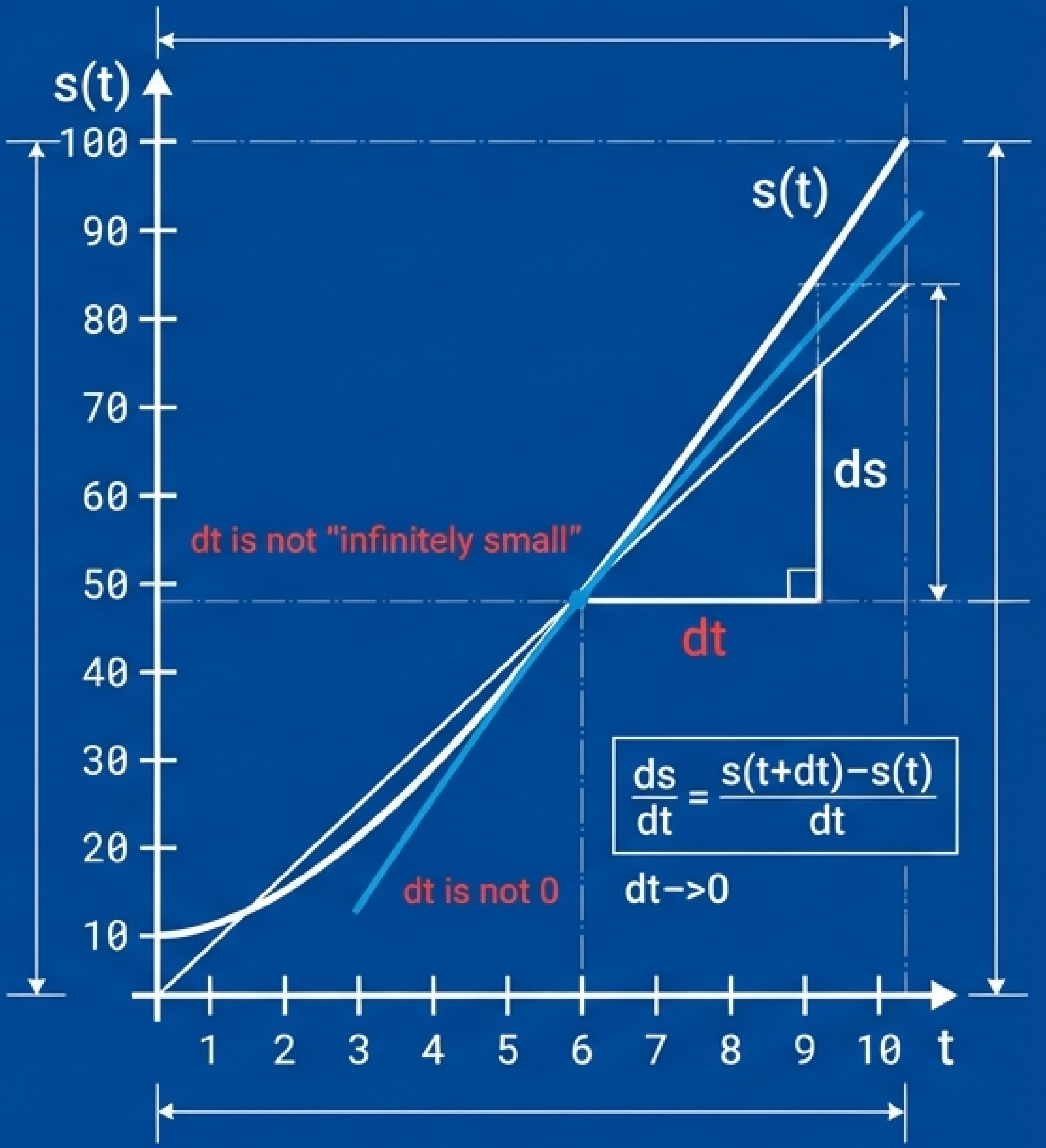
05_קובץ 4
משפט ערך הביניים והגדרת הנגזרת

פרוטוקול שליטה במרחב הרציף והדיסקרטי: אסטרטגיה ויישום.

