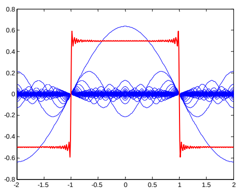
信息大类平台课：信号与线性系统

第一章 绪论

第2讲 奇异信号与系统初步



郭红星

华中科技大学计算机学院

复习

- 信号的概念与分类
  - 传输与处理
  - 确定与随机
  - 模拟与数字
- 信号的描述方法
  - 函数
  - 图形
- 信号的简单处理
  - 相加、反褶、时移和尺度等

本讲内容

- 奇异信号的定义

  即本身、其导数或其积分有不连续点的信号。

- 常见的奇异信号
  - 斜变信号
  - 单位阶跃信号
  - 矩形脉冲信号
  - 单位冲激信号

- 系统的概念与分类
- 线性时不变系统
- 学习目标
  - 熟悉上述奇异信号，重点领会其**物理含义**
  - 掌握线性时不变系统的性质及判别准则，弄清楚其**物理属性**

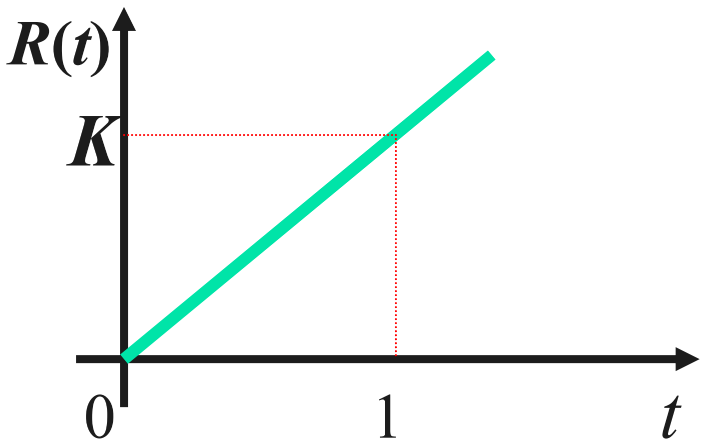
2.1 奇异信号

斜变信号$R(t)$

- **斜变信号**

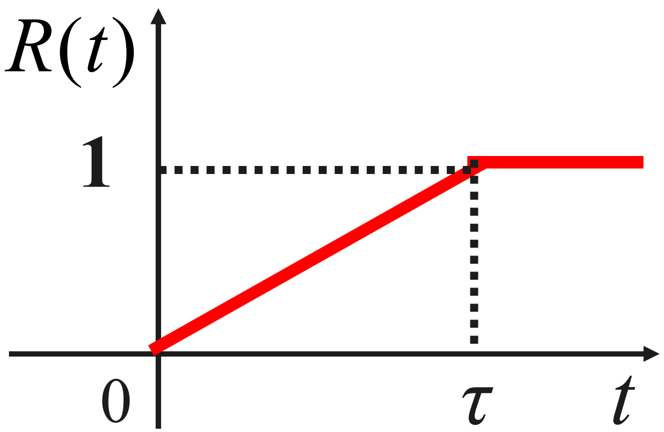
$K=1$时称为单位斜变信号

$$R(t)=\begin{cases} Kt & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$



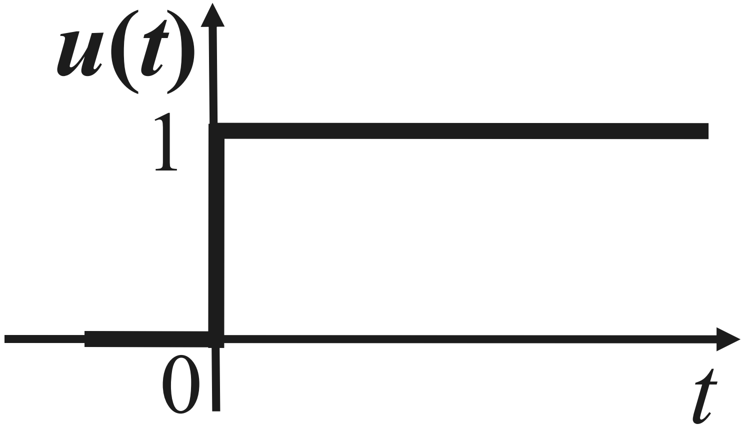
- **切平的斜变信号**

$$R(t)=\begin{cases} 0 & t\le 0 \\ \dfrac{t}{\tau} & 0<t<\tau \\ 1 & t\ge\tau \end{cases}$$

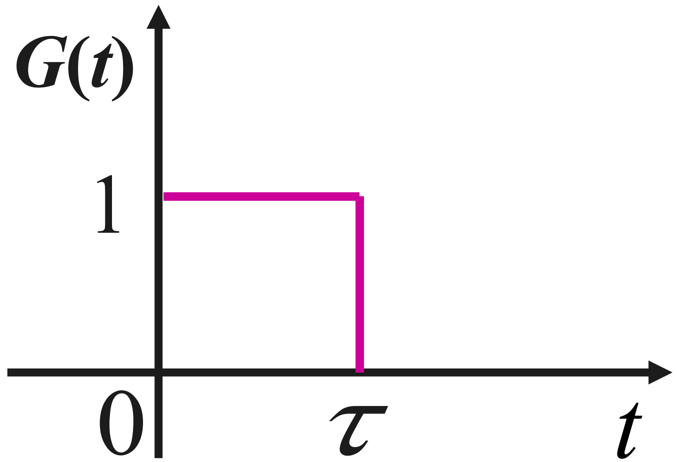


单位阶跃信号$u(t)$矩形脉冲信号$G(t)$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\\ \boxed{1/2} & t=0\end{cases}$$



