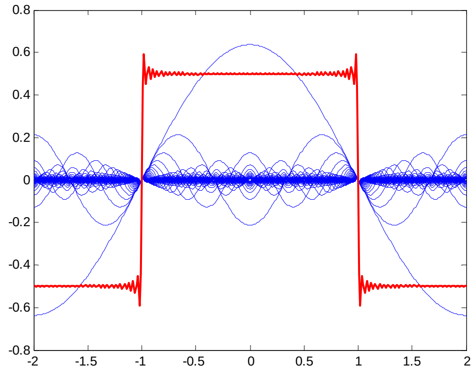
信号与系统

第12讲 离散时间系统基础及其响应

郭红星
华中科技大学计算机学院



本讲内容

- 离散时间系统的描述和有关概念
  - 系统模型
  - 线性移不变离散时间系统
- 离散时间系统的响应
  - 离散时间系统方程的解法
  - 单位样值响应的计算
  - 卷积和及其计算
- 学习目标
  - 熟悉离散时间系统的建模途径
  - 掌握离散时间系统响应的解法
  - 用心体会自然界的比例协调美

6.3 离散时间系统基础

离散时间系统

定义：一个系统，若输入是离散时间信号，输出也是离散时间信号，则此系统为离散时间系统

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow y(n)=T[x(n)]$$

连续时间系统与离散时间系统的类比

- **连续系统**
  - 微分方程 $$C_0\frac{d^n r(t)}{dt^n}+C_1\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\ldots C_{n-1}\frac{dr(t)}{dt}+C_n r(t)=E_0\frac{d^m e(t)}{dt^m}+E_1\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\ldots E_{m-1}\frac{de(t)}{dt}+E_m e(t)$$
  - 卷积积分
  - 拉氏变换
  - 连续傅里叶变换
  - 卷积定理

- **离散系统**
  - ？？方程
  - ？？？
  - ？变换
  - 离散傅里叶变换？
  - 卷积定理？

离散时间系统方程的建立

例题1：如果在第n个月初向银行存款$x(n)$元，月息为a，每月利息不取出，试用方程写出第n月初的本利和。

解：设第n个月的本利$y(n)$包括下列三个方面：

1.第$(n-1)$个月的本利$y(n-1)$

2.第$(n-1)$个月的利息$ay(n-1)$

3.第n个月的存款$x(n)$

差分方程

所以：$\boxed{y(n)=x(n)+(1+a)y(n-1)}$

- **差分方程的阶**：差分方程的阶数等于未知序列变量序号最高与最低值之差。

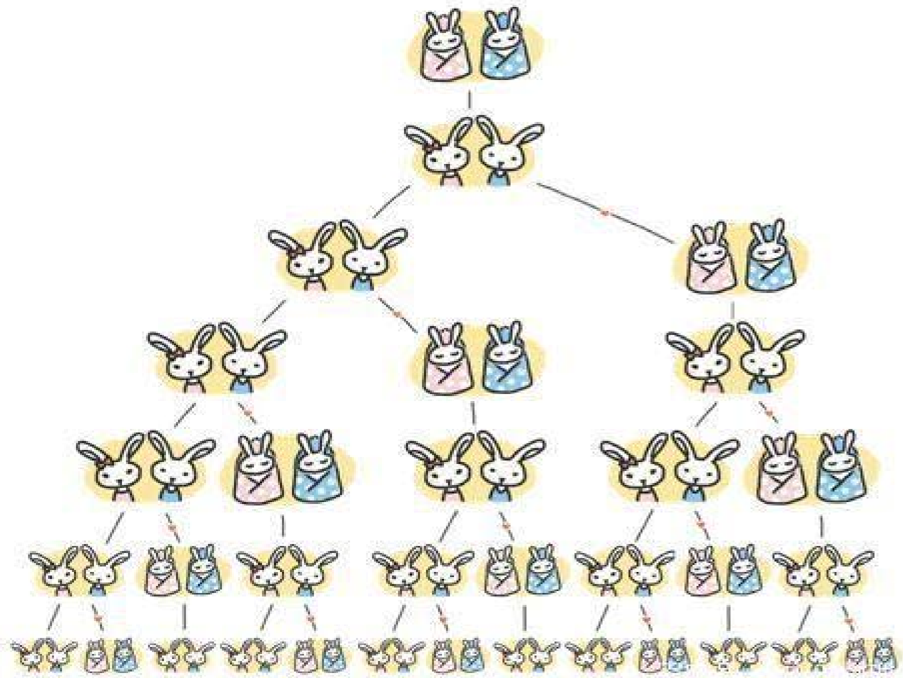
差分方程的建立

- 例题2：课本P318例题7－1－斐波那契数列的例子

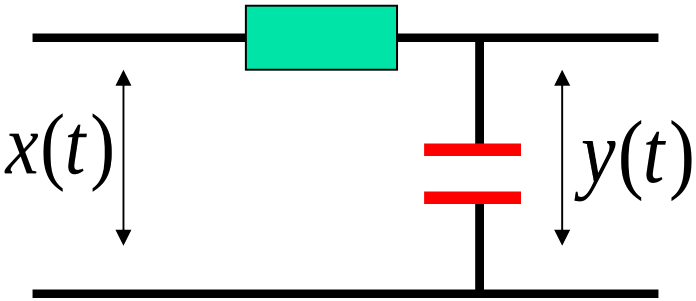
列昂纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci，1170－1250）意大利数学家。

