图算法篇：所有点对最短路径问题

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

提纲

问题定义

算法思想

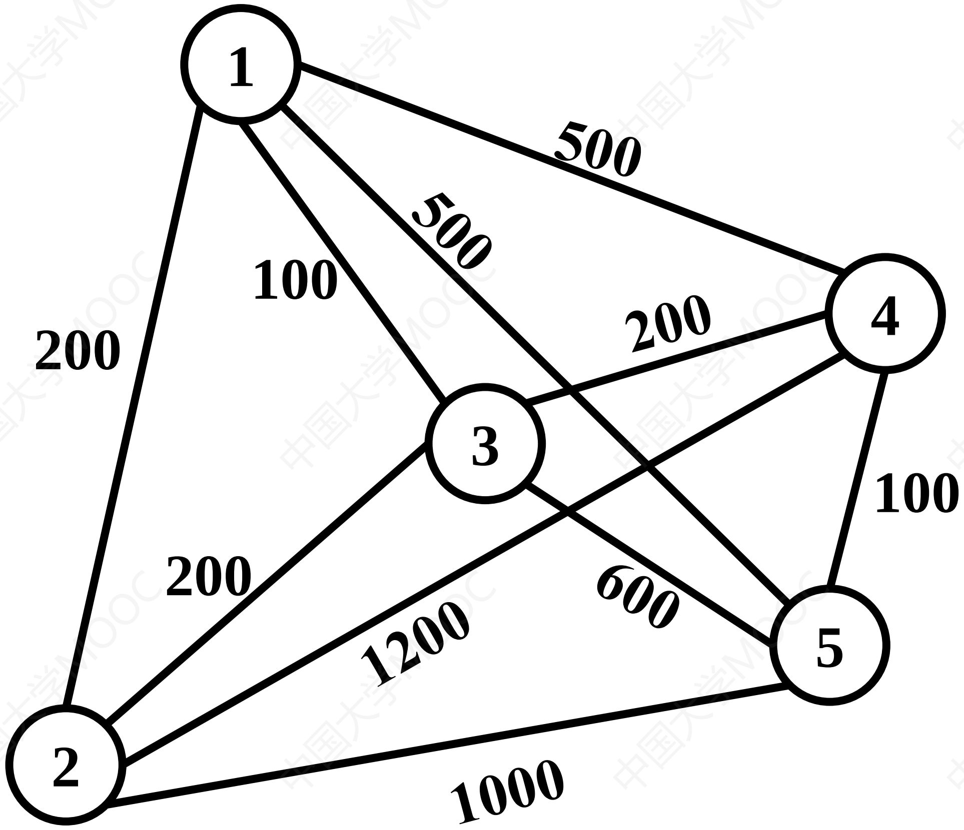
算法设计

算法实例

算法分析

问题背景

- 航班价格



如何求出所有城市之间的最低航班价格?

问题定义

所有点对最短路径问题

All Pairs Shortest Paths

输入

- 带权图$G=<V,E,W>$，W为边权

输出

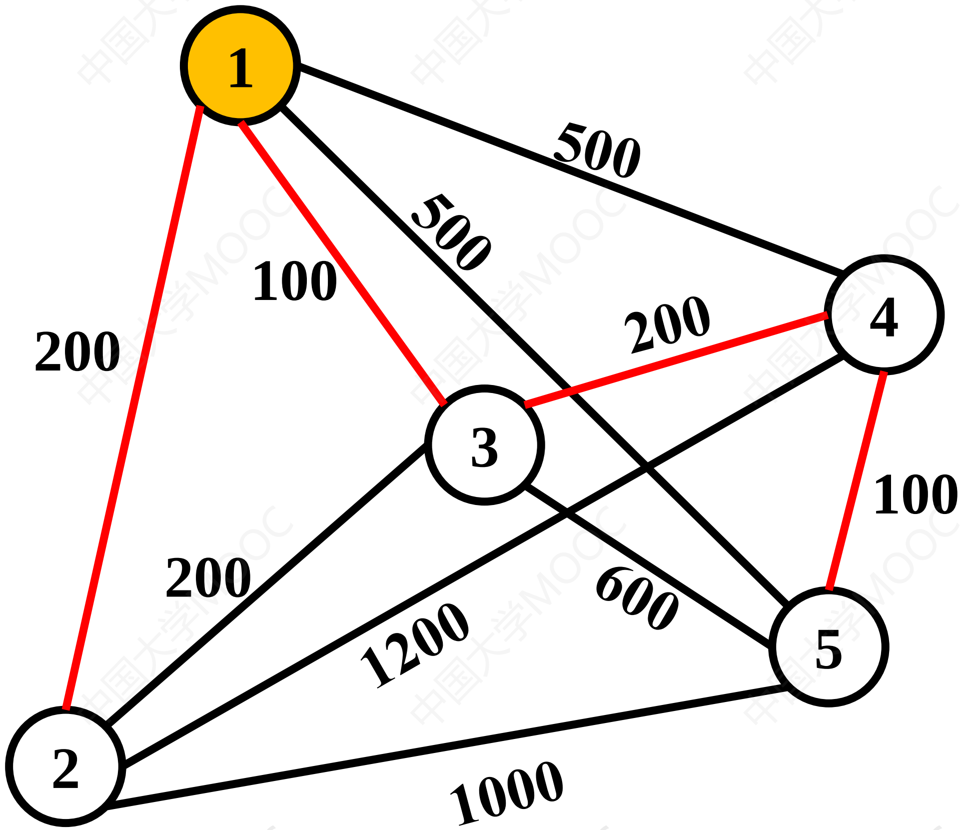
- $\forall u,v\in V$, 从u到v的最短路径

提纲

- 问题定义
- **算法思想**
- 算法设计
- 算法实例
- 算法分析

直观思路

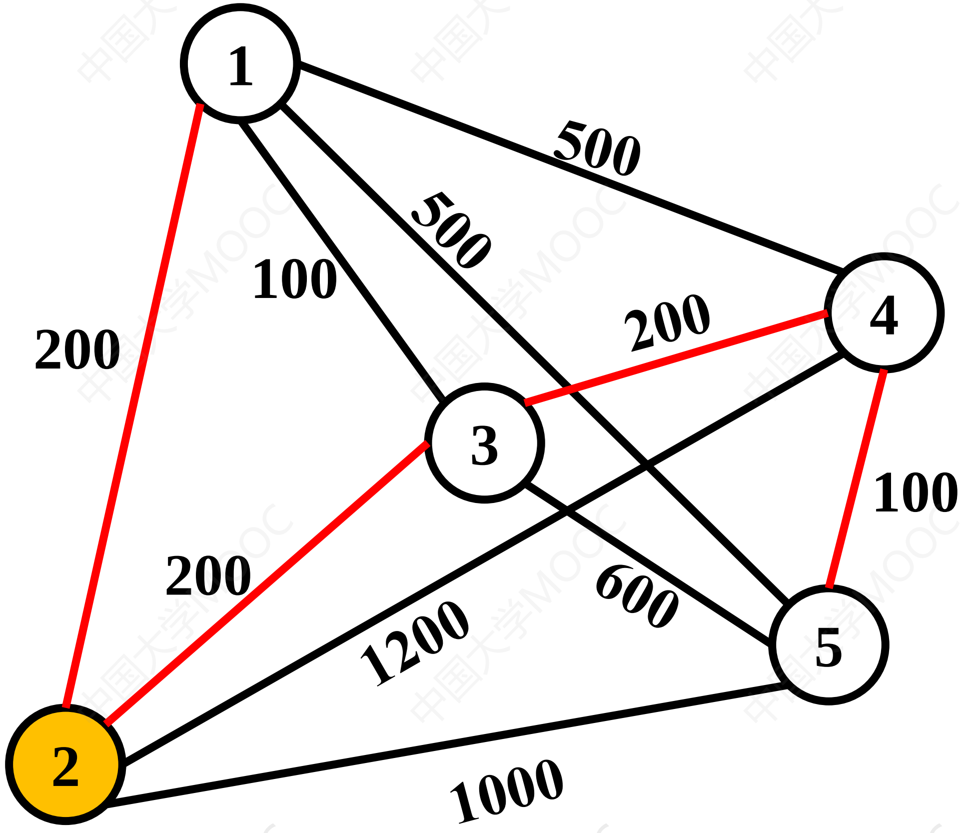
- **使用Dijkstra算法依次求解所有点**



u \ v	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2					
3					
4					
5					

