חזרה על חומר תיכוני ופונקציות

נוסחאות כפל מקוצר

נוסחאות הכפל המקוצר מתקבלות באופן ישיר מחוק הפילוג.

מעלה שנייה:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

מעלה שלישית:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

הערה: הביטויים a ו- b נלקחים ללא הסימן ואם קיים סימן הוא נלקח כחלק מהנוסחא.

פרוק של טרינום

נהוג לקרוא לביטוי ממעלה שנייה מהצורה $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ טרינום.

על מנת לפרק טרינום (ביטוי ממעלה שנייה) יש:

שלב ראשון: למצוא את פתרונות המשוואה הריבועית המתאימה לפי הנוסחא

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

שלב שני: נפריד לשלושה מצבים לפי הביטוי שמתחת לשורש $\Delta = b^2 - 4ac$.

א. $\Delta > 0$ פרוק הטרינום יהיה: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

ב. $\Delta = 0$ פרוק הטרינום יהיה: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

ג. $\Delta < 0$ לא יהיה פרוק לטרינום.

נציין כי לפני שמבצעים פרוק של טרינום יש לנסות ולהוציא גורם משותף.

דוגמאות: פרקו לגורמים:

1. $4x^2 - 9$

פתרון:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x+3)(2x-3)$$

2. $2cm^2 - 18c$

פתרון:

$$2cm^2 - 18c = 2C(m^2 - 9) = 2C(m+3)(m-3)$$

3. $2x^2 - 50$

פתרון:

$$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) = 2(x+5)(x-5)$$

4. $x^2 + 4x + 4$

פתרון:

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = (x+2)^2$$

5. $a^2 - 10a + 25$

6. $x^2 + 6x - 7$

פתרון:

נשווה $x^2 + 6x - 7 = 0$ נקבל $x = 1, -7$

$$x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$$

7. $4x^2 - 12x + 5$

8. $2a^4b - 16ab$

משוואות

משוואה: היא ביטוי אלגברי המכיל את הסימן "=" כך למשל $2x-8=0$ היא משוואה ממעלה ראשונה ו-$2x^2=5x-3$ היא משוואה ממעלה שנייה.

פתרונות המשוואה: יהיו אותם ערכי x המקיימים את המשוואה. דהינו, אם נציב אותם במקום x נקבל שוויון בשני האגפים, כך למשל פתרונות המשוואה $x^2-2x=0$ הם $x=0$ או $x=2$.

פעולות שניתן לעשות על משוואות:

ניתן לבצע על משוואות את כל הפעולות שלא משנות את השוויון בין האגפים דהינו

א. פתיחת סוגריים וכינוס איברים.

ב. כפל או חילוק שני אגפי המשוואה בביטוי שאינו 0.

ג. העברת אגפים תוך שינוי סימן.

הערה: כאשר מכפלה של גורמים שווה ל- 0 אזי אחד הגורמים שווה בהכרח ל-0

דהינו: אם $a \cdot b = 0$ אז בהכרח $a=0$ או $b=0$.

כלל נוסף $a^2 = b^2$ אז $a=b$ או $a=-b$

דוגמאות

.1 . $x^2-5x-6=0$

פתרון: במשוואה זו $a=1, b=-5, c=-6$.

שורשי המשוואה יהיו $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm7}{2}=\begin{matrix}-1\\6\end{matrix}$

.2 $x^4+x^2-20=0$

פתרון: על מנת לפתור את המשוואה נזכור כי $\left(x^2\right)^2=x^4$ ולכן נציב $t=x^2$ ונקבל ש- $t^2=x^4$

לכן $t^2+t-20=0$ שורשי המשוואה $t=4,-5$.

נחזור ונמצא את x ונקבל: $t=x^2=4$ ייתן $x=\pm2$ אבל $t=x^2=-5$ לא יתכן מאחר ו- $t=x^2\geq0$.

.3 $x-\sqrt{x}-2=0$

פתרון: על מנת לפתור את המשוואה נזכור כי $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ ולכן נציב $t=\sqrt{x}$ ונקבל ש- $t^2=x$

לכן $t^2-t-2=0$ שורשי המשוואה $t=2,-1$.

נחזור ונמצא את x ונקבל: $t=\sqrt{x}=2$ ייתן $x=2^2=4$ אבל $t=\sqrt{x}=-1$ לא יתכן מאחר ו-
$t=\sqrt{x}\geq0$ לפי הגדרתו .