发表于Liber Abaci（算盘全书，1202年）。

$$y(n+2)=y(n+1)+y(n)$$



从微分方程到差分方程：例题3



P319：例7-3

解： $RC\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$ 取近似： $y(t)\approx y(n)$

$$RC\frac{dy(t)}{dt}\approx\frac{RC}{T_s}[y(n+1)-y(n)]$$

$$\frac{RC}{T_s}[y(n+1)-y(n)]+y(n)=x(n)$$

$$y(n+1)=(1-\frac{T_s}{RC})y(n)+\frac{T_s}{RC}x(n)$$

此例说明，连续时间系统可以近似转化为离散时间系统

离散系统的数学模型

- **输入**是离散序列及其移序函数

$$x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots.$$

- **输出**是离散序列及其移序函数

$$y(n), y(n-1), y(n-2), \ldots.$$

- **系统模型**是输入输出的**移序**及其**加权和**间的等式

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

离散线性移不变系统

$$x_i(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y_i(n)$$

- 线性：

① 可加性： $\sum_{i=0}^{M} x_i(n) \Rightarrow \sum_{i=0}^{M} y_i(n)$

② 均匀性： $a_i x_i(n) \Rightarrow a_i y_i(n)$

- 移不变性 $x_i(n-m) \Rightarrow y_i(n-m)$

判别系统LTI性：例题4解答

$$1.\ y(n) = 2x(n) + 3$$

解：
$$y_1(n) = T[x_1(n)] = 2x_1(n) + 3$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = 2x_2(n) + 3$$

$$\because T[ax_1(n) + bx_2(n)] = 2[ax_1(n) + bx_2(n)] + 3 \neq ay_1(n) + by_2(n)$$

$\therefore$ 系统不是线性的

$$\because T[x(n-n_0)] = 2x(n-n_0) + 3 = y(n-n_0)$$

$\therefore$ 系统是移不变的

判别系统LTI性：例题4解答

$$2.\ y(n)=x(n)\sin(\frac{2\pi}{7}n+\frac{\pi}{6})$$

解： $y_1(n)=T[x_1(n)]=x_1(n)\sin(\frac{2\pi}{7}n+\frac{\pi}{6})$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]=x_2(n)\sin(\frac{2\pi}{7}n+\frac{\pi}{6})$$

$$\because T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin(\frac{2\pi}{7}n+\frac{\pi}{6})=ay_1(n)+by_2(n)$$

∴ 系统是线性的

$$T[x(n-n_0)]=x(n-n_0)\sin(\frac{2\pi}{7}n+\frac{\pi}{6}),\qquad y(n-n_0)=x(n-n_0)\sin(\frac{2\pi}{7}(n-n_0)+\frac{\pi}{6})$$

$$\because T[x(n-n_0)]\neq y(n-n_0)$$

∴ 系统不是移不变的

6.4 离散时间系统的响应

差分方程求解的迭代法—解例题1方程

- 当差分方程阶次较低时常用此法

例题1的一个实例

$$\boxed{y(n)=by(n-1)+x(n) \qquad x(n)=\delta(n)}$$

$$n=0 \quad y(0)=by(-1)+x(0)=0+\delta(n)=1$$

$$n=1 \quad y(1)=by(0)+x(1)=b+0=b$$

$$n=2 \quad y(2)=by(1)+x(2)=b.b+0=b^2$$

$$\vdots$$

$$n=k \quad y(k)=by(k-1)+x(k)=b^k$$

$$\therefore \quad y(n)=b^n u(n)$$

神奇的指数效应

积跬步以致千里
一杆松劲退千寻

$$1.005^{365}=6.17$$
$$0.995^{365}=0.16$$

$$0.99^{365}=0.03$$
$$1.01^{365}=37.8$$

聚沙成塔，集腋成裘

线性差分方程的经典解法

- 差分方程的一般形式：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- 解的构成：

$$\underbrace{y[n]}_{\text{全解}} = \underbrace{y_h[n]}_{\text{齐次解}} + \underbrace{y_p[n]}_{\text{特解}}$$

- 代入边界条件求出待定系数，于是得到完全解的闭合表达式

齐次解的形式

齐次方程	特征方程	特征根
$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$	$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{N-k}=0$	$\alpha_j \quad j=1,2,\cdots,N$

