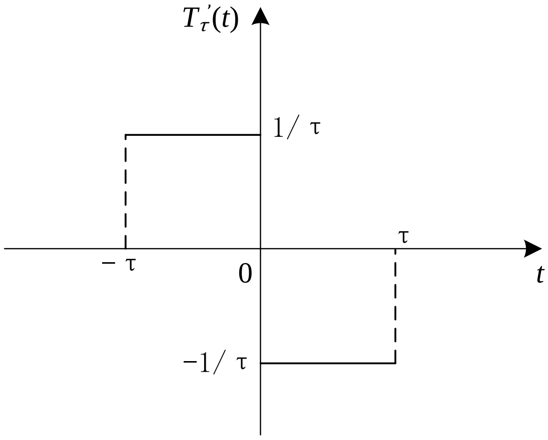
3-18 由表 3-1 中第 13 号矩形脉冲的频谱函数导出第 17 号三角形脉冲的频谱函数。

（1）用时域微分、积分特性；

（2）用时域卷积定理。

解：

（1）三角形脉冲信号$T_\tau(t)=\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)[\varepsilon(t+\tau)-\varepsilon(t-\tau)]$，绘制其导数波形图如下所示。



又因为$G_\tau(t)=\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$，因此可得$T_\tau'(t)=\frac{1}{\tau}G_\tau\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{\tau}G_\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$。

据表 3-1 知：$G_\tau(t)\leftrightarrow\tau\mathrm{Sa}(\frac{\tau\omega}{2})$，所以根据傅里叶变换的时延特性有：

$$
\begin{aligned}
FT[T_\tau'(t)]&=\frac{1}{\tau}\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-\frac{1}{\tau}\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\\
&=\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)\left(e^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\right)\\
&=2\mathrm{j}\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)\sin\frac{\tau\omega}{2}|_{\omega=0}=0
\end{aligned}
$$

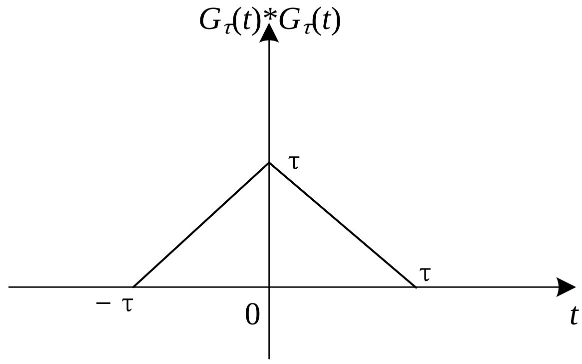
再根据时域的积分特性有：

$$
T(j\omega)=\frac{2\mathrm{j}\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)\sin\frac{\tau\omega}{2}}{\mathrm{j}\omega}=\tau\left[\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)\right]^2
$$

（2）由表 3-1 知：$G_\tau(t)=\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
G_\tau(t)*G_\tau(t)&=\left[\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]*\left[\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\\
&=(t+\tau)\varepsilon(t+\tau)+(t-\tau)\varepsilon(t-\tau)-2t\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

