1. Koma Exercise — TA: Robert

Thema: Komplexe Zahlen

(□ bedeutet wichtig für Zusammenfassung)

1.1 Definition von Analysis:

$$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, \cdot_{\mathbb{C}}) \quad , \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}xx'-yy'\\xy'+x'y\end{pmatrix}$$

=> komplexe Zahlen sind ein <u>reeller Vektorraum mit einer speziellen Multiplikation</u>

Normalerweise Skalar- oder Kreuzprodukt, jetzt $\cdot_{\mathbb{C}}$ => Nur Multiplikation neu, nicht sehr deep

1.2 Da eine komplexe Zahl z ein reeller Vektor ist, besteht sie aus zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$:

$z = \underbrace{x}_{\text{1. Komponente}} + i\underbrace{y}_{\text{2. Komponente}}$, $i^2 = -1$. i kennzeichnet einfach die zweite Komponente => wird <u>Normalform</u> genannt

=> Jetzt ergibt auch die Definition der „speziellen Multiplikation" Sinn:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = (x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y) = \begin{pmatrix}xx'-yy'\\xy'+x'y\end{pmatrix}$$

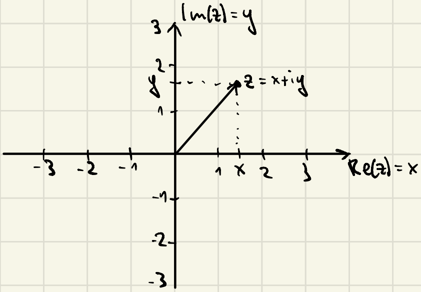
Addition stimmt auch überein mit Intuition: $z + z' = (x+iy)+(x'+iy') = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix} = (x+x') + i(y+y')$

1.3 $\boxed{\text{Frage: Wie würde man } i \text{ als Vektor darstellen?}}$ Antwort: $i = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

1.4 Die erste Komponente bezeichnet man als Realteil: $Re(z) = Re(x+iy) = x$; $x, y \in \mathbb{R}$

Analog bezeichnet man die zweite Komponente als Imaginärteil: $Im(z) = y$

Da man komplexe Zahlen wie Vektoren behandeln kann, kann man sie in der Ebene darstellen:



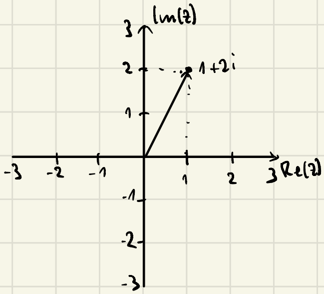
=> Gleich wie der reelle Vektorraum, nur zusätzlich zu dem Skalarprodukt benutzen wir die „spezielle Multiplikation" = komplexe Multiplikation.

Aber was bedeutet das überhaupt?

komplexe Multiplikation ermöglicht <u>Rotation + Streckung</u> in der Ebene

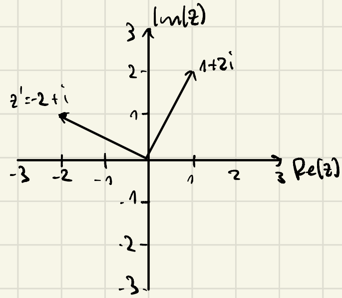
$\Rightarrow$ Wenn man den Vektor a mit Vektor b komplex multipliziert, dann streckt und rotiert man den Vektor a bzw. b.

<u>1.5</u> Beispiel: Wir stellen $z = 1+2i$ als Vektor dar:



Jetzt multiplizieren wir mit i:

$z' = z \cdot i = (1+2i) \cdot i = -2+i$



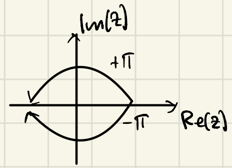
<u>Um die Streckung zu bestimmen vergleichen wir die Beträge:</u>

$\boxed{|z| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$, $|z'| = \sqrt{(-2)^2+1} = \sqrt{5} \Rightarrow |z| = |z'|$

$\Rightarrow$ Beträge gleich groß, also ist die Streckung 1 (keine Streckung)

<u>Um die Rotation zu bestimmen vergleichen wir die Winkel:</u>

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & y < 0 \end{cases} \quad \text{und } z \neq 0 \quad \Rightarrow \mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]}$$



$\Rightarrow$ Wir berechnen: $\mathrm{Arg}(1+2i) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63{,}435^\circ$ und $\mathrm{Arg}(-2+i) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \approx 153{,}435^\circ$

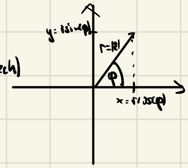
$\Rightarrow$ Rotation: $\mathrm{Arg}(-2+i) - \mathrm{Arg}(1+2i) = 90^\circ$

$\Rightarrow$ In diesem Fall hat die Multiplikation mit i eine Streckung von 1 ergeben und eine Rotation von 90° im Uhrzeigersinn.

<u>1.6</u> Frage: War das ein Spezialfall oder ergibt eine Multiplikation mit i immer eine reine 90°-Rotation? Warum?

Antwort: zi ist immer z um 90° gedreht für $z \neq 0$.