ממנגנון המעלית של משפט ערך הביניים (קיומיות) ועד למיקרוסקופ האנליטי של הגדרת הנגזרת (שינוי רגעי). המדריך המלא לפירוק מוקשים בבחינה.



מפת הניווט הטקטית: עץ החלטות מבצעי

זיהוי המשימה: הוכחת קיום פתרון למשוואה?

משפט ערך הביניים (קושי)

הפעולה: כליאת הפונקציה בין חיובי לשלילי (אפקט המעלית)

זיהוי המשימה: חישוב שיפוע / גזירות בנקודה חשודה?

הגדרת הנגזרת (הגבול)

הפעולה: חישוב גבול השיפוע כאשר המרחק שואף לאפס

זיהוי המשימה: פונקציה מפוצלת / ערך מוחלט?

בדיקת גבולות חד-צדדיים

הפעולה: חיפוש נקודות שבירה (שפיץ)

משפט ערך הביניים: אפקט המעלית והרציפות

ההיגיון הטקטי

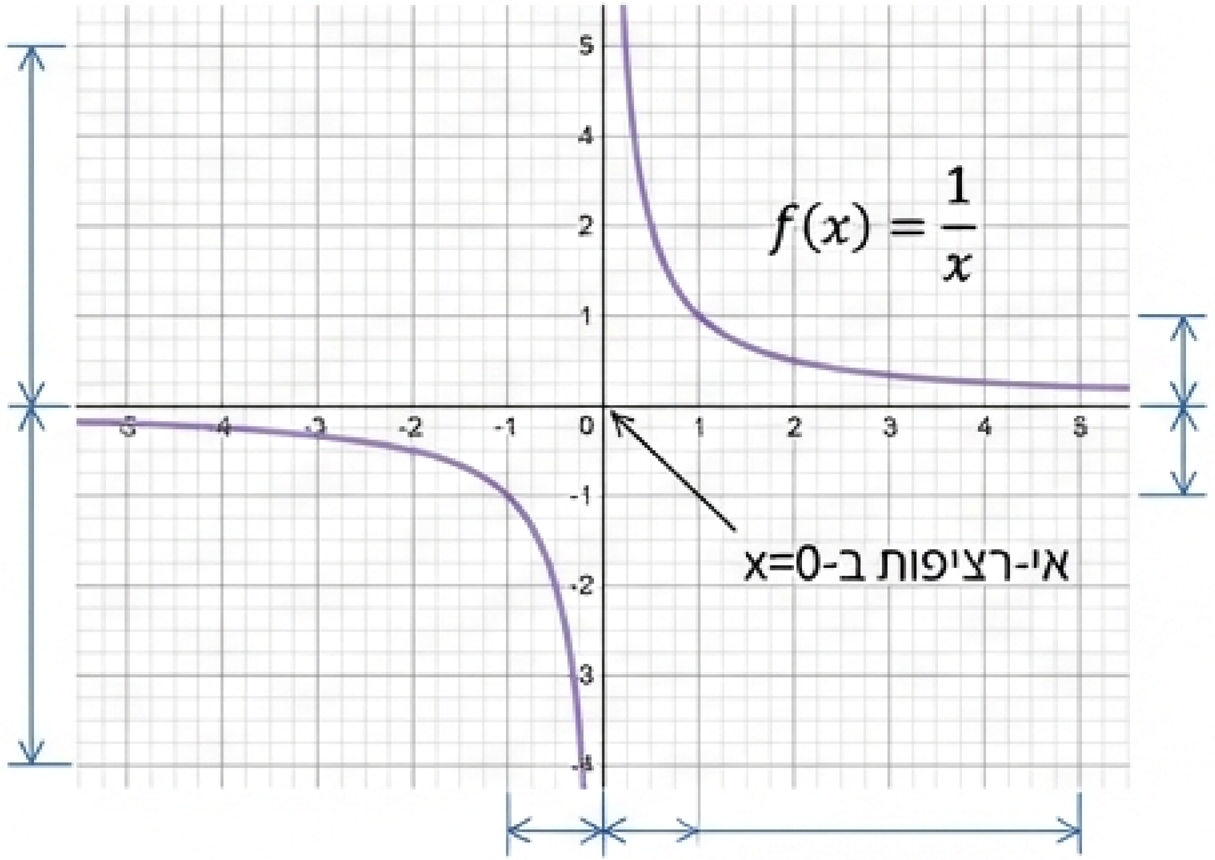
- **העיקרון:** אם הייתם בקומה 5 וירדתם לחניון במינוס 2, בהכרח עברתם בלובי (אפס). אי אפשר לדלג על קומות במעלית תקינה.
- **תנאי הסף הקריטי:** רציפות בקטע סגור. אם יש חור ברצפה (אי-רציפות), המשפט קורס.
- **אזהרת מסע:** הפונקציה ההופכית 1 חלקי x בין 1 למינוס 1. היא מדלגת על האפס כי היא מתפוצצת לאינסוף.