（1）特征根是不等实根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$

$$y_h[n]=C_1\alpha_1^{\,n}+C_2\alpha_2^{\,n}+\cdots+C_N\alpha_N^{\,n}$$ 推导过程！

（2）特征根是等实根 $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_K=\alpha$

$$y_h[n]=C_1\alpha^n+C_2 n\alpha^n+\cdots+C_K n^{K-1}\alpha^n$$ 推导过程！

（3）特征根是成对共轭复根 $\alpha_{1,2}=a\pm jb=\rho e^{\pm j\Omega_0}$

$$y_h[n]=C_1\rho^n\cos n\Omega_0+C_2\rho^n\sin n\Omega_0$$

特解的形式

- 强迫项为n^k的多项式，则特解为

$$D_1 n^K + D_2 n^{K-1} + \cdots + D_{K+1}$$

- 强迫项含有α^n且α不是齐次方程特征根，则特解为

$$D\alpha^n$$

- 强迫项含有α^n且α是单次齐次根，则特解

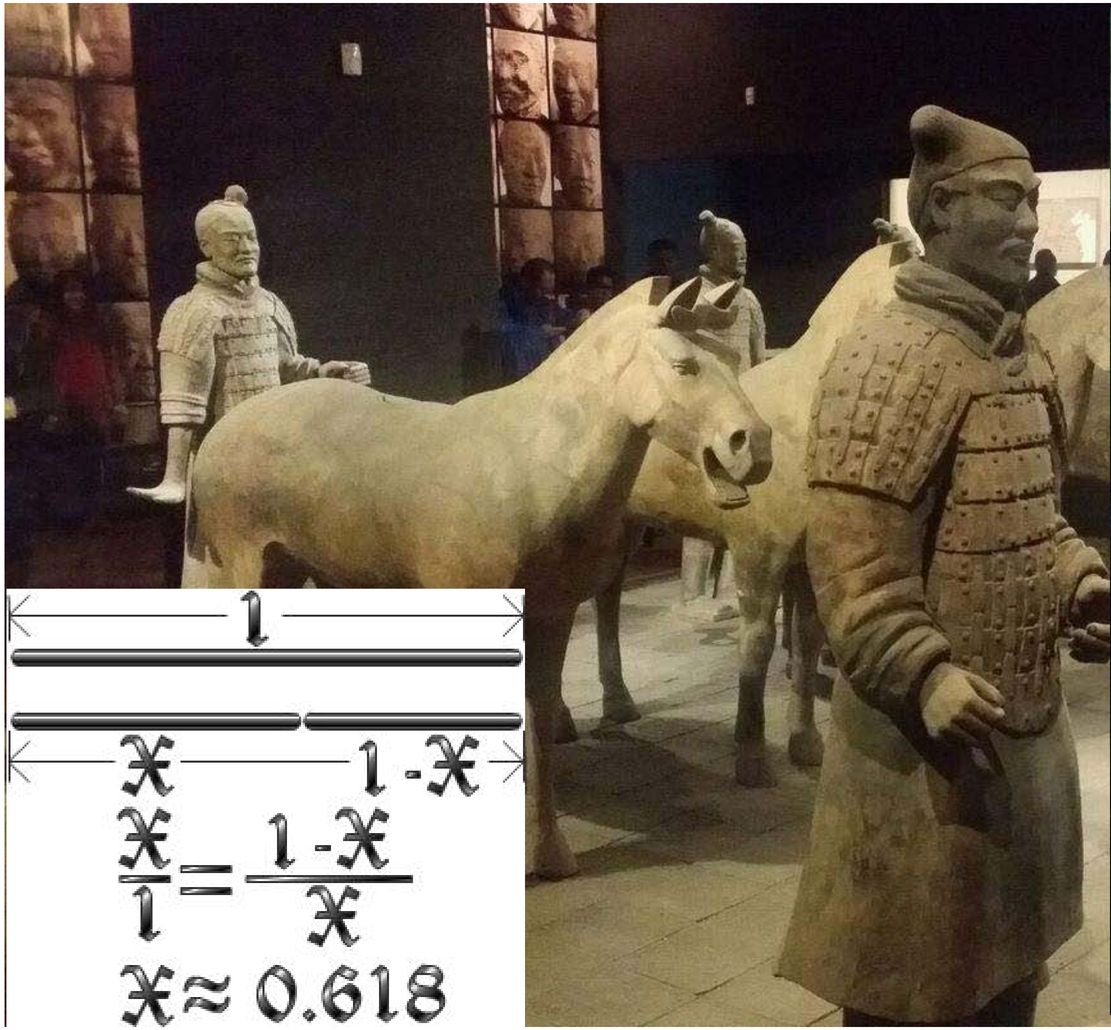
$$(D_1 n + D_2)\alpha^n$$

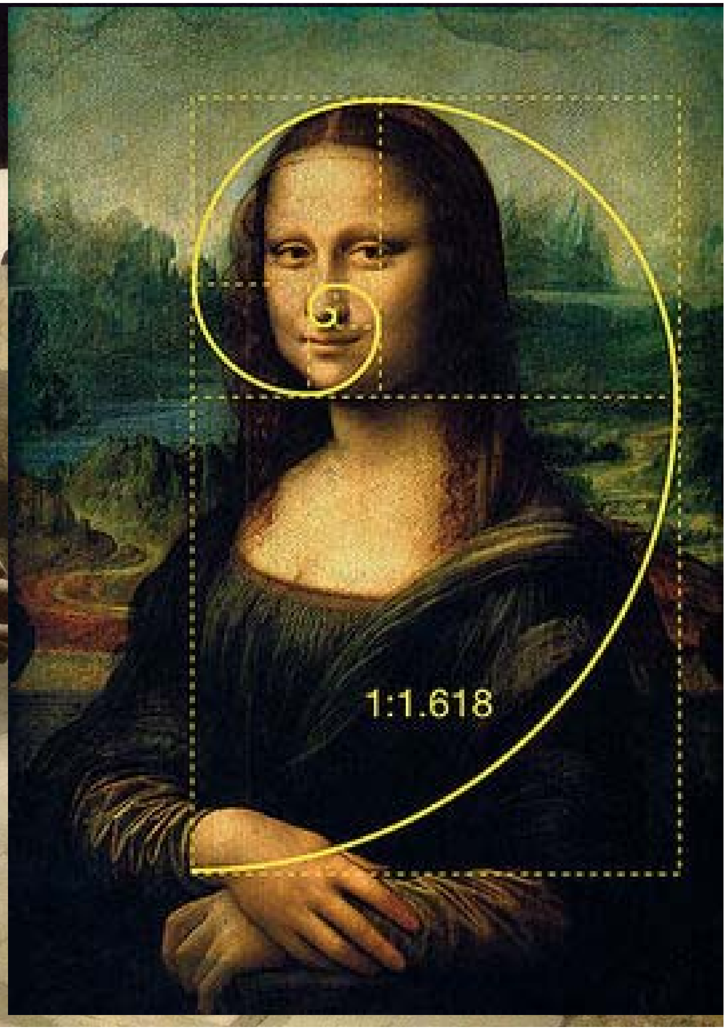
- 强迫项含有α^n且α是K次重齐次根，则特解

$$(D_1 n^K + D_2 n^{K-1} + \cdots + D_{K+1})\alpha^n$$

差分方程的求解：例题2的解

- 课本P328例题7－6－斐波那契数列的例子





系统全响应的时域经典解法:例题1的求解

- 例题1中线性时不变离散时间系统的差分方程为$y(n)=x(n)+(1+a)y(n-1)$，其中a=0.005，初始条件$y[-1]=1$, 输入信号$x[n]=1.005^n u[n]$，求系统的完全响应$y[n]$。

解: 1)求齐次方程$y[n]-1.005y[n-1]=0$的齐次解$y_h[n]$

特征方程为：λ-1.005=0,特征根为: λ=1.005

齐次解为:$y_h[n]=c\times 1.005^n$

为什么不写成
$y_p[n]=An\times 1.005^n+B\times 1.005^n$

