信号与线性系统

一、奇异信号与系统入门

1.斜变信号

- $R(x)=\begin{cases}Kt & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$，当$K=1$时为单位斜变信号
- 切平的斜变信号$R(x)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ \dfrac{t}{\tau} & 0<t<\tau\\ 1 & t\ge\tau\end{cases}$

2.单位阶跃信号

- $u(x)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 1 & t>0\\ x & t=0\end{cases}$，其中$t=0$处的值为不连续值，并不重要，这里取$x=\frac{1}{2}$
- 物理含义：突然接入的直流电压，$t=0$即为跳变点

3.矩形脉冲信号

- $G(t)=u(t)-u(t-\tau)$，表示从0到τ的矩形脉冲信号，幅度为1
- 物理含义：突然接通又马上断开的脉冲电压

4.单位冲激信号（函数）

- 单位冲激信号的引入
    - 已知单位面积矩形脉冲信号为

      $$\delta_\tau(x)=\frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau} & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|\ge\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$
    - 定义单位面积矩形脉冲信号的**矩形宽度趋于0时**的极限为**单位冲激信号（函数）**
    - 即$\delta(t)=\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$
    - 单位面积不变，形状不同，当宽度趋于0时的极限**都是单位冲激信号**
    - $A\delta(t)$表示冲激信号的冲激强度为A
- 单位冲激信号的$Dirac$定义

  $$\begin{cases}\delta(x)=\begin{cases}0 & t\ne 0\\ \infty & t=0\end{cases}\\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}$$
- 冲激信号是阶跃信号的广义导数
    - 对斜变信号$R_\tau(t)\begin{cases}0 & t\le 0\\ \dfrac{t}{\tau}+\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 1 & t\ge\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$求导数，可以得到对应的的单位矩形脉冲信号；
    - 当$\tau\to 0$时，斜变信号演变为<u>阶跃信号</u>，而对应的矩形脉冲信号将演变为<u>单位冲激信号</u>；
    - 因此称**冲激信号是阶跃信号的广义导数**，即$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$；
    - 同理，$\delta(t)$积分得到$u(t)$，即$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$；
    - $\delta(t)$表示信号在跳变量为1的跳变（不连续）点处的变化率。
- 冲激信号的特性
    - 微分积分

      $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$

      $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$
    - 平移性质

      $\delta(t)$经过平移后得到$\delta(t-t_0)$，其跳变点也变为$t=t_0$
    - 相乘性质

      $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

- 偶函数

  $\delta(t)=\delta(-t)$

- 筛选性质

  $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t_0)dt=f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$

- 尺度变换性质

  $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

- 冲击偶信号(冲激函数的导数)

  - 设$\delta^{'}(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$，$\int_{-\infty}^{t}\delta^{'}(t)dt=\delta(t)$，则对矩形脉冲信号求导后，取极限$\tau\to 0$，得到$\delta^{'}(t)$既是奇函数，又是偶函数，则$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{'}(t)dt=0$

5.系统入门

- 由激励$e(t)$经过系统$h(t)$可得到响应$r(t)$
- 线性系统
  - 同时具有均匀性和叠加性
  - 均匀性：$ke(t)\to h(t)\to kr(t)$
  - 叠加性：$e_1(t)+e_2(t)\to h(t)\to r_1(t)+r_2(t)$
  - 线性性：$ae_1(t)+be_2(t)\to h(t)\to ar_1(t)+br_2(t)$
- 时不变性
  - 输出仅与输入有关，而与输入施加的时刻无关
  - 如果$e(t)\to r(t)$，则$e(t-t_0)\to r(t-t_0)$
- 增量线性
  - 增量线性系统：激励和响应的增量$\Delta r(t)$与$\Delta e(t)$之间满足线性关系
  - 如$r(t)=3+4e(t)$
- 系统响应的可分解性
  - 零输入响应r_{zi}：输入$e(t)=0$，仅由系统储能引起的响应
  - 零状态响应r_{zs}：$r(0)=0$，仅由输入$e(t)$引起的响应
  - 全响应：$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$
  - **当系统具有<u>可分解性</u>，且同时具有<u>零状态线性</u>时即为线性系统**
- LTI系统：**线性时不变**系统