פתרו את המשוואות

.1 . $x^8+3x^4-10=0$

פתרון: נציב $t=x^4$

נקבל $t^2+3t-10=0$

לכן $t=x^4=2$ או $t=x^4=-5$ נפסל

$x=\pm\sqrt[4]{2}$

.2 $x^3-x^2-2x=0$

$(x-1)(x+2)(\sqrt{x}-3)=0$ .3

$(\sqrt{x}+1)^2-3\sqrt{x}-7=0$ .4

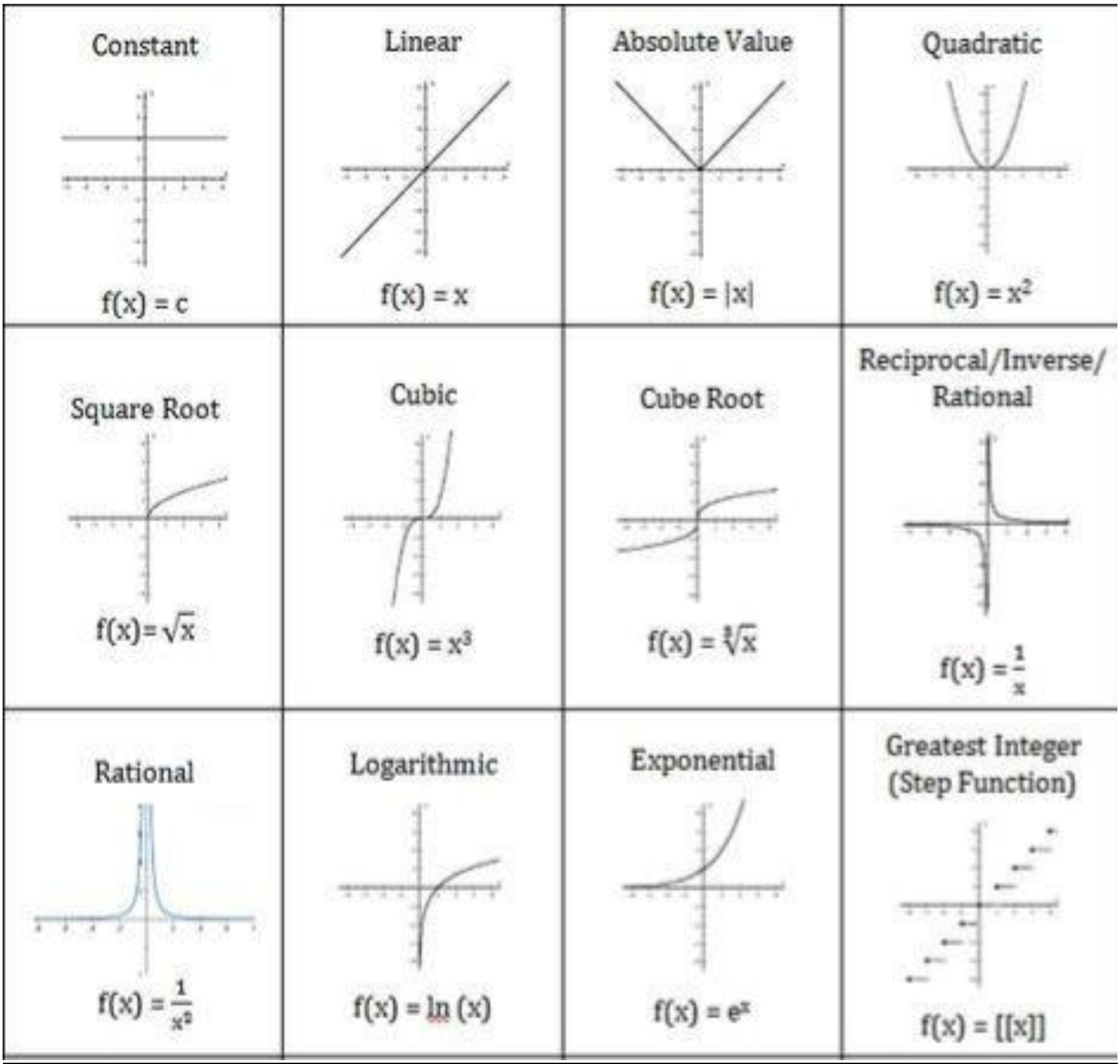
$x^3-9x\sqrt{x}+8=0$ . .5

תחום הגדרה ופונקציות ידועות

אילוצי תחום הגדרה:

1. **מנה:** מכנה $\neq 0$
2. **שורש מסדר זוגי:** תוכן השורש ≥ 0
3. **לוג - $\log_a b$:** $1 \neq a > 0$, $b > 0$

מקרה פרטי- $\log_e b = \ln b$: $b > 0$



חוקי חזקות ופונקציות מעריכיות

1. הגדרה: נגדיר את a^n להיות הכפלת a בעצמו n פעמים,

דהינו: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$.

כאשר $a^0 = 1$.

וכן: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

למשל: $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

נציין כי פעולת העלאה בחזקה קודמת לכפל וחילוק, כך למשל: $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$.

מהגדרה זו נובעים חוקי חזקות.

2. $a^n a^m = a^{n+m}$ למשל: $2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 128$

3. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ למשל: $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

4. $(a^n)^m = a^{nm}$ למשל: $(a^2)^5 = a^{2 \cdot 5} = a^{10}$

5. $(ab)^n = a^n b^n$ למשל: $(a^2 b)^3 = a^{2 \cdot 3} b^3 = a^6 b^3$

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ למשל: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

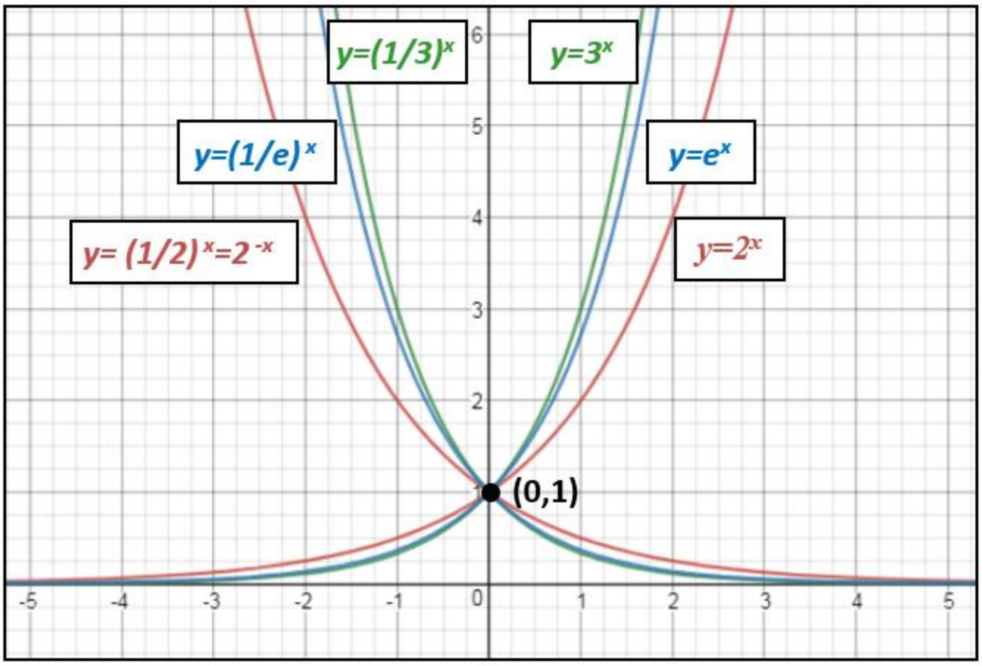
7. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ למשל: $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$

פונקציה מעריכית

תבנית: $y = a^x \quad (0 < a \neq 1)$

תחום הגדרה: $\mathbb{R}$ (כל x)

גרפים סטנדרטיים:



פתור את המשוואות הבאות-הצבה ממעלה שנייה.

1. $4^x + 2^x - 6 = 0$.

פתרון: שני הבסיסים של הביטויים המכילים x הינם חזקות של 2 וניתן לרשום $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$

דהינו אם נציב $t = 2^x$ נקבל ש- $t^2 = 4^x$.

המשוואה תהפוך למשוואה ריבועית $t^2 + t - 6 = 0$ אשר שורשיה $t = 2,-3$.

נחזור כעת ונשווה את הפתרונות ל- $t = 2^x$

מקרה1: $t = 2^x = 2$ כעת ניתן להשתמש במשפט 1 ולהשוות חזקות ולקבל $x = 1$.

מקרה2: $t = 2^x = -3$ מצב זה אינו אפשרי מאחר ו- $2^x > 0$ עבור כל ערך של x.

2. $3^{2x+1} - 3^{x+1} - 3^x + 1 = 0$.

פתרון: שני הבסיסים של הביטויים המכילים x הינם חזקות של 3,

ניתן לרשום $3\cdot 3^{2x}-3\cdot 3^{x}-3^{x}+1=0$.

דהינו אם נציב $t=3^{x}$ נקבל ש- $t^{2}=3^{2x}$.

המשוואה תהפוך למשוואה ריבועית $3t^{2}-3t-t+1=0$.

נכנס איברים $3t^{2}-4t+1=0$.