直观思路

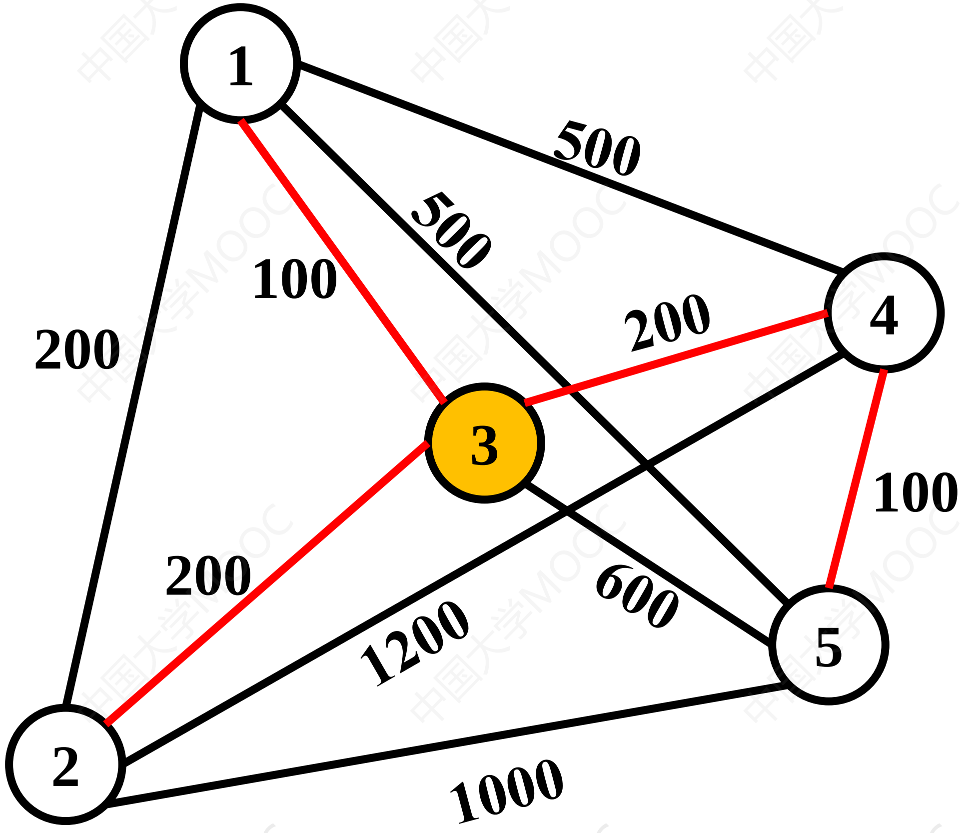
- **使用Dijkstra算法依次求解所有点**



u \ v	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3					
4					
5					

直观思路

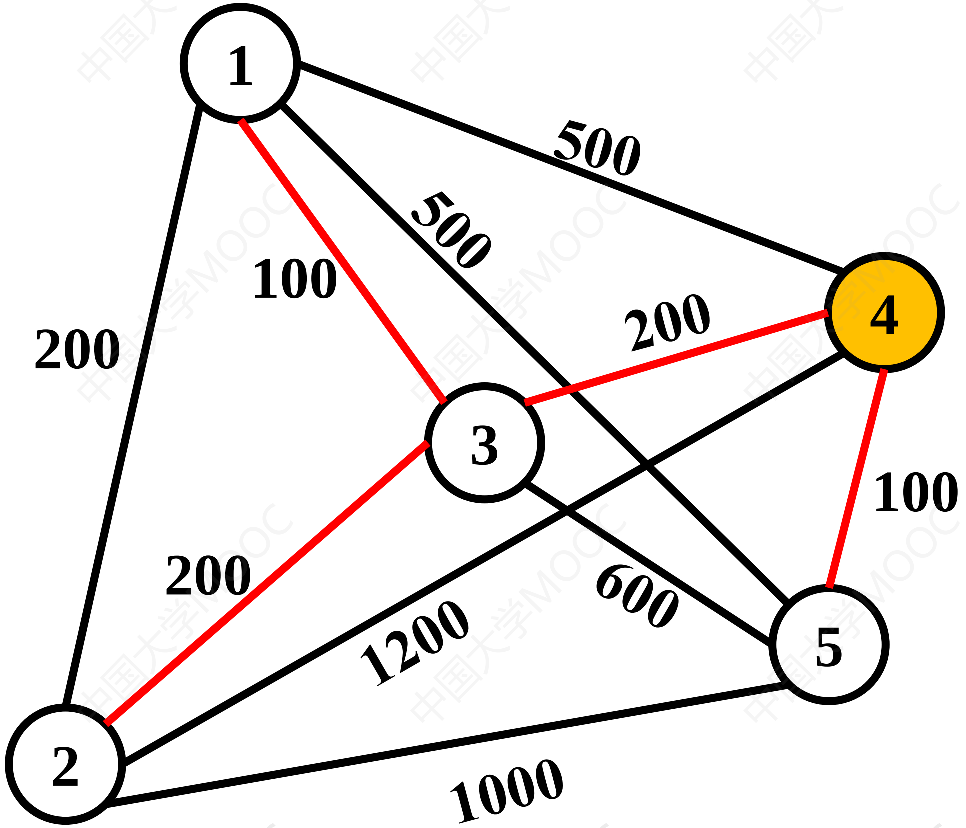
- 使用Dijkstra算法依次求解所有点



u \ v	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4					
5					

直观思路

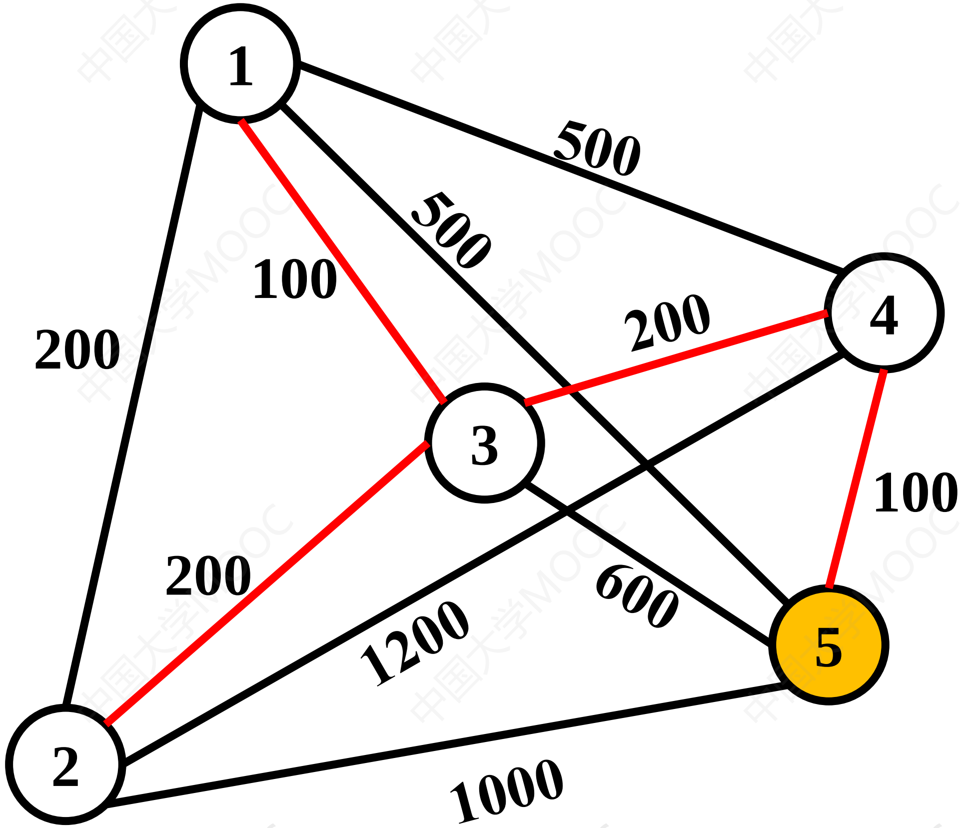
- 使用Dijkstra算法依次求解所有点



u \ v	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5					

直观思路

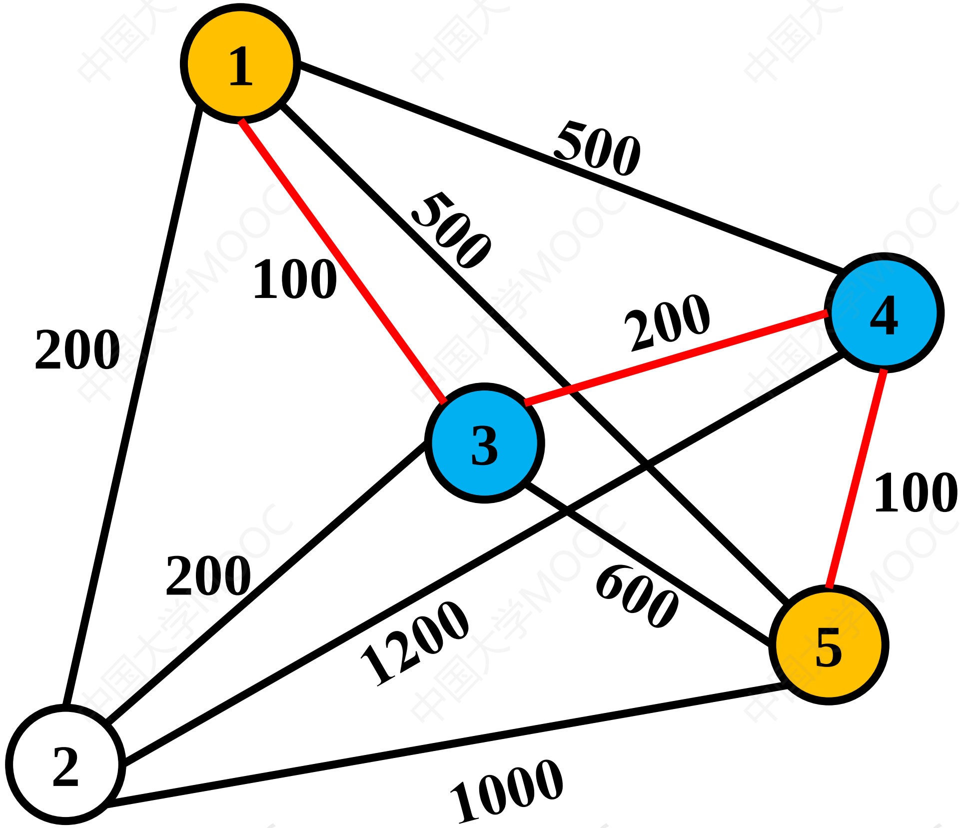
- **使用Dijkstra算法依次求解所有点**



u \ v	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

直观思路

- 使用Dijkstra算法依次求解所有点
- 存在重叠子问题

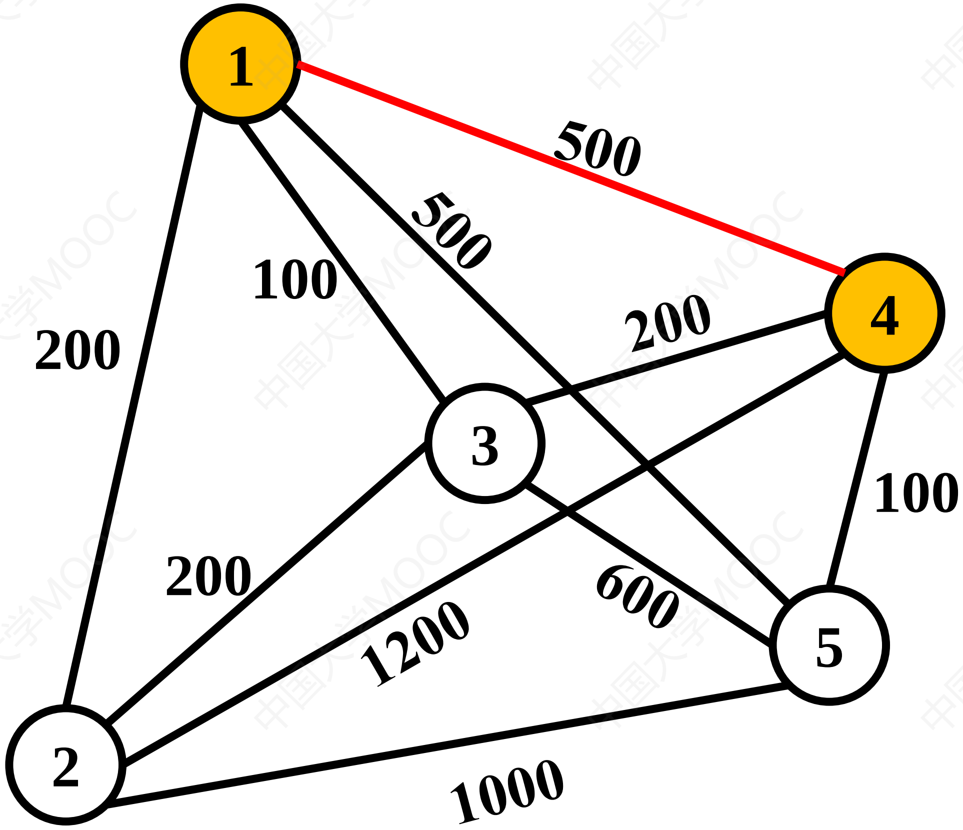


从1到5的最短路径：1→3→4→5

从3到5的最短路径：3→4→5

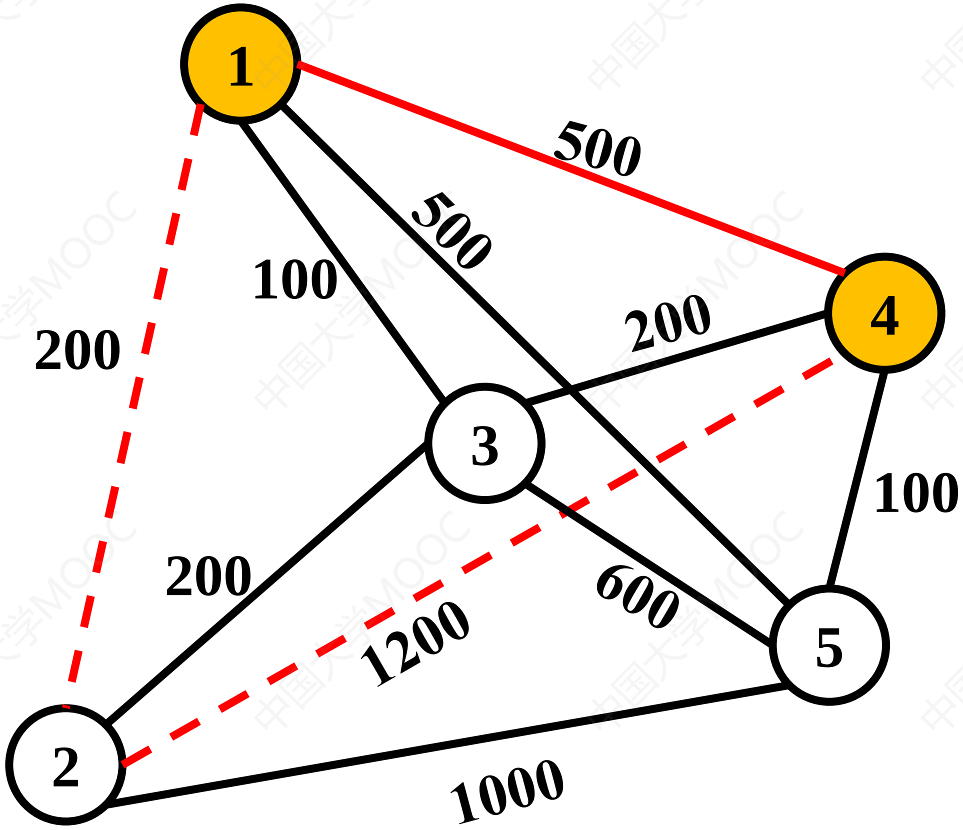
观察松弛过程

- 从1到4的路径更新
  - 可从**前1个点**中选择点经过：500



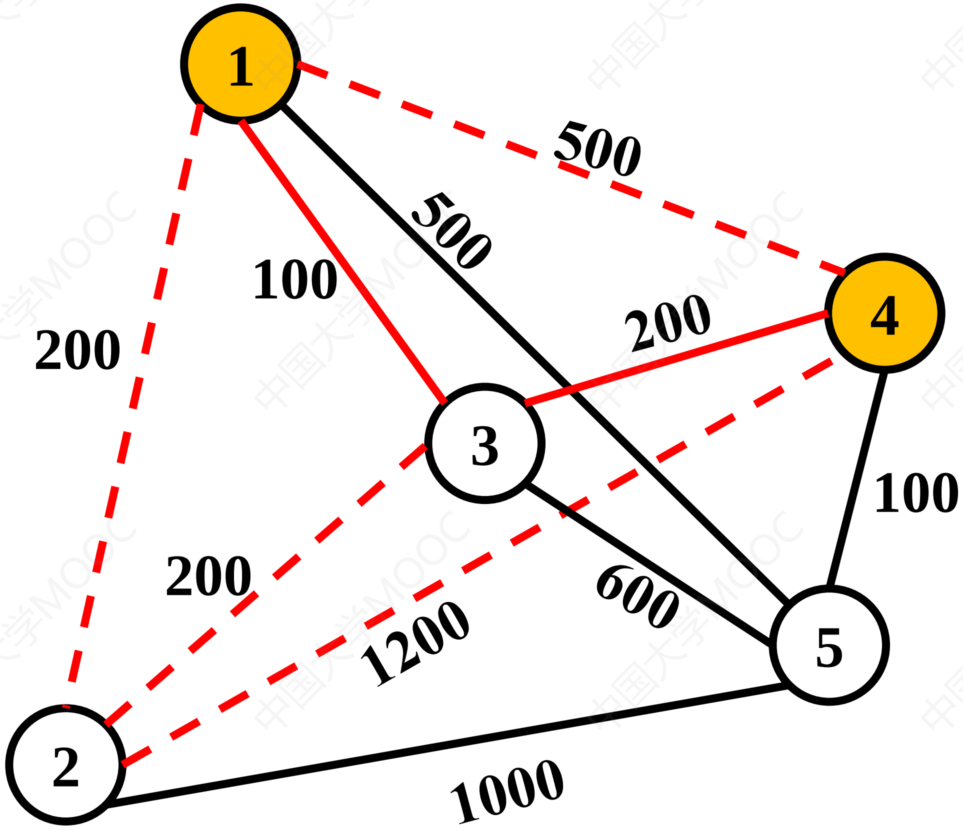
观察松弛过程

- 从1到4的路径更新
  - 可从**前1个点**中选择点经过：500
  - 可从**前2个点**中选择点经过：500



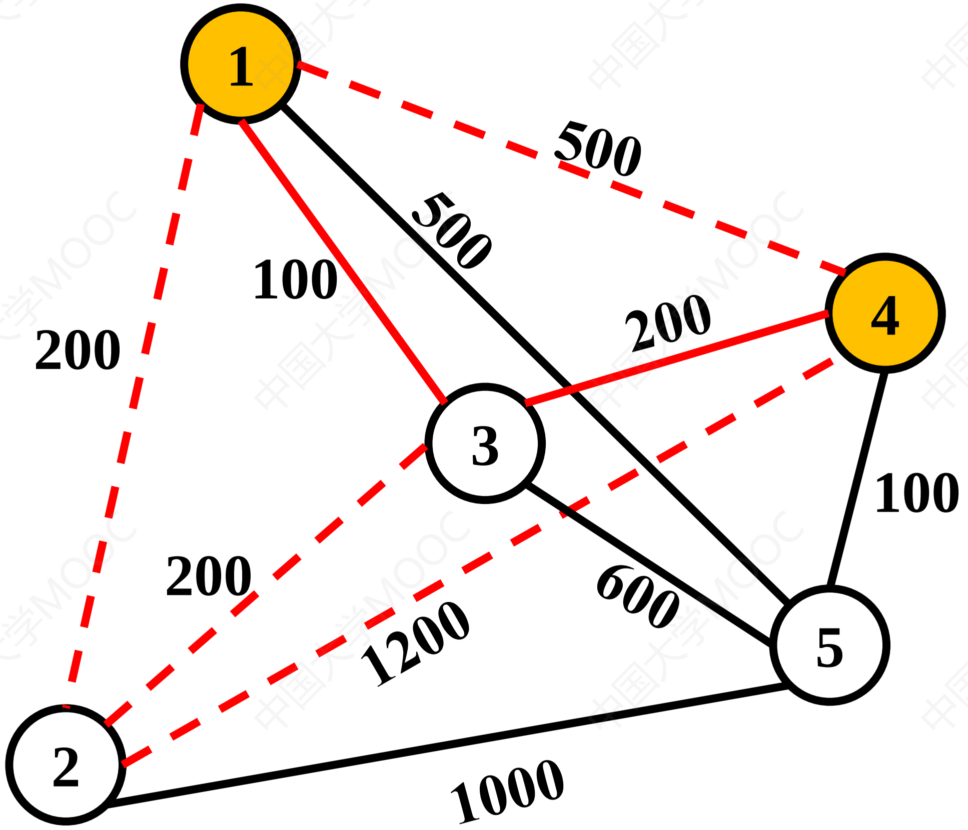
观察松弛过程

- 从1到4的路径更新
  - 可从**前1个点**中选择点经过：500
  - 可从**前2个点**中选择点经过：500
  - 可从**前3个点**中选择点经过：300



