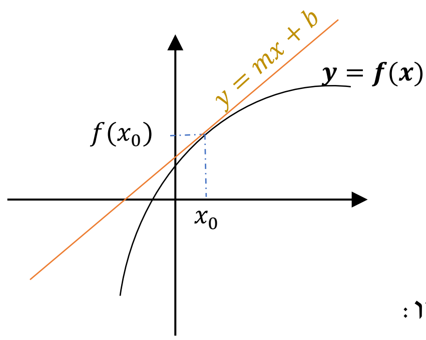
משוואת משיק



משיק לפונקציה $f(x)$ הוא ישר העובר דרך הנקודה $(x_0, f(x_0))$

ושיפועו זהה לשיפוע הפונקציה בנקודה זו: $f'(x_0) = m$.

אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x = x_0$ אז **משוואת המשיק** בנקודה זו:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x = x_0$ ו- $m \neq 0$ אז **משוואת הנורמל** בנקודה זו:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_0)$$

*נורמל הוא ישר המאונך למשיק בנקודת ההשקה.

תרגילים:

מצא משיק לפונקציה $f(x) = x \ln^2 x$ בנקודה $x = e$.

פתרון: כאשר $x = e$ נקבל $y = f(e) = e \ln^2 e = e$

נגזור:

$$f'(x) = 1 \ln^2 x + 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \ln^2 x + 2 \ln x$$

שיפוע

$$m = f'(e) = \ln^2 e + 2 \ln e = 1 + 2 = 3$$

משיק

$$y - e = 3(x - e)$$
$$y = 3x - 2e$$

1. מצא משיק ונורמל לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ ב- $x=4$.

2. מצא משיק לפונקציה $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-2x$ המקביל לישר $y=-x$.

פתרון: השיפוע $m=-1$

$$f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-2x=3x^{\frac{2}{3}}-2x$$

נגזור:

$$f'(x)=3\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}-2=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-2$$

נשווה

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-2=-1$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=1$$

לכן

$$2 = \sqrt[3]{x}$$

$$x = 8$$

$$y = f(8) = 3\sqrt[3]{8^2} - 16 = -4$$

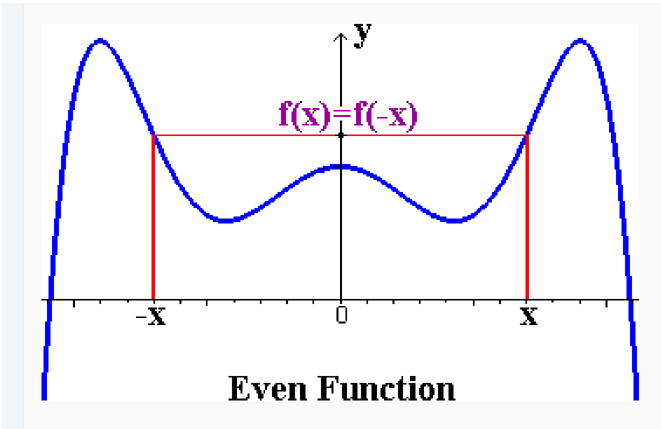
המשיק

$$y - (-4) = -1(x - 8)$$

$$y = -x + 4$$

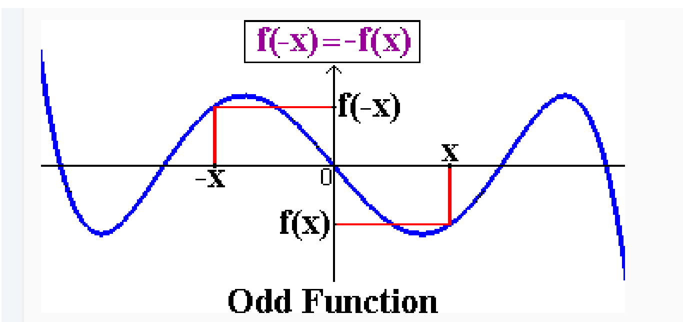
פונקציות זוגיות ואי זוגיות

פונקציה זוגית $f(-x) = f(x)$



למשל: $|x|, x^2, x^4,$

פונקציה אי זוגית $f(-x) = -f(x)$



למשל: x, x^3, x^5, x^7 ,

פונקציה שאינה זוגית\אי זוגית נקראת כללית

תרגיל: בדקו האם הפונקציות הבאות זוגיות או אי זוגיות או כללית

א. $f(x) = x|x| - x^3$

פתרון:

$$f(-x) = -x|-x| - (-x)^3 = -x|x| - (-x^3) = -(x|x| - x^3) = -f(x)$$

לכן אי זוגית

ב. $f(x) = \frac{|x|+x^2}{|x|-x^2}$

ג. $f(x) = 2x - 3$

ד. $f(x) = x \cdot e^{\frac{x}{x^2-1}}$

כלל לופיטל - L'Hopital

כאשר $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$" או "$\pm\frac{\infty}{\infty}$"

דהינו: ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ **או** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$).

אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

* לופיטל תקף גם עבור גבולות חד-צדדיים או כאשר x שואף ל- $\pm\infty$.