2) 求非齐次方程$y(n)-1.005y(n-1)=x(n)$的特解$y_p[n]$

由输入$x[n]$的形式，设方程的特解为$y_p[n]=\boldsymbol{A}\times \boldsymbol{n}\times 1.005^n, \boldsymbol{n}\geq \boldsymbol{0}$

将特解代入原差分方程即可求得常数A=1。

3) 求方程的全解

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c\times 1.005^n+n\times 1.005^n,\quad n\geq 0$$

$$y[0]=c=2.005$$

$$y[n]=1.005^{n+1}+(n+1)\times 1.005^n,\quad n\geq 0$$

讨论：经典法不足之处

① 若激励信号发生变化，则须全部重新求解

② 若差分方程右边激励项较复杂，则难以处理

③ 若初始条件发生变化，则须全部重新求解

④ 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的因果关系

一种解决方案：将系统的全响应分解为零状态和零输入响应两个部分的叠加进行求解。

离散系统的全响应构成

完全响应$y(n)$＝通解(自由响应)＋特解(强迫响应)

＝零输入响应$y_{zi}(n)$＋零状态响应$y_{zs}(n)$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

零输入响应是系统在无输入激励情况下仅由初始条件引起的响应
零状态响应是系统在无初始储能或者初始状态为零的情况下，仅由外加激励源引起的响应

$$\because x(n) = 0$$

$$\therefore a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_N y(n-N) = 0$$

故系统的零输入响应$y_{zi}(n)$具有齐次解的形式

离散时间系统的单位样值响应

如何求系统单位样值响应？

- 将$\delta(n)$**转化**为起始条件，**零状态响应转化为齐次解**，即零输入解就是单位样值响应$h(n)$

例题1中系统的单位样值响应

- 例题1中线性时不变离散时间系统的差分方程为$y(n)=x(n)+by(n-1)$，求系统的单位样值响应$h[n]$(即输入信号$x[n]=\delta[n]$的响应)。

