1.2 说明下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号，求其周期 T。

设ω为复合信号的基波频率，T为复合信号的周期（若周期存在）；ω_i为各余弦分量的角频率，T_i为各余弦分量的周期，故有$T_i = \frac{2\pi}{w_i}$。

（b）$a\sin 4t + b\cos 7t$

由题知：$\omega_1:\omega_2 = 4:7$，故$4T_1 = 7T_2$，即两个余弦分量的周期之间存在最小公倍数，因此有$\mathrm{T} = 4\times\frac{2\pi}{4} = 7\times\frac{2\pi}{7} = 2\pi$，因此该信号为周期信号。

（d）$a\cos\pi t + b\sin 2\pi t$

由题知：$\omega_1:\omega_2 = \pi:2\pi = 1:2$，故$T_1 = 2T_2$，即两个余弦分量的周期之间存在最小公倍数，因此有$\mathrm{T} = 1\times\frac{2\pi}{\pi} = 2\times\frac{2\pi}{2\pi} = 2$，因此该信号为周期信号。

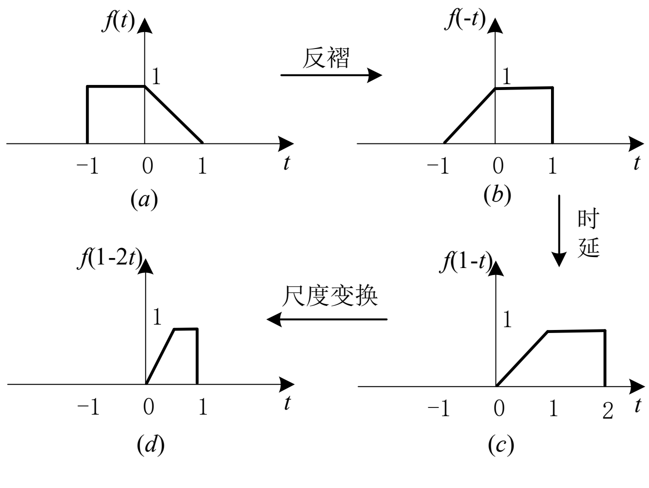
（f）$(a\sin 2t)^2$

使用降幂公式对该信号进行处理，可得到：

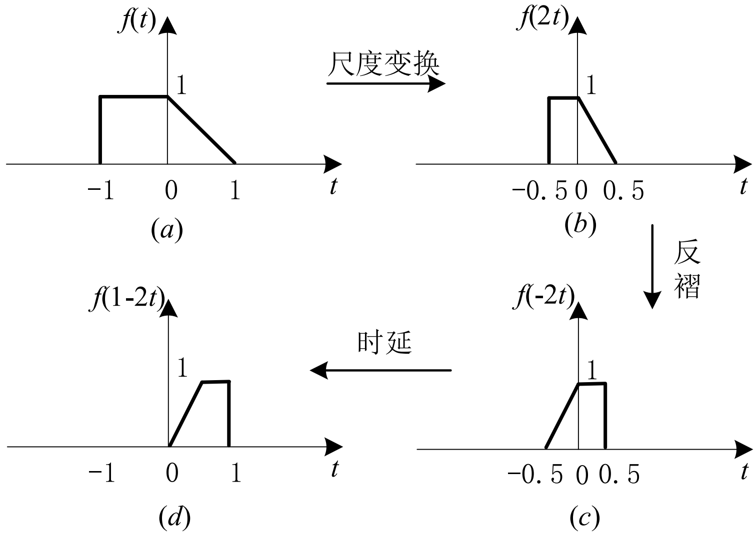
$f(t) = (a\sin 2t)^2 = a^2\times\frac{1-\cos 4t}{2}$，该信号为余弦信号，因此为周期信号，其周期$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

