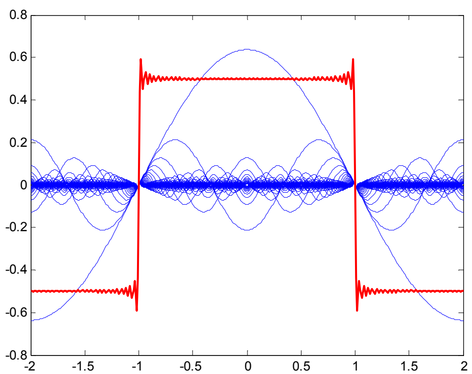
信号与系统

第7讲 傅里叶变换的性质及其应用

郭红星
华中科技大学计算机学院



上一讲内容回顾

- 频谱的概念
- 典型周期信号的频谱分析
- 非周期信号的傅里叶变换
- 典型非周期信号的频谱分析
- 傅里叶变换尺度性质的科学及工程意义

本讲内容

- 傅里叶变换的基本性质
  - 线性性
  - 对称性
  - 时移特性和频移特性
  - 卷积定理
  - 微分和积分特性
  - Paseval定理
  - 奇偶虚实性—结合课本自学

- 学习目标
  - ✓ 熟悉基本性质所揭示的时频对应关系，初步探讨部分性质的应用
  - ✓ 体验傅里叶正反变换的对称美

3.5 傅里叶变换的几个基本性质及其应用

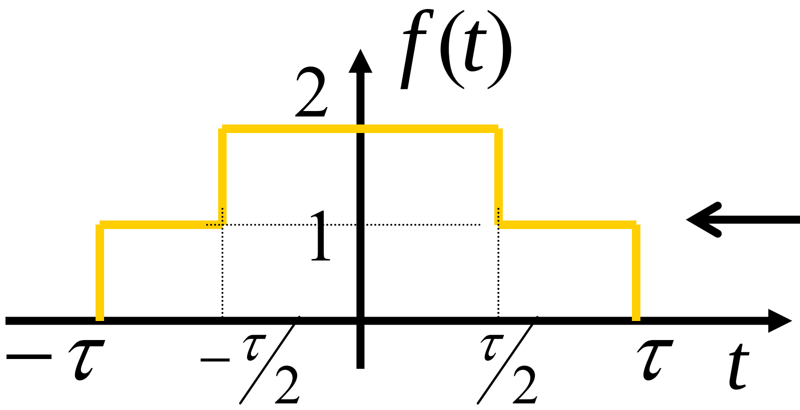
线性性及应用

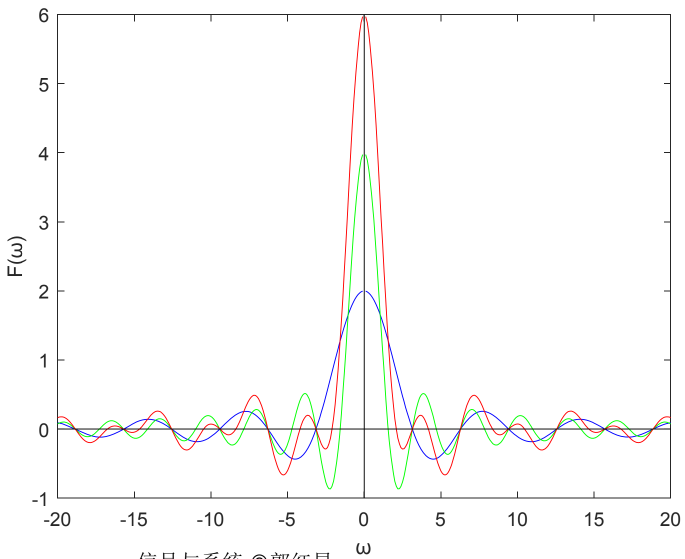
若: $f_i(t) \leftrightarrow Fi(\omega)$

则: $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(\omega)$

例题1：求$f(t)$的傅里叶变换。

$f(t)=[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]+[u(t+\tau)-u(t-\tau)] \longleftrightarrow F(\omega)=\tau[Sa(\omega\tau/2)+2Sa(\omega\tau)]$





对称性

若：$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则：$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

