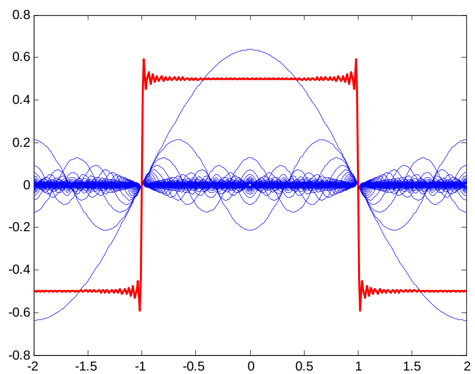
信号与系统

第15讲 离散系统的频响与模拟

郭红星
华中科技大学计算机学院



上次课内容回顾

- 反z变换的求解
- 用z变换法求解差分方程，分析系统响应
- 系统函数与系统稳定性

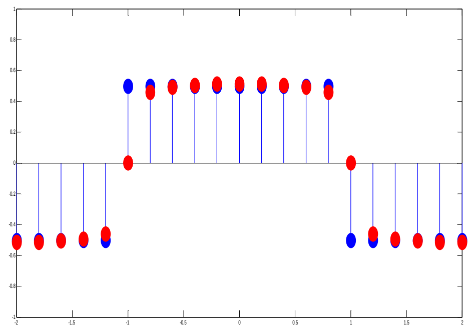
本讲内容

- 离散时间傅里叶变换(DTFT)
- 离散时间系统的频率响应
- 离散系统的模拟(数字滤波器的结构)
  - 非递归式数字滤波器
  - 递归式数字滤波器(直接I / II型、级联型、并联型)

- 学习目标
  - 从连续信号离散化角度理解DTFT及离散信号的频谱特点
  - 掌握通过系统函数勾画频响曲线的几何方法
  - 熟悉离散系统模拟的几种结构，了解其优化途径

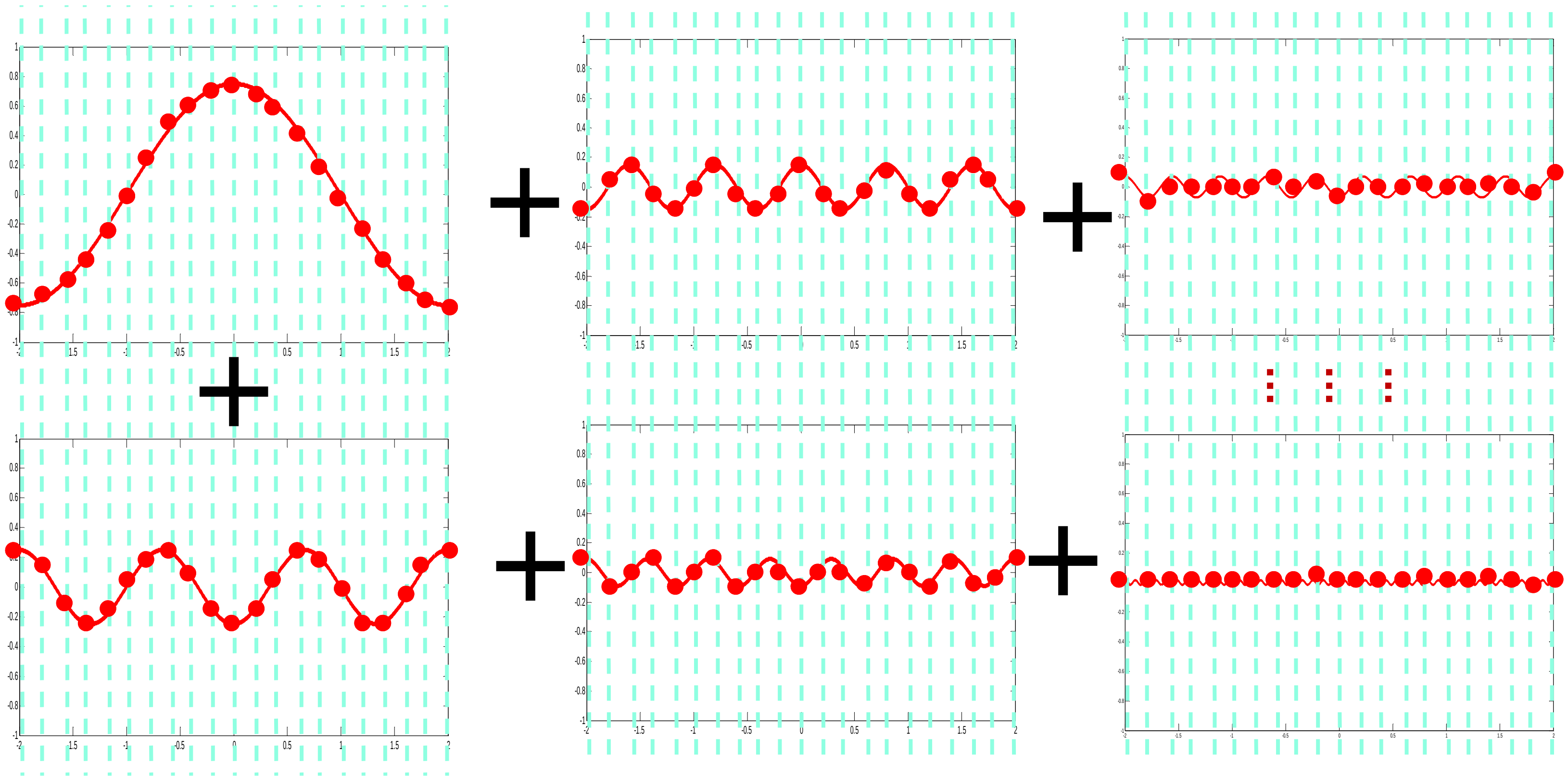
7.5 离散时间傅里叶变换

信号的频域分析:从连续到离散



连续时间信号$x(t)$ ⟶ 离散时间信号$x(nT_s)$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \xrightarrow[\text{采样}]{t=nT_s} x(nT_s)=?$$



信号的频域分析：从连续到离散

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt \Leftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\downarrow\sum$$

$$t\to nT \quad dt\to T$$

$$x(t)\to x(nT)\to x(n)$$

$$e^{j\Omega t}\to e^{j\Omega nT}\to e^{j\omega n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\downarrow\int_{-\pi}^{\pi}$$

$$\because \omega=\Omega T,$$

$$\therefore d\Omega\to\frac{1}{T}d\omega$$

$$X(j\Omega)\to T\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-j\omega n}\to T\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=TX(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n} \Leftrightarrow x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶正变换

两种变换中的Ω与ω的含义？

离散时间傅里叶反变换

例题1及解答

若$x(n)=u(n)-u(n-5)$,求此序列的傅里叶变换。

解：$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\left(\frac{e^{j\frac{5}{2}\omega}-e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\right)$$

$$=e^{-j2\omega}\left[\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right]=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

其中，幅度谱为：

$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right|$$

而相位谱为：

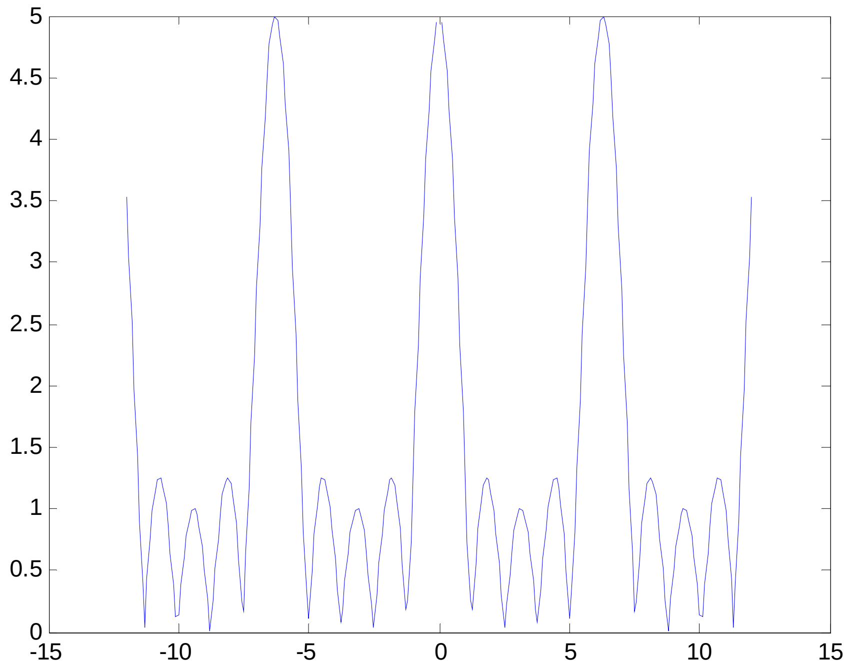
$$\varphi(\omega)=-2\omega+\arg\left[\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right]$$

