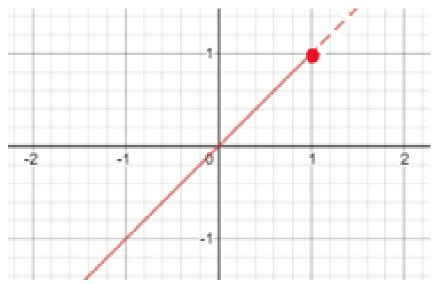
מינימום ומקסימום מוחלט

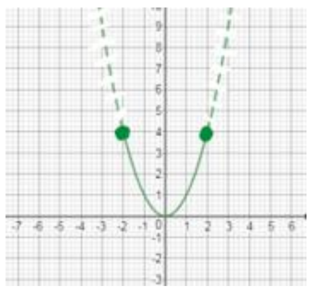
הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום $D \subseteq \mathbb{R}$.

- x_0 היא **<u>נקודת מקסימום מוחלט</u>** (גלובלי) של $f(x)$ בתחום D אם $f(x) \le f(x_0)$ לכל $x \in D$.
- x_0 היא **<u>נקודת מינימום מוחלט</u>** (גלובלי) של $f(x)$ בתחום D אם $f(x) \ge f(x_0)$ לכל $x \in D$.

<u>דוגמאות:</u>

- ל-$f(x) = x^2$ מינימום מוחלט ב- x=0 ואין לה מקסימום מוחלט. אבל בקטע $[-2,2]$ יש לה מינימום מוחלט ב- x=0 ושתי נקודות מקסימום מוחלט (נקודות הקצה של הקטע).
- ל- $f(x) = x$ אין מינימום ומקסימום מוחלטים. אבל בקטע $(-\infty, 1]$ יש לה מקסימום מוחלט ב-x=1

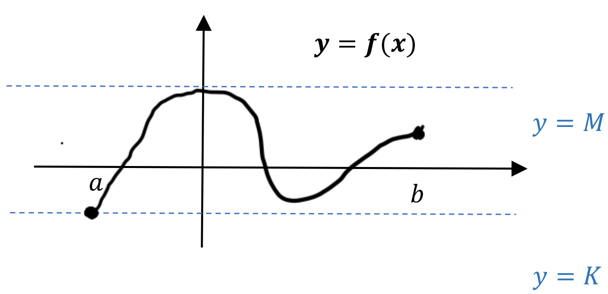




משפט ויירשטראס

תהא $f(x)$ פונקציה **רציפה בקטע הסגור** $[a,b]$. אזי:

<u>א.</u> $f(x)$ חסומה בקטע. **ב.** $f(x)$ מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי בקטע.



<u>הערות:</u>

1. $f(x)$ חסומה בקטע משמע קיימים M, K ממשיים כך שלכל x בקטע מתקיים $K \le f(x) \le M$.
2. תכונות אלה לא מתקיימות בהכרח בפונקציות רציפות מעל קטעים שאינם סגורים. דוגמאות:
   - הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$, רציפה בקטע $(0,1)$, ואינה חסומה בו.

- הפונקציה $f(x) = x$ חסומה בקטע $(0,1)$, אבל אינה מקבלת בו מינימום או מקסימום (לכל נקודה בקטע הפתוח יש נקודה שמאלית/ימנית ממנה בקטע, ששם מתקבל ערך קטן/גדול יותר בהתאמה).

מציאת מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט בקטע סגור

למציאת מינימום ומקסימום מוחלט בקטע סגור:

א. נראה רציפות בקטע.

(לפי **ויירשטראס**, פונקציה <u>רציפה</u> בקטע <u>סגור</u> מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי בקטע).

ב. נרכיב רשימת נקודות קריטיות (חשודות) **בקטע**:

- נקודות קצה הקטע
- נקודות פנימיות בהן $f'(x_0) = 0$
- נקודות פנימיות בהן $f'(x_0)$ לא קיימת

(לשים לב להתייחס גם לתפר כשהפונקציה מפוצלת).