观察松弛过程

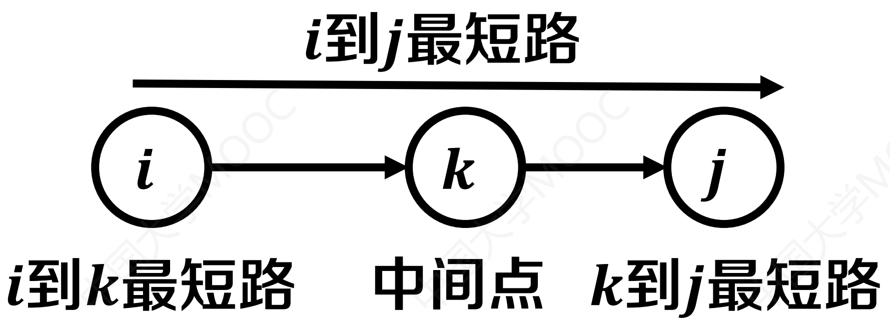
- 从1到4的路径更新
  - 可从**前1个点**中选择点经过：500
  - 可从**前2个点**中选择点经过：500
  - 可从**前3个点**中选择点经过：300
  - 可从**前*k*个点**中选择点经过：…

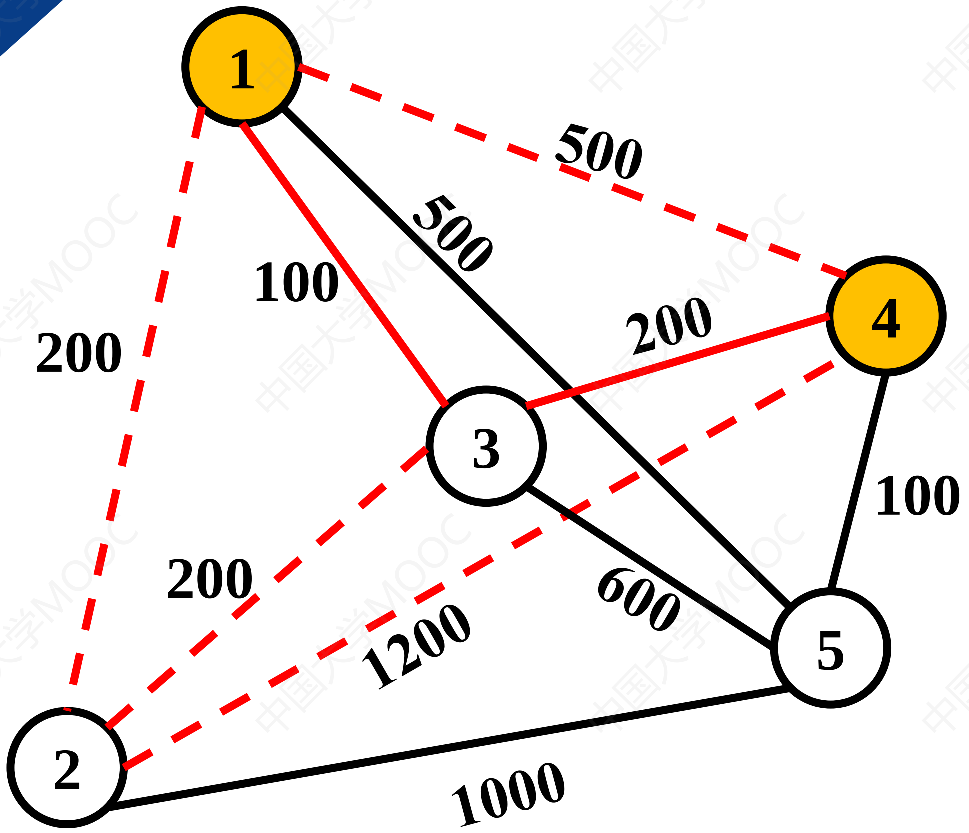


观察松弛过程

- 从1到4的路径更新
  - 可从**前1个点**中选择点经过：500
  - 可从**前2个点**中选择点经过：500
  - 可从**前3个点**中选择点经过：300
  - 可从**前*k*个点**中选择点经过： …

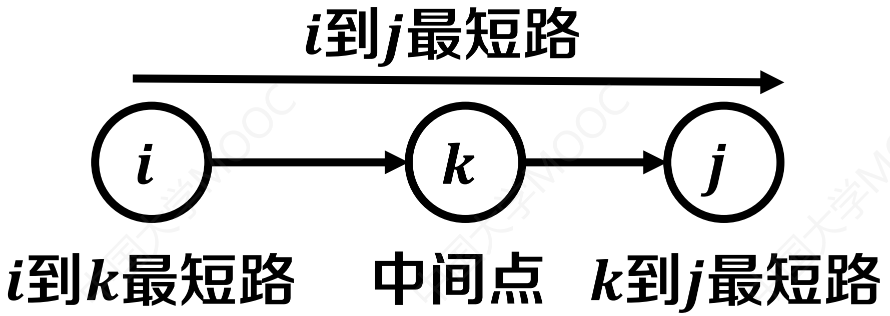
可经过的中间点越多
距离逐渐变短



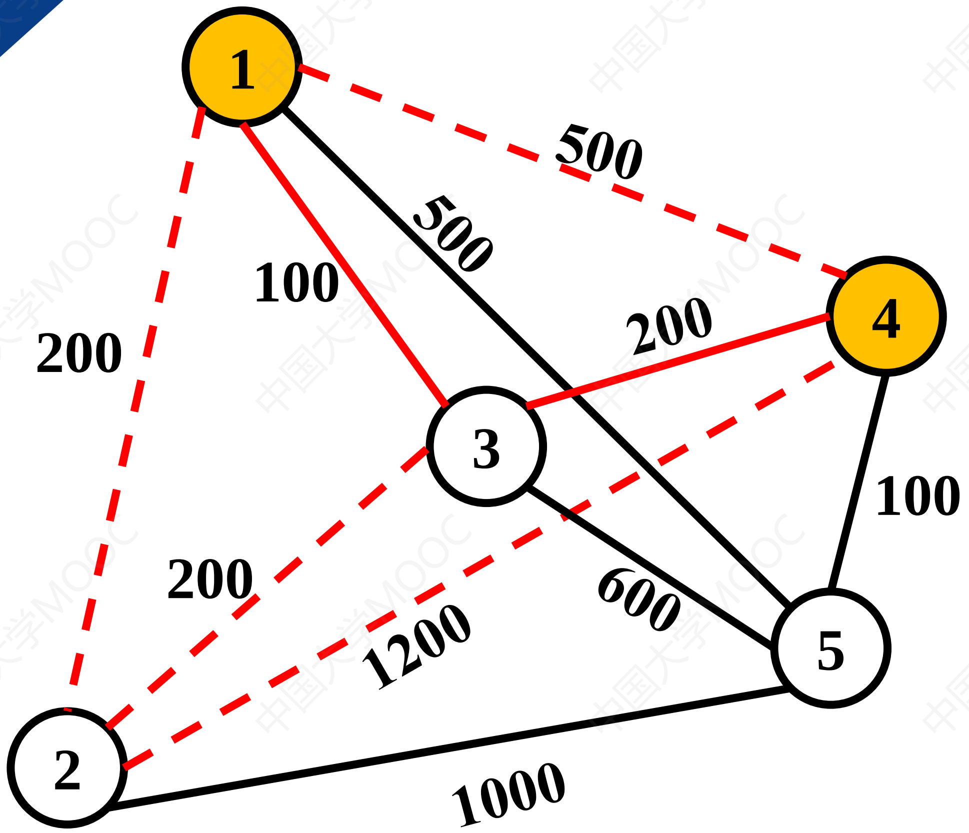


观察松弛过程

- 从1到4的路径更新
  - 可从**前1个点**中选择点经过：500
  - 可从**前2个点**中选择点经过：500
  - 可从**前3个点**中选择点经过：300
  - 可从**前*k*个点**中选择点经过：…



可经过的中间点越多
距离逐渐变短



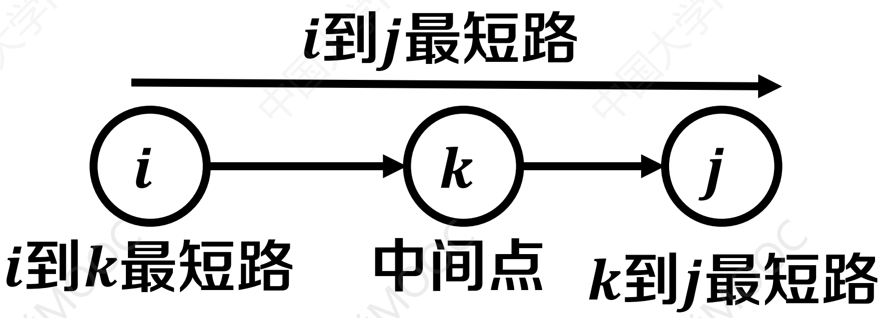
重叠子问题、最优子结构启发使用动态规划求解

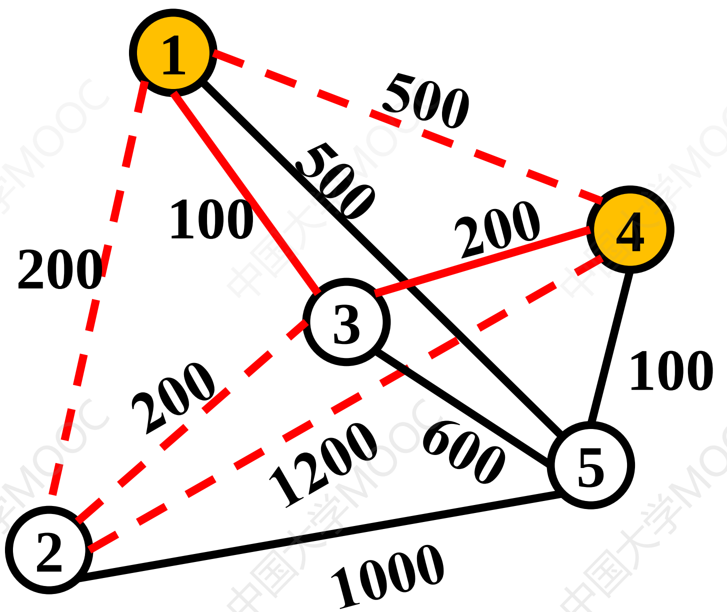
提纲

- 问题定义
- 算法思想
- 算法设计
- 算法实例
- 算法分析

动态规划：问题结构分析

- 给出问题表示
  - $D[k,i,j]$：可从前k个点选点经过时，i到j的最短距离
- 从1到4的路径更新
  - 可从前1个点中选择点经过：$D[1,1,4]=500$
  - 可从前2个点中选择点经过：$D[2,1,4]=500$
  - 可从前3个点中选择点经过：$D[3,1,4]=300$





问题结构分析

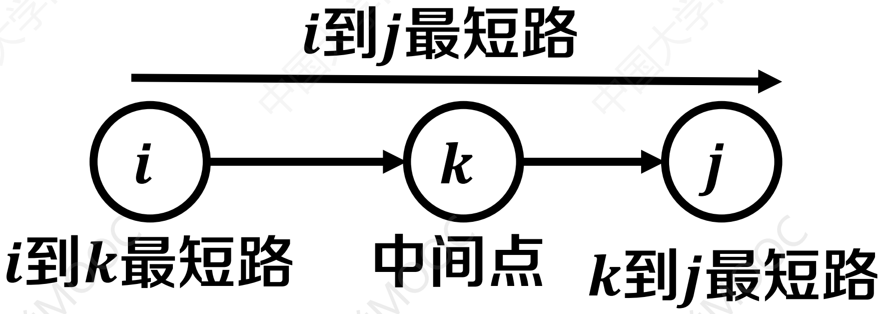
递推关系建立

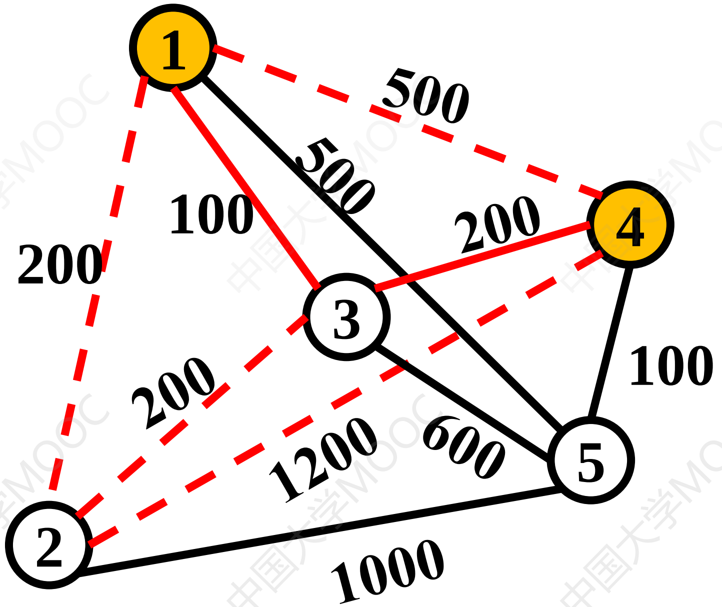
自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：问题结构分析