$0<\omega\leq\pi$

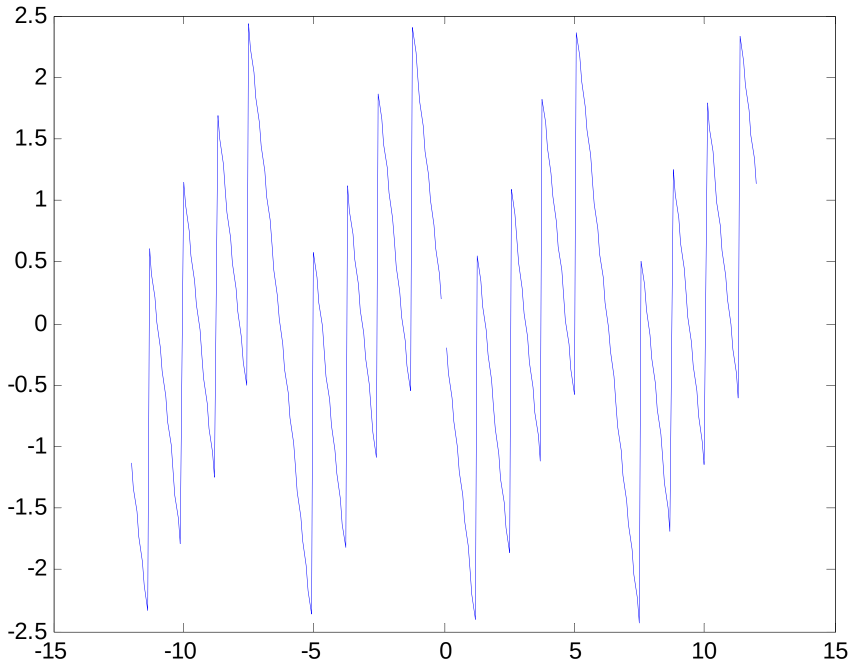
Matlab program

```
k=0;
for w=-12:0.1:12 %角频率
    k=k+1;
    wc(k)=w;%The value of the kth w
    X(k)=exp(-j*2*w)*sin(2.5*w)/sin(0.5*w);
end
%the complex modulus (magnitude)
XA=abs(X);
plot(wc,XA);
%phase angles, in radians
XP=angle(X);
figure,plot(wc,XP);
```

例题1及解答



图：信号$x(n)$的幅度谱图



图：信号$x(n)$的相位谱图

与矩形方波的谱的联系？

思考：为何周期为2π？

7.6 离散系统的频响特性

离散时间系统的频率响应

- **复正弦序列作用下系统的响应**

$$x(n)=e^{j\omega_1 n} \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y_{zsr}(n)=h(n)*x(n) \quad ?$$

