3.4 ARMA- und ARIMA-Modelle

ARMA-Prozesse: Autoregressive moving average Prozesse

ARMA(p,q)-Modelle

AR(p)-Modell entspricht ARMA(p,0).

MA(q)-Modell entspricht ARMA(0.q).

Prinzip der Sparsamkeit: Äquivalente Darstellung eines komplexen Modells durch ein einfacher strukturiertes Modell.

$\downarrow$

Beispiel: ARMA(1,1)-Modell

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + U_t - \theta_1 U_{t-1}$$

Äquivalente Darstellung als MA(∞)-Prozess:

Substitution von X_{t-1} durch

$$X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + U_{t-1} - \theta_1 U_{t-2}$$

führt zu

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1\left(\phi_1 X_{t-2} + U_{t-1} - \theta_1 U_{t-2}\right) + U_t - \theta_1 U_{t-1} \\ &= \phi_1^2 X_{t-2} + U_t + \left(\phi_1 - \theta_1\right) U_{t-1} - \phi_1 \theta_1 U_{t-2} \end{aligned}$$

Substitution von X_{t-2} durch

$$X_{t-2} = \phi_1 X_{t-3} + U_{t-2} - \theta_1 U_{t-3}$$

ergibt

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1^2\left(\phi_1 X_{t-3} + U_{t-2} - \theta_1 U_{t-3}\right) + U_t + \left(\phi_1 - \theta_1\right)U_{t-1} - \phi_1\theta_1 U_{t-2} \\ &= \phi_1^3 X_{t-3} + U_t + \left(\phi_1 - \theta_1\right)U_{t-1} + \phi_1\left(\phi_1 - \theta_1\right)U_{t-2} - \phi_1^2\theta_1 U_{t-3} \end{aligned}$$

Führt man die Substitution unendlich oft durch, dann erhält man schließlich

$$X_t = U_t + \left(\phi_1 - \theta_1\right)\sum_{i=1}^{\infty}\phi_1^i U_{t-i} \qquad ,$$

was die MA(∞)-Darstellung des ARMA(1,1)-Prozesses ist. Das Prinzip der Sparsamkeit im Sinne einer einfacheren Darstellung durch das ARMA(1,1)-Modell ist offensichtlich.

- Varianz des ARMA(1,1)-Prozesses

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + U_t - \theta_1 U_{t-1}$$

$$X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + U_{t-1} - \theta_1 U_{t-2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(X_t\right) = \gamma_0 &= E\left(X_t^2\right) = E\left[\left(\phi_1 X_{t-1} + U_t - \theta_1 U_{t-1}\right)^2\right] \\ &= \phi_1^2 E\left(X_{t-1}^2\right) + E\left(U_t^2\right) + \theta_1^2 E\left(U_{t-1}^2\right) - 2\phi_1\theta_1 \underbrace{E\left(X_{t-1}U_{t-1}\right)}_{=E\left(U_{t-1}U_{t-1}\right)=E\left(U_{t-1}^2\right)} \\ &= \theta_1^2\gamma_0 + \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 - 2\phi_1\theta_1\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1-\phi_1^2\right)\gamma_0 = \left(1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1\right)\sigma^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \gamma_0 = \frac{1+\phi_1^2-2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}\,\sigma^2 \,,}\quad |\phi_1|<1$$

- Autokovarianzen des ARMA(1,1)-Prozesses

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E\left(X_t X_{t-1}\right) = E\left[\left(\phi_1 X_{t-1} + U_t - \theta_1 U_{t-1}\right)X_{t-1}\right] \\ &= \phi_1 E\left(X_{t-1}^2\right) - \theta_1 \underbrace{E\left(U_{t-1}X_{t-1}\right)}_{=E\left(U_{t-1}^2\right)} = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2\end{aligned}$$

Substitution von γ_0 ergibt:

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1-\phi_1^2}\,\sigma^2}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= E\left(X_t X_{t-2}\right) = E\left[\left(\phi_1 X_{t-1} + U_t - \theta_1 U_{t-1}\right)X_{t-2}\right] \\ &= \phi_1 E\left(X_{t-1}X_{t-2}\right) = \phi_1\gamma_1\end{aligned}$$

allgemein: $\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1}$ für $\tau \geq 2$

- Autokorrelationsfunktion des ARMA(1,1)-Prozesses

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

allgemein: $\rho_\tau = \phi_1\rho_{\tau-1}$ für $\tau \geq 2$

Interpretation: Der Verlauf der Autokorrelationsfunktion eines ARMA(1,1)-Prozesses ist vergleichbar mit dem eines AR1)-Prozesses. Sie nimmt wegen $|\phi_1|<1$ ausgehend vom Anfangswert ρ_1 geometrisch ab. Sofern ρ_1 bei positivem ϕ_1 negativ ist, strebt die ACF von unten gegen Null. Bei negativem ϕ_1 zeigt die ACF ein oszillierendes Verhalten.