המודל המתמטי

תהא $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$.

אם $f(a)\cdot f(b) < 0$ (חילופי סימן),

אזי קיים c כך ש-$f(c)=0$.



הנדסה לאחור: חיתוך בין פונקציות עוינות

המשימה: הוכח כי $e^x = \sqrt{4-x^2} + 2$ נחתכות.

המהלך הטקטי

אל תנסו לפתור משוואה טרנסנדנטלית. זה מלכוד.

1. העבירו הכל לאגף אחד וצרו פונקציית הפרש חדשה $h(x)$.
2. אנחנו לא מחפשים איפה הן נפגשות, אלא שהן נפגשות.
3. מספיק להראות שאחת הייתה מעל השנייה ואז עברה מתחתיה.

ביצוע בשטח

1. נגדיר: $h(x) = e^x - \sqrt{4-x^2} - 2$
2. נציב קצוות תחום הגדרה $(x = 2, x = -2)$:
3. $h(2) < 0$ (שלילי)
4. $h(-2) > 0$ (חיובי)
5. מסקנה: לפי משפט ערך הביניים, קיים פתרון.

הגדרת הנגזרת: המיקרוסקופ האנליטי

כשהזום-אין שואף לאינסוף, כל עקומה הופכת לקו ישר.

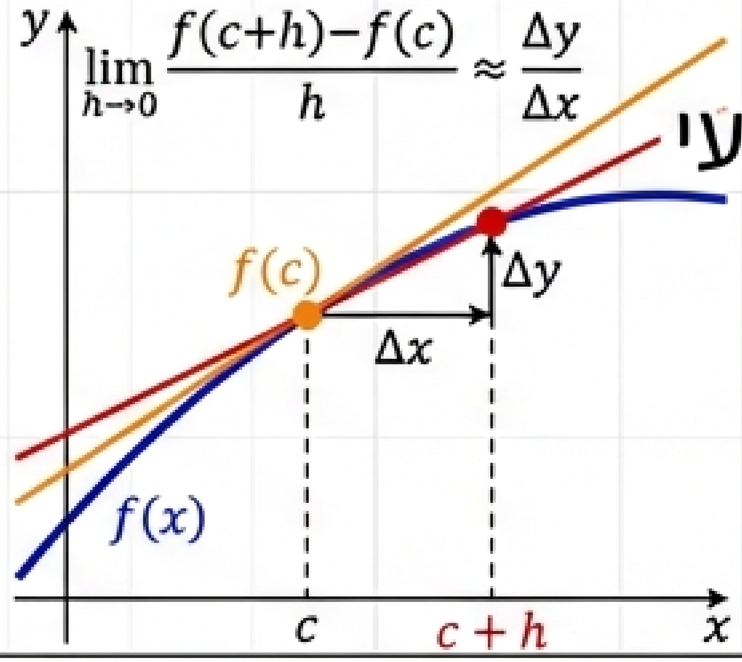
האינטואיציה

- אנחנו לוקחים שתי נקודות קרובות ומקרבים אותן בכוח עד שהן כמעט מתנגשות.
- ה- h הוא הרעש (המרחק) שאנחנו מנסים להעלים.
- המטרה: חישוב קצב השינוי הרגעי בנקודת המשבר.

