

שחזור מתחוך נגזרת

תזכורת:

משפט: תהא $f(x)$ גזירה בקטע (a, b) .

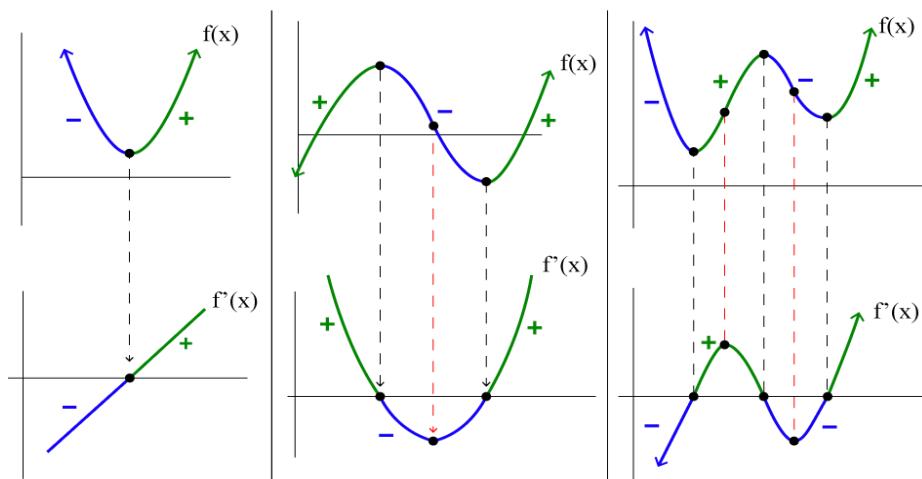
- אם $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$, אז f עולה ב- (a, b) ובפרט חד חד ערכית
- אם $f'(x) < 0$ לכל $x \in (a, b)$, אז f יורדת ב- (a, b) ובפרט חד חד ערכית
- קטע (a, b) המכיל בתוכו נקודות קיצון של f הפונקציה אינה חד חד ערכית

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע I וגזירה בו פעמיים.

- אם f' עולה בקטע או $f''(x) > 0$ ו- $f(x)$ קמורה ב- I .
- אם f' יורדת בקטע או $f''(x) < 0$ ו- $f(x)$ קעורה ב- I .

משפט: אם f' מוגדרת בקטע (a, b) או רציפה ב- (a, b) ואין שם אסימפטוטות אונכיות

קשר גרפי בין פונקציה לנגזרת



תרגילים

1. נחונה הפונקציה $y = f(x)$, המקיימת $f'(x) = (e^{2x} + 3e^x + 2) \cdot (x - 1)$ עבור כל x וכן $f(1) = 0$ נמקו בקצחה אילו טענות נכונות וายלו לא

- א. היכן f רציפה

ב. בקטע $[1,4]$ חד חד ערכית.

ג. בקטע $(0,1)$ הפונקציה f יורדת.

ד. בקטע $[0,4]$ נקודות הקיצון המוחלטות מתקבלות בקצוות של הקטע.

ה. הגבול $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ו. קיימים ישר המקביל לציר ה- X וחותך את f ב- 3 נקודות.

ז. הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \frac{\frac{f(x)}{(x-1)^2}}{g(x)}$ גדול מ- 6

ח. למשווה $f(x) = x^2 - 2x$ יש יותר מ- 2 פתרונות. (רמז: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4$)

פתרון: חמיד בשלב ראשון נעשה טבלה או טבלאות נשווה.

$$f'(x) = (e^{2x} + 3e^x + 2) \cdot (x - 1) = 0$$

נקבל

$$e^{2x} + 3e^x + 2 = 0 \quad \text{or} \quad (x - 1) = 0$$

פתרונות $x = 1$

בנייה טבלה:

		1	
f'	-		+
f		M I n	

2. נתונה פונקציה $y = f(x)$ המוגדרת לכל x
 $f'(x) = (e^{2x} - 3 \cdot e^x + 2) \cdot (x - 4)$.
 והמקיימת $a > 1$ כאשר $f(4) = -a$ ו- $f(0) = a$
 וכן $f(x) = a - 1$ יש 3 פתרונות?

