

## נושא 6 - נגזרות

### כללים:

● $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$	מקדם:
● $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$	סכום והפרש:
● $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$	מכפלה:
● $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$	מנה:
● $(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$	כלל השרשרת:

### לפי סוגי פונקציות:

<u>מקרה כללי:</u>	<u>מקרה פרטי:</u>	
● $[f^n(x)]' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$	● $(x^n)' = nx^{n-1}$	פונקציית פולינום:
● $[\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	● $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	פונקציית שורש מסדר 2:
● $(a^{f(x)})' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$ ● $(e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$	● $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ● $(e^x)' = e^x$	פונקציה מעריכית:
● $[\log_a f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$ ● $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	● $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ● $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	פונקציה לוגריתמית:

גזור את הפונקציות הבאות:

1.  $y = \frac{(x-3)^3}{x-2}$

$y' = \frac{3(x-3)^2 \cdot 1 \cdot (x-2) - (x-3)^3 \cdot 1}{(x-2)^2}$

$= \frac{(x-3)^2 \cdot [3(x-2) - (x-3)]}{(x-2)^2}$

$= \frac{(x-3)^2 \cdot [3x-6-x+3]}{(x-2)^2}$

$= \frac{(x-3)^2 \cdot (2x-3)}{(x-2)^2}$

2.  $y = \sqrt[5]{x - \sqrt{x}} = (x - \sqrt{x})^{\frac{1}{5}}$

$y' = \frac{1}{5} (x - \sqrt{x})^{-\frac{4}{5}} \cdot (1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}})}{5 \cdot (x - \sqrt{x})^{\frac{4}{5}}}$

$= \frac{\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}}{5 \cdot \sqrt[5]{(x - \sqrt{x})^4}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{10\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{(x - \sqrt{x})^4}}$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

3.  $y = x^n \cdot e^{mx}$

$x, y, z, w$  : משתנים  
 $a, b, c, \dots, n, m, \dots$  : קבועים

$y' = n x^{n-1} \cdot e^{mx} + x^n \cdot e^{mx} \cdot m$

$= x^{n-1} \cdot e^{mx} (n + mx)$

$(x^2)^{10}$

$e^x$

$\ln(x)$

$(x^2 + 3x)^{10}$

$e^{x^2+3x}$

$\ln(x^2+3x)$

zoom:

$$\begin{aligned}
 (\ln x)^2 &= \ln x \cdot \ln x \\
 \parallel \\
 \ln^2 x &= \ln x \cdot \ln x \\
 \ln x^2 &= \ln(x \cdot x)
 \end{aligned}$$

4.  $y = x \cdot \ln^2 x = x \cdot (\ln x)^2$

$$\begin{aligned}
 y' &= 1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \\
 &= \boxed{\ln x \cdot (\ln x + 2)}
 \end{aligned}$$

5.  $y = \sqrt[3]{x e^{3x}} = (x \cdot e^{3x})^{\frac{1}{3}}$  Cass  $y = x^{\frac{1}{3}} \cdot e^x$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{3} (x \cdot e^{3x})^{-\frac{2}{3}} \cdot (1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot 3) \\
 &= \frac{e^{3x} + 3x e^{3x}}{3 \sqrt[3]{(x \cdot e^{3x})^2}} \\
 &= \boxed{\frac{e^{3x} (1 + 3x)}{3 \sqrt[3]{(x \cdot e^{3x})^2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot e^x + x^{\frac{1}{3}} \cdot e^x \\
 &= e^x \left( \frac{1}{3 \sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} \right)
 \end{aligned}$$

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x+1$$

$$y' = 1$$

נשים לב:   
 אם נשתמש בלגו   
 את הסוף לפני הפנייה.