הנוסחה

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dy/dx: היחס בין השינוי בגובה לשינוי ברוחב כששניהם מזעריים.



טקטיקת השורשים: נטרול באמצעות הכפל בצמוד

המשימה: מציאת נגזרת ל- $\sqrt{x}$ לפי הגדרה.

ביצוע בשטח

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

פתיחת סוגריים במונה → צמצום h

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$$

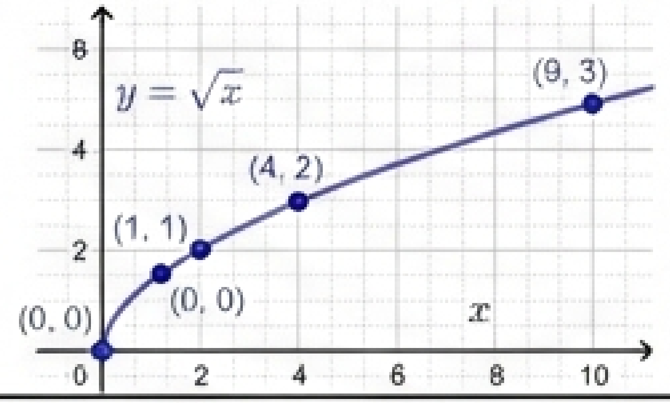
$$\boxed{=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

האסטרטגיה

הבעיה: הצבה ישירה נותנת 0/0. המערכת המערכת קורסת.

הפתרון: טכניקת 'הכפל בצמוד'.

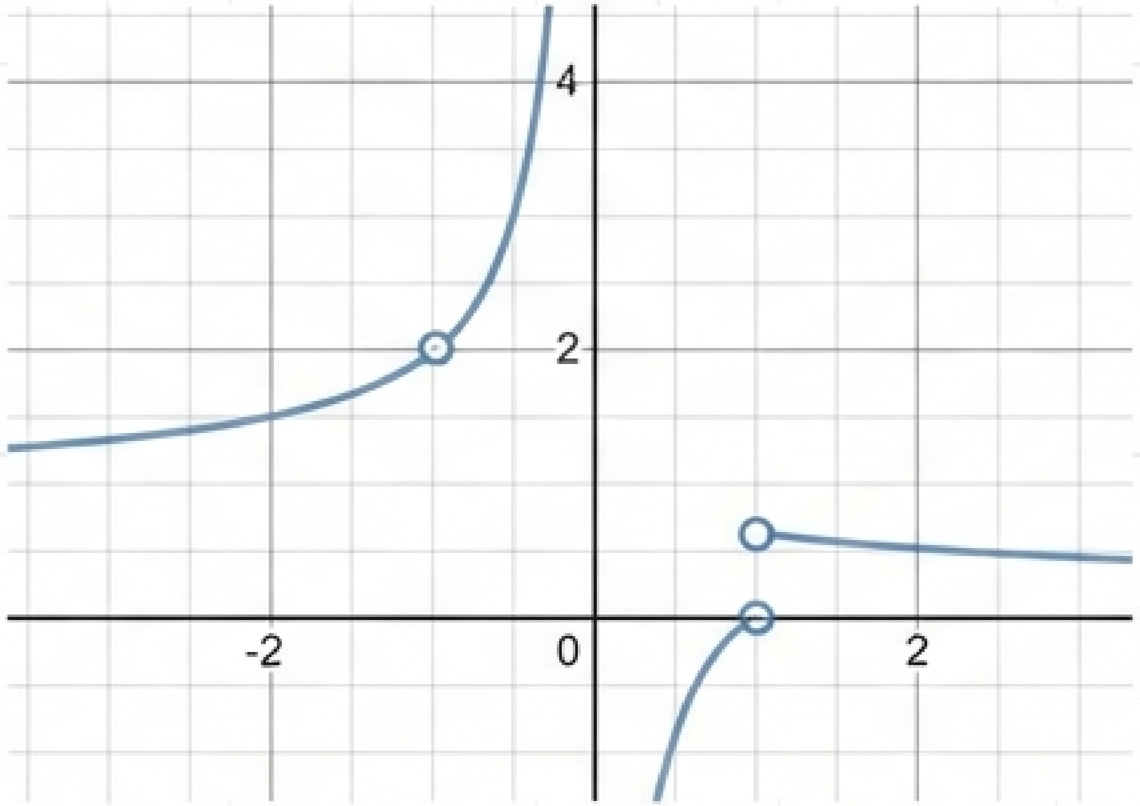
- אנחנו מרחיבים את השבר כדי להעיף את השורש מהמונה למרתף (למכנה).
- ברגע שהשורש ירד למטה והפך לחיבור, ה-0 במכנה מפסיק להיות קטלני.