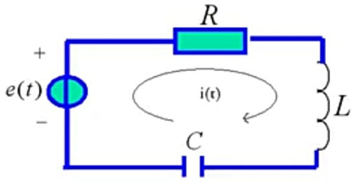
二、连续LTI系统的时域分析方

> 分析LTI系统时，如果所涉及的函数变量均为时间t，则称为**时域分析**方法；
>
> 如果变换为其他变量，称为**变换域分析**方法。

1.经典解法

- 一般步骤
  - 根据系统，建立系统的微分方程
  - 求特征根得到齐次通解$y_h(t)$
  - 根据激励函数得到特解$y_p(t)$
  - 得到全响应表达式$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$
  - 代入初始条件求齐次通解中的待定系统，最后求得全响应
- 建立微分方程
  - 根据连接方式约束，得到系统抽象表达式

(2) 连接方式约束：kvl和kil，与元件的性质无关



$$u_L(t)+u_R(t)+u_C(t)=e(t)$$

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=e(t)$$

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$

- 代入元件电气约束，得到微分方程

(1) 元件约束，与元件的连接方式无关

电阻： $R=\dfrac{u(t)}{i(t)}$

电容： $i_C(t)=C\dfrac{du_C(t)}{dt}, u_C(t)=u_C(t_0)+\dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i_C(\tau)d\tau$

电感： $u_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt}, i_L=i_L(t_0)+\dfrac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u_L(\tau)d\tau$

- 微分方程的一般形式

$$\frac{d^nr(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0r(t)=$$
$$b_m\frac{d^me(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0e(t)$$

  - 其中，$e(t)$为激励，$r(t)$为响应，n为系统方程的阶数

- 由齐次方程的特征根（自由频率）得到齐次解——自然响应

(1) 特征根是不等实根 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$

$$y_h(t)=K_1e^{\lambda_1 t}+K_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+K_ne^{\lambda_n t}$$

(2) 特征根是n重实根 $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\lambda$

$$y_h(t)=(K_1+K_2t+\cdots+K_nt^{n-1})e^{\lambda t}$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $\lambda_i=\sigma_i\pm j\omega_i,\quad i=n/2$

$$y_h(t)=e^{\sigma_1 t}(A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t)+\cdots+e^{\sigma_i t}(A_i\cos\omega_i t+B_i\sin\omega_i t)$$

* 齐次通解中的待定系数由全响应 + 系统的初始条件确定。

- 由激励信号的形式确定特解——受迫响应

激励信号	特解
K	A
Kt	A+Bt
Ke^{-at}(特征根 $s\neq-a$)	Ae^{-at}
Ke^{-at}(特征根 $s=-a$)	Ate^{-at}
$K\sin\omega_0 t$ 或 $K\cos\omega_0 t$	$A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t$
$Ke^{-at}\sin\omega_0 t$ 或 $Ke^{-at}\cos\omega_0 t$	$Ae^{-at}\sin\omega_0 t+Be^{-at}\cos\omega_0 t$

- 得到全响应的表达式，代入初始条件，得到齐次通解中的待定系数，最后得到全响应
- 经典解法的不足之处
    - 微分方程右边的激励较复杂时，难以处理
    - 激励信号或初始条件发生变化时，需要重新求解
    - 无法突出系统响应的物理概念
    - 解决方法一：从响应的物理含义入手——卷积法
    - 解决方法二：使用变换域分析方法