1.7 改变例题 1-2 中信号处理的次序为

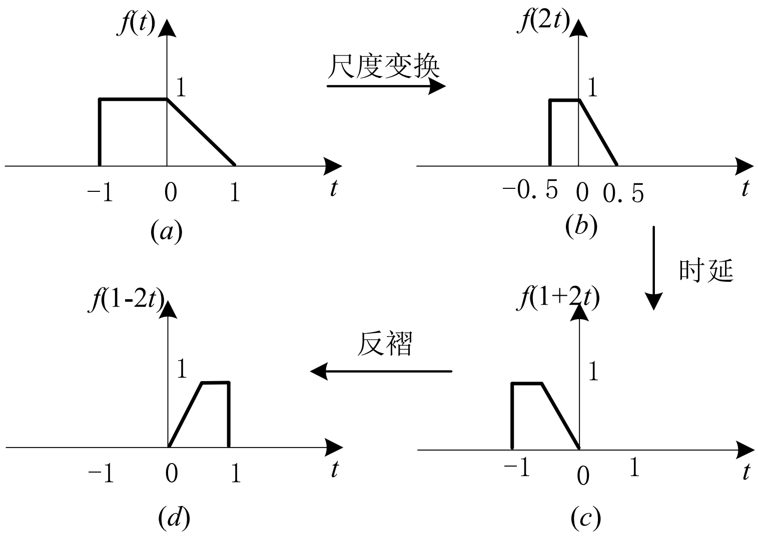
（1）反褶，时延，尺度变换



（2）尺度变换，反褶，时延



（3）尺度变换，时延，反褶



比较:通过上述图像与例题的结果进行对比,可以发现,无论采用何种变换顺序,只要每次变换都针对时间变量 t 进行，都可以得到正确的变换结果。

1.9 证明线性非时变系统有如下特性：若系统在激励$\boldsymbol{e(t)}$作用下响应为$\boldsymbol{r(t)}$，则当激励为 $\boldsymbol{\frac{de(t)}{dt}}$ 时响应必为 $\boldsymbol{\frac{dr(t)}{dt}}$。

提示：
$$\boldsymbol{\frac{df(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t)-f(t-\Delta t)}{\Delta t}}$$

假设系统从激励到响应之间的映射关系为H，即$r(t)=H[e(t)]$，故有：

$$H\left(\frac{de(t)}{dt}\right)=H(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t})$$

由于关系 H 与 Δ t 无关，且系统为线性非时变系统，因此上式可化为：

$$H\left(\frac{de(t)}{dt}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{H[e(t)]-H[e(t-\Delta t)]}{\Delta t}$$

所以：

$$H\left(\frac{de(t)}{dt}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t)-r(t-\Delta t)}{\Delta t}=\frac{dr(t)}{dt}$$

因此得证：当激励为 $\frac{de(t)}{dt}$ 时系统响应为 $\frac{dr(t)}{dt}$。

补充作业 1——计算：

（1）$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt}$

当$t\neq 0$时，$\delta(t)=0$，根据单位冲激函数的抽样性质得：原式$=f(t_0)$

（2）$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,u(t-2t_0)dt}$

当$t\neq t_0$时，$\delta(t-t_0)=0$，故同（1）可知，原式 $=u(t_0-2t_0)=u(-t_0)$

（3）$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty}(t+\sin t)\,\delta(t-\frac{\pi}{6})dt}$

当$t\neq\frac{\pi}{6}$时，$\delta\left(t-\frac{\pi}{6}\right)=0$，故同（1）可知， 原式$=\left(\frac{\pi}{6}+sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

补充作业 2——判断下列系统是否为线性的、时不变的、因果的：

首先给出各种性质的判别原则如下：

线性性：若$e_1(t)\to r_1(t)$，$e_2(t)\to r_2(t)$时，满足$ae_1(t)+be_2(t)\to ar_1(t)+br_2(t)$，那么该系统是线性的。

时变性：若$e(t)\to r(t)$时，满足$e(t-t_0)\to r(t-t_0)$，那么该系统是时不变的。

因果性：若$e(t_1) \to r(t_2)$时，$t_2 \geq t_1$成立，那么该系统是因果的。

（1）$\boldsymbol{r(t) = \frac{de(t)}{dt}}$

线性性：设有激励与响应$e_1(t) \to r_1(t) = \frac{de_1(t)}{dt}$，$e_2(t) \to r_2(t) = \frac{de_2(t)}{dt}$，则令激励$e(t) = ae_1(t) + be_2(t)$，其响应$r(t) = \frac{d[ae_1(t)+be_2(t)]}{dt} = a\frac{de_1(t)}{dt} + b\frac{de_2(t)}{dt} = ar_1(t) + br_2(t)$，故该系统是线性的。

时变性：当激励为$e(t)$时，系统响应$r(t) = \frac{de(t)}{dt}$，故当激励为$e(t-t_0)$时，其系统响应$r_1(t) = \frac{de(t-t_0)}{dt} = \frac{de(t-t_0)}{d(t-t_0)} = r(t-t_0)$，故该系统是时不变的。

因果性：由题知：$r(t) = \frac{de(t)}{dt}$，根据因果性的判断准则可知$t_2 \geq t_1$成立，故该系统是因果的。

（2）$\boldsymbol{r(t) = sin[e(t)]u(t)}$

线性性：设有激励与响应$e_1(t) \to r_1(t) = sin[e_1(t)]\,u(t)$，$e_2(t) \to r_2(t) = sin[e_1(t)]\,u(t)$，则令激励$e(t) = ae_1(t) + be_2(t)$，其响应$r(t) = sin[ae_1(t) + be_2(t)]u(t) \neq ar_1(t) + br_2(t)$，因此该系统是非线性的。