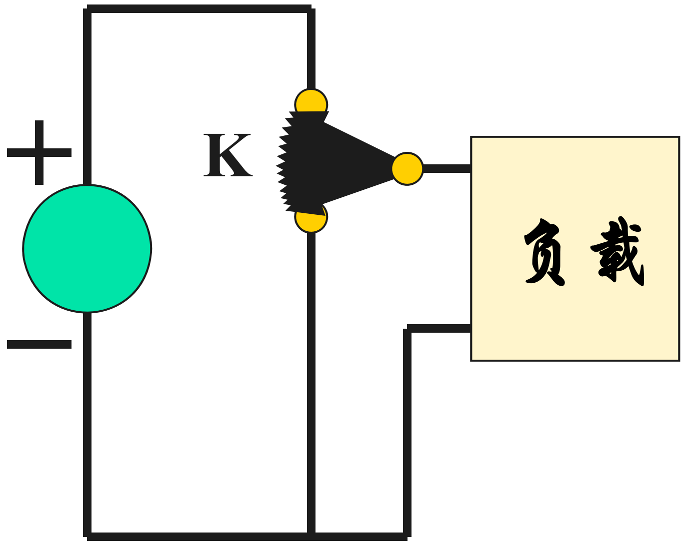
思考：t=0点处的值是多少？



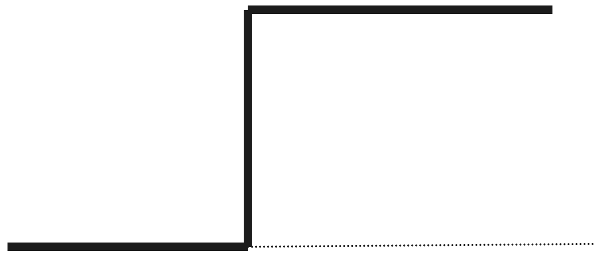
$$G(t)=u(t)-u(t-\tau)$$

注意：不连续处值的定义其实并不重要

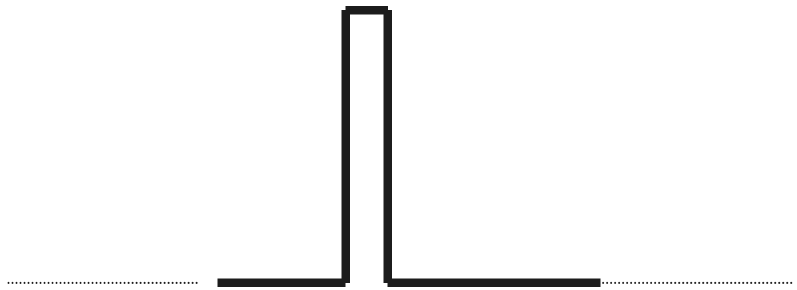
物理含义



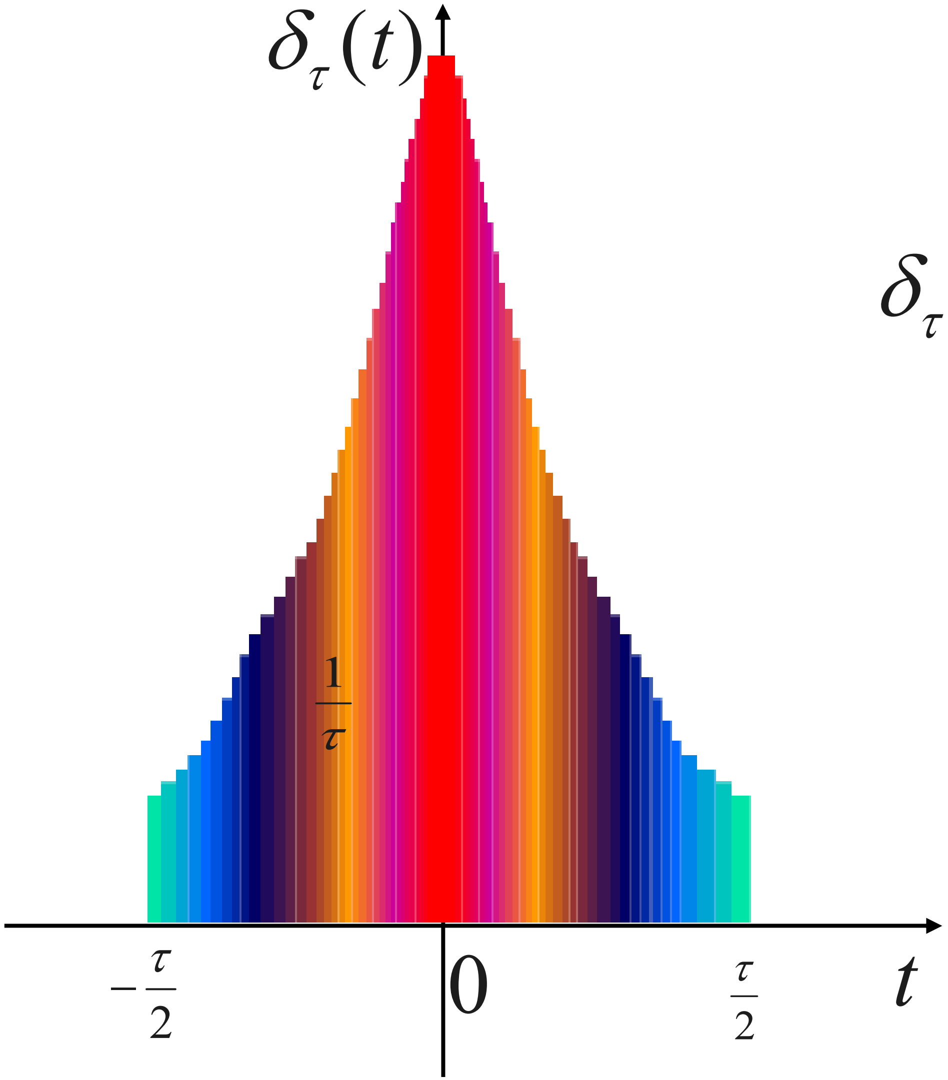
(1) $u(t)$突然接入的直流电压



