

Thema: Komplexe Zahlen

(□ bedeutet wichtig für Zusammenfassung)

1.1 Definition von Analysis:

$$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, \cdot_{\mathbb{C}}), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + x'y \end{pmatrix}$$

⇒ komplexe Zahlen sind ein reeller Vektorraum mit einer speziellen Multiplikation

Normalerweise Skalar- oder Kreuzprodukt, jetzt  $\cdot_{\mathbb{C}}$  ⇒ Nur Multiplikation neu, nicht sehr deep

1.2 Da eine komplexe Zahl  $z$  ein reeller Vektor ist, besteht sie aus zwei reellen Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1. \quad i \text{ kennzeichnet einfach die zweite Komponente} \Rightarrow \text{wird Normalform genannt}$$

$\begin{matrix} \nearrow 1. \text{ Komponente} & \searrow 2. \text{ Komponente} \end{matrix}$

⇒ Jetzt ergibt auch die Definition der „speziellen Multiplikation“ Sinn:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x+iy) \cdot (x'+iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) = \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + x'y \end{pmatrix}$$

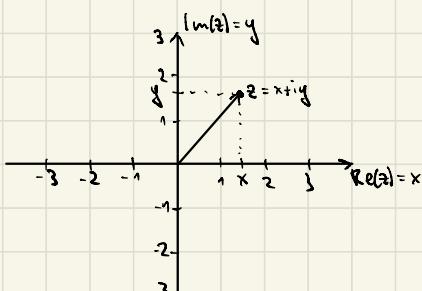
Addition stimmt auch überein mit Intuition:  $z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = (x+x) + i(y+y')$

1.3 Frage: Wie würde man  $i$  als Vektor darstellen? Antwort:  $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4 Die erste Komponente bezeichnet man als Realteil:  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x+iy) = x; x, y \in \mathbb{R}$

Analog bezeichnet man die zweite Komponente als Imaginärteil:  $\operatorname{Im}(z) = y$

Da man komplexe Zahlen wie Vektoren behandeln kann, kann man sie im  $\mathbb{R}^2$  darstellen:



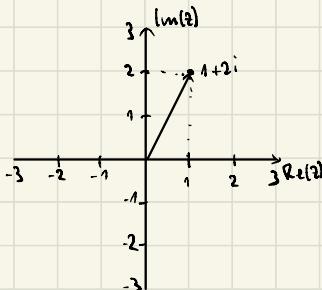
⇒ Gleich wie der reelle Vektorraum, nur → dem Skalarprodukt benutzen wir die „spezielle Multiplikation“ – komplexe Multiplikation.

Aber was bedeutet das überhaupt?

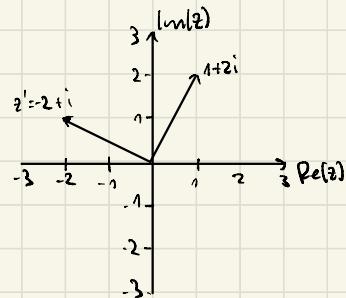
komplexe Multiplikation ermöglicht Rotation + Streckung in der Ebene

=> Wenn man den Vektor  $a$  mit Vektor  $b$  komplex multipliziert, dann streckt und rotiert man den Vektor  $a$  bzw.  $b$ .

1.5 Beispiel: Wir stellen  $z = 1+2i$  als Vektor dar:



Jetzt multiplizieren wir mit  $i$ :  
 $z' = z \cdot i = (1+2i) \cdot i = -2+i$



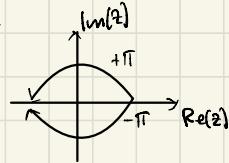
Um die Streckung zu bestimmen vergleichen wir die Beträge:

$$|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}, |z'| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow |z| = |z'|$$

=> Beträge gleich groß, also ist die Streckung 1 (keine Streckung)

Um die Rotation zu bestimmen vergleichen wir die Winkel:

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & y < 0 \end{cases} \text{ und } z \neq 0 \Rightarrow \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$$



=> Wir berechnen:  $\text{Arg}(1+2i) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63,43^\circ$  und  $\text{Arg}(-2+i) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \approx 153,43^\circ$

=> Rotation:  $\text{Arg}(-2+i) - \text{Arg}(1+2i) = 90^\circ$

=> In diesem Fall hat die Multiplikation mit  $i$  eine Streckung von 1 ergeben und eine Rotation von  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn.

1.6 Frage: Was das ein Spezialfall oder ergibt eine Multiplikation mit  $i$  immer eine reine  $90^\circ$ -Rotation? Warum?

Antwort:  $zi$  ist immer  $z$  um  $90^\circ$  gedreht für  $z \neq 0$ .

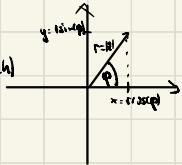
2.

1.7

Neben der Normalform gibt es die Polarkoordinaten, die wir jetzt herleiten.

