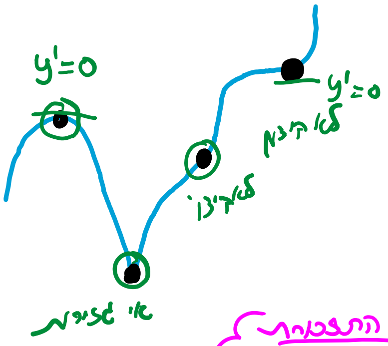
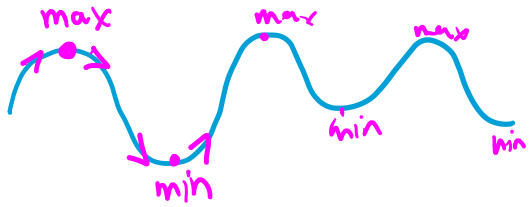
תרגול 9 – גזירות, קיצון מקומי

max ↗↘ min ↘↗





גזירות

הגדרה: פונקציה אינה גזירה בנקודה שבה הפונקציה מוגדרת והנגזרת לא.

פינת התזכורת: $\sqrt{}$ אי-זוגי אין בעיה בת.ה.

לדוגמא: $y=\sqrt[3]{x^2+x-6} = (x^2+x-6)^{\frac{1}{3}}$

ת.ה y: כל x $(\mathbb{R})$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2+x-6)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+1)$$

$$\boxed{y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x-6)^2}}}$$

ת.ה y': מכנה $3\sqrt[3]{(x^2+x-6)^2} \neq 0$

$x^2+x-6 \neq 0$

$x \neq -3, 2$

מועמדים לקיצון:

1. אי גזירות: (חיפוש)

הנקודות שהפונ' מוגדרת בהן אבל הנגזרת לא מוגדרת.

ת.ה y: כל x

אבל ת.ה y': $x \neq 2,-3$

לכן $\boxed{x=2,-3}$ נק' אי גזירות.

2. $y'=0$

$$\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x-6)^2}} = 0$$

$2x+1=0$

$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

טבלה: מועמדים לקיצון + ת.ה. f

		(-4)	-3	(-1)	$-\frac{1}{2}$	(0)	2	(3)
שיפוע	סימן y'	−		−		+		+
	עו y	↘		↘	min	↗		↗

הצבה בפונקציה: $y(-\frac{1}{2}) = -1.842 \rightarrow$ min מקומית $(-\frac{1}{2}, -1.842)$

עליה וירידה ↙ ↘ קיצון

ת. עליה: $x>2$ או $-\frac{1}{2}<x<2$

ת. ירידה: $-3<x<-\frac{1}{2}$ או $x<-3$

צורות כתיבה נוספות:

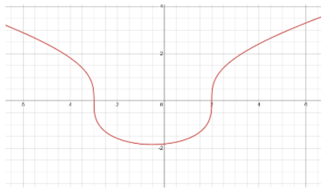
לפי תחום

עליה: $(-\frac{1}{2},\infty)\setminus\{2\}$

ירידה: $(-\infty,-\frac{1}{2})\setminus\{-3\}$

עליה: $2\neq x>-\frac{1}{2}$

ירידה: $-3\neq x<-\frac{1}{2}$



קיצון מקומי

מציאת נקודות קיצון מקומיות של פונקציה:

1. תחום הגדרה:

נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה (לפי סוגה)

- כאשר יש שבר - המכנה שונה מ-0.
- כאשר יש שורש - מה שמתחת לשורש ≥ 0
- כאשר יש לוג - $\log_a b$: $a,b>0,\quad a\neq 1$.

2. נקודות חשודות כקיצון:

א. נקודות שמאפסות את הנגזרת -

⇦ נגזור את הפונקציה (אם היא מפוצלת - נגזור כל ענף בנפרד).

⇦ נפתור את המשוואה $f'(x)=0$ ונפסול פתרונות שאינם בתחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. נקודות אי-גזירות -

⇦ נמצא את תחום ההגדרה של הנגזרת.

⇦ נקודות בהן הפונקציה מוגדרת והנגזרת לא הן נקודות אי גזירות.

3. טבלת חקירה:

- בונים טבלה ומכניסים אליה את כל החשודים כקיצון שמצאנו ואת הנקודות הבעייתיות מתחום ההגדרה.
- בכל תחום שנוצר בוחרים מספר (נציג), מציבים אותו ב- $f'(x)$ וקובעים את סימן הנגזרת.
- קובעים תחומי עליה וירידה לפי הסימנים שהתקבלו.
- נקודות שמחליפות מעליה לירידה או להיפך הן נקודות קיצון.
- קובעים את סוג הקיצון (מינימום מקסימום).