הערות:

- מונה ומכנה גוזרים בנפרד (לא לחשב נגזרת של מנה!).
- ניתן להשתמש בלופיטל הפעלה חוזרת (כל עוד הגבול מתאים).
- גבול מסוג "$0\cdot(\pm\infty)$" נהפוך למנה לפי הכלל $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ ואז לופיטל.
- שימוש נוסף בלופיטל לגבולות מסוג "$1^{\pm\infty}$" ,"∞^0" ,"0^0" , בהמשך.

תזכורת

- **אריתמטיקה של גבולות (סופיים) -**

תהינה $f(x), g(x)$ פונקציות. אם קיימים הגבולות (הסופיים) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ אז:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$, מקרה פרטי $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ $, c\in\mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

4. $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to a}(g(x)\right)$ כלל הרכבה לגבולות

בתנאי שהביטויים מוגדרים

מקרה פרטי $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

דוגמאות:

1. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{2x-10}=$

פתרון

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{2x-10}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 5}\frac{2x-5}{2}=\frac{10-5}{2}=\frac{5}{2}$$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}=$

פתרון

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\lim_{x\to 1}2\sqrt{x+3}\,(2x+1)=2\cdot 2\cdot$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x\sqrt{x}}=$

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x\sqrt{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{1.5\sqrt{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

שוב לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{\frac{1.5}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}\,2\sqrt{x}}{1.5}=0$$

<u>כלל לופיטל לא תמיד עוזר</u>

למשל, בתרגיל הבא לופיטל לא יחלץ אותנו מהמצב ה"בעייתי":

4. $\mathop{lim}\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}="\frac{\infty}{\infty}"$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}="\frac{\infty}{\infty}"$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=$$

נכנסים ל"לופ"

ניתן לפתור בדרך אחרת:

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}=1$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{2x^2-10x+1}=$

פתרון

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{2x^2-10x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x-10}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4}=\frac{2}{4}$$

6. תרגיל: חשבו תוך שימוש בכלל הרכבה לגבולות $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a}(g(x)\right)$

א. $\lim_{x\to\infty} \frac{ln\, x}{\sqrt{x}}$

ב. $\lim_{x\to\infty} \frac{ln\, x}{x}$

ג. $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln^2 x}{x}}$, שימו לב שהחזקה היא ריבוע של הביטוי מסעיף א׳

ד. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^5 x}{x^5}$

פתרון:

המשך

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2^x+3^x)}{x} =$

8. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-\sqrt{x}} =$

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2020}}{e^x} =$

.10 $\lim_{x \to 0} xe^{\frac{3}{x}} =$

יש לפצל למקרים

11. חשבו, סעיפים ב',ג',ד'יש לחשב בהסתמך על א'

א. $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

ב. $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(1 + x^2 \ln x\right)$

ג. $\lim_{x\to 0^+} x^7 \cdot \ln^3 x$

ד. $\lim_{x\to 0^+} x^4 lnx$

גבולות מהצורה $''0^0''$, $''\infty^0''$ ו-$''1^{\pm\infty}''$ (שימוש נוסף בלופיטל)

בגבולות מסוג זה ניתן להעזר בחוק $e^{\ln A} = A$ ובכלל ההרכבה של גבולות: $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$

וכן שימוש בחוקי לוגריתמים

1. $ln(xy) = ln\,x + ln\,y$
2. $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\,x - ln\,y$
3. $ln\,x^k = k\,ln\,x$
4. $e^{ln\,A} = A$

דוגמאות:

12. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x+1} =$

פתרון

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x+1} = \lim_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} \quad = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} =$$

לפי כלל הרכבה לגבולות $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{e^x+1} =$$ .13

פתרון

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} (e^x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(e^x+1)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(e^x+1)}{x}} =$$

לפי כלל הרכבה לגבולות $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}} = e^1 = e$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} =$$ .14

$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x^3} =$ .15

פתרון

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x^3} = \lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x^3)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x^3)} \quad = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} =$$

לפי כלל הרכבה לגבולות $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{1+x^3}}{1}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x^3}} = e^0 = 1$$

סיכום שימושים בלופיטל

"$\frac{0}{0}$"	"$\pm\frac{\infty}{\infty}$"	"$0 \cdot \infty$"	"$1^{\pm\infty}$" , "0^0" , "∞^0"
		מעבר למנה	**"אילן" והרכבה**

אם יש זמן פותרים לבד

1. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[2x]{e^x + x} =$

2. $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{2 - e^x + x} =$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(4^x+3^x)}{x+1} =$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x+1-x}{1-x^2} =$

5. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x-\ln x}{x-\sqrt{x}} =$

6. נתונה פונקציה $f(x) = x\ln^2 x$

א. מצאו משיק ל f המאונך לישר $x + 3y = 0$

ב. חשבו $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

ג. חשבו $\lim_{x\to 0^+} xf(x)$

7.

א. $\lim_{x\to 0^+} x^{2x} =$

בהסתמך על סעיף א' מצאו גם

ב. $\lim_{x\to 0^+} x^{4x} =$

ג. $\lim_{x\to 0^+} x^{2-2x} =$

ד. $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} =$