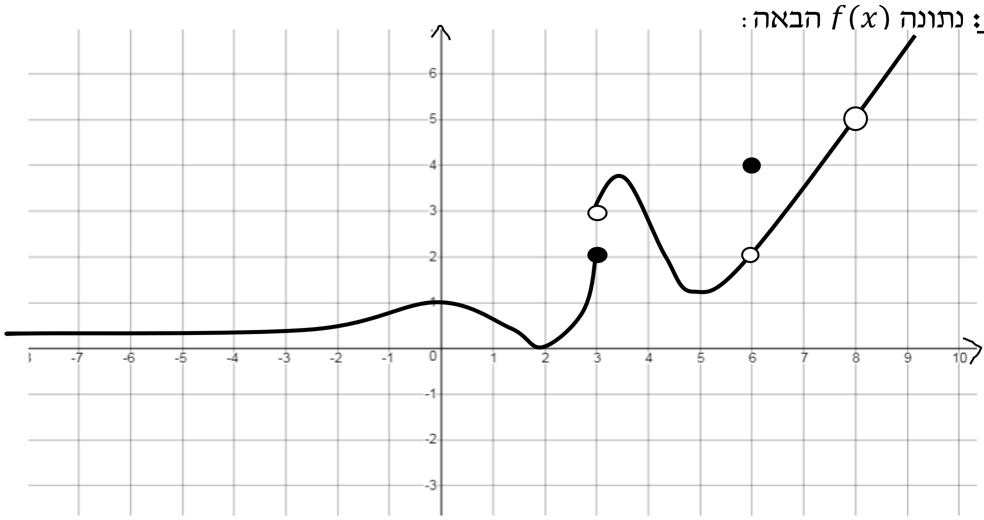
# גבול של פונקציה

**גבול של פונקציה בנקודה (הסבר לא פורמלי)-** L גבול של פונקציה f בנקודה $x_0$, אם כאשר x הולך ומתקרב ל-$x_0$ ערך הפונקציה $f(x)$ מתקרב ל-L. סימון: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

**גבול חד צדדי-** אם כאשר x הולך ומתקרב ל-$x_0$ מימין/משמאל ערך הפונקציה $f(x)$ מתקרב ל-L. סימון: **גבול מימין-** $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ , **גבול משמאל-** $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

**גבול בנקודה $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ קיים אם"ם הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים!**

**דוגמה:** נתונה $f(x)$ הבאה:




| | ערך בנקודה $f(c)$ | גבול מימין $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ | גבול משמאל $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ | הגבול בנקודה $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $c=0$ | | | | |
| $c=3$ | | | | |
| $c=6$ | | | | |
| $c=8$ | | | | |

**הערות חשובות:**

- $f$ לא חייבת להיות מוגדרת בנקודת הגבול . כן חייבת להיות מוגדרת בסביבה מנוקבת שלה. (עבור גבול מימין/משמאל, $f$ מוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית של $x_0$ בהתאמה).
- כש-$f$ מוגדרת בנקודת הגבול, הגבול לא תלוי בערך הפונקציה.

**גבול של פונקציה באינסוף-** ערך אליו מתקרבת הפונקציה כאשר x גדל/קטן בלי הגבלה.

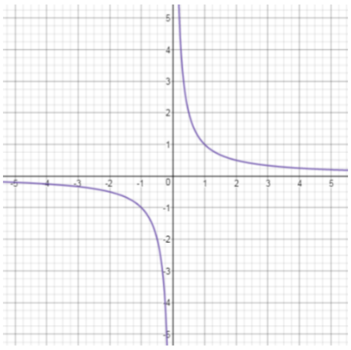
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$

**אסימפטוטה-** תופעה של "התקרבות של גרף הפונקציה" לאיזשהו ישר.

כאשר קיים גבול סופי L ב- ∞ או ב- -∞ קיימת **אסימפטוטה אופקית y=L** (לכל היותר 2)

במקרה שלעיל :

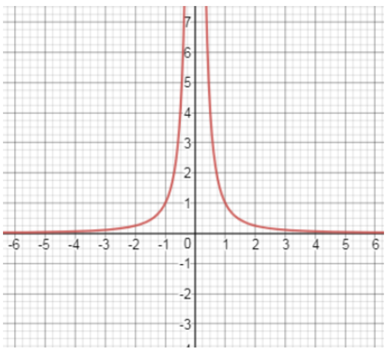
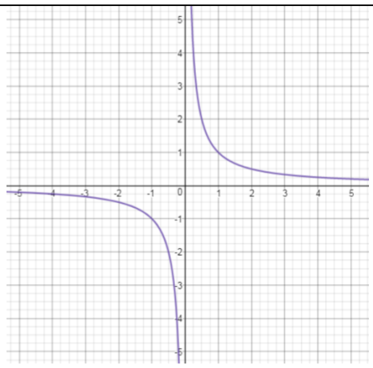
**דוגמאות:**

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=$ <br> $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=$ |  |

**גבול אינסופי בנקודה-** כשקיים גבול אינסופי מימין ו/או משמאל בנקודה $x_0$, קיימת

**אסימפטוטה אנכית $x=x_0$**.

**דוגמאות:**

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=$ |  |
| $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=$ <br> $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=$ |  |

# כללים ותכונות בחישוב גבולות

- **יחידות הגבול -** תהי $f(x)$ פונקציה. אם קיים הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ אז הוא יחיד.
- תהי f פונקציה **אלמנטרית המוגדרת בנקודה** $x_0$ , אזי $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

**דוגמאות:**

- $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-1}{3x+2} =$
- $\lim_{x\to e}(2\ln x) =$

- **אריתמטיקה של גבולות (סופיים) -**

תהינה $f(x), g(x)$ פונקציות. אם קיימים הגבולות (הסופיים) $\lim_{x\to a} g(x)$ , $\lim_{x\to a} f(x)$ אז:

**1.** $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

מקרה פרטי

**2.** $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$ , $\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$ , $c\in\mathbb{R}$

**3.** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ , $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

**4.** $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a}(g(x))\right)$ כלל הרכבה לגבולות

בתנאי שהביטויים מוגדרים

**דוגמה:**

- $\lim_{x\to 1}(2x+3) \overset{(1)}{\underset{\text{סכום}}{=}} \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 3 \overset{(2)}{\underset{\text{כפל בקבוע}}{=}} 2\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 3$

הכללים תקפים גם עבור גבולות באינסוף (כאשר $x\to\pm\infty$) ועבור גבולות אינסופיים בנקודה

למעט מצבים "בעייתיים" כגון: $"\frac{0}{0}"$ , $"\frac{\infty}{\infty}"$ , $"0\cdot\infty"$ , $"\infty-\infty"$

- ## <u>מצבי אי וודאות בחישוב גבולות -</u>

**<u>(לאינטואיציה בלבד!! זו לא כתיבה פורמלית!!)</u>**

| תוצאה ידועה | מצבי אי וודאות ("בעייתיים") |
|---|---|
| **<u>חיבור</u>**<br>$\infty+\infty=\infty$<br>$\infty+L=\infty$<br>$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ | **<u>חיסור</u>**<br>$\infty-\infty$ |
| **<u>מכפלה</u>**<br>$\infty\cdot\infty=\infty$<br>$\infty\cdot L=\begin{cases}\infty & ,L>0\\ -\infty & ,L<0\end{cases}$ | $\pm\infty\cdot 0$ |
| **<u>חזקות</u>**<br>$a^{\infty}=\begin{cases}\infty & a>1\\ 0 & 0<a<1\end{cases}$<br>$a^{-\infty}=\begin{cases}0 & a>1\\ \infty & 0<a<1\end{cases}$<br>$\infty^{\infty}=\infty \quad \sqrt{\infty}=\infty$<br>$\infty^{L}=\begin{cases}\infty & ,L>0\\ 0 & ,L<0\end{cases}$<br>$0^{\infty}=0$ | $1^{\pm\infty}$<br>$\infty^{0}$<br>$0^{0}$ |
| **<u>חילוק</u>**<br>$\frac{\pm\infty}{L}=\begin{cases}\pm\infty & ,L>0\\ \mp\infty & ,L<0\end{cases}$<br>$\frac{L}{\pm\infty}=0$<br>$\begin{cases}\frac{L}{0^{+}}=\infty & ,L>0\\ \frac{L}{0^{-}}=-\infty & ,L>0\end{cases}$ | $\frac{\pm\infty}{0}$<br>$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$<br>$\frac{L}{0}$<br>$\frac{0}{0}$ |

**L* גבול סופי**

למשל

א. $e^{\infty}$

ב. $2^{1/0^-}$

ג. $\frac{1}{e^{1/0^+}-1}$

ד. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}$

ה. $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}}{\left(\frac{9}{5}\right)^{-\infty}}$

# כיצד נחשב גבול?

נתחיל בהצבה.

אם **הגבול "בעייתי"**, כלומר לא ניתן לומר מה התוצאה, נפעיל שיטות טיפול.

נעבור על סוגי הביטויים הבעייתיים ונלמד **שיטות טיפול** מתאימות.

בפתרון ניעזר בחוקי חזקות

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

# טיפול בגבולות "בעייתיים"

## 1. גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$"

- פירוק לגורמים וצמצום
- הרחבה בצמוד לפי נוסחה $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
- כלל לופיטל (נלמד בהמשך)

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=$

פתרון: פירוק לגורמים

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)}{(x+3)}=\frac{5}{6}$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=$

- פתרון: הרחבה בצמוד

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{1}=4$$

3. $\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{3x-8}}{x^2-16}=$

- פתרון: הרחבה בצמוד

$$\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{3x-8}}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{3x-8}}{x^2-16}\,\frac{(2+\sqrt{3x-8})}{(2+\sqrt{3x-8})}=$$

$$\lim_{x\to4}\frac{4-(3x-8)}{(x+4)(x-4)(2+\sqrt{3x-8})}=\lim_{x\to4}\frac{12-3x}{(x+4)(x-4)(2+\sqrt{3x-8})}=$$

$$\lim_{x\to4}\frac{-3(x-4)}{(x+4)(x-4)(2+\sqrt{3x-8})}=-\frac{3}{32}$$

4. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}}{x^2+x-6}=$

- פתרון: הרחבה בצמוד

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}}{(x+3)(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-1-(2x-3)}{(x+3)(x-2)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3})}=\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{(x+3)(x-2)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3})}$$

$$=-\frac{1}{10}$$

## 2. גבול מהצורה $''\pm\frac{\infty}{\infty}''$

- הוצאת גורמים דומיננטיים (או חלוקת המונה והמכנה בגורם דומיננטי של מונה/מכנה)

  גורם דומיננטי הוא הגורם ששואף הכי מהר ל $\infty$

  $$\sqrt{x}, x, x^2,,,,,,,,,,,x^{100},,,,,,,,,,2^x, e^x, 3^x, 4^x,,,,,,,,,,,,,,,,,,x^x$$

  יותר ימינה יותר דומיננטי

- כלל לופיטל (נלמד בהמשך)

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{2x^2+9}=$

פתרון:

נוציא גורם דומיננטי של מונה מהמונה ושל מחנה מהמכנה

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{2x^2+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{9}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{2+\frac{9}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{2x^3+9}=$

פתרון:

נוציא גורם דומיננטי של מונה מהמונה ושל מחנה מהמכנה

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{2x^3+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^3\left(2+\frac{9}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{x(2+\frac{9}{x^3})}=0$$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x+6}{2x^2+9}=$

פתרון :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x+6}{2x^3+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{9}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{2+\frac{9}{x^2}}=\infty$$

**גבול באינסוף של פונקציה רציונלית (מנת פולינומים):**

- אם deg מונה<deg מכנה, 0
- אם deg מונה>deg מכנה, $\pm\infty$
- אם deg מונה=deg מכנה, מנת המקדמים המובילים

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x+5^x}{3^x-4^x}=$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x+5^x}{3^x-4^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\left(\frac{1}{5^x}+\frac{2^x}{5^x}+1\right)}{4^x\left(\frac{3^x}{4^x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x\frac{\left(\frac{1}{5^x}+\frac{2^x}{5^x}+1\right)}{\left(\frac{3^x}{4^x}-1\right)}=$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\cdot+2\cdot6^{2x}+5^{-x}}{4^{3x+1}+2^{x}-1}=$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\cdot2^{3x}+2^{x}+1}{3^{2x}+3^{x}-1}=$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=$

פתרון:

לפי כלל הרכבה לגבולות $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f\left(\lim\limits_{x\to a}(g(x)\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}\right)=ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}\right)=\ln\frac{1}{2}$$

## 3. גבול מהצורה "$\infty - \infty$"

- הוצאת גורם דומיננטי או משותף
- הרחבה בצמוד

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x - x^3) =$

פתרון:

$$\lim_{x \to -\infty} (4x - x^3) = \lim_{x \to -\infty} x(4 - x^2) = \infty$$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{2x+3} - 3 \cdot 6^{x+4}) =$

14. $\lim\limits_{x \to \infty} (2^x + 5 \cdot 3^x - 4^{x-1}) =$

פתרון

$$\lim_{x \to \infty} (2^x + 5 \cdot 3^x - 4^{x-1}) = \lim_{x \to \infty} \left(2^x + 5 \cdot 3^x - \frac{1}{4} 4^x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} 4^x \left(\frac{2^x}{4^x} + 5\frac{3^x}{4^x} - \frac{1}{4}\right) = \lim_{x \to \infty} 4^x \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + 5\left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{1}{4}\right) = -\infty$$

15. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)=$

פתרון :

נכפול בצמוד

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}+x\right)}=$$

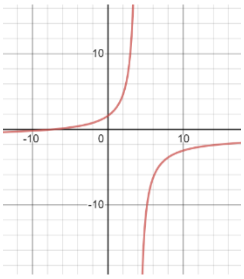
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3-x^2}{\sqrt{x^2-3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{x^2-3}+x}=0$$

16. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=$

## 4. גבול מהצורה $''\frac{a}{0}''$ $(a \neq 0)$

פיצול לגבולות חד צדדיים

17. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+7}{4-x} =$




פתרון:

נפצל לגבולות חד צדדיים

ימין

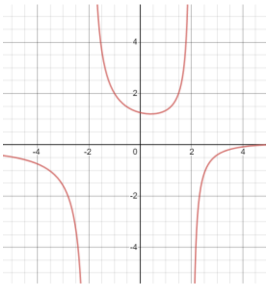
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x+7}{4-x} = -\infty$$

שמאל

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x+7}{4-x} = \infty$$

גבול לא קיים

18. $\lim_{x \to 2} \frac{x-5}{x^2-4} =$




פתרון :

ימין

19. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-5}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-5}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

שמאל

20. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x-5}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-5}{(x+2)(x-2)} = \infty$

גבול לא קיים

21.

22.

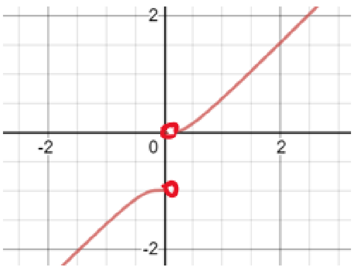
23. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-5}{(x-1)^2} =$


פתרון

כאן אין חובה לפצל מכיוון שהמכנה חיובי

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-5}{(x-1)^2} \overset{\frac{-4}{0^{+}}}{=} -\infty$$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1} =$



- בחישוב **גבול "בעייתי" מהצורה שבר פחות שבר, מעבר למכנה משותף** עשוי לעזור.

25. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=$

פתרון:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{(x+3)(x-3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3\ -\ 6}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{6}$$

**פותרים לבד אם יש זמן אז בכיתה**

i. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2x-2}-\frac{6}{\sqrt{x}-1}\right)$

ii. $\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot 6^x-3^{2x}}{2^{4x}+5\cdot 3^{2x}}=$

iii. $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x^2+x+7}}{x^2-4}$

iv. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4^x+1}-2^x\right)$

## 5. גבול מהצורה "$1^{\pm\infty}$"

- גבול אוילר : $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ , $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
- שימוש ב"אילן" (נלמד בהמשך עם לופיטל)

נחשב את הביטוי $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

על ידי הצבה של ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,$x=10,100,1000,10,000$

| x | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | | | → | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | | | | → | e |

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}=e$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=e$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=e$

4. $\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2x}\overset{2^{\infty}=\infty}{=}\infty$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=$

פתרון

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{4}{3}}$$

6. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x}=$

7. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}=$

8. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x+1}{x-3}\right)^{x}=$

9. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt[3]{x}}=$

$$10.\ \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^3}} =$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1}\cdot\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(\left((1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)\right)^{\frac{1}{x}} =$$

נפצל

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left((1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\left((1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

גבול לא קיים

$$11.\ \lim_{x\to 0}(1+2|x|)^{\frac{1}{x}} =$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(1+2|x|)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+2|x|)^{\frac{1}{2|x|}\cdot\frac{2|x|}{1}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\left((1+2|x|)^{\frac{1}{2|x|}}\right)\right)^{\frac{2|x|}{x}} =$$

נפצל

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left((1+2|x|)^{\frac{1}{2|x|}}\right)\right)^{\frac{2|x|}{x}} = e^{1} = e \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\left((1+2|x|)^{\frac{1}{2|x|}}\right)\right)^{\frac{2|x|}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$$

גבול לא קיים

12. $\lim_{x\to 0}(1-4x)^{1/x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(1-4x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}(1+(-4x))^{\frac{1}{-4x}\cdot\frac{-4x}{1}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1+(-4x))^{\frac{1}{-4x}}\right)^{-4} = e^{-4}$$

## סיכום (ביניים) לטיפול בגבולות "בעייתיים"

**מציבים ומזהים סוג גבול:**

| "$\frac{0}{0}$" | "$\pm\frac{\infty}{\infty}$" | "$\infty-\infty$" | "$\frac{a}{0}$", $a\neq 0$ | "$1^{\pm\infty}$" |
|---|---|---|---|---|
| **פירוק, צמוד, (לופיטל)** | **דומיננטי (לופיטל)** | **דומיננטי, צמוד** | **חד צדדיים** | **אויילר,(אילן)** |

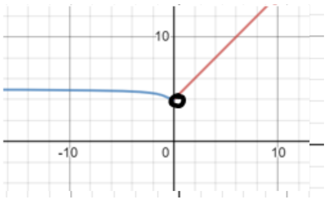
**מצבי אי וודאות נוספים אשר יטופלו בהמשך:** "$0\cdot\pm\infty$" "$\infty^0$" "$0^0$"

# גבול של פונקציה מפוצלת

כאשר צריך לחשב **גבול בנקודת תפר, נחשב את הגבולות החד צדדיים** (מימין ומשמאל).
אם הם שווים, יש גבול בנקודה, אחרת אין גבול בנקודה.

1. חשבו את הגבולות $\lim_{x\to 0} f(x)$ ו- $\lim_{x\to 1} f(x)$ כאשר:

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & x>0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$$



פתרון

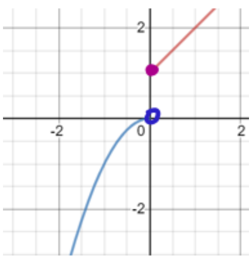
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+4)=5$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+4)=4 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(4+e^{\frac{1}{x}}\right)=4 \end{cases}$$

לכן $\lim_{x\to 0} f(x)=4$

2. חשבו את הגבולות $\lim_{x\to 0} f(x)$ ו- $\lim_{x\to 1} f(x)$ כאשר:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\ge 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}.$$