$$y_{zsr}(n)=\boxed{H(e^{j\omega_1})}e^{j\omega_1 n}$$

输入序列

系统功用

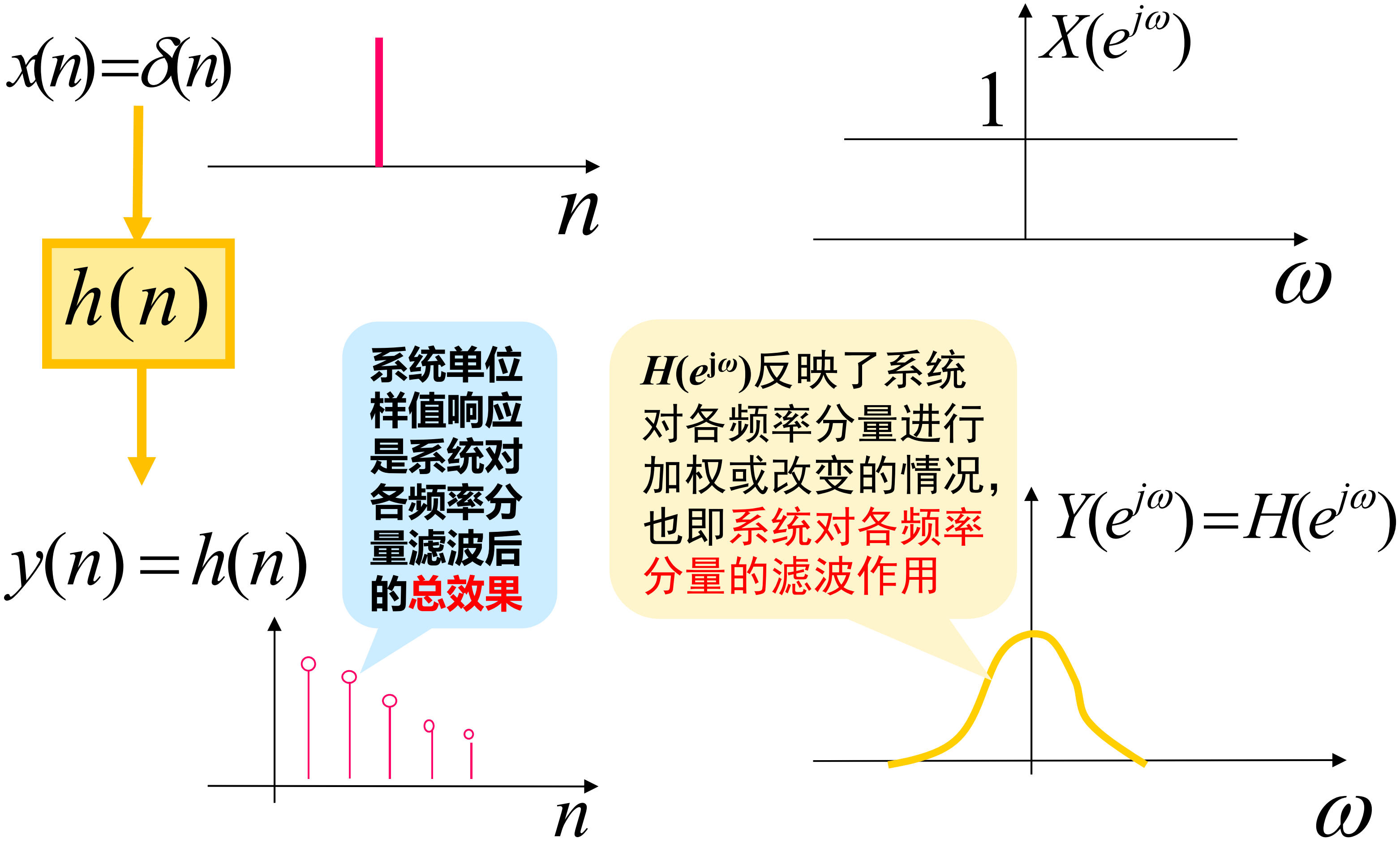
- **离散时间系统频率响应函数即系统单位样值响应的离散时间傅里叶变换**

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

思考：为什么$h(n)$的DTFT就反映了系统的频响特性呢？

频响函数作用的物理解释

- 激励为$\delta(n)$时，其频谱覆盖全部频率分量，且均为单位1



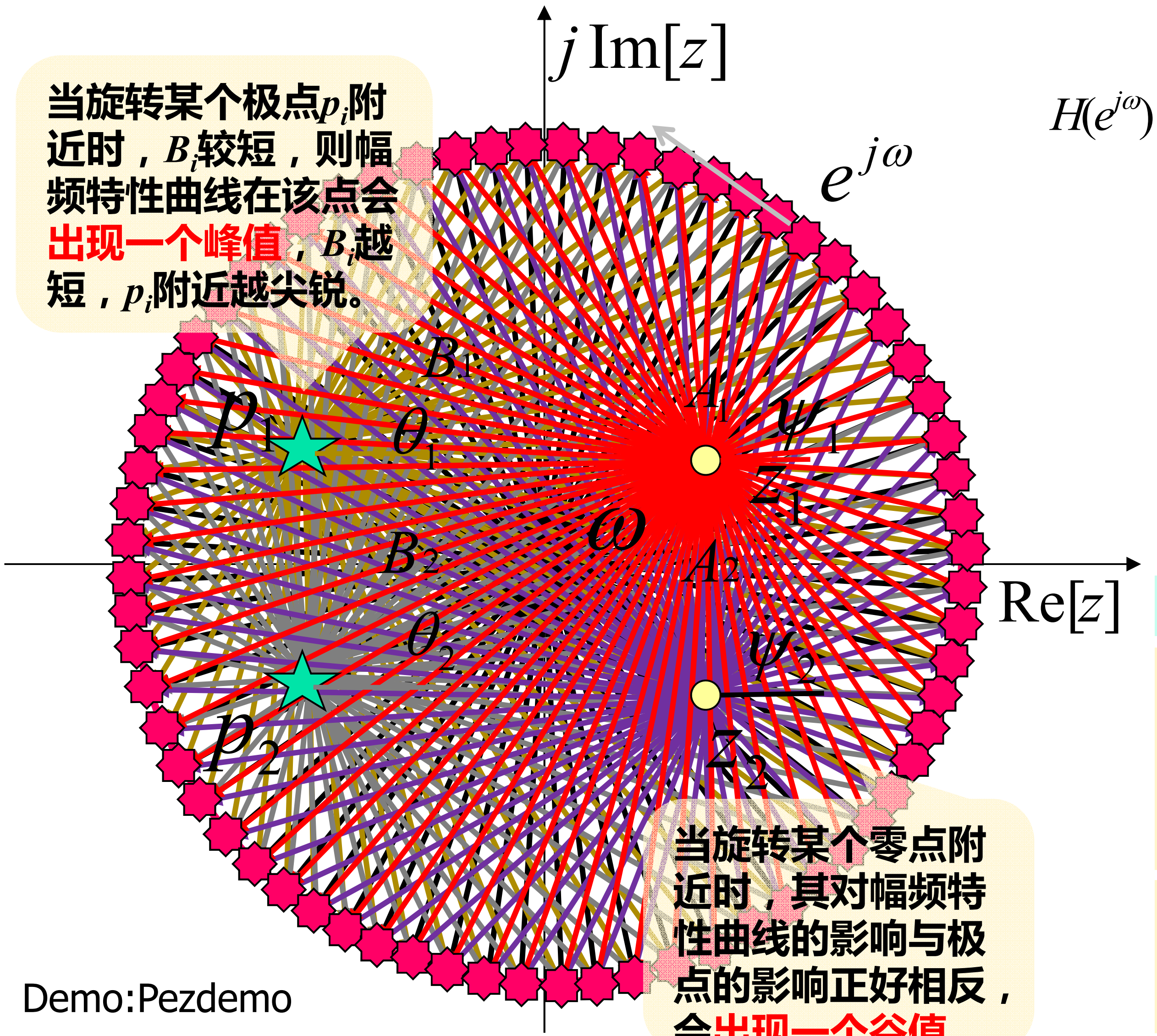
系统频率响应函数的作用分解

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

- 滤波器的幅频特性是$|H(e^{j\omega})|$，且对信号有相移作用$\varphi(\omega)$
- 因为$e^{j\omega}$是周期的，所以$|H(e^{j\omega})|$也是周期的，其周期为重复频率2π

系统的频率响应的几何确定法

当旋转某个极点p_i附近时，B_i较短，则幅频特性曲线在该点会**出现一个峰值**，B_i越短，p_i附近越尖锐。



$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = G\left.\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}\right|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= G\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)} = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$e^{j\omega}-z_r = A_r e^{j\psi_r}$ $e^{j\omega}-p_k = B_k e^{j\theta_k}$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\prod_{r=1}^{M} A_r}{\prod_{k=1}^{N} B_k}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^{M}\psi_r - \sum_{k=1}^{N}\theta_k$$

当旋转某个零点附近时，其对幅频特性曲线的影响与极点的影响正好相反，会**出现一个谷值**

Demo:Pezdemo

例题2及解答

- 已知因果系统的差分方程为：

$$y(n)=x(n)-\cos(\tfrac{2\pi}{N})x(n-1)+2\cos(\tfrac{2\pi}{N})y(n-1)-y(n-2)$$

试求： $(1)\ h(n)=?$　　$(2)\ H(z)=?$

$(3)\ p_k=?\ z_r=?$　　$(4)\ H(e^{j\omega})=?$

解：对差分方程两边同时进行拉氏变换整理得：

$$H(z)=\frac{1-\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}+z^{-2}}=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z+z^{2}}$$

$$=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{(z-e^{j\frac{2\pi}{N}})(z-e^{-j\frac{2\pi}{N}})}$$

例题2解答续

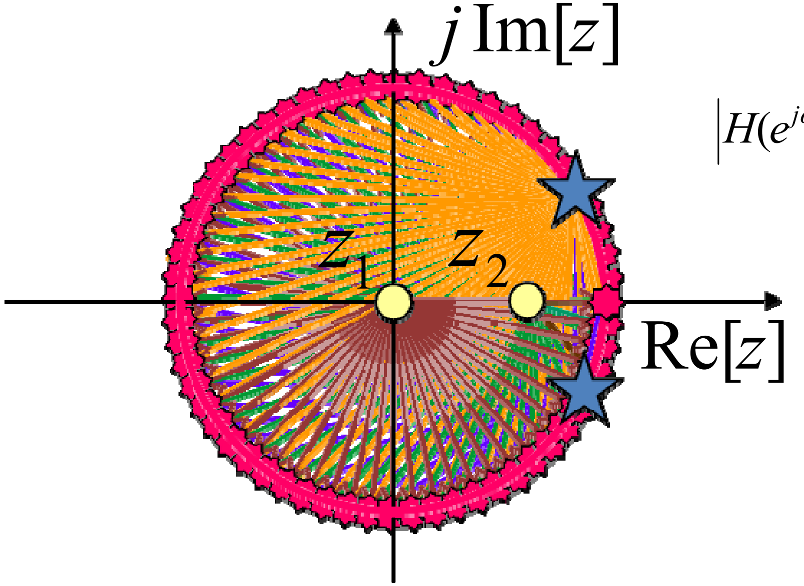
$$H(z)=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{(z-e^{j\frac{2\pi}{N}})(z-e^{-j\frac{2\pi}{N}})}$$

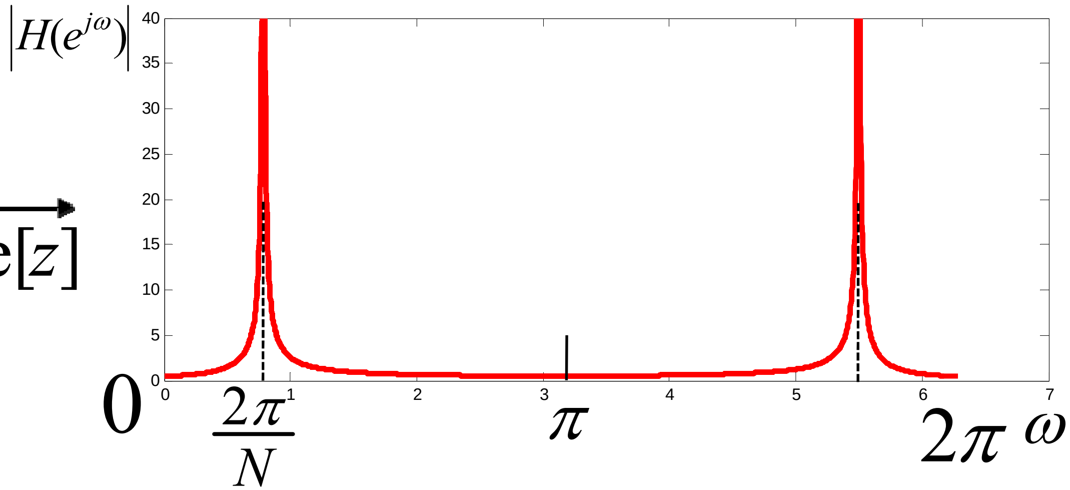
$$z_1=0 \quad z_2=\cos(\frac{2\pi}{N})$$

$$p_1=e^{j\frac{2\pi}{N}} \quad p_2=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$h(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)u(n)$$