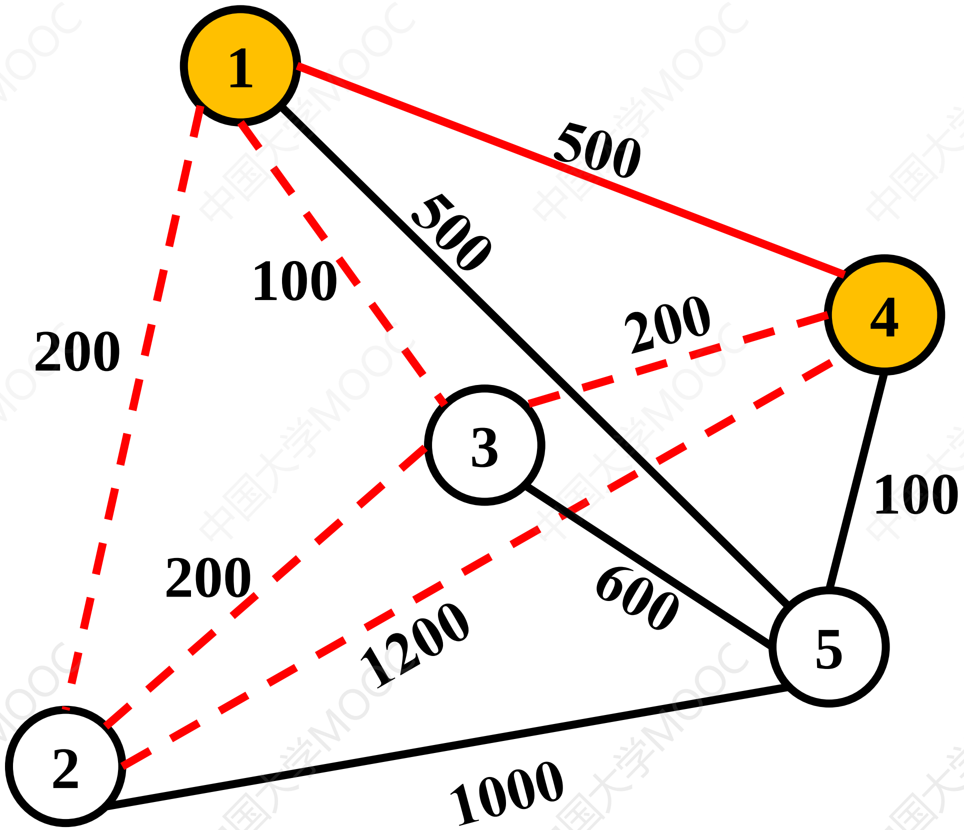
- 给出问题表示
  - $D[k,i,j]$：可从前k个点选点经过时，i到j的最短距离
- 从1到4的路径更新
  - 可从前1个点中选择点经过：$D[1,1,4]=500$
  - 可从前2个点中选择点经过：$D[2,1,4]=500$
  - 可从前3个点中选择点经过：$D[3,1,4]=300$
- 明确原始问题
  - $D[|V|,i,j]$





动态规划：递推关系建立

- 如果不选第k个点经过
  - $D[k,i,j] = D[k-1,i,j]$



本例中

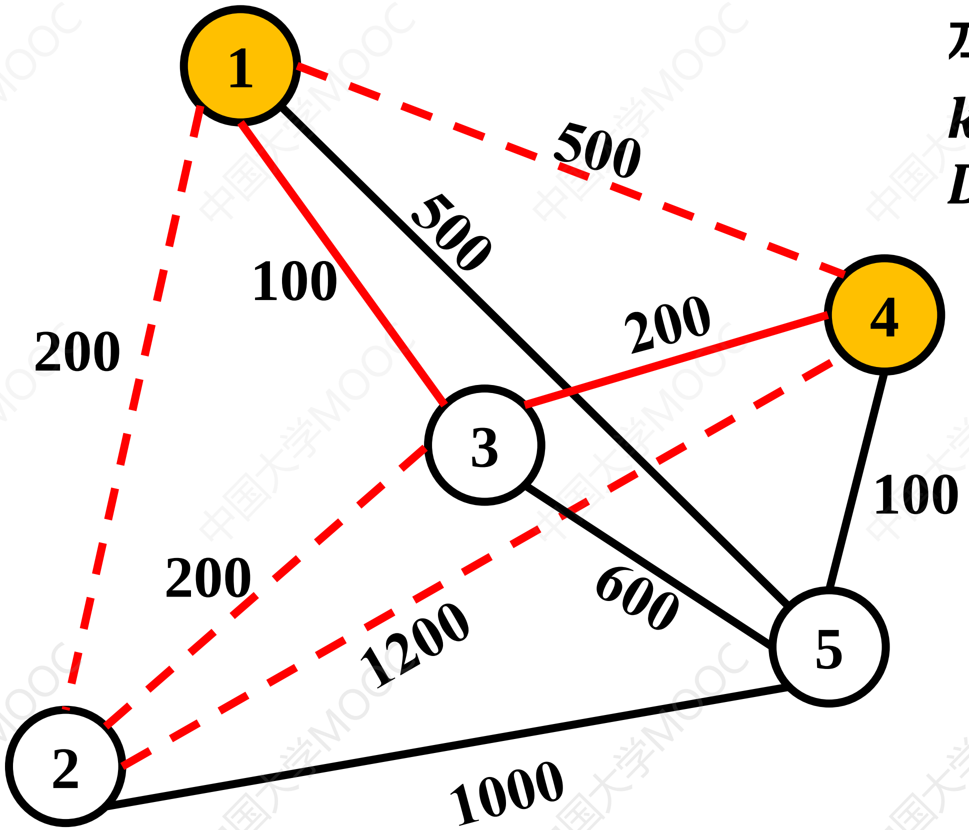
$k = 2, i = 1, j = 4$

$D[2,1,4] = D[1,1,4] = 500$

动态规划：递推关系建立

- 如果不选第k个点经过
  - $D[k,i,j] = D[k-1,i,j]$
- 如果选择第k个点经过
  - $D[k,i,j] = D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]$

表示松弛成功



本例中

$k=3, i=1, j=4$

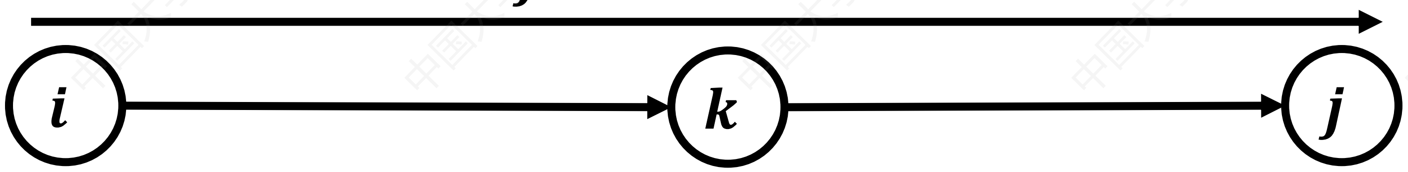
$D[3,1,4] = D[2,1,3] + D[2,3,4]$

$= 100 + 200 = 300$

动态规划：递推关系建立

- 如果不选第k个点经过
  - $D[k,i,j] = D[k-1,i,j]$
- 如果选择第k个点经过
  - $D[k,i,j] = D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]$

从i到j可经过**前k个点**的最短路



从i到k
可经过**前$k-1$个点**的最短路

从k到j
可经过**前$k-1$个点**的最短路

问题结构分析

递推关系建立

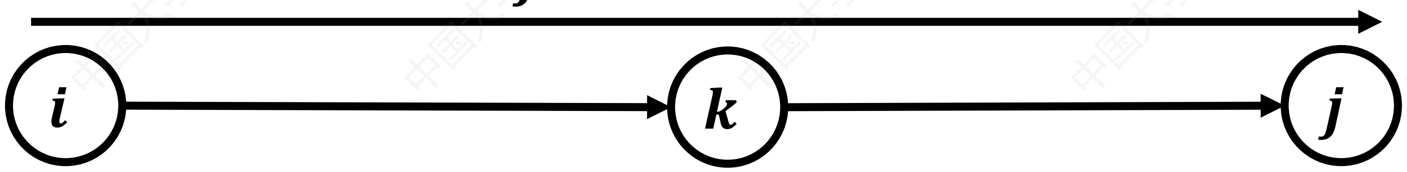
自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：递推关系建立

- 如果不选第k个点经过
  - $D[k,i,j] = D[k-1,i,j]$
- 如果选择第k个点经过
  - $D[k,i,j] = D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]$

从i到j可经过**前k个点**的最短路



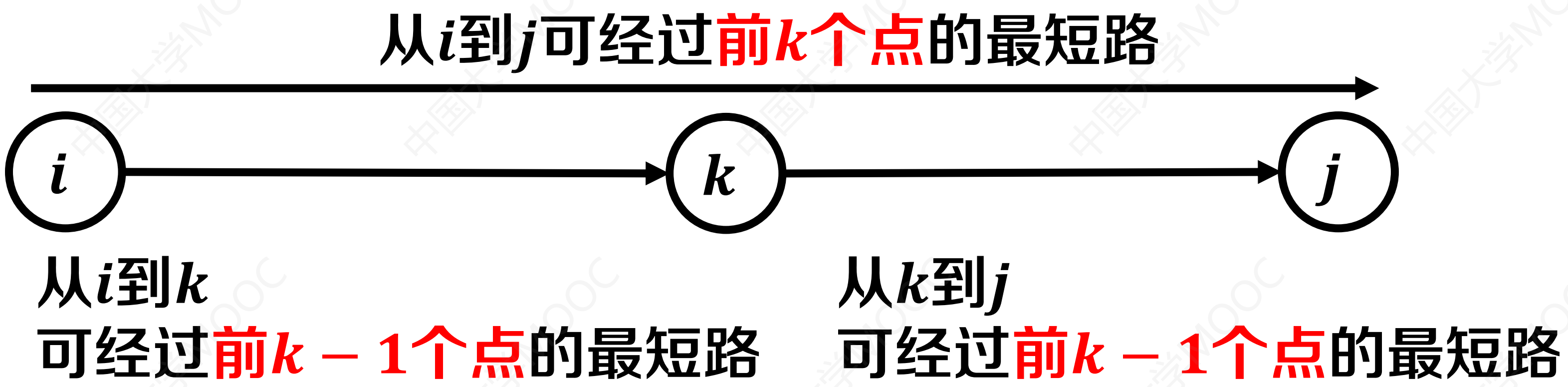
从i到k
可经过**前$k-1$个点**的最短路

从k到j
可经过**前$k-1$个点**的最短路

- $D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j],$
  $D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]\}$

动态规划：递推关系建立

- 如果不选第k个点经过
  - $D[k,i,j]=D[k-1,i,j]$
- 如果选择第k个点经过
  - $D[k,i,j]=D[k-1,i,k]+D[k-1,k,j]$



- $\boxed{D[k,i,j]}=\min\boxed{\{D[k-1,i,j], D[k-1,i,k]+D[k-1,k,j]\}}$

最优子结构

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 初始化
  - $D[0, i, i] = 0$：起终点重合，路径长度为0

i \ j	1	2	3	4	5
1	0				
2		0			
3			0		
4				0	
5					0

问题结构分析

↓

递推关系建立

↓

自底向上计算

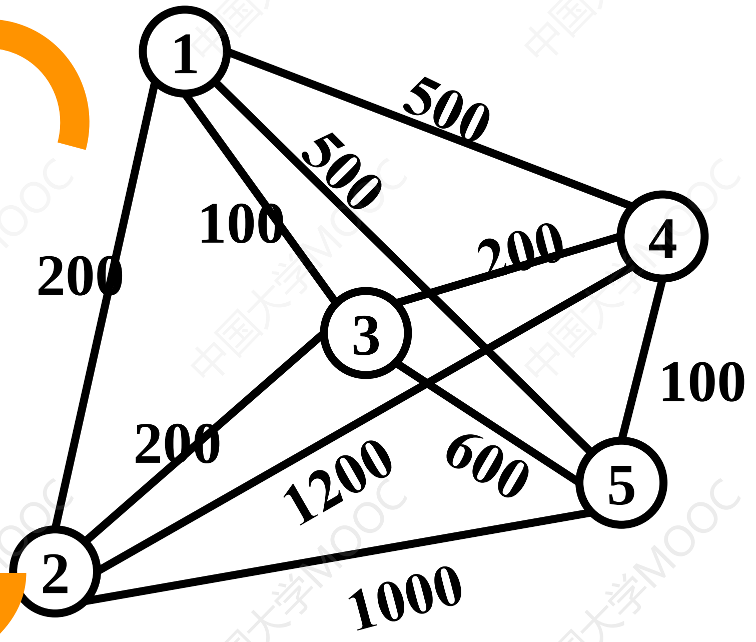
↓

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 初始化
  - $D[0, i, i] = 0$：起终点重合，路径长度为0
  - $D[0, i, j] = e[i, j]$：任意两点直达距离为边权

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- **递推公式**
  - $$D[k,i,j]=\min\{D[k-1,i,j],\\ D[k-1,i,k]+D[k-1,k,j]\}$$

最终的表格：$k=|V|$

i \ j	1	…	…	…	…
1					
…			?		
…					
…					
…					

初始化的表格：$k=0$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

问题结构分析

↓

递推关系建立

↓

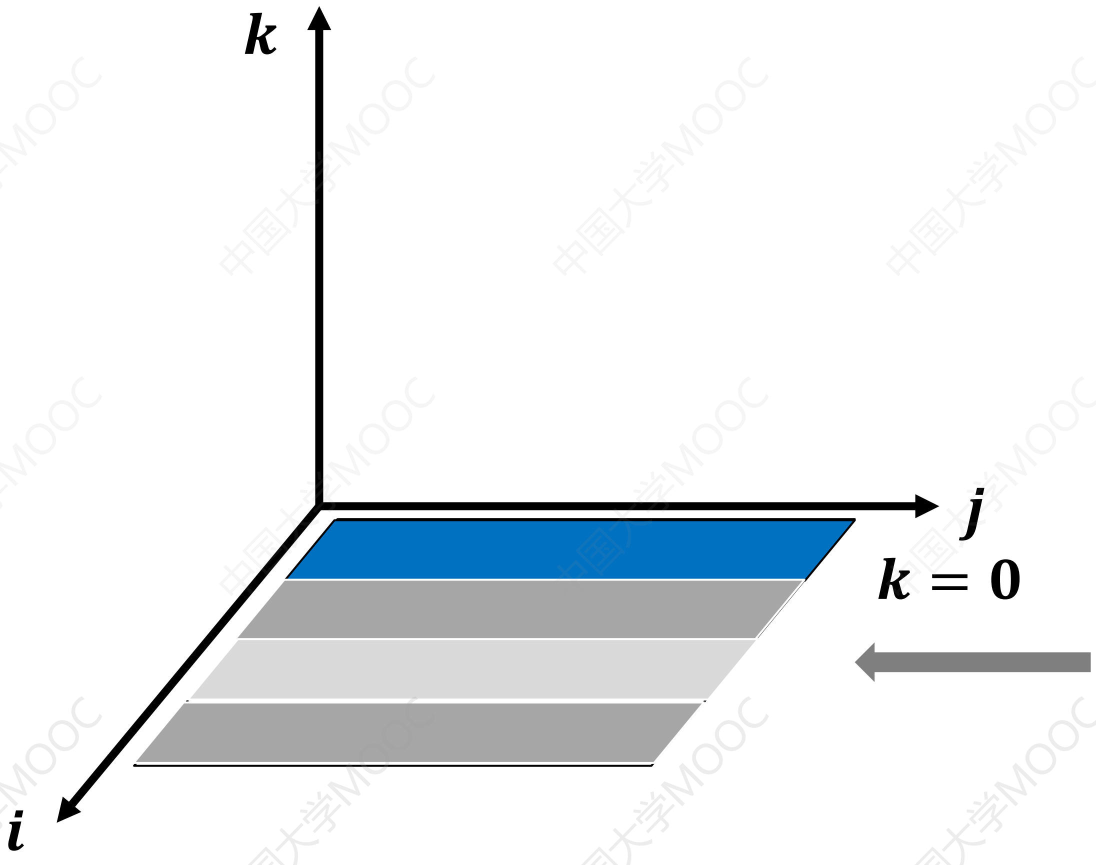
自底向上计算

↓

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $$D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j],\ D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]\}$$