2.卷积法

- 一般步骤
    - 根据系统，建立系统的微分方程
    - 求转移算子$H(p)$
    - 求特征根得到零输入响应$y_{zi}(t)$
    - 根据冲激响应$h(t)$得到零状态响应$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)$
    - 得到全响应$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$
- 转移算子
    - 设$p=\frac{d}{dt}$，$p^i=\frac{d^i}{dt^i}$，则微分方程可以写成 $(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)r(t)=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0)e(t)$
    - 记该微分方程为$D(p)r(t)=N(p)e(t)$，则$r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)$
    - 称转移算子为$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0}$
    - 最终得到表达式$r(t)=H(p)e(t)$
    - 同样地，有积分算子$\frac{1}{p}()=\int_{-\infty}^{t}()d\tau$
    - 在分子分母中或在等式两边相同的算子符号不能随便消去
- 零输入响应
    - 由齐次方程$D(p)r(t)=(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)r(t)=0$的特征根得到零输入响应的表达式
    - 代入初始条件，得到待定系数，从而求得零输入响应
- 零状态响应——叠加积分法
    1. 将任意输入转化为**冲激函数**的组合
    - 将任意一个信号分解为若干个脉冲分量之和
    - 当脉冲分量的$\Delta t\to 0$时，则可将该信号演化为冲激分量之和
    - 最后得到$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$，这实际上是冲激信号的筛选性质
    2. 求单位冲激信号的响应
    - 对于LTI系统，**初始状态为零**，输入为**单位冲激信号**$\delta(t)$所引起的响应称为单位冲激响应；
    - 单位冲激响应简称冲激响应，用$h(t)$表示；
    - 相应地，由单位阶跃响应引起的零状态响应为单位阶跃响应；

- 单位阶跃响应简称阶跃响应，用$r_\varepsilon(t)$表示，则有$r_\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$，即可以通过冲激响应求得阶跃响应
- 部分分式分解法
  - 在电气关系中，可根据积分算子将电容、电感等元件等效为**电阻**
    - 由$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=e(t)$，得到$e(t)=\frac{1}{Cp}i(t)$，即电容等效为$\frac{1}{Cp}$
  - 将转移算子$H(p)$分解为部分分式
  - 代入激励为$\delta(t)$，响应为$h(t)$，求$H(p)$的各个分式的响应
  - 部分分式的响应的计算公式
    - $H(p)=\frac{k}{p-\lambda}\rightarrow h(t)=ke^{\lambda t}u(t)$
    - $H(p)=\frac{k}{(p-\lambda)^2}\rightarrow h(t)=kte^{\lambda t}u(t)$
    - $H(p)=\frac{k}{(p-\lambda)^n}\rightarrow h(t)=\frac{k}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t}u(t)$
    - $H(p)=k\rightarrow h(t)=k\delta(t)$
    - $H(p)=kp^n\rightarrow h(t)=k\delta^{(n)}(t)$

3. 由$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$，得到$r_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$

- 卷积的定义
  - 称$r(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$为$e(t)$和$h(t)$的卷积
  - 图解说明
    - 将自变量由t改为τ
    - 将其中一个信号反转、向右平移t：$h(\tau)\rightarrow h(-\tau)\rightarrow h(t-\tau)$
    - 将二者相乘后积分
- 卷积的性质
  - 代数性质
    - 交换律：$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$
    - 分配律：$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$
    - 结合律：$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$
  - 延时性质
    - 若$e(t)*h(t)=r(t)$，则$e(t-t_0)*h(t)=r(t-t_0)$
    - 若$e(t)*h(t)=r(t)$，则$e(t-t_1)*h(t-t_2)=r(t-t_1-t_2)$
  - 单位冲激信号的卷积特性
    - $f(t)*\delta(t)=f(t)$
    - $\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$
    - $f(t)*\delta(t-t_1)=f(t-t_1)$
    - $f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$
    - $e(t)*\delta^{'}(t)=e^{'}(t)$
  - 单位阶跃信号的卷积特性
    - $e(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau$
    - $u(t)*u(t)=tu(t)$
  - 微积分性质
    - 两函数卷积的导数等于两函数之一的导数与另一函数相卷积
      $\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}$
    - 两函数卷积的积分等于两函数之一的积分与另一函数相卷积
      $\int_{-\infty}^{t}[f_1*f_2]dt=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau*f_2(t)$
    - 推广：$f_1*f_2=\frac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau$