这是何种滤波器？



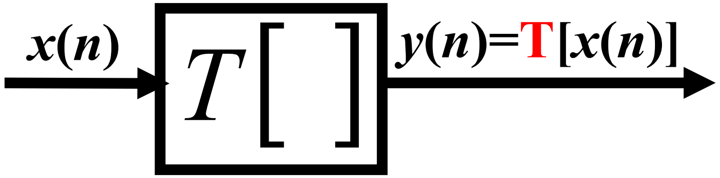


 Demo:dltidemo

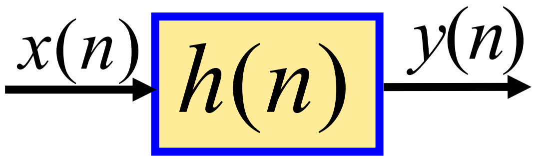
8.1 离散时间系统的模拟

离散时间系统的描述途径(回顾)

定义:一个系统, 若**输入**是**离散**时间信号, **输出**也是**离散**时间信号, 则此系统为离散时间系统

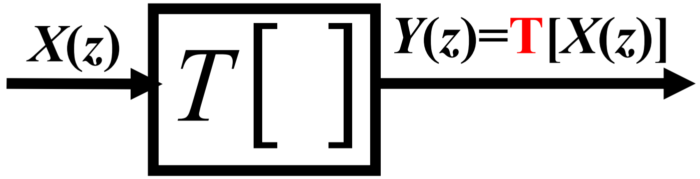


$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

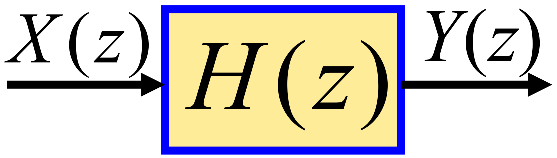


$$y(n) = x(n) * h(n)$$

时域表示



$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^k [Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^r [X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}]$$



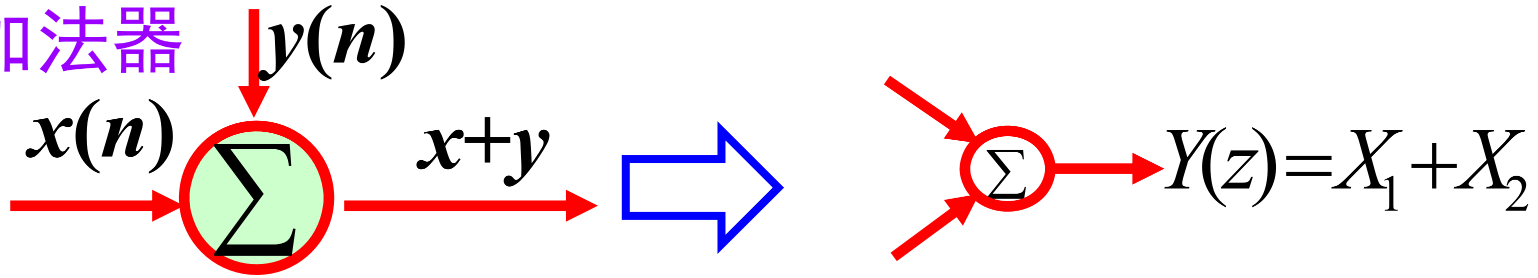
$$Y(z) = X(z) H(z)$$

z变换域表示

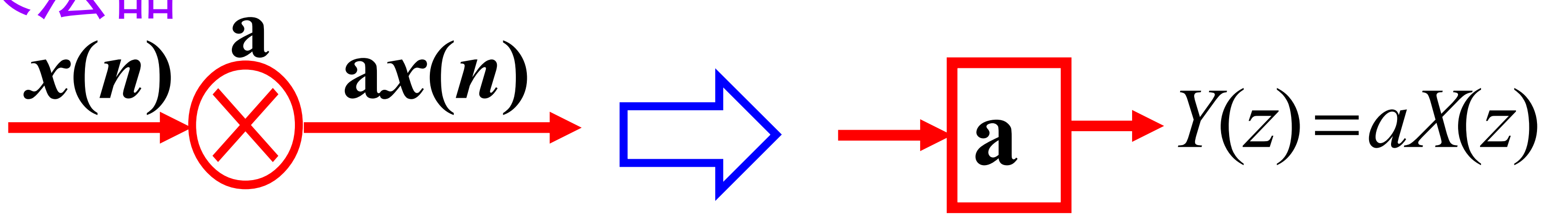
离散时间系统的模拟(实现)

- 基于三种基本部件(**Building blocks**)(P322)

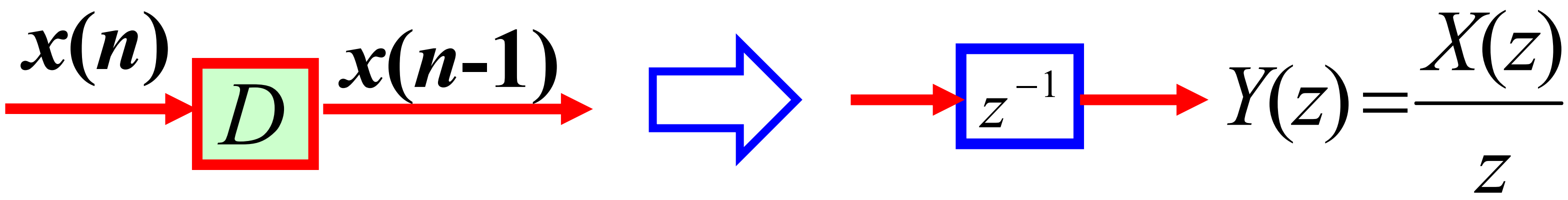
① 加法器



② 乘法器



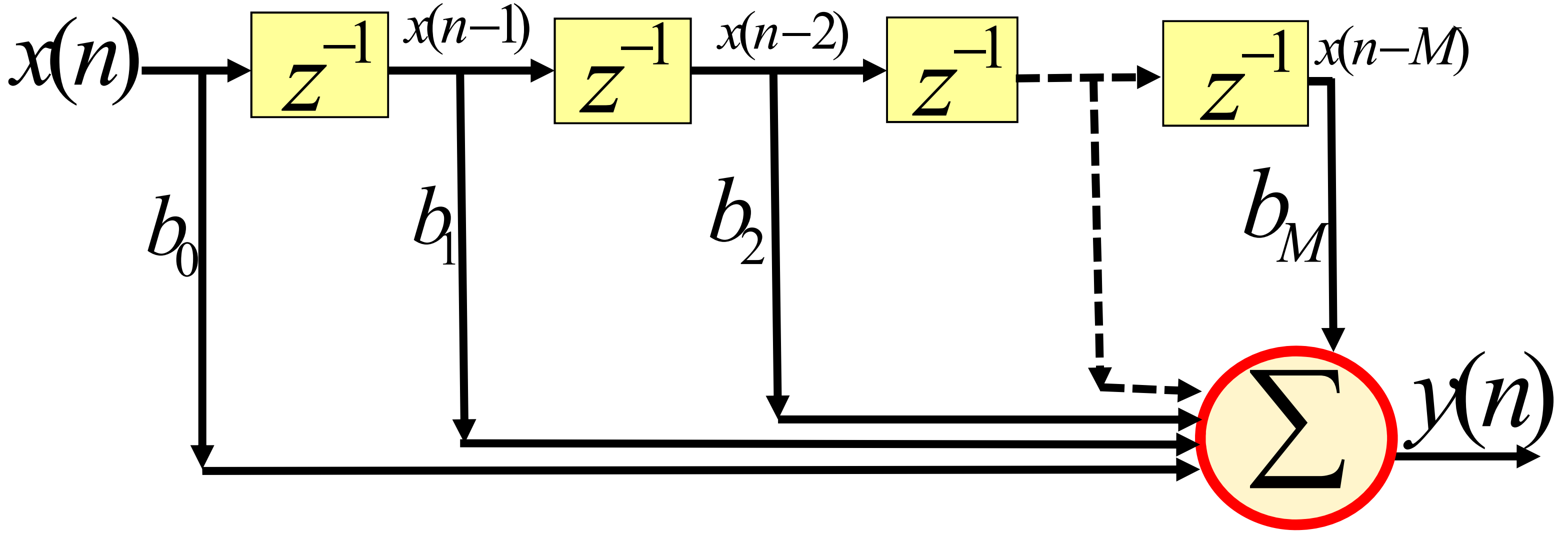
③ 延时器



时域　　　　**z变换域**

非递归式数字滤波器的模拟

$$y(n)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad H(z)=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

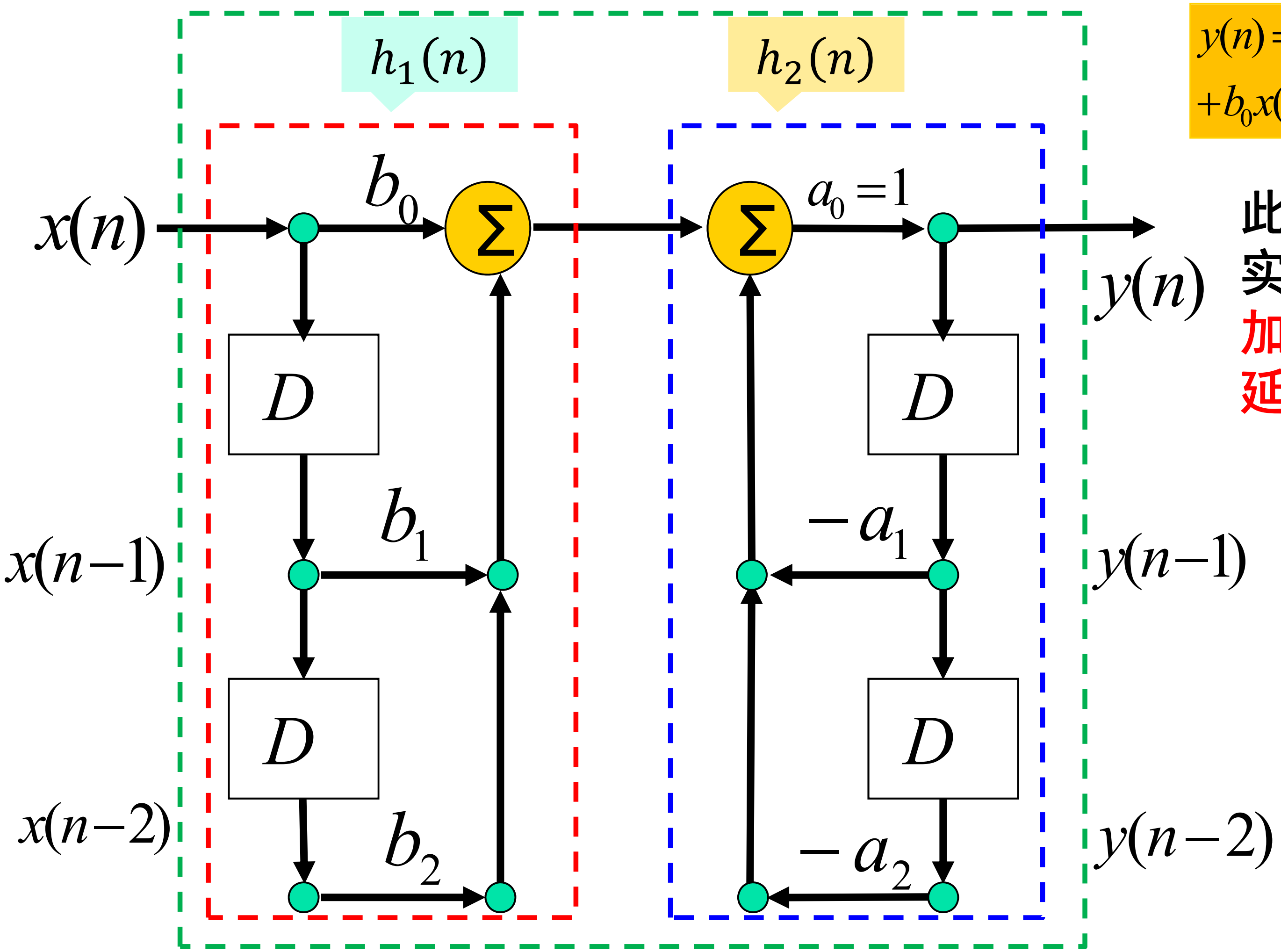


递归式数字滤波器的直接模拟

(a) 直接I 型

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$$

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$



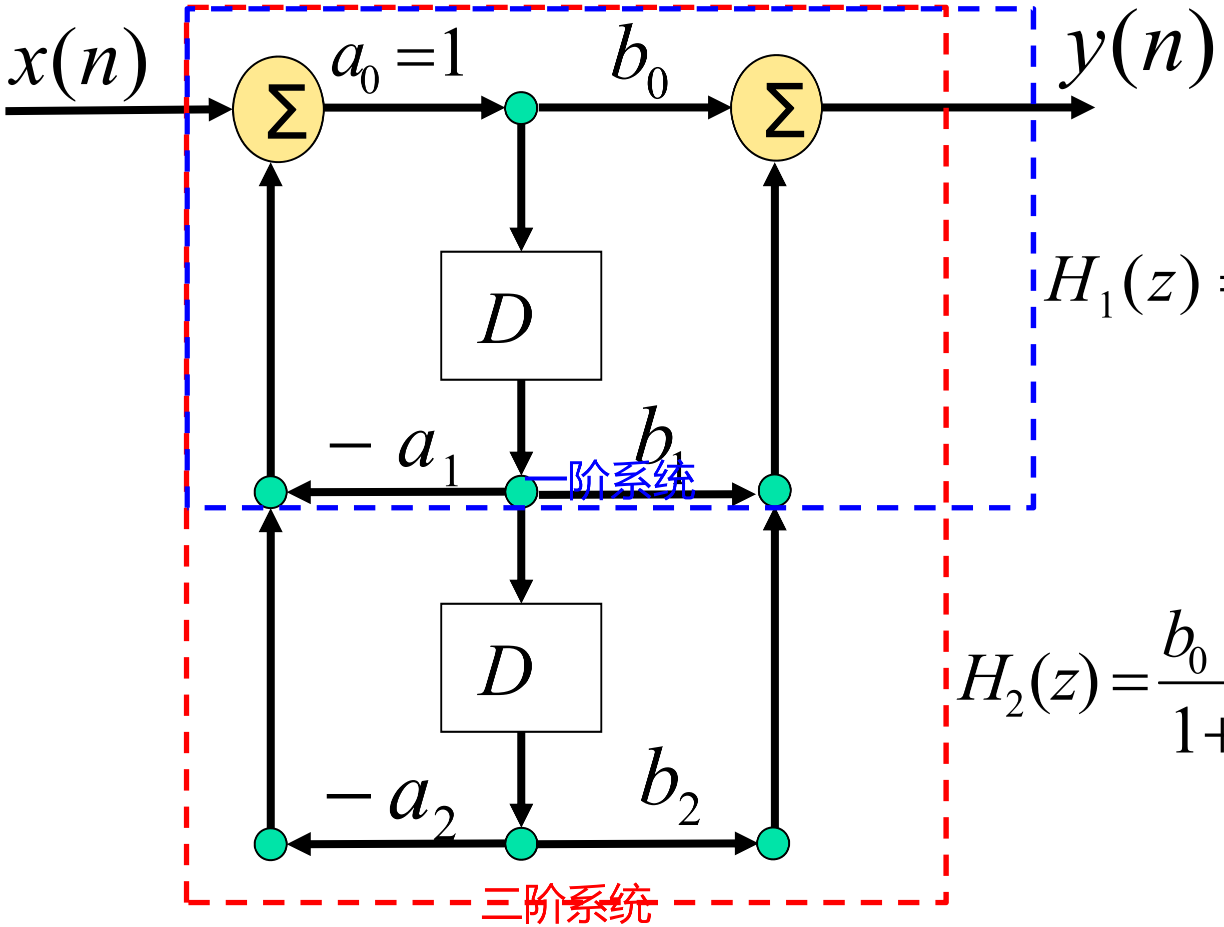
此二阶数字滤波器实现需要用到若干**加法器**、**乘法器**和**延时器**（存储器）

