

Thema: Mehrdeutigkeit komplexer Zahlen

(□ bedeutet wichtig für Zusammenfassung)

Wiederholung: Wenn ich $z \in \mathbb{C}$ mit e^{ip} multipliziere, ergibt das: $z \cdot e^{ip} = r e^{it} \cdot e^{ip} = r e^{i(t+p)}$
 ⇒ Multiplikation von z mit e^{ip} dreht z um p Grad im gegen Uhrzeigersinn um den Ursprung

1.1 Frage: Wds bedeutet z^{ip} ? Tipp: $z = e^{ix}$ Antwort: eine Rotation um $p \ln(z)$

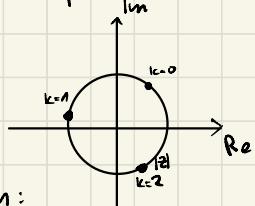
1.2 $e^{2\pi i}$ ergibt eine Rotation um $360^\circ \Rightarrow e^{2\pi i} = e^0 = 1 \Rightarrow e^{ix}$ ist nicht eindeutig, da $e^{2\pi i k} = 1$ heißt.
 Oder: $e^{ip} = (\cos(p) + i \sin(p)) = \cos((p+2\pi k) + i \sin((p+2\pi k)) = e^{i(p+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow i \cdot (e^{i(p+2\pi k)})^i = e^{\frac{i}{2}(p+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ unendlich viele Werte! $\Rightarrow z$ allgemein nicht eindeutig darstellbar, wenn man Polarform benutzt! \Rightarrow Einschränkung auf $[-\pi, \pi]$ nur möglich wenn man keine Wurzeln, Potenzen, und Logarithmen benutzt!

1.3 Im reellen wissen wir, dass Wurzel ziehen nicht eindeutig ist, es gilt \pm .

Analog gibt es im Komplexen n -viele vte Wurzeln.

Graphisch:



Vorher haben wir gezeigt, dass $z = r e^{i(p+2\pi k)}$ die allgemeine Polarform ist.

Sei $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow w = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(p+2\pi k)}{n}}$. Da $k \in \mathbb{Z}$ ist, schreibt es, als ob es unendlich viele vte Wurzeln gäbe. Es stellt sich heraus, dass sie sich alle n wiederholen!

Damit wir also nicht unendlich viele Werte haben, die sich wiederholen, schränken wir k ein:

$$w = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(p+2\pi k)}{n}}, k=0,1,\dots,n-1 \quad (\text{man muss nicht unbedingt bei null beginnen})$$

Frage: Wo liegen alle n Wurzeln? Antwort: Auf einem Kreis mit Abstand $\sqrt[n]{r}$ vom Ursprung

1.4 Beispiel: $z^5 = i$. Es geht um Wurzeln, also lieber in Polarform umwandeln.

$$\Rightarrow z = e^{\frac{it}{5}}$$

$$\Rightarrow \text{Formel anwenden: } z = \sqrt[5]{1} \cdot e^{\frac{i(2\pi k)}{5}}, k=0,1,2,3,4$$

1.

1.S

Frage: Was ist die Lösung von $z^3 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$? Tipp: Wandle in Polarkoordinaten um

Antwort: $z^3 = 3 e^{-\frac{2}{3}\pi i} \Rightarrow z = 3^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi)/3}$, $k=0,1,2,3,4$

1.b Ähnlich wie bei Wurzeln, ist auch der komplexe Logarithmus nicht eindeutig.

Definition: Falls $e^w = z$, dann ist w ein Logarithmus von z

Beispiel: $e^w = 1 \Rightarrow$ Normalerweise einfach $w = \ln(1) = 0$

\Rightarrow Jetzt aber: $e^{2\pi i} = 1, e^{4\pi i} = 1, \dots e^{2\pi k i} = 1, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \ln(1) = 0, 2\pi i, 4\pi i, \dots 2\pi k i, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Unendlich viele Werte!