Normalform:  $z = x + iy \Rightarrow x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  (nichts neues, technisch)

$$\Rightarrow z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$



Wenn man  $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$  und  $e^{i\varphi}$  als Potenzreihen entwickelt, kann man die Euklidische Formel benutzen:  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

$$\Rightarrow z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r e^{i\varphi}$$

: Polarkoordinaten liegen nicht nur schön da, sondern sind auch praktisch zum rechnen, wie wir sehen werden)

1.8

Frage: Was ist  $r$  und  $\varphi$  für  $z = i$ ? Antwort:  $r = 1$  und  $\varphi = 90^\circ \Rightarrow i = e^{i\pi/2}$

$\Rightarrow r = |z|$  ist die Streckung und  $\varphi$ : Arg(z) ist die Rotation  $\Rightarrow$  Vorherige Frage ist bewiesen

$$\Rightarrow z \cdot z' = r e^{i\varphi} \cdot r' e^{i\varphi'} = r r' e^{i(\varphi+\varphi')}$$

und  $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\varphi-\varphi')}$  und  $z^n = r^n e^{in\varphi}$

1.9 Normalform ist nützlich für Addition/Subtraktion und Polarkoordinaten für Multiplikation/Division und das Arbeiten mit Potenzen.

Frage: Was ergibt  $i^2$ ? Tipp:  $i = e^{i\pi/2}$  Antwort:  $i^2 = e^{-\pi/2}$  (real!)

Glückswunsch: Erste Klausuraufgabe gelöst!

2.0

Frage: Wie kann man die Inverse mittels Polarkoordinaten bestimmen? Antwort:  $z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$

Jetzt ist die Frage wie man es aus der Normalform berechnet ( $z \neq 0$ ):

1. Möglichkeit: in Polarkoordinaten umwandeln

2. Möglichkeit: Wir benutzen die Definition der Konjugatoren:  $\bar{z} = x - iy$ ,  $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Wir berechnen:  $\bar{z} \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} (x - iy)$$

: Normalform kann man immer direkt als Vektor schreiben

Frage: Was ist die Konjugierte von  $e^{i\varphi}$ ? Antwort:  $\bar{e}^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$

2.1 Natürlich:  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

Frage: Was ergibt analog  $\operatorname{Im}(z)$  im Abhängigkeit von  $z$  und  $\bar{z}$ ? Antwort:  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

2.2

Frage: Gilt  $\operatorname{Im}((-5+3i)^4 \cdot (-7-5i)) = \operatorname{Im}((5+3i)^4 \cdot (7-5i))^2$ ? Tipp:  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(\bar{z})$ . Antwort: Ja, da  $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$   
 $(-5+3i)^4 \cdot (-7-5i) = -(5-3i)^4 \cdot (7+5i)$

Übung: Berechne die Normalform von  $z = \frac{2-5i}{4+3i}$ . Antwort:  $z = \frac{1}{25} \cdot (2-5i)(4+3i) = \frac{23}{25} - i \frac{14}{25}$

Frage: Sei  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots = 0$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $i \geq 1$ . Gilt  $p(\bar{z}) = \bar{p(z)}$ ? Antwort: Ja, da  $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = 0$

2.3 Wir haben gesehen, dass  $e^{ip}$  eine Rotation um den Winkel  $ip$  bedeutet.

Frage: Was bedeutet  $z^{ip}$ ? Tipp:  $z = e^{\ln(z)}$ . Antwort: eine Rotation um  $p \cdot \ln(z)$

2.4  $e^{2\pi i}$  ergibt eine Rotation um  $360^\circ \Rightarrow e^{2\pi i} = e^{0i} = 1 \Rightarrow e^{ix}$  ist nicht eindeutig, da  $e^{2\pi i} = 1$  und  $e^{ix} = e^{(k+2\pi)i}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow i \cdot (e^{\frac{i\pi}{2} + 2\pi k})^i = e^{\frac{i\pi}{2} - 2\pi k}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  unendlich viele Werte!  $\Rightarrow z$  allgemein nicht eindeutig darstellbar, wenn man

Polarform benutzt!  $\Rightarrow$  Einschränkung auf  $[-\pi, \pi]$  nur möglich wenn man keine Wurzeln, Potenzen, und Logarithmen benutzt!

2.5 Im reellen wissen wir, dass Wurzelzeichen nicht eindeutig ist, es gibt  $\pm$ .

Analog gibt es im Komplexen  $n$ -vielen Wurzeln.

Vorher haben wir gezeigt, dass  $z = r e^{i(p+2\pi k)}$  die allgemeine Polarform ist.

Sei  $w^n = z$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  $\Rightarrow w = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(p+2\pi k)}{n}}$ . Da  $k \in \mathbb{Z}$  ist, schaut es, als ob es unendlich viele Wurzeln gäbe. Es stellt sich raus, dass sie sich alle  $n$  wiederholen!

$\Rightarrow$  Wurzeln definieren:

$w = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(p+2\pi k)}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$  (Man muss nicht unbedingt bei null beginnen)

Frage: Wo liegen alle  $n$  Wurzeln? Antwort: Auf einem Kreis mit Abstand  $\sqrt[n]{r}$  vom Ursprung

Da  $e^{ix}$  nicht eindeutig ist, ist der Logarithmus mehrdeutig: kommt nächste Woche!