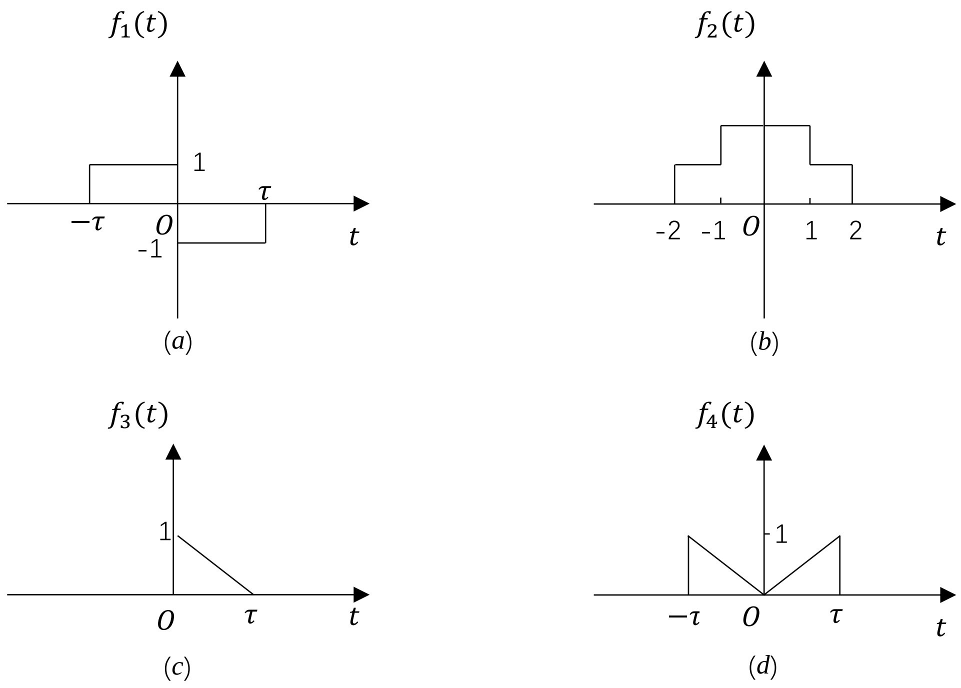
其图像如下图所示，故有$T_\tau(t) = \frac{1}{\tau} G_\tau(t) * G_\tau(t)$。



故根据时域卷积定理有：

$$T(j\omega) = \frac{1}{\tau}\left[\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)\right] \times \left[\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)\right]$$
$$= \tau \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

3-20 由冲激函数的频谱函数求下图所示波形信号的频谱函数。



解：（**1**）由图（a）可得

$f_1(t)=[\varepsilon(t+\tau)-\varepsilon(t)]-[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)]=\varepsilon(t+\tau)-2\varepsilon(t)+\varepsilon(t-\tau)$

求导得： $f_1'(t)=\delta(t+\tau)-2\delta(t)+\delta(t-\tau)$

由时移性质有 $FT[f_1'(t)]=e^{\mathrm{j}\omega\tau}-2+e^{-\mathrm{j}\omega\tau}=2\cos\omega\tau-2|_{\omega=0}=0$

由积分性质有 $F_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{2(\cos\omega\tau-1)}{\mathrm{j}\omega}=\frac{4\mathrm{j}\sin^2\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$

所以，$f_1(t)$的傅里叶变换为$F_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{4\mathrm{j}\sin^2\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$

（**2**）由图（b）可得 $f_2(t)=\varepsilon(t+2)+\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$

求导得： $f_2'(t)=\delta(t+2)+\delta(t+1)-\delta(t-1)-\delta(t-2)$

由时移性质有，$FT[f_2'(t)]=e^{2\mathrm{j}\omega}+e^{\mathrm{j}\omega}-e^{-\mathrm{j}\omega}-e^{-2\mathrm{j}\omega}$

$$=2\mathrm{j}[\sin\omega+\sin(2\omega)]|_{\omega=0}=0$$

由积分性质得 $F_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{2\mathrm{j}[\sin\omega+\sin(2\omega)]}{\mathrm{j}\omega}=\frac{2}{\omega}[\sin\omega+\sin(2\omega)]$

所以，$f_2(t)$的傅里叶变换为$F_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{2}{\omega}[\sin\omega+\sin(2\omega)]$

（**3**）由图（c）可得 $f_3(t)=-\frac{1}{\tau}(t-\tau)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)]$

$f_3(t)$的二阶导数为 $f_3''(t)=-\frac{1}{\tau}[\delta(t)-\delta(t-\tau)]+\delta'(t)$

由傅里叶变换的线性与时域微分性质有

$$FT[f_3''(t)]=-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}e^{-\mathrm{j}\omega\tau}+\mathrm{j}\omega|_{\omega=0}=0$$

$$FT[f_3'(t)]=\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left(-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}e^{-\mathrm{j}\omega\tau}+\mathrm{j}\omega\right)\right]|_{\omega=0}=0$$

