שלבים בחקירת פונקציה

1. תחום הגדרה:

- פונקציה רציונאלית - מוגדרת עבור ערכי x עבורם המכנה אינו מתאפס.
- פונקציה לוגריתמית - פנים הלוג חיובי, בסיס הלוג חיובי ושונה מ-1.
- פונקצית שורש מסדר זוגי - פנים השורש גדול או שווה לאפס.

2. נקודות קיצון:

מציאת נקודות חשודות כקיצון:

- נגזור את הפונקציה.
- $f' = 0$
- נקודות אי גזירות: נקודות בהן הפונקציה מוגדרת ורציפה והנגזרת לא

נפסול פתרונות שאינם בתחום ההגדרה

בניית טבלה:

- נציב בטבלה חשודות כקיצון + נקודות בעייתיות מתחום ההגדרה
- נבחר מכל תחום שנוצר ערך x כרצוננו ונציב בנגזרת הראשונה.
- אם $f'(x) > 0$ יש עלייה בתחום, אם $f'(x) < 0$ יש ירידה בתחום.
- נקבע את סוגן של נקודות הקיצון:
נקודת מעבר מעלייה לירידה זוהי נקודת מקסימום, נקודת מעבר מירידה לעלייה זוהי נקודת מינימום (בתנאי שהפונקציה מוגדרת בהן).
- נמצא את ערכי ה-y של נקודות הקיצון על ידי הצבה של ה-x בפונקציה המקורית.
- נכתוב את כל נקודות הקיצון באופן מסודר כולל סוגן ואופיין הגרפי. למשל $Max(-1,3)$ שפיץ.

3. תחומי עלייה וירידה: כתיבה של התחומים לפי הסעיף הקודם.

4. נקודות פיתול:

מציאת נקודות חשודות כפיתול:

- נגזור את הפונקציה פעם שנייה.
- $f''(x)=0$
- נקודות אי גזירות: נקודות בהן הפונקציה מוגדרת ורציפה והנגזרת השנייה לא

נפסול פתרונות שאינם בתחום ההגדרה

בניית טבלה:

- נציב בטבלה את כל הנקודות החשודות כפיתול שמצאנו, ואת הנקודות הבעייתיות מתחום ההגדרה.
- נבחר מכל תחום ערך x כרצוננו ומציבים בנגזרת השנייה.
- אם $f''(x)>0$ הפונקציה קעורה כלפי מעלה (קמורה) בתחום. אם $f''(x)<0$ הפונקציה קעורה כלפי מטה (קעורה) בתחום.
- כל נקודה שבה יש מעבר מקמירות לקעירות ולהיפך היא נקודת פיתול (בתנאי שהפונקציה מוגדרת בה).
- נמצא את ערכי ה-y של נקודות הפיתול על ידי הצבה של ה-x בפונקציה הנתונה.
- נכתוב את כל נקודות הפיתול באופן מסודר.

5. תחומי קמירות וקעירות: כתיבה של התחומים לפי הסעיף הקודם.

6. נקודות חיתוך עם הצירים:

- למציאת נקודת חיתוך עם ציר ה-y, נציב x=0.
- למציאת נקודת חיתוך עם ציר ה-x, נציב y=0.

(הערה: לא תמיד יש חיתוך עם הצירים)

7. אסימפטוטות:

א. אסימפטוטה אנכית (ישר מהצורה $x=c$)

- נובעת מתחום ההגדרה (c היא נקודה שבה הפונקציה לא מוגדרת)
- נבדוק את התנהגות הפונקציה בקרבתה ע"י חישוב הגבולות החד צדדיים: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.
- אם אחד מהצדדים אינסופי ($\pm\infty$) אז קיימת אסימפטוטה אנכית בנקודה זו ומשוואתה: $x=c$.
- אם נקבל תשובה מספרית אז בנקודה הזו קיים "חור" בגובה של הערך המספרי שקיבלנו.

(הערה: בכל מצב נבדוק את התנהגות הפונקציה בשני הצדדים בשביל השרטוט)

ב. אסימפטוטה אופקית (ישר מהצורה $y=b$):

- נבדוק את התנהגות הפונקציה כאשר היא שואפת ל- ∞ ול- $-\infty$: $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

  (מציאת אסימפטוטה אופקית לכל צד היא בנפרד אלא אם הפונקציה רציונלית).
- אם הגבול אינסופי, אין אסימפטוטה אופקית.
- אם הגבול מספרי (b כלשהו), אז קיימת אסימפטוטה אופקית ומשוואתה y=b.

8. שרטוט

- נשרטט את האסימפטוטות (אם קיימות).
- נשרטט את נקודות החיתוך עם הצירים, נקודות הקיצון והפיתול (אם קיימות).
- לפי תחומי העליה והירידה, ולפי תחומי הקמירות והקעירות נחבר בין הנקודות משמאל לימין ונמשוך לכיוון האסימפטוטות (נתייחס למה שקיבלנו בסעיף האסימפטוטות להבנת התמונה).