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{T}\left[\frac{1}{3}\delta(\tau)+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\varepsilon(\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{3}\varepsilon(t)+\frac{1}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\varepsilon(t)=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)\varepsilon(t)$$

（**法三–转移算子法**）

在上图中，$C_1$的阻抗为$\frac{1}{pC_1}$，$C_2$的阻抗为$\frac{1}{pC_2}$，（其中 $p$ 为微分算子）

$C_1$与$R_1$并联的阻抗为 $R_{11}=\frac{R_1\frac{1}{pC_1}}{R_1+\frac{1}{pC_1}}=\frac{R_1}{pC_1R_1+1}=\frac{1}{p+1}$

$C_2$与$R_2$并联的阻抗为 $R_{22}=\frac{R_2\frac{1}{pC_2}}{R_2+\frac{1}{pC_2}}=\frac{R_2}{pC_2R_2+1}=\frac{2}{4p+1}=\frac{1/2}{p+1/4}$

$u_2(t)$相当于是$C_2$与$R_2$并联的电路在整个回路中的分压，

所以 $u_2(t)=\frac{R_{22}}{R_{11}+R_{22}}e(t)=\frac{\frac{1/2}{p+1/4}}{\frac{1}{p+1}+\frac{1/2}{p+1/4}}e(t)=(\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{p+\frac{1}{2}})e(t)$

可以得到系统转移算子为 $H(p)=\frac{1}{3}+\frac{1/6}{p+1/2}$

故冲激响应为 $h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{1}{3}\delta(t)+\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t)$

则阶跃响应为 $r_t(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)\varepsilon(t)$

2.20 用卷积的微分积分性质求下列函数的卷积。

（1）$\boldsymbol{f_1(t)=\varepsilon(t)}$，$\boldsymbol{f_2(t)=\varepsilon(t-1)}$；

$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\delta(t-1)*\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=(t-1)\varepsilon(t-1)$$

（2）$\boldsymbol{f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)}$，$\boldsymbol{f_2(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)}$；

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)=\delta(t)-\delta(t-1)，\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\ t\varepsilon(t)-(t-2)\varepsilon(t-2)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=[\delta(t)-\delta(t-1)]*[t\varepsilon(t)-(t-2)\varepsilon(t-2)]$$

$$=t\varepsilon(t)-(t-1)\varepsilon(t-1)-(t-2)\varepsilon(t-2)+(t-3)\varepsilon(t-3)$$

（3）$\boldsymbol{f_1(t)=(\sin 2\pi t)\,[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]}$，$\boldsymbol{f_2(t)=\varepsilon(t)}$；

$$\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}(\sin 2\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)-(\sin 2\pi\tau)\,\varepsilon(\tau-1)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}(\sin 2\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{-\infty}^{t}(\sin 2\pi\tau)\,\varepsilon(\tau-1)\mathrm{d}\tau$$

$$=\ \varepsilon(t)\int_{0}^{t}(\sin 2\pi\tau)\,d\tau-\varepsilon(t-1)\int_{1}^{t}(\sin 2\pi\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}(1-\cos 2\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)=\delta(t)$$

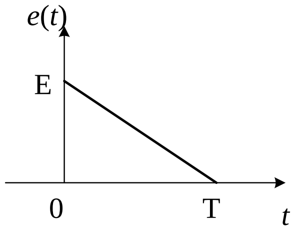
故 $f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi}(1-cos\,2\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$

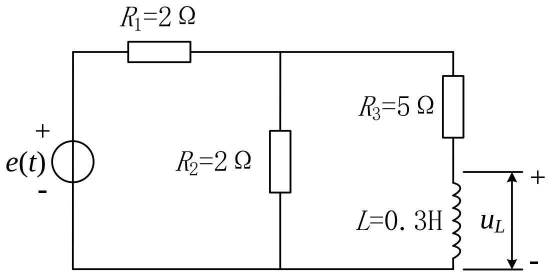
（4）$\boldsymbol{f_1(t)=e^{-t}\varepsilon(t)}$，$\boldsymbol{f_2(t)=\varepsilon(t-1)}$

$$\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t)(1-e^{-t})，\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)=\delta(t-1)$$

故$f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t-1)\left(1-e^{-(t-1)}\right)$

2.23 **如图所示电路，其输入电压为单个倒锯齿波，求零状态响应电压$\boldsymbol{u_L(t)}$。**




解：

法一：设电路中左、右两边网孔电流分别为$i_1(t)$和$i_2(t)$，方向均为顺时针方向，则根据回路的电压关系可列出方程组：

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + R_2[i_1(t) - i_2(t)] = e(t) \\ R_3 i_2(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + R_2[i_2(t) - i_1(t)] = 0 \end{cases}$$

代入各电子元件参数可得：

$$\begin{cases} 4i_1(t) - 2i_2(t) = e(t) \\ -2i_1(t) + (0.3p + 7)i_2(t) = 0 \end{cases}$$