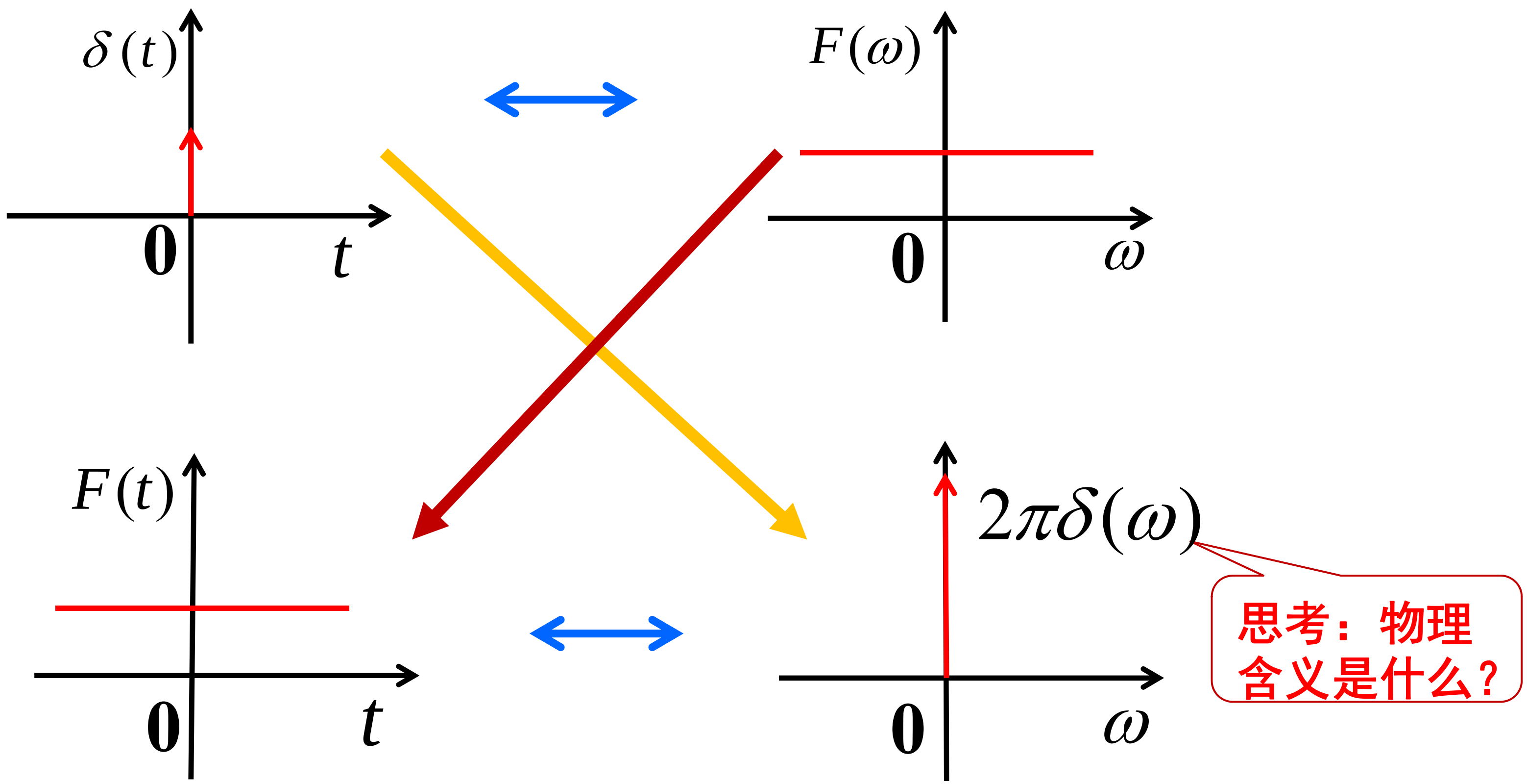
若$f(t)$为**偶函数**，则：

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

即，若$f(t)$为偶函数，则时域和频域完全对称

- 证明见p131－132

$f(t)$为偶函数对称性的例子



- 冲激信号和直流信号频谱的对称性

利用对称性求傅里叶变换

例题2：求$\frac{1}{t^2+1}$的傅里叶变换。

解：P113有 $$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{1}{1+\omega^2}$$

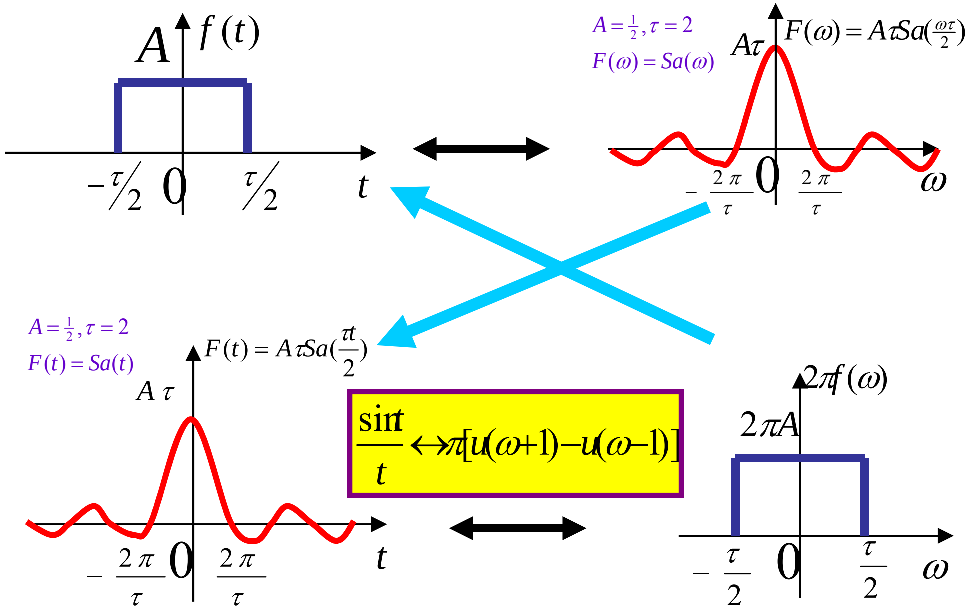
$$\therefore \frac{1}{t^2+1} \leftrightarrow 2\pi\frac{1}{2}e^{-|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}$$

利用对称性求傅里叶变换及应用

例题3：试求信号$\dfrac{\sin t}{t}$的傅里叶变换

解：若直接用 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}e^{-j\omega t}dt$ 是不容易的！

■这里可考虑用对称性来求解。



■我们也可以用此来求 $S_a=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin at}{t}dt$

$$S_a=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin at}{at}d(at)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}d(x)$$

■上式是$\dfrac{\sin t}{t}$的傅里叶变换

$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}e^{-j\omega t}dt$在ω=0处的值

$$\therefore S_a=F(j\omega)\big|_{\omega=0}=\pi$$

时移特性

若：$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则：$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

证明：$FT\left[f(t-t_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$

令$x = t - t_0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)}d(x+t_0)$$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx = e^{-j\omega t_0}F(\omega)$$

$$f(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

带尺度变换的时移特性

频移特性(p125-126)

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则: $f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

频移性质在网络通信系统中有非常重要的应用，从下面的讨论出发，帮助大家初步认识这一点。

- 声音信号能直接发送吗?
- 直接发送引起的问题
  - 功率太大
  - 速度太慢
  - 相互干扰太厉害
  - ……

频移特性的应用：调制(幅)

