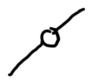
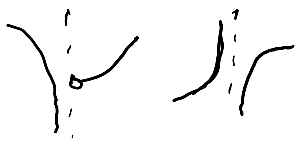
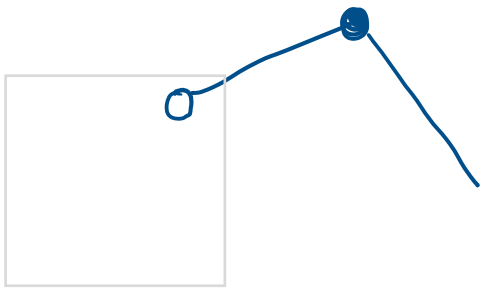
<u>תרגול 5 - רציפות ואי רציפות</u>

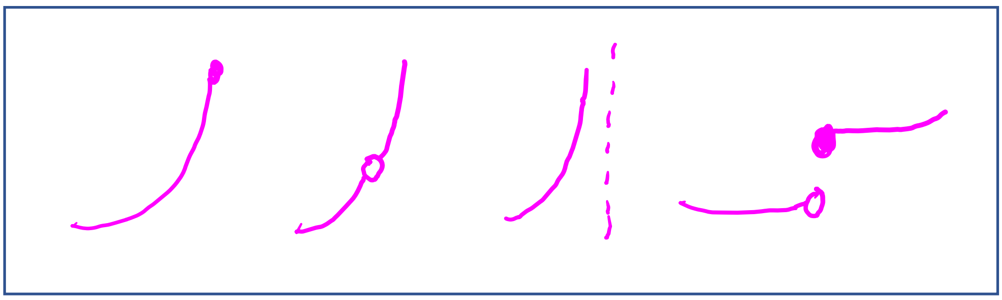
רציפות בנקודה מתקיימת כאשר: גבול מימין סופי = גבול משמאל סופי = ערך הפונקציה

נקודות חשודות לאי רציפות: ת.ה. + נקודות תפר

סוגי אי רציפות	**גרפית**		**אלגברית**
סליקה		(חור)	גבול ימין סופי = גבול שמאל סופי $\neq$ ערך הפונקציה
סוג 1		(קפיצה)	גבול ימין סופי $\neq$ גבול שמאל סופי (ערך הפונקציה לא משנה)
סוג 2		(∞)	אם לפחות אחד הגבולות $\pm\infty$

נקודות אי רציפות :
1. נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת
2. נקודות תפר בפונקציה מפוצלת – דורש בדיקה.





רציפות בנקודה מתקיימת כאשר: גבול מימין סופי = גבול משמאל סופי = ערך הפונקציה

נקודות חשודות לאי רציפות: ת.ה. + נקודות תפר

סוגי אי רציפות	**גרפית**		**אלגברית**
סליקה		(חור)	גבול ימין סופי = גבול שמאל סופי $\neq$ ערך הפונקציה
סוג 1		(קפיצה)	גבול ימין סופי $\neq$ גבול שמאל סופי (ערך הפונקציה לא משנה)
סוג 2		(∞)	מספיק שאחד הגבולות $\pm\infty$

מצא נקודות אי רציפות של הפונקציות הבאות:

אי רציפות סוג 1

לכל x

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x > 1 \quad (1^+) \\ \dfrac{6x-6}{x^2-4x+3} & x < 1 \quad (1^-) \end{cases}$$

$x \neq 1, 3$

לא רלוונטי, $x<1$

① בדקנו. לכל עולם ת.ה.
יש ת"י x-ים שבהם הפו' לא מוגדרת
הם ת"י נק' אי רציפות.
אך במקרה זה אין.

② תפר מפוצל: $x=1$: בגלל שבפו' אין $x=1$ הפו' לא מוגדרת שם
ולכן לא רציפה שם.

ג.ש. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{6x-6}{x^2-4x+3} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{6\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \dfrac{6}{-2} = \boxed{-3}$

$\neq$

ג.י. $\lim\limits_{x\to 1^+} 5 = \boxed{5}$

$\Rightarrow$

$x=1$
הפו' לא מוגדרת שם
ג.י. קבוע $\neq$ ג.ש. קבוע
ולכן נק' אי רציפות סוג I (קפיצה)

עבור	$x>1$	הפו' אלמנטרית ולכן רציפה
	$x<1$	" " " "
	$x=1$	נק' אי רציפות סוג I

סליקה + סוג 2

$$f(x)=\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x-1}$$

ת.ה:

① $x-1\neq 0$ ② $|x|\neq 0$

$x\neq 1$ $x\neq 0$

$|0^+|=0^+$

$|0^-|=0^+$

עבור $x\neq 0,1$ הפו' אלמנטרית ולכן רציפה.

ב $x=0$: הפו' לא מוגדרת ← נק' אי רציפות!

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x-1}=\frac{e^{-\frac{1}{0^+}}}{-1}=\frac{e^{-\infty}}{-1}=\frac{0}{-1}=\boxed{0}$$

חישבנו. גבול ימין ושמאל ביחד

$$e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$\Rightarrow$ $x=0$ נק' אי רציפות סליקה

ג.י = ג.ש. ≠ ערך הפו'

הגבול הגבול

ב $x=1$ הפו' לא מוגדרת ← אי רציפות!