解： (1)确定单位样值信号输入系统$y[n]-by[n-1]=\delta(n)$引起的状态改变

$y[-1]=0,\ y[0]=1$

(2)求齐次方程$y[n]-by[n-1]=0$的齐次解$y_h[n]$

特征方程为：$\lambda-b=0$,特征根为: $\lambda=b$

齐次解为:$y_h[n]=c\times b^n$

(3) 根据初始条件确定系数$c=1$

$$\boxed{h(n)=b^n u(n)}$$

$x(n)\rightarrow$ 离散时间系统$h(n)$ $\rightarrow y(n)$

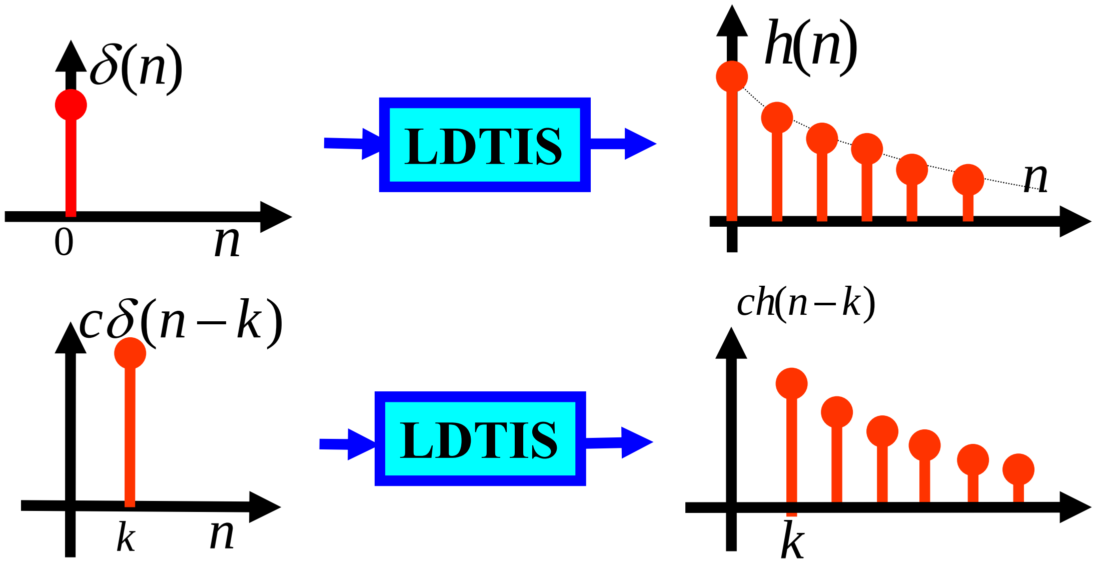
思考：

① 零输入响应与自由响应之间的关系？

② 如果方程右边出现$x(n-k)$项怎么办？

③ 求一般序列输入系统的零状态响应？

离散系统零状态响应的卷积和法



$$LTIS: y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

类比：卷积积分

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

因为任意序列$x(n)$都可以表示为加权、移位的单位取样序列$\delta(n)$之和

$$\therefore y_{zs}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

简记为

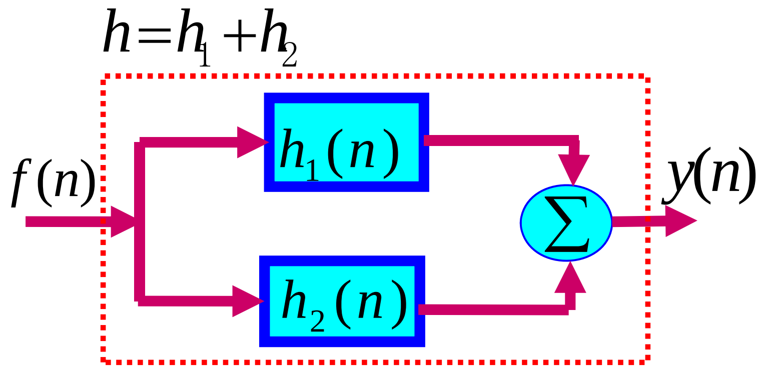
$$y_{zs}(n)=x(n)*h(n)$$

卷积和

卷积和的性质与系统联接关系

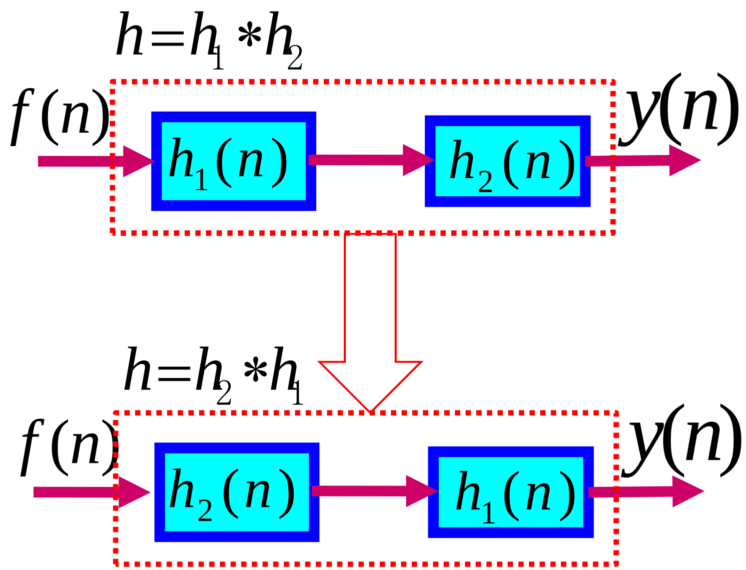
1.分配律

$$f(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=f(n)*h_1(n)+f(n)*h_2(n)$$



2.结合律

$$[f(n)*h_1(n)]*h_2(n)=f(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$



3.交换律

$$h_1(n)*h_2(n)=h_2(n)*h_1(n)$$

卷积和的性质

4. 卷积和的差分

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta y(k) &= \Delta e(k) * h(k) = e(k) * \Delta h(k) \\ \nabla y(k) &= \nabla e(k) * h(k) = e(k) * \nabla h(k)\end{aligned}}$$

