3.1 已知在时间区间$(\mathbf{0}, \mathbf{2\pi})$上的方波信号

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{0} < \boldsymbol{t} < \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{-1}, & \boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{t} < \mathbf{2\pi} \end{cases}$$

（1）如用在同一时间上的正弦信号来近似表示此方波信号，要求方均误差最小，写出此正弦信号的表达式；

（2）证明此信号与同一时间区间上的余弦信号$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{nt}$（$\boldsymbol{n}$为整数）正交。

解：（1）使用同一区间的正弦信号来近似$f(t)$，则设$f(t) \approx A\sin t$，$0 < t < 2\pi$。故方均误差$M(A) = \frac{\int_0^{2\pi}[f(t)-A\sin t]^2\mathrm{d}t}{2\pi}$，要使得方均误差最小，故令其导数为零求其极值点。对$M(A)$关于A求导可得：$M'(A) = \frac{\int_0^{2\pi}[f(t)-A\sin t](-\sin t)\mathrm{d}t}{\pi}$，令导数$M'(A) = 0$，可得$\int_0^{2\pi} A\sin^2 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = 0$，故可解得：$A = \frac{4}{\pi}$。故$f(t) \approx \frac{4}{\pi}\sin t$，$0 < t < 2\pi$。

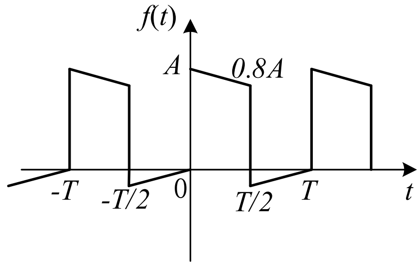
或者：使用投影的思想，求原信号在正弦信号上的投影系数

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi}$$

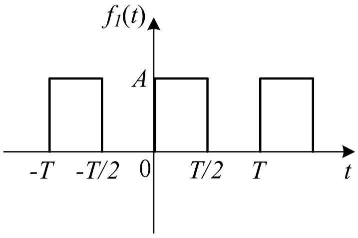
故所求正弦信号为$g(t) = \frac{4}{\pi}\sin t$，$0 < t < 2\pi$

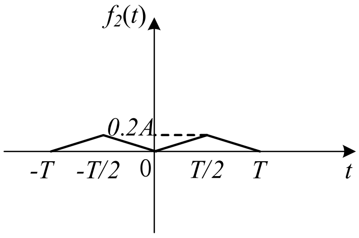
（2）$\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t = 0$，故此信号与同一时间区间上的余弦信号$\cos nt$（$n$为整数）正交。

3.6 利用周期性矩形脉冲与周期性三角形脉冲的傅里叶级数展开式（3-26）及式（3-34），求图示信号的傅里叶级数。



解：题示信号$f(t)$可以分解为$f_1(t)$与$f_2(t)$两个信号之差，$f_1(t)$与$f_2(t)$如下图所示：





故$f(t)=f_1(t)-f_2(t)$。在一个周期内：$f_1(t)=A\left[\varepsilon(t)-\varepsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$，$0<t<\frac{T}{2}$

求其傅里叶级数系数：

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f_1(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A\mathrm{d}t=A$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f_1(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2A}{T}\frac{\sin\frac{2n\pi t}{T}\Big|_0^{\frac{T}{2}}}{\frac{2n\pi}{T}}=\frac{A}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)-\sin\frac{2n\pi\cdot 0}{T}\right]=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{A}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]$$

$$=\begin{cases}\frac{2A}{n\pi}, & n=1,3,5,\ldots\ldots\\ 0, & n=2,4,6,\ldots\ldots\end{cases}=\begin{cases}\frac{2A}{(2k+1)\pi}, & k=0,1,2,\ldots\ldots\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

所以：

$$f_1(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

由于$f_2(t)$为偶函数，故仅需写出$f_2(t)$在半个周期内的表达式：$f_2(t)=\frac{2}{T}(0.2A)t\left[\varepsilon(t)-\varepsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$，$0<t<\frac{T}{2}$，故求其傅里叶级数系数得：

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0.2A$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{0.4A}{T}t\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1.6A}{T^2}\left[\frac{T}{2n\pi}\mathrm{tsin}\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+\frac{T^2}{4n^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{0.4A}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{0.8A}{n^2\pi^2},n=\text{奇数}\\ 0\text{，}n=\text{偶数}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-0.8A}{(2k+1)^2\pi^2},k=0,1,2,\dots\dots\\ 0\text{，}n=2k\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\Omega t\,\mathrm{d}t=0$$