(2) $G(t)$突然接通又马上断开的脉冲电压



单位面积矩形脉冲信号的演变



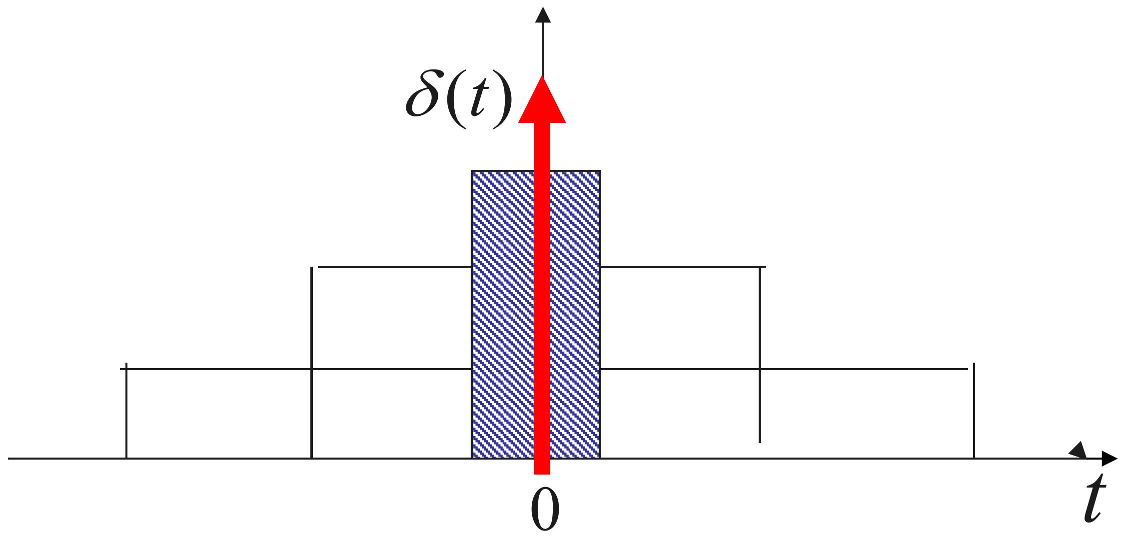
$$\delta_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau} & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|\geq\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