שורשי המשוואה $t=1,\frac{1}{3}$

נחזור כעת ונשווה את הפתרונות ל- $t=3^{x}$

מקרה 1: $t=3^{x}=1=3^{0}$ כעת ניתן להשתמש במשפט 1 ולהשוות חזקות ולקבל $x=0$.

מקרה 2: $t=3^{x}=\frac{1}{3}=3^{-1}$ כעת ניתן להשתמש במשפט 1 ולהשוות חזקות ולקבל $x=-1$.

3. $(4^{2x}-6\cdot 4^{x}+8)(x-5)=0$

4. $(e^{x}-e)(\sqrt{x}+5)=0$

לוגריתמים

הגדרה: נסמן ב- $log_a b$ את החזקה שיש להעלות בה את a על מנת לקבל b.

דהינו: $x = log_a b$ אם ורק אם $b = a^x$, ביטוי זה יהיה מוגדר עבור $1 \neq a, b > 0$.

למשל:

1. $log_2 8 = 3$ מאחר ו- $2^3 = 8$.
2. $log_3 9 = 2$ מאחר ו- $3^2 = 9$.

חוקי הלוגריתמים

נגדיר $ln\, x = \log_e b$ כאשר $e = 2.71828 \ldots \ldots \ldots \ldots ..$

לכן $ln\, x = b$ כאשר $x = e^b$

חוקי לוגריתמים

1. $ln(xy) = ln\, x + ln\, y$
2. $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\, x - ln\, y$
3. $ln\, x^k = k\, ln\, x$
4. $e^{ln\, A} = A$
5. $ln\, e^A = A$

למשל

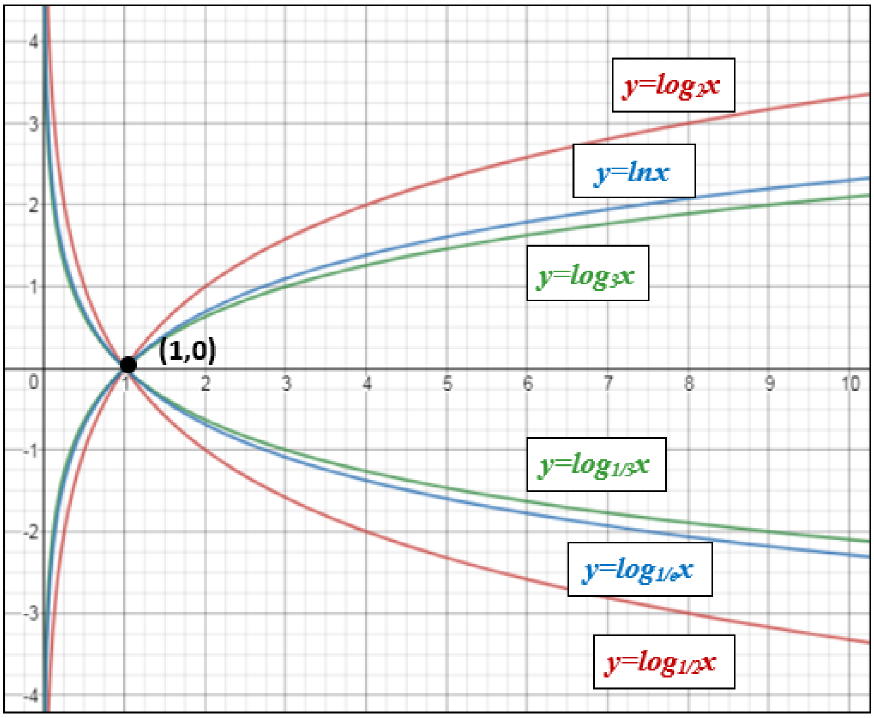
- $ln 2 + ln\, 3 = ln\, 6$
- $ln\, 10 - ln\, 2 = ln\, 5$
- $ln\, e^3 = 3\, ln\, e = 3$
- $e^{ln\, 3} = 3$

<u>פונקציה לוגריתמית</u>

<u>תבנית:</u> $y = \log_a x \qquad (0 < a \neq 1)$

<u>תחום הגדרה:</u> $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (הארגומנט חיובי, הבסיס חיובי שונה מ-1)

<u>גרפים סטנדרטיים:</u>



<u>נסכם אילוצי תחום הגדרה:</u>

<u>.4</u> מנה: מכנה $\neq 0$

<u>.5</u> שורש מסדר זוגי: תוכן השורש ≥ 0

<u>.6</u> לוג - $\log_a b$: $1 \neq a > 0, \qquad b > 0$

מקרה פרטי- $\ln b = \log_e b$: $b > 0$

פתרו את המשוואות הבאות

1. $\ln x = 2$

2. $\ln^2 x - \ln x - 2 = 0$

$(ln^2 x + ln\, x - 6)(e^{2x} + 16)(e^x - 3) = 0$ .3

$(\ln^2 x + 5\, ln\, x - 6)(e^{2x} - 2) = 0$ .4

$(\mathrm{ln}x + \sqrt{ln\, x} - 2)(x - 2) = 0$ .5

$(e^{2x} - 6 \cdot e^x + 8)(x - 5) = 0$ .6

פונקציה ממעלה ראשונה- קו ישר

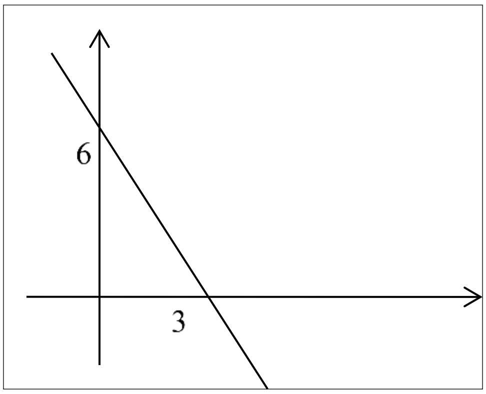
משוואת ישר פונקציה ממעלה ראשונה (ליניארית) מהצורה $ax+by=c$ מתוארת באופן גרפי קו ישר.

למשל: $2x+y=6$.

על מנת לשרטט קו ישר זה יש לקחת 2 נקודות המקיימות את המשוואה.

למשל:

y	x
6	0
0	3



כל הנקודות המקיימות את המשוואה יהיו על הישר.

למשל: הנקודה $(1,4)$ נמצאת על הישר שהרי $2x+y=2\cdot 1+4=6$.

שיפוע הישר

כאשר נתונה משוואת ישר מהצורה $ax+by=c$ יתכנו שני מקרים.

מקרה 1: $b\neq 0$. במקרה זה ניתן לחלץ את y מתוך המשוואה ולקבל משוואה מהצורה $y=mx+n$.

m נקרא שיפוע הישר ומציין את קצב הגידול של הישר.

למשל: הישר $y=3x-1$ הוא בעל שיפוע 3 דהינו כל תוספת של יחידה אחת ל- x תיתן תוספת של 3 יחידות ל- y.

n נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- Y.