הקשר הקריטי: רציפות מול גזירות

אנלוגיה: תסמונת הדייט הראשון

- **רציפות (להופיע לדייט):**
תנאי הכרחי. אם הפונקציה "לא הגיעה" (חור/קפיצה), אין על מה לדבר.
- **גזירות (זרימה בשיחה):**
לא מספיק רק להגיע. צריך להיות "חלק" ללא תפניות חדות או שבירות פתאומיות.



חוקי הברזל

גזירה ← **בהכרח רציפה** (אם אתה זורם, אתה קיים).
רציפה ↚ **לא בהכרח גזירה** (אפשר להיות קיים אבל דוקרני/שפיץ).
לא רציפה ← **לא גזירה** (אם לא באת, אין דייט).

המלכודת הקלאסית: נקודת השפיץ (Cusp)

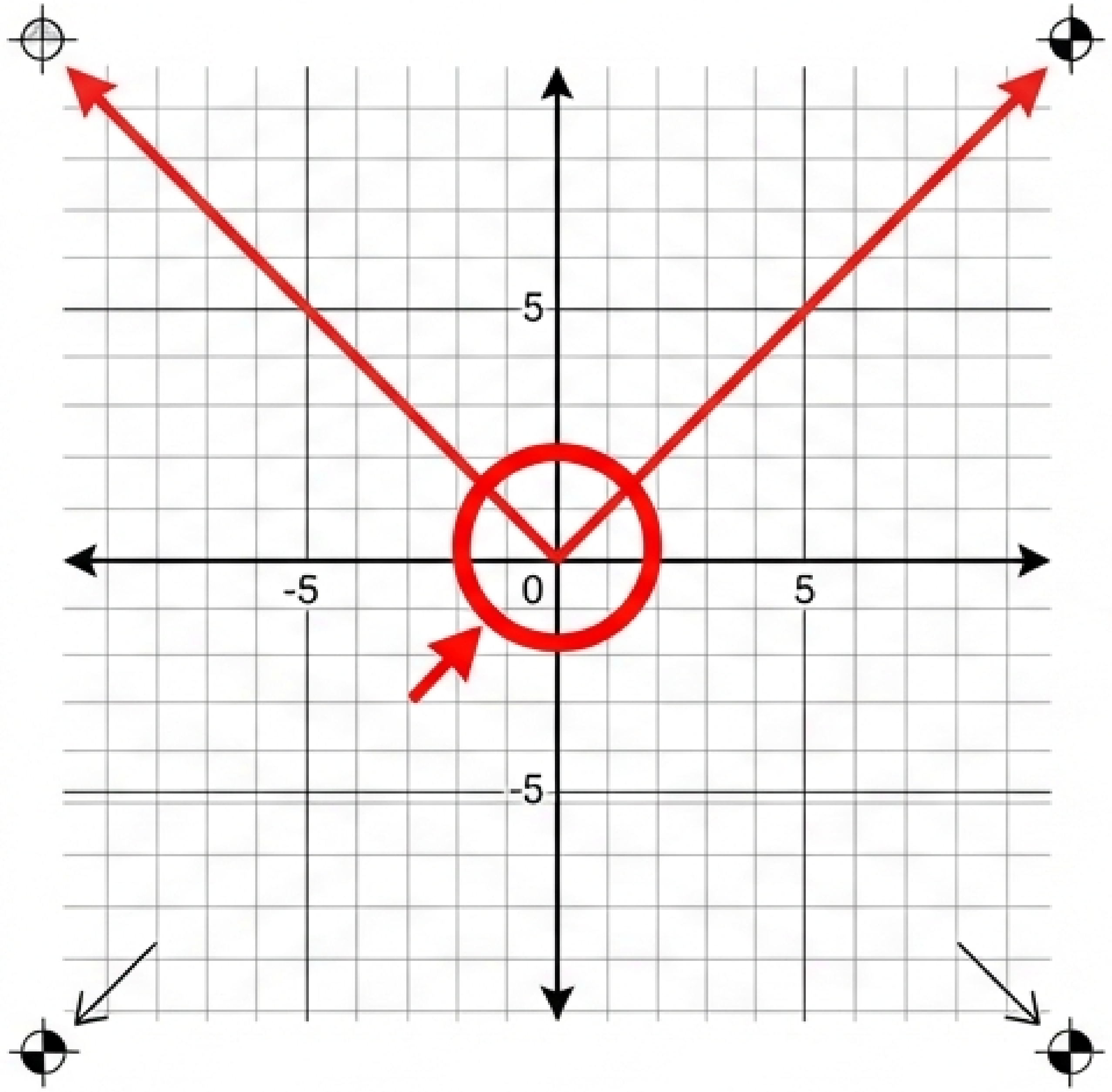
התנגשות חזיתית בנקודה $x = 0$ עבור $f(x) = |x|$