- Partielle Autokorrelationsfunktion:

Die partielle Autokorrelationsfunktion eines ARMA(1,1)-Prozesses verläuft vergleichbar mit der eines MA(1)-Prozesses. Sie nimmt monoton oder oszillierend ausgehend vom Anfangswert ρ_1 geometrisch ab.

Problem der Modellidentifikation bei ARMA(1,1)-Prozessen:

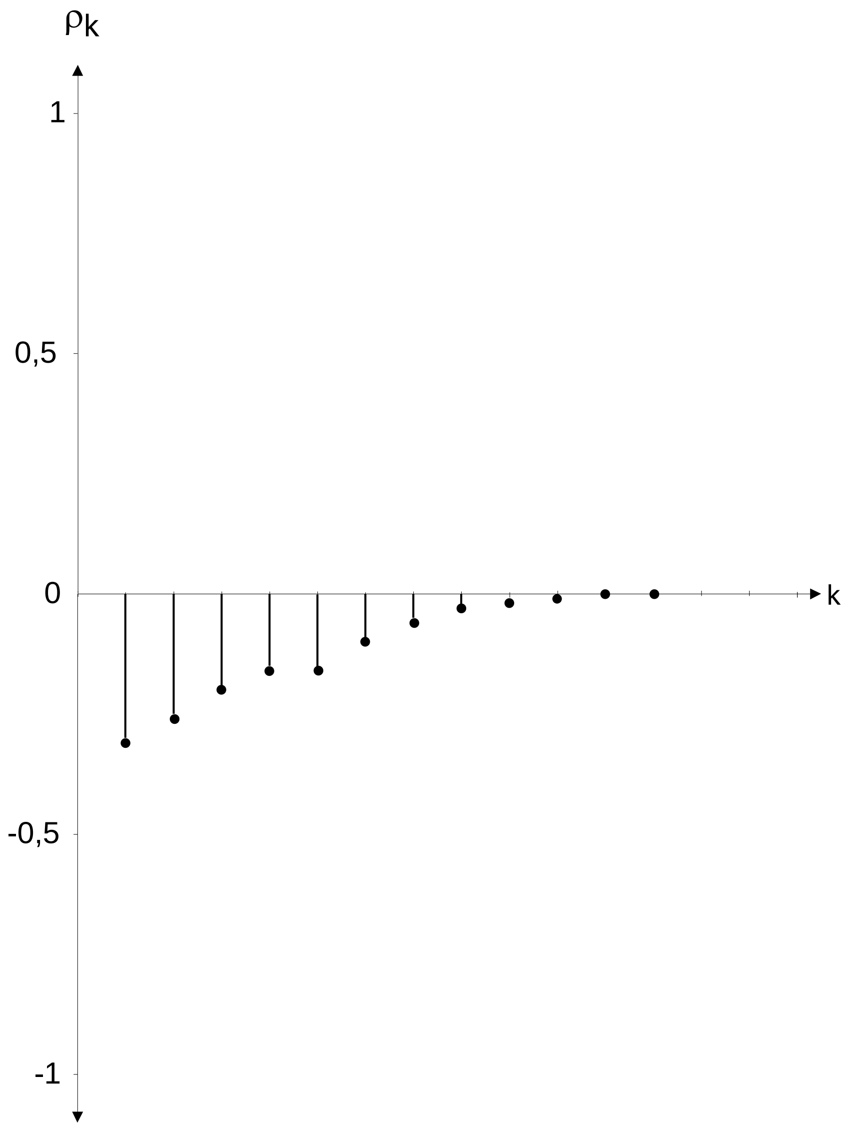
Im Unterschied zu den AR(p)- und MA(q)-Prozessen bricht der ARMA(1,1)-Prozess bei der Autokorrelationsfunktion und partiellen Autokorrelationsfunktion nicht nach einem bestimmten Lag ab.