思考：当矩形宽度趋于0时的极限是什么信号？

矩形脉冲演变成冲激信号

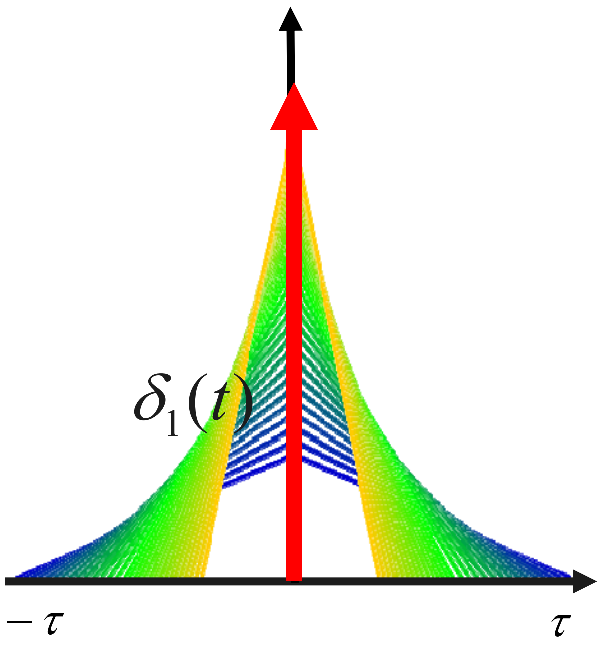
- 定义：单位矩形面积不变，宽度趋于0时的极限为**单位冲激信号(函数)**

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$$



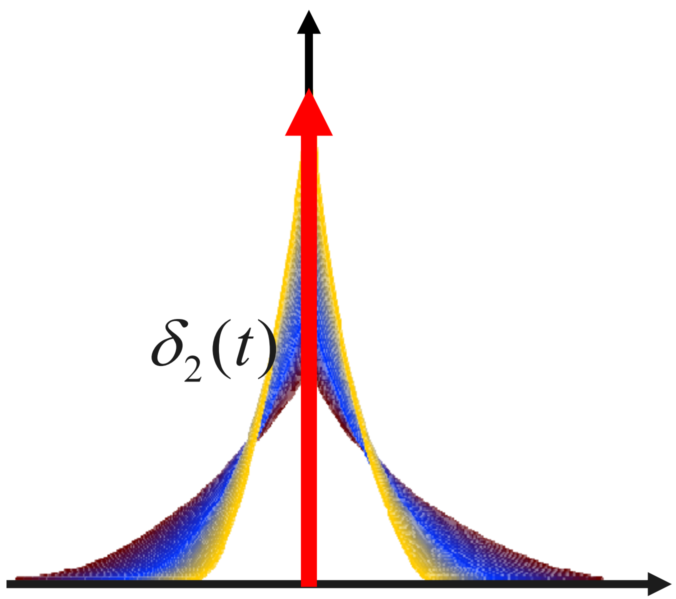
其它信号演变的冲激信号

- 三角脉冲的极限



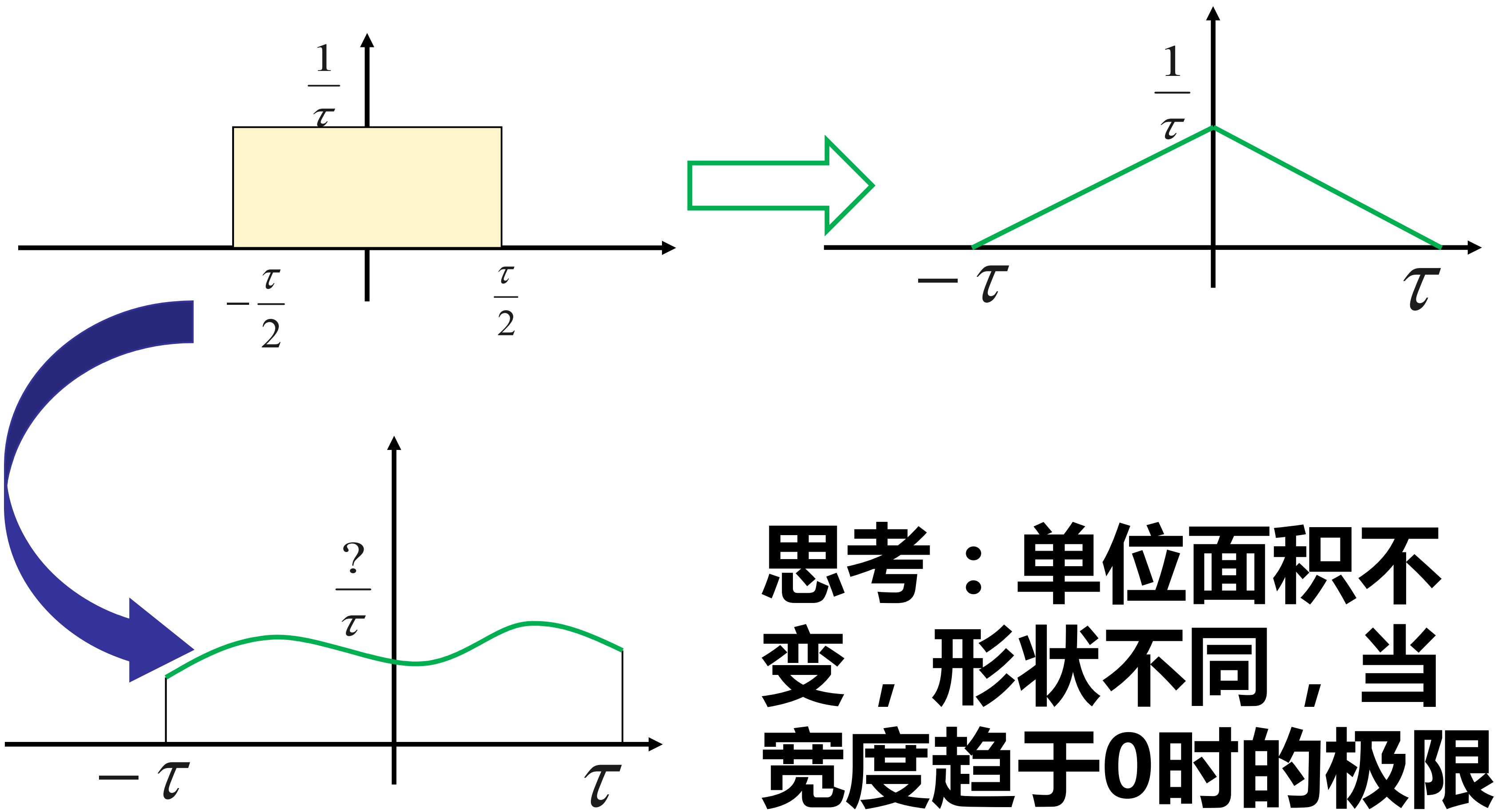
$$\delta_1(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right]\right\}$$

- 双边指数脉冲的极限



$$\delta_2(t)=\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}\right]$$

冲激信号的推导



单位面积的
任意形状的脉冲信号

思考：单位面积不变，形状不同，当宽度趋于0时的极限是同一个信号吗？

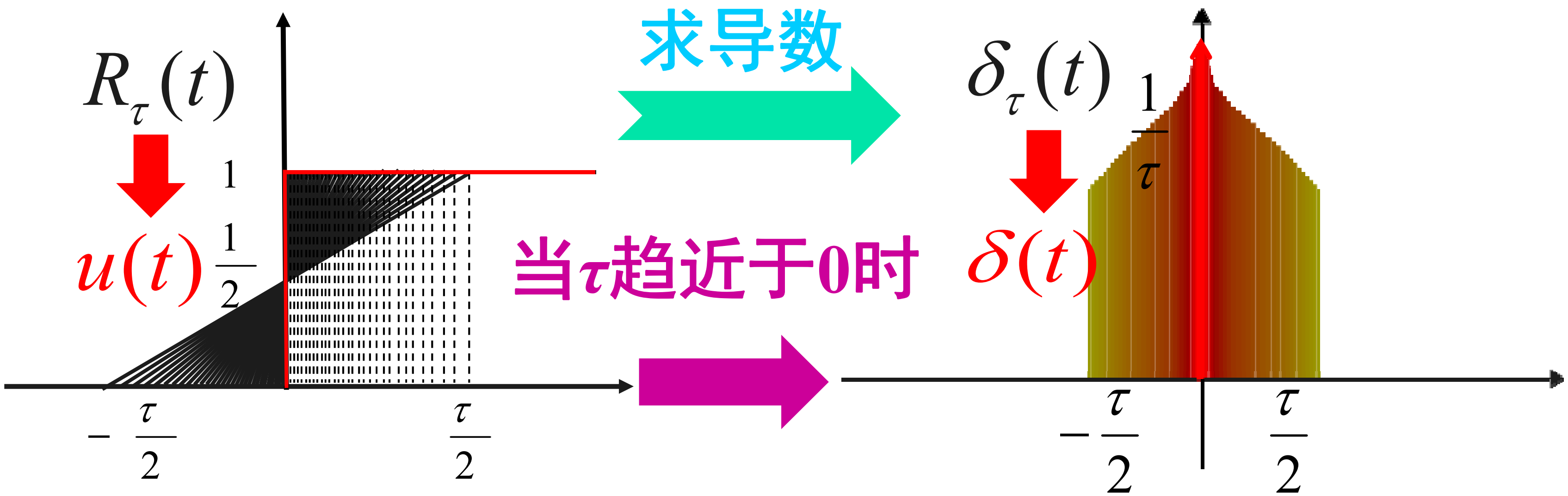
单位冲激信号的Dirac定义

$$
\begin{cases}
\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1
\end{cases}
$$

