# תרגול 6 – משפט ערך הביניים והגדרת הנגזרת

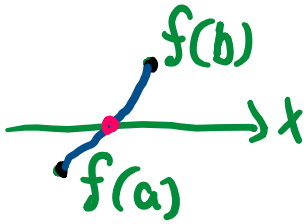
## משפט ערך הביניים

אם $f$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ $a \le x \le b$ ! $\overset{-}{f(a)} \cdot \overset{+}{f(b)} < 0$

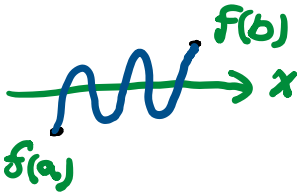
אז קיימת נקודה $c$ $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$

הפו' רציפה + פונקציה סימן

⇐ הפו' עוברת לפחות פעם אחת דרך אפס.




כלומר




מטרת המשפט?

כשנרצה לקבוע עבור משוואה מסויימת קיום של פתרון (לפחות אחד).

לפעמים פתרון המשוואה ארוך ומסורבל ואנו לא צריכים את הפתרון עצמו אלא רק לדעת אם הוא קיים

או שניתנת משוואה שאין לנו אמצעים אלגברים לפתור אותה.

שלבי הפתרון:

1. נייצר משוואה ונסדר אותה מול 0
2. נסמן את הפונקציה באות למשל f(x)
3. נבדוק רציפות של הפונקציה בקטע סגור ( את גודל הקטע נדע אחרי שנגלה את החלפות הסימן)
4. נמצא מעברי סימן. כמות מעברי הסימן תהיה בהתאמה לכמות הפתרונות המינימלית שרוצים להוכיח שקיימים.
5. ננסח את משפט ערך הביניים ונראה שתנאיו מתקיימים

כל הזכויות שמורות למיכל שניצר ©

## תרגילים:

1. הוכיחו כי למשוואה $x^3+10x^2-1=0$ יש לפחות 2 פתרונות ממשים.

$\Updownarrow$

" " לפי $f(x)=x^3+10x^2-1$ " " " חיתכים עם ציר x

f אלמנטרית וכן רציפה (לכל x) אז, ולכן תהיה רציפה בכל הקטע שנבחר.

מקרה סוגן 1

מקרה סוגן 2

$$\begin{cases} f(-1)=(-1)^3+10\cdot(-1)^2-1 = -1+10-1 = 8 \quad (+) \\ f(0)=0^3+10\cdot 0^2-1 = -1 \quad (-) \\ f(1)=1^3+10\cdot 1^2-1 = 10 \quad (+) \end{cases}$$

f רציפה ב $[-1,0]$ ! $f(-1)\cdot f(0)<0$ ולכן קיימת נק' $c_1$ כך ש $f(c_1)=0$

f רציפה ב $[0,1]$ ! $f(0)\cdot f(1)<0$ " " " $c_2$ " " $f(c_2)=0$

ולכן למשוואה $x^3+10x^2-1=0$ יש לפחות 2 פתרונות.

כל הזכויות שמורות למיכל שניצר ©

2. נמקו מדוע לפונקציות $y=10-2\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4x^2+5x+1}$ יש **לפחות נקודת חיתוך אחת.**

$\Updownarrow$

ר' ו למשוואה $\sqrt{4x^2+5x+1}=10-2\sqrt{x}$ יש לפחות פתרון אחד.

$$\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x}-10=0$$

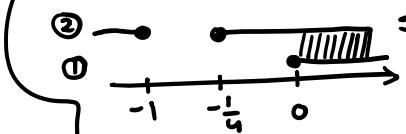
$$f(x)=\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x}-10$$

תנאי

① $x\geq 0$

② $4x^2+5x+1\geq 0$

$x\leq -1$ או $x\geq -\frac{1}{4}$




$\boxed{x\geq 0}$

* $f$ אלמנטרית ולכן רציפה בתחום ההגדרה $x\geq 0$.

ולכן רציפה בכל הקטע סגור שנבחר בתוש כזה.