最终的表格：$k = |V|$

i \ j	1	…	…	…	…
1					
…			?		
…					
…					
…					

初始化的表格：$k = 0$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

问题结构分析

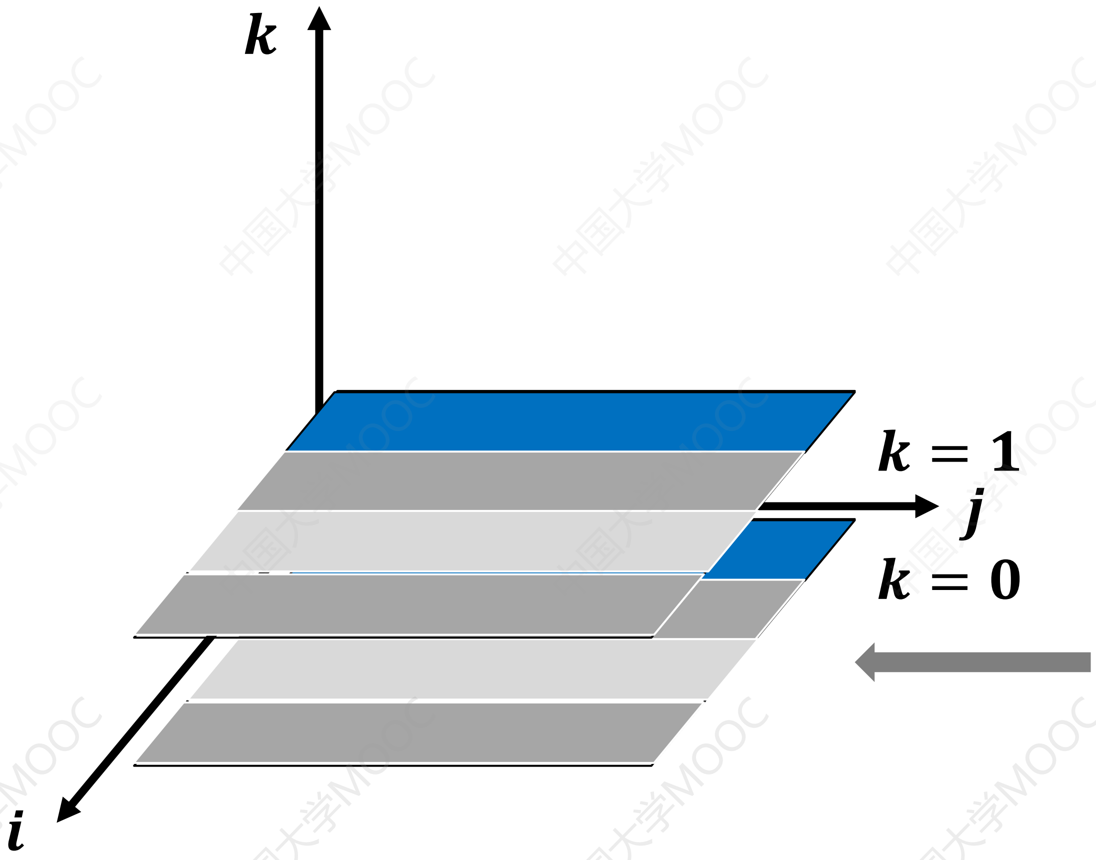
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $D[k, i, j] = \min\{D[k-1, i, j],$
    $D[k-1, i, k] + D[k-1, k, j]\}$



最终的表格：$k = |V|$

i \ j	1	…	…	…	…
1					
…			?		
…					
…					
…					

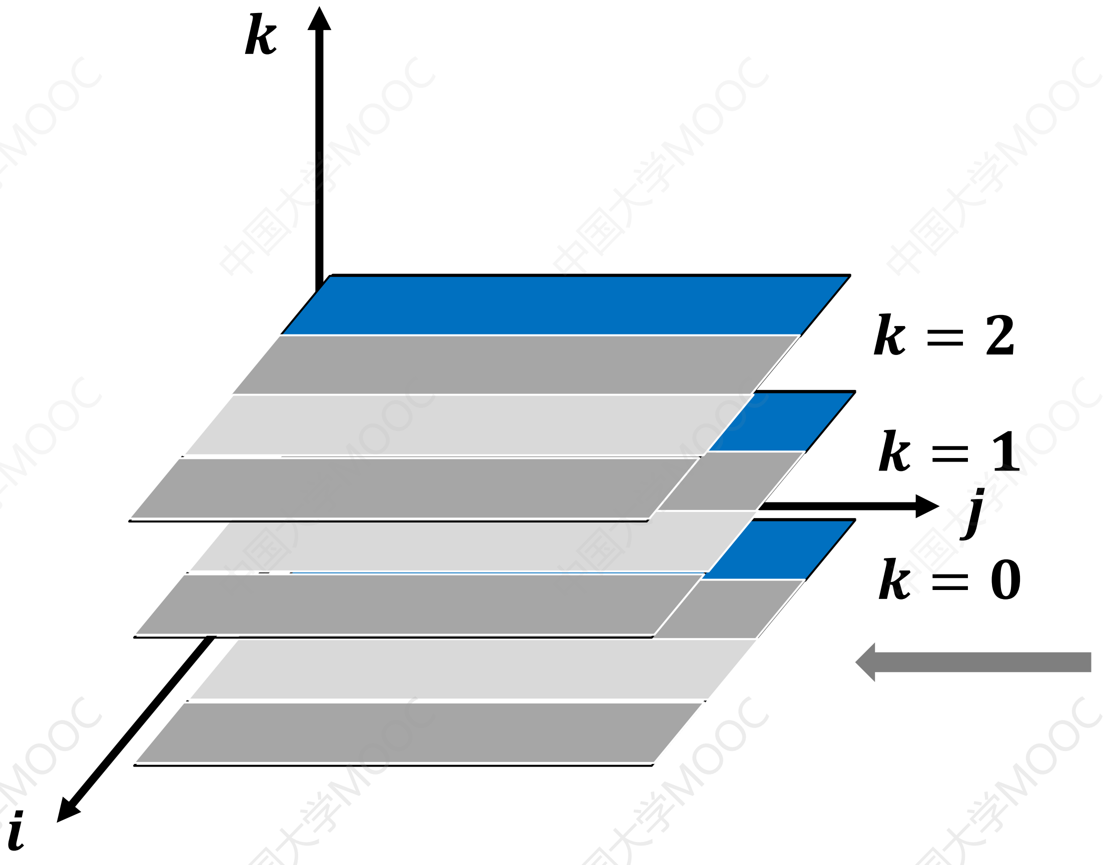
初始化的表格：$k = 0$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

问题结构分析 → 递推关系建立 → 自底向上计算 → 最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- **递推公式**
  - $$D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j], \\ D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]\}$$



最终的表格：$k = |V|$

j / i	1	…	…	…	…
1					
…			?		
…					
…					
…					

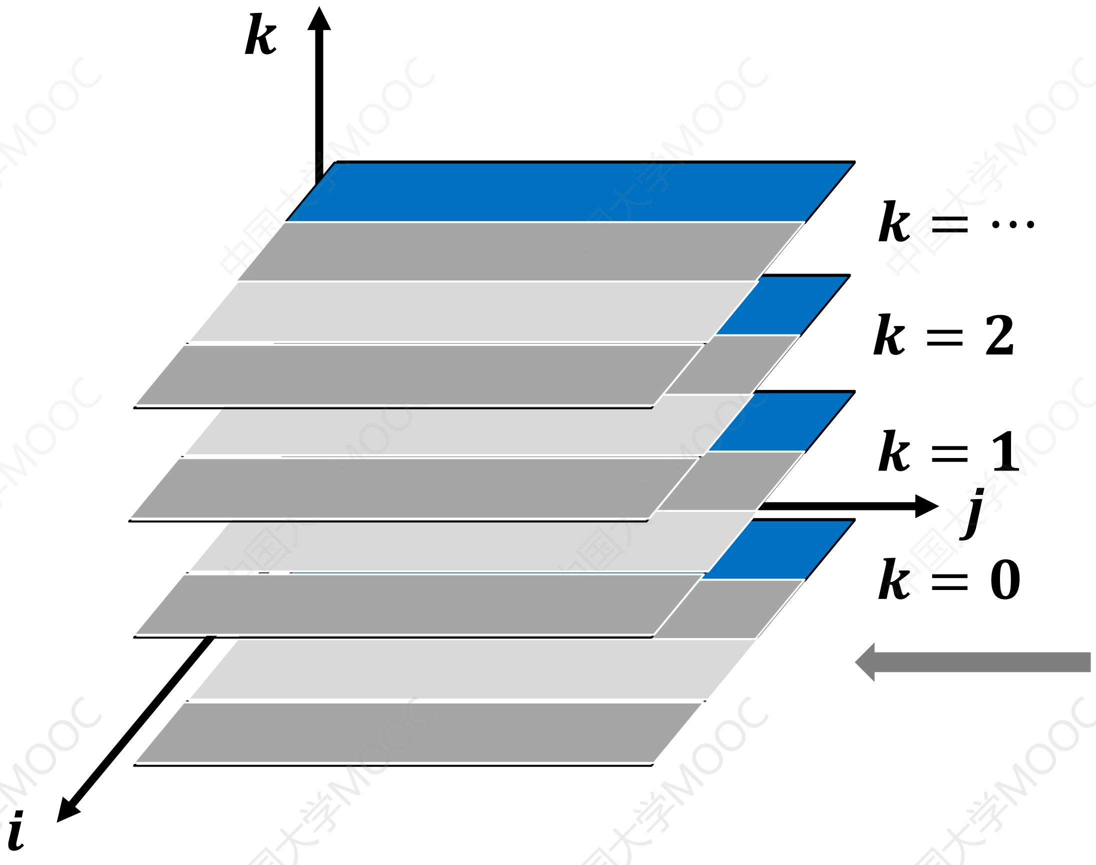
初始化的表格：$k = 0$

j / i	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

问题结构分析
↓
递推关系建立
↓
自底向上计算
↓
最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $$D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j],\\ D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]\}$$



最终的表格：$k = |V|$

i \ j	1	…	…	…	…
1					
…			?		
…					
…					
…					

初始化的表格：$k = 0$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

问题结构分析

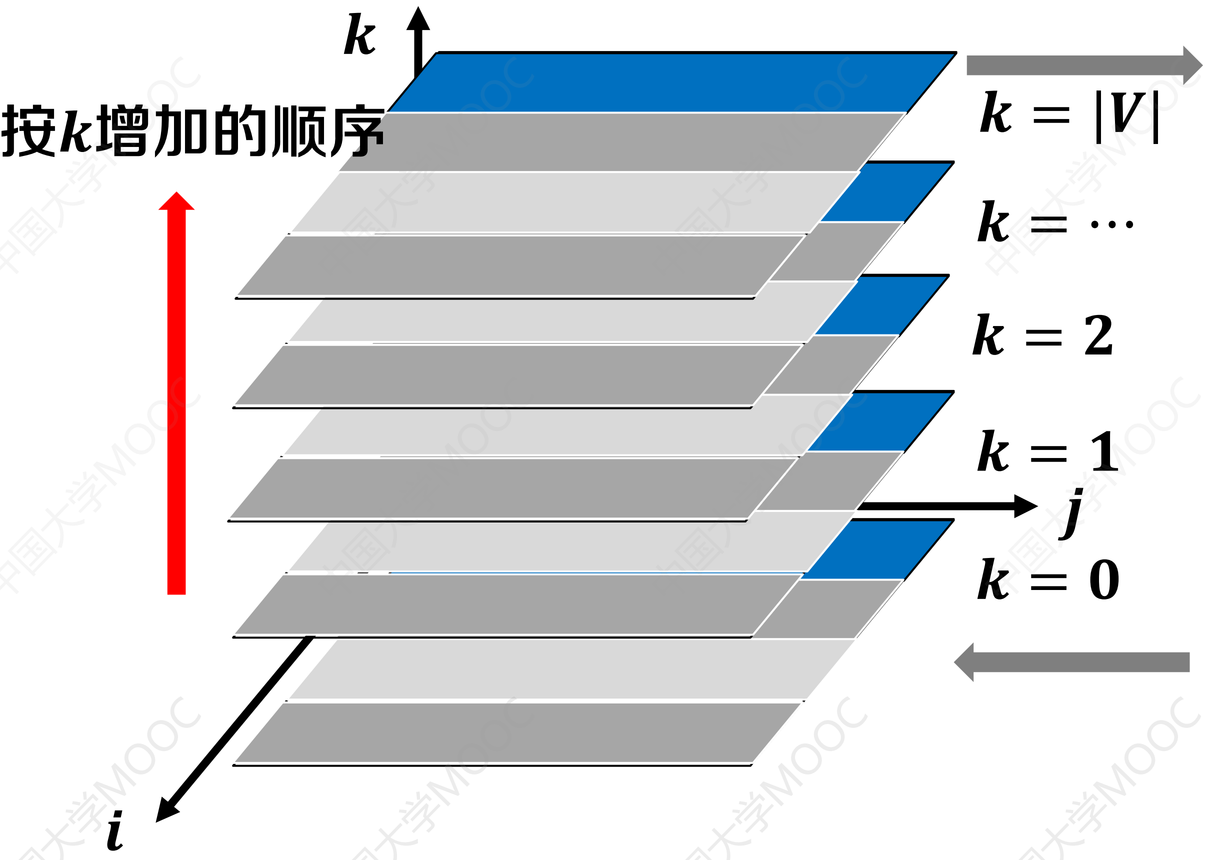
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j],$
    $D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]\}$



