

נושא 11 - חקירת פונקציה



1. מצא עבור הפונקציה $y = \frac{x}{(x^2-4)^2}$

א. תחום הגדרה
 $(x^2-4) \neq 0$
 $x^2 - 4 \neq 0$
 $x^2 \neq 4$
 $\sqrt{x^2} \neq \sqrt{4}$
 $|x| \neq \pm 2$

ב. נקודות חיתוך עם צירים

$x=0 : y=0$

$y=0 : (0,0)$

$\frac{x}{(x^2-4)^2} = 0$
 $x=0$
 $(0,0)$

$y = \frac{x}{(x^2-4)^2}$

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2-4)^2 - x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4)[(x^2-4) - 4x^2]}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4)(-3x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

$$y' = -\frac{(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

$y' \neq 0$
 $x \neq \pm 2$

ג. נקודות קיצון + תחומי עליה וירידה

הנראה מהרבה גורמים

① ס. זרילים: ת.ג. מ.ת. $\exists x \in \mathbb{R} : y' < 0$
 $\exists x \in \mathbb{R} : y' > 0$

* נסוי איזור לא רציף ואנטרכטיקות לא נסויים

$$\boxed{f'} = -\frac{(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \quad : f'=0 \quad ②$$

$$-(3x^2+4) = 0$$

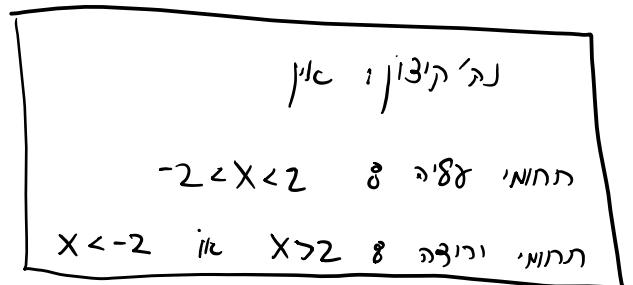
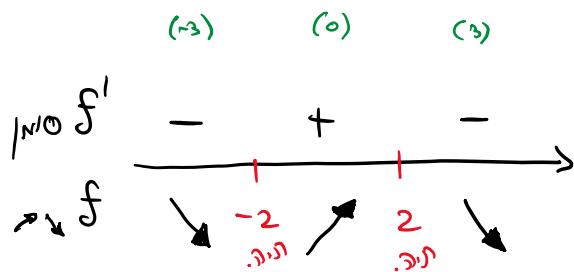
$$3x^2+4 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 &=& -4 \\ 0/+ & & - \end{array}$$

$x \notin$

אין תשומת גזען נאצ'ן!

לעוגן ג' נג רכינו פונקציה ? נג'ה + מינימום ג'ג'ג'



7. נקודות פיתול + תחומי קמירות וקעירות

$$y' = -\frac{(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = \frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3}$$

$$y'' = \frac{-6x(x^2-4)^3 - (-3x^2-4) \cdot 3(x^2+4) \cdot 2x}{((x^2-4)^3)^2}$$

$$= \frac{-6x(x^2-4)^3 + 6x(3x^2+4)(x^2-4)^2}{(x^2-4)^6}$$

$$= \frac{-6x(x^2-4)^2 [x^2-4-(3x^2+4)]}{(x^2-4)^6}$$

$$= \frac{-6x(-2x^2-8)}{(x^2-4)^4}$$

$$y'' = \frac{12x(x^2+4)}{(x^2-4)^4}$$

$y'' \text{ ג'ג'ג' } x \neq \pm 2$

נ/א נגיאת דיפרנציאליות

לפנינו פונקציית $y = \frac{12x(x^2+4)}{(x^2+4)^2}$ ורשותה $x \neq \pm 2$.
 ר' ג'.ג. ו' ג'.ג. ו' ג'.ג. ו' ג'.ג.

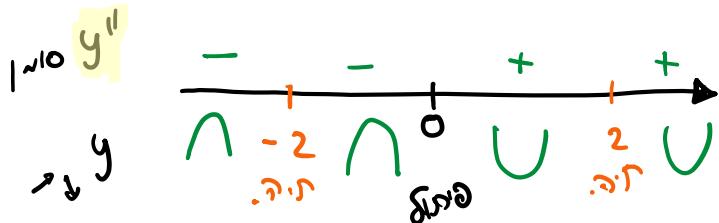
$$\frac{12x(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = 0 \quad : y'' = 0 \quad .2$$

$$12x(x^2+4) = 0$$

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ x=0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ x^2+4=0 \\ x^2=-4 \\ \begin{array}{c} \swarrow \\ 0/+ \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ - \end{array} \end{array}$$

∅

(-3) (-1) (1) (3)



: גדרה ג.ג. ג.ג. ג.ג. ג.ג.

