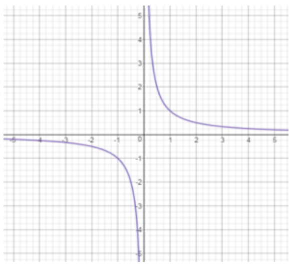
משפט ערך הביניים, הגדרת הנגזרת

משפט ערך הביניים (קושי)

מקרה פרטי

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

אם מתקיים $f(a)\cdot f(b)<0$ אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש- $f(c)=0$.



הערה: אם הפונקציה לא רציפה, אז לא נוכל להסיק את המסקנה הנ"ל.

דוגמה: נתבונן למשל בפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע הסגור $[-1,1]$.

$f(-1)<0$, $f(1)>0$. אבל הפונקציה אינה מתאפסת בקטע.

תרגילים:

1. הוכיחו כי למשוואה $2x^4-5x+2=0$ יש פתרון בקטע $[0,1]$

נסמן $f(x)=2x^4-5x+2$

רציפה בפרט בקטע $[0,1]$

$f(0)=2>0$

$f(1)=-1<0$

לפי משפט ערך ביניים יש נקודת חיתוך עם ציר ה_X בקטע $[0,1]$

2. הוכיחו כי הפונקציות $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = e^x - 2$ נחתכות.

פתרון: הפונקציות רציפות בקטע $-2 \le x \le 2$

נשווה

$$\sqrt{4 - x^2} = e^x - 2$$

נסמן

$$k(x) = \sqrt{4 - x^2} - e^x + 2 = 0$$

נציב

$$k(2) = \sqrt{4 - 2^2} - e^2 + 2 < 0$$

$$k(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2} - e^{-2} + 2 > 0$$

לפי קושי יש נקודה a בקטע $-2 \le a \le 2$

כך ש- $k(a) = 0$

3. נתונה f רציפה ומקיימת $f(2) = 5$, $f(5) = 3$.

הוכיחו כי קיים x בין 2 ל-5 כך ש- $f(x) = x$.

פתרון: הפונקציות רציפות

נשווה

$$f(x) = x$$

נסמן

$$k(x) = f(x) - x = 0$$

נציב

$$k(2) = f(2) - 2 = 3 > 0$$

$$k(5) = f(5) - 5 = -2 < 0$$

לפי קושי יש נקודה כך ש- $k(a) = 0$

4. (אם יש זמן) הוכיחו את המשפט: לכל משוואה אלגברית ממעלה שלישית קיים פתרון ממשי אחד לפחות.

5. נתון כי $m \in [1,\infty)$ הוכיחו כי שמשוואה $e^{2x} = 2x + m$ קיים פתרון.

הגדרת הנגזרת

נגזרת של פונקציה ממשית מתארת את קצב **השינוי של הפונקציה**.

משמעות אינטואיטיבית: נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בסביבה של x.

אנו שואלים: מהו קצב השינוי של $f(x)$ בנקודה x?

(אם נוסיף ל- x תוספת קטנה h, מה יהיה השינוי של $f(x+h)$ ביחס ל-$f(x)$).

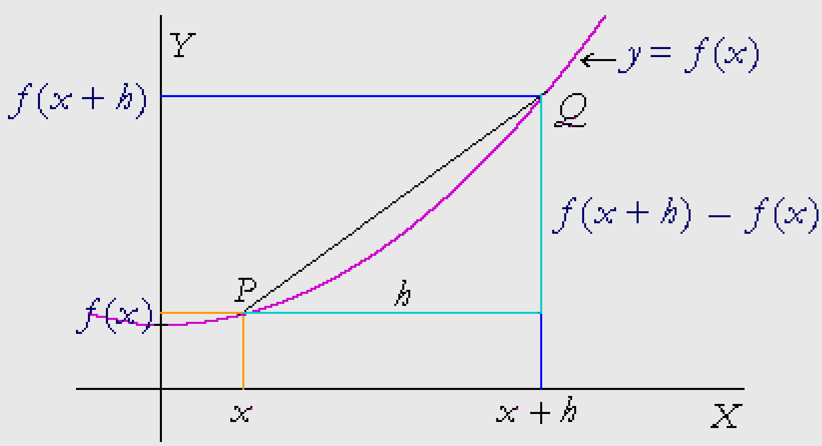
קירוב לקצב השינוי יהיה: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

מכאן, נגדיר את המדד המתאים לקצב השינוי ע"י: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