最终的表格：$k=|V|$

i \ j	1	…	…	…	…
1					
…			?		
…					
…					
…					

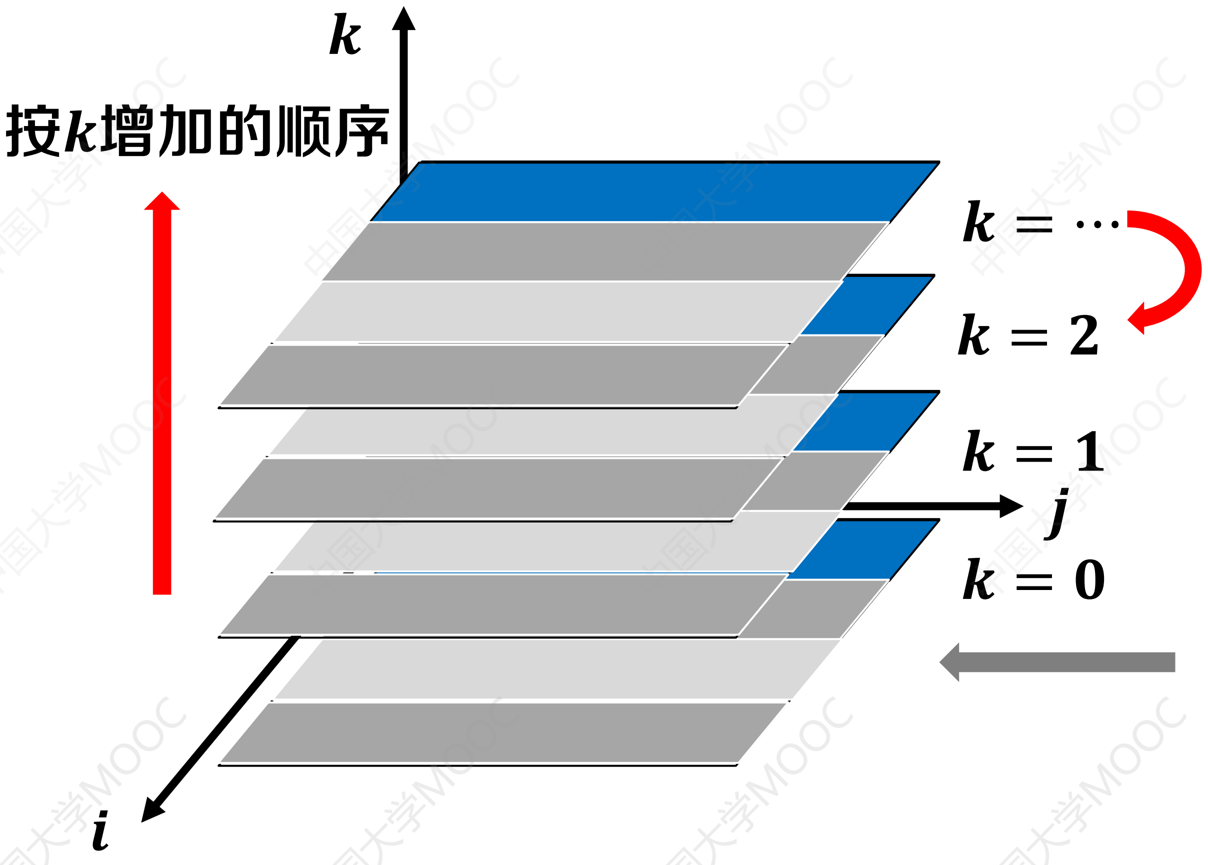
初始化的表格：$k=0$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

问题结构分析 → 递推关系建立 → **自底向上计算** → 最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $D[\textcolor{red}{k},i,j]=\min\{D[\textcolor{red}{k-1},i,j],$
    $D[\textcolor{red}{k-1},i,k]+D[\textcolor{red}{k-1},k,j]\}$



求解当前层只依赖上一层

初始化的表格：$k=0$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

问题结构分析

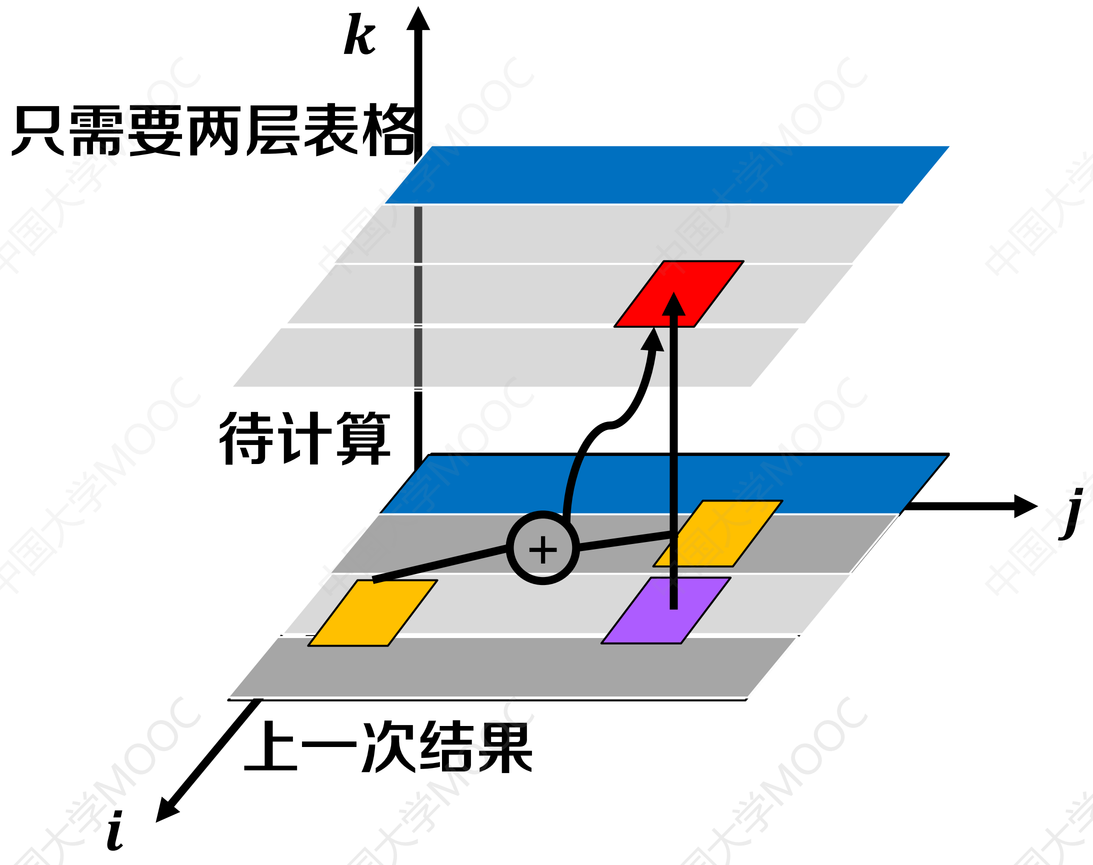
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j],$
    $D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]\}$



问题结构分析

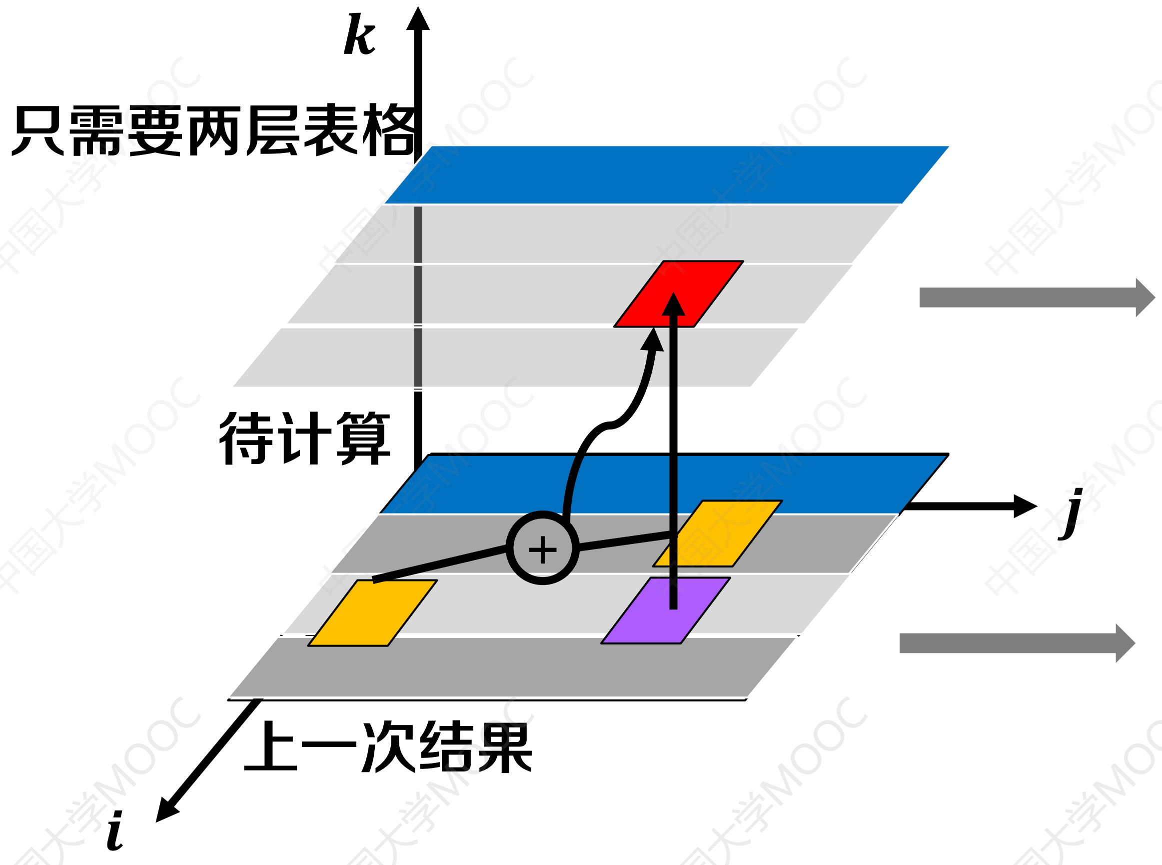
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- **递推公式**
  - $D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j],$
    $D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]\}$



i \ j	1	…	k	…	…
1					
…					
k					
…					
…					

i \ j	1	…	k	…	…
1					
…					
k					
…					
…					

问题结构分析 → 递推关系建立 → **自底向上计算** → 最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j],$
    $\boxed{D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]}\}$

$0 + D[k-1,i,j] = D[k-1,i,j]$

- 若$k = i$或$k = j$

$D[k,i,j] = D[k-1,i,j]$
值相同，可以直接覆盖

i \ j	1	…	k	…	…
1					
…					
k					
…					
…					

i \ j	1	…	k	…	…
1					
…					
k					
…					
…					

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j], D[k-1,i,k] + D[k-1,k,j]\}$

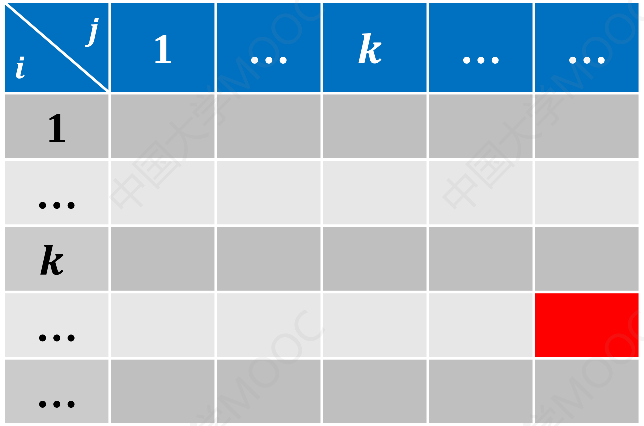
    $0 + D[k-1,i,j] = D[k-1,i,j]$

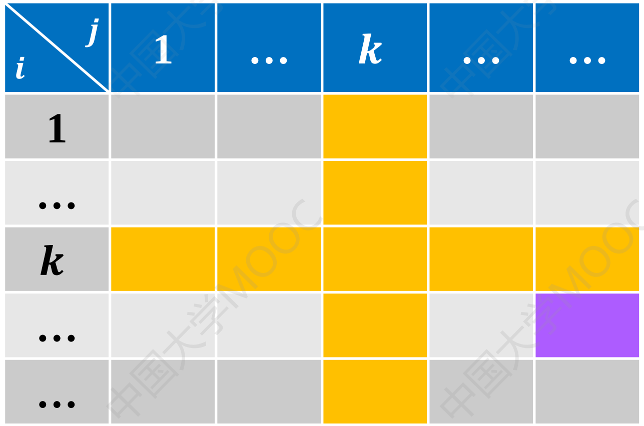
- 若$k = i$或$k = j$

$D[k,i,j] = D[k-1,i,j]$
值相同，可以直接覆盖

- 若$k \neq i$且$k \neq j$

$D[k-1,i,j]$和$D[k-1,i,k], D[k-1,k,j]$
不是相同子问题
求出$D[k,i,j]$后，$D[k-1,i,j]$不再被使用
可直接覆盖





动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $D[k,i,j] = \min\{D[k-1,i,j],$
    $\boxed{D[k-1,i,k]+D[k-1,k,j]}\}$

$0 + D[k-1,i,j] = D[k-1,i,j]$

- 若$k=i$或$k=j$

$D[k,i,j] = D[k-1,i,j]$
值相同，可以直接覆盖

- 若$k \neq i$且$k \neq j$

$D[k-1,i,j]$和$D[k-1,i,k], D[k-1,k,j]$
不是相同子问题
求出$D[k,i,j]$后，$D[k-1,i,j]$不再被使用
可直接覆盖

求出新值可直接在原位置覆盖
只需存储一层表格

$i \backslash j$	1	…	k	…	…
1					
…					
k					
…					
…					

$i \backslash j$	1	…	k	…	…
1					
…					
k					
…					
…					

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：自底向上计算（确定计算顺序）

- 递推公式
  - $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

求出新值可直接在原位置覆盖
只需存储一层表格

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：最优方案追踪

- 递推公式
  - $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$
- 追踪数组Rec，记录经过的中间点
  - $D_k[i,j] = D_{k-1}[i,j]$：0 表示没有中间点

Rec

$i \backslash j$	1	…	j	…	V
1					
…					
i			0		
…					
V					

问题结构分析 → 递推关系建立 → 自底向上计算 → 最优方案追踪

动态规划：最优方案追踪

- 递推公式
  - $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$
- 追踪数组Rec，记录经过的中间点
  - $D_k[i,j] = D_{k-1}[i,j]$：0 表示没有中间点
  - $D_k[i,j] = D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]$：$k$ 表示经过中间点k

松弛时使用的点

Rec

$i \backslash j$	1	…	j	…	V
1					
…					
i			k		
…					
V					

问题结构分析

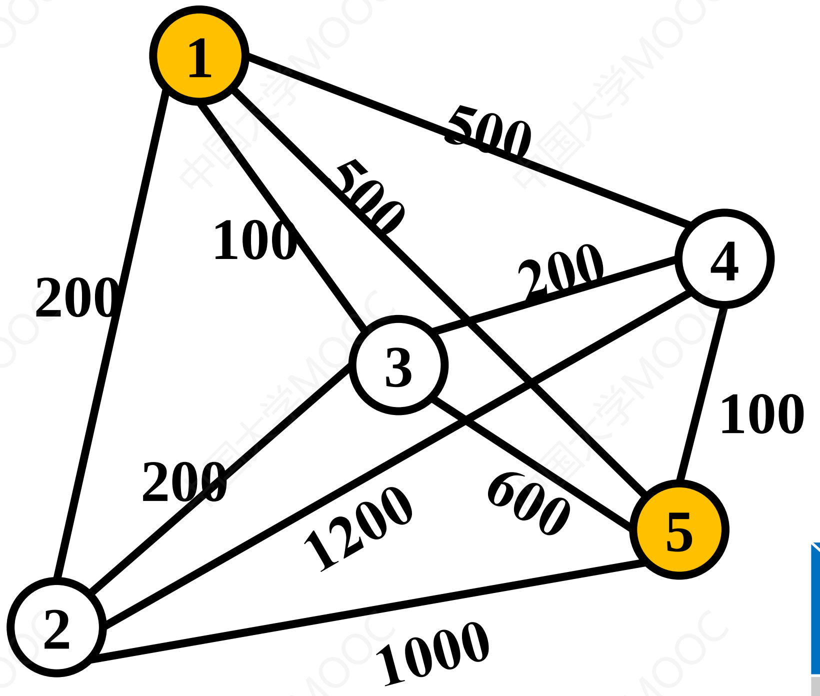
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：最优方案追踪