由积分性质有 $F_3(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}(-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}e^{-\mathrm{j}\omega\tau}+\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\omega^2\tau}(1-e^{-\mathrm{j}\omega\tau}-\mathrm{j}\omega\tau)$

故$f_3(t)$的傅里叶变化为：$F_3(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\omega^2\tau}(1-e^{-\mathrm{j}\omega\tau}-\mathrm{j}\omega\tau)$

（**4**）由图（d）得 $f_4(t)=f_3(t+\tau)+f_3(-t+\tau)$

由时移性，可得

$$[f_4(t)]=F_3(\omega)e^{\mathrm{j}\omega\tau}+F_3(-\omega)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}$$

$$=\left[\frac{1}{\omega^2\tau}\left(1-e^{-\mathrm{j}\omega\tau}-\mathrm{j}\omega\tau\right)\right]e^{\mathrm{j}\omega\tau}+\left[\frac{1}{\omega^2\tau}\left(1-e^{-\omega\tau}+\mathrm{j}\omega\tau\right)\right]e^{-\mathrm{j}\omega\tau}$$

$$=2\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau)-\tau\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

故$f_3(t)$的傅里叶变化为：$F_4(\mathrm{j}\omega)=2\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau)-\tau\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{2})$

4.3 如图 P4-2(b)所示的周期性矩形脉冲信号，加到一个$\mathbf{90°}$相移网络上，其转移函数

$$\boldsymbol{H(j\omega)=\begin{cases}-j, & \omega>0\\ j, & \omega<0\end{cases}}$$

试求输出中不为零的前三个分量，并叠加绘出响应的近似波形，与激励中前三个分量叠加的波形作比较。

解：首先求原信号的傅里叶级数：

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}i(t)\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t=\frac{2A}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t=\frac{2A\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

又因$\Omega=\frac{2\pi}{T}$，$\tau=\frac{T}{2}$，所以$a_n=A\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$。同理可求：$b_n=0$。

所以$i(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\left(\cos\Omega t-\frac{1}{3}\cos 3\Omega t+\frac{1}{5}\cos 5\Omega t-\cdots\right)$。故其前三个不为零的分量为：

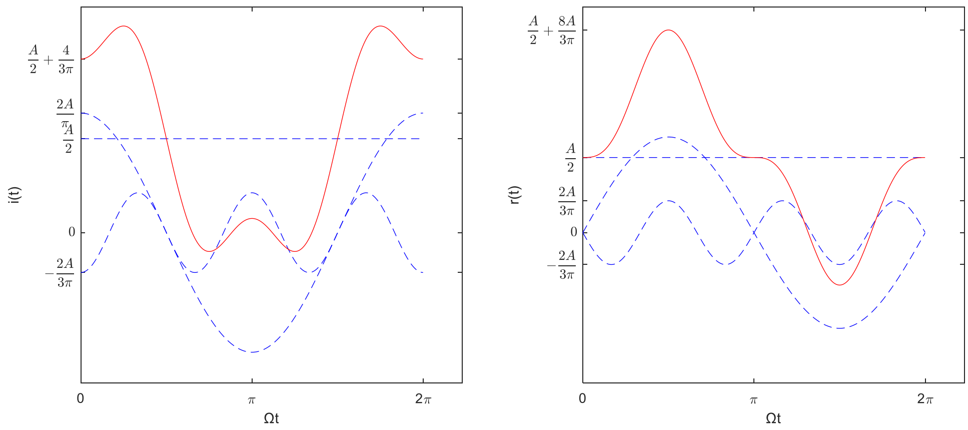
$$\dot{E}_0=\frac{A}{2}$$
$$\dot{E}_1=\frac{2A}{\pi}\angle 0°$$
$$\dot{E}_2=\frac{2A}{3\pi}\angle\pi$$