$A\delta(t)$表示冲激信号的冲激强度为A。

思考：冲激信号的物理含义是什么？

冲激信号是阶跃信号的广义导数



$$\therefore \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

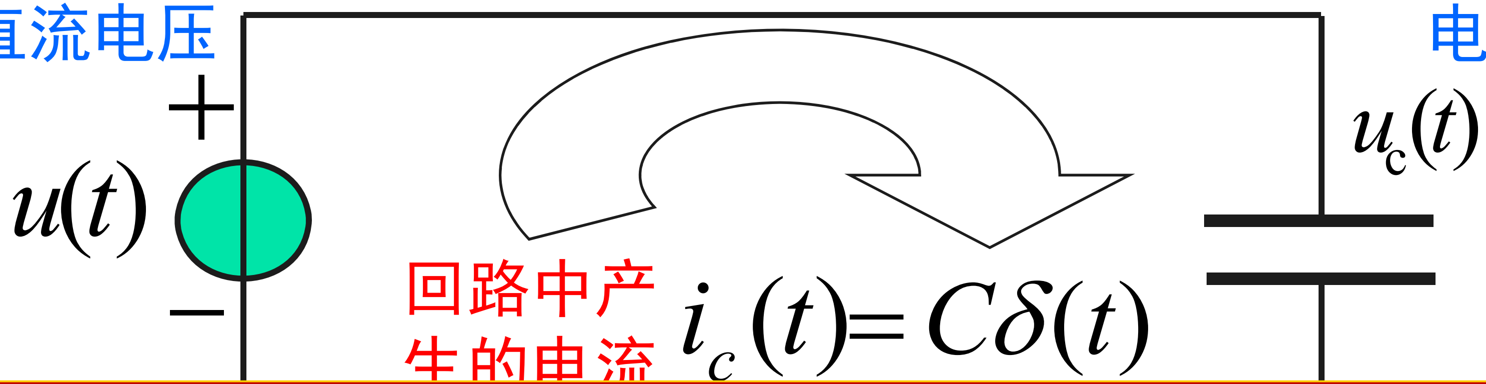
$\delta(t)$表示信号在跳变量为1的跳变(不连续)点处的变化率

思考：实际中真存在这样的信号吗？

冲激信号所描述的物理现象

突然接入
单位直流电压

电容上的
电压



回路中产
生的电流 $i_c(t) = C\delta(t)$

冲激信号的提出具有科学意义

$$\int_0 i_c(t)\,dt = q_c(t) = Cu_c(t)$$

两边同时
求导数

$$i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt} = C\delta(t)$$

冲激信号所描述的日常现象

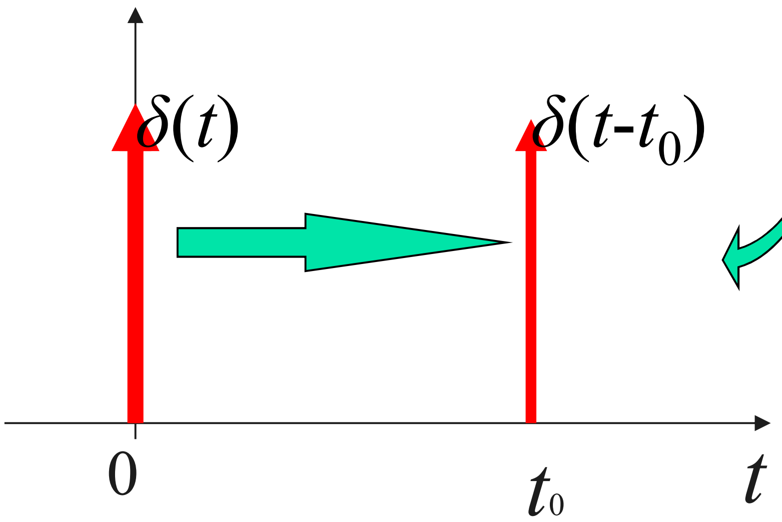
冲激信号的模型又有应用价值

- 球拍击球的力F很大，碰球时间Δt极短，而击球的冲量$F\Delta t$为有限值
- 这就是一个强度为$F\Delta t$的冲激信号

冲激信号的平移、相乘及奇偶性

平移

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 & t = t_0 \\ \delta(t-t_0) = 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$



相乘

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

偶函数

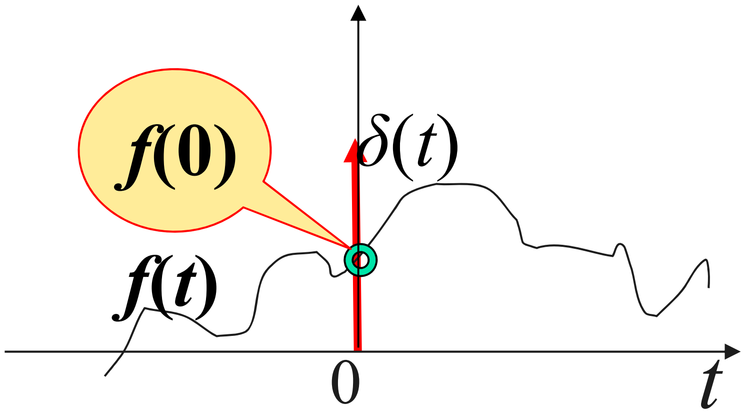
$$\delta[-(t-t_0)] = \delta(t-t_0)$$

冲激信号(函数)的筛选特性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(0)dt$$

$$=f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt$$

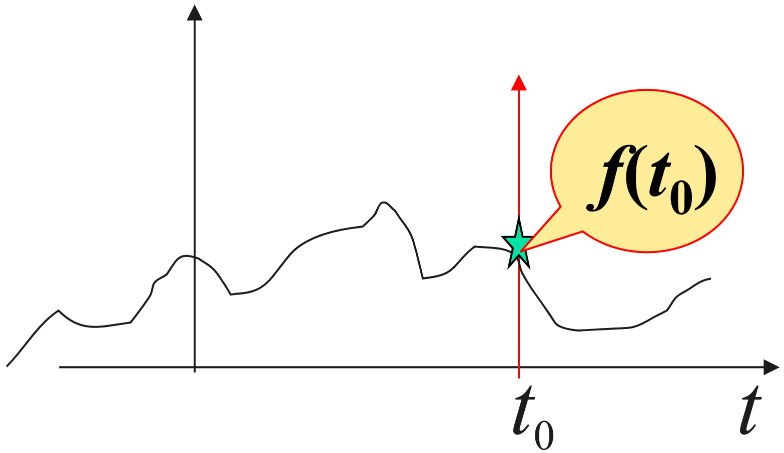
$$=f(0)$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t_0)\delta(t-t_0)dt$$

$$=f(t_0)$$



冲激信号(函数)的性质小结

a. $\dfrac{u(t)}{dt} = \delta(t) \quad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$ 微分积分