调制信号

$g(t) \rightarrow \boxed{相乘} \rightarrow f(t) = g(t)\cos\omega_0 t$

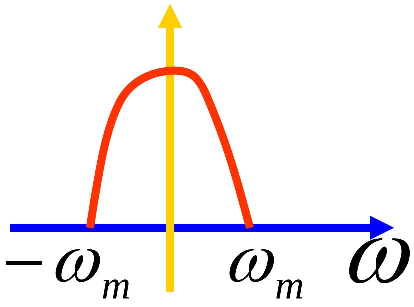
$\cos\omega_0 t$

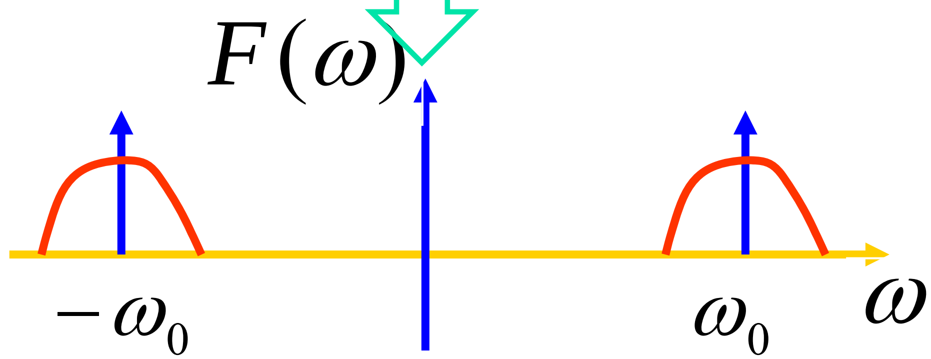
载波信号

利用频移性质

$G(\omega)$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}[G(\omega+\omega_0) + G(\omega-\omega_0)]$$





卷积定理

1. 时域卷积定理

若: $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$; $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则: $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow ?$ $F_1(\omega) \bullet F_2(\omega)$

证明:见P144

2. 频域卷积定理

若: $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$; $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则: $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

- 时域中两信号卷积的傅里叶变换，为频域中它们频谱的乘积
- 时域中两信号乘积的傅里叶变换，为频域中它们频谱的卷积

频域卷积性质的证明

$$\because FT[f_1(t)\bullet f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\bullet f_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\boxed{f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)e^{jut}du}$$

■代入上式得:

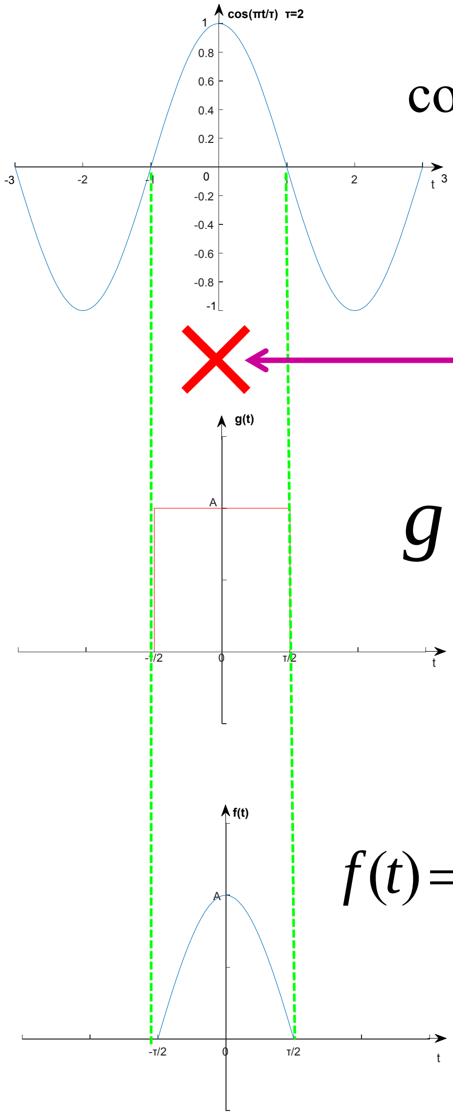
$$FT[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)du[f_2(t)e^{jut}]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)du\underline{\int_{-\infty}^{\infty}[f_2(t)e^{jut}]e^{-j\omega t}dt}$$