思考：实现所用的基本部件还可以减少吗？

递归式数字滤波器的直接模拟

（b）直接II型（简化直接型）

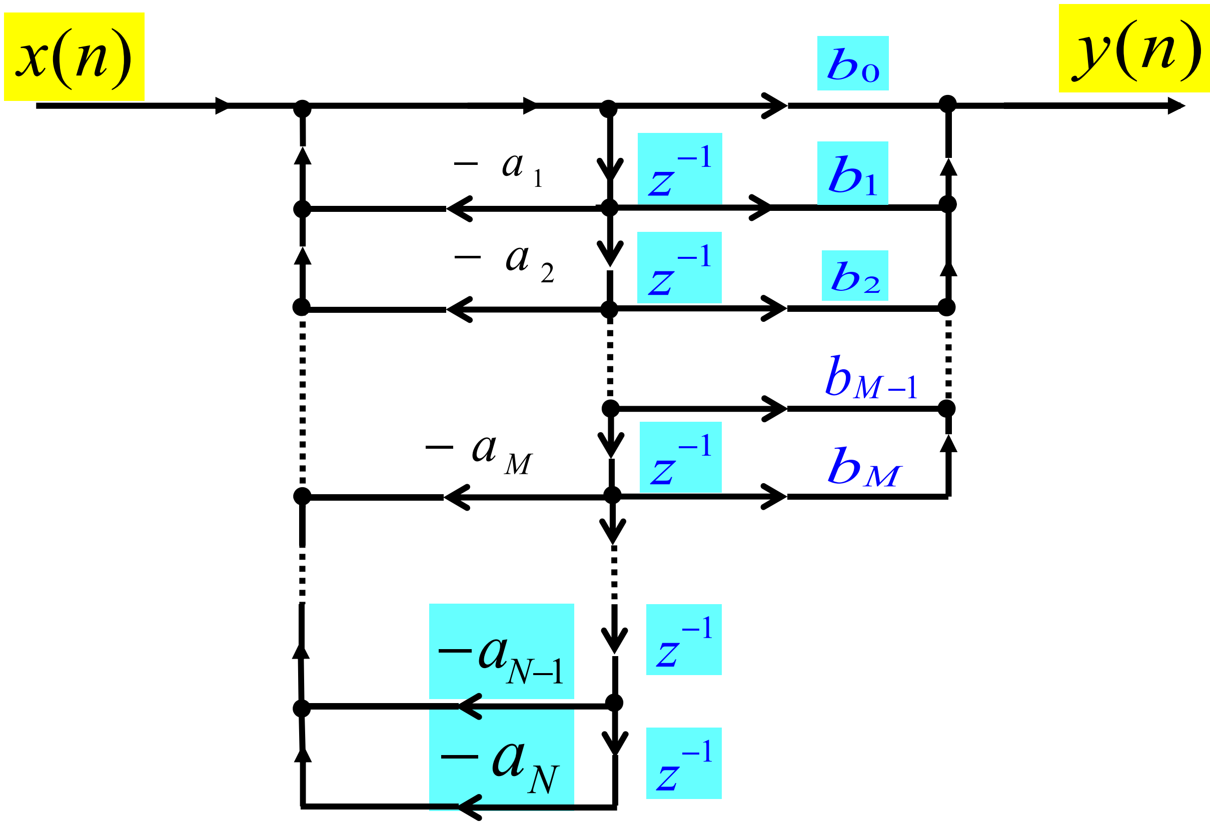
$$y(n)=-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$



$$H_1(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}}$$

$$H_2(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

直接模拟高阶数字滤波器的问题

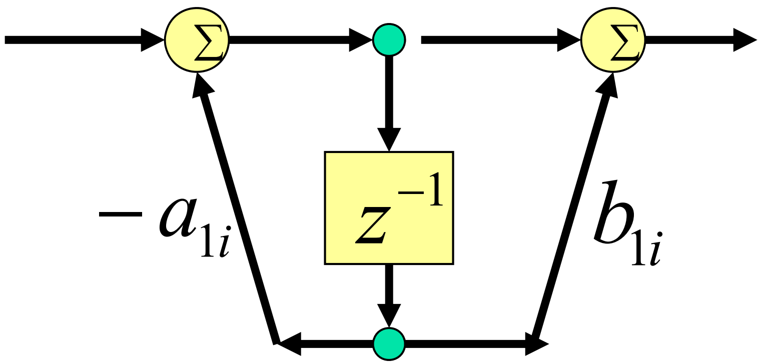


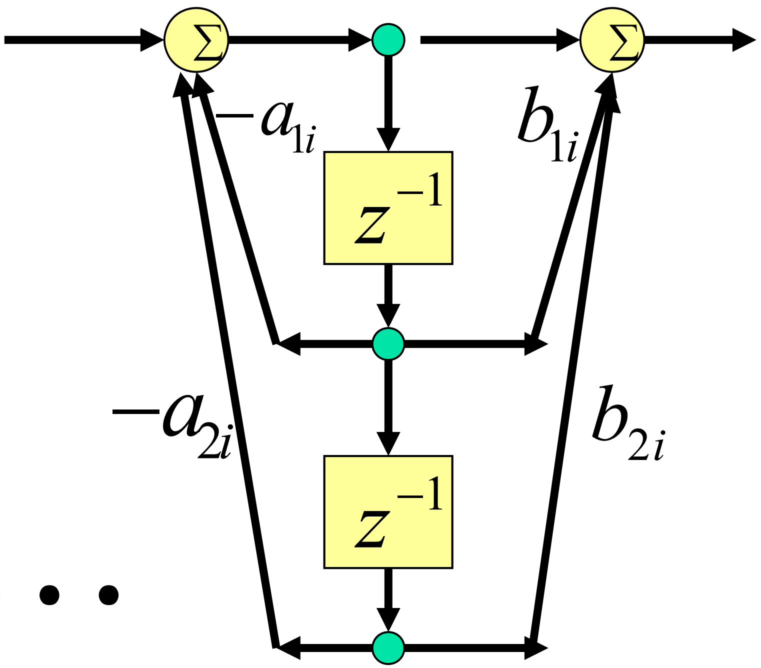
你能想出什么解决方法吗？

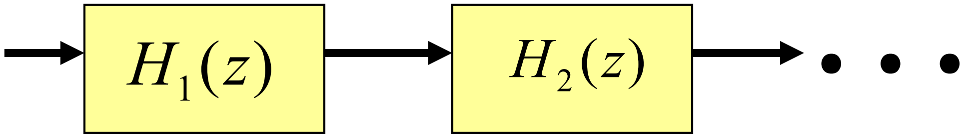
递归式数字滤波器的串联式模拟

(c) 串联形式 $H(z) = A_0 \prod_{i=1}^{k} H_i(z)$

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1}}{1 + a_{1i} z^{-1}} \qquad H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}{1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2}}$$