מציאת משוואת ישר

- משוואת הישר ששיפועו m והעובר דרך הנקודה (x_1,y_1) תהיה: $y-y_1=m(x-x_1)$.

למשל: משוואת הישר ששיפועו 2 והעובר דרך הנקודה $(1,-1)$ תהיה: $y-(-1)=2(x-1)$, דהינו $y=2x-3$.

- שיפוע הישר העובר דרך הנקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2)

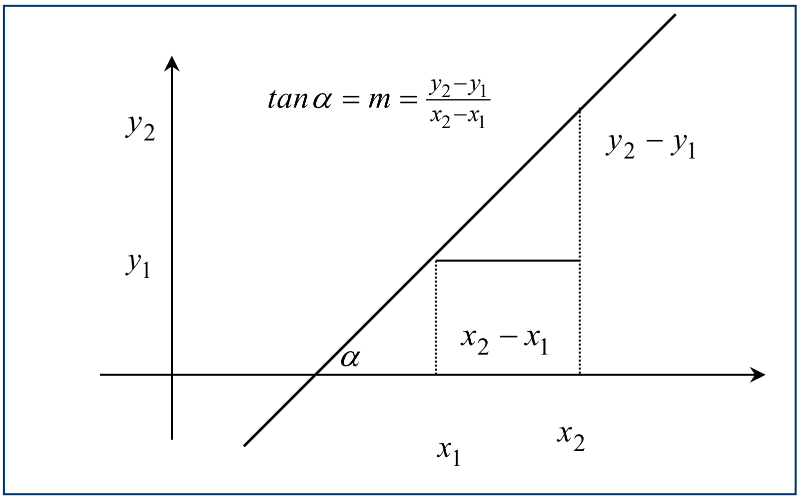
ניתן לחישוב לפי הנוסחא: $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

למשל: שיפוע ישר העובר דרך הנקודות $(1,1)$ ו- $(3,5)$ יהיה $m=\dfrac{5-1}{3-1}=2$.

- הזווית α בין ישר ששיפועו m לבין הכיוון החיובי של ציר ה- X מקיימת: $tan\,\alpha=m$.

למשל: הזווית α בין ישר $y = x + 3$ לבין הכיוון החיובי של ציר ה- X

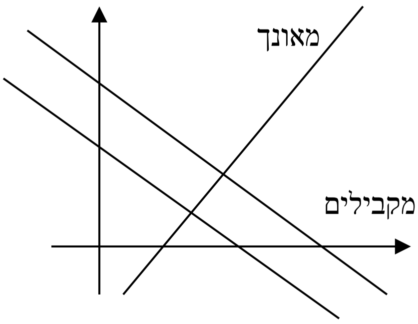
מקיימת $tan\alpha = 1$, דהינו $\alpha = 45^0$.



ישרים מקבילים ומאונכים

שני ישרים ששיפועיהם m_1 ו- m_2 נקראים:

1. מקבילים כאשר $m_1 = m_2$.
2. ניצבים (מאונכים) כאשר $m_1 \cdot m_2 = -1$.



למשל: הישרים $y = -x + 2$ ו- $y = -x + 4$

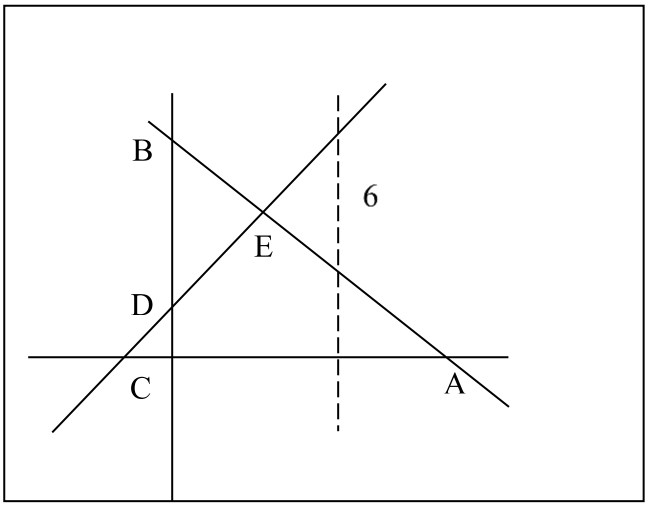
מקבילים ביניהם ומאונכים לישר $y = x - 3$.

דוגמאות:

1. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(1,3)$ ו- $(3,7)$.

פתרון: בשלב ראשון נמצא את שיפוע הישר $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{3-1} = 2$

משוואת הישר תהיה $y - 3 = 2(x - 1)$ או $y = 2x + 1$.



2 נתונים הישרים $x+y=12$ ו- $y=x+2$

א. מצא את הנקודות המסומנות.

ב. מצא משוואת ישר המאונך לציר ה- X
וחותך את הישרים בשתי נקודות
שמרחקן זו מזו שווה 6.

פתרון: א. הישר $x+y=12$ חותך את ציר ה-X בנקודה A נציב $y=0$ ונקבל $x=12$, לכן $A(12,0)$.

הישר $x+y=12$ חותך את ציר ה-Y בנקודה B נציב $x=0$ ונקבל $y=12$, לכן $B(0,12)$.

הישר $y=x+2$ חותך את ציר ה-X בנקודה C נציב $y=0$ ונקבל $x=-2$, לכן $C(-2,0)$. הישר
$y=x+2$ חותך את ציר ה-Y בנקודה D נציב $x=0$ ונקבל $y=2$, לכן $D(0,2)$.

על מנת למצוא נקודה חיתוך הישרים E יש לפתור את מערכת משוואות הישרים $x+y=12$ ו- $y=x+2$.

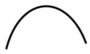
נציב את y במשוואה הראשונה ונקבל $x+x+2=12$ ולכן $x=5$ ו- $y=7$, דהיינו $E(5,7)$.

פונקציה ממעלה שנייה-פרבולה.

פונקציה ממעלה שנייה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ עבור $a \neq 0$ מתארת באופן גרפי פרבולה.

המקדם של x^2 קובע את צורת הפרבולה.

כאשר $a > 0$ הפרבולה נקראת פרבולה מחייכת, פרבולת מינימום. 

וכאשר $a < 0$ הפרבולה נקראת פרבולה בוכה, פרבולת מקסימום. 

למשל: הפרבולה $y = x^2 - 3x + 3$ מחייכת, ואילו הפרבולה $y = -2x^2$ בוכה.

נקודות חיתוך של הפרבולה עם ציר ה- X: יהיו בנקודות בהן $y = 0$, דהינו שורשי המשוואה הריבועית

נקודות החיתוך עם ציר ה- Y: יהיה בנקודה שבה $x = 0$ ו- $y = c$.

למשל: הפרבולה $y = x^2 - 4x + 3$ חותכת את ציר ה-X בנקודות בהן $y = 0$, דהינו שורשי המשוואה הריבועית $x^2 - 4x + 3 = 0$ שהם $(1,0)$ ו- $(3,0)$.