解上述方程组可得： $i_2(t) = \frac{1}{0.6p+12}e(t)$ …………①

故 $u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{0.3p}{0.6p+12}e(t)$

则系统的转移算子为 $H(p) = \frac{u_L(t)}{e(t)} = \frac{0.3p}{0.6p+12} = \frac{1}{2} - \frac{10}{p+10}$

故系统的单位冲激响应 $h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - 10e^{-20t}\varepsilon(t)$ …………②

又由题知 $e(t) = \frac{E}{T}(T-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]$

则系统的零状态响应

$$u_L(t) = e(t) * h(t) = \left[\frac{1}{2}\delta(t) - 10e^{-20t}\varepsilon(\mathrm{t})\right] * \left\{\frac{E}{T}(T-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]\right\} =$$

$$\frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{T}}(T-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] - [10e^{-20t}\varepsilon(t)] * \left\{\frac{E}{T}(T-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]\right\}$$

令 $f(t) = [10e^{-20t}\varepsilon(t)] * \left\{\frac{E}{T}(T-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]\right\}$

$$= \frac{10E}{T}\int_{-\infty}^{t} e^{-20(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau) \times (T-\tau)[\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - T)]\,\mathrm{d}\tau$$

当$t < 0$时：$f(t) = 0$。

当$0<t<T$时：

$$f(t)=\frac{10E}{T}\int_0^t e^{-20(t-\tau)}\times(T-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{10E}{T}\left\{T\int_0^t e^{-20(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t \tau e^{-20(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=\frac{10E}{T}\left[\frac{T-t}{20}-\left(\frac{T}{20}+\frac{1}{400}\right)e^{-20t}+\frac{1}{400}\right]=f_1(t)$$

当$t>T$时：

$$f(t)=\frac{10E}{T}\int_0^T e^{-20(t-\tau)}\times(T-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{10E}{T}\left\{\frac{T}{20}\left[e^{-20(t-T)}-e^{-20t}\right]-\left[\frac{T}{20}e^{-20(t-T)}-\frac{1}{400}e^{-20(t-T)}+\frac{1}{400}e^{-20t}\right]\right\}$$

$$=\frac{10E}{T}\left\{-\frac{T}{20}e^{-20t}+\frac{1}{400}e^{-20(t-T)}-\frac{1}{400}e^{-20t}\right\}=f_2(t)$$

故$f(t)=f_1(t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]\ +f_2(t)\varepsilon(t-T)$

$$=\left[\frac{E}{2T}(T-t)-\left(\frac{E}{2}+\frac{E}{40T}\right)e^{-20t}+\frac{E}{40T}\right]\varepsilon(t)$$

$$+\left[\frac{E}{40T}e^{-20(t-T)}-\frac{E}{2T}(T-t)-\frac{E}{40T}\right]\varepsilon(t-T)$$

所以$u_L(t)=\frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{T}}(T-t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]-f(t)$

$$=\frac{E}{2}e^{-20t}\varepsilon(t)+\frac{E}{40T}(e^{-20t}-1)\varepsilon(t)-\frac{E}{40T}\left[e^{-20(t-T)}-1\right]\varepsilon(t-T)$$

补充说明 1：

在此题①处，也可以先通过转移算子将$i_2(t)$求出，

求出结果为 $h_{i_2}(t)=\frac{5}{3}e^{-20}\varepsilon(t)$ …………③

因为在电感上有 $u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}i$，

根据系统线性时不变性有$h_{u_L}(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}h_{i_2}(t)$=$\frac{1}{2}\delta(t)-10e^{-20t}\varepsilon(t)$

与②处结果一致

补充说明 2：

在①处，同样可以使用冲激函数匹配法求解$i_2(t)$

由①可得系统方程为 $\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{dt}}+20i_2(t)=\frac{5}{3}e(t)$

当激励为$\delta(t)$时，系统方程为 $h'_{i2}(t)+20h_{i_2}(t)=\frac{5}{3}\delta(t)$，此等式右边有$\delta(t)$，可知$\delta(t)$由$h'_{i2}(t)$贡献，为使得等式左边存在$\delta(t)$，则$h'_{i2}(t)$中存在$\frac{5}{3}\ \delta(t)$，故$h_{i_2}(t)$中存在$\frac{5}{3}\ \varepsilon(t)$。由冲激信号的特性，可知$h_{i_2}(0^-)=0$，又因为故$h_{i_2}(t)$中存在$\frac{5}{3}\ \varepsilon(t)$，则 $h_{i_2}(0^+)=\frac{5}{3}$. 在$t>0$时，系统的激励为 0，有$h'_{i2}(t)+20h_{i_2}(t)=0$，解此微分方程得$h_{i_2}(t)=ce^{-20t}\varepsilon(t), c$为常数。又因为$h_1(0^+)=\frac{5}{3}$，得$c=\frac{5}{3}$，

故$h_{i_2}(t)=\frac{5}{3}e^{-20t}\varepsilon(t)$　与③处结果一致