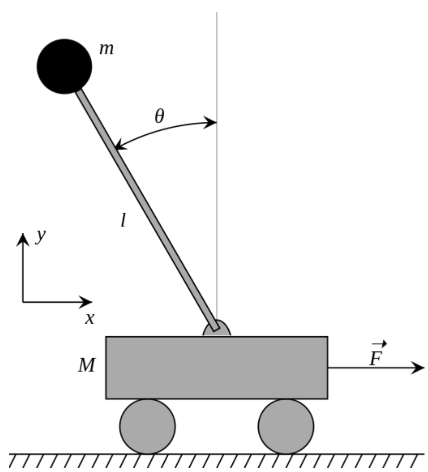
Pendulul Invers

Gengiu Robert-Constantin

November 20, 2017

Introducere
Pendulul Invers este o problema clasica de dinamica nonliniara si de control. Scopul final este de a stabiliza pendulul, astfel incat sa faca unghi nul cu verticala. Pornind de la modelul matematic, se obtin ecuatiile de miscare, care vor fi liniarizate, si in final se va calcula un tip de controler cu ajutorul Matlab-ului. Mai departe, avand toate acestea calculate, se poate realiza o simulare grafica a sistemului.

Prezentarea pe scurt a modelului matematic



Variabila	Definitie
M	Masa cartului(kg)
m	Masa pendulului(kg)
x	Deplasarea cartului(m)
F	Forta aplicata cartului(N)
l	Lungimea firului(m)
θ	Unghiul facut cu orizontala

Ecuatiile Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{unde, L reprezinta lagrangianul sistemului} \tag{1}$$

$$L = K - U \quad \text{K - energia interna, iar U - energia potentiala} \tag{2}$$

$$U = mgcos\theta \quad \text{(doar pendulul are energie potentiala)} \tag{3}$$

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}_p^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \tag{4}$$

$$\text{Explicitam cele doua viteze:} \quad v_x = \dot{x} - l\dot{\theta}cos\theta \quad v_y = l\dot{\theta}sin\theta \tag{5}$$

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} - l\dot{\theta}cos\theta)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}sin\theta)^2 \tag{6}$$

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}l^2\dot{\theta}cos\theta + l^2\dot{\theta}^2cos^2\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2sin^2\theta \tag{7}$$

$$K = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(-2\dot{x}l^2\dot{\theta}cos\theta + l^2\dot{\theta}^2(cos^2\theta + sin^2\theta)) \tag{8}$$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\dot{x}l^2\dot{\theta}cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgcos\theta \tag{9}$$

Ecuatiile de miscare

$$q_1 = x \ \ (M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta}cos\theta + ml\dot{\theta}sin\theta = F - k\dot{x} \ \ \text{k constanta fortei de frecare} \tag{10}$$

$$q_2 = \theta \ \ -\ddot{x}cos\theta + l\ddot{\theta} - gsin\theta = 0 \tag{11}$$

Ecuatii de stare neliniare

Selectam variabilele de stare astfel:

$$x_1 = x \tag{12}$$

$$x_2 = \dot{x} \tag{13}$$

$$x_3 = \theta \tag{14}$$

$$x_4 = \dot{\theta} \tag{15}$$

Obtinem sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \frac{ml}{M+m}(x_4^2 sinx_3 - \dot{x}_4 cosx3) + \frac{F-kx_2}{M+m} \\ \dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta} = \frac{1}{l}(-\dot{x}_2 cosx_3 + gsinx_3) \end{cases}$$

Dupa inlocuiri obtinem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-mgsinx_3cosx_3 + mlx_4^2 sinx_3 + F - kx_2}{M+m(1-cos^2x_3)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(M+m)gsinx_3 - cosx_3(mlx_4^2 + F - kx_2)}{l(M+m(1-cos^2x_3))} \end{cases}$$

Sistemul de mai sus contine functii trigonometrice si, deci trebuie sa eliminam acei termeni pentru a fi un sistem liniar.

Liniarizare:

Definim

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-mgsinx_3cosx_3+mlx_4^2sinx_3+F-kx_2}{M+m(1-cos^2x_3)} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)gsinx_3-cosx_3(mlx_4^2+F-kx_2)}{l(M+m(1-cos^2x_3))} \end{bmatrix}$$

Folosind Dezvoltarea in serie Taylor in jurul punctelor de echilbru sau ignorandu-se termenii de ordin 2 se obtine sistemul liniar necasar regulatorului.

Pentru cazul in care pendulul se afla sus.

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ignoram termenii de ordin 2 (cosx = 1 si sinx = x)

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-mgsinx_3cosx_3+mlx_4^2sinx_3+F-kx_2}{M+m(1-cos^2x_3)} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)gsinx_3-cosx_3(mlx_4^2+F-kx_2)}{l(M+m(1-cos^2x_3))} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{F-mgx_3-kx_2}{M} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)gx_3-F+kx_2}{Ml} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{Ml} & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{Ml} \end{bmatrix} F$$

Astfel am obtinut sistemul liniar de forma $\dot{x}$ = Ax + bu necesar implementarii regularului.

Descrierea Regulatorului:

Regulator ales este LQR(Linear Quadratic Regulator) pentru ce poate fi ajustat dupa preferinta, in functie de motorul cartului, timpul necasar ca sistemul sa se stabilizeze, etc. LQR utilizeaza o functie de cost pentru a gasi legea optima de control pentru un sistem liniar.

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Q reprezinta matricea costurilor pentru parametrii de stare, iar R este costul comenzii. Legea raspunsului de control care minimizeaza costul functiei va fi de forma u = -Kx

$$K = R^-1 B^T P$$

P este solutia ecuatiei Riccati

$$A^T P + PA - PBR^-1 B^T P + Q = 0$$