החיתוך עם ציר ה-Y יהיה בנקודה שבה $x = 0$ ו- $y = 3$ דהינו $(0,3)$.

קודקוד הפרבולה: נמצא בנקודה שבה $x = -\frac{b}{2a}$ ומהווה ציר סימטריה לפרבולה. ערך ה- y מתקבל על ידי ערך ה- x במשוואת הפרבולה.

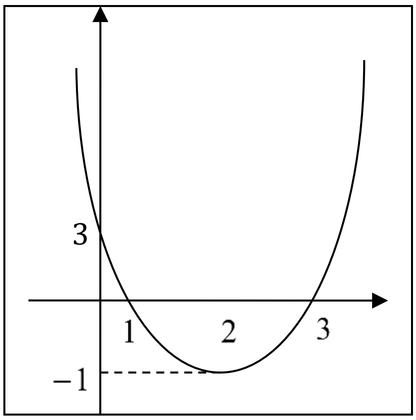
למשל: קודקוד הפרבולה $y = x^2 - 4x + 3$

יהיה בנקודה שבה $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$

כעת נציב במשוואה המקורית ונקבל

$y = x^2 - 4x + 3 = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$.

ולכן הקודקוד בנקודה $(2,-1)$.



שרטט את הפרבולות הבאות תוך ציון נקודות החיתוך עם הצירים והקודקוד.

1. שרטטו את הפרבולה $y = 4 - x^2$ וקבעו מתי $4 - x^2 > 0$

פתרון: הפרבולה בוכה מאחר ו- $a = -1 < 0$, וחותכת את ציר ה-X בנקודות בהן $y = 0$, דהינו שורשי המשוואה הריבועית $4 - x^2 = 0$ שהם $(2,0)$ו- $(-2,0)$.

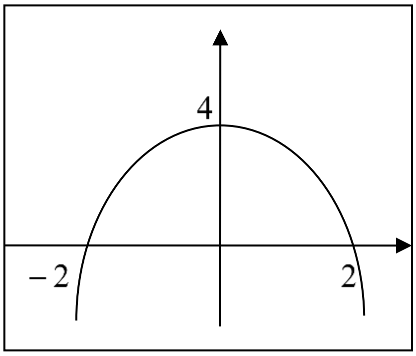
החיתוך עם ציר ה-Y תהיה בנקודה שבה $x = 0$ ו- $y = 4$ דהינו $(0,4)$.

קודקוד הפרבולה נמצא בנקודה שבה $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0$

כעת נציב במשוואה המקורית ונקבל

$y = 4 - x^2 = 4 - 0 = 4$ ולכן

הקודקוד בנקודה $(0,4)$.



לפי השרטוט $4 - x^2 > 0$ כאשר x בקטע $(-2,2)$

2. שרטטו ישר ופרבולה באותה מערכת צירים $y = 6 - x, y = x^2$

מתי ערכי הישר גדולים מערכי הפרבולה?

בעיות כלכליות

נהוג לסמן ביפו

כמות x

מחיר יחידה p

ביקוש $x = f(p)$ או $p = g(x)$ התנאי $x, p \geq 0$

פונקציית ההכנסה החודשית $R = xp$ תנאי $R \geq 0$

פונקציית ההוצאה החודשית או עלות כוללת C או TC

הוצאות קבועות $TC(0)$

פונקציית רווח $\pi = R - C$

נקודות האיזון הן נקודות בהן C=R ו- $\pi = 0$

למשל: אם פונקציית הביקוש $x = 500 - 2p$ ופונקציית ההוצאה החודשית $C = 100x$

התנאי על x, p

פונקציית הכנסה לפי משתנה x:

נקודות איזון:

פונקציית רווח לפי משתנהx :

תרגיל

1. מועדון רכיבה שליד חוף הים באודסה מצא כי פונקצית העלות הכוללת של x סדנאות רכיבה טיפולית נתונה על ידי $C(x)=10x$ (אלפי גריבנה) כאשר x הוא מספר הסדנאות בחודש ו- p (אלפי גריבנה) מחיר כל לסדנא לרוכבים\ות. פונקצית הביקוש היא: $x=-6p+240$

א. מצאו את פונקצית ההכנסה ופונקצית ההוצאה החודשי לפי המשתנה p ושרטט אותן, קבע מה יהיו נקודות האיזון.

ב. מצאו את פונקצית הרווח החודשי של המועדון לפי המשתנה p ושרטטו אותה.

ג. כמה סדנאות יש לקיים בחודש על מנת שהרווח שלו יהיה מכסימלי? ,ומה יהיה אז המחיר לסדנא?

אם יש זמן

2. יצרן צעצועים בצורת כורי גרעין מטהרן מצא כי פונקצית הביקוש הינה $x = 100 - 2p$.

ההוצאות הן 10 דינר לכל כור מצעצוע וכן הוצאות קבועות של 600 דינר לחודש.

כאשר x הוא מספר כורי הצעצוע שיימכרו בחודש ו- p הוא המחיר בדינר לכור

א. בטאו את ההכנסה החודשית R ואת ההוצאה החודשית C, כפונקציה של x .

ב. מצאו את נקודות האיזון ,תארו גרפית את R ו- C, באותה מערכת צירים ומצאו את אזורי הרווח וההפסד.

ג. כמה מוצרים יש ליצר על מנת לקבל הכנסה מקסימאלית.

ד. שרטטו את פונקציית הרווח.

קבוצות

קבוצה – אוסף של איברים.

אין חשיבות לסדר האיברים, ואין משמעות לחזרות.

צורות כתיבה

1. **איברים מופרדים בפסיקים**. דוגמאות: $\{2, 4, 6, 8...100\}$, $\{2.3, 5\}$.

2. **כלל יצירה** (Set Builder Notation). ציון תנאי שכל אברי הקבוצה מקיימים.
   דוגמה: $\{x \in \mathbb{R} | x > 0.3\}$ (כל המספרים על ציר המספרים אשר גדולים מ-0.3)

קבוצה ריקה – קבוצה ללא איברים. סימון: $\emptyset$, $\{\}$

שייכות

- איבר a **שייך** לקבוצה A נסמן $a \in A$. למשל: $3 \in \{1,2,3,9\}$.
- איבר a **לא שייך** לקבוצה נסמן $a \notin A$. למשל: $5 \notin \{1,2,3,9\}$.