מעבר סימן

$$\begin{cases} f(0)=\sqrt{4\cdot 0+5\cdot 0+1}+2\sqrt{0}-10=-9 \quad \ominus \\ f(10)=\sqrt{4\cdot 100+5\cdot 10+1}+2\sqrt{10}-10=\oplus \end{cases}$$

$f$ רציפה ב $[0,10]$ $\quad f(0)\cdot f(10)<0$ לכן קיימת נק' $0<c<10$

כך ש $f(c)=0$.

ולכן לפו' לפחות נק' חיתוך אחת!

כל הזכויות שמורות למיכל שניצר ©

**הגדרת הנגזרת**

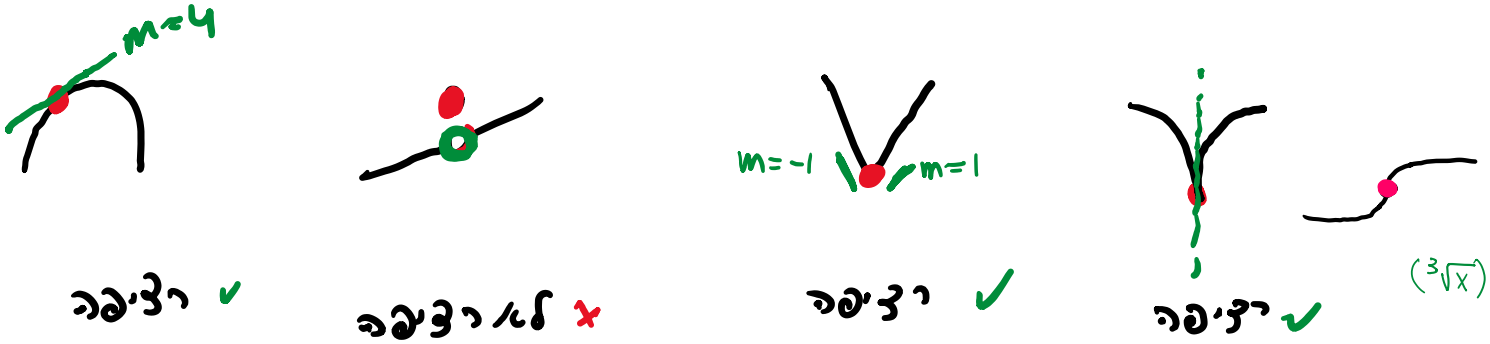
$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = "\frac{0}{0}"$$

**פונקציה היא גזירה בנקודה אם:**

**א. היא רציפה**

**ב. גבול הנגזרת סופי וקיים**

**דוגמאות גרפיות:**




✓ רציפה
✓ גבול נגזרת סופי וקיים.
⇓
גזירה

✗ לא רציפה
⇓
לא גזירה

✓ רציפה
✗ גבול הנגזרת לא קיים
⇓
לא גזירה

✓ רציפה
✗ גבול הנגזרת לא סופי
⇓
לא גזירה

**הערה:**

לא תמיד רק אי גזירות תהיה כאן שבלי
למשל אם מימין השיפוע שואף ל $\infty$-
ומשמאל " " " $\infty$.

כל הזכויות שמורות למיכל שניצר ©

**פתור את התרגילים הבאים תוך שימוש בהגדרת הנגזרת**

1. מצא נגזרת כללית של $f(x) = 3x^2 + x - 1$

$f'(x) = 6x+1$

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2+(x+h)-1]-[3x^2+x-1]}{h} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)+\cancel{x}+h-\cancel{1}-3x^2-\cancel{x}+\cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3x^2}+6xh+3h^2+h-\cancel{3x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(6x+3h+1)}{\cancel{h}} = \boxed{6x+1}$$

מה שיפוע הפו' ב $x=5$?

$f'(5) = ?$

2. מצא נגזרת בנקודה x=0 של $f(x) = \sqrt{2x+3}$

$$f'_{(0)} = \lim_{h\to 0}\frac{\overset{f(h)}{\overset{\shortparallel}{f(0+h)}}-\overset{\swarrow}{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2h+3}-\sqrt{3}}{h} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2h+3}-\sqrt{3})}{h}\cdot\frac{(\sqrt{2h+3}+\sqrt{3})}{\sqrt{2h+3}+\sqrt{3}} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h+\cancel{3}-\cancel{3}}{h(\sqrt{2h+3}+\sqrt{3})} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{2h+3}+\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sim 0.577$$

כל הזכויות שמורות למיכל שניצר ©