5.3 求下列函数的拉普拉斯变换并注明收敛区。

解：

（2）$\boldsymbol{\sin t \sin 2t\, \varepsilon(t)}$

根据三角函数和差角公式有：

$$\cos(2t+t)=\cos 2t\cos t-\sin 2t\sin t$$

$$\cos(2t-t)=\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t$$

所以有：$\sin t\sin 2t=-\frac{1}{2}(\cos 3t-\cos t)$，

又因为$L[\cos\omega t\,\varepsilon(t)]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$，收敛区域为$\sigma>0$。

故：

$$\begin{aligned}L[\sin t\sin 2t\,\varepsilon(t)]&=L\left[-\frac{1}{2}(\cos 3t-\cos t)\varepsilon(t)\right]\\&=-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+9}-\frac{s}{s^2+1}\right)\\&=\frac{4s}{s^4+10s^2+9}\end{aligned}$$

收敛区域为：$\sigma>0$。

（4）$\boldsymbol{\frac{1}{s_2-s_1}(e^{s_1t}-e^{s_2t})\varepsilon(t)}$

查表可知：$L[\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{s+\alpha}$，收敛区域为$\sigma>-\alpha$。

所以有：

$$\begin{aligned}L\left[\frac{1}{s_2-s_1}(\mathrm{e}^{s_1t}-\mathrm{e}^{s_2t})\varepsilon(t)\right]&=\frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{1}{s-s_1}-\frac{1}{s-s_2}\right)\\&=\frac{1}{s_2-s_1}\times\frac{s_1-s_2}{(s-s_1)(s-s_2)}\\&=-\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\end{aligned}$$

收敛区域为$\sigma>s_1$且$\sigma>s_2$，即$\sigma>\max\{s_1，s_2\}$

（6）$\boldsymbol{e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\theta)\,\varepsilon(t)}$

根据三角函数的和差角公式有：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\alpha}\ \cos(\omega t+\theta)\,\varepsilon(t)&=\mathrm{e}^{-\alpha t}(\cos\omega t\cos\theta-\sin\omega t\sin\theta)\varepsilon(t)\\&=\cos\theta\times\mathrm{e}^{-\alpha}\ \cos\omega t\,\varepsilon(t)-\sin\theta\times\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(t)\end{aligned}$$

又因为查表可得$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(t)$和$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(t)$的拉普拉斯变换如下：

$$L[\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(t)]=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}，\ \sigma>-\alpha$$

$$L[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(t)]=\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}，\ \sigma>-\alpha$$

所以有:

$$L[\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t+\theta)\,\varepsilon(t)]=\cos\theta\times\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}-\sin\theta\times\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$
$$=\frac{(s+\alpha)\cos\theta+\omega\sin\theta}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

收敛区域为$\sigma>-\alpha$。

（8）$\boldsymbol{t\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)}$

查表可知：$L[t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{(s+\alpha)^2}$，$\sigma>-\alpha$

所以有：

$$L[t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{(s+2)^2}$$

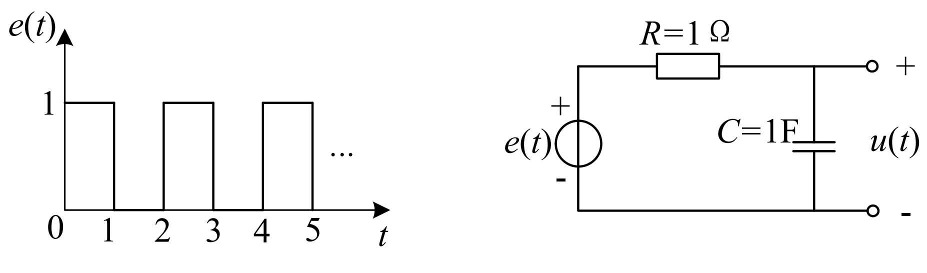
收敛区域为$\sigma>-2$。

或：

因为$L[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{s+2}$，$\sigma>-2$。故根据复频域微分性质$L[tf(t)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}F(s)$有：

$$L[t\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{(s+2)^2}，\ \sigma>-2$$

5.23 求左图所示的方波电压作用下，$\boldsymbol{RC}$ 电路的响应电压$\boldsymbol{u(t)}$。



(a)　　(b)

解：由图易知：激励$e(t)$为有始周期函数且周期$T=2$。激励$e(t)$第一个周期内的表达式为：$e_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$，又因为$L[\varepsilon(t)]=\frac{1}{s}$，故根据拉普拉斯的延时

特性有$L[\varepsilon(t-1)]=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}$。所以$E_1(s)=L[e_1(t)]=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})$。