ב. האם בקטע $[0,4]$ הפונקציה חח"ע

ג. נמקו האם ניתן שלמשואה $f(x) = 8x - x^2$ יהיו 3 פתרונות

ד. חשבו $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - a}{x^3 - 3x^2}$

פתרון: תמיד בשלב ראשון נעשה טבלה או טבלאות
 נשווה

$$f'(x) = (e^{2x} - 3 \cdot e^x + 2) \cdot (x - 4) = 0$$

נקבל

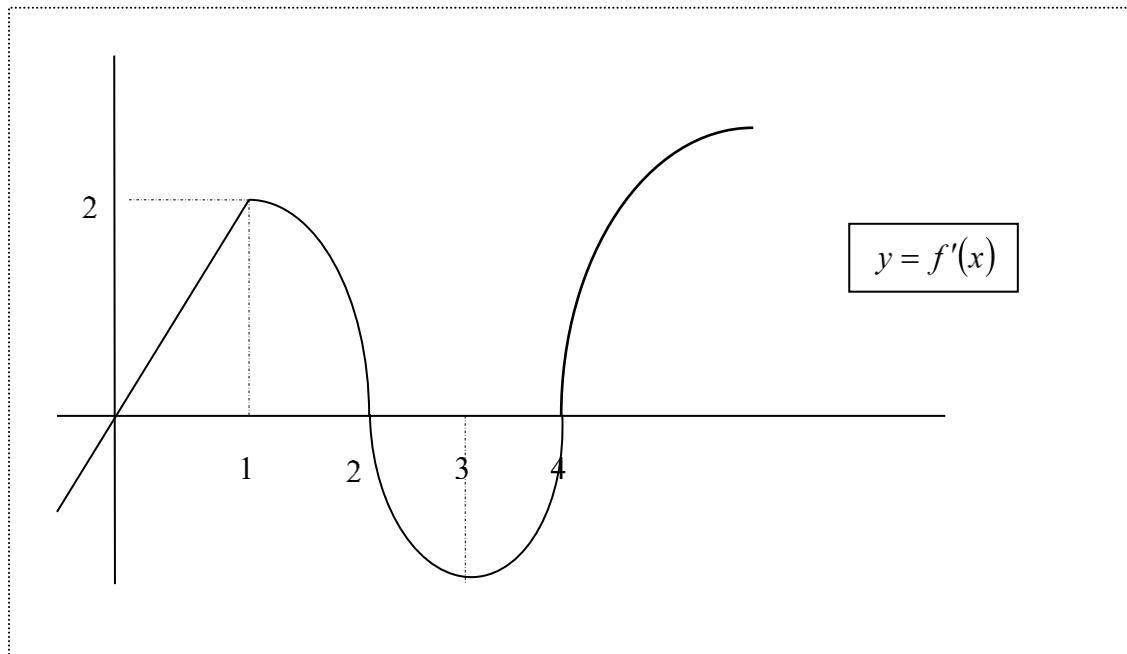
$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \quad \text{או} \quad x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{l} e^x = 1,2 \\ x = 0, \ln 2 \end{array} \quad \text{פתרון} \quad x = 4$$

בנייה טבלה:

		0		Ln2		4	
f'	-		+		-		+
f		M_i^n		M_a^x		M_I^n	

3. לפניכם גרף הונגרת הראישונית, $y = f'(x)$



כמו כן נתון כי:
* הפונקציה $f'(x)$ רציפה לכל x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, f(4) = \frac{1}{4}, f(2) = 3, f(0) = 0$$

נמק מדוע $f(x)$ רציפה לכל ערך של x
ומצא:

1. נקודות קיצון של $f(x)$.

2. ערכי ה- x של נקודות פיתול של $f(x)$.