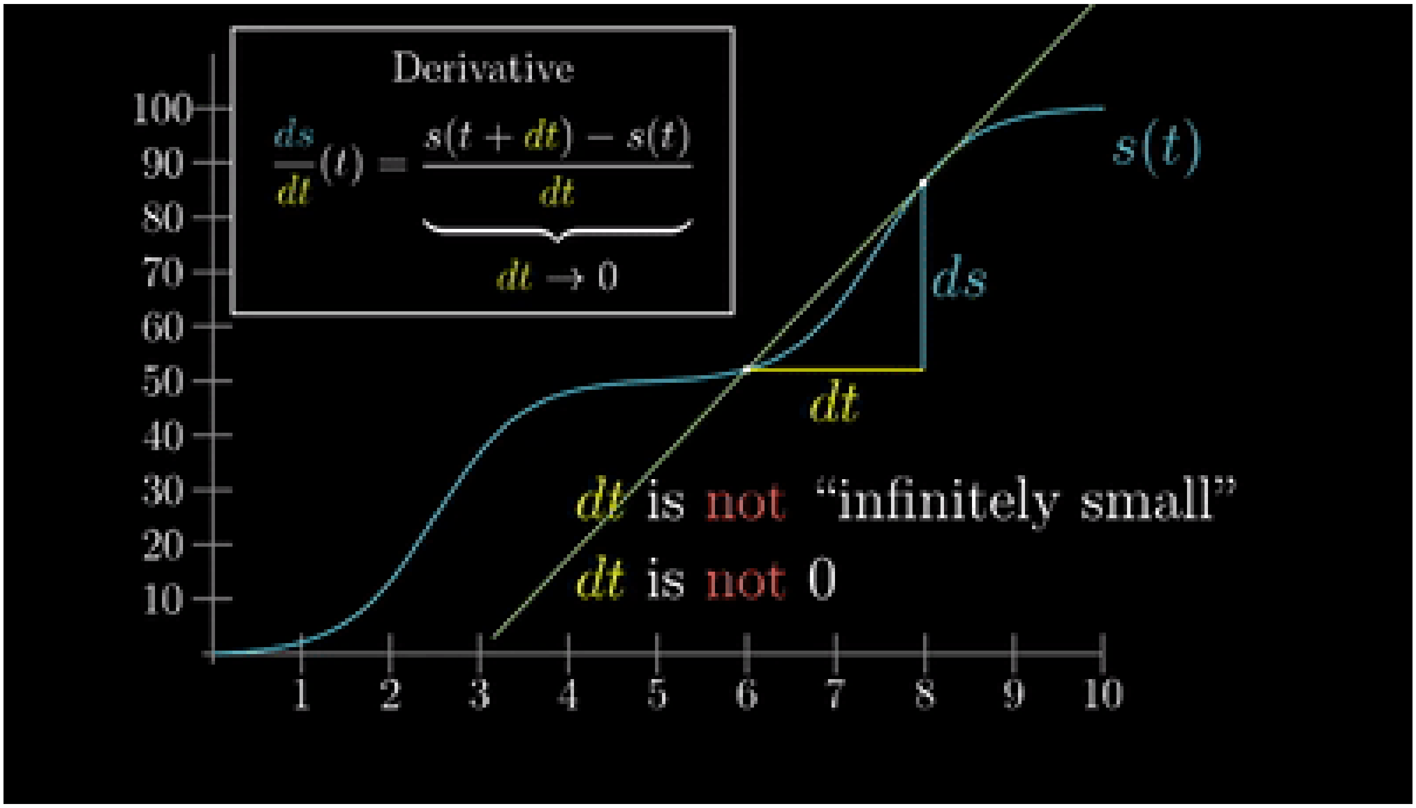
כלומר, **הנגזרת מוגדרת כגבול של היחס שבו משתנה ערך הפונקציה בעקבות שינוי זעיר בערך הפרמטר**.

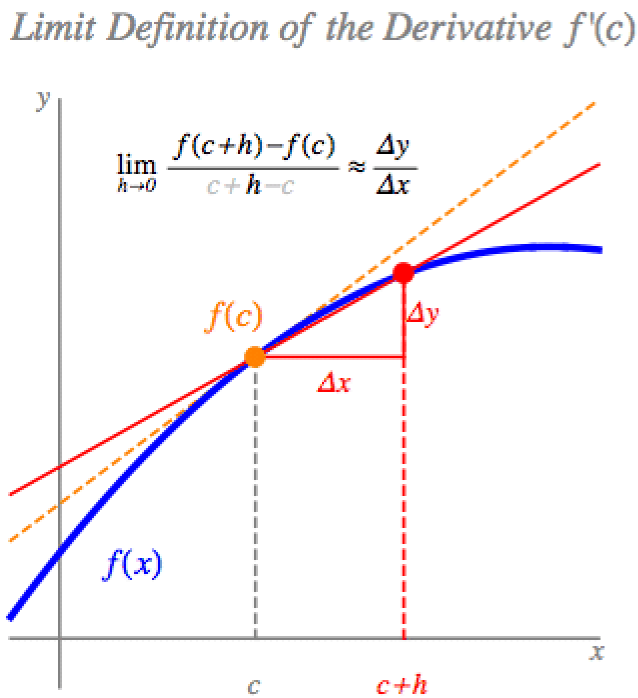
הגדרה: נאמר ש-$f(x)$ גזירה בנקודה x ושהנגזרת בנקודה זו היא $f'(x)$, אם הגבול

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ קיים וסופי. בנקודה x



נסמן $\frac{dy}{dx} = y'$


Derivative
$\frac{ds}{dt}(t) = \underbrace{\frac{s(t+dt)-s(t)}{dt}}_{dt \to 0}$
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$s(t)$
ds
dt
dt is not "infinitely small"
dt is not 0



משפט: אם f' מוגדרת בקטע (a,b) אז f רציפה ב- (a,b)

למשל: אם $f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$ אז f רציפה לכל x

דוגמאות:

- מצאו בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2$:

הגדרה $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = \mathbf{2x}$$

- מצאו בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f(x) = \frac{1}{x}$ בנקודה x=3 :

פיתרון :

הגדרה $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{3(3+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{3(3+h)}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{3(3+h)} = \frac{-1}{9}$$

הפונקציה **גזירה בנקודה** x=3 כיוון ש**הגבול קיים וסופי**!

תרגילים:

1. הוכיחו לפי הגדרת הנגזרת שאם $f(x) = x^2 + 3x + 4$ אז $f'(x) = 2x + 3$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

פיתרון :

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 + 3(x+h) + 4 - (x^2 + 3x + 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x + h + 3)h}{h} = 2x + 3$$

2. מצאו בעזרת הגדרת הנגