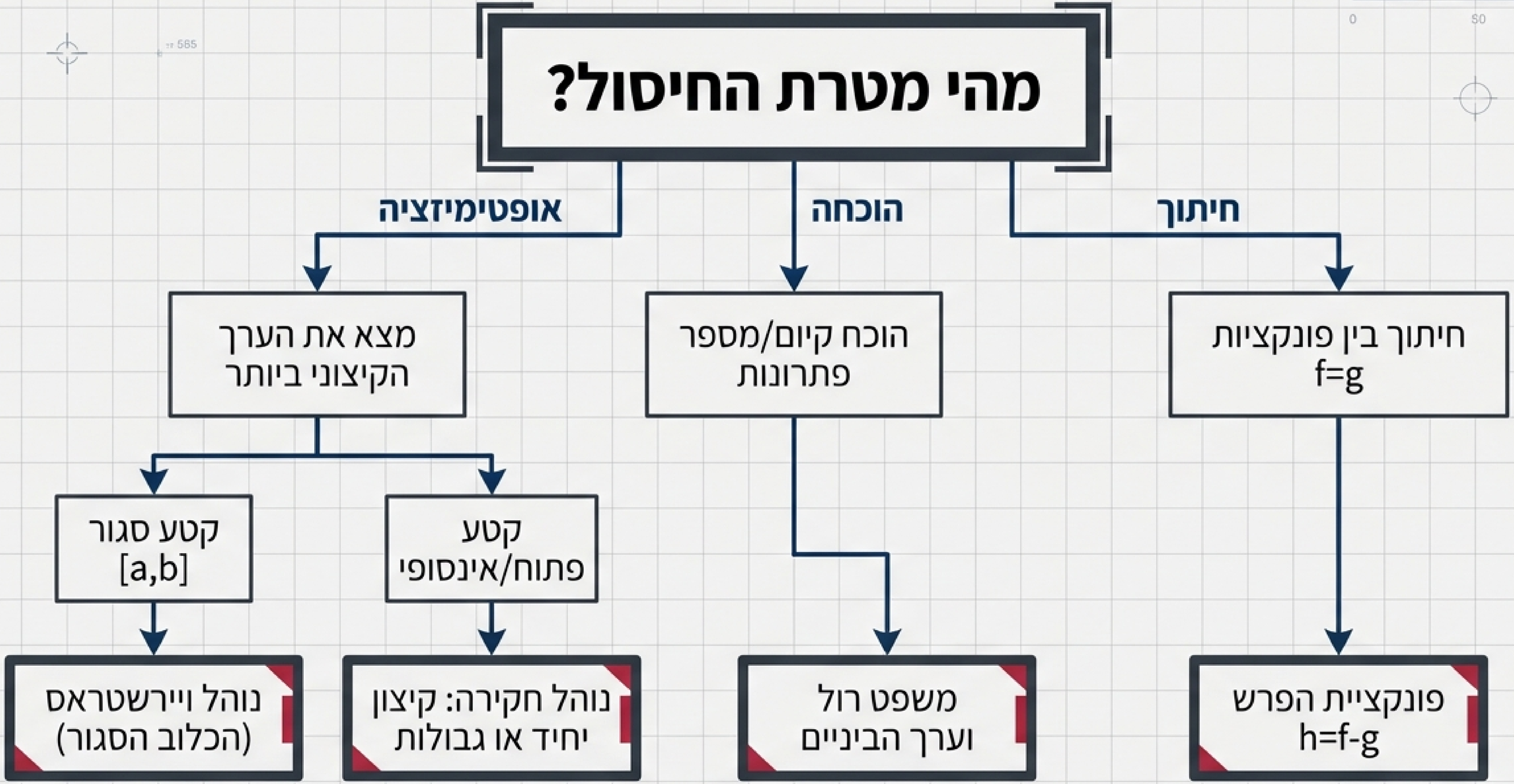
09_קובץ 8 רול, קיצון מוחלט

פרוטוקול שליטה: מאופטימיזציה גלובלית ועד ציד שורשים

- **המשימה:** איתור אבסולוטי של נקודות קיצון והוכחת קיום פתרונות תחת אש.
- **הכלים:** משפט ויירשטראס, משפט רול, וניתוח פרמטרי.
- **הגישה:** אנליטית. צינית. מדויקת.
- **אזהרה:** זה לא שיעור חשבון, זה תדריך מבצעי. תהדקו חגורות.



לפני ששולפים נגזרת, בודקים את הזירה. בחירת כלי נכון חוסכת זמן ומונעת טעויות פטאליות.

זירה סגורה: נוהל ויירשטראס (הכלוב)

האלגוריתם המילולי

- **1. סגירת הזירה:** ויירשטראס מחייב רציפות וקטע סגור. אם יש חור ברשת, המשפט קורס.
- **2. איסוף מודיעין:** גוזרים ומשווים לאפס. הנגזרת היא המלשין.
- 3. **סלקציה אכזרית:** כל חשוד שמחוץ לתחום נמחק מיד.
- 4. **מסדר כבוד:** מעמידים בשורה את החשודים הפנימיים ואת נקודות נקודות הקצה. הערך הגבוה מנצח.

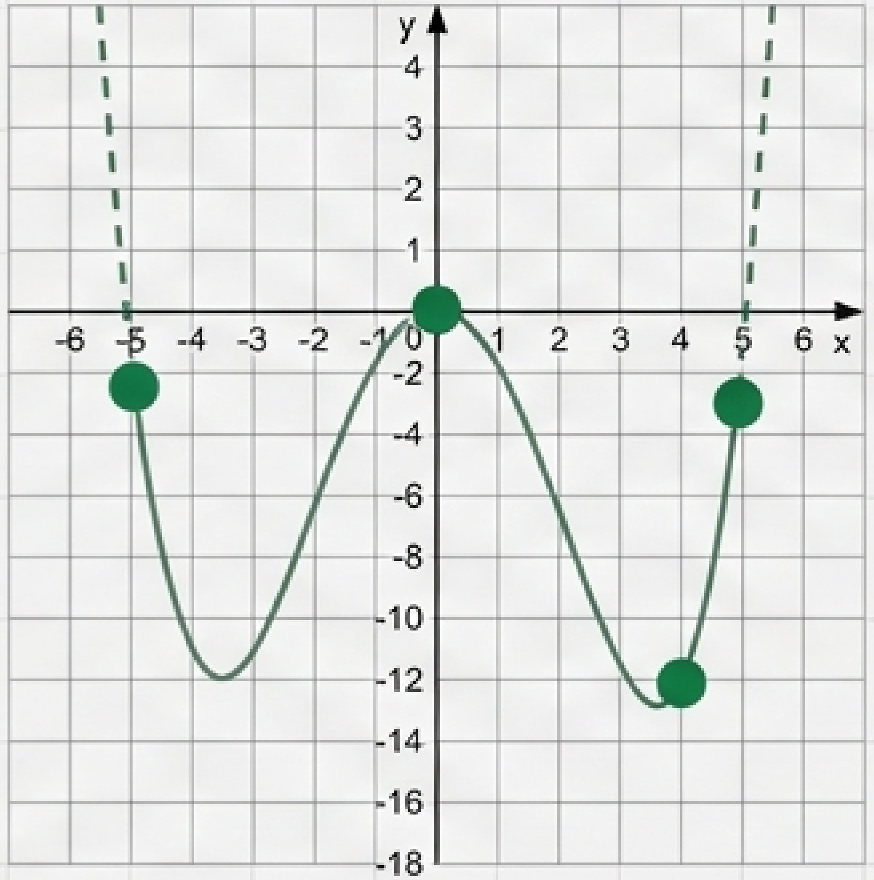
ביצוע מספרי

הפונקציה: $f(x) = 2x^4 - 36x^2$ בקטע [-1, 4]

הנגזרת: $f'(x) = 8x^3 - 72x = 8x(x^2 - 9)$

החשודים: x=0, x=-3 (-3 נפסל - מחוץ לתחום)

המסדר:



$f(-1) = -34$ (קצה)
$f(0) = 0$ (MAX)
$f(3) = -162$ (MIN)
$f(4) = -64$ (קצה)

השממה הפתוחה: קיצון מוחלט ללא קצוות

משפט ההר הבודד

- **הבעיה:** אין קירות (קצוות) להישען עליהם. אי אפשר להציב 'אינסוף'.
- **הטקטיקה:** אם בתחום פתוח מצאתם נקודת קיצון אחת ויחידה, היא הופכת אוטומטית לקיצון מוחלט.
- **הלוגיקה:** אם יש רק עמק אחד ואין שום הר אחר באופק, זהו המקום הכי נמוך בעולם.
- **אזהרה:** אם יש שתי נקודות קיצון? הכלל הכלל מתבטל. חובה לבדוק גבולות בטורו בקצוות.

דוגמה מספרית

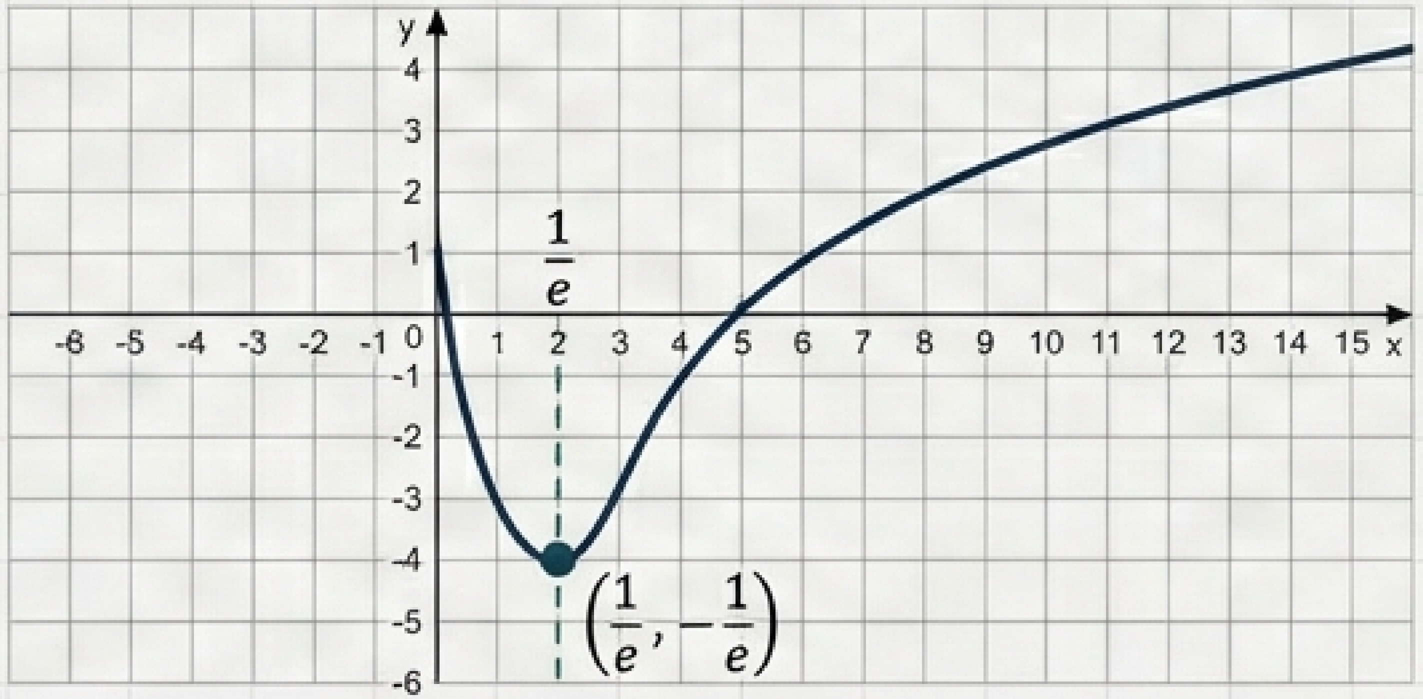
הפונקציה: $f(x) = x\ln x$ בתחום $x > 0$

הנגזרת: $f'(x) = \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$

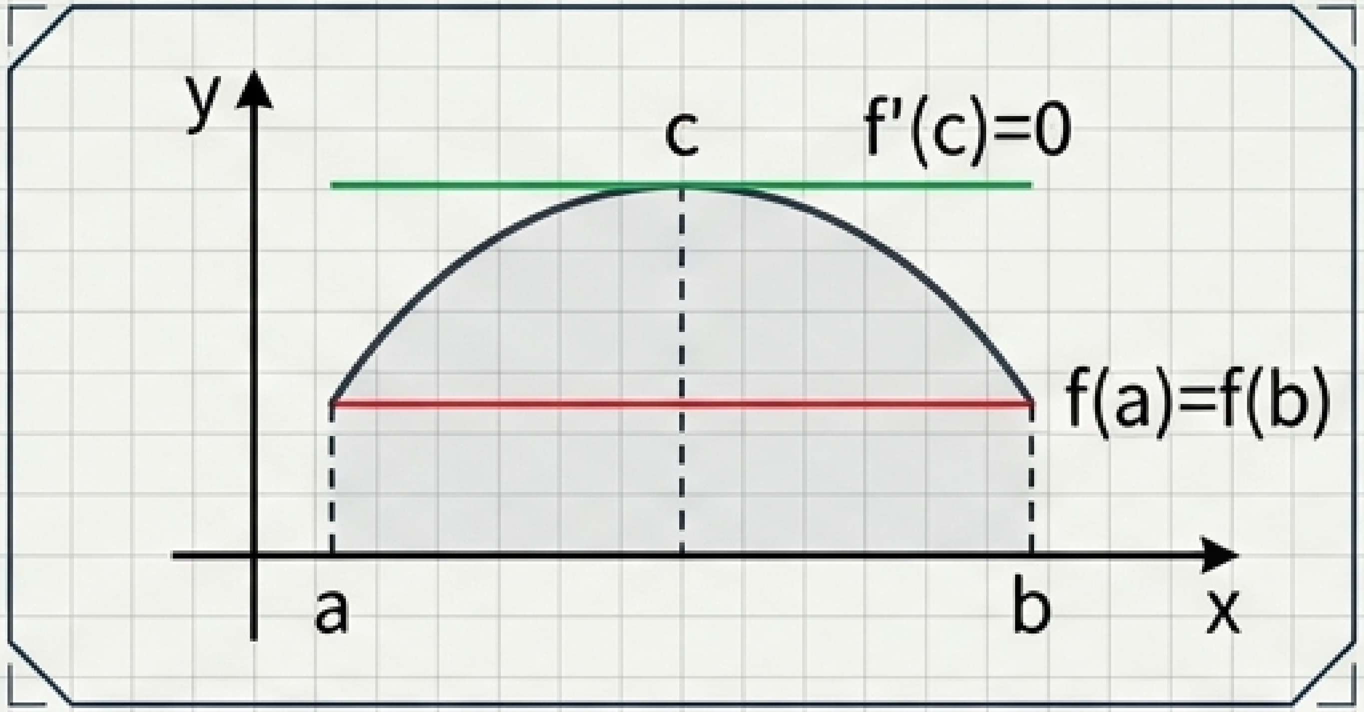
סיווג: נגזרת שנייה חיובית ← מינימום.

המסקנה: נקודת קיצון יחידה בתחום.

פסק דין: המינימום המקומי הוא מינימום מוחלט.



משפט רול: מלכודת המהירות



האנלוגיה: יצאתם מתל אביב (גובה 0), נסעתם לחרמון, וחזרתם לתל אביב (גובה 0). המיקום ההתחלתי והסופי זהה.
המסקנה: היה רגע אחד לפחות שבו המהירות האנכית שלכם הייתה אפס (רגע הסיבוב).

תנאי הסף להפעלת המלכודת

1. רציפות בקטע הסגור [a,b] (הכביש סלול).
2. גזירות בקטע הפתוח (a,b) (אין פניות חדות).
3. $f(a) = f(b)$ (חזרנו לאותו גובה).

✓ תוצאה: קיים c פנימי שבו הנגזרת מתאפסת.

ציד שורשים: הקשר המושתק בין f ל-f'

חוק השזירה

- **ההיגיון ההפוך:** רוצים לדעת כמה פעמים הנגזרת מתאפסת? תסתכלו על הפונקציה המקורית.
- **כלל האצבע:** שורשים של הפונקציה הם כמו עמודי גדר. בין כל שני עמודים, הכבל (הפונקציה) חייב לעשות 'בטן' כדי לחזור לאפס. בשיא הבטן הזו, הנגזרת היא אפס.
- **הנוסחה המנצחת:**

n שורשים לפונקציה ← לפחות n-1 שורשים לנגזרת.

ביצוע מספרי

- הפונקציה: $f(x) = (x^3 - 4x)(e^x - 2)$
- **שורשים** (איפוס):

$$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x = 0, \pm 2$$
$$e^x - 2 = 0 \rightarrow x = \ln 2$$

- **ספירה:** סה"כ 4 שורשים לפונקציה f.
- **המסקנה:** בין כל שני שורשים, הנגזרת מתאפסת.
- **תוצאה:** לנגזרת f′ יש לפחות 3 שורשים.

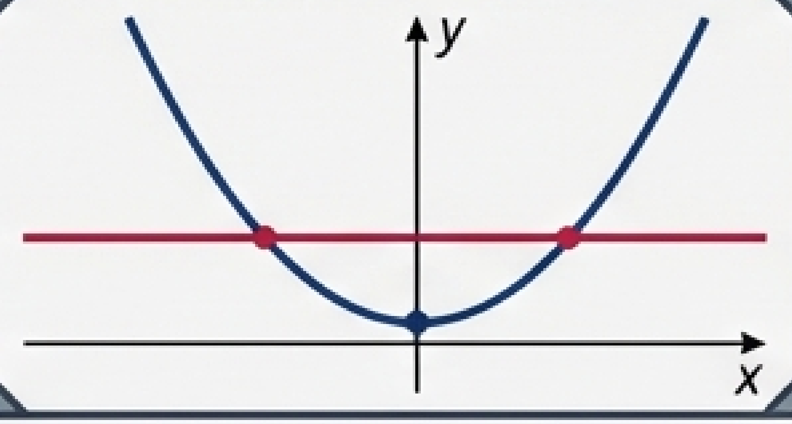
הנדסה לאחור: לוחמה פרמטרית

שאלה: כמה פתרונות יש למשוואה $e^{2x} = 2x + m$?

1. בידוד המטרה (Reframe)
מעבירים הכל לצד אחד ומגדירים פונקציה חדשה:
$$f(x) = e^{2x} - 2x - m$$

2. חקירה (Investigate)
גוזרים ומשווים לאפס:
$$f'(x) = 2e^{2x} - 2 = 0 \rightarrow x = 0$$
בדיקת סוג: מינימום.

3. ההיקש הגיאומטרי
פונקציה עם מינימום יחיד נראית כמו "קערה" (פרבולה).
קערה יכולה לחתוך את ציר ה-X לכל היותר פעמיים.

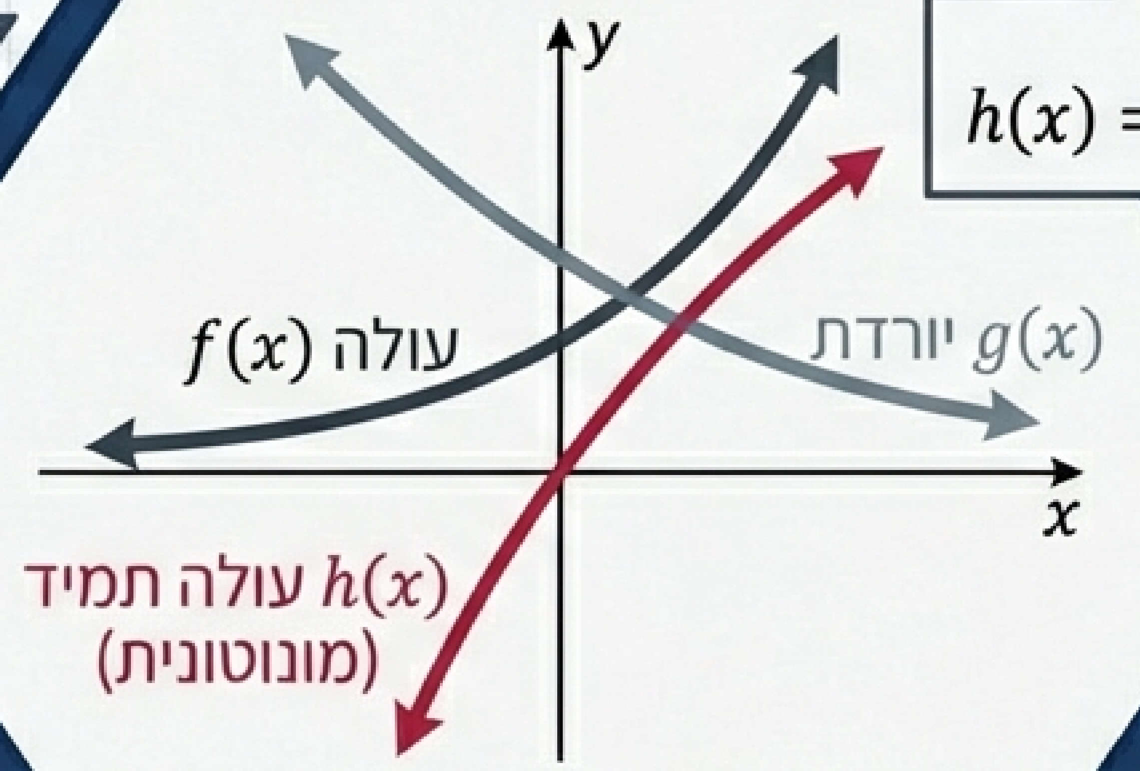


מסקנה: למשוואה המקורית יש לכל היותר 2 פתרונות.

דו-קרב פונקציות: טכניקת ההפרש

האתגר: האם $f(x)$ ו-$g(x)$ נחתכות?

הפתרון: לא פותרים משוואה.
בונים פונקציית עזר $h(x) = f(x) - g(x)$



הלוגיקה הבלתי מנוצחת:

1. **מונוטוניות**: פונקציה עולה פחות פונקציה יורדת = פונקציה שעולה חזק יותר.
2. **חד–חד–ערכיות**: פונקציה שעולה תמיד יכולה לחתוך את הציר רק פעם אחת.
3. **משפט ערך הביניים** (IVT): מוצאים נקודה חיובית ונקודה שלילית כדי לוודא שהחיתוך אכן קרה.

מסקנה: אם יש חיתוך, הוא יחיד.

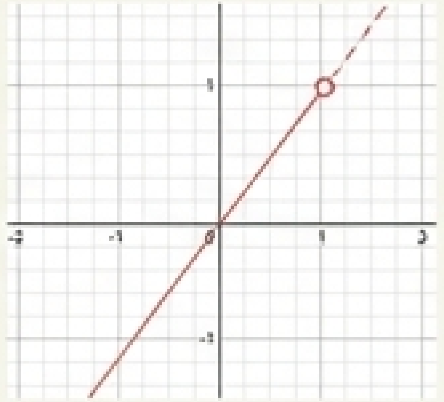
אור אדום: מוקשים ומלכודות נפוצות

הכלוב השבור (The Broken Cage)

התרחיש: פונקציה עם אי-רציפות (למשל $1/x$).

הטעות: הפעלת משפט ויניי ויירשטראס או רול.

התיקון: רציפות היא תנאי סף. אם יש חור בגרף, אין משפט.



המסתנן (Illegal Immigrant)

התרחיש: פונקציות לוגריתמיות או שורשים.

הטעות: מציאת קיצון ב-x שלילי כשהתחום הוא $x>0$.

התיקון: תחום ההגדרה הוא השומר בכניסה. מי שלא ברשימה – לא נכנס.

קצה הרפאים (Ghost Endpoint)

התרחיש: שאלה בקטע סגור [a,b]

הטעות: התלמיד מוצא קיצון פנימי ושוכח להציב את הקצוות.

התיקון: הקצוות הם חשודים מיידיים. השאירו אותם מחוץ לטבלה? נכשלתם.

ארגז הכלים האולטימטיבי: סיכום מנהלים

הסיטואציה	הטריגר הוויזואלי	הנשק המתמטי	כלל הזהב
קיצון מוחלט בקטע סגור	סוגריים מרובעים $[a,b]$	משפט ויירשטראס	הצבת נגזרת + הצבת קצוות.
קיצון מוחלט בקטע פתוח	תחום $x>0$ או $\mathbb{R}$	חקירה (טבלה/נגזרת שנייה)	קיצון יחיד = קיצון מוחלט.
הוכחת מספר פתרונות	"הוכח כי למשוואה..."	משפט רול / מונוטוניות	בין n שורשים יש n-1 קיצונים.
חיתוך בין פונקציות	$f(x) = g(x)$	פונקציית הפרש h=f-g	חפשו מונוטוניות ושינוי סימן.