又因为：$e(t)=e_1(t)+e_1(t-T)\varepsilon(t-T)+e_1(t-2T)\varepsilon(t-2T)+\cdots$

故激励$e(t)$的拉普拉斯变换为：

$$\begin{aligned}E(s)=L[e(t)]&=E_1(s)+E_1(s)\mathrm{e}^{-sT}+E_1(s)\mathrm{e}^{-2s}\ \ +\cdots\\&=E_1(s)(1+\mathrm{e}^{-sT}+\mathrm{e}^{-2sT}+\cdots)\\&=\frac{E_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\\&=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}\end{aligned}$$

对系统做s域分析，可写出系统的系统函数（电压转移函数）：

$$H(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{1+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{sC+1}=\frac{1}{s+1}$$

所以有：

$$\begin{aligned}U(s)&=\frac{1}{s+1}\times\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}\\&=\frac{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)(1-\mathrm{e}^{-s})}{(1-\mathrm{e}^{-2s})}\end{aligned}$$

因此根据前面的分析可知：$u(t)$也为周期$T=2$的有始周期信号。

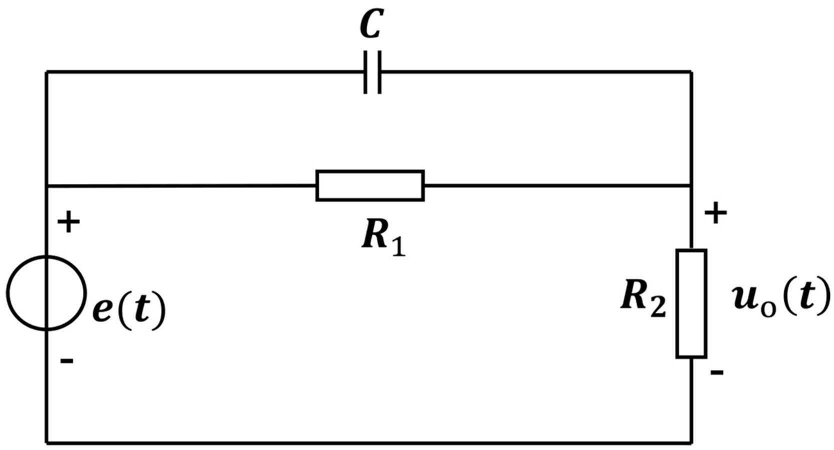
令$U_1(s)=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)(1-\mathrm{e}^{-s})=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-s}$，故求其拉氏逆变换得：

$$\begin{aligned}u_1(t)=L^{-1}[U_1(s)]&=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-(t-1)}\varepsilon(t-1)\\&=(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)-\left[1-\mathrm{e}^{-(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)\end{aligned}$$

所以有：

$$\begin{aligned}u(t)&=u_1(t)+u_1(t-T)\varepsilon(t-T)+u_1(t-2T)\varepsilon(t-2T)+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}u_1(t-2n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\mathrm{e}^{-(t-2n)}\right]\varepsilon(t-2n)-\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\mathrm{e}^{-(t-2n-1)}\right]\varepsilon(t-2n-1)\end{aligned}$$

6-3 求下图所示电路的电压传输函数。如果要求响应中不出现强迫响应分量，激励函数应有怎样的模式？



解：

对系统进行s域分析有：$U(s)=H(s)E(s)$。其中，强迫响应是仅由激励所决定的响应，因此要使系统响应中不出现强迫响应分量，则$E(s)$的极点应与$H(s)$的零点相同。

根据电路图可以写出该系统的系统函数：

$$H(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{R_2}{\frac{\frac{1}{sC}\cdot R_1}{\frac{1}{sC}+R_1}+R_2}=\frac{s+\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}$$

所以$H(s)$的零点为$-\frac{1}{R_1C}$，根据前面分析知，$E(s)$的极点也为$-\frac{1}{R_1C}$。故激励$E(s)$应具有如下形式：

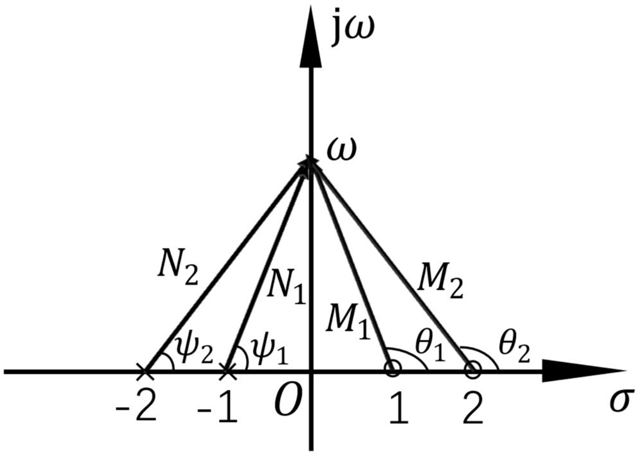
$$E(s)=\frac{A}{s+\frac{1}{R_1C}}\qquad (A\text{为非零常数})$$