故有：

$$f_2(t)=0.1A-\frac{0.8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

因此：

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t)$$

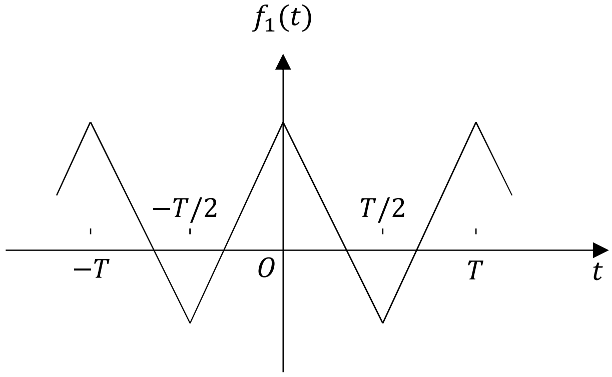
$$=0.4A+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

$$+\frac{0.8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

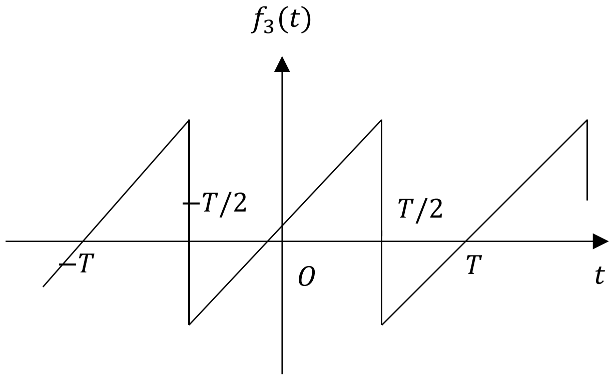
$$=0.4A\left\{1+\frac{5}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]\right\}$$

3.10 利用信号的奇偶性，判断下图所示信号的傅里叶级数所包含的分量。



(1)



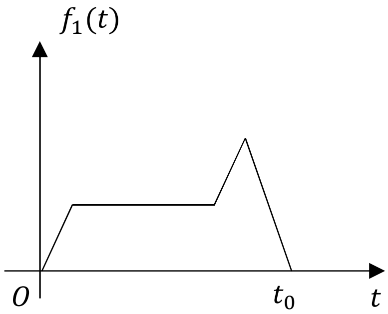
(2)

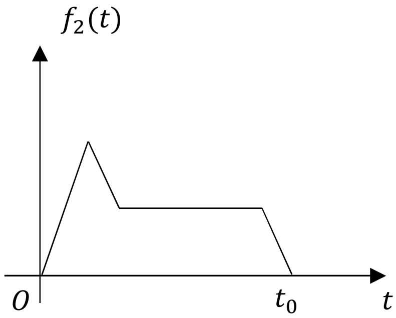
解：

（1）$f_1(t)$是偶函数，且一个周期内积分为 0，故其傅里叶级数不含正弦项谐波和直流分量。又由于$f_1\left(t+\frac{T}{2}\right)=-f_1(t)$，故$f_1(t)$为奇谐函数，所以其傅里叶级数只含奇次余弦项谐波分量。

（2）$f_3(t)$是奇函数，所以不含余弦项谐波和直流分量，即其傅里叶级数只含正弦项谐波分量。

3.11 已知$\boldsymbol{f_1(t)}$频谱函数为$\boldsymbol{F_1(j\omega)}$，$\boldsymbol{f_2(t)}$与$\boldsymbol{f_1(t)}$波形有如下图，试用$\boldsymbol{f_1(t)}$的频谱函数$\boldsymbol{F_1(j\omega)}$来表示$\boldsymbol{f_2(t)}$的频谱函数$\boldsymbol{F_2(j\omega)}$。





解：由题意知，$F_1(j\omega)$=$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

由信号的尺度变换可知 $f_2(t)=f_1(-t+t_0)$

故　$F_2(j\omega)$=$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-t+t_0) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$

令$t_1 = -t + t_0$，则$t = t_0 - t_1$，$e^{-j\omega t} \to e^{-j\omega t_0}\, e^{j\omega(-t+t_0)} = e^{-j\omega t_0} e^{-j\omega t_1}$

则，上式　$F_2(j\omega)$ $= \int_{\infty}^{-\infty} f_1(t_1) e^{j\omega t_1} e^{-j\omega t_0} \mathrm{d}(t_0 - t_1)$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1) e^{j\omega t_1} \mathrm{d}(t_1)$$

$$= e^{-j\omega t_0} F_1(-j\omega)$$

综上，$F_2(j\omega) = e^{-j\omega t_0} F_1(-j\omega)$