

שחזור מתוך נגזרת

תזכורת:

משפט: תהא $f(x)$ גזירה בקטע (a, b) .

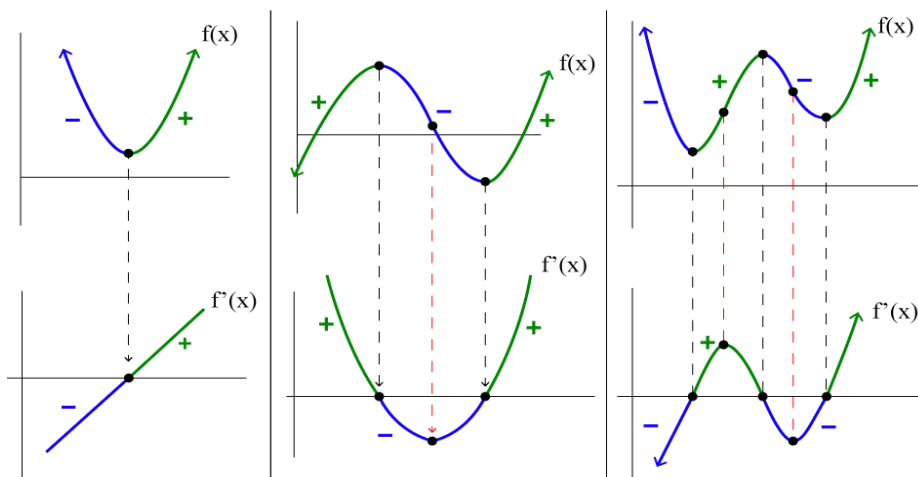
- אם $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$, אזי f **עולה** ב- (a, b) ובפרט חד ערכית
- אם $f'(x) < 0$ לכל $x \in (a, b)$, אזי f **יורדת** ב- (a, b) ובפרט חד ערכית
- קטע (a, b) המכיל בתוכו נקודת קיצון של f הפונקציה אינה חד ערכית

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע I וגזירה בו פעמיים.

- אם f' עולה בקטע אז $f''(x) > 0$ ו- $f(x)$ **קמורה** ב- I .
- אם f' יורדת בקטע אז $f''(x) < 0$ ו- $f(x)$ **קעורה** ב- I .

משפט: אם f' מוגדרת בקטע (a, b) אז רציפה ב- (a, b) ואין שם אסימפטוטות אנכיות

קשר גרפי בין פונקציה לנגזרת



תרגילים

1. נתונה הפונקציה $y = f(x)$, המקיימת $f'(x) = (e^{2x} + 3e^x + 2) \cdot (x - 1)$ עבור כל x וכן $f(1) = 0$ נמקו בקצרה אילו טענות נכונות ואילו לא

א. היכן f רציפה

ב. בקטע $f[1,4]$ חד חד ערכית.

ג. בקטע $(0,1)$ הפונקציה f יורדת.

ד. בקטע $[0,4]$ נקודות הקיצון המוחלטות מתקבלות בקצוות של הקטע.

ה. הגבול $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ו. קיים ישר המקביל לציר ה-X וחותך את f ב-3 נקודות.

ז. הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \frac{f(x)}{(x-1)^2}$ גדול מ-6

ח. למשוואה $f(x) = x^2 - 2x$ יש יותר מ-2 פתרונות. (רמז: ררווורווורווורווורוו)

פתרון: תמיד בשלב ראשון נעשה טבלה או טבלאות

נעוזה



$$f'(x) = (e^{2x} + 3e^x + 2) \cdot (x - 1) = 0$$

נקבל

$$e^{2x} + 3e^x + 2 = 0 \quad \text{IK} \quad (x - 1) = 0$$

$x = 1$ פתרון

נבונה טבלה:

		1	
f'	—		+
f		M I n	

2. נתונה פונקציה $y = f(x)$ המוגדרת לכל x
 והמקיימת $f'(x) = (e^{2x} - 3 \cdot e^x + 2) \cdot (x - 4)$
 וכן $f(0) = a$ ו- $f(4) = -a$ כאשר $a > 1$
 א. האם יתכן שלמשוואה $f(x) = a - 1$ יש 3 פתרונות?