מבחן פתע: בדיקת ערנות

כרטיס 3

Q: האם מקסימום מוחלט חייב להיות גם מקסימום מקומי?

A: לא! הוא יכול להיות נקודת קצה. קצה הוא לא 'גבעה', הוא גבול המפה.

כרטיס 2

Q: אם $f'(x) > 0$ לכל x, כמה שורשים יכולים להיות ל-$f(x)$?

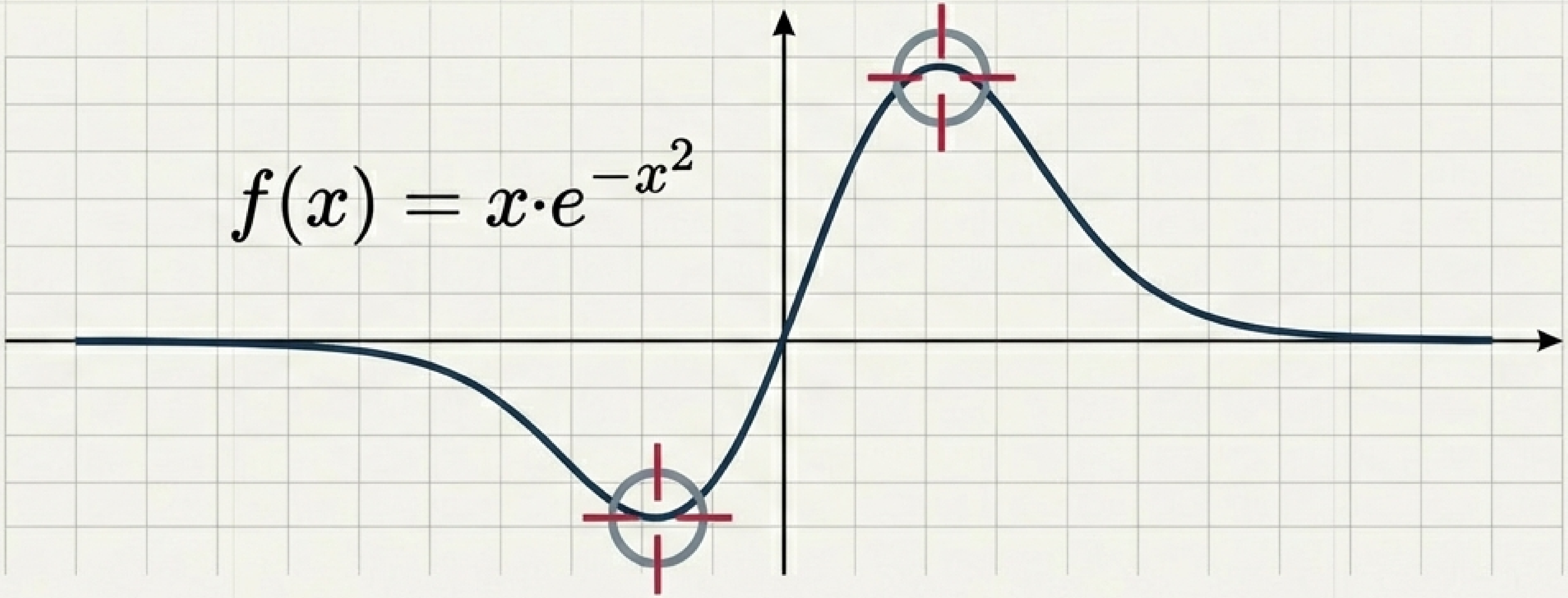
A: רק אחד (או אפס). זה כביש חד-סטרי, אי אפשר לחתוך פעמיים בלי לרדת.

כרטיס 1

Q: מדוע אי אפשר להשתמש בשיטת "הקטע הסגור" עבור $y=1/x$ בקטע [-1,1]?

A: אי-רציפות ב-x=0. הכלוב פרוץ. ויירשטראס לא עובד.

פקודה אחרונה



מתמטיקה היא לא משחק של ניחושים, היא משחק של הגדרות.
תשלטו בתחום ההגדרה, תכבדו את הקצוות, ואל תתנו לפרמטרים להפחיד אתכם.
הדף הוא שדה הקרב שלכם. צאו וטרפו אותו.