4. סיכום:

⇦ מוצאים את שיעור ה- y של נקודות הקיצון ע"י הצבת ה- x בפונקציה המקורית.

⇦ כותבים את כל נקודות הקיצון באופן מסודר כולל סוגן. למשל $Max(-1,3)$.

מצא נקודות קיצון לפונקציות הבאות:

1. $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

ת.ה.ג : $\mathbb{R}$

$$y' = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

ת.ה. y' : מכנה $\neq 0$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$

מועמדים לקיצון:

אי גזירות

$x=1,-1$

כי הפו' מוגדרת בנק' שלו.
אבל הנגזרת לא.

$y'=0$

$$\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}=0$$

$4x=0$

$x=0$

טבלה : ת.ה. y + תשובות לקיצון

		(-2)		$(-\frac{1}{2})$		$(\frac{1}{2})$		(2)
סימן f'		$-$		$+$		$-$		$+$
x			-1		0		1	
עג f		↘	min	↗	max	↘	min	↗

נחשב את ערכי y ע"י הצבה בפו':

$f(-1)=0$

$f(0)=1$

$f(1)=0$

נסכם:

נק' קיצון מקומיות:	min $(-1,0)$	ת.עליה:	$(-1,0)\cup(1,\infty)$
	max $(0,1)$		
	min $(1,0)$	ת.ירידה:	$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

2. $\boxed{y=(x-2)^3\cdot e^{3x}}$

ת.ה y: $\mathbb{R}$

$$y'=3(x-2)^2\cdot 1\cdot e^{3x}+(x-2)^3\cdot e^{3x}\cdot 3$$

$$=3e^{3x}(x-2)^2\cdot(1+x-2)$$

$$\boxed{y'=3e^{3x}(x-2)^2(x-1)}$$

ת.ה. y': $\mathbb{R}$ → אין נק' אי גזירות כי ת.ה. y' = ת.ה. y

מועמדים לקיצון:

נק' אי גזירות

אין

$y'=0$

$$3\cdot e^{3x}\cdot(x-2)^2\cdot(x-1)=0$$

$\neq 0$ $\quad\neq 0$ $\quad(x-2)^2=0\ /\sqrt{\ }$ $\quad x=1$

$x-2=0$

$x=2$

$(\ )\cdot(\ )\cdot(\ )=0$

$=0\quad =0\quad =0$

טבלה:

ת.ה. y + מועמדים

	(0)		$(1\frac{1}{2})$		(3)
סימן f'	−		+		+
f ↗↘	↘	1 min	↗	2 $y'=0$ פיתול	↗

$$f(1)=(1-2)^3e^3=(-1)^3e^3=-e^3$$

נספח:

נק' קיצון: $\min(1,-e^3)$

	עם x-ים	בקטע
ת. עליה:	$1<x,\ x\neq 2$	$(1,\infty)\setminus\{2\}$
או	$1<x<2$ או $x>2$	$(1,2)\cup(2,\infty)$
ת. ירידה:	$x<1$	$(-\infty,1)$

3. $\boxed{y = \frac{1+\ln x}{x}}$

ת.ה. y:
1. $x\neq 0$ (מכנה) ⇐ $\boxed{x>0}$
וגם
2. $x>0$ ($\ln$)

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-\ln x}{x^2}$$

$$\boxed{y'=\frac{-\ln x}{x^2}}$$

ת.ת. y':
1. תורשה: $x>0$
וגם
2. שבר: $x^2\neq 0$ וגם $x>0$ ⇐ $x>0$

$\boxed{x>0}$

משוואה לקיצון:

$\underline{y'=0}$

$$\frac{-\ln x}{x^2}=0$$

$$\ln x=0$$

$$x=e^0$$

$$x=1$$

אי גזירות

אין

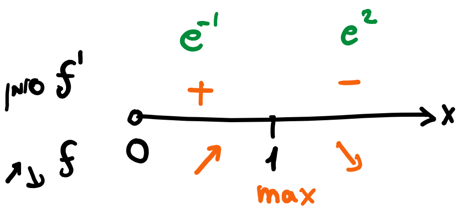
ת.ה. y + משוואה

טבלה:

$$y'=\frac{\ominus\ln x}{x^2}\ +$$

$\ln e^2$

$\ln e^{-1}$



$$y(1)=\frac{1+\ln 1}{1}=\frac{1+0}{1}=1$$

נק' קיצון:	max (1,1)
תחום עליה:	(0,1)
תחום ירידה:	(1,∞)