3.两种解法的区别

- 零输入响应≠自由响应
  - 自由响应由初始条件、外加激励共同决定；
  - 而零输入响应由初始条件决定，零输入响应是自由响应的一部分
- 零状态响应包含**部分**自然响应和受迫响应
- 零输入响应和零状态响应中的自然响应部分共同组成总的自然响应

三、傅里叶级数

1.傅里叶级数的理论基础

- 两信号正交的条件：$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t) = 0$

2.周期信号的傅里叶级数

- 任意周期信号都可表示为不同频率正弦信号（谐波）的加权和
- 三角形式
  - $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos{(n\omega_1 t)} + b_n \sin{(n\omega_1 t)})$，其中$w_1 = \frac{2\pi}{T}$称为基波频率
  - 其中，$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)dt$，$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos{n\omega_1 t}dt$，$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin{n\omega_1 t}dt$
  - 令$c_0 = a_0$，$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$，$\phi_n = a\arctan{\frac{b_n}{a_n}}$
  - 则$f(t) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cos{(n\omega_1 t + \phi_n)}$
- 指数形式
  - 令$F_n = \frac{1}{2}c_n e^{j\phi_n}$，$F_{-n} = \frac{1}{2}c_n e^{-j\phi_n}$，也即$F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$
  - 则$f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$
- 频谱图：每一条谱线表示某正弦分量的幅度或者相位，如果不加说明，一般表示幅度频谱
- 由$F_n = |F_n|e^{j\phi_n}$，可以得到幅度谱：幅度随频率的变化曲线，相位谱：相位随频率的变化曲线
- 周期矩形脉冲的频谱分析
  - $F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-jn\omega_1 t}dt = \frac{A\tau}{T}Sa(\frac{n\omega_1 \tau}{2})$
  - 其中$Sa(x) = \frac{\sin{x}}{x}$，$F_n$表示复数振幅，当$n = 0$时，$F_n = \frac{A\tau}{T}$
- 周期信号频谱的特点
  - 离散性：频谱是离散的，谱线间距为$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
  - 谐波性：谱线位于谐波频率上
  - 收敛性：频率越高，幅度越小
  - 对称性：正负频率的幅度相等，相位相反

3.非周期信号的傅里叶级数

- 非周期信号与周期信号的傅里叶变换
  - 非周期信号的傅里叶变换是周期信号傅里叶级数的极限情形
  - 此时频谱图上的相邻谱线的间距$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$无限趋小，谱线无限密集，形成**连续频谱**
- 由傅里叶级数到傅里叶积分
  - 当$T \to \infty$时，$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \to d\omega$，$n\omega_1 \to \omega$

- 正变换：$F(j\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}TF_n=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$
- 反变换：$f(t)=\lim\limits_{T\to\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F_nTe^{jn\omega_1t}\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$
- 充分条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$为$F(j\omega)$存在的充分条件
- $F(j\omega)$称为**频谱密度函数**，简称频谱函数
- 频谱函数的指数形式：$F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}=a(\omega)+jb(\omega)$

- **傅里叶变换对**

$$\begin{cases}F(j\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\\ \\ f(t)=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\end{cases}$$

- 傅里叶变换表

名称	函数	傅里叶变换
单位冲激信号	$\delta(t)$	1
单位阶跃函数	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
单位直流信号	1	$2\pi\delta(\omega)$
脉冲信号	$A[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$	$A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$
单边指数函数	$e^{-\alpha t}u(t),\alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
指数脉冲	$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$
单位余弦	$\cos\omega_ct$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
单位正弦	$\sin\omega_ct$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$

- 非周期信号频谱的特点
  - 连续性：频谱是连续的
  - 相对性：各频率分量幅度是**频谱密度**，为相对大小
  - 收敛性：频率越高，幅度越小
  - 对称性：正负频率的幅度相等，相位相反