利用频移性质

$$\therefore FT[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega-u)du$$

例题4：求单个余弦脉冲的频谱

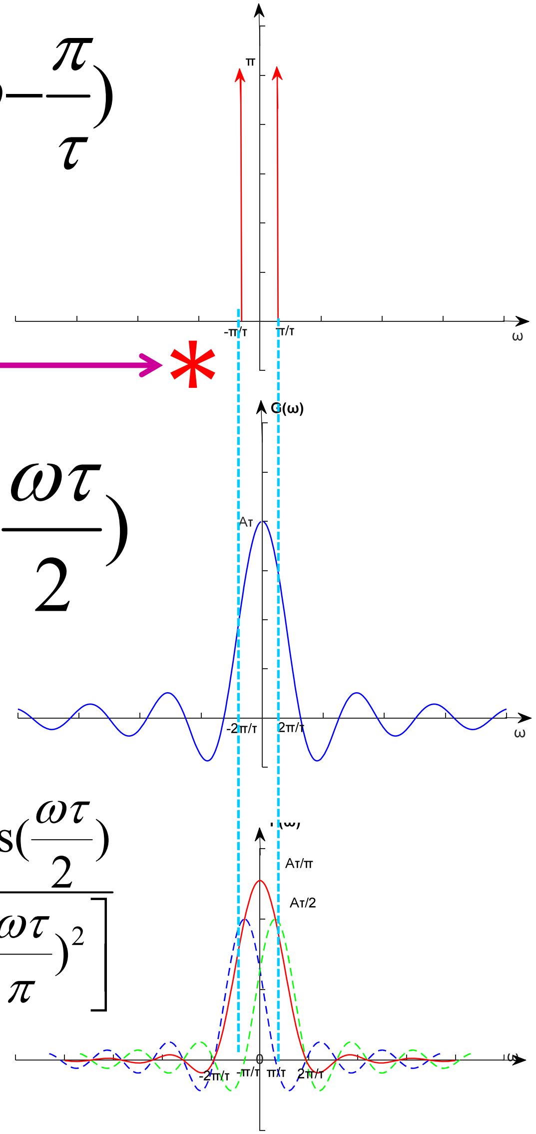


$$\cos\frac{\pi t}{\tau} \longleftrightarrow \pi\delta(\omega+\frac{\pi}{\tau})+\pi\delta(\omega-\frac{\pi}{\tau})$$

周期信号的傅里叶变换

$$g(t) \longleftrightarrow G(\omega)=A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$f(t)=g(t)\cdot\cos\frac{\pi t}{\tau} \longleftrightarrow F(\omega)=\frac{2A\tau\cos(\frac{\omega\tau}{2})}{\pi\left[1-(\frac{\omega\tau}{\pi})^2\right]}$$



(题3－16b)

3.6 傅里叶变换的微积分性质及其应用

傅里叶变换的微分特性

A. 时间微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow ?\ j\omega F(\omega)$

及 $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

B.频率微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $(-jt)f(t)? \leftrightarrow \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$

及 $(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \dfrac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

- 证明见p133

频率微分特性的应用

例题5：求t的傅里叶变换。

注：此例再次说明，绝对可积是傅里叶变换存在的充分而非必要条件

解： $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$$(-jt)\cdot 1 \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}[2\pi\delta(\omega)]$$

$$\therefore t \leftrightarrow 2\pi j\delta^{'}(\omega)$$

$$f(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

时/频域积分特性

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow\ ?F(\omega)$

- **推测**:借助微分积分关系 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega)$

正确吗?
用δ(t)和
u(t)验证

公式A

- **推导**:借助时域卷积定理

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau} = f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow F(j\omega)[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

公式B

对应$f(t)$的
直流分量

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 根据对称法则，不难得到:

$$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(v)dv$$

类似时域积分性
质，亦可借助频
域卷积定理证明

联系：卷积的微分和积分性质也存在类似的问题！

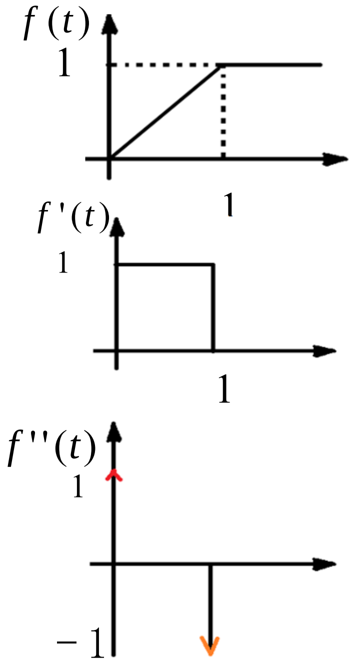
例题6：P152 3.17(a)

解：

$$f(t)=t[u(t)-u(t-1)]+u(t-1)$$

$$f'(t)=u(t)-u(t-1)$$

$$f''(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$$



$$FT\{f''(t)\}=1-e^{-j\omega}\big|_{\omega=0}=0$$

$$FT[f'(t)]=\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}\Big|_{\omega=0}=1$$

$$\therefore F(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega}}{(j\omega)^2}+\pi\cdot 1\cdot\delta(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1-e^{-j\omega}}{(j\omega)^2}$$

$$=\pi\delta(\omega)+e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}{(j\omega)^2}\right)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}sa\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

