תרגול 8 - לופיטל

אם $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ מהצורה $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$

אז $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

- מונה ומכנה גוזרים לחוד – לא גוזרים לפי נגזרת של מנה.
- ניתן להשתמש בלופיטל מספר פעמים (כל עוד הגבול מהצורה המתאימה)
- בגבול מהצורה $0\cdot(\pm\infty)$ נהפוך למנה ואז לופיטל ← $\square\cdot\triangle=\frac{\square}{\frac{1}{\triangle}}$
- בגבול מהצורה $1^{\pm\infty}$ ∞^0 0^0 נשתמש ב "אילן" ואז לופיטל

$f^g\to e^{\ln f^g}\to e^{g\ln f}\to e^{\frac{\ln f}{\frac{1}{g}}}\to$ לופיטל

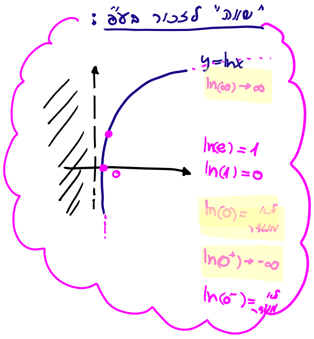
$\frac{\triangle\cdot\square\cdot\heartsuit^{-1}}{\clubsuit}=$ —

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\sqrt[3]{x^4}}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x^{\frac{2}{3}}}{\frac{4}{9}}=\frac{e^0\cdot 0^{\frac{2}{3}}}{\frac{4}{9}}=\frac{1\cdot 0}{\frac{4}{9}}=\boxed{0}$

$x^{\frac{4}{3}}$

$0^{-\frac{2}{3}}=\cancel{0}=\frac{1}{0^{\frac{2}{3}}}$

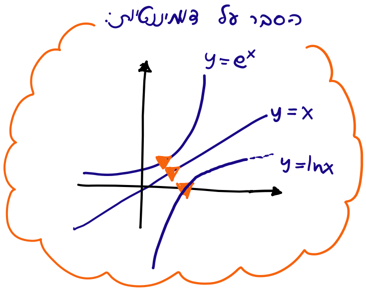
"שווה" לזכור בע"פ:



2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2-1}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{L}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\cancel{2}\ln x}{x}}{\cancel{2}x}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{L}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$

הסבר על פונקציות:



הדגמה:

$\frac{\triangle}{1\,/\,\frac{1}{\square}}=\frac{\triangle}{\square^{-1}}=\triangle\cdot\square=\frac{\square}{\triangle^{-1}}=\frac{\square}{\frac{1}{\triangle}}$

$0\cdot\infty=\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{0}{0}=0\cdot\infty$

3. $\lim_{x\to0+} x^2 \ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{"\frac{-\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}} \overset{"\frac{-\infty}{\infty}"}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} =$

$0\cdot\ln(0^+)$ → "$0\cdot(-\infty)$"

שימי צורה

זהירות!

$0^{-2} \neq 0$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{-2} = \frac{0}{-2} = \boxed{0}$

4. $\lim_{x\to\infty} x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{4}x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{4}}}{x^2} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{4}}}{2x} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{4}}}{2} = \boxed{\infty}$

"$0\cdot\infty$"

5. $\lim_{x\to0} xe^{\frac{1}{x}} =$ "$0\cdot e^{\frac{1}{0}}$"

$\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} =$ "$0\cdot\infty$" $= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{(-\frac{1}{x^2})}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{(-\frac{1}{x^2})}} = e^{\frac{1}{0^+}} = \boxed{\infty}$

$\lim_{x\to0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot0 = \boxed{0}$

$\neq$ הגבול לא קיים!

$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

בגלל

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

טריקים:

$xe^{\frac{1}{x}}$

$\frac{x}{e^{-\frac{1}{x}}}$ $\qquad$ $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)}$

$\frac{1}{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}$ $\qquad$ $\frac{\cancel{(-\frac{1}{x^2})}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{(-\frac{1}{x^2})}}$

$x^2 e^{\frac{1}{x}}$

<u>שאלה 6 ממבחן 23.6 (לפתור בבית 😊)</u>

נתונה הפונקציה הבאה, כאשר a הוא פרמטר סופי

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\ln(2x) & x > 0 \\ a & x = 0 \\ (1+|x|)^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

אזי בנקודה x=0:

א. f בעלת נקודת אי רציפות מסוג ראשון לכל ערך של a.

ב. f רציפה לכל ערך של a

ג. f רציפה רק כאשר a=0

ד. f בעלת נקודת אי רציפות סליקה עבור a=e בלבד

$f(0) = a$

$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(2x) =$ "$0\cdot(-\infty)$" $= \dots\dots = \boxed{0}$

$\lim_{x\to0^-}(1+|x|)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-}\left((1+(-x))^{\frac{1}{-x}}\right)^{\frac{-x}{1}\cdot\frac{1}{x}} = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$

e

$\sqrt{x} = t \qquad x = t^2$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(2x) = \lim_{t\to 0} t\ln(2t^2) = \lim_{\to t} \frac{\ln(2t^2)}{t^{-1}} = \frac{\frac{4t}{2t^2}}{-t^{-2}} \ldots$$

גבול מהסוג: $1^{\pm\infty}$ 0^0 ∞^0 בעזרת "אילן"

$\square^{\triangle} = e^{\ln \square^{\triangle}} = e^{\triangle \ln \square}$

1. $\lim\limits_{x\to0^+} x^{2x} \overset{"0^0"}{=} \lim\limits_{x\to0^+} e^{\ln x^{2x}} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{2x\cdot\ln x} = e^{0^+\cdot\ln 0^+} = "e^{0\cdot(-\infty)}" = e^0 = \boxed{1}$

אילן

$*$ $\lim\limits_{x\to0^+} 2x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{2x}} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\underset{L}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac1x}{\frac12\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac1x}{\frac{-1}{2x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to0^-} -2x = 0$

$\frac12\cdot\frac1x$

הכבדה מיותרת!

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac1x} \overset{"\infty^0"}{=} \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln(1+x^2)^{\frac1x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac1x\ln(1+x^2)} = \dots$

אוילר

$(1+\square)^{\frac{1}{\square}}$ + $1^{\pm\infty}$

3. $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac1x} \overset{"1^{\pm\infty}"}{=} \lim\limits_{x\to0} e^{\ln(1+x^2)^{\frac1x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac1x\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}} = e^0 = 1$

אפשר אוילר

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} \overset{"\frac00"}{\underset{L}{=}} \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \frac01 = 0$