העדרת $(0,0)$:

$$2 \neq x > 0$$

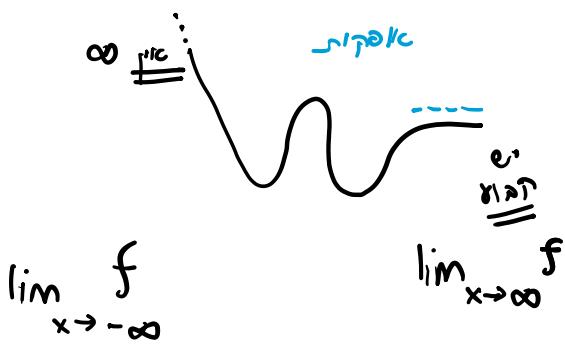
תחומי אדריכל:

$$-2 \neq x < 0$$

תחומי גזיה:

$$(0, \infty) \setminus \{2\}$$

$$(-\infty, 0) \setminus \{-2\}$$



ה. אסימפטוטות (אנכית ואופקית - אם יש)

המקרה האנכי
שלהי/יכפער מער
בנוסף לנקודות
ו/בנוסף לנקודות.
+∞ ו-∞

$$y = \frac{x}{(x^2-4)^2}$$

המקרה האופקי כב-ט בערך

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x^2-4)^2} = \frac{2}{0^+} = \infty$$



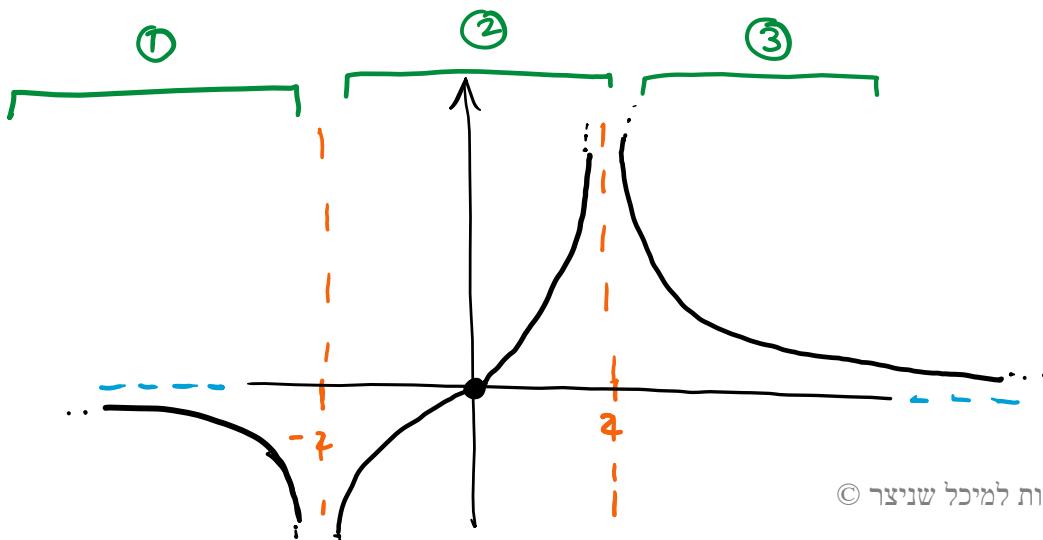
$x = \pm 2$ כואנאטם כלכון

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x^2-4)^2} \stackrel{\text{מג}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(x^2-4) \cdot 2x} \stackrel{\text{מג}}{=} 0 \quad \text{לפקי } y=0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x^2-4)^2} \stackrel{\text{מג}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(x^2-4) \cdot 2x} \stackrel{\text{מג}}{=} 0 \quad \text{לפקי } y=0$$



ו. שרטוט (סקיצה)

וְעַל־בָּשָׂר אֶת־

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 2x \quad \text{מזהה הפונקציה} .$$

א. תחום הגדרה

ב. נקודות חיתוך עם צירים

$$\boxed{(0,0)} \leftarrow f(0) = 0 - 0 = 0 \quad : x=0$$

$$\sqrt[3]{x^2} - 2x = 0 \quad : y=0$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 2x \quad /(\text{c})^3$$

$$x^2 = 8 x^3$$

$$O = 8x^3 - x^2$$

$$O = x^2(8x - y)$$

$$x=0 \quad x=\frac{1}{8}$$

$$x=0$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 2x = x^{\frac{2}{3}} - 2x$$

ג. נקודות קיצון + תחומי עליה וירידה

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 2 = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} - 2 = \boxed{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 2}$$

$$-2 + \text{תחום גליליה ויריזה}$$

$$\text{הנגזרת של } f(x) \text{ בנקודה } x=0 \text{ היא } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2 = 0 \quad : f' = 0 \quad ②$$

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} = 2$$

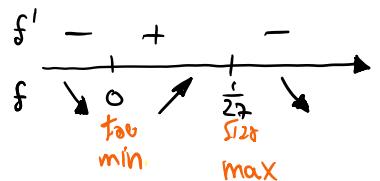
$$2 = 2 \cdot 3\sqrt[3]{x} \quad | :2$$

$$1 = \sqrt[3]{x}$$

$$\frac{1}{3} = \sqrt[3]{x} \quad /(\cdot)^3$$

$$\frac{1}{27} = x$$

$$\begin{array}{|c|} \hline f' & + \\ \hline f & \downarrow \\ \hline \end{array}$$



מינימום ומקסימום
f(0) = 0
 $f\left(\frac{1}{27}\right) = \dots = \frac{1}{27}$

$$(0 < x < \frac{1}{27})$$

$$\min(0, 6)$$

$$\max\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{24}\right)$$

$$(0, \frac{1}{27})$$

תוחמי גלגול:

$$(x < 0 \quad \text{או} \quad x > \frac{1}{27})$$

$$(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{27}, \infty)$$

מחסן ווילס:

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 2x$$

ד. נקודות פיתול + תחומי קמירות וקעירות

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 2$$

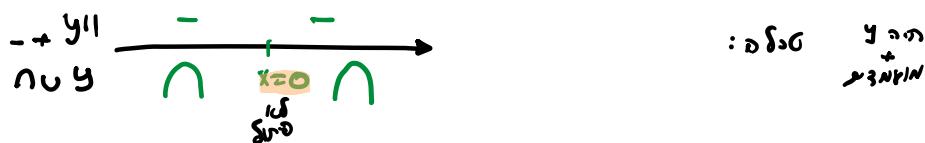
$$y'' = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}x^{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\boxed{x=0}$$

← x מזון: מינימום תוחמי גלגול: 1. מינימום

$x \neq 0 : y''$ תא

$$\text{ל}' \leftarrow \text{הנני} - 2 = 0 \quad : y''=0 \cdot 2$$



מינימום: $\frac{1}{27}$
ג. גלגול: $x^{\frac{4}{3}}$
 $x \neq 0 : \text{מינימום}$

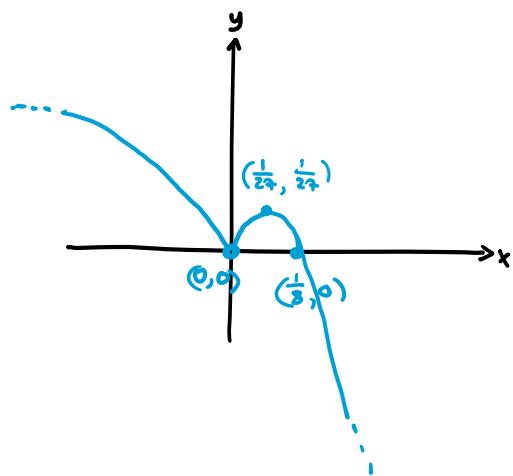
ה. אסימפטוטות (אם יש)

כד. תלכית: $\lim_{x \rightarrow \infty} x$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{2}{3}} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - 2 \right) = \boxed{-\infty} \rightarrow \text{תלכית כפולה}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} - 2x = \infty - \infty = \boxed{\infty} \rightarrow \text{תלכית כפולה}$$

ו. שרטוט (סקיצה)





3. מצא אסימפטוטות לפונקציה $y = \frac{x^3 - 3x^2}{9 - x^2}$ (עכשו תורכם לבד ☺)

נתונה פונקציה f המוגדרת ב- $x > 0$ ומקיימת $f(1)=1$ ו- $f'(x) = (x^2 + 3e^x) \cdot \ln x$

מזה כמה פתרונות למשואה

$$2 : \text{ } f(x) = 3 \cdot x$$

$$1 : f(x) = 1 . \text{ב}$$

$$0 : f(x)=0 \text{ . } \lambda$$

$$(x^2 + 3e^x) \cdot \ln x = 0$$

$$\begin{array}{l} \ln x = 0 \\ x = e^0 \\ \boxed{x=1} \end{array}$$

$$; f' = 0 \quad (2)$$