$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2) = 0 \end{cases}$$

לכן $\lim_{x\to 0} f(x)$ אינו קיים

3. א. מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם $\lim_{x\to 1} f(x)$ קיים.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} & x<1 \\ \dfrac{x+1-\sqrt{x^2+3}}{x-1} & x>1 \end{cases}$$

ב. חשבו את $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

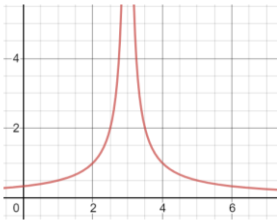
# גבול עם ערך מוחלט

**כזכור** $$|A| = \begin{cases} A & A \geq 0 \\ -A & A < 0 \end{cases}$$

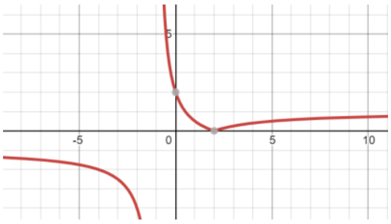
**כשיש צורך להסיר ערך מוחלט** על מנת "לטפל" בגבול בעייתי,
**והתוכן של הערך המוחלט שואף ל-0, נחשב גבולות חד צדדיים.**

<u>דוגמאות שבהן אין צורך להסיר את הערך המוחלט:</u>

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{|x-3|} =$$



$$\lim_{x\to 5}\frac{|x-2|}{x+1} =$$



<u>דוגמאות שבהן יש צורך להסיר את הערך המוחלט:</u>

13. $\lim_{x\to 2}\frac{|2x-1|-3}{x-2}$

פתרון

$$\lim_{x\to 2}\frac{|2x-1|-3}{x-2} \overset{"\frac{0}{0}"\,|+|}{=} \lim_{x\to 2}\frac{2x-1-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

14. $\lim_{x\to \infty}\frac{x+2|1-x|}{2x-|3+x|}$

פתרון

15. $\lim_{x\to \infty}\frac{x+2|1-x|}{2x-|3+x|} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"\,|-|}{=} \lim_{x\to \infty}\frac{x-2(1-x)}{2x-(3+x)} = \lim_{x\to \infty}\frac{3x-2}{x-3} = \lim_{x\to \infty}\frac{3-2/x}{1-3/x} = 3$

16.

דוגמאות שבהן יש צורך להסיר את הערך המוחלט ולחשב גבולות חד צדדיים :

17. $\lim\limits_{x\to4}\frac{|x-4|}{x^2-16}$

פתרון

$$\lim_{x\to4}\frac{|x-4|}{x^2-16}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}|0|}{=}\begin{cases}|+|\ \lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x-4}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{8}\\ |-|\ \lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{-(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{-1}{x+4}=-\dfrac{1}{8}\end{cases}$$

אין גבול

18. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{|x-1|}-\frac{2}{1-x^2}\right)\overset{\text{"}\infty-\frac{1}{0}\text{"}}{=}$

פתרון

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{|x-1|}-\frac{2}{1-x^2}\right)=$$

$|0|$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)\overset{\frac{1}{0^+}-\frac{2}{0^-}=\infty-(-\infty)}{=}\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)\overset{\text{"}\frac{1}{0^+}-\frac{2}{0^+}\text{"}=\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1+x-2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

כשגבול "בעייתי" מסוג שבר פחות שבר כדאי לעבור למכנה משותף

אין גבול

## סיכום- מתי נפצל גבול לגבולות חד צדדיים?

1. גבול מהצורה "$\frac{a}{0}$", $a \neq 0$
2. גבול בנקודת תפר של פונקציה מפוצלת.
3. גבול "בעייתי", כשיש צורך להסיר ערך מוחלט והתוכן של הערך המוחלט שואף ל-0.

**אם יש זמן פותרים לבד**

חשבו

19. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x-2+|1-x|} =$

20. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x+|x-2|}{|2x-2|+|1-x|} =$

21. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 3x)^{1/|x|}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(7^{2+x} - 5 \cdot 3^{2x-1} - 16^{\frac{x+1}{x}}\right) =$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|1-2^x| - |3^x - 4^x|}{|1-2^{2x} - 3^x|} =$