- Stationarität:

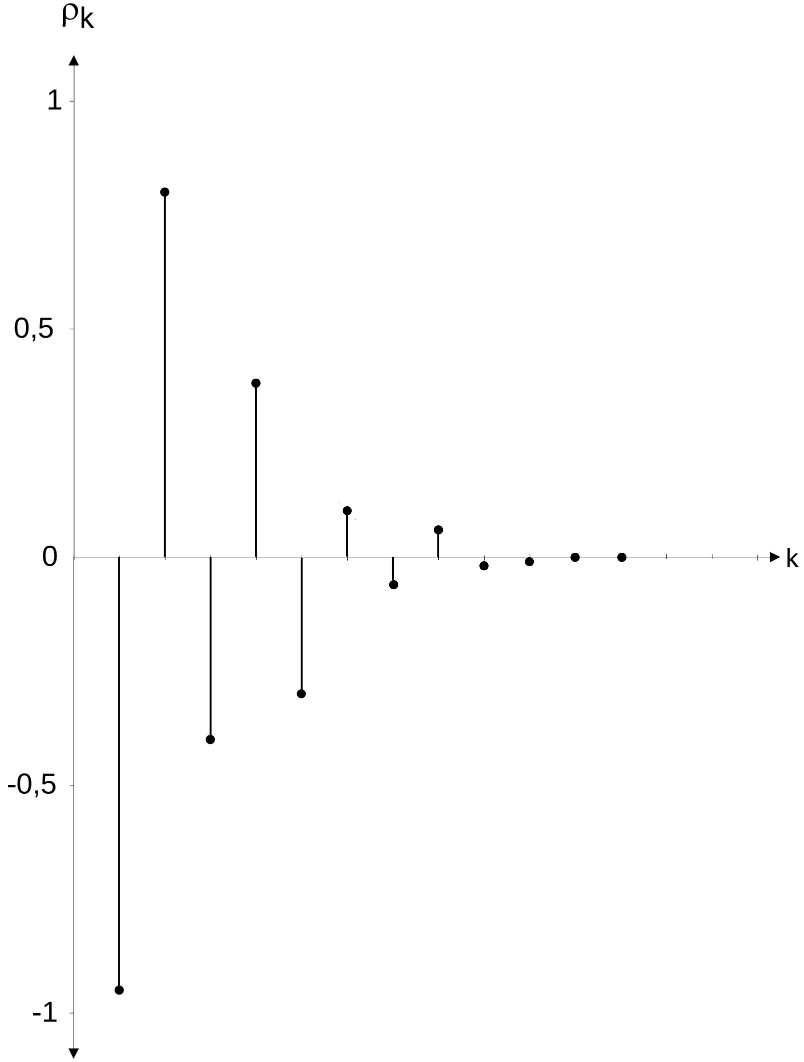
Die Stationarität eines ARMA(1,1)-Prozesses lässt sich anhand des charakteristischen Polynoms $\phi(B)=1-\phi_1 \cdot B=0$, d.h. analog zum AR(1)-Prozess überprüfen.

Beispiel für ARMA(1,1)-Prozess

Autokorrelationfunktion für $X_t = 0{,}8X_{t-1} + 2 + U_t - 0{,}9U_{t-1}$



Autokorrelationfunktion for $X_t = -0{,}8X_{t-1} + 2 + U_t - 0{,}9U_{t-1}$



ARIMA-Modelle

ARIMA-Prozesse: Integrierte autoregressive moving average Prozesse

- ARMA(p,q)-Modell

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + \phi_2 \cdot X_{t-2} + \ldots + \phi_p \cdot X_{t-p} + U_t - \theta_1 \cdot U_{t-1} - \theta_2 \cdot U_{t-2} - \ldots - \theta_q \cdot U_{t-q}$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

$$\phi(B) \cdot X_t = \theta(B) \cdot U_t$$

Beispiele:

- ARMA(1,1)-Modell

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B, \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B$$

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + U_t - \theta_1 U_{t-1}$$

- ARMA(1,2)-Modell

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B, \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2}$$

- ARMA(2,1)-Modell

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2, \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B$$

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t - \theta_1 U_{t-1}$$

- ARMA(2,2)-Modell

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2, \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2}$$

▪ ARIMA(p,d,q)-Modell

Erste Differenzen: $\Delta^1 X_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