故经过拉普拉斯反变换可求得：　$e(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_1C}}\varepsilon(t)$　(A为非零常数)

6-8 设系统函数如下，试用矢量作图法绘出粗略的幅频响应曲线与相频响应曲线。

$$H(s)=\frac{3(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

解：由系统函数可知零点为 1、2，极点为-1，-2，绘出极零点分布图如下所示



令$s=\mathrm{j}\omega$，得 $H(\mathrm{j\omega})=\frac{3(\mathrm{j\omega}-1)(\mathrm{j\omega}-2)}{(\mathrm{j\omega}+1)(\mathrm{j\omega}+2)}$

由矢量作图法可知 $|H(\mathrm{j\omega})|=\frac{3M_1\cdot M_2}{N_1\cdot N_2}=3$，$\varphi(\omega)=\theta_1+\theta_2-\psi_1-\psi_2$

当$\omega=0$时，$|H(\mathrm{j\omega})|=3$，$\varphi(\omega)=180^\circ+180^\circ-0^\circ-0^\circ=0^\circ$

当$\omega=1$时，$|H(\mathrm{j\omega})|=3$，$\varphi(\omega)=135^\circ+153.4^\circ-45^\circ-26.5^\circ=-143^\circ$

当$\omega=2$时，$|H(\mathrm{j\omega})|=3$，$\varphi(\omega)=116.6^\circ+135^\circ-45^\circ-63.4^\circ=143.2^\circ$

当$\omega=\infty$时，$|H(\mathrm{j\omega})|=3$，$\varphi(\omega)=0^\circ$

幅频响应曲线与相频响应曲线如下图所示：

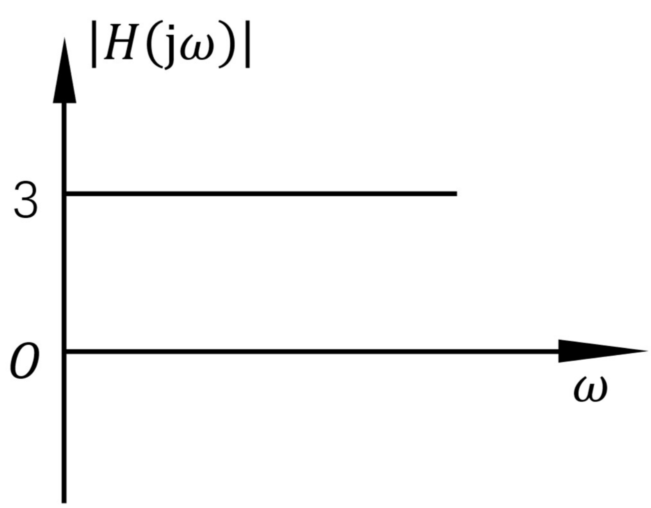


图 1 幅频响应曲线

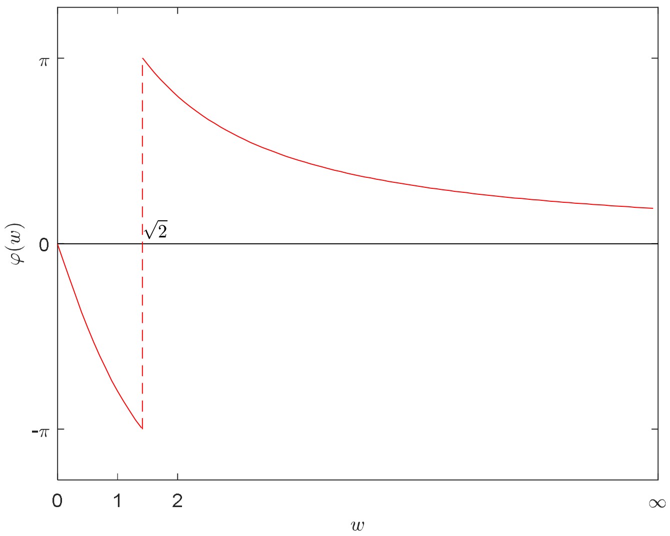


图 2 相频响应曲线