ב. האם בקטע $[0, 4]$ הפונקציה חז"ע?

ג. נמקו האם יתכן שלמשוואה $f(x) = 8x - x^2$ יהיו 3 פתרונות

ד. חשבו $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - a}{x^3 - 3x^2}$.

פתרון: תמיד בשלב ראשון נעשה טבלה או טבלאות

נשווה

$$f'(x) = (e^{2x} - 3 \cdot e^x + 2) \cdot (x - 4) = 0$$





נקבל

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \quad \text{או} \quad x - 4 = 0$$

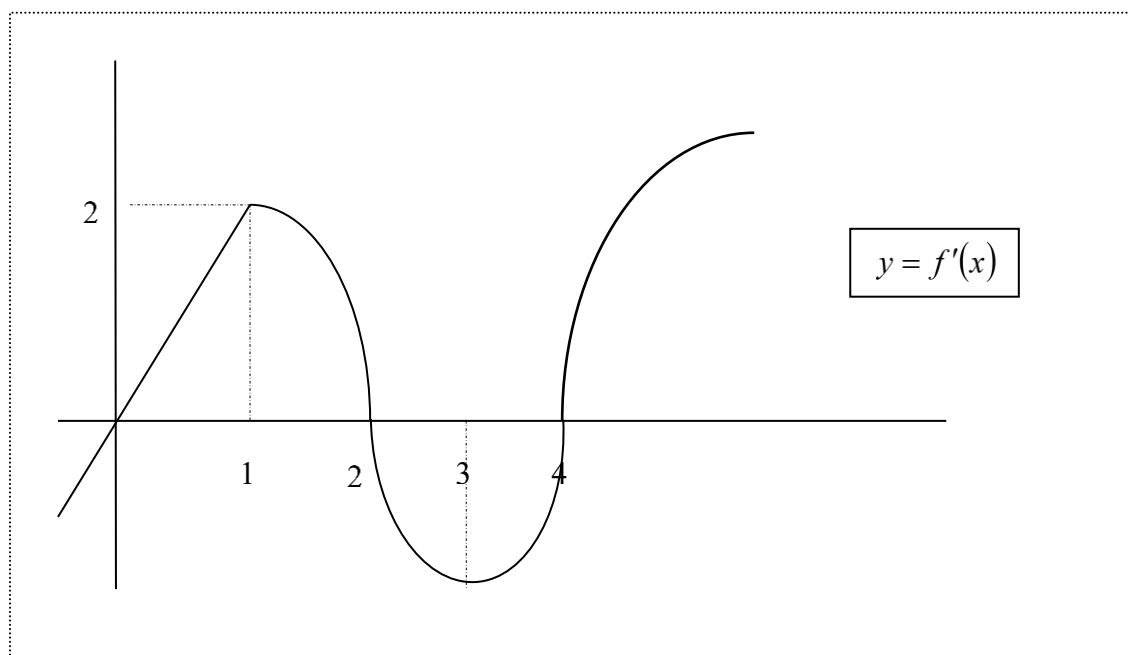
$$e^x = 1, 2 \quad \text{פתרון } x = 4$$

$$x = 0, \ln 2$$

נבנה טבלה:

		0		Ln2		4	
f'	—		+		—		+
f		<i>M i n</i>		<i>M a x</i>		<i>M I n</i>	

3. לפי גרף הנגזרת הראשונה, $y = f'(x)$:



כמו כן נתון כי :

* הפונקציה $f'(x)$ רציפה לכל x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, f(4) = \frac{1}{4}, f(2) = 3, f(0) = 0 *$$

נמק מדוע $f(x)$ רציפה לכל ערך של x

ומצא:

1. נקודות קיצון של $f(x)$.
2. ערכי x של נקודות פיתול של $f(x)$.
3. כמה פתרונות למשוואה $f(x) = \frac{1}{8}$.
4. מצאו k עבורו למשוואה $f(x) = k$ 3 פתרונות.
5. חשבו את $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.
6. נסמן $g(x) = \sqrt{1 + x \cdot f(2x)}$ הראה כי $g'(1) = \frac{3}{4}$.
7. הוכיחו תוך שימוש ברוול כי למשוואה $f(x) = x$ יש לכל היותר 4 פתרונות.
8. נמקו מדוע לכל m למשוואה $(f(x))^2 - 3f(x) + m = 0$ יש לכל היותר 8 פתרונות.