ג. נציב את החשודות בפונקציה למציאת ערכי y ונקבע את הקיצון המוחלטות.

(מקסימום מוחלט –ערך ה-y הוא הגדול ביותר, מינימום מוחלט –ערך ה-y הוא הקטן ביותר).

<u>דוגמאות:</u>

1. מצא קיצון מוחלט לפונקציה $f(x) = 2x^4 - 36x^2$ בקטע $[-1,4]$.

הפונקציה <u>רציפה</u> בקטע <u>סגור</u> ולכן מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי בקטע

נגזור

$$f'(x) = 8x^3 - 72x = 8x(x^2 - 9) = 0$$

לכן $x = 0,3$ הנקודה $x = -3$ אינה בקטע

נציב

$$\begin{aligned} f(-1) &= -34 \\ f(0) &= 0 && max \\ f(3) &= -162 && min \\ f(4) &= -64 \end{aligned}$$

קיצון מוחלט בקטע פתוח

משפט: פונקציה רציפה בעלת קיצון יחיד נקודת קיצון זו מוחלטת

1. מצאו קיצון מוחלט לפונקציות

.1 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

נגזור

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - ln\, x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - ln\, x}{x^2} = 0$$

לכן $1 - ln\, x = 0$

$$x = e$$

נבנה טבלה:

x	**0**		**e**	
f'		+		-
f		/	max	\

קיצון מוחלט $max\left(e, \frac{1}{e}\right)$

2. $f(x) = xe^{1/x}$ בקטע $(0, \infty)$

2. מצא קיצון מוחלט לפונקציה $f(x) = x\ln x$

הוכיחו: $x\ln x \geq -\frac{1}{e}$

נגזור

$$f'(x) = 1lnx + \frac{1}{x} \cdot x = lnx + 1 = 0$$

לכן

$$ln\, x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

<u>נבנה טבלה:</u>

$\boldsymbol{x}$	**0**		$\frac{1}{e}$	
$\boldsymbol{f'}$		-	min	+
$\boldsymbol{f}$		↘		↗

פונקציה רציפה בעלת קיצון יחיד נקודת קיצון זו מוחלטת לכן $min\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

$$y = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

משפט רול – Rolle

תהא $f(x)$ פונקציה המקיימת:

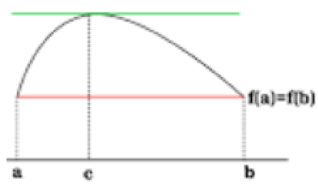
1. $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

2. $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b).

3. $f(a)=f(b)$

אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש- $f'(c)=0$.

(אם f לא קבועה c נקודת קיצון)



<u>מסקנות ממשפט רול:</u>

א. <u>בתנאי רול:</u> בין כל שתי נקודות בהן $f(x)$ מתאפסת (חותכת את ציר x), קיימת נקודה בה $f'(x)$ מתאפסת (אם ל- $f(x)$ $n\geq 2$ נקודות חיתוך עם ציר x ← $f'(x)$ מתאפסת **לפחות** $n-1$ פעמים).

ב. אם $f(x)$ גזירה בקטע A , וישנן n נקודות בהן $f'(x)$ מתאפסת בקטע, אז $f(x)$ מתאפסת (חותכת את ציר x **לכל היותר**) $n+1$ פעמים בקטע.

<u>הערה:</u> המסקנות נכונות לגבי כל ישר מהצורה $y=k$ ולא רק לגבי ציר x (שהוא $y=0$).

<u>תרגילים:</u>

1. נתונה הפונקציה $f(x)=(x^3-4x)(e^x-2)$. הראו שיש לפחות 3 נקודות קיצון ל-f

ראשית $f(x)$ רציפה וגזירה בכל R.

נשווה

$$f(x)=(x^3-4x)(e^x-2)=0$$

נקבל

$$x^3-4x=0 \quad \text{או} \quad e^x=2$$

$$x=0,2,-2,ln\,2$$

יש 4 נקודות חיתוך עם ציר X ולכן לפחות 3 נקודות קיצון

2. (אם יש זמן) הוכיחו כי לפונקציה $f(x)=(x^2+x-6)(e^{x^2}+2)$ יש קיצון (לפחות אחת).