3. כמה פתרונות למשוואה $f(x) = \frac{1}{8}$

4. מצאו k עבורו למשוואה k 3 פתרונות

$$. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$6. \text{ נסמן } g'(1) = \frac{3}{4} \text{ הראה כי } g(x) = \sqrt{1 + x \cdot f(2x)}$$

7. הוכחו תוך שימוש ברגולר כי למשוואה $f(x) = x$ יש לפחות 4 פתרונות

8. נמקו מדוע לכל m למשוואה $(f(x))^2 - 3f(x) + m = 0$ יש לפחות 8 פתרונות

תשובות:

$$\min\left(4, \frac{1}{4}\right), \max(2, 3), \min(0, 0) .1$$

$$x = 1, 3 .2$$

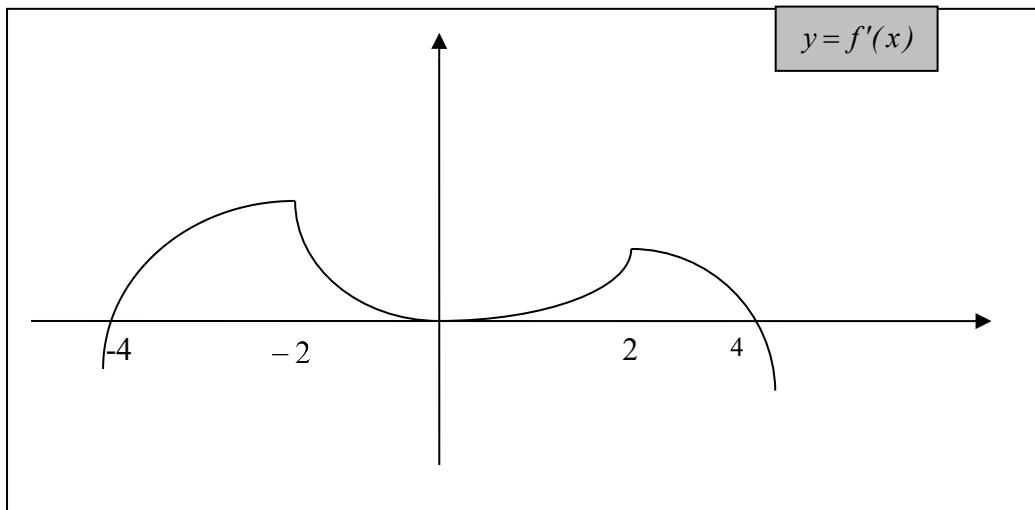
$$2 .3$$

$$k = 3, \frac{1}{4} .4$$

1

לפתרון בלבד

3. (תרגיל כתה) לפניך גרף הנגזרת הראשונה, $y = f'(x)$:



כמו כן נתון כי

• הפונקציה $y = f'(x)$, רציפה לכל x .

• $f''(0) = 0, f(4) = 7, f(0) = 4, f(-4) = 0$

אזי:

1. נמקו מדוע לפונקציה $y = f(x)$ אין אסימפטוטות אנכיות.

2. מצאו לפונקציה $y = f(x)$ נקודות קיצון מקומית ונקודות פיתול, ושרטטו את הגרף.

3. האם קיים עבورو הישר $y = k$ חותך את הfonקציה $y = f(x)$ בדיק פעמיים.