תשובות:

$$1. \min\left(4, \frac{1}{4}\right), \max(2, 3), \min(0, 0)$$

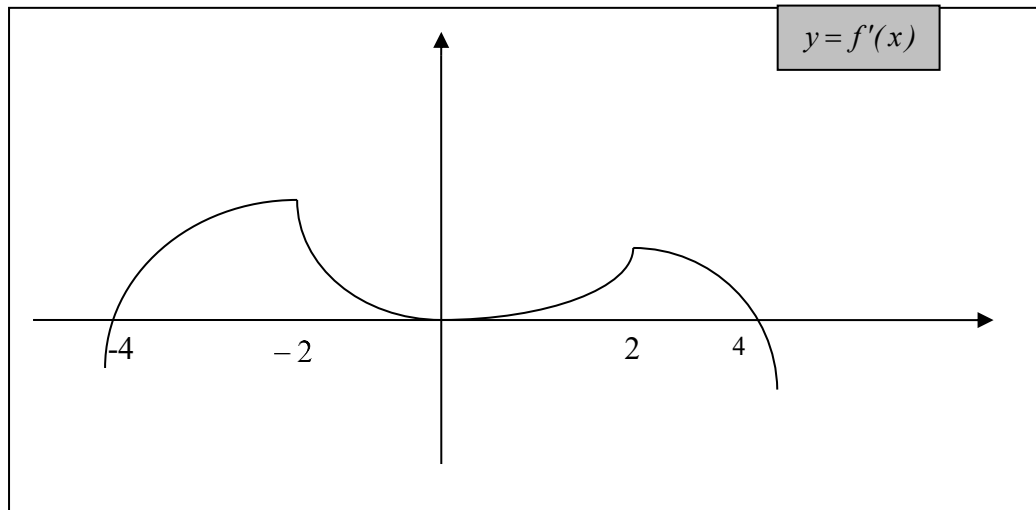
$$2. x = 1, 3$$

$$3. 2$$

$$4. k = 3, \frac{1}{4}$$

לפתור לבד

3. (תרגיל כיתה) לפניך גרף הנגזרת הראשונה, $y = f'(x)$:



כמו כן נתון כי

• הפונקציה $y = f'(x)$ רציפה לכל x .

• $f''(0) = 0, f(4) = 7, f(0) = 4, f(-4) = 0$

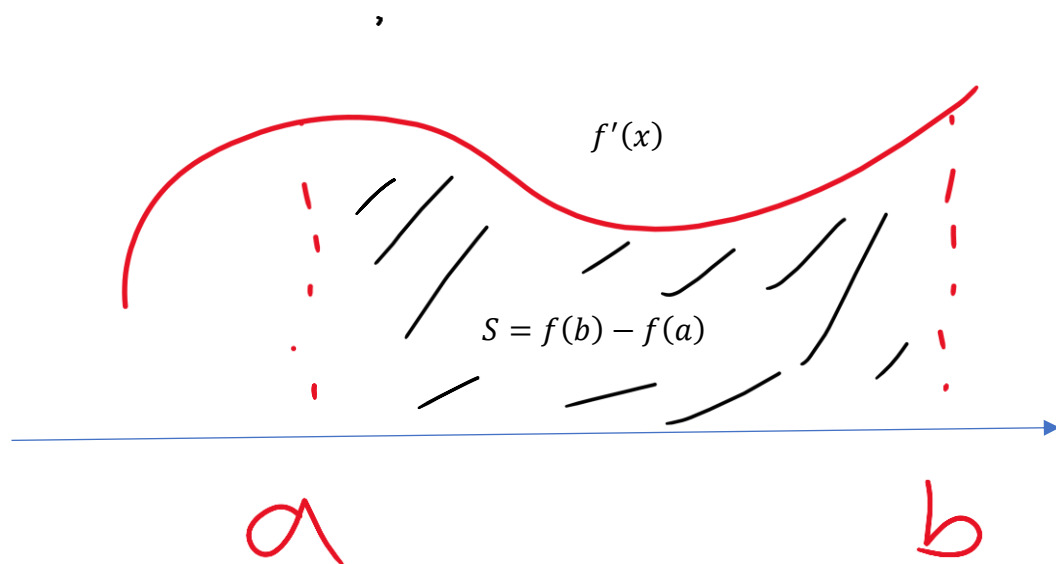
אזי:

1. נמקו מדוע לפונקציה $y = f(x)$ אין אסימפטוטות אנכיות.
2. מצאו לפונקציה $y = f(x)$ נקודות קיצון מקומית ונקודות פיתול, ושרטטו את הגרף.
3. האם קיים k עבורו הישר $y = k$ חותך את הפונקציה $y = f(x)$ בדיוק פעמיים.
4. חשבו: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x^2}$
5. נסמן $g(x) = x \cdot \sqrt{5 - f(2x)}$ מצאו את משוואת המשיק ל- g בנקודה בה $x = 0$.

הערה: כאשר נתון גרף נגזרת

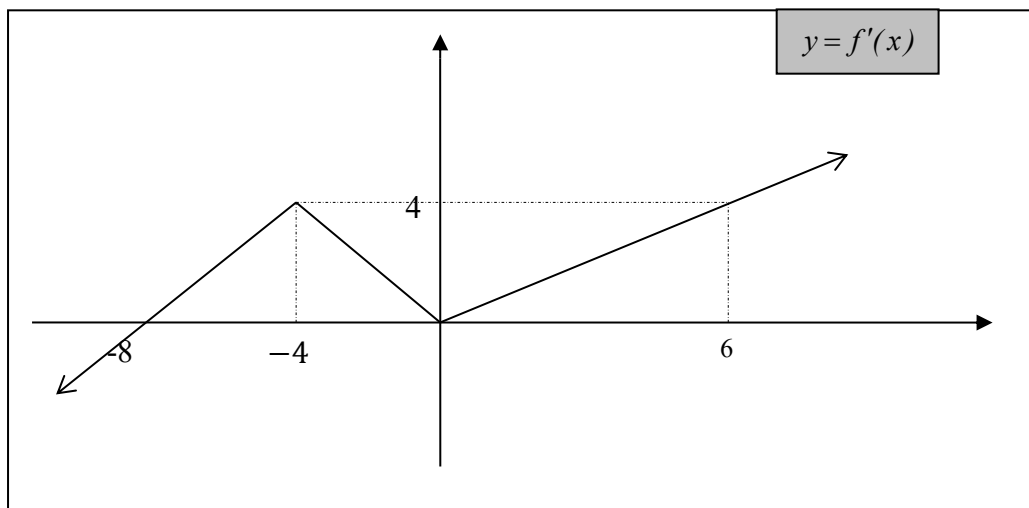
$$f'(x)$$

אזי $S = f(b) - f(a)$



אם יש זמן

4 לפניך גרף הנגזרת הראשונה, $y = f'(x)$:



כמו כן נתון כי

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\bullet f(-8) = 0$$

- א. נמקו מדוע לפונקציה $y = f(x)$ אין אסימפטוטות אנכיות.
- ב. היכן f'' אינה קימת.
- ג. חשבו את
 - i. $f(-4)$
 - ii. $f(-0)$
 - iii. $f(-6)$
 - iv. $f(-12)$
- ד. מצאו לפונקציה $y = f(x)$ את נקודות קיצון מקומית ואת נקודת פיתול.
- ה. שרטטו את הגרף של $y = f(x)$.
- ו. בדקו האם קיים k עבורו הישר $y = k$ חותך את הפונקציה $y = f(x)$ בדיוק פעמיים.
- ז. מצאו לפי רול וערך ביניים כמה פעמים הישר $y = 5x$ חותך את גרף הפונקציה $y = f(x)$.
- ח. חשב $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
- ט. חשב $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{f(x)}{(x+8)^2}$.

