

1. Koma Exercise

TA: Robert

Thema: Komplexe Zahlen

(bedeutet wichtig für Zusammenfassung)

1.1 Definition von Analysis:

$$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, \cdot_{\mathbb{C}}), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + x'y \end{pmatrix}$$

⇒ komplexe Zahlen sind ein reeller Vektorraum mit einer speziellen Multiplikation

Normalerweise Skalar- oder Kreuzprodukt, jetzt $\cdot_{\mathbb{C}}$ ⇒ Nur Multiplikation neu, nicht sehr deep

1.2 Da eine komplexe Zahl z ein reeller Vektor ist, besteht sie aus zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z = x + iy, i^2 = -1. \quad : \text{ kennzeichnet einfach die zweite Komponente} \Rightarrow \text{ wird Normalform genannt}$$

1. Komponente 2. Komponente

⇒ Jetzt ergibt auch die Definition der „speziellen Multiplikation“ Sinn:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x+iy) \cdot (x'+iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) = \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + x'y \end{pmatrix}$$

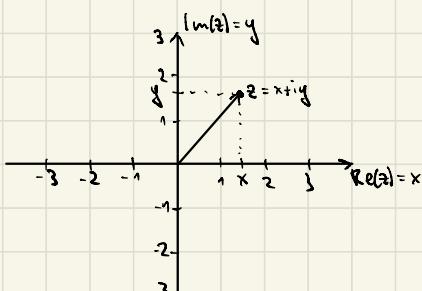
Addition stimmt auch überein mit Intuition: $z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = (x+x) + i(y+y')$

1.3 Frage: Wie würde man i als Vektor darstellen? Antwort: $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4 Die erste Komponente bezeichnet man als Realteil: $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x+iy) = x; x, y \in \mathbb{R}$

Analog bezeichnet man die zweite Komponente als Imaginärteil: $\operatorname{Im}(z) = y$

Da man komplexe Zahlen wie Vektoren behandeln kann, kann man sie im \mathbb{R}^2 darstellen:



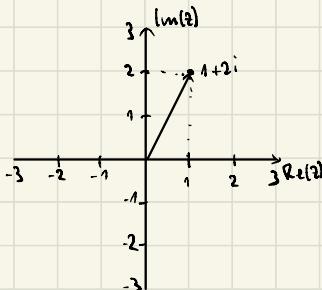
⇒ Gleich wie der reelle Vektorraum, nur → dem Skalarprodukt benutzen wir die „spezielle Multiplikation“ – komplexe Multiplikation.

Aber was bedeutet das überhaupt?

komplexe Multiplikation ermöglicht Rotation + Streckung in der Ebene

=> Wenn man den Vektor a mit Vektor b komplex multipliziert, dann streckt und rotiert man den Vektor a bzw. b .

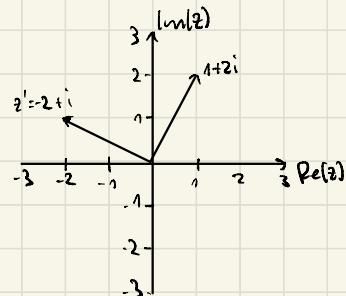
1.5 Beispiel: Wir stellen $z = 1+2i$ als Vektor dar:



Jetzt multiplizieren

wir mit i :

$$z' = z \cdot i = (1+2i) \cdot i = -2+i$$



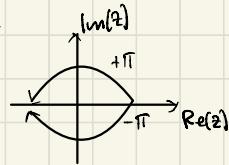
Um die Streckung zu bestimmen vergleichen wir die Beträge:

$$|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}, |z'| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow |z| = |z'|$$

=> Beträge gleich groß, also ist die Streckung 1 (keine Streckung)

Um die Rotation zu bestimmen vergleichen wir die Winkel:

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & y < 0 \end{cases} \text{ und } z \neq 0 \Rightarrow \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$$



=> Wir berechnen: $\text{Arg}(1+2i) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63,43^\circ$ und $\text{Arg}(-2+i) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \approx 153,43^\circ$

=> Rotation: $\text{Arg}(-2+i) - \text{Arg}(1+2i) = 90^\circ$

=> In diesem Fall hat die Multiplikation mit i eine Streckung von 1 ergeben und eine Rotation von 90° im Uhrzeigersinn.

1.6

Frage: Was das ein Spezialfall oder ergibt eine Multiplikation mit i immer eine reine 90° -Rotation? Warum?

Antwort: zi ist immer z um 90° gedreht für $z \neq 0$.

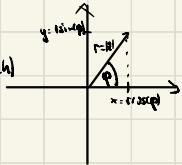
2.

1.7

Neben der Normalform gibt es die Polarkoordinaten, die wir jetzt herleiten.