b. $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$ 相乘

c. $\delta[-(t-t_0)] = \delta(t-t_0)$ 偶函数

d. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$ <u>筛选特性</u>

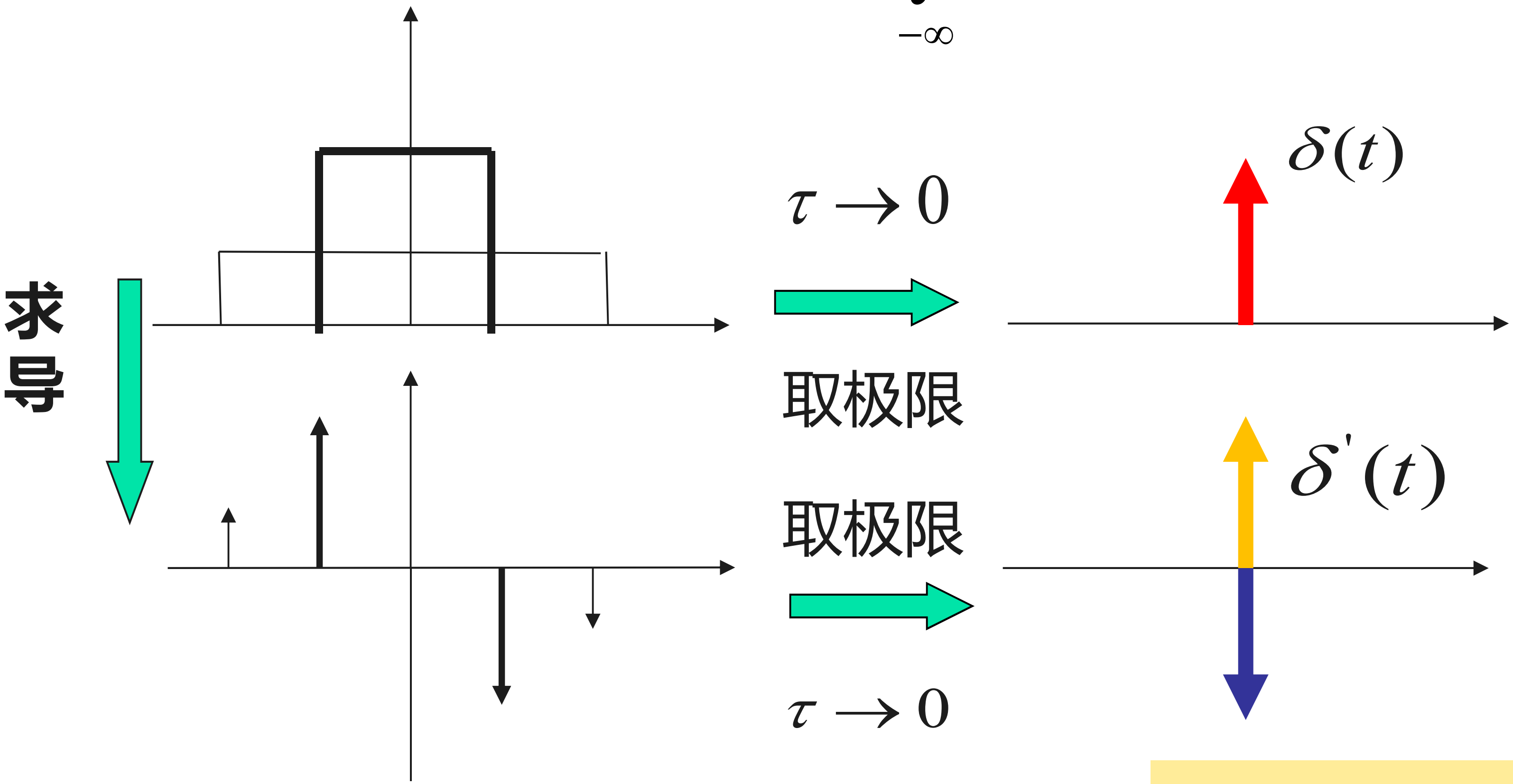
e. $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$ 尺度（缩放）

- 如何推导并理解其物理含义？

冲激偶信号

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)d\tau = \delta(t)$$



思考：冲激偶是奇函数还是偶函数?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

冲激信号性质的简单应用

例题1：计算下列函数的值

$$f(t)=\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$$

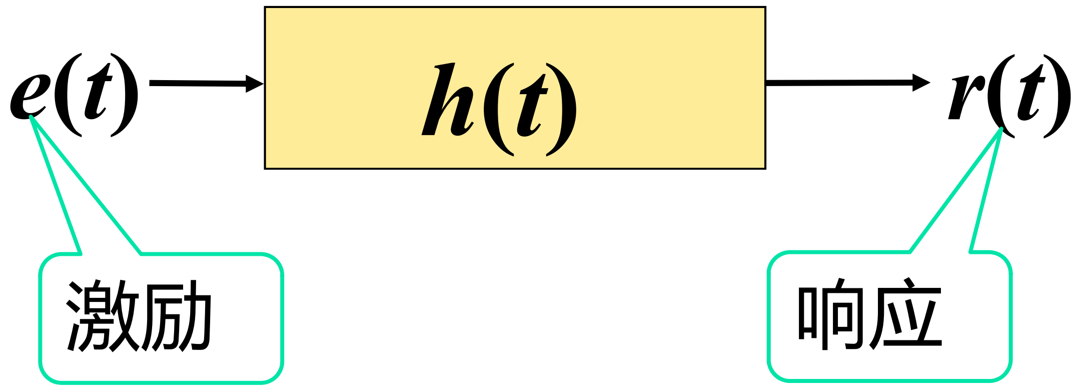
$$f(t)=\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt=0$$

此题要注意应用冲激信号的特性。冲激信号的含义是$t\neq 0$时为零，$t=0$时有一个冲激，而其余全为零。这样就不难理解如何求解函数的值了

2.2 系统入门

系统的定义与描述

- **系统：**组成单元、功能、目标、有机体



- **特点：**系统的功能和性质就是通过响应与激励间的依赖关系来体现－(SISO/MIMO)

系统的分类

- 连续和离散—混合系统
- 因果与非因果—物理可实现性
- 线性和非线性—系统响应的可分解性
- 时变和非时变

$$e(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow r(t)$$

线性系统的定义

- 线性系统：同时具有均匀性(齐次性)和叠加性
- 均匀性

$$ke(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow kr(t)$$

- 叠加性

$$e_1(t)+e_2(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow r_1(t)+r_2(t)$$