- 根据数组*Rec*，输出最短路径

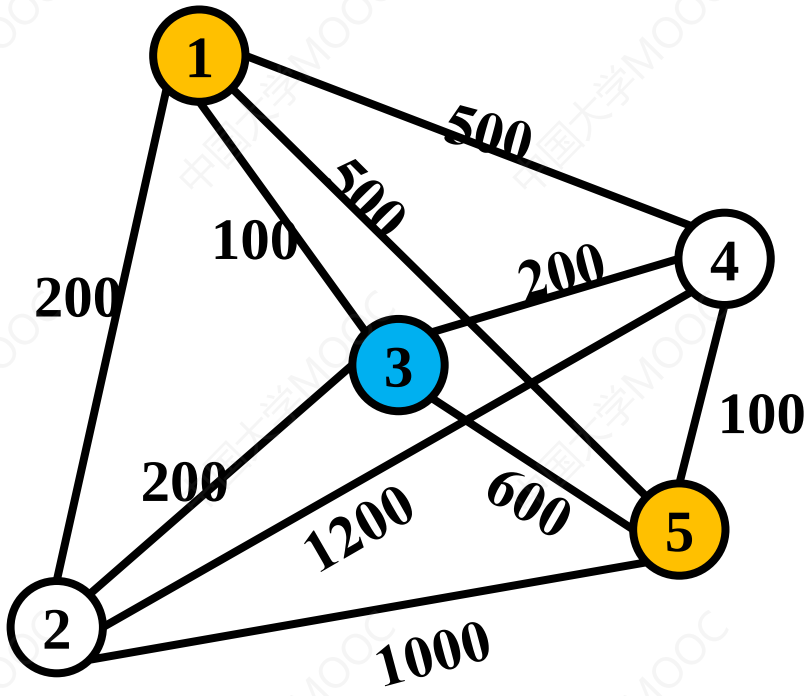


Rec

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1			0		3
2					
3				0	4
4					0
5					

动态规划：最优方案追踪

- 根据数组*Rec*，输出最短路径



Rec

i \ *j*	1	2	3	4	5
1			0		3
2					
3				0	4
4					0
5					

问题结构分析

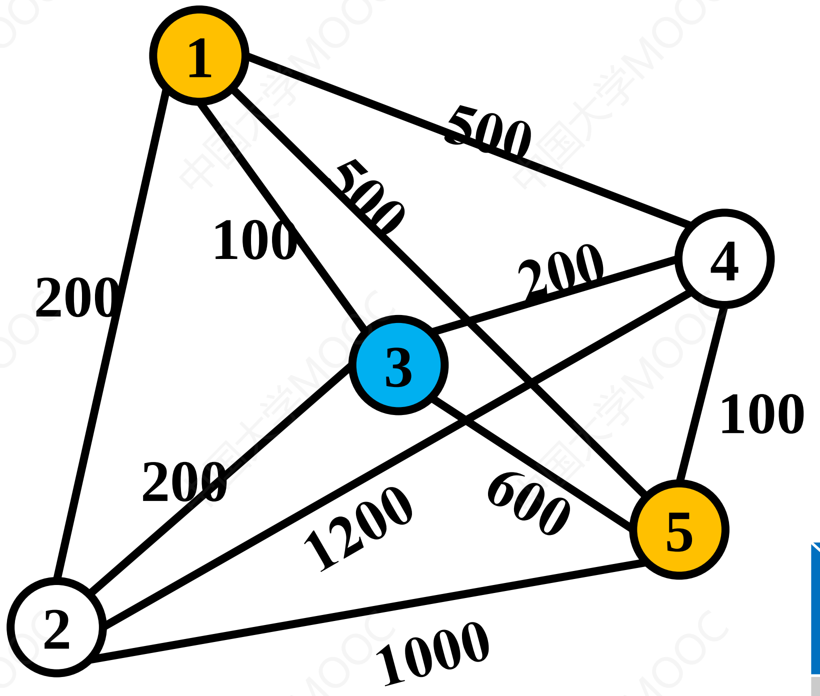
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

动态规划：最优方案追踪

- 根据数组Rec，输出最短路径

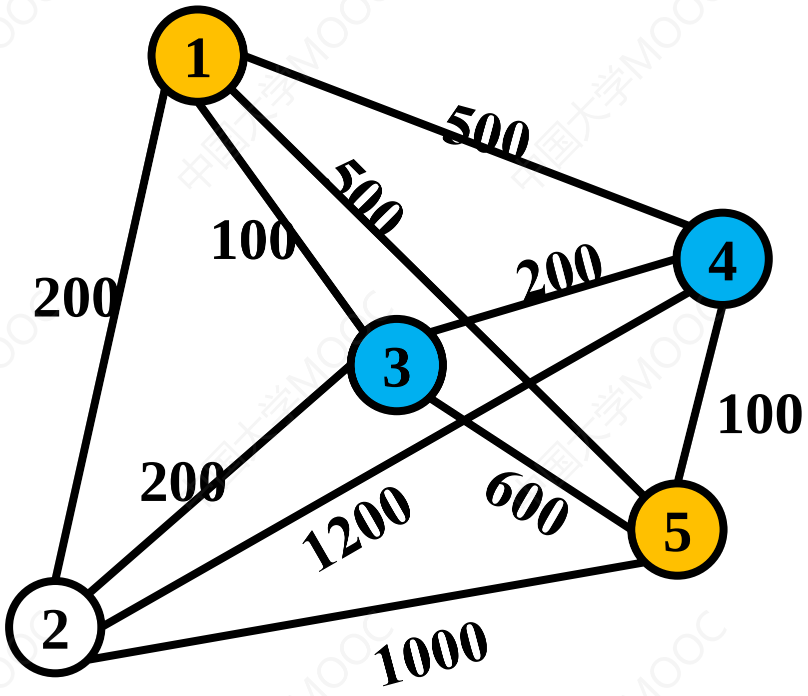


Rec

i \ j	1	2	3	4	5
1			0		3
2					
3				0	4
4					0
5					

动态规划：最优方案追踪

- 根据数组Rec，输出最短路径

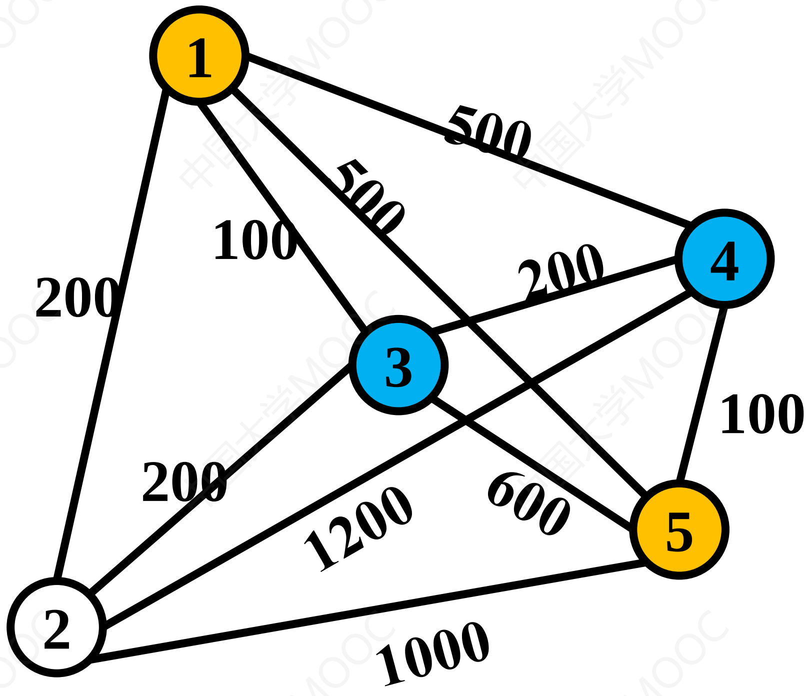


Rec

i \ j	1	2	3	4	5
1			0		3
2					
3				0	4
4					0
5					

动态规划：最优方案追踪

- 根据数组Rec，输出最短路径



Rec

i \ j	1	2	3	4	5
1			0		3
2					
3				0	4
4					0
5					

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

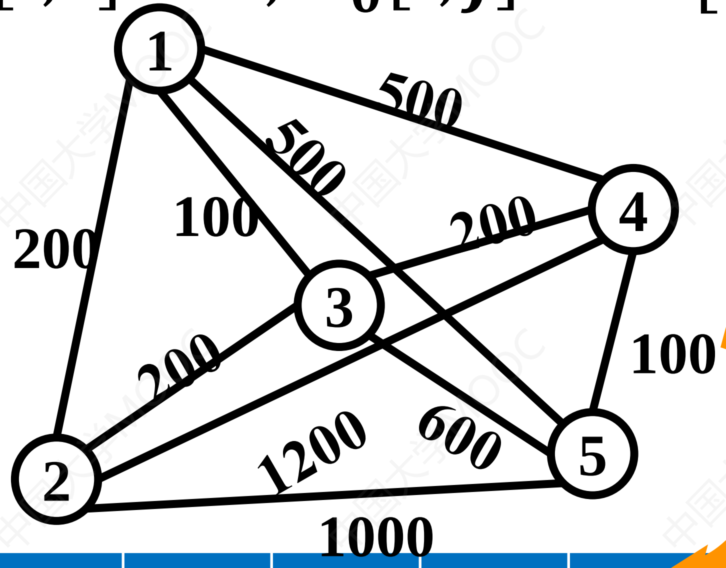
最优方案追踪

提纲

- 问题定义
- 算法思想
- 算法设计
- **算法实例**
- 算法分析

算法实例

- $D_0[i,i] = 0, D_0[i,j] = W[i,j]$



所有点对都没有经过其他点

D

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

$k = 0$

Rec

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

D

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	1200	1000
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

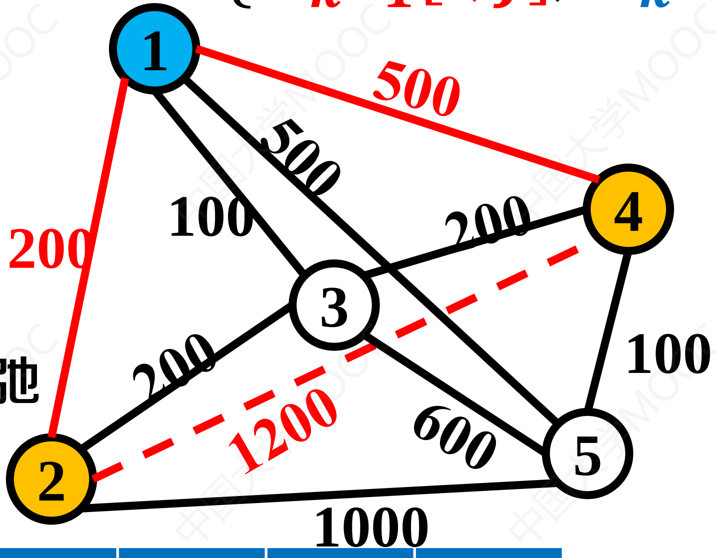
$k = 1$

Rec

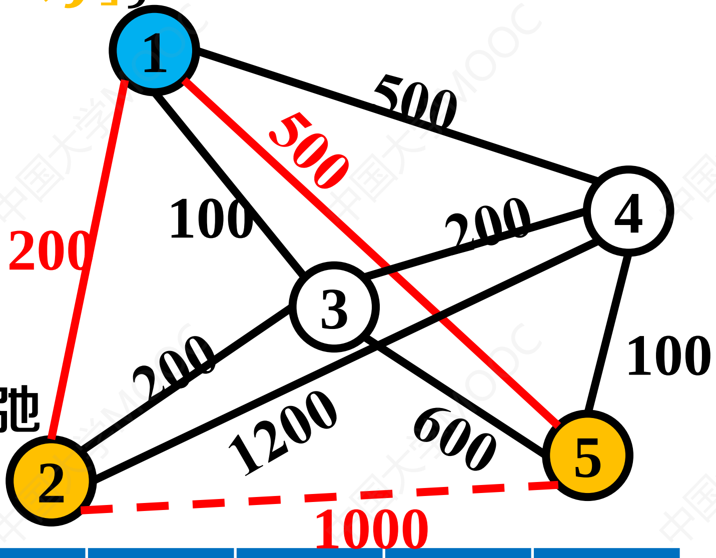
i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$



从2到4路径得到松弛



从2到5路径得到松弛

D

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

$k = 1$

Rec

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	1200	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

$k = 1$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	1000	600	100	0

$k = 1$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 1$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 2$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 2$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 2$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 2$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

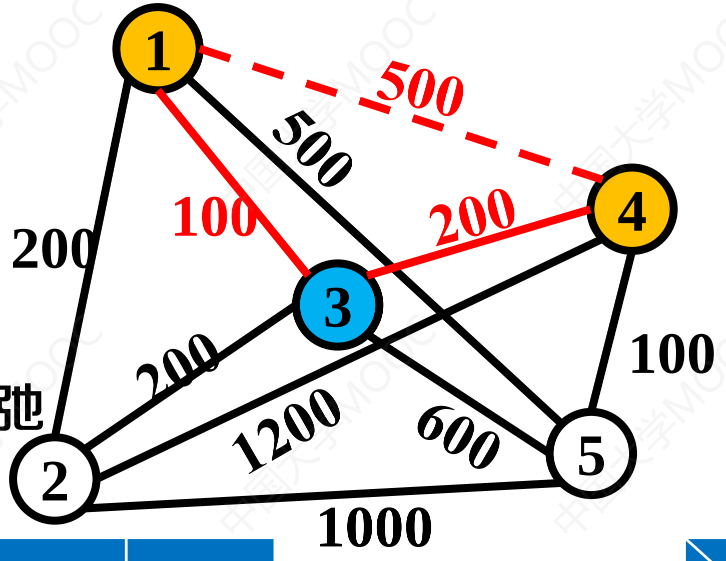
i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	500	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 2$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$