הניתוח

הפונקציה מגיעה מימין
בשיפוע חיובי (1+),
ומשמאל בשיפוע שלילי (1-).

בנקודה 0 **אין** "החלקת סיבוב",
אלא שבירה חדה. המשיק
המשיק לא יודע לאן לפנות.

פסק הדין: רציפה אך לא גזירה.



הוכחה בגבולות

גבול מימין ($h > 0$):
התוצאה 1.

גבול משמאל ($h < 0$):
התוצאה 1-.

הגבול → -1 ≠ 1
הגבול לא קיים

מלכודת המשיק האנכי

המצוק: כשהשיפוע טס לאינסוף

האינטואיציה

הפונקציה רציפה לחלוטין, אין שברים.

אבל בנקודה הספציפית הזו, היא מטפסת **אנכית** כמו קיר טיפוס.

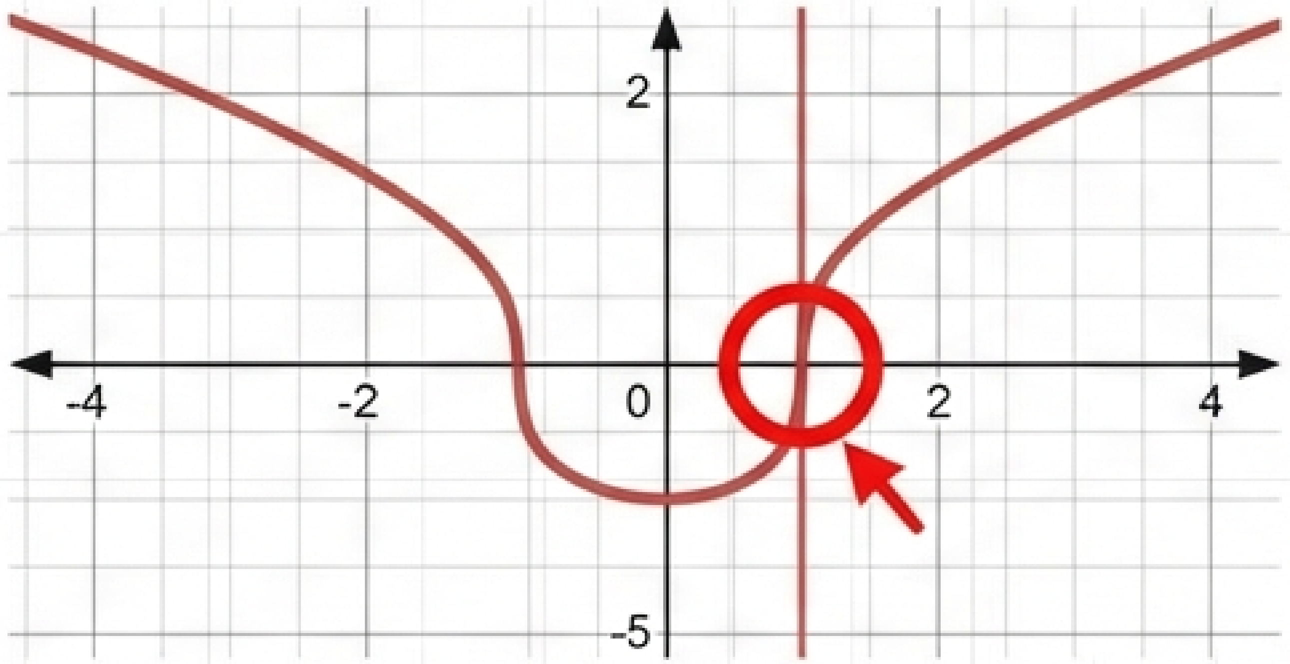
לקיר אנכי אין שיפוע מוגדר (או ששיפועו אינסוף).
לכן: **לא גזיר.**