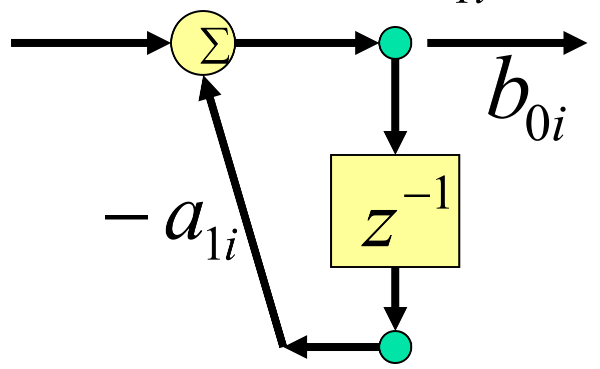


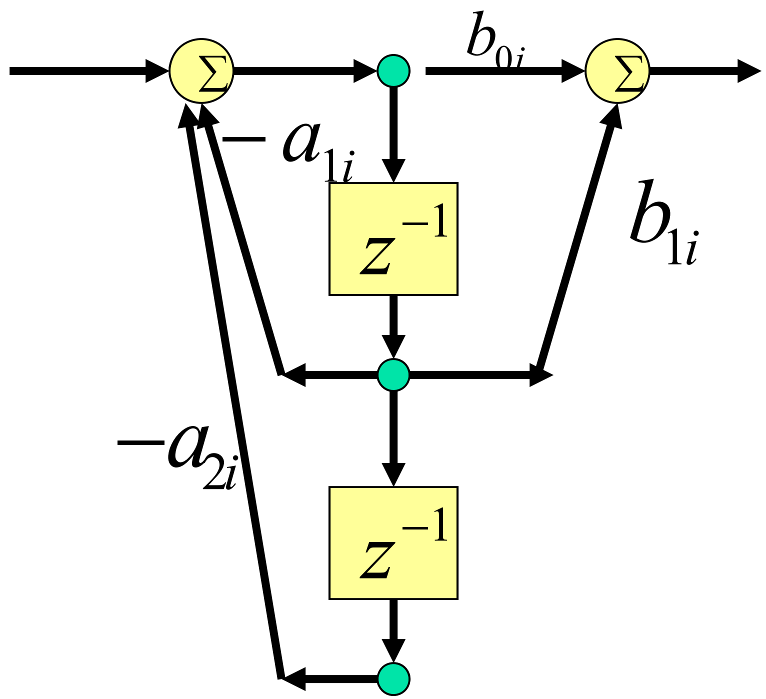
递归式数字滤波器的并联式模拟

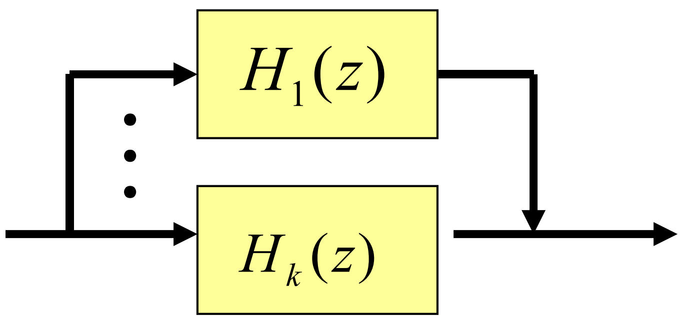
(d) 并联形式 $H(z)=C+\sum_{i=1}^{k}H_i(z)$

$$H_i(z)=\frac{b_{0i}}{1+a_{1i}z^{-1}}$$

$$H_i(z)=\frac{b_{0i}+b_{1i}z^{-1}}{1+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}$$







例题3及解答

画出如下系统函数所表示系统的模拟框图，建立串联、并联和级联形式的结构图并进行分析

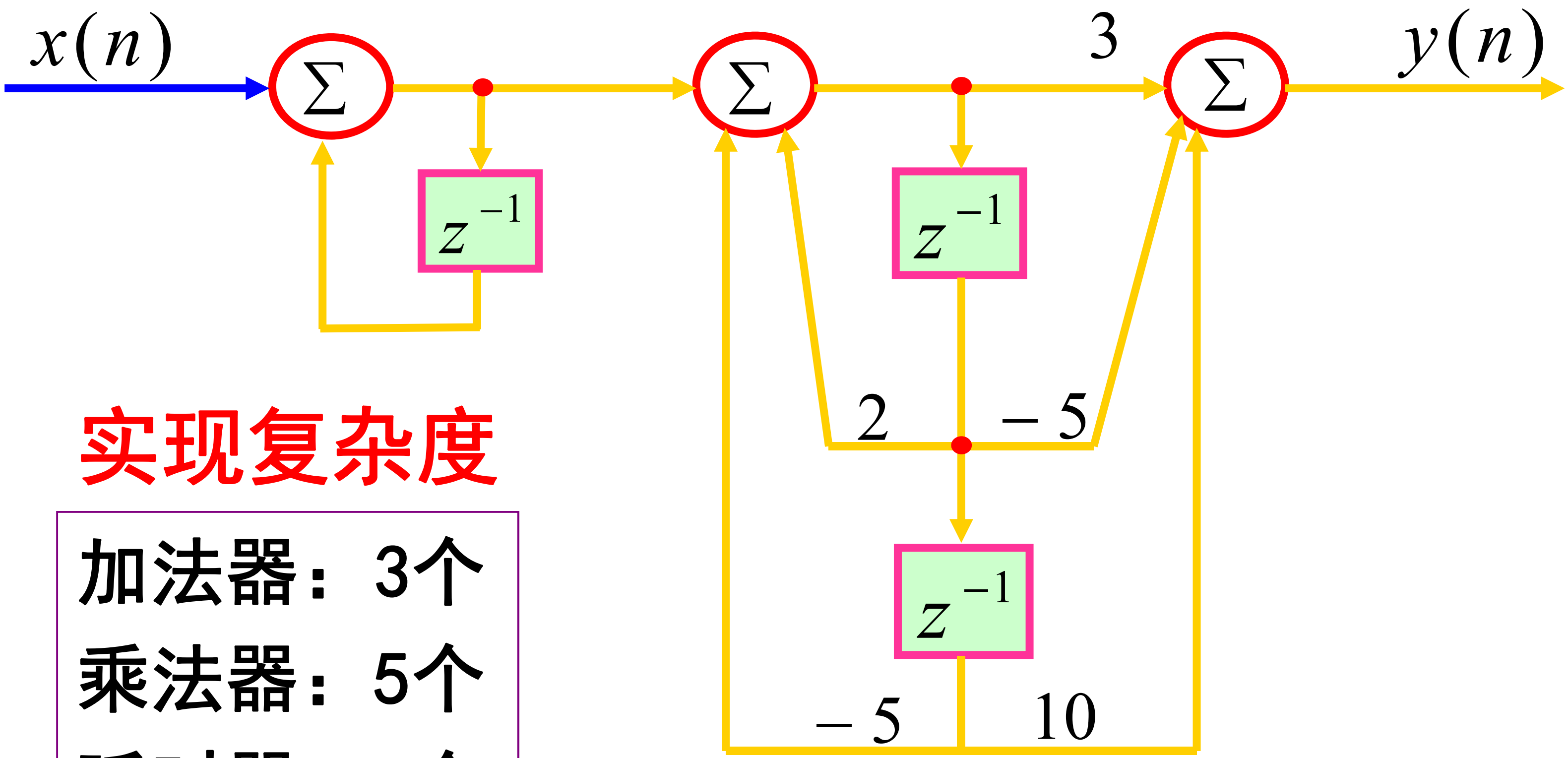
$$H(z)=\frac{3z^3-5z^2+10z}{z^3-3z^2+7z-5}$$

解：

$$H(z)=\frac{z(3z^2-5z+10)}{(z-1)(z^2-2z-5)}=\frac{1}{1-z^{-1}}\frac{3-5z^{-1}+10z^{-2}}{1-2z^{-1}+5z^{-2}}$$

例题3解答

$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\frac{3-5z^{-1}+10z^{-2}}{1-2z^{-1}+5z^{-2}}=\frac{y(z)}{x(z)}$$