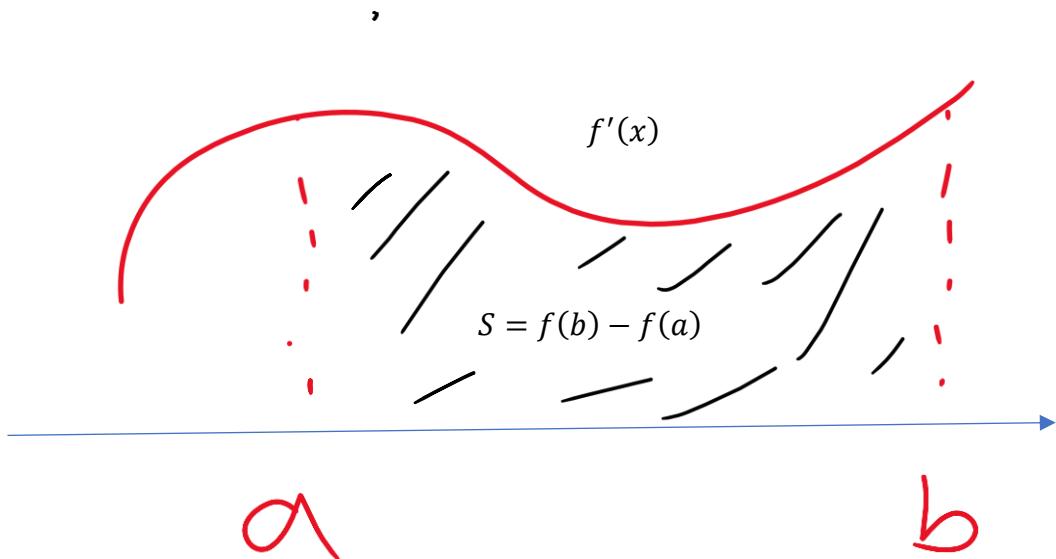
4. חשבו: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-4}{x^2}$

5. נסמן $g(x) = x \cdot \sqrt{5 - f(2x)}$ מצאו את משוואת המשיק ל- g בנקודה בה $x = 0$.

הערה : כאשר נתון גרף נגזרת

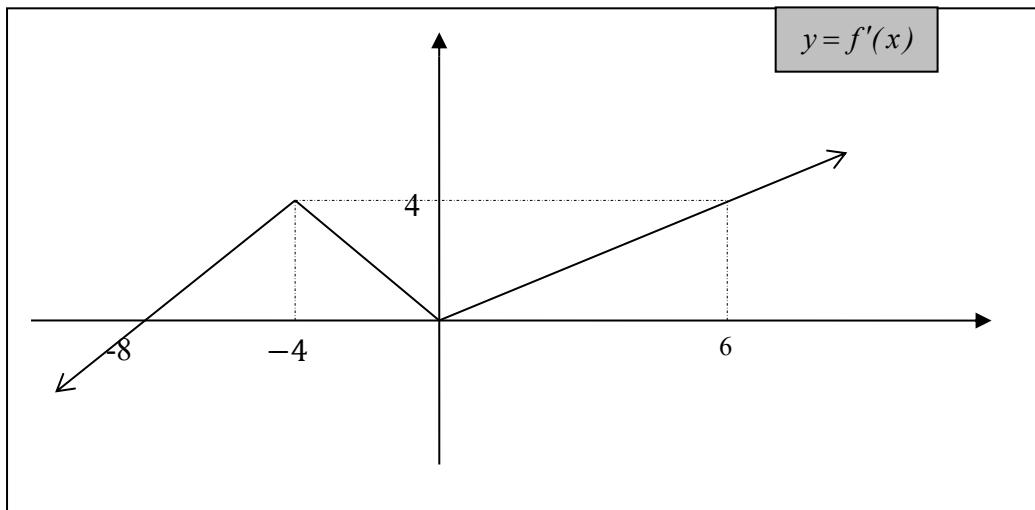
$$f'(x)$$

$$S = f(b) - f(a) \text{ אי}$$



אם יש זמן

לפניך גраф הנגזרת הראשונה, ($y = f'(x)$) :



כמו כן נתון כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$f(-8) = 0$$

- א. נמקו מדוע לפונקציה $y = f(x)$ אין אסימפטוטות אנכיות.
- ב. היכן f'' אינה קיימת.
- ג. חשבו את
 - $f(-4)$.i
 - $f(-0)$.ii
 - $f(-6)$.iii
 - $f(-12)$.iv
- ד. מצאו לפונקציה $y = f(x)$ את נקודות קיצון מקומית ואת נקודת פיתול.
- ה. שרטטו את הגרף של $y = f(x)$.
- ו. בדקו האם קיים k עבורו הישר $y = k$ חותך את הפונקציה $y = f(x)$ בדיק פעמים.
- ז. מצאו לפי רול וערק בינויים כמה פעמים הישר $x = 5$ חותך את גרף הפונקציה $y = f(x)$
- ח. חשב $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$
- ט. חשב $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{f(x)}{(x+8)^2}$