חיסור

- איברים השייכים לקבוצה A אבל לא לקבוצה B. *נסמן* $A \setminus B$
  למשל $\{1,2,3,4\} \setminus \{1,3,5\} = \{2,4\}$

הכלה

- קבוצה A **מוכלת** בקבוצה B (A תת קבוצה של B) ונסמן $A \subseteq B$ אס"ם **כל האיברים של A הם גם איברים של B.** למשל: $\{1, ,4\} \subseteq \{1,2,3,4\}$
- לא מוכלת נסמן: $A \nsubseteq B$. למשל: $\{1,5\} \nsubseteq \{1,2,3,4\}$

קבוצות אוניברסליות

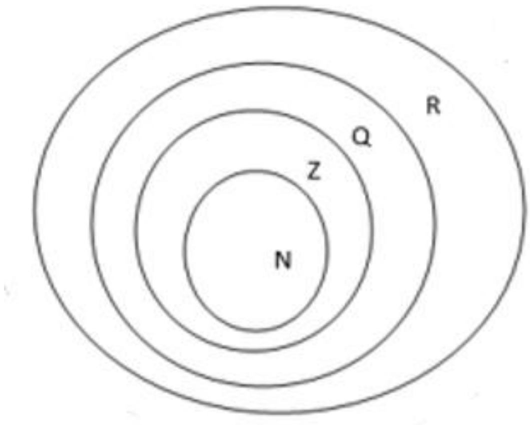
מספרים טבעיים $\mathbb{N}$ – $\{1, 2, 3.....\}$

מספרים שלמים $\mathbb{Z}$ – $\{....-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3....\}$

מספרים רציונליים $\mathbb{Q}$ – $\left\{\frac{m}{n}\middle| m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$. **מספר ממשי שניתן להצגה כשלם חלקי שלם.**

למשל: -0.25 $(\frac{-1}{4})$, 2.0 $(\frac{2}{1})$, 0.03125 $(\frac{1}{32})$, 0.3333 $(\frac{1}{3})$.

מספרים ממשיים $\mathbb{R}$ – **כל המספרים על ציר המספרים (רציונליים ואי רציונליים)**



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

קטעים (אינטרוולים) על הישר הממשי

יהיו a, b ממשיים המקיימים $b > a$. מסמנים:

קטע פתוח – $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

קטע סגור – $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

קטע חצי פתוח – $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

קרן – $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$

דוגמאות:

כתיבה נוספת	הקבוצה
	$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 7\}$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 7\}$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
	$x \neq 5$
	$x \neq 1,2$

פונקציות

הגדרת פונקציה

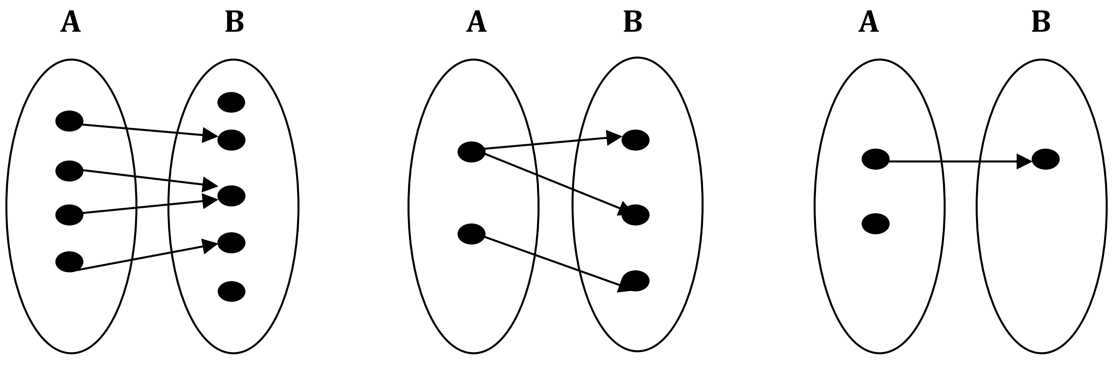
תהינה A, B קבוצות.

פונקציה $f: A \to B$ היא התאמה מלאה וחד ערכית בין אברי A (התחום) לאברי B (הטווח).

כלומר, לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ יחיד כך ש- $f(x) = y$

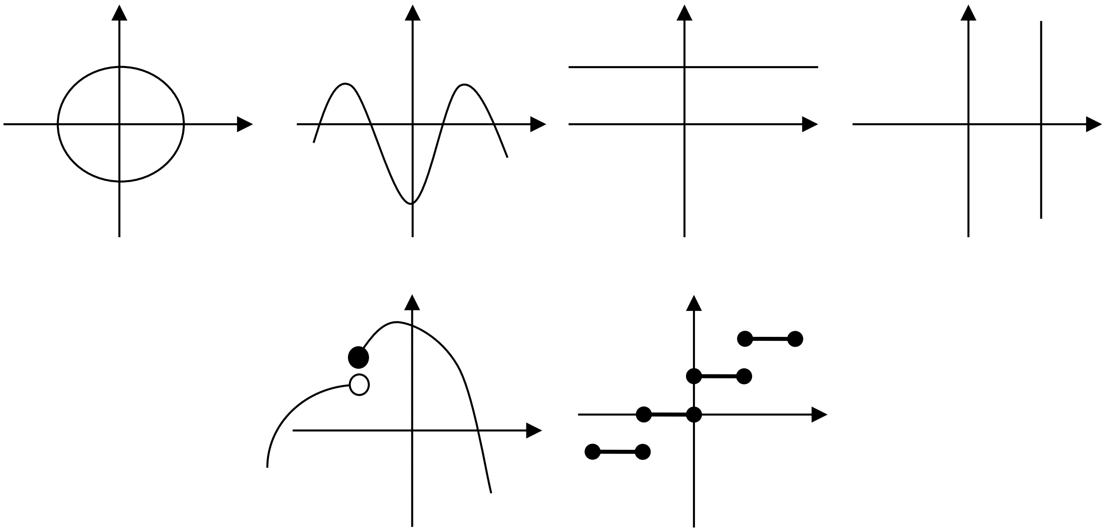
הערה: בקורס זה נעסוק בפונקציות ממשיות (התחום והטווח הם קבוצות של מספרים ממשיים).

דוגמאות:



דוגמאות גרפיות:

אילו מהגרפים הבאים מתארים פונקציה?

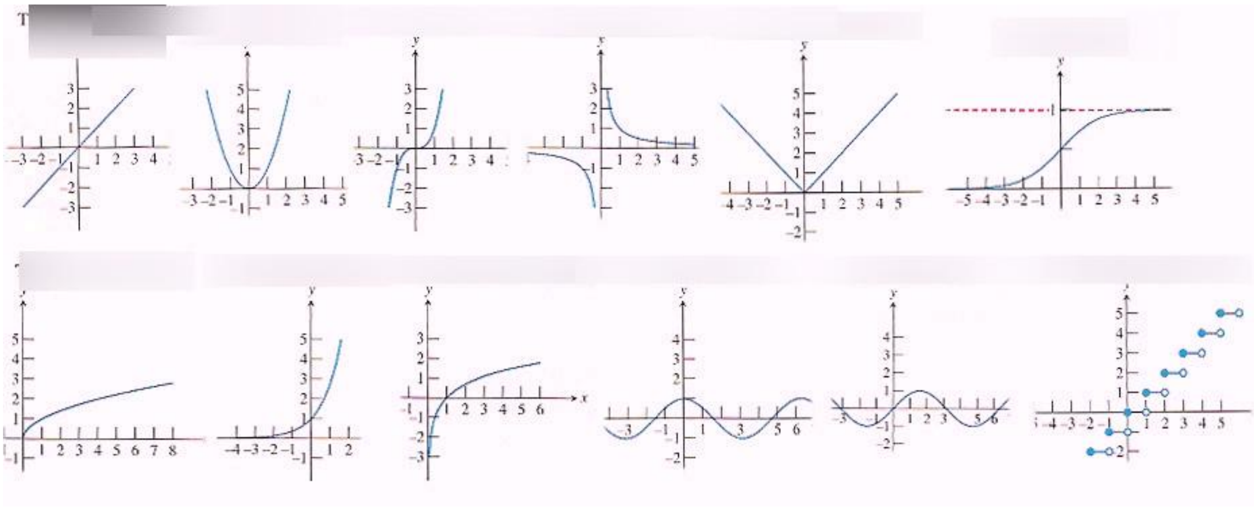


פונקציה חד-חד-ערכית (חח"ע)