4.傅里叶变换的性质与应用

- 线性性：若$f_i(t)\leftrightarrow F_i(\omega)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_if_i(t)\leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}a_iF_i(\omega)$
- 对称性：若$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$
  - 若$f(t)$为偶函数，则$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(\omega)$，其时域和频域完全对称
  - 冲激信号和直流信号频谱具有对称性
- 尺度变换特性：若$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a})$
- 时移性：若$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则$f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$，$f(at-t_0)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$
- 频移性：若$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则$f(t)e^{j\omega_0t}\leftrightarrow f(\omega-\omega_0)$
  - 应用：调幅
- 卷积定理：
  - 时域卷积定理：$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

- 频域卷积定理：$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

- 微分特性
  - 时域微分特性：$\frac{d^nf(t)}{dt^n}\leftrightarrow (j\omega)^nF(\omega)$
  - 频域微分特性：$(-jt)^nf(t)\leftrightarrow \frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$
- 积分特性
  - 时域积分特性：$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$
- $Paseval$恒等式：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$

四、连续LTI系统的频域分析

1.频域分析方法

- **只能得到零状态响应**
- 设$e(t)\leftrightarrow E(j\omega)$，$r_{zs}(t)\leftrightarrow R(j\omega)$
- 定义频域的系统函数$H(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}=|H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$，称为**频率响应**
- 实际上有$h(t)\leftrightarrow H(j\omega)$
- 求解步骤
  - 将输入信号分解为正弦分量——求频谱$E(j\omega)$
  - 求频响$H(j\omega)$
  - 通过频响的公式求得零状态响应的频谱$R(j\omega)$
  - 由傅里叶反变换得到零状态响应$r_{zs}(t)$

2.理想低通滤波器

- 基本概念
  - 能使通带内频率成分均匀一致地通过，阻带内的频率成分都衰减为零的滤波器
  - 理想滤波器是**不存在**的
- 单位冲激响应：$h(t)=\frac{kw_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]$
- 单位阶跃响应：$r_u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\omega_ct)$
  - $Si(y)=\int_0^ySa(x)dx$
- 无失真传输的系统要求
  - 时域：$r(t)=ke(t-t_0)$——仅对输入作线性缩放和延时
  - 频域：$H(j\omega)=Ke^{j\omega t_0}$
  - 得到幅频：$|H(j\omega)|=K$，相频：$\pi=-\omega t_0$

五、连续LTI系统的复频域分析

1.从傅里叶变换到拉氏变换

- 绝对可积的条件限制了傅里叶变换的应用，如$u(t)$的傅里叶级数不容易计算，$e^{at}u(t)$的傅里叶级数不存在（绝对可积意味着函数需要满足趋于无穷时函数衰减为0）
- 若乘一衰减因子$e^{-\sigma t}$，σ为任意实数，使得$f(t)e^{-\sigma t}$收敛，满足绝对可积条件，即可求傅里叶变换
- 拉普拉斯正变换$f(t)\rightarrow F(s)$
  - 由$FT[f(t)]=F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$，得到 $FT[e^{-\sigma t}f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$
  - 从而有$F(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

- 令$s=\sigma+j\omega$，则$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$

- 拉普拉斯反变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$
- 傅里叶变换是拉普拉斯变换在$\sigma=0$时的**特例**

2.拉普拉斯变换

- 双边拉普拉斯变换
  $$\begin{cases}F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\\f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds\end{cases}$$
- 单边拉普拉斯变换
  $$\begin{cases}F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\\f(t)=[\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds]u(t)\end{cases}$$
- 常见信号的双边拉氏变换

函数	变换
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$te^{at}u(t)$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

- $t<0$区间的函数值与单边拉普拉斯变换的结果无关
  $LT^{-1}[\frac{1}{s+\alpha}]=e^{-\alpha t}u(t)$
- 单边拉普拉斯变换下限从0^-开始

3.拉普拉斯变换的收敛区

- 不是所有的函数均可使用$e^{-\sigma t}$使其满足绝对可积条件
- 把$f(t)e^{-\sigma t}$满足绝对可积的σ值的范围称为**收敛区**
- 定义指数阶函数：存在σ_0，当$\sigma<\sigma_0$时，$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)e^{-\sigma t}=0$
- 定义分段连续：除有限个不连续点外函数是连续的，且时间由间断点两侧趋于间断点时，函数有有限的极限值
- 当$f(t)$是指数阶函数，且分段连续，则其单边拉氏变换存在
- 收敛区：$\sigma>\sigma_0$
- 傅里叶变换与拉氏变换的对比