הביצוע

הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ בנקודה $x = 1$

חישוב גבול הגדרת הנגזרת מוביל ל- $\frac{1}{0}$

התוצאה: ∞



פירוק מוקשים מתקדם: האם הפונקציה נרגעת?

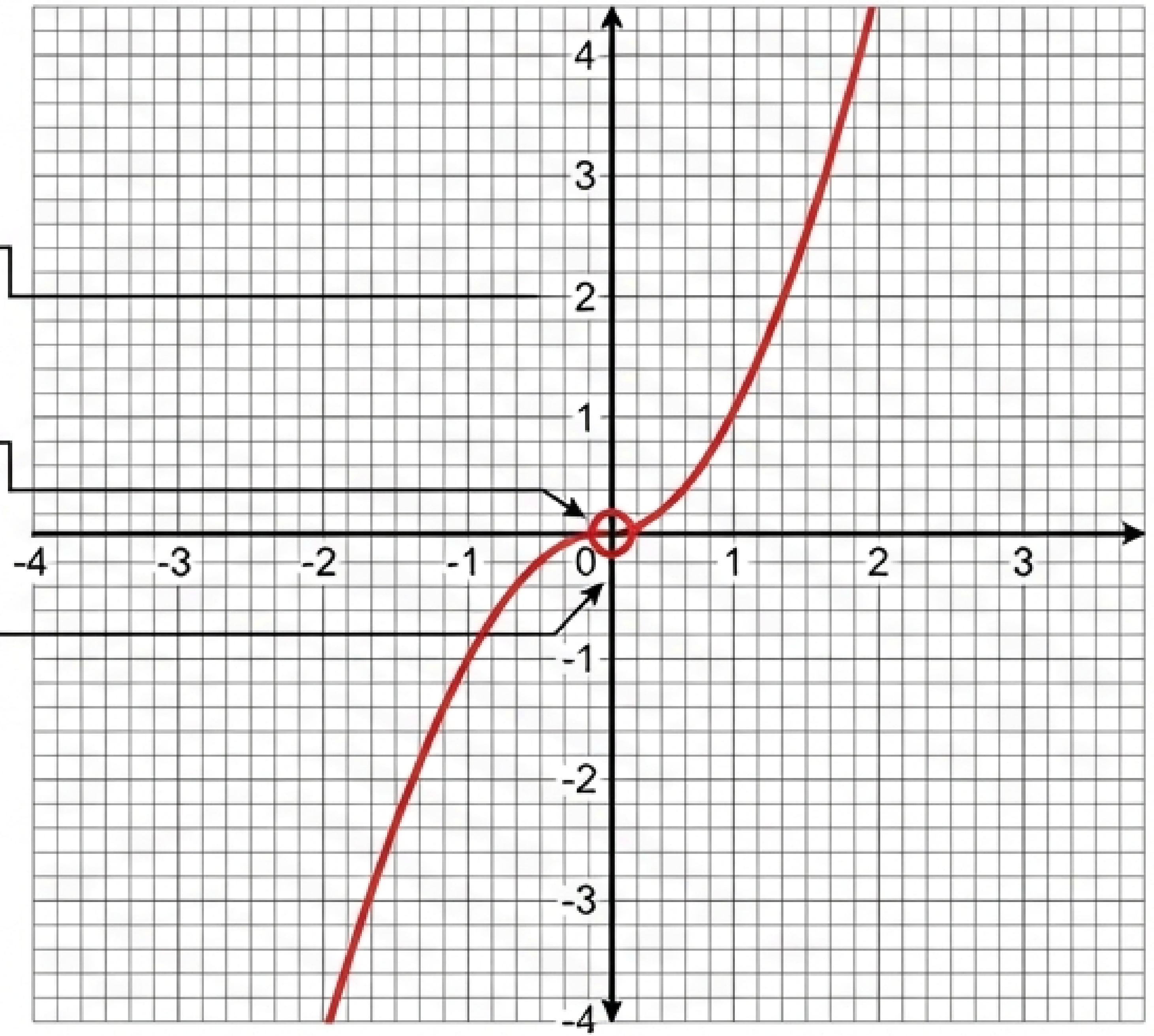
התרגיל:
האם $f(x) = x \cdot |x|$ גזירה ב-0?

