

תרגול 1 – פונקציה מעריכית ולוגריתמית

פונקציה מעריכית e^x

$$\text{ת.ה.: } \ln x = \text{מספר טבעי}$$

$$\text{חיביות: } \ln x > 0$$

$$\text{שליליות: } \ln x < 0$$

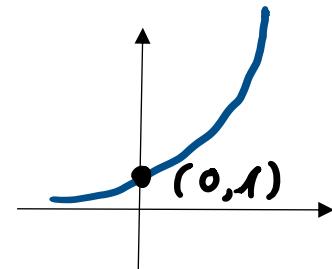
$$\text{גמיש: } e^x = -2$$

$$\text{ריבועי: } e^x > -2$$

$$\text{לא ריבועי: } e^x < -2$$

$$\text{ריבועי: } e^x = 0$$

$$\text{ריבועי: } e^x > 0$$



$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \\ e^1 &= 2.71 \\ e^2 &= 7.38 \\ e^{-1} &= \frac{1}{e} \\ e^{-2} &= \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

משווה מעריכית היא משווה שהנעלם נמצא במעיר.

כיצד נפתרו משווה מעריכית?

- אם משני צדי המשווה הבסיסים שווים, אז נשווה מעריכים:

$$1. \quad e^x = e^7$$

$$\boxed{x = 7}$$

$$2. \quad e^{8x} = e^4$$

$$8x = 4$$

$$\boxed{x = \frac{4}{8}}$$

$$3. e^{7x-5} = 1$$

$\cancel{e^{7x-5}} = e^0$

$7x-5 = 0$

$7x = 5 \quad /:7$

$x = \boxed{\frac{5}{7}}$

$$1 = \cancel{e^{\circ}} \cdot \cancel{e^{-5\circ}}$$

$\cancel{e^{\circ}} \cdot \cancel{e^{-1\circ}} = \cancel{e^{-5\circ}}$

$$4. \frac{e^{2x}}{+} = \frac{-e^{x+1}}{-}$$

$\cancel{e^{2x}} \neq e^{-x}$
- מינוס מינוס הוא פלוס
- מינוס מינוס הוא פלוס

$\cancel{-e^x} \neq (-e)^x$
 $-e \cdot e \quad (-e) \cdot (-e)$

\emptyset

▪ אחרית נשתמש בהגדרת הלוג (הפעולה ההפוכה לפעולה המעריכית):

$$x = \log_a b \leftrightarrow a^x = b \quad \text{הגדרת הלוג}$$

$$x = \ln b \leftrightarrow e^x = b \quad \text{ובפרט}$$

$$5. e^x = 8$$

$x = \log_e 8 = \ln 8$

$$6. x(e^{2x} + 2e) = x$$

נמצא גורם משותף (ונריץ אותו)
ולפזר!

$$\begin{aligned} &x(e^{2x} + 2e) - x = 0 \\ &x[e^{2x} + 2e - 1] = 0 \quad \cancel{x} \cdot \cancel{x} = 0 \quad \cancel{= 0} \\ &x = 0 \quad e^{2x} + 2e - 1 = 0 \\ &e^{2x} = \frac{1-2e}{\cancel{2e}} \\ &\emptyset \end{aligned}$$

$\{0\}$

חוקי לוגריתמים שכדי לזכור:

$$\ln e^a = a \quad \text{"לני"}$$

$$e^{\ln a} = a \quad \text{"אלין"}$$

7. $\ln e^3 = x$

$3 = x$

$\log_a b$

$a > 0 \quad b > 0 \quad a \neq 1$

8. $e^{\ln x} = 5$

$x = 5$

$\ln x > 0$

שאלה עם שימוש בt:

9. $(4^x - 11 \cdot 2^x + 24)e^{x+2} = 0$

$4^x - 11 \cdot 2^x + 24 = 0$

$2^x = t$

$t^2 - 11t + 24 = 0$

$t = 8 \quad t = 3$

$2^x = 8 \quad 2^x = 3$

$x = \log_2 8 \quad x = \log_2 3$

$\log_2 2^x = \log_2 3$

$x = \log_2 3$

$(4 \cdot 2) = 0$

$e^{x+2} = 0$

∅

10. $e^{2x-2} - 5e^{x-1} + 6 = 0$

$e^{2x} \cdot e^{-2} - 5e^x \cdot e^{-1} + 6 = 0$

$e^{2x-2} \cdot e^{x-1} = e$

$t = e^x$

$\frac{t^2}{e^2} - \frac{5t}{e} + 6 = 0$

$t^2 - 5et + 6e^2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{5e \pm \sqrt{(5e)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6e^2}}{2 \cdot 1} = \frac{5e \pm \sqrt{25e^2 - 24e^2}}{2} = \frac{5e \pm \sqrt{e^2}}{2}$$

$$= \frac{5e \pm e}{2} = \begin{cases} + & \frac{6e}{2} = 3e \\ - & \frac{4e}{2} = 2e \end{cases}$$

$t = 3e$

$e^x = 3e$

$t = 2e$

$e^x = 2e$

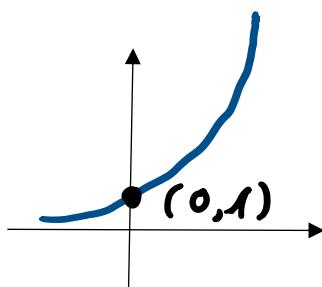
$$x = \ln(3e)$$

$$x = \ln(2e)$$

$$x = \ln 3 + \ln e$$

$$x = \ln 3 + 1$$

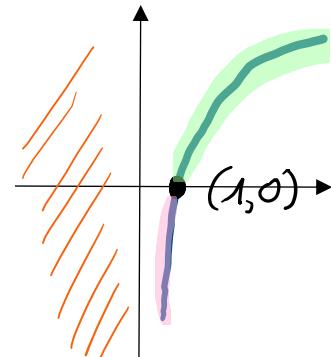
$$y = e^x$$



פונקציה לוגריתמית $y = \ln x$

$$\begin{array}{l} x > 0 \\ x > 1 \\ 0 < x < 1 \end{array}$$

ת.ה.:
חיוביות:
שליליות:



$$\ln 0 = \text{לאdefined}$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln(-5) = \text{לאdefined}$$

$$\ln e^7 = 7$$

כיצד נפתרת משואה לוגריתמית פשוטה?

אם משני צידי השוואת מופיעות לוג ובסיס הלוג זהה \rightarrow נשווה ארגומנטים

$$1. \ln x = \ln 8 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{ת.ה.} \\ \text{נשווה ארגומנטים} \end{array}$$

ט.מ. $x > 0$

$$2. \ln(x+1) = 6 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{ת.ה.} \\ x+1 > 0 \\ x > -1 \end{array} \quad \log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$
$$x+1 = e^6$$
$$x = e^6 - 1$$

אם מצד אחד מופיע לוג ומצד שני מספר \rightarrow נפעיל את הגדרת הלוג

$$3. \ln x = 5$$

$x = e^5$

$x > 0$

$$4. \ln(x+6) = 10$$

$x+6 = e^{10}$

$x = e^{10} - 6$

ת.י.
 $x+6 > 0$
 $x > -6$

$$\log_e(x+6) = 10$$

$$5. x \ln^2 x = 5x \ln x$$

$x \ln^2 x - 5x \ln x = 0$

$x > 0$

$$x \cdot e^x = 5$$

$x \cdot \ln x = 5$

$$x \cdot \ln x \cdot (\ln x - 5) = 0$$

$\begin{cases} x=0 \\ \ln x=0 \\ x=e^5 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 \\ \ln x=5 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \ln x^2 &= \ln(x \cdot x) \\ \ln^2 x &= (\ln x) \cdot (\ln x) \\ &= (\ln x)^2 + (\ln x) \cdot (\ln x) \end{aligned}$$

שאלה עם שימוש ב-t:

$$6. x(2 \ln^3 x - 5 \ln^2 x) = 3x \ln x$$

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$x > 0$

$$\begin{aligned} x(\ln^3 x - 5 \ln^2 x - 3) &= 0 \\ x \cdot \ln x \cdot (2 \ln^2 x - 5 \ln x - 3) &= 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ \ln x=0 \\ x=e^t \end{cases} & \quad 2 \ln^2 x - 5 \ln x - 3 = 0 \\ \ln x = t & \\ \begin{cases} x=1 \\ t=3 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases} & \quad 2t^2 - 5t - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln x &= 3 & \ln x &= -\frac{1}{2} \\ x &= e^3 & x &= e^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

כללי חיבור וחיסור לוגריתמים:

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

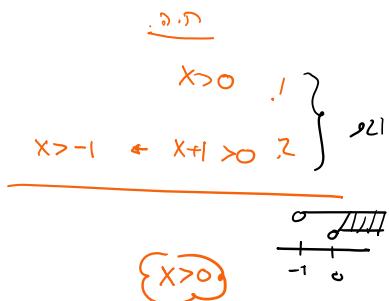
7. $\ln x + \ln(x+1) = \ln 12$

$$\ln[x(x+1)] = \ln 12$$

$$x(x+1) = 12$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$x = 3, -4$$



8. $\ln(x+e) - \ln x = 2$

$$\ln \frac{x+e}{x} = 2$$

$$\frac{x+e}{x} = e^2$$

$$x+e = e^2 \cdot x$$

$$x - xe^2 = -e$$

$$x(1-e^2) = -e$$

$$x = \frac{-e}{1-e^2} = \frac{e}{e^2-1}$$