- $f:A\to B$ היא חח"ע אם"ם לכל $x_1,x_2\in A$ המקיימים $f(x_1)=f(x_2)$ מתקיים $x_1=x_2$.
- $f:A\to B$ היא חח"ע אם"ם לכל $x_1,x_2\in A$ המקיימים $x_1\neq x_2$ מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$.

תהי $f:A\to B$. התמונה של f תסומן $Im(f)$ והיא קבוצת כל ערכי $y\in B$ שעבורם קיים $x\in A$ כך ש-$f(x)=y$.

- ✓ האם הגרפים הבאים מתארים פונקציות?
- ✓ אילו פונקציות הן חח"ע
- ✓ מהי התמונה?



פונקציה מפוצלת

בתרגילים הבאים למצוא:

- מהו תחום ההגדרה
- שרטוט
- האם הפונקציה חח"ע
- מהי התמונה

דוגמאות:

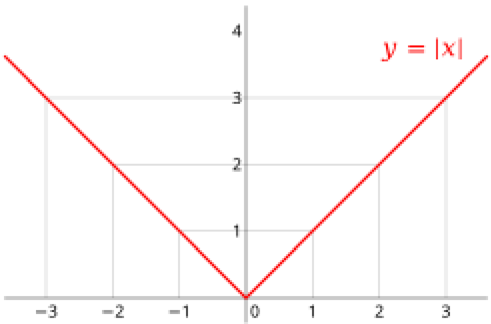
.1

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & -1 < x < 2 \\ x-2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

2. פונקציית ערך מוחלט: כל פונקציית ערך מוחלט ניתנת לכתיבה כפונקציה מפוצלת.

א.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



ב. שרטטו תוך שימוש בשיקוף את $y = |x^2 - 6x|$

.3

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 3 - x & 0 < x < 2 \\ x - 1 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

4. אם יש זמן פותרים לבד

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 \le x \le 1 \\ 3-x & 1 < x \le 4 \\ 2x-9 & 4 < x \le 5 \end{cases}$$

סכומים

נגדיר $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{a_k} = a_1 + a_2 +,,,,,,,,,,, + a_n$

תכונות:

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2. $\sum_{k=1}^{n} \propto a_k = \propto \sum_{k=1}^{n} a_k$ כאשר $\propto$ קבוע

3. $\sum_{k=1}^{n} \propto = \propto n$ כאשר $\propto$ קבוע

4. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ki} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}$

חשב את הסכומים

א. 1. חשבו $\sum_{k=1}^{4} 2$

2. חשבו $\sum_{k=1}^{4} k$

3 . חשבו $\sum_{k=1}^{4} k^2$

4. חשבו $\sum_{k \dot{\epsilon} \{11,3,5\}} (k-1)^2$

4. בהסתמך על סעיפים קודמים חשבו

i. $\sum_{k=1}^{4}(k-2)^2$

ii. $\sum_{k=1}^{4}(2k-6)^2$

5. חשבו $\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{4}kl^2$ בשני דרכים

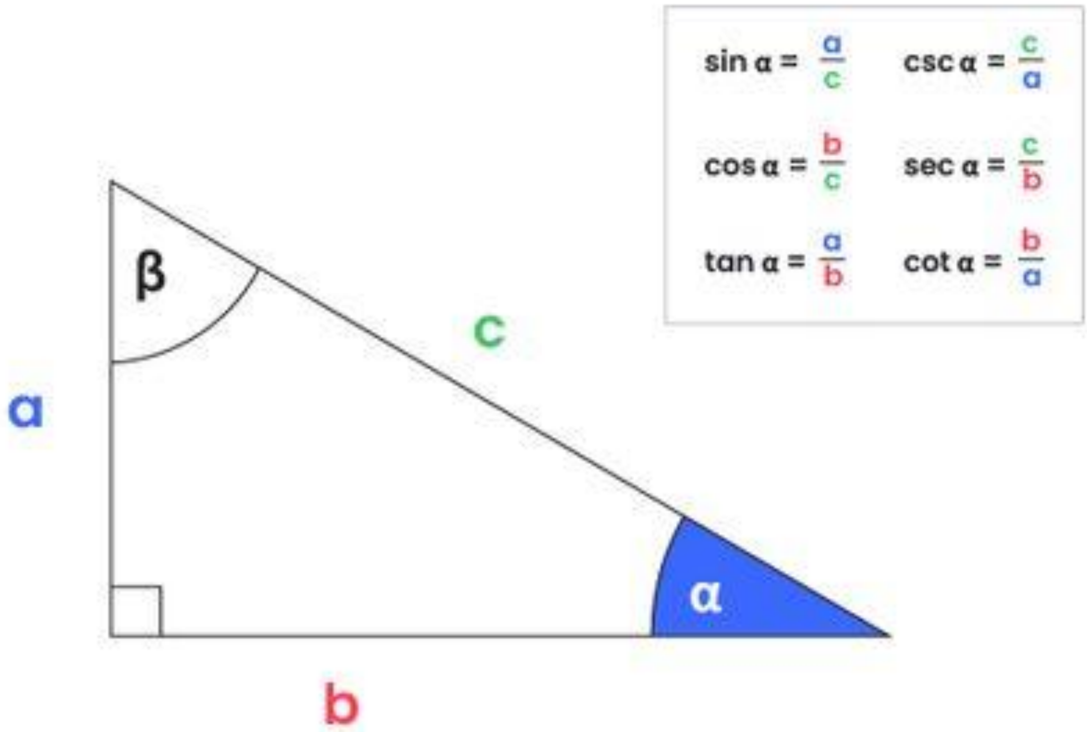
ב.   נתון ש$\sum_{i=1}^{n} x_i = 50$-ו- $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 = 70$ חשבו את תוך שימוש בתכונות ה- $\sum$

a. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)^2$

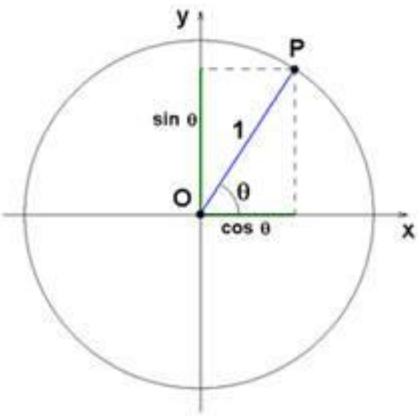
b. $\sum_{i=1}^{n}(x_i + 2)(x_i + 1)$

אם יש זמן(לא לבחינה)