Normalform: $z = x + iy \Rightarrow x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$, $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$ (nichts neues, technisch)

$$\Rightarrow z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$



Wenn man $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ und $e^{i\varphi}$ als Potenzreihen entwickelt, kann man

die Euklidische Formel benutzen: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

$$\Rightarrow z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r e^{i\varphi}$$

: Polarkoordinaten liegen nicht nur schön da, sondern ist auch praktisch zum rechnen, wie wir sehen werden)

1.8

Frage: Was ist r und φ für $z = i$? Antwort: $r = 1$ und $\varphi = 90^\circ \Rightarrow i = e^{i\pi/2}$

$\Rightarrow r = |z|$ ist die Streckung und φ : Arg(z) ist die Rotation \Rightarrow Vorherige Frage ist bewiesen

$$\Rightarrow z \cdot z' = r e^{i\varphi} \cdot r' e^{i\varphi'} = r r' e^{i(\varphi+\varphi')}$$
 und $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\varphi-\varphi')}$ und $z^n = r e^{in\varphi}$

1.9 Normalform ist nützlich für Addition/Subtraktion und Polarkoordinaten für Multiplikation/Division und das Arbeiten mit Potenzen.

Frage: Was ergibt i^2 ? Tipp: $i = e^{i\pi/2}$ Antwort: $i^2 = e^{-\pi/2}$ (real!!)

Glückswunsch: Erste Klausuraufgabe gelöst!

2.0

Frage: Wie kann man die Inverse mittels Polarkoordinaten bestimmen? Antwort: $z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$

Jetzt ist die Frage wie man es aus der Normalform berechnet ($z \neq 0$):

1. Möglichkeit: in Polarkoordinaten umwandeln :)

2. Möglichkeit: Wir benutzen die Definition der Konjugateten: $\bar{z} = x - iy$, $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$$\text{Wir berechnen: } z \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$$

: Normalform kann man immer direkt als Vektor schreiben

2.1 Natürlich: $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

Frage: Was ergibt analog $\operatorname{Im}(z)$ im Abhängigkeit von z und \bar{z} ? Antwort: $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z})$

2.2

Frage: Gilt $\operatorname{Im}((-5+3i)^4 \cdot (-7-5i)) = \operatorname{Im}((5+3i)^4 \cdot (7-5i))$? Antwort: Ja, da $\operatorname{Im}(z) = -\overline{\operatorname{Im}(z)}$
 $((-5+3i)^4 \cdot (-7-5i)) = -(5-3i)^4 \cdot (7+5i))$

Übung: Berechne die Normalform von $z = \frac{2-5i}{4+3i}$ Antwort: $z = \frac{1}{25} \cdot (2-5i)(4+3i) = \frac{23}{25} - i \frac{14}{25}$

Frage: Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots = 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i \geq 1$. Gilt $p(\bar{z}) = 0$? Antwort: Ja, da $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = 0$

2.3 Wir haben gesehen, dass e^{ip} eine Rotation um den Winkel ip bedeutet.

Frage: Was bedeutet z^{ip} ? Tipp: $z = e^{\ln z}$ Antwort: eine Rotation um $p \cdot \ln|z|$

2.4 $e^{2\pi i}$ ergibt eine Rotation um $360^\circ \Rightarrow e^{2\pi i} = e^{0i} = 1 \Rightarrow e^{ix}$ ist nicht eindeutig, da $e^{2\pi i} = 1$ und $e^{ix} = e^{(k+2\pi)i}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow i \cdot (e^{\frac{i\pi}{2} + 2\pi k})^i = e^{\frac{i\pi}{2} + 2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ unendlich viele Werte! $\Rightarrow z$ allgemein nicht eindeutig darstellbar, wenn man

Polarform benutzt! \Rightarrow Einschränkung auf $[-\pi, \pi]$ nur möglich wenn man keine Wurzeln, Potenzen, und Logarithmen benutzt!

2.5 Im reellen wissen wir, dass Wurzelzeichen nicht eindeutig ist, es gibt \pm .

Analog gibt es im Komplexen n -vielen Wurzeln.

Vorher haben wir gezeigt, dass $z = r e^{i(p+2\pi k)}$ die allgemeine Polarform ist.

Sei $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow w = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(p+2\pi k)}{n}}$. Da $k \in \mathbb{Z}$ ist, schaut es, als ob es unendlich viele Wurzeln gäbe. Es stellt sich raus, dass sie sich alle n wiederholen!

\Rightarrow Wurzeln definieren:

$$w = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(p+2\pi k)}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{Man muss nicht unbedingt bei null beginnen})$$

Frage: Wo liegen alle n Wurzeln? Antwort: Auf einem Kreis mit Abstand $\sqrt[n]{r}$ vom Ursprung

Da e^{ix} nicht eindeutig ist, ist der Logarithmus mehrdeutig: kommt nächste Woche!