5. 与单位样值序列的卷积

$$\boxed{e(k) * \delta(k) = e(k)}$$

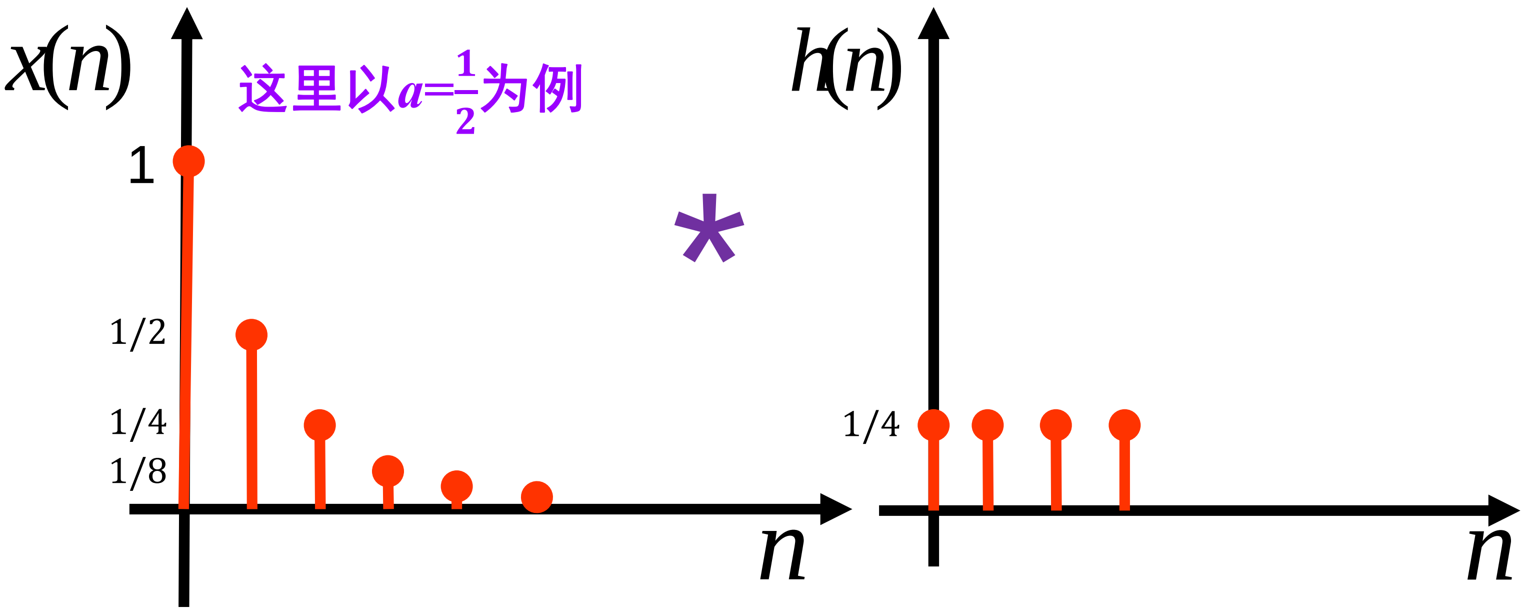
$$\boxed{e(k) * \delta(k-j) = e(k-j)} \quad \boxed{e(k-j_1) * \delta(k-j_2) = e(k-j_1-j_2)}$$