将信号中各频率分量的相量与频域系统函数在对应频率点上的相量一一相乘（幅度相乘、相位相加），且$-j=e^{-\frac{\pi}{2}j}=1\angle\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，故输出响应前三个不为零的分量为：

$$\dot{R}_0=\frac{A}{2}$$
$$\dot{R}_1=\frac{2A}{\pi}\angle\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\dot{R}_2=\frac{2A}{3\pi}\angle\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

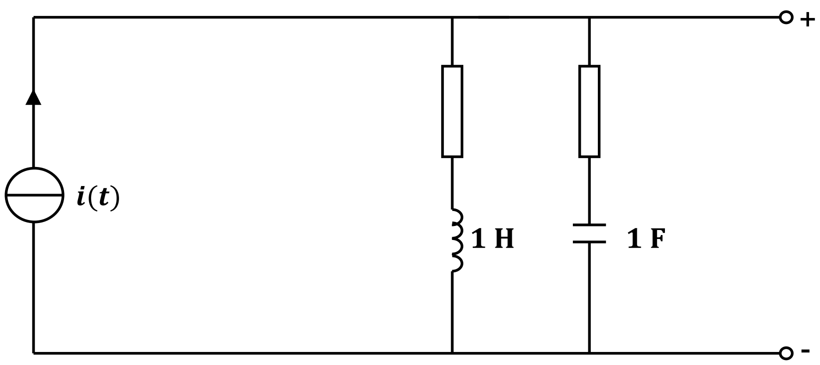
所以：
$$\begin{aligned}r(t)&\approx\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\left[\cos\left(\Omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(3\Omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&\approx\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\left[\sin(\Omega t)-\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)\right]\end{aligned}$$

绘制激励与响应的波形如下图所示：



比较激励与响应的波形可以发现：出现了失真现象，失真的原因是各谐波分量发生的相移相等，而非与谐波频率成线性关系，也就是说，各频率分量的延时不同。

4-14 在下图所示电路中，为使得输出电压$u_0(t)$与激励电流$i(t)$波形一样，求电阻R_1、R_2数值。



解：由电路图可得频响函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{R_1R_2+\frac{L}{C}+\mathrm{j}(\omega LR_2-\frac{R_1}{\omega C})}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{R_1R_2+\frac{L}{C}+\mathrm{j}(\omega LR_2-\frac{R_1}{\omega C})}{R_1+R_2+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})}$$

代入相关元件值得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{R_1R_2+1+\mathrm{j}(\omega R_2-\frac{R_1}{\omega})}{R_1+R_2+\mathrm{j}(\omega-\frac{1}{\omega})}$$

根据题意，为使得输出电压与激励电流波形一致，故有

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = 1 = \frac{\sqrt{(R_1R_2+1)^2+(\omega R_2-\frac{R_1}{\omega})^2}}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega-\frac{1}{\omega})^2}}$$

化简得 $$(R_1+R_2)^2+\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)^2=(R_1R_2+1)^2+\left(\omega R_2-\frac{R_1}{\omega}\right)^2$$

即 $$(R_1^2+2R_1R_2+R_2^2-2)+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)=$$

$$(R_1^2R_2^2+1+2R_1R_2-2\,R_1R_2)+\left(\omega^2R_2^2+\frac{R_1^2}{\omega^2}\right)$$

由于此式应对所有ω均成立，故有

$$\begin{cases} R_1^2+2R_1R_2+R_2^2-2=R_1^2R_2^2+1 \\ R_2^2=1 \\ R_1^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1=1\Omega \\ R_2=1\Omega \end{cases}$$

当$R_1=R_2=1\Omega$时，$H(\mathrm{j}\omega)=1$，系统不改变激励的相位，故可满足题设条件。

所以R_1、R_2的阻值均为1Ω。