从1到4路径得到松弛

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	500
2	200	0	200	700	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 3$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	500
2	200	0	200	400	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 3$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	0
2	0	0	0	3	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	500
2	200	0	200	400	700
3	100	200	0	200	600
4	500	700	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 3$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	0
2	0	0	0	3	1
3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	500
2	200	0	200	400	700
3	100	200	0	200	600
4	300	400	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 3$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	0
2	0	0	0	3	1
3	0	0	0	0	0
4	3	3	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	500
2	200	0	200	400	700
3	100	200	0	200	600
4	300	400	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 3$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	0
2	0	0	0	3	1
3	0	0	0	0	0
4	3	3	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	700
3	100	200	0	200	600
4	300	400	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 4$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	1
3	0	0	0	0	0
4	3	3	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	600
4	300	400	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 4$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	0
4	3	3	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 4$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	500	700	600	100	0

$k = 4$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	0	0	0	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

$k = 4$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

$k = 5$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

$k = 5$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

$k = 5$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

$k = 5$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$

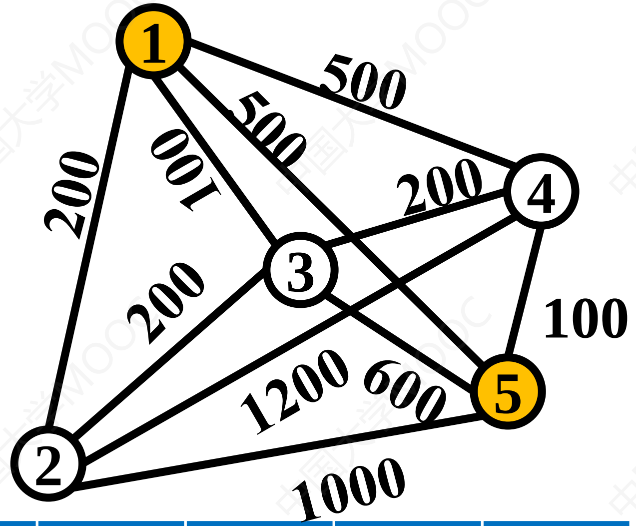
i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

$k = 5$

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$
- 查询从1到5的最短路



D

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

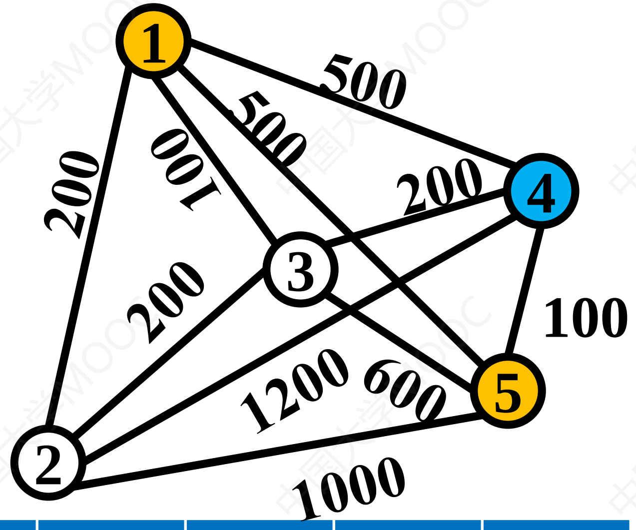
$k = 5$

Rec

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$
- 查询从1到5的最短路



D

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

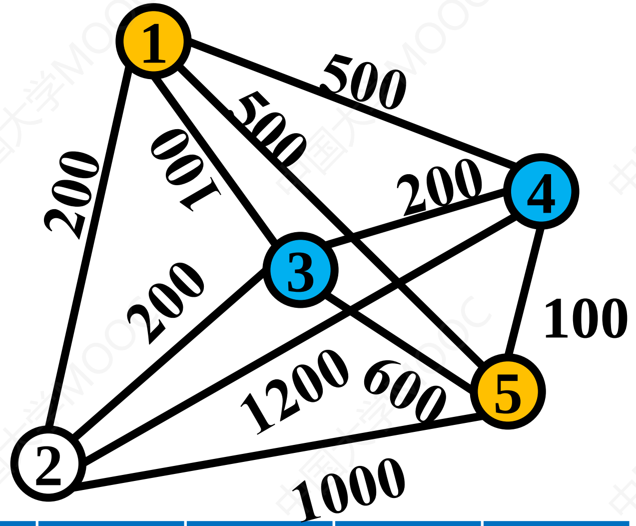
$k = 5$

Rec

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$
- 查询从1到5的最短路



D

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

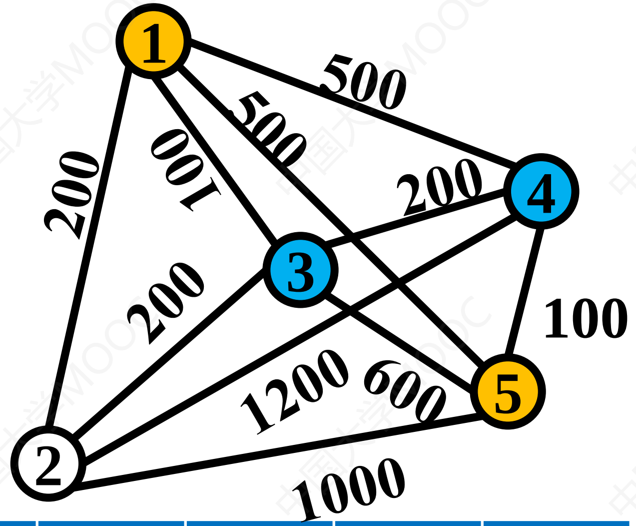
$k = 5$

Rec

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$
- 查询从1到5的最短路



D

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

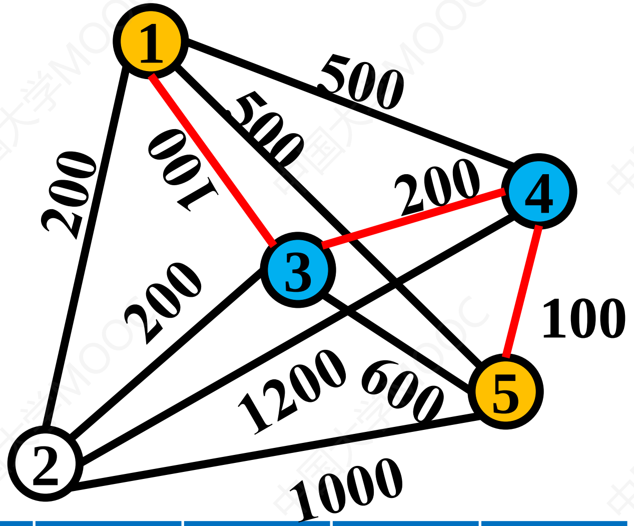
$k = 5$

Rec

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

算法实例

- $D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}$
- 查询从1到5的最短路



D

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	200	100	300	400
2	200	0	200	400	500
3	100	200	0	200	300
4	300	400	200	0	100
5	400	500	300	100	0

$k = 5$

Rec

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	0	3	4
2	0	0	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	3	3	0	0	0
5	4	4	4	0	0

提纲

- 问题定义
- 算法思想
- 算法设计
- 算法实例
- 算法分析

伪代码

- **All-Pairs-Shortest-Paths(G)**

输入: 图$G = < V, E, W >$
输出: 任意两点最短路径
新建二维数组$D[1..|V|, 1..|V|], Rec[1..|V|, 1..|V|]$

```
for i ← 1 to |V| do
    for j ← 1 to |V| do
        Rec[i, j] ← 0
        if i = j then
            D[i, j] ← 0
        end
        else
            D[i, j] ← W[i, j]
        end
    end
end
```

初始化

伪代码

- **All-Pairs-Shortest-Paths(G)**

输入: 图$G = < V, E, W >$
输出: 任意两点最短路径
新建二维数组$D[1..|V|, 1..|V|], Rec[1..|V|, 1..|V|]$

```
for i ← 1 to |V| do
    for j ← 1 to |V| do
        Rec[i, j] ← 0
        if i = j then
            D[i, j] ← 0
        end
        else
            D[i, j] ← W[i, j]
        end
    end
end
```

起终点相同，距离为0

起终点不同，距离为边权

伪代码

- **All-Pairs-Shortest-Paths(*G*)**

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for } k \leftarrow 1 \textit{ to } |V| \textbf{ do} \\
\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textit{ to } |V| \textbf{ do} \\
\quad\quad \textbf{for } j \leftarrow 1 \textit{ to } |V| \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad \textbf{if } D[i,j] > D[i,k] + D[k,j] \textbf{ then} \\
\quad\quad\quad\quad D[i,j] \leftarrow D[i,k] + D[k,j] \\
\quad\quad\quad\quad Rec[i,j] \leftarrow k \\
\quad\quad\quad \textbf{end} \\
\quad\quad \textbf{end} \\
\quad \textbf{end} \\
\textbf{end} \\
\textbf{return } D, Rec
\end{array}
$$

按照*k*增大的顺序

伪代码

- **All-Pairs-Shortest-Paths(*G*)**

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for } k \leftarrow 1 \textit{ to } |V| \textbf{ do} \\
\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textit{ to } |V| \textbf{ do} \\
\quad\quad \textbf{for } j \leftarrow 1 \textit{ to } |V| \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad \textbf{if } D[i,j] > D[i,k] + D[k,j] \textbf{ then} \\
\quad\quad\quad\quad D[i,j] \leftarrow D[i,k] + D[k,j] \\
\quad\quad\quad\quad Rec[i,j] \leftarrow k \\
\quad\quad\quad \textbf{end} \\
\quad\quad \textbf{end} \\
\quad \textbf{end} \\
\textbf{end} \\
\textbf{return } D, Rec
\end{array}
$$

松弛操作

伪代码

- **Find-Path(Rec, u, v)**

输入: 备忘数组Rec,起点u,终点v
输出: 最短路径(逆序)

if $Rec[u,v] = 0$ **then**
    print v
    return
end
$k \leftarrow Rec[u,v]$
Find-Path(Rec, u, k)
Find-Path(Rec, k, v)

没有中间点，直接输出

伪代码

- **Find-Path(Rec, u, v)**

```
输入: 备忘数组Rec,起点u,终点v
输出: 最短路径(逆序)
if Rec[u, v] = 0 then
    print v
    return
end
k ← Rec[u, v]
Find-Path(Rec, u, k)
Find-Path(Rec, k, v)
```

有中间点，递归查找

时间复杂度

- **All-Pairs-Shortest-Paths(G)**

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for } k \leftarrow 1 \text{ } to \text{ } |V| \textbf{ do} \\
\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \text{ } to \text{ } |V| \textbf{ do} \\
\quad\quad \textbf{for } j \leftarrow 1 \text{ } to \text{ } |V| \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad \textbf{if } D[i,j] > D[i,k] + D[k,j] \textbf{ then} \\
\quad\quad\quad\quad D[i,j] \leftarrow D[i,k] + D[k,j] \\
\quad\quad\quad\quad Rec[i,j] \leftarrow k \\
\quad\quad\quad \textbf{end} \\
\quad\quad \textbf{end} \\
\quad \textbf{end} \\
\textbf{end} \\
\textbf{return } D, Rec
\end{array}
$$

$O(|V|)$ $O(|V|^2)$ $O(|V|^3)$

时间复杂度：$O(|V|^3)$

算法小结

- 该算法由Floyd和Warshall于1962年分别提出
- 也被称为Floyd-Warshall算法

Robert Floyd
1936-2001

Stephen Warshall
1935-2006

算法小结

- **直观思路：使用Dijkstra算法依次求解所有点**

输入: 图G
输出: 任意两点最短路径
for $i \leftarrow 1$ *to* $|V|$ **do**
  $Paths[i] \leftarrow \boxed{Dijkstra - PriQueue(G,i)}$
end
return $Paths$

$$\left.\boldsymbol{O(|E|\log|V|)}\right\} \boldsymbol{O(|V||E|\log|V|)}$$

回顾

//执行单源最短路径算法
while 优先队列Q非空 **do**
  $v \leftarrow Q.ExtractMin()$
  for $u \in G.adj[v]$ **do**
    if $dist[v] + w(v,u) < dist[u]$ **then**
      $dist[u] \leftarrow dist[v] + w(v,u)$
      $pred[u] \leftarrow v$
      $Q.DecreaseKey((u, dist[u]))$
    end
  end
  $color[v] \leftarrow BLACK$
end

时间复杂度$O(|E| \cdot \log|V|)$

算法小结

- **直观思路：使用Dijkstra算法依次求解所有点**

输入: 图G
输出: 任意两点最短路径
for $i \leftarrow 1$ *to* $|V|$ **do**
  $Paths[i] \leftarrow Dijkstra - PriQueue(G, i)$
end
return $Paths$

$\boldsymbol{O(|E|\log|V|)}$ $\boldsymbol{O(|V||E|\log|V|)}$

- **Floyd-Warshall算法时间复杂度：** $\boldsymbol{O(|V|^3)}$

算法小结

- **直观思路：使用Dijkstra算法依次求解所有点**

输入: 图G
输出: 任意两点最短路径
for $i \leftarrow 1$ *to* $|V|$ **do**
  $Paths[i] \leftarrow Dijkstra - PriQueue(G, i)$
end
return $Paths$

$\boldsymbol{O(|E|\log|V|)}$ $\boldsymbol{O(|V||E|\log|V|)}$

针对稠密图
$\boldsymbol{|E| = O(|V|^2)}$

$\boldsymbol{O(|V|^3\log|V|)}$

- **Floyd-Warshall算法时间复杂度：** $\boldsymbol{O(|V|^3)}$

算法小结

- **直观思路：使用Dijkstra算法依次求解所有点**

输入: 图G
输出: 任意两点最短路径
for $i \leftarrow 1$ *to* $\lvert V \rvert$ **do**
$\quad \mid \quad Paths[i] \leftarrow Dijkstra-PriQueue(G, i)$
end
return $Paths$

$$\left.O(|E|\log|V|)\right\} \quad O(|V||E|\log|V|)$$

针对稠密图

$|E| = O(|V|^2)$

- **Floyd-Warshall算法时间复杂度：** $O(|V|^3)$ 优于 $O(|V|^3\log|V|)$

最短路径算法小结

最短路径算法

- 单源最短路径算法
  - 广度优先搜索（适用于边权都为1的情况）
    $O(|V|+|E|)$
  - Dijkstra算法（适用于边权全非负的情况）
    $O(|E|\cdot\log|V|)$
  - Bellman-Ford算法（适用于边权可以为负的情况）
    $O(|E|\cdot|V|)=O(|V|^3)$（稠密图中$|E|=O(|V|^2)$）
- 所有点对最短路径算法 Floyd-Warshall算法（适用于边权可以为负的情况）
  $O(|V|^3)$