תרגילים נוספים לפתרון עצמי בבית

5. לפניך גרף הנגזרת הראשונה, וקן נתון ש- $y = f'(x)$

אזי הטענה הוכחנה

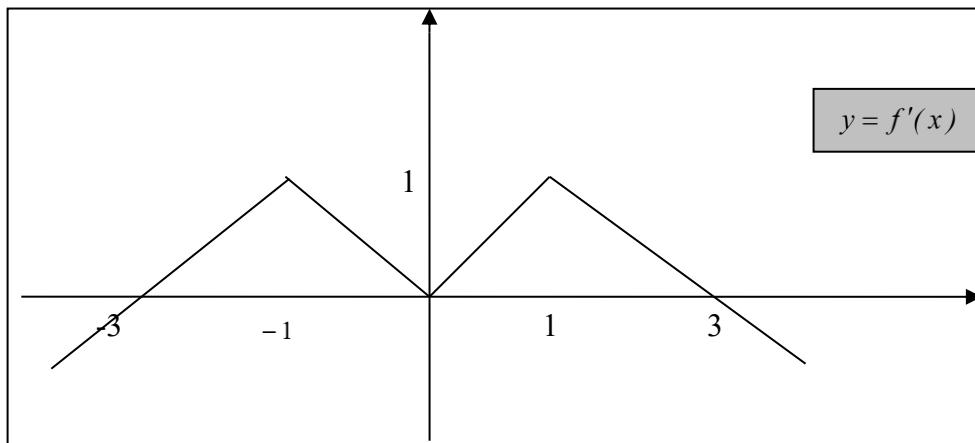
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} \text{ לא קיים} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+x) - f(2)}{x} \text{ שווה 1} \quad .2$$

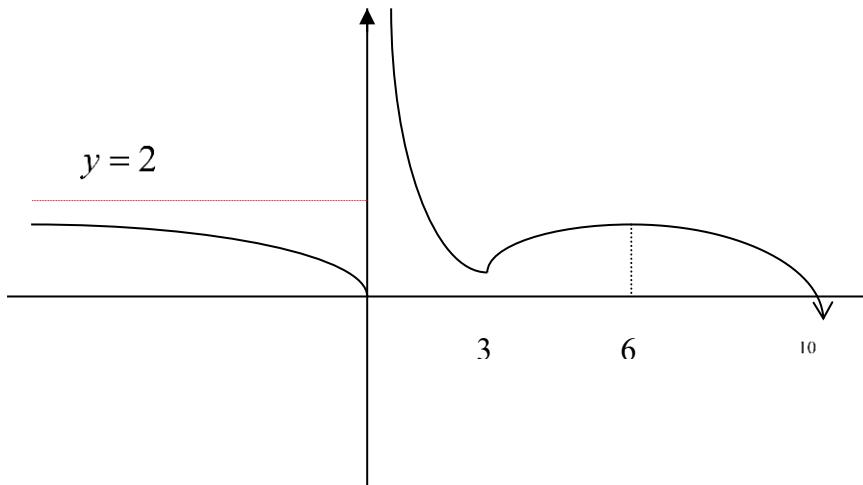
.3. הישר $y = 2x$ חותך את הפונקציה $y = f(x)$ ב- 2 נקודות לפחות.

.4. ל- f יש 3 נקודות קיצון ו- 2 נקודות פיתול.

.5. ל- f יש 3 נקודות אי גירות.



תרגיל: לפניך גраф הנגזרת הראשונה, $y = f'(x)$



כמו כן נתון כי :

* הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל

* הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הנגזרת $y = f'(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f(10) = 10, f(0) = 0$$

מצאו את

נקודות קיצון של $f(x)$

2. נקודות פיתול של $f(x)$

3. כמה פתרונות למשוואה $f(x) = 0$

4. מצאו k עבורו למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד.

5. קבע האם נקודות הקיצון המוחלטות של f בקטע $[0,10]$ הן נקודות קצה.