$f(t)$	$FT[f(t)]$	$LT[f(t)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$ $(a>0)$	$\frac{1}{j\omega+a}$	$\frac{1}{s+a}$
$e^{at}u(t)$ $(a>0)$	×	$\frac{1}{s-a}$

- 当$\sigma_0>0$时，傅里叶变换不存在，拉氏变换存在；
- 当$\sigma_0<0$时，傅里叶变换和拉氏变换均存在，并且可以通过$s=\sigma+j\omega$转换二者；
- 当$\sigma_0=0$时，傅里叶变换和拉氏变换均存在，但是不可以通过$s=\sigma+j\omega$转换二者，要包含奇异级数项

4.拉普拉斯变换的计算

- 拉普拉斯反变换
  - 部分分式分解法

    设$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$
    - 若$D(s)=0$无重根
      - $F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)\cdots(s-s_n)}$ $=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_k}{s-s_k}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}$
      - 从而得到$K_k=[(s-s_k)\frac{N(s)}{D(s)}]_{s=s_k}$或者$K_k=[\frac{N(s)}{D'(s)}]_{s=s_k}$
      - 得到$f(t)=LT^{-1}[F(s)]=\sum\limits_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t}u(t)$
    - 若$D(s)=0$有重根
      - 重根项的部分分式系数为$K_{1k}=\frac{1}{(p-k)!}\frac{d^{p-k}}{ds^{p-k}}[(s-s_1)^p\frac{R(s)}{D(s)}]_{s=s_1}$
  - 留数法
    - 令$D(s)=0$，得到极点
    - 若s_k为一阶极点，则留数为$Res_k=[(s-s_k)F(s)e^{st}]_{s=s_k}$
    - 若s_k为p阶极点，则留数为$Res_k=\frac{1}{(p-1)!}[\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(s-s_k)^p F(s)e^{st}]_{s=s_k}$
    - 得到$f(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}Res_i u(t)$
- 极零图
  - 令分子$N(s)=0$得到零点，令分母$D(s)=0$得到极点

5.拉普拉斯变换的性质

- 线性性：若$f_i(t)\leftrightarrow F_i(s)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i f_i(t)\leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}a_i F_i(s)$
- 尺度变换特性：若$f(t)\leftrightarrow F(s)$，则$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{s}{a})$
- 时移性：若$f(t)\leftrightarrow F(s)$，则$f(t-t_0)\leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$
- 频移性：若$f(t)\leftrightarrow F(s)$，则$f(t)e^{s_0 t}\leftrightarrow f(s-s_0)$
- 卷积定理：
  - 时域卷积定理：$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)\cdot F_2(s)$
  - 频域卷积定理：$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$

- 微分特性
    - 时域微分特性：$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$
    - 时域微分特性推广：$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$
    - 频域微分特性：$tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$
- 积分特性
    - 时域积分特性：$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau)d\tau}{s}$
    - 频域积分特性：$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(s)ds$

6.线性系统的拉普拉斯变换分析

- 全响应
    - 对微分方程的两边分别求拉普拉斯变换，可得到响应$R(s)$的表达式，然后经过反变换即可得到$r(t)$
- 零输入/零状态响应
    - 由齐次方程求拉普拉斯变换得到零输入响应表达式，代入初始条件即可
    - 由微分方程求拉普拉斯变换得到零状态响应表达式，由初始状态为0，得到$R_{zs}(s)$
        - $R_{zs}(s) = H(s)E(s)$，其中$H(s)$称为s域系统函数
        - 由$r_{zs}(t) = h(t) * e(t)$，两边求拉普拉斯变换即可得到上式
        - 这个特性经常被用于求解冲激响应

