טיפול בגבולות בעייתיים - סיכום

סוג הגבול	אסטרטגיות	דוגמה
$\frac{0}{0}$	פירוק לגורמים וצמצום הגורם המאפס.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x+1}=\frac{5}{3}$
	בשורשים - הרחבה בצמוד.	$\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{x+9}-2}{(x+5)}=\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{x+9}-2}{(x+5)}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+2}{\sqrt{x+9}+2}=\lim\limits_{x\to -5}\frac{x+5}{(x+5)\cdot(\sqrt{x+9}+2)}=\frac{1}{4}$
	לופיטל.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=(L)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$
$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	הוצאת גורם דומיננטי.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x}{x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(1-5/x^2)}{x^2(1-3/x+1/x^2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(1-5/x^2)}{(1-3/x+1/x^2)}=\infty$
	לופיטל.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2-1}=(L)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x\cdot 2\ln x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=(L)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$
$0\cdot(\pm\infty)$	מעבר למנה ושימוש בלופיטל.	$\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x^2}=(L)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-2x^{-3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-2}=0$
$\infty-\infty$	הוצאת גורם דומיננטי.	$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x}-3^x)=\lim\limits_{x\to\infty}(e^2)^x\cdot\left(1-\frac{3^x}{(e^2)^x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(e^2)^x\cdot\left(1-\left(\frac{3}{e^2}\right)^x\right)=\infty\cdot(1-0)=\infty$
	בשורשים - הרחבה בצמוד.	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=0$
$\frac{a}{0}$	הפרדה לשני מקרים : לימין ולשמאל. (בכל אחד מהצדדים הגבול יהיה אינסופי- חיובי או שלילי).	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-4}{x-1}=\frac{-3}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-4}{x-1}=\frac{-3}{0^-}=+\infty\end{cases}$ אין גבול!

1^{∞}	שימוש בגבול אוילר.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot x^2\cdot\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{2x}=e^0=1$
	שימוש ב- $e^{\ln}$ ולופיטל על המעריך.	
$0^0,\infty^0$	שימוש ב- $e^{\ln}$ ולופיטל על המעריך. ראה הערה 3.	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}=\Downarrow=\lim\limits_{x\to\infty}e^0=1$ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=(L)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=(L)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0}$

הערות:

1. סכום או הפרש שברים - לעשות מכנה משותף.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}="\frac{2}{0}-\frac{1}{0}"=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+2)(x-2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-(x+2)}{x(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{8}$$

2. פונקציות מעריכיות - הוצאת גורם דומיננטי.

דוגמה: כשיש במונה ובמכנה פונקציה מעריכית, לופיטל לא יעלים אותן. לכן, צריך להוציא גורם דומיננטי מהמונה וגורם דומיננטי מהמכנה.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+4^x+3}{e^{-x}+4^{2x}+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}\left(1+\frac{4^x}{e^{2x}}+\frac{3}{e^{2x}}\right)}{4^{2x}\left(\frac{e^{-x}}{4^{2x}}+1+\frac{3}{4^{2x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{4}\right)^{2x}\cdot\frac{\left(1+\left(\frac{4}{e^2}\right)^x+\frac{3}{e^{2x}}\right)}{\left(\frac{1}{4^{2x}\cdot e^x}+1+\frac{3}{4^{2x}}\right)}=0\cdot\frac{(1+0+0)}{(0+1+0)}=0$$

3. שימוש ב- $e^{\ln}$ - אם יש ביטוי מהצורה a^b, נעלה אותו קודם לחזקה באופן הבא: $e^{\ln a^b}\Rightarrow e^{b\ln a}$. את המעריך $(b\ln a)$ נעביר למנה ונעשה עליו לופיטל. הגבול יהיה e בחזקת התוצאה.