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x-1}=\frac{e^{-1}}{0}=\left[\ \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x-1}=\frac{e^{-1}}{0^+}=\boxed{\infty}\right.$$

אין צורך

כבר כאן ידוע שהתשובה תהיה ∞ I של אחד הצדדים

מספיק ∞ אחד כדי לקבוע את סוג II

$\Rightarrow$ $x=1$ נק' אי רציפות סוג II

ג.י: ∞ מספיק

① $f(x) = \frac{x^6 - 8x + 1}{10}$

כל x ת.ה. + אין נקודות אי הגדרה ⇐ רציפה לכל x

$x \neq 0$ לא רלוונטי
$1+2x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ לא רלוונטי

② $f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+2x)}{x} & \boxed{x > 0} \\ 2 & x = 0 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - 1} & x < 0 \end{cases}$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$e^x \neq 0$ לכל x

$e^x - 1 \neq 0$
$e^x \neq 1$
$x \neq 0$ לא רלוונטי

① אין בעיית ת.ה. בכל ענף

② נבדוק נק' התפר $x=0$:

$\lim_{x \to 0^+}$

$f(0) =$

$\lim_{x \to 0^-}$

שאלה עם פרמטרים

מצאו את ערכי הפרמטרים כך שהפונקציה תהיה רציפה בכל תחום הגדרתה

ת.ה.

① $x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1$ לא רלוונטי

② $\sqrt{x-1}-1\neq 0$

$\sqrt{x-1}\neq 1 \quad /()^2$ + בדיקה

$x-1\neq 1$

$x\neq 2$

בדיקה ✓

לא רלוונטי

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{bx-2b}{\sqrt{x-1}-1} & \boxed{1\leq x<2}\\ 3 & x=2\\ e^{\frac{1}{2-x}}+a & x>2\end{cases}$$

ת.ה.

① $2-x\neq 0 \rightarrow x\neq 2$ לא רלוונטי

* בדקנו ת.ה. בכל ענף ולא הייתה בעיה.

* נבדוק רציפות ב $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$$

$$f(2)=\boxed{3}$$

$$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{2-x}}+a=e^{\frac{1}{0^-}}+a=e^{-\infty}+a=0+a=\boxed{a}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{bx-2b}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{2b-2b}{1-1}=\text{“}\frac{0}{0}\text{”}=\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{bx-2b}{(\sqrt{x-1}-1)}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+1}{(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(bx-2b)(\sqrt{x-1}+1)}{x-1-1}=\lim_{x\to 2^-}\frac{b\cancel{(x-2)}(\sqrt{x-1}+1)}{\cancel{(x-2)}}=\boxed{2b}$$

רצ' שיתקיים רציפות ב $x=2$

$3=a=2b$

$a=3$

$2b=3$

$b=\frac{3}{2}$

$b=1\frac{1}{2}$

עבור $a=3$ ו $b=1\frac{1}{2}$ הפונ' רציפה לכל x.

שאלה ממבחן 29.1.2020:

נתונה הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1+\ln x}}{x^2-3x+2} & x>1\\ ax & x\le 1\end{cases}$$

א. עבור $a=\frac{1}{2}$ יש לפונקציה אי רציפות מסוג שני בלבד

ב. עבור כל a יש לפונקציה נקודת אי רציפות מסוג שני ונקודת אי רציפות סוג ראשון.

ג. עבור $a=\frac{1}{2}$ הפונקציה רציפה לכל x. לא יתכן $x\neq 2$

ד. בעלת אי רציפות אחת בלבד מסוג סליקה ב x=0 לא תמיד

ה. אף תשובה לא נכונה

ת.ה.

(ln) ① $x>0$ ✓

② $1+\ln x\ge 0 \rightarrow \ln x\ge -1$

$x\ge\frac{1}{e}$ ✓

③ $x^2-3x+2\neq 0 \rightarrow x\neq 1,2$

$$f(x)=\begin{cases}\boxed{\frac{1-\sqrt{1+\ln x}}{x^2-3x+2} \quad x>1}\\ ax \quad\quad x\le 1\end{cases}$$

→ x=2 נק' אי רציפות.

→ x=1 נק' תפר יש לבדוק.

ת.ה. $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{1+\ln x}}{x^2-3x+2}=\text{"}\frac{1-\sqrt{1+\ln 2}}{0}=\frac{\text{מספר}}{0}\text{"}=\infty \quad \text{סוג II}$$

$\lim_{x\to 1^+}$

$\lim_{x\to 1^-}$

שאלה ממבחן 3.2.13:

האם הפונקציה רציפה ב x=0? אם לא קבעו את סוג אי הרציפות ונמקו תשובתכם

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & x<0\\[2ex] 1 & x=0\\[2ex] (2+x)^{\frac{2}{x}} & x>0\end{cases}$$

ג.ש $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{1+x^2})\cdot(1+\sqrt{1+x^2})}{x\,(1+\sqrt{1+x^2})} =$

$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1-(1+x^2)}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0^-}\dfrac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(1+\sqrt{1+x^2})} =$

$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{0}{2} = \boxed{0}$

ערך הפו' $f(0)=\boxed{1}$

ג.י $\lim_{x\to 0^+}(2+x)^{\frac{2}{x}} = 2^{\frac{2}{0^+}} = 2^{\infty} = \boxed{\infty}$

הפו' לא רציפה ב $x=0$ אי רציפות סוג # כי ג.ש. ∞.

$f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-2}}}$ (אקסטרה)