2. Koma Exercise — TA: Robert

Thema: Mehrdeutigkeit komplexer Zahlen

(□ bedeutet wichtig für Zusammenfassung)

Wiederholung: Wenn ich $z\in\mathbb{C}$ mit $e^{i\varphi}$ multipliziere, ergibt das: $z\cdot e^{i\varphi} = re^{i\psi}\cdot e^{i\varphi} = re^{i(\psi+\varphi)}$
⇒ Multiplikation von z mit $e^{i\varphi}$ dreht z um φ Grad im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung

1.1 Frage: Was bedeutet $z^{i\varphi}$? Tipp: $z = e^{\ln(z)}$ Antwort: eine Rotation um $\varphi\cdot\ln(z)$

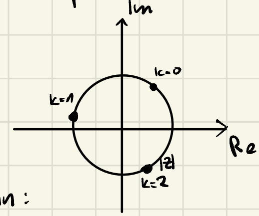
1.2 $e^{2\pi i}$ ergibt eine Rotation um 360° ⇒ $e^{2\pi i} = e^{0\cdot i} = 1$ ⇒ e^{ix} ist nicht eindeutig, da $e^{2\pi i n} = 1$ bzw. $z = re^{i(\varphi+2\pi k)}$, $k\in\mathbb{Z}$

Oder: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi)+i\sin(\varphi) = \cos(\varphi+2\pi k)+i\sin(\varphi+2\pi k) = e^{i(\varphi+2\pi k)}$

⇒ $i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi k i}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$ ⇒ unendlich viele Werte! ⇒ z allgemein nicht eindeutig darstellbar, wenn man Polarform benutzt! ⇒ Einschränkung auf $[-\pi,\pi]$ nur möglich wenn man keine Wurzeln, Potenzen, und Logarithmen benutzt!

1.3 Im reellen wissen wir, dass Wurzel ziehen nicht eindeutig ist, es gibt $\pm$.
Analog gibt es im Komplexen n-viele nte Wurzeln.

Graphisch:



Vorher haben wir gezeigt, dass $z = re^{i(\varphi+2\pi k)}$ die allgemeine Polarform ist.
Sei $w^n = z$, $n\in\mathbb{N}$. ⇒ $w = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\varphi+2\pi k)}{n}}$. Da $k\in\mathbb{Z}$ ist, scheint es, als ob es unendlich viele nte Wurzeln gibt. Es stellt sich raus, dass sie sich alle n wiederholen!
Damit wir also nicht unendlich viele Werte haben, die sich wiederholen, schränken wir k ein:

$w = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi+2\pi k)/n}$, $k = 0,1,\dots,n-1$ (Man muss nicht unbedingt bei null beginnen)

Frage: Wo liegen alle n Wurzeln? Antwort: Auf einem Kreis mit Abstand $\sqrt[n]{r}$ vom Ursprung

1.4 Beispiel: $z^5 = i$. Es geht um Wurzeln, also lieber in Polarform umwandeln.
⇒ $z^5 = e^{i\frac{\pi}{2}}$
⇒ Formel anwenden: $z = 1^{\frac{1}{5}}\cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)/5}$, $k = 0,1,2,3,4$

1.5 $\boxed{\text{Frage: Was ist die Lösung von } z^5 = -\frac{3}{2} - \frac{3^{\frac{3}{2}}}{2} i \text{? Tipp: Wandle in Polarform um}}$

Antwort: $z^5 = 3 e^{-\frac{2}{3}\pi i} \Rightarrow z = 3^{\frac{1}{5}} e^{i(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k)/5}$, $k = 0,1,2,3,4$

1.6 Ähnlich wie bei Wurzeln, ist auch der komplexe Logarithmus nicht eindeutig.

Definition: $\boxed{\text{Falls } e^w = z \text{, dann ist } w \text{ ein Logarithmus von } z}$

Beispiel: $e^w = 1 \Rightarrow$ Normalerweise einfach $w = \ln(1) = 0$

$\Rightarrow$ Jetzt aber: $e^{2\pi i} = 1$, $e^{4\pi i} = 1$, ... $e^{2\pi i k} = 1$; $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \ln(1) = 0, 2\pi i, 4\pi i, \ldots 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ Unendlich viele Werte!