Zweite Differenzen:

$$\begin{aligned} \Delta^2 X_t &= \Delta X_t - \Delta X_{t-1} \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \end{aligned}$$

$$\phi(B)\Delta^d X_t = \theta(B) \cdot U_t$$

mit

$$\Delta^d X_t = \Delta^{d-1} X_t - \Delta^{d-1} X_{t-1} \quad \text{(d – te Differenz)}$$

oder

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\cdot U_t$$

wegen

$$\Delta^1 X_t = X_t - X_{t-1} = (1-B)X_t,$$

$$= [\Delta^2 X_t = \Delta^1 X_t - \Delta^1 X_{t-1} = X_t - X_{t-1} - (X_{t-1} - X_{t-2}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

$$(1-B)^2 X_t = (1-B)(1-B)X_t = \left(1-2B+B^2\right)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Allgemein gilt: $\Delta^d X_t = (1-B)^d \cdot X_t$.

Beispiele:

- ARIMA(1,1,1)

$$\phi(B) = 1-\phi_1 B, \quad \theta(B) = 1-\theta_1 B, \quad \Delta X_t = (1-BX_t = X_t - X_{t-1})$$

$$(1-\phi_1 B)(1-B)X_t = (1-\theta_1 B)U_t$$

$$\left(1-B-\phi_1 B+\phi_1 B^2\right)X_t = (1-\theta_1 B)U_t$$

$$X_t = (1+\phi_1)\cdot X_{t-1} - \phi_1 X_{t-2} + U_t - \theta_1 U_{t-1}$$

• ARIMA(1,2,1)

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B, \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B,$$

$$\Delta^2 X_t = (1-B)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

$$(1-\phi_1 B)(1-B)^2 X_t = (1-\theta_1 B)U_t$$

$$(1-\phi_1 B)\left(1-2B+B^2\right)X_t = (1-\theta_1 B)U_t$$

$$\left(1-2B+B^2-\phi_1 B+2\phi_1 B^2-\phi_1 B^3\right)X_t = (1-\theta_1 B)U_t$$

$$[1-(2+\phi_1)B+(1+2\phi_1)B^2-\phi_1 B^3)X_t = (1-\theta_1 B)U_t$$

$$X_t = (2+\phi_1)\cdot X_{t-1} - (1+2\phi_1)X_{t-2} + \phi_1 X_{t-3} + U_t - \theta_1 U_{t-1}$$

Multiplikatives saisonales ARIMA-Modell

SARIMA(p,d,q) x (P,D,Q)

oder

ARIMA$_s$ (p,d,q) x (P,D,Q)

$$\phi(B)\phi_s\left(B^s\right)(1-B)^d\left(1-B^s\right)^D X_t = \theta(B)\theta\left(B^s\right)U_t$$

s Saisonzyklus (z.B. s=4 für Quartalsdaten)

Beispiel:

$\text{ARIMA}_4\ (1,1,1) \times (1,0,1)$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B, \quad \phi_4\left(B^4\right) = 1 - \phi_{1,4} B^4$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B, \quad \theta_4\left(B^4\right) = 1 - \theta_{1,4} B^4$$

$$(1-\phi_1 B)\left(1-\phi_{1,4}B^4\right)(1-B)X_t = (1-\theta_1 B)\left(1-\theta_{1,4}B^4\right)U_t$$

$$\left(1-\phi_{1,4}B^4 - \phi_1 B + \phi_1\phi_{1,4}B^5\right)(1-B)X_t = \left(1-\theta_{1,4}B^4 - \theta_1 B + \theta_1\theta_{1,4}B^5\right)U_t$$

$$\left(1-\phi_{1,4}B^4 - \phi_1 B + \phi_1\phi_{1,4}B^5 - B + \phi_{1,4}B^5 + \phi_1 B^2 - \phi_1\phi_{1,4}B^6\right)X_t = \left(1-\theta_{1,4}B^4 - \theta_1 B + \theta_1\theta_{1,4}B^5\right)U_t$$

$$X_t = (1-\phi_1)X_{t-1} - \phi_1 X_{t-2} + 1 - \phi_{1,4}X_{t-4} - \overbrace{(\phi_1\phi_{1,4} + \phi_{1,4})}^{(\phi_1+1)\phi_{1,4}}X_{t-5}$$

$$+\phi_1\phi_{1,4}X_{t-6} + U_t - \theta_1 U_{t-1} - \phi_{1,4}U_{t-4} + \theta_1\theta_{1,4}U_{t-5}$$