实现复杂度

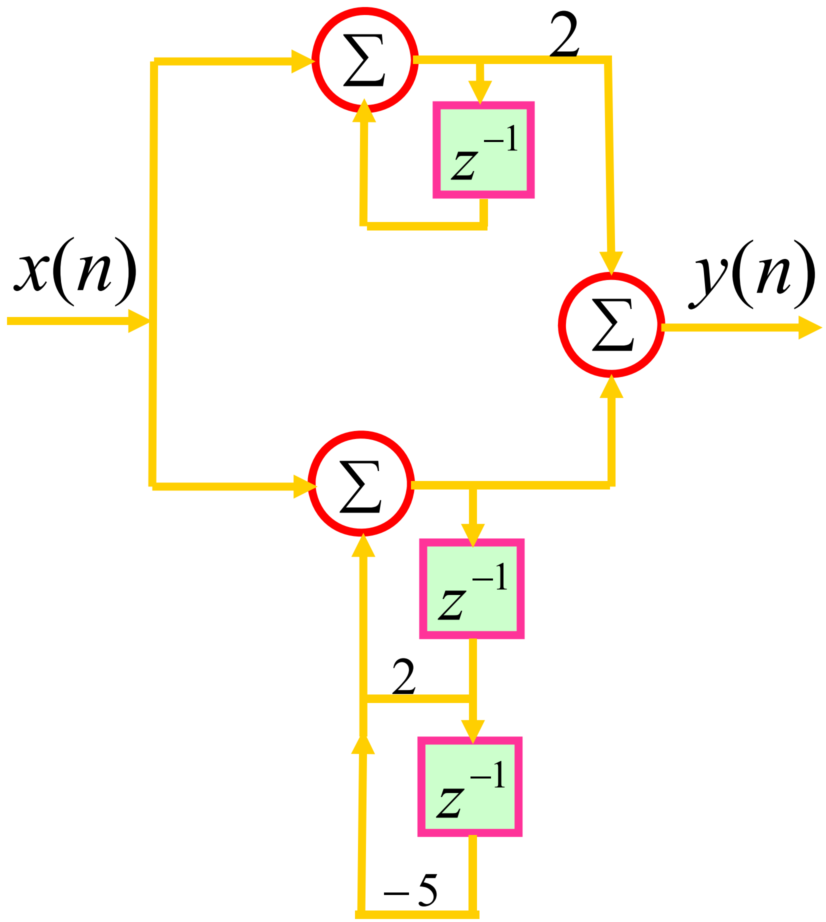
加法器：3个
乘法器：5个
延时器：3个

串联方式的结构图

例题3解答

$$H(z)=\frac{2z}{z-1}+\frac{z^2}{z^2-2z+5}$$

$$=\frac{2}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}+5z^{-2}}$$



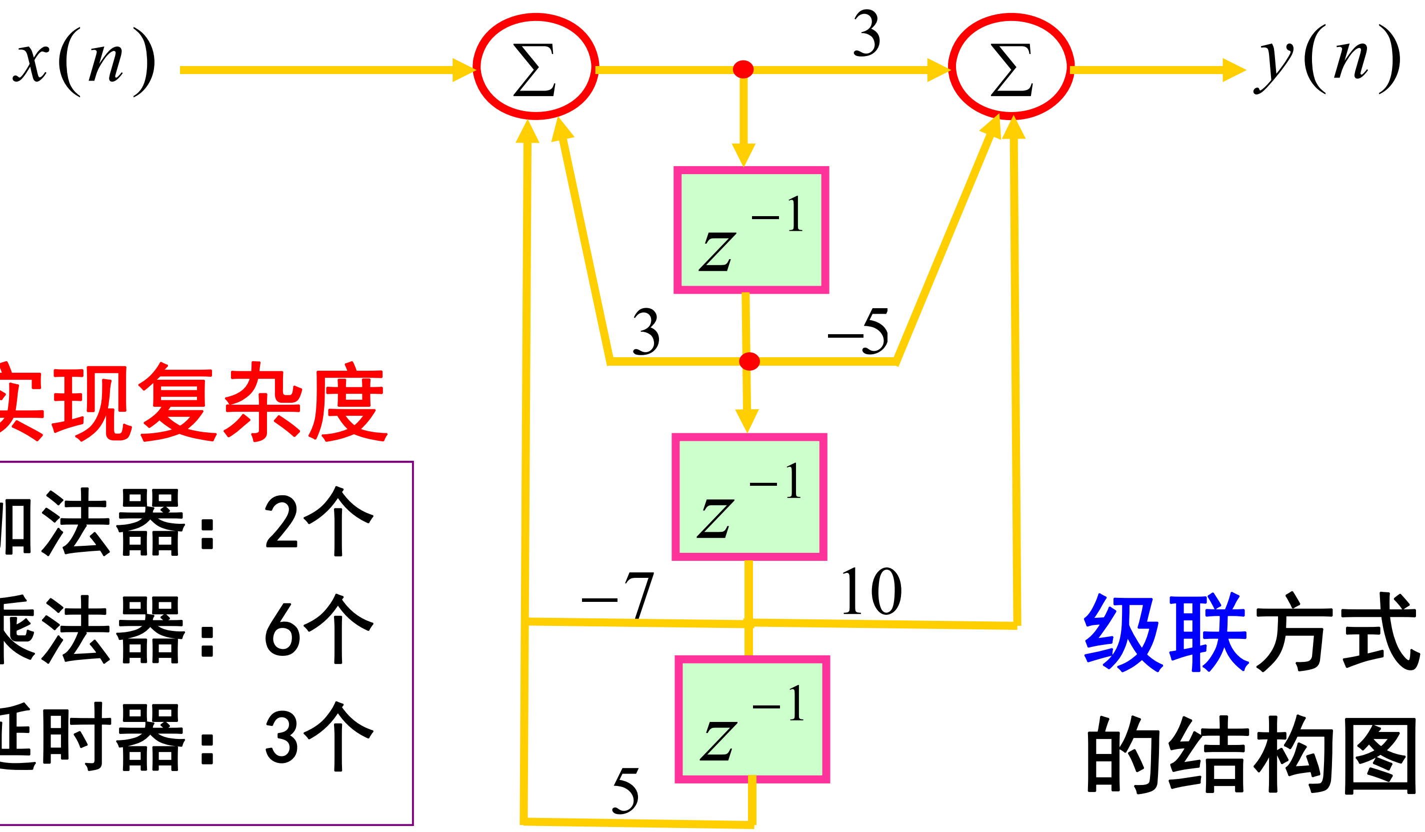
并联方式的结构图

实现复杂度

加法器：3个
乘法器：3个
延时器：3个

例题3解答

$$H(z)=\frac{3-5z^{-1}+10z^{-2}}{1-3z^{-1}+7z^{-2}-5z^{-3}}$$



实现复杂度

加法器：2个
乘法器：6个
延时器：3个

级联方式的结构图

三种模拟方式的性能分析

- **串联方式**

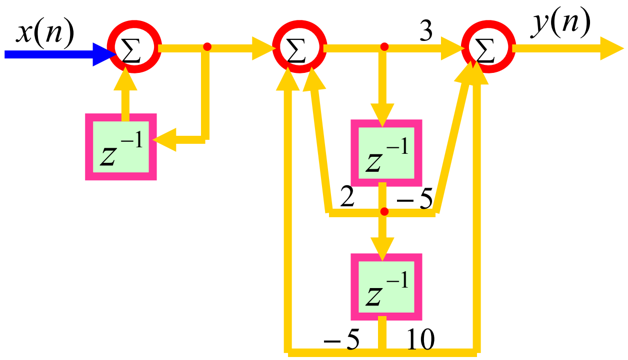
加法器：3个
乘法器：5个
延时器：3个

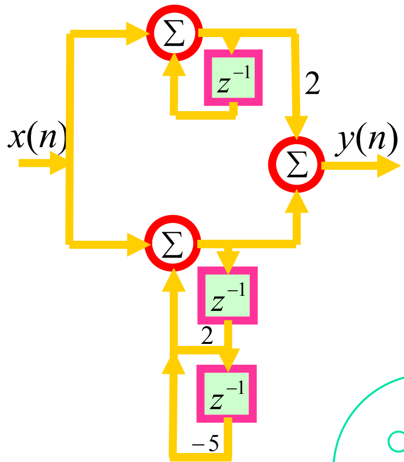
- **并联方式**

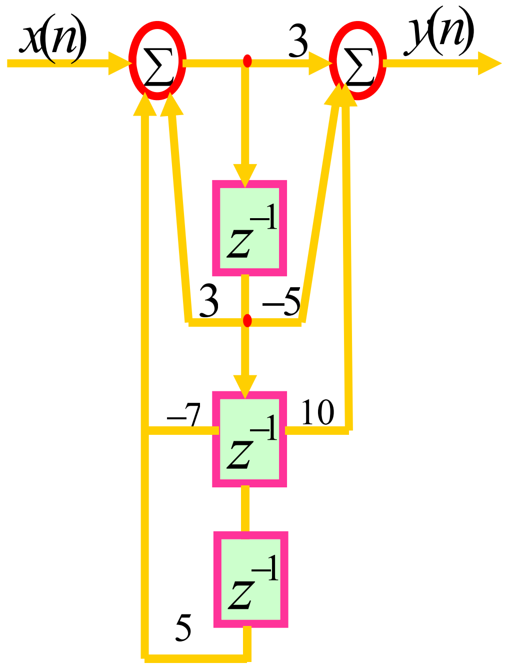
加法器：3个
乘法器：3个
延时器：3个

- **级联方式**

加法器：2个
乘法器：6个
延时器：3个







小结

①离散时间傅里叶变换是CTFT的抽样版

②根据离散时间傅里叶变换可研究离散系统的频率响应特性

③系统具有多种描述途径，可以相互转换

④可以基于B^3对系统进行模拟

⑤系统实现有多种途径，可以选择优化

课外作业

阅读：8. 7—8. 9节

作业：8.19(1)小题、8.23(1)(3)两小题

- **每个星期一23:59前上传上星期的作业**
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如张三（学号U2019148xx）第一周作业第一题图片名为： U2019148xx U2019148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。

附录：由z变换导出DTFT

根据$s \to z$的映射关系，当σ＝0时，$s = j\Omega$,

所以$z = e^{sT} = e^{j\Omega T} = e^{j\omega}$, 其中：

$\omega = \Omega T$

归一频率　实际频率　采样周期

■即自变量沿着$|z|=1$单位圆周变化，则：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})}$$

离散时间傅里叶正变换

z变换的退化（特殊）情形，具有同样的性质

序列的离散时间傅里叶反变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(z)z^{n-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}e^{-j\omega}d(e^{j\omega})$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶反变换

思考:反变换的物理意义是什么？