החשש:
הערך המוחלט בדרך כלל יוצר "שפיץ".

המציאות: הכפל ב-x (שמתאפס ב-0) משמש כבולם זעזועים.

המנגנון:
הוא מאלץ את הפונקציה להתאפס בצורה 'רכה' וחלקה.

ההוכחה:
חישוב הגבול נותן 0 גם משמאל וגם מימין.



מסקנה: למרות המראה המפחיד, הפונקציה מחליקה לאפס. היא גזירה, והנגזרת היא 0.

Tactical Blue Box

ארגז הכלים האולטימטיבי לבחינה

הסיטואציה	הכלי	הטריגר הויזואלי	חוק הזהב
הוכחת קיום פתרון	משפט ערך הביניים	שינוי סימן (-/+)	חובה לציין: רציפות בקטע סגור
חישוב שיפוע (לפי הגדרה)	גבול המנה ($h \to 0$)	0/0 בהצבה	כפל בצמוד או פירוק לגורמים
נקודת שפיץ (Cusp)	גבולות חד-צדדיים	ערך מוחלט / שורש	גבול ימין $\neq$ גבול שמאל $\rightarrow$ **לא גזיר**
משיק אנכי	הגדרת הנגזרת	שיפוע מתפוצץ	תוצאת הגבול היא **אינסוף**

צ'ק-ליסט למניעת אסונות (Red Flags)

- [ ] **בדיקת דופק (תחום הגדרה):**
  האם אנחנו מחלקים באפס או מוציאים שורש למספר שלילי?
- [ ] **פיצול אישיות:**
  האם יש ערך מוחלט? חובה לפצל למקרים לפני הגזירה!
- [ ] **משמעת מבצעית:** האם ביקשו 'על פי הגדרה'?
  אסור להשתמש בנוסחאות גזירה רגילות (במבחן זה 0 נקודות).
- [ ] **בדיקת נוכחות:**
  האם בדקתי רציפות? אם הפונקציה לא רציפה, תעצרו מיד. היא לא גזירה.

בוחן פתע: חידוד אינטואיציה

שאלה: האם פונקציה יכולה להיות גזירה בנקודה שבה היא לא רציפה?

תשובה: בחיים לא. אין דייט אם לא הגעת.

שאלה: האם למשוואה $x^2 + 1 = 0$ יש פתרון לפי ערך הביניים ב- $[-2,2]$?

תשובה: לא. הפונקציה תמיד חיובית (פרבולה מרחפת), אין שינוי סימן.

שאלה: האם לפונקציה $|x|$ יש משיק בראשית?

תשובה: לא. יש לה שני חצאי-משיקים שלא מסכימים ביניהם.