תרגילים נוספים לפתרון עצמי בבית

5. לפניך גרף הנגזרת הראשונה, $y = f'(x)$, וכן נתון ש- $f'(1) = f'(-1) = 1$

אזי הטענה הנכונה

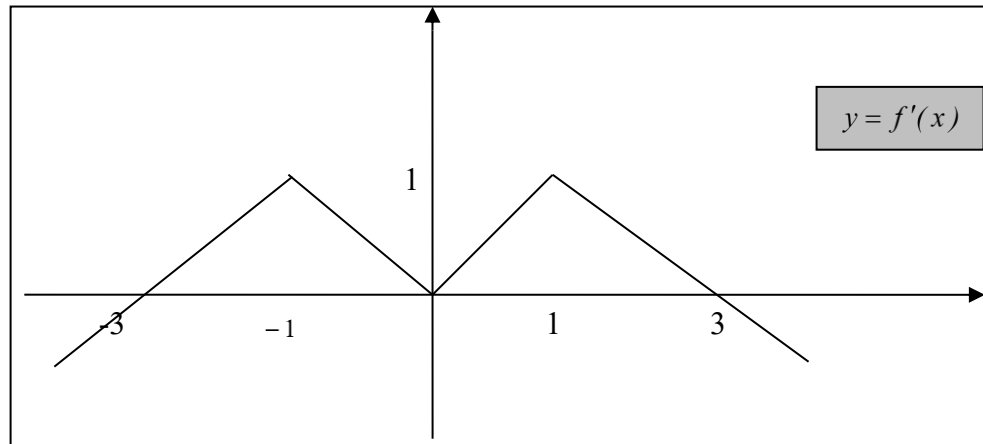
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2}$ לא קיים

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+x) - f(2)}{x}$ שווה 1

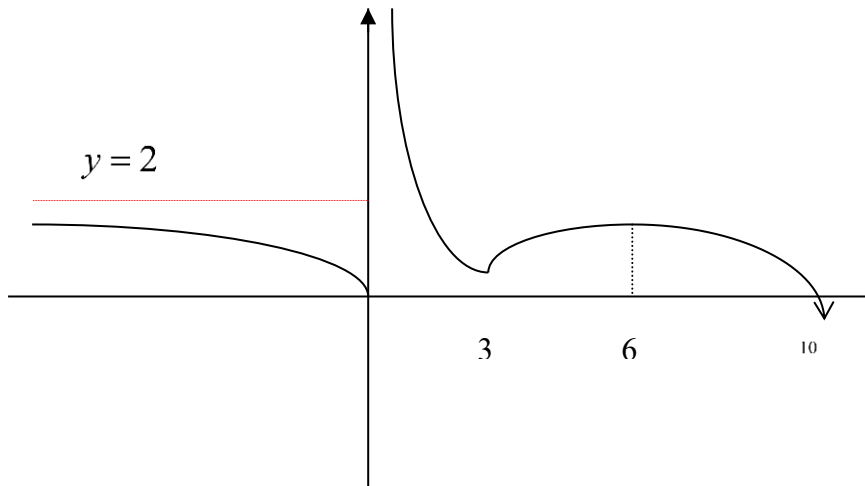
3. הישר $y = 2x$ חותך את הפונקציה $y = f(x)$ ב- 2 נקודות לפחות.

4. ל- f יש 3 נקודות קיצון ו- 2 נקודות פיתול.

5. ל- f יש 3 נקודות אי גזירות.



תרגיל: לפי גרף הנגזרת הראשונה, $y = f'(x)$:



כמו כן נתון כי:

*א. הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל.

* הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הנגזרת $y = f'(x)$ ב- $-\infty$.

* $f(0) = 0$, $f(10) = 10$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

מצאו את

1. נקודות קיצון של $f(x)$.
2. נקודות פיתול של $f(x)$.
3. כמה פתרונות למשוואה $f(x) = 0$.
4. מצאו k עבורו למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד.
5. קבע האם נקודות הקיצון המוחלטות של f בקטע $[0,10]$ הן נקודות קצה.