时变性：当激励为$e(t)$时，系统响应$r(t) = sin[e(t)]u(t)$，故当激励为$e(t-t_0)$时，其系统响应$r_1(t) = sin[e(t-t_0)]u(t)$，而$r(t-t_0) = sin[e(t-t_0)]u(t-t_0)$，因此$r_1(t) \neq r(t-t_0)$，故该系统是时变的。

因果性：由题知：$r(t) = sin[e(t)]u(t)$，根据因果性的判断准则可知$t_2 \geq t_1$成立，故该系统是因果的。

（3）$\boldsymbol{r(t) = e(2t)}$

线性性：设有激励与响应$e_1(t) \to r_1(t) = e_1(2t)$，$e_2(t) \to r_2(t) = e_2(2t)$，则令激励$e(t) = ae_1(t) + be_2(t)$，其系统响应$r(t) = e(2t) = ae_1(2t) + be_2(2t) = ar_1(t) + br_2(t)$，故该系统是线性的。

时变性：当激励为$e(t)$时，其系统响应$r(t) = e(2t)$，即将输入$e(t)$的尺度压缩两倍；因此对于激励$e(t-t_0)$，由于尺度变换仅针对时间变量 t，故其系统响应

$r_1(t) = e(2t - t_0)$，而$r(t - t_0) = e[2(t - t_0)]$，故有$r_1(t) \neq r(t - t_0)$，因此该系统是时变的。

因果性：由题知： $r(t) = e(2t)$，当$t > 0$时，$2t > t$，即$t_1 = 2t$，$t_2 = t$，故根据因果性的判断准则可知$t_2 \geq t_1$不成立，故该系统是非因果的。

（4）$\boldsymbol{r(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau) d\tau}$

线性性：设有激励与响应$e_1(t) \to r_1(t) = \int_{-\infty}^{t} e_1(\tau) d\tau$，$e_2(t) \to r_2(t) = \int_{-\infty}^{t} e_2(\tau) d\tau$，则令激励$e(t) = ae_1(t) + be_2(t)$，其系统响应$r(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} ae_1(\tau) + be_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} ae_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{t} be_2(\tau) d\tau = ar_1(t) + br_2(t)$，所以该系统是线性的。

时变性：当激励为$e(t)$时，其系统响应$r(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau) d\tau$，对于激励$e(t - t_0)$，其系统响应$r_1(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau - t_0) d\tau$，令$x = \tau - t_0$，故$r_1(t) = \int_{-\infty}^{t} e(x) d(x + t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} e(x) dx = \int_{-\infty}^{t-t_0} e(\tau) d\tau = r(t - t_0)$，故该系统是时不变的。

此处会有同学思考：为什么计算激励为$e(t - t_0)$时的系统响应，不直接使用$t - t_0$替换积分上限，也就是$\int_{-\infty}^{t-t_0} e(\tau) d\tau$，所得结果与$r(t - t_0)$相同，也能证明这个系统是时不变的。事实上，这种做法是错误的，当我们讨论一个系统的时变性时，是将激励进行延时处理后，比较它的系统响应与直接将原响应延时相同时间的结果是否相等。在本系统中，激励是$e(t)$，系统响应是$\int_{-\infty}^{t} e(\tau) d\tau$，因此在计算$e(t - t_0)$的系统响应时，应该将被积信号修改为$e(\tau - t_0)$，也意味着是激励发生延时；而不能直接修改积分上限为$t - t_0$。

在本题中，由于系统的特殊性，所以使用错误的方法也得到了正确的结果，下面将举个反例证明直接修改积分上限的做法是错误的：讨论系统$r(t) = \int_{-\infty}^{t} e(2\tau) d\tau$的时变性。

- 采用直接替换积分上限的方法，必然得到该系统是时不变的。
- 采用修改被积信号的方法：

当激励为$e(t)$时，其系统响应$r(t) = \int_{-\infty}^{t} e(2\tau) d\tau$，对于激励$e(t - t_0)$，其系

统响应$r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(2\tau-t_0)d\tau$（由于被积信号就是将激励压缩 2 倍，因此压缩操作仅针对变量τ，故这里是$e(2\tau-t_0)$，而不是$e[2(\tau-t_0)]$），故可令$2x=2\tau-t_0$，则有：

$$r_1(t)=\int_{-\infty}^{t}e(2x)d(x+\frac{t_0}{2})=\int_{-\infty}^{t-\frac{t_0}{2}}e(2x)dx\neq r(t-t_0)$$

故该系统是时变的。

上述两种方法得到了不同的结果，从系统时变性的判断准则可以知道：第二种方法是正确的，因为是对激励做延时，而不是对响应做延时。

因果性：由题知： $r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau$，根据因果性的判断准则可知 $t_2\geq t_1$成立，故该系统是因果的。