6. 位移（移序）序列的卷积

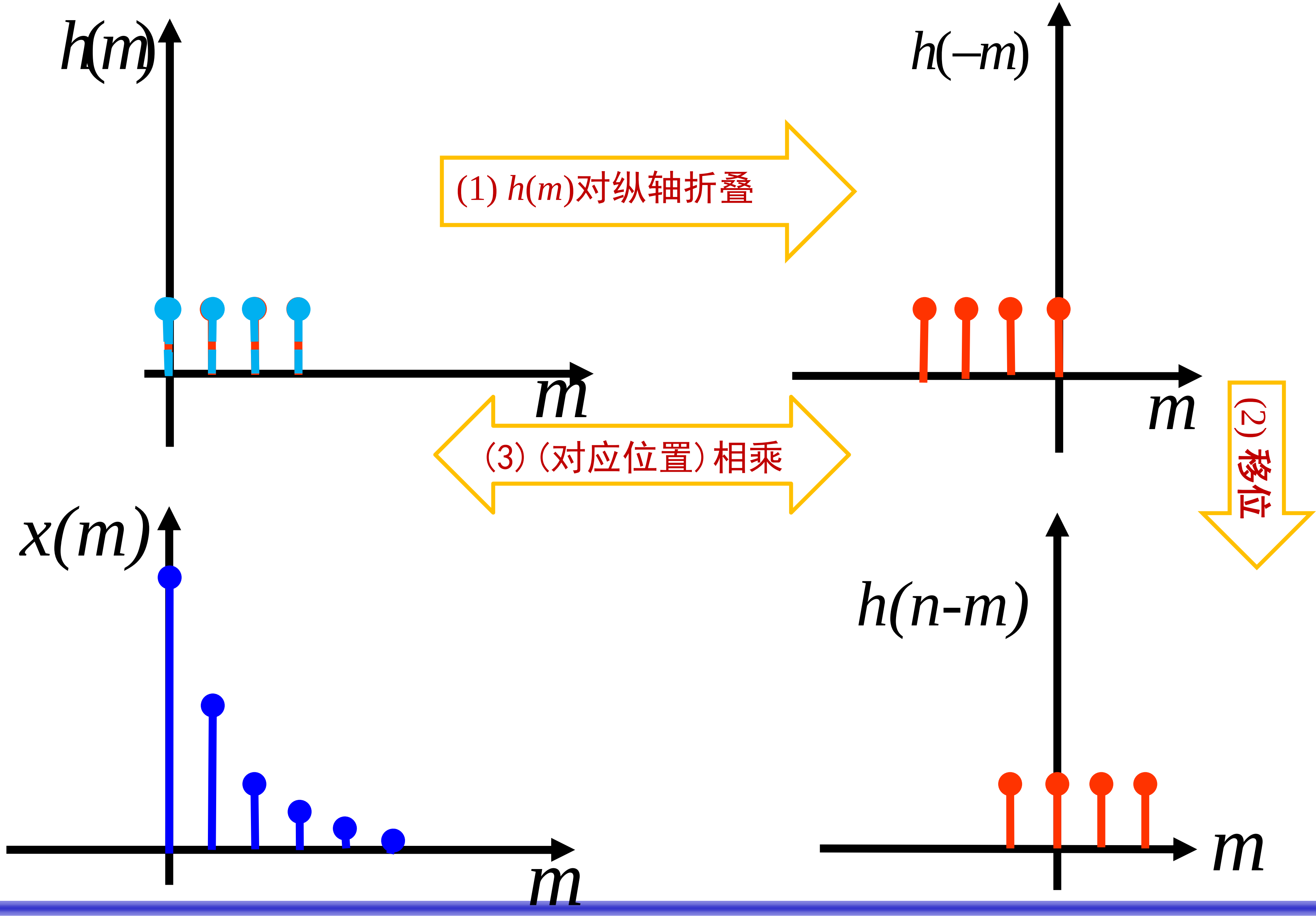
$$y(k-j) = e(k) * h(k-j) = e(k-j) * h(k) = e(k-j_1) * h(k-j+j_1)$$

卷积和计算的图解法

例题5. 某系统的单位样值响应为：$h(n)=\frac{1}{4}[u(n)-u(n-4)]$，若激励信号为$x(n)=a^n u(n)$,其中$0<a<1$,求系统响应$y(n)$。



卷积和计算的图解法

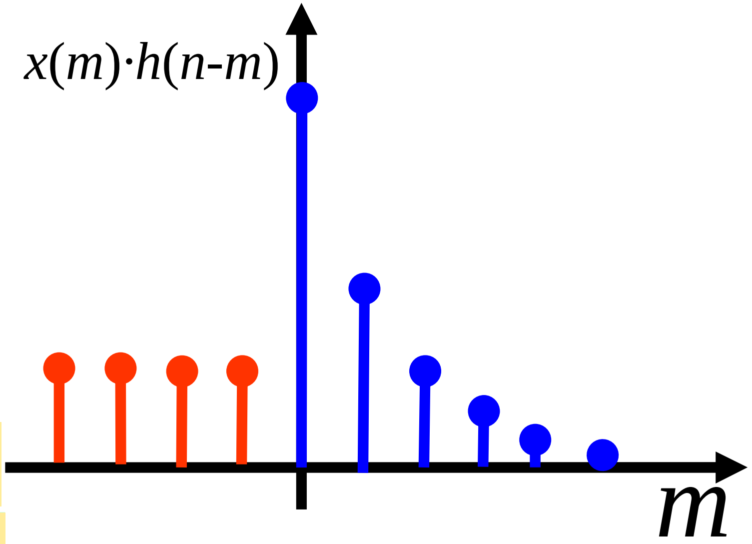


卷积和计算的图解法

(4) 求和。例如n=3时，

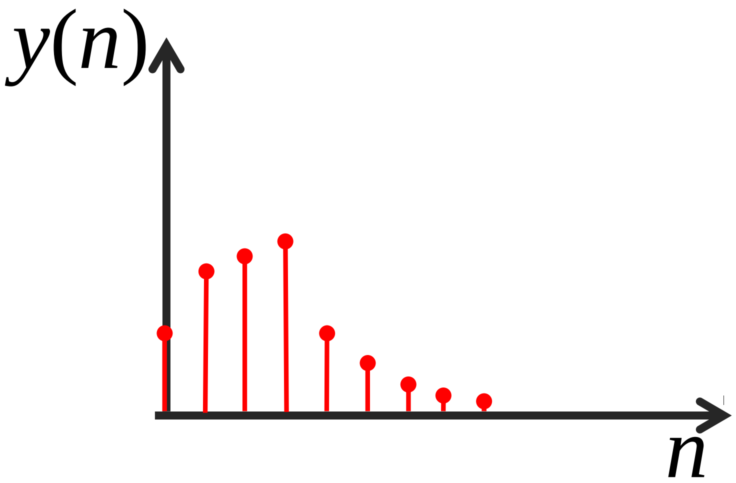
$$y(3)=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} x(m)\,h(3-m)$$