五、离散LTI系统的时域分析

1.从连续到离散

- 离散时间信号的表示：序列形式$f(n)$，表格形式，图形形式，闭合表达式
- 离散序列
    - 单位样值信号、离散单位阶跃序列，离散矩形序列、斜边序列、指数序列
    - 正弦序列：$x(n) = A\sin(\Omega_0 nT_s) = A\sin(\omega_0 n)$，其中$\omega_0 = \Omega_0 T_s = \frac{\Omega_0}{f}$
    - 任意离散序列：$x(n) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$
    - 任意离散序列可以分解为单位样值信号的组合
- 离散序列的分类
    - 双边序列：$f(k)$对所有k均有取值
    - 单边序列：$f(k)$对部分k（无穷个）有取值
    - 时限序列：$f(k)$仅在$N_1 \le k \le N_2$（有限个）有取值
- 序列的移位
    - 右移：$f(k-1) = Df(k)$，即$f(k-m) = D^m f(k)$
    - 左移：$f(k+1) = Ef(k)$，即$f(k+m) = E^m f(k)$
    - 称D为滞后算子，E为超前算子
- 序列的差分
    - 前向差分：$y(n) = \Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$
    - 后向差分：$y(n) = \nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$
- $x(an)$为序列压缩，$x(\frac{a}{n})$为序列扩散
- 连续时间信号的离散化
    - 将$f(t)$以时间间隔T进行离散化，则得到序列$f(kT)$
    - 在冲激信号序列$\delta_T(t)$的作用下，得到$f(t)$的理想抽样信号$f_\delta(t)$

- 设$f(t)$的频谱的频带为$-\omega_m \le \omega \le \omega_m$
- 设抽样角频率为$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$，则周期冲激信号序列$p(t)$的傅里叶变换为$p(\omega) = 2\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$
- 其中$P_n = \frac{1}{T_s}$表示$\delta_T(t)$的傅里叶级数展开系数，由此$p(\omega) = \omega_s \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$
- 这样，为了避免发生频谱混叠，需要使得$\omega_s \ge 2\omega_m$，即抽样间隔满足$T_s \le \frac{\pi}{\omega_m}$
- 恢复原始信号$f(t)$
  - 设$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，$f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega)$
  - 当$F_s(\omega)$通过截止频率为ω_c的理想低通滤波器时，滤波器的响应频谱为$F(\omega)$
  - 即滤波器的作用等效为$H(\omega)$同$F_s(\omega)$相乘

2.离散时间系统

- 输入输出均为离散时间信号的系统：$y(n) = T[x(n)]$
- 离散时间系统方程的建立——差分方程
  - 差分方程的阶：未知序列变量序号最高与最低值之差
  - 系统模型是输入输出的移序及其加权和间的等式
  - 系统模型通式：$y(n) = -\sum\limits_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum\limits_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$
  - 从微分方程到差分方程
    - 取近似：$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(n+1)-y(n)}{T_s}$
    - 转换为系统模型通式
- 离散时间系统的响应：求解差分方程
  - 迭代法：令$n = 0, 1, \cdots, k$，由数学归纳法得到$y(n)$表达式

3.线性差分方程的经典解法

- 全解=齐次解+特解
- 通式：$\sum\limits_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum\limits_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$
- 齐次解
  - 齐次方程：$\sum\limits_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$
  - 特征方程：$\sum\limits_{k=0}^{N} a_k \alpha^{N-k} = 0$
  - 特征根：α^j，$j = 1, 2, \cdots, N$
    - 不等实根：$y_h[n] = \sum\limits_{k=1}^{N} C_k \alpha_k^n$
    - K重根：$y_h[n] = \sum\limits_{r=1}^{K} C_r n^{r-1} \alpha^n$
    - 成对共轭复根：若$\alpha_{1,2} = a \pm jb = \rho e^{\pm j\Omega_0}$，则$y_h[n] = C_1\rho^n \cos n\Omega_0 + C_2 \rho^n \sin n\Omega_0$
- 特解