<u>Allgemein:</u>

Wir schreiben z in Polarform: $z = r e^{i(\varphi + 2\pi k)} = |z| e^{i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k)}$

$\Rightarrow \ln(z) = \ln\left(|z| e^{i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k)}\right) = \ln(|z|) + i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k)$

$\Rightarrow$ Es gibt allgemein unendlich viele Werte für den Logarithmus einer komplexen Zahl

Lösung: Wir setzen $k=0$, beschränken also das Argument, da $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Log}(z) := \log(|z|) + i\,\mathrm{Arg}(z) \text{ wird Hauptwert des Logarithmus genannt, } \mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]}$

1.7 Frage: $\boxed{\text{Was ist } \mathrm{Log}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\text{? Tipp: Polarform verwenden}}$

Antwort: $\mathrm{Log}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \log(2) + i\frac{3}{4}\pi$

Frage: $\boxed{\text{Was ist } \mathrm{Log}((-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2)\text{?}}$ Antwort: $\mathrm{Log}(z^2) = 2\,\mathrm{Log}(z) = 2\log(2) + i\frac{3}{2}\pi$

Achtung!! $\frac{3}{2}\pi \notin (-\pi, \pi]$. Wir rechnen also $\frac{3}{2}\pi - 2\pi = -\frac{1}{2}\pi \Rightarrow \mathrm{Log}(z^2) = 2\log(2) - i\frac{1}{2}\pi$

$\boxed{\text{Die Regel } \mathrm{Log}(z^n) = n\,\mathrm{Log}(z) \text{ gilt nicht mehr, falls wir } \mathrm{Arg}(z) \text{ nicht an } \mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi] \text{ anpassen.}}$

Komplexe Folgen und Reihen

1.8 Aus Analysis I wissen wir: Die Folge x_n konvergiert gegen x, falls $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Jetzt: z_n konvergiert gegen $z = x+iy$, falls $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

1.9 Komplexe Reihen funktionieren vom Prinzip genauso wie reelle Reihen:

Absolute Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert

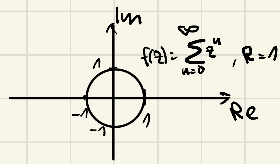
Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, falls $|z|<1$

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n \in \mathbb{C}$

Konvergenzkriterium: $\boxed{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \begin{cases} <1 \Rightarrow \text{Potenzreihe konvergiert} \\ >1 \Rightarrow \text{Potenzreihe divergiert} \end{cases}}$

Konvergenzradius: $\boxed{R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \in [0,\infty]}$ und $\boxed{R := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \in [0,\infty]\text{, falls existent}}$

Das ist einfach ein Kreis von Werten, wo die Potenzreihe konvergiert, zum Beispiel:



2.0 $\boxed{\text{Frage: Was ist der Konvergenzradius von } e^z\text{? Tipp: } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n}$

Antwort: $\boxed{R=\infty\text{, also konvergiert } e^z \text{ auf ganz } \mathbb{C}.}$

$\boxed{\text{Falls } R=0\text{: } f(z) \text{ konvergiert nirgendwo}}$

Analysis II.

2.1 Beispiel: Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem:

Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) - u(t) = t \\ u(0) = 0 \;, \; u'(0) = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ansatz: } u(t) = \underbrace{u_h(t)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{u_p(t)}_{\text{partikuläre Lösung}}}$$

I. $\Rightarrow \ddot{u}_h(t) - u_h(t) = 0$, $\boxed{u_h(t) = Ae^{\lambda t}, A \in \mathbb{C}}$ $\Rightarrow A\lambda^2 e^{\lambda t} - Ae^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$u_h(t) = Ae^{t}$ und $u_h(t) = Ae^{-t}$ $\Rightarrow$ DGL (Differentialgleichung) ist linear, also $\boxed{\text{benutzen wir Superposition:}}$

$u_h(t) = A_1 e^{t} + A_2 e^{-t}$; $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

II. Die Störfunktion $f(t) = t$ ist ein Polynom 1. Grades. Als Ansatz für die partikuläre Lösung benutzen wir dann auch ein Polynom 1. Grades: $u_p(t) = a \cdot t + b$; $a, b \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \; 0 - (at + b) = t \Rightarrow b = 0 \, , \, a = -1 \Rightarrow u_p(t) = -t$

III. $u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A_1 e^{t} + A_2 e^{-t} - t$ $\Rightarrow$ zwei Parameter A_1 und A_2, also zweidimensionaler Lösungsraum. Das war zu erwarten, da die Ordnung 2 ist! $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ordnung der DGL = Dimension vom Lösungsraum}}$

IV. Da der Lösungsraum zweidimensional ist, brauchen wir zwei Anfangsbedingungen.

$\Rightarrow$ Einsetzen: $u(0) = A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$, $u'(0) = A_1 - A_2 - 1 = 3$

$\Rightarrow 2A_1 = 4 \Rightarrow A_1 = 2 \, , \, A_2 = -A_1 = -2$

$\Rightarrow u(t) = 2e^{t} - 2e^{-t} - t$ Wichtig! Anfangsbedingung erst ganz am Ende auferlegen!