思路：要求某信号的FT，先求其若干阶导数的FT，然后再利用公式B反推

频域积分性质的应用

例题7：求$\frac{1}{t}$的傅里叶变换。

$$\because\ f(t)=1,\ f(0)=1,\ f(t)\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\therefore\ \pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-jt}\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\omega}2\pi\delta(v)dv=2\pi u(\omega)$$

$$\pi\delta(t)+\frac{1}{-jt}\leftrightarrow 2\pi u(\omega)\Longrightarrow\boxed{\frac{1}{t}\leftrightarrow -j\pi\operatorname{sgn}(\omega)}$$

Paseval定理或Paseval恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad ? \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

你能根据对称法则猜出吗？

由卷积定理得：$FT[f_1(t)\bullet f_2(t)]=\dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

不妨令上式中 $f_1(t)=f(t);\ f_2(t)=f^*(t)$

由奇偶虚实性知 $f^*(t)\leftrightarrow F^*(-\omega)$

Paseval定理或Paseval恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F^*(-(\omega - u)) du$$

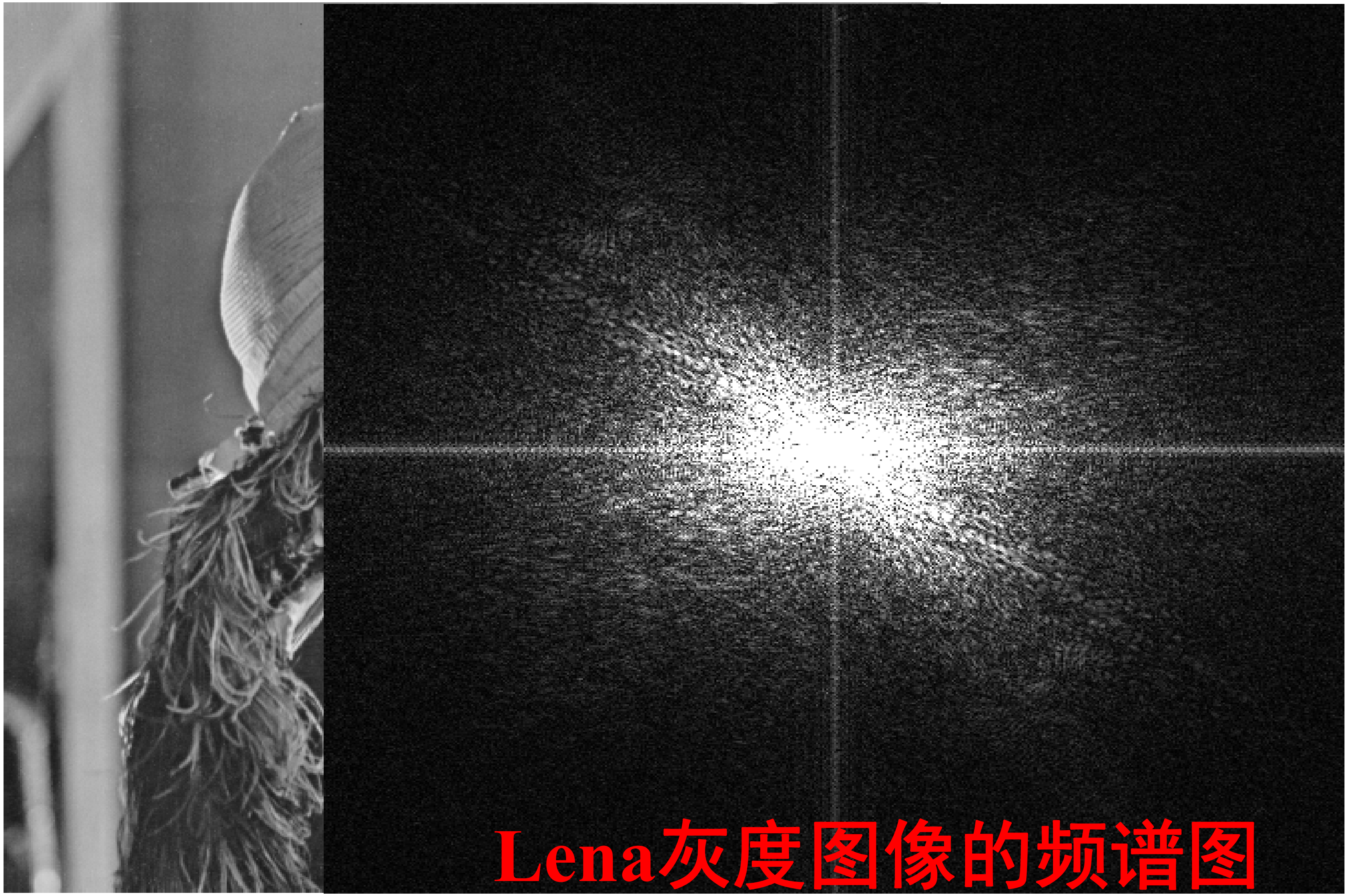
- 上式对任意的ω都成立，不妨取$\omega = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F^*(u) du$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

再次体现
对称之美！

能量守恒定理的应用意义



小结

- 傅里叶变换的线性性、对称性、时移和频移特性为信号与系统分析提供了重要工具
- 傅里叶变换的卷积定理、微积分性质将时/频域的复杂运算转化为对应的频/时域的简单乘法运算，极大简化信号与系统分析的求解过程
- 傅里叶变换性质深刻揭示了时域和频域的对应关系，具有重要的理论意义和应用价值，从帕萨瓦尔定理可见一斑
- 初步体验了自然法则的对称之美

课外作业

- 阅读3.8,3.9; 选学3.10;预习:4.1,4.2
- 作业：3.17(b)(c)两小题、3.19题
- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如张三（学号U2019148xx）第一周作业第一题图片名为：U2019148xx U2019148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为：U2019148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为：U2019148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。
- 课外实践-用Matlab画信号的频谱图

附录1：奇偶虚实性的证明

- 考虑$f(t)$为复函数的一般情形，令$r_f(t)$和$x_f(t)$分别代表其实部和虚部，即：

$$f(t)=r_f(t)+jx_f(t)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[r_f(t)+jx_f(t)]e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}[r_f(t)+jx_f(t)](\cos\omega t-j\sin\omega t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[r_f(t)\cos\omega t+x_f(t)\sin\omega t]dt+j\int_{-\infty}^{\infty}[x_f(t)\cos\omega t-r_f(t)\sin\omega t]dt$$

$$F^*(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[r_f(t)\cos(-\omega t)+x_f(t)\sin(-\omega t)]dt-j\int_{-\infty}^{\infty}[x_f(t)\cos(-\omega t)-r_f(t)\sin(-\omega t)]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[r_f(t)\cos\omega t-x_f(t)\sin\omega t]dt-j\int_{-\infty}^{\infty}[x_f(t)\cos\omega t+r_f(t)\sin\omega t]dt$$

$$FT[f^*(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[r_f(t)-jx_f(t)]e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}[r_f(t)-jx_f(t)](\cos\omega t-j\sin\omega t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[r_f(t)\cos\omega t-x_f(t)\sin\omega t]dt-j\int_{-\infty}^{\infty}[x_f(t)\cos\omega t+r_f(t)\sin\omega t]dt$$

$$=F^*(-\omega)$$

$$FT[f^*(t)]=F^*(-\omega)$$

时域共轭

频域反褶并共轭

附录2：时域积分特性公式A的错因

若：$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \ ?F(\omega)$

■**推导**：令 $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ 或 $\frac{dg(t)}{dt} = f(t)$

思考：此积分的常数项值？

两个公式互推的条件，即公式A成立的前提条件是$g(t)$不含常数项

若$g(t)$满足狄氏条件,即：$g(t) \leftrightarrow G(j\omega)$

则$f(t) \leftrightarrow j\omega G(j\omega)$, 即：$F(j\omega) = j\omega G(j\omega)$

公式A

$$\therefore \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega)$$

公式B

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

正确吗？用$\delta(t)$和$u(t)$验证

联系：卷积的微分和积分性质也存在类似的问题！