Allgemein:

Wir schreiben z in Polarkoordinaten: $z = r e^{i(\arg(z) + 2\pi k)}$

$$\Rightarrow \ln(z) = \ln(r e^{i(\arg(z) + 2\pi k)}) = \ln(r) + i(\arg(z) + 2\pi k)$$

\Rightarrow Es gibt allgemein unendlich viele Werte für den Logarithmus einer komplexen Zahl

Lösung: Wir setzen $k=0$, beschränken also das Argument, da $\arg(z) \in [-\pi, \pi]$

$\Rightarrow \text{Log}(z) := \ln(|z|) + i\arg(z)$ wird Hauptwert des Logarithmus genannt, $\arg(z) \in [-\pi, \pi]$

1.7 Frage: Was ist $\text{Log}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$? Tipp: Polarkoordinaten verwenden

Antwort: $\text{Log}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \ln(2) + i\frac{3}{4}\pi$

Frage: Was ist $\text{Log}((-i)^2)$? Antwort: $\text{Log}(i^2) = 2\text{Log}(i) = 2\ln(2) + i\frac{3}{4}\pi$

Achtung!! $\frac{3}{2}\pi \notin [-\pi, \pi]$. Wir rechnen also $\frac{3}{2}\pi - 2\pi = -\frac{1}{2}\pi \Rightarrow \text{Log}(i^2) = 2\ln(2) - i\frac{1}{2}\pi$

Die Regel $\text{Log}(z^n) = n\text{Log}(z)$ gilt nicht mehr, falls wir $\arg(z)$ nicht an $\arg(z) \in [-\pi, \pi]$ anpassen.

Komplexe Folgen und Reihen

1.8 Aus Analysis I wissen wir: Die Folge x_n konvergiert gegen x , falls $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
 jetzt: z_n konvergiert gegen $z = x+iy$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

1.9 Komplexe Reihen funktionieren vom Prinzip genauso wie reelle Reihen:

Absolute Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergiert

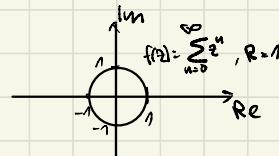
Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, falls $|z| < 1$

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n \in \mathbb{C}$

Konvergenzkriterium: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert
 $> 1 \Rightarrow$ Potenzreihe divergiert

Konvergenzradius: $R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \in [-\infty, \infty]$ und $R := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \in [-\infty, \infty]$, falls existent

Da ist einfach ein Kreis von Werten, wo die Potenzreihe konvergiert, zum Beispiel:



2.0 Frage: Was ist der Konvergenzradius von e^{iz} ? Tipp: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

Antwort: $R = \infty$, also konvergiert e^z auf ganz \mathbb{C}

Analysis II.

2.1 Beispiel: Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem:

Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
 $\ddot{u}(t) - u(t) = t$
 $u(0) = 0, u'(0) = 3$

Ausatz: $u(t) = u_{\text{h}}(t) + u_{\text{p}}(t)$

\uparrow homogene Lösung \downarrow partikuläre Lösung

I. $\Rightarrow \ddot{u}_{\text{h}}(t) - u_{\text{h}}(t) = 0, u_{\text{h}}(t) = A e^{kt}, A \in \mathbb{C} \Rightarrow A k^2 e^{kt} - A e^{kt} = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -1$
 $u_{\text{h}}(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t}$ und $u_{\text{p}}(t) = A e^{kt} \Rightarrow$ DGL (Differentialgleichung) ist linear, also benutzen wir Superposition!
 $u_{\text{p}}(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t}, A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

II. Die Störfunktion $f(t) = t$ ist ein Polynom 1. Grades. Als Ausatz für die partikuläre Lösung benutzen wir dann auch ein Polynom 1. Grades: $u_{\text{p}}(t) = at + b, a, b \in \mathbb{C}$
 $\Rightarrow 0 - (at + b) = t \Rightarrow b = 0, a = -1 \Rightarrow u_{\text{p}}(t) = -t$

III. $u(t) = u_{\text{h}}(t) + u_{\text{p}}(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} - t \Rightarrow$ zwei Parameter A_1 und A_2 , also zweidimensionaler Lösungsraum. Das war zu erwarten, da die Ordnung 2. ist! Ordnung der DGL = Dimension vom Lösungsraum

IV. Da der Lösungsraum zweidimensional ist, brauchen wir zwei Anfangsbedingungen.

\Rightarrow Einsetzen: $u(0) = A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2, u'(0) = A_1 - A_2 - 1 = 3$
 $\Rightarrow 2A_1 = 4 \Rightarrow A_1 = 2, A_2 = -A_1 = -2$

$\Rightarrow u(t) = 2e^t - 2e^{-t} - t$ Wichtig! Anfangsbedingung erst ganz am Ende aufstellen!