$$=\frac{1}{4}\left[a^3+a^2+a+1\right]$$



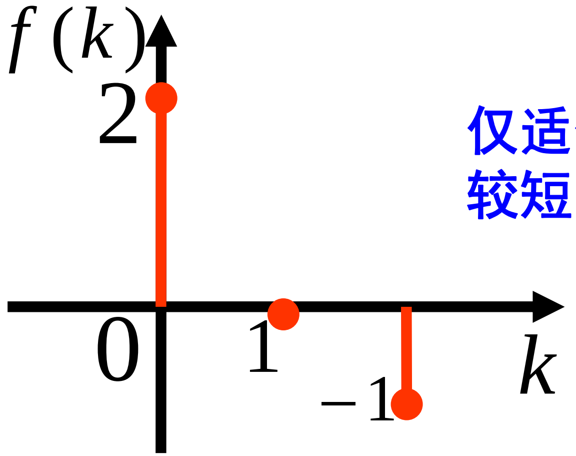
求和结果：

$$y(n)=\begin{cases} 0 & n<0 \\ \sum_{m=0}^{n} x(m)\,h(n-m) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{n} a^m = \frac{1-a^{n+1}}{4(1-a)} & 0\le n<4 \\ \sum_{m=n-3}^{n} x(m)\,h(n-m) = \frac{1}{4}\sum_{m=n-3}^{n} a^m = \frac{a^{n-3}(1-a^4)}{4(1-a)} & n\ge 4 \end{cases}$$

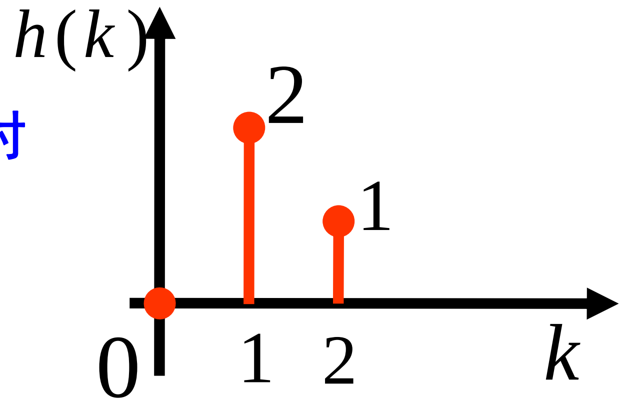


卷积和计算的单位样值序列法

例6：已知$f(k)$和$h(k)$如图所示，求两者的卷积和$y(k)$。



仅适合长度相对较短的两序列！



解： $f(k)=2\delta(k)-\delta(k-2)\quad h(k)=2\delta(k-1)+\delta(k-2)$

$$y(k)=\left[2\delta(k)-\delta(k-2)\right]*\left[2\delta(k-1)+\delta(k-2)\right]$$

$$=4\delta(k-1)+2\delta(k-2)-2\delta(k-3)-\delta(k-4)$$

系统全响应的时域解法：例题1的新解法

■例题1中线性时不变离散时间系统的差分方程为$y(n)=x(n)+(1+a)y(n-1)$，其中$a=0.005$，初始条件$y[-1]=1$，输入信号$x[n]=1.005^n u[n]$，求系统的完全响应$y[n]$。

解： 1) 求系统的零输入响应$y_{zi}[n]$：

齐次方程$y[n]-1.005y[n-1]=0$的特征方程为：$\lambda-1.005=0$，

特征根为：$\lambda=1.005$，故：$y_{zi}[n]=c\times 1.005^n$，

根据初始条件$y[-1]=1$，知$y_{zi}[0]=1.005$，

所以$c=1.005$，得$y_{zi}[n]=1.005^{n+1}u(n)$

2) 求系统的零状态响应：

$$y_{zs}[n]=x(n)*h(n)=1.005^n u(n)*1.005^n u(n)=(n+1)\times 1.005^n u(n)$$

3) 求系统的全响应：

$$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]=\left[1.005^{n+1}+(n+1)\times 1.005^n\right]u(n)$$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=2.005\times 1.005^n+n\times 1.005^n,\quad n\ge 0$$

连续时间系统与离散时间系统的类比

- 连续系统
  - 微分方程
  - 卷积积分
  - 拉氏变换
  - 连续傅里叶变换
  - 卷积定理

- 离散系统
  - 差分方程
  - 卷积和
  - ？变换
  - 离散傅里叶变换？
  - 卷积定理？

小结

- 离散时间系统的定义与离散LTI系统的判定
- 离散时间系统差分方程的建立
- 离散LTI系统的响应可用迭代法和时域经典法求解
- 线性移不变系统的全响应可分为零输入和零状态两个部分之和。前者具有齐次解的形式，后者可通过卷积和得到
- 连续系统与离散系统之间具有很强的类比性

课外作业

- 阅读：7.3－7.5节；预习：8.1, 8.2节
- 作业： 7.10、7.18的(1)(6)两小题、7.24的(2)(4)两小题

- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：学号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如张三（学号U2019148xx）第一周作业第一题图片名为： U2019148xx U2019148xx hw1P1.JPG，如此题有两张或多张图片，则第一张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-1.JPG，第二张图片名为： U2019148xx张三hw1P1-2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。