ראשית $f(x)$ רציפה וגזירה בכל R.

נשווה

$$f(x)=(x^2+x-6)\left(e^{x^2}+2\right)=0$$

לכן

$$x^2+x-6=0 \quad \text{או} \quad e^{x^2}=-2$$

פתרונות $x=2,-3$

יש 2 נקודות חיתוך עם ציר X ולכן לפחות נקודת קיצון אחת

3. הוכיחו כי שמשוואה $e^{2x}=2x+m$.

א. יש לכל היותר 2 פתרונות ממשיים.

א. פתרון: נעביר אגף

$$f(x)=e^{2x}-2x-m=0$$

ראשית $f(x)$ רציפה וגזירה בכל R.

נגזור

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(2e^{2x} -) = 0$$

לכן

$$e^{2x} = 1 = \mathrm{e}^0$$

$$2x = 0$$
$$x = 0$$

יש קיצון אחד ולכן לכל היותר 2 חיתוכים

ב. בדיוק 2 פתרונות ממשיים לכל $3 < m < 5$.

פתרון: נעזר במשפט ערך הביניים:

*תזכורת – אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וכן $f(a) \cdot f(b) < 0$ אזי קיימת $c \in (a, b)$, כך ש-$f(c) = 0$

נציב $f(x) = e^{2x} - 2x - m$

$$f(0) = e^0 - m < 0$$
$$f(5) = e^{10} - 10 - m > 0$$
$$f(-5) = e^{-10} + 10 - m > 0$$

לפי משפט ערך הביניים יש לפחות 2 חיתוכים ולכן יש בדיוק2 חיתוכים

4. נתונות: $f(x) = xe^{2x}, \quad g(x) = 40 - \ln^3 x$

בכמה נקודות f ו- g נחתכות?

5. f רציפה, גזירה ועולה, ומקיימת $f(0) = 0$, $f(4) = 1$.

הראו כי f חותכת את גרף הפונקציה $g(x) = 3 - 2\sqrt{x}$ בדיוק פעם אחת.

פתרון: נתון ש-f עולה לכן $f' > 0$

נשווה $f(x) = g(x)$

נעביר אגף

$$k(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \left(3 - 2\sqrt{x}\right) = f(x) - 3 + 2\sqrt{x} = 0$$

ראשית f, g, k רציפות וגזירה לכל $x > 0$.

נגזור

$$k'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

לכן k מתאפסת לכל היותר פעם אחת

נעזר במשפט ערך הביניים:

$$k(0) = f(0) - 3 + 2\sqrt{0} = -3 < 0$$

$$k(4) = f(4) - 3 + 2\sqrt{4} = 1 - 3 + 4 > 0$$

לפי משפט ערך הביניים יש לפחות חיתוך אחד ולכן יש בדיוק חיתוך אחד

אם יש זמן פותרים לבד

1. f מצאו קיצון מוחלט לפונקציה $f(x) = x^2e^{-2x}$ בקטע $[-1,3]$.

2. f מצאו קיצון מוחלט לפונקציה $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x$ בקטע $[-8,27]$.

3. כמה פתרונות למשוואה $e^{x^2} = 12 - x^2$

4. כמה פתרונות למשוואה $\sqrt{x} = \ln x + 2$

5. f חיובית, עולה וגזירה, ומקיימת $f(1) = m - 1$, $f(e) = m + 1$.

נמקו מדוע $g(x) = xf(x)$ חותכת את $h(x) = m - 2\ln x$ בדיוק פעם אחת בקטע $[1, e]$

6. נמקו במדויק בכמה נקודות נחתכות הפונקציות $f(x) = e^{-x} - ln(1+x) + 2x$

ו- $g(x) = 4x - ln(1+x) - a$, כאשר $0 < a < 5$ פרמטר.

7. כמה פתרונות למשוואה $e^{x^2-2x} = m + 2x - x^2$ עבור $m \geq 2$