$$6. y = \ln(\ln(2x+5))$$

$$= \frac{\frac{2}{2x+5}}{\ln(2x+5)} = \frac{2}{(2x+5)\ln(2x+5)}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'}{f} = \frac{1}{f} \cdot f'$$

$$(\ln \odot)' = \frac{1}{\odot} \cdot \odot' = \frac{\odot'}{\odot}$$

$$7. y = \frac{\ln(2x)}{x^2}$$

$\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$   
 $\rightarrow 2x$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(2x) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x - 2x \ln(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{x(1 - 2\ln(2x))}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2\ln(2x)}{x^3}$$

$$y = \frac{\ln(e \cdot x)}{1 + \ln x}$$

$$y' = 0$$

$$\frac{\ln e + \ln x}{1 + \ln x} = \frac{1 + \ln x}{1 + \ln x} = 1$$

נגזרת לוגריתמית (מה זה? מתי נשתמש בזה?)

$$e^{\ln a} = a \quad \text{"אילן"}$$

$$1. \quad y = x^{5x} = e^{\ln x^{5x}} = e^{5x \cdot \ln(x)}$$

$$y' = e^{5x \cdot \ln(x)} \cdot \left( 5 \cdot \ln(x) + 5x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$= \boxed{x^{5x} \cdot 5 (\ln x + 1)}$$

$$2. \quad y = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} = e^{\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}} = e^{\frac{1}{2} \ln(x+1)} = e^{\frac{\ln(x+1)}{2}}$$

$$y' = e^{\frac{\ln(x+1)}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2(x+1)} \cdot x - \ln(x+1) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \sqrt{x+1} \cdot \frac{\frac{x}{2(x+1)} - \ln(x+1)}{x^2}$$

$$= \sqrt{x+1} \cdot \frac{\frac{x - 2(x+1)\ln(x+1)}{2(x+1)}}{x^2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{x+1} \cdot [x - 2(x+1)\ln(x+1)]}{2x^2(x+1)}}$$

3.  $y = x^{\frac{2}{x^2}}$

נגזרת של פונקציה לא מפורשת

שאלה 7 ממבחן 3.2.13

נתונה הפונקציה  $f$  המקיימת ש  $f(2) = 4$  נסמן  $f'(2) = 2$   
 $g(x) = \frac{f(2x)}{x+1}$  אז  $g'(1) = 0$

אם  $g'(1) = 0$  אז:

1.  $f'(2) = 1$

2.  $f'(2) = 0$

3.  $f'(2) = 16$

4.  $f'(2)$  לא קיים

5.  $f'(2) > 8$

$$g'(x) = \frac{2 \cdot f'(2x) \cdot (x+1) - f(2x) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$g'(1) = \frac{2 \cdot f'(2) \cdot 2 - f(2)}{2^2} = 0$$

$$4 \cdot f'(2) - 4 = 0$$

$$4 \cdot f'(2) = 4$$

$$f'(2) = 1$$

$$\begin{aligned} [f(x)]' &= f'(x) \cdot 1 \\ [f(\odot)]' &= f'(\odot) \cdot \odot' \end{aligned}$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

שאלה 10 ממבחן 3.2.13

נתונה פונקציה  $y = f(x)$  המקיימת  $f'(1) = 5$  ו  $f(1) = 3$

$$g(x) = x^2 \cdot f(x) \quad \text{נסמן}$$

אזי הערך של  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$  הוא:

$$g'(1)$$

$$g'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)$$

$$g'(1) = 2 \cdot \overset{3}{f(1)} + 1^2 \cdot \overset{5}{f'(1)} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 11$$

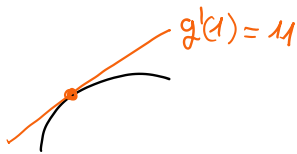
11 ①

8 .2

.3 לא קיים

0 .4

.5 שלילי



מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $g(x)$  בנקודה שבה  $x=1$

$$g(1) = 1^2 \cdot f(1) = 1 \cdot 3 = 3$$

$(1, 3)$

$$m = 11$$

$$3 = 11 \cdot 1 + b$$

$$-8 = b$$

$$y = 11x - 8$$