פונקציות טריגונמטריות



כאשר הזווית מעל 90 מעלות נגדיר את המעגל הטריגונומטרי



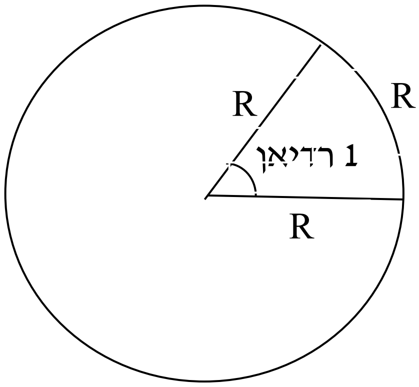
זהויות בסיסיות

1. $tan\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cot\,\alpha}$
2. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
3. $-1 \le sin\,\alpha\,, cos\,\alpha \le 1$

רדיאנים

הרדיאן - **שיטה נוספת למדידת זוויות**.

הגדרה: אורך הקשת של מעגל יחידה שמתאים לזווית הוא גודל הזוית ברדיאנים



היקף מעגל הוא $2\pi R$. לכן במעגל יש 2π רדיאנים.

מכאן הקשר היסודי (מעלות ורדיאנים):

$$360^\circ = 2\pi_{\text{רדיאנים}}$$

איך עוברים ממעלות לרדיאנים?

כדי להעביר ממעלות לרדיאנים נכפול ב- $\frac{\pi}{180}$

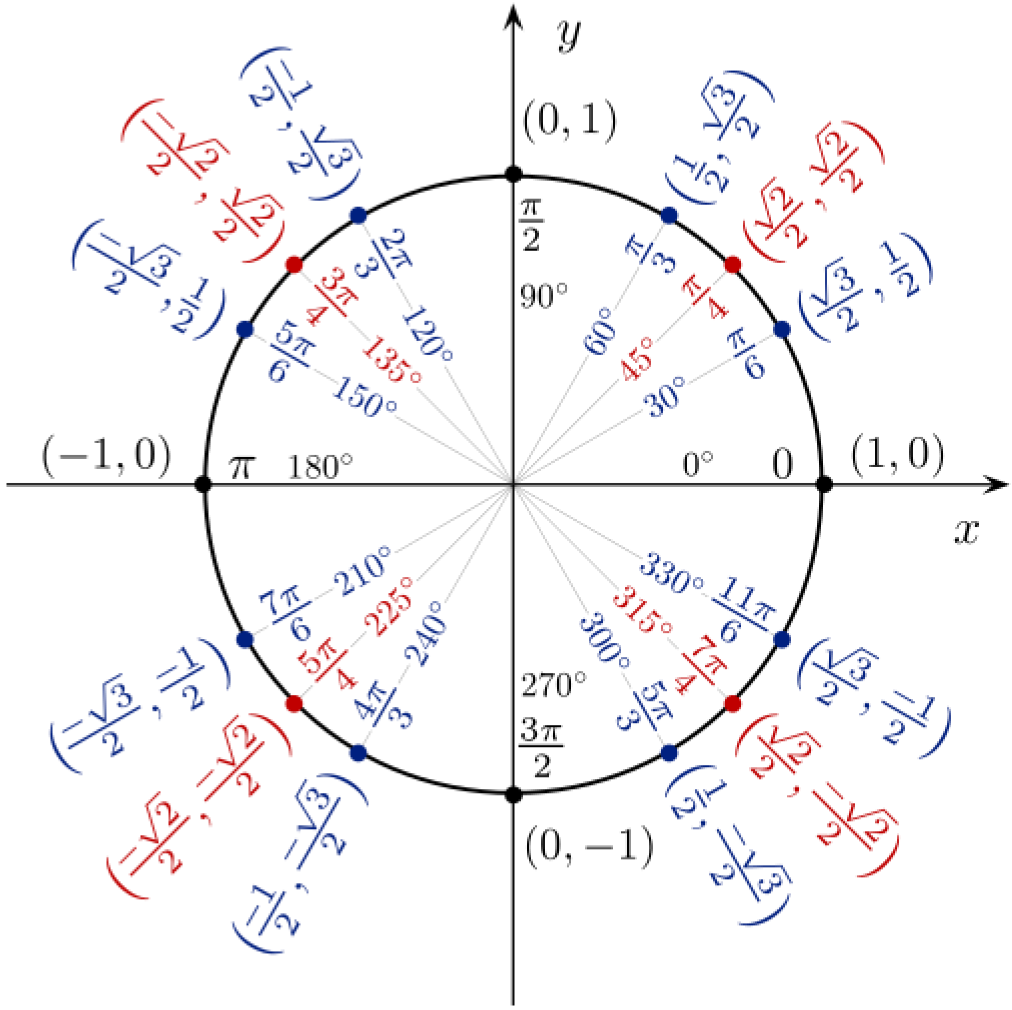
איך עוברים מרדיאנים למעלות?

כדי להעביר מרדיאנים למעלות נכפול ב- $\frac{180}{\pi}$

טבלה שימושית:

מעלות	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
רדיאנים	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

באופן מקובל, **רדיאן הוא מספר**, הוא גודל ללא יחידות. מעלות אינן מספר.



y
x
$(0,1)$
$(1,0)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
$\frac{\pi}{2}$
$90°$
π
$180°$
$0°$
0
$270°$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{\pi}{6}$ $30°$
$\frac{\pi}{4}$ $45°$
$\frac{\pi}{3}$ $60°$
$\frac{2\pi}{3}$ $120°$
$\frac{3\pi}{4}$ $135°$
$\frac{5\pi}{6}$ $150°$
$\frac{7\pi}{6}$ $210°$
$\frac{5\pi}{4}$ $225°$
$\frac{4\pi}{3}$ $240°$
$\frac{5\pi}{3}$ $300°$
$\frac{7\pi}{4}$ $315°$
$\frac{11\pi}{6}$ $330°$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$

מספרים מרוכבים

נסמן $i^2 = -1$ או $i = \sqrt{-1}$

מספר מרוכב $a + bi$ למשל $2 - 3i$

חשבו

1. $(2 - i)^2$

2. $(1 + i)^2$

3. $i(2 - i)$

פתרו את המשוואה

4. $x^2 + 16 = 0$

5. $x^2 + 2x + 2 = 0$

6. $x^2 + 6x + 13 = 0$