- 强迫项为n^k多项式，$y_p[n]=\sum\limits_{r=0}^{k}D_rn^r$
- 强迫项含有α^n且α不是齐次方程特征根，$y_p[n]=D\alpha^n$
- 强迫项含有α^n且α是齐次方程单重特征根，$y_p[n]=(D_1n+D_2)\alpha^n$
- 强迫项含有α^n且α是齐次方程K重特征根，$y_p[n]=(\sum\limits_{r=0}^{K}D_rn^r)\alpha^n$

4.线性差分方程的卷积和解法

(1)求单位样值响应

- 直观解法
  - 确定单位样值信号输入系统引起的状态改变
  - 求齐次方程的齐次解
  - 根据初始条件确定系数，得到单位样值响应$h[n]$

(2)卷积和法

- 由$x(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$，得到$y_{zs}(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$
- 简记为$y_{zs}(n)=x(n)*h(n)$，此即为卷积和
- 卷积和满足分配律、结合律、交换律
- 卷积和的差分
  - $\Delta y(k)=\Delta e(k)*h(k)=e(k)*\Delta h(k)$
  - $\nabla y(k)=\nabla e(k)*h(k)=e(k)*\nabla h(k)$
- 单位样值序列的卷积和**类似**连续系统的卷积
- 卷积和表

$f_1(k)$	$f_2(k)$	$f_1(k)*f_2(k)$
$\delta(k)$	$f(k)$	$f(k)$
$u(k)$	$u(k)$	$(k+1)u(k)$
$v^ku(k)$	$u(k)$	$\frac{1-v^{k+1}}{1-v}u(k)$
$v^ku(k)$	$v^ku(k)$	$(k+1)v^ku(k)$
$v_1^ku(k)$	$v_2^ku(k)$	$\frac{v_1^{k+1}-v_2^{k+1}}{v_1-v_2}u(k)$
$e^{\lambda kT}u(k)$	$u(k)$	$\frac{1-e^{\lambda(k+1)T}}{1-e^{\lambda T}}u(k)$
$e^{\lambda_1kT}u(k)$	$e^{\lambda_2kT}u(k)$	$\frac{e_1^{\lambda(k+1)T}-e_2^{\lambda(k+1)T}}{e_1^{\lambda T}-e_2^{\lambda T}}u(k)$
$e^{\lambda kT}u(k)$	$e^{\lambda kT}u(k)$	$(k+1)e^{\lambda kT}u(k)$

六、离散LTI系统的变换域分析

1.从拉氏变换到z变换

- 对$x(t)$进行理想抽样，则$x_s(t)=x(t)\delta_T(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$
- 对其进行单边拉氏变换，$\int_0^{\infty}x_s(t)e^{-st}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-snT}$
- 令$z=e^{sT}$，$T=1$，则$X(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$，称之为单边$z$变换公式
- 双边z变换公式：$X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

2.双边z变换

- 收敛区的定义
    - z变换的收敛区：对序列$x(n)$，使得$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$收敛的$z$值的集合
    - 收敛的充分条件：绝对可和，即$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}<\infty$
- 判别方法
    - 比值判别法：$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\rho<1$时收敛，$>1$时发散，$=1$时不能确定
    - 根式判别法：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho<1$时收敛，$>1$时发散，$=1$时不能确定
- 不同序列的收敛区
    - 有限长序列
        - 除了$n_1\leq 0$时$z=\infty$和$n_2\geq 0$时$z=0$外，所有z值均收敛
        - 0和∞处需要另行判断
    - 右边序列
        - $n=\geq n_1$时$x(n)=x(n)$，否则$x(n)=0$

3.z变换表

函数	变换
$\delta(k)$	1
$u(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$v^k u(k)$	$\frac{z}{z-v}$
$v^{k-1}u(k-1)$	$\frac{1}{z-1}$
$e^{\lambda kT}u(k)$	$\frac{z}{z-e^{\lambda T}}$
$e^{\lambda(k-1)T}u(k-1)$	$\frac{1}{z-e^{\lambda T}}$
$ku(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$