1.7 Neben der Normalform gibt es die Polarform, die wir jetzt herleiten.



Normalform: $z = x+iy$. $\Rightarrow x = r\cdot\cos(\varphi)$, $y = r\cdot\sin(\varphi)$, $r\in\mathbb{R}$, $\varphi\in(-\pi,\pi]$ (nichts neues, Techmech)

$\Rightarrow z = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$

Wenn man $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ und $e^{i\varphi}$ als Potenzreihe entwickelt, kann man die Eulersche Formel beweisen: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi)+i\sin(\varphi)}$

$\Rightarrow \boxed{z = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}}$: Polarform (sieht nicht nur schön aus, sondern ist auch praktisch zum rechnen, wie wir sehen werden)

1.8 $\boxed{\text{Frage: Was ist } r \text{ und } \varphi \text{ für } z=i\text{?}}$ Antwort: $r=1$ und $\varphi = 90^\circ \Rightarrow i = e^{i\pi/2}$

$\Rightarrow r = |z|$ ist die Streckung und $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ ist die Rotation $\Rightarrow$ Vorherige Frage ist bewiesen

$\Rightarrow z\cdot z' = r\cdot e^{i\varphi}\cdot r' e^{i\varphi'} = rr' e^{i(\varphi+\varphi')}$ und $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\varphi-\varphi')}$ und $z^n = re^{i\varphi n}$

1.9 Normalform ist nützlich für Addition/Subtraction und Polarform für Multiplikation/Division und das Arbeiten mit Potenzen.

$\boxed{\text{Frage: Was ergibt } i^i\text{? Tipp: } i = e^{i\pi/2}}$ Antwort: $i^i = e^{-\pi/2} \approx 0{,}207$ (reell!)

Glückwunsch: Erste Klausuraufgabe gelöst!

2.0 $\boxed{\text{Frage: Wie kann man die Inverse mittels Polarform bestimmen?}}$ Antwort: $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$

Jetzt ist die Frage wie man es aus der Normalform berechnet ($z\neq 0$):

1. Möglichkeit: in Polarform umwandeln :)
2. Möglichkeit: wir benutzen die Definition der Konjugierten: $\bar{z} = x-iy$, $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$

Wir berechnen: $\boxed{z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2}$

$\Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}}$: Normalform kann man immer direkt als Vektor schreiben

2.1 Nützlich: $\boxed{\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})}$

Frage: Was ergibt analog $\mathrm{Im}(z)$ in Abhängigkeit von z und $\bar{z}$? Antwort: $\boxed{\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}\cdot(z-\bar{z})}$

2.2

Frage: Gilt $\mathrm{Im}\left((-5+3i)^4\cdot(-7-5i)\right) = \mathrm{Im}\left((5+3i)^4\cdot(7-5i)\right)$? Antwort: Ja, da $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z})$
$\left((-5+3i)^4(-7-5i) = -(5-3i)^4(7+5i)\right)$

Übung: Berechne die Normalform von $z = \dfrac{2-5i}{4-3i}$ Antwort: $z = \frac{1}{25}\cdot(2-5i)(4+3i) = \frac{23}{25} - i\frac{14}{25}$

Frage: Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Gilt $p(\bar{z}) = 0$? Antwort: Ja, da $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = 0$

2.3 Wir haben gesehen, dass $e^{i\varphi}$ eine Rotation um den Winkel φ bedeutet.

Frage: Was bedeutet $z^{i\varphi}$? Tipp: $z = e^{\ln(z)}$ Antwort: eine Rotation um $\varphi \cdot \ln(z)$

2.4 $e^{2\pi i}$ ergibt eine Rotation um $360°$ $\Rightarrow e^{2\pi i} = e^{0\cdot i} = 1 \Rightarrow$ $\boxed{e^{ix} \text{ ist nicht eindeutig}}$, da $e^{2\pi i n} = 1$ bzw. $z = r e^{i(\varphi+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi k i}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ unendlich viele Werte! $\Rightarrow$ z allgemein nicht eindeutig darstellbar, wenn man Polarform benutzt! $\Rightarrow$ Einschränkung auf $(-\pi, \pi]$ nur möglich wenn man keine Wurzeln, Potenzen, und Logarithmen benutzt!

2.5 Im reellen wissen wir, dass Wurzel ziehen nicht eindeutig ist, es gibt $\pm$.
Analog gibt es im Komplexen n-viele n-te Wurzeln.

Vorher haben wir gezeigt, dass $z = r e^{i(\varphi+2\pi k)}$ die allgemeine Polarform ist.
Sei $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow w = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\varphi+2\pi k)}{n}}$. Da $k \in \mathbb{Z}$ ist, scheint es, als ob es unendlich viele n-te Wurzeln gibt. Es stellt sich raus, dass sie sich alle n wiederholen!
$\Rightarrow$ Wir definieren:

$\boxed{w = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1}$ (Man muss nicht unbedingt bei null beginnen)

Frage: Wo liegen alle n Wurzeln? Antwort: $\boxed{\text{Auf einem Kreis mit Abstand } \sqrt[n]{r} \text{ vom Ursprung}}$

Da e^{ix} nicht eindeutig ist, ist der Logarithmus mehrdeutig: kommt nächste Woche!