- 线性性=均匀性&叠加性

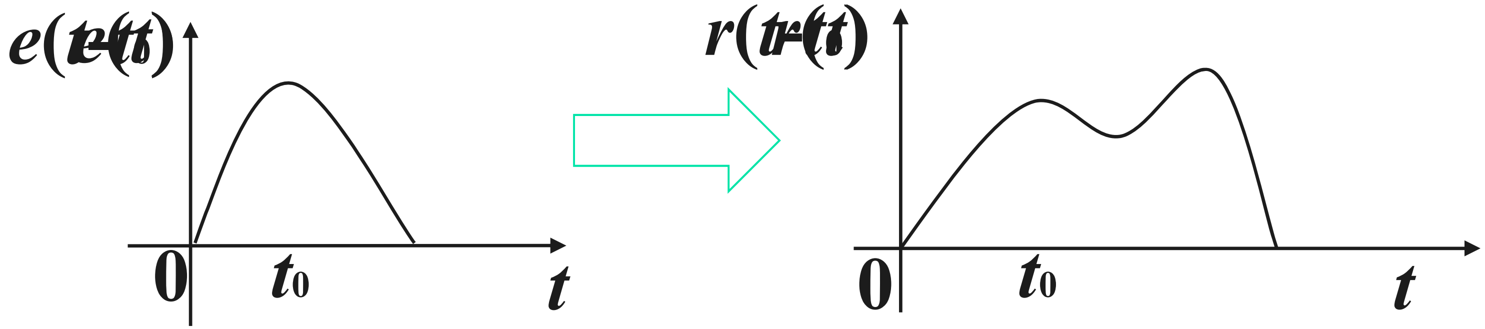
$$\mathrm{a}e_1(t)+\mathrm{b}e_2(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \mathrm{a}r_1(t)+\mathrm{b}r_2(t)$$

系统的时不变性

① **定义**:参数不随时间而变化的系统

② **特点**:输出只与输入有关,而与输入施加的时刻无关

也就是说如果$e(t) \rightarrow r(t)$, 则$e(t-t_0) \rightarrow r(t-t_0)$



线性时不变系统的判别

例题2：系统的激励为$e(t)$,由系统响应$r(t)$来判断系统是否为线性系统？

$$a.\ r(t)=\lg^{r(0)}+e^2(t)$$

非线性

$$d.\ r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau$$

线性

$$b.\ r(t)=r^2(0)\lg^{e(t)}$$

非线性

$$e.\ r(t)=3+4e(t)$$

? 线性

$$c.\ r(t)=r(0)e(t)$$

线性

$$f.\ r(t)=3r(0)+4e(t)$$

? 线性

系统的增量线性

- 系统$r(t)=3+4e(t)$不满足线性关系，但是激励和响应的增量$\Delta r(t)$与$\Delta e(t)$之间满足线性关系—增量线性系统

$$\text{e}.\ r(t) = 3 + 4e(t)$$

$$\text{f}.\ r(t) = 3r(0) + 4e(t)$$

思考：例题2中f和e的区别？

系统响应的可分解性

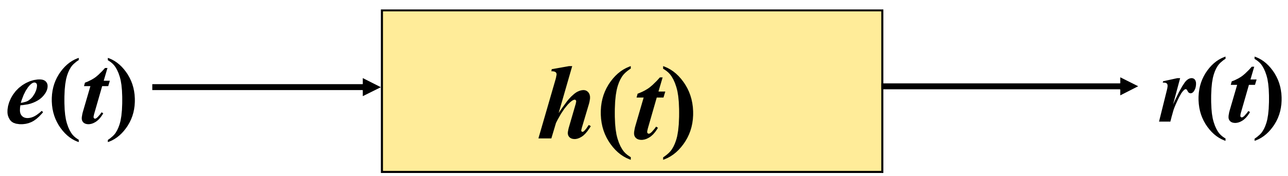
- 系统响应(输出)的构成:
  - 零输入响应r_{zi}: 即输入$e(t)$=0,仅由系统储能引起的响应
  - 零状态响应r_{zs}: 即$r(0)$=0,仅由输入$e(t)$所产生的响应
- 系统响应的可分解性:可把由于系统储能引起的响应和由于输入引起的响应分离开来的性质

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

当系统具有分解性,且同时具有零状态线性时即为线性系统

LTI系统的分析、辨识与设计

- 分析：模型—响应—物理解释
- 辨识：根据系统的激励和响应识别其特性
- 设计：构造系统以满足特定的输入—输出要求



LTI系统的描述与分析方法

- 微分积分方程（差分方程）
- 系统的时域特性—冲激响应和$h(t)$
- 稳态频率响应—(H(j ω)=R(j ω)/E(j ω))
- 复频域的代数方程—$H(s)=R(s)/E(s)$, $(H(z)=R(z)/E(z))$
- 状态变量法（状态方程和输出方程）

$$e(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow r(t)$$

小结

- 奇异信号一般并不奇异
- 冲激信号确实有点奇异
- 冲激信号是对具体物理现象的表征
- 冲激信号具有重要的应用
- 冲激信号具有许多特殊而有趣的性质
- 系统对输入信号进行处理，产生输出信号
- 线性时不变系统是一种简单而重要的系统
- 非电系统的分析请大家自学

课后作业

- 阅读:2.4,1.4,1.5;自学: 1.6;预习:2.1, 2.2
- 书面作业： 1.8题的(1)(3)两小题、1.11题
- 每个星期一23:59前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，文件名为：年级班号+姓名＋hw+周次＋P图片序号.jpg。如1906班张三第一周作业第一张图片名为：1906张三hw1P1.JPG，第二张图片名为：1906张三hw1P2.JPG，以此类推，上传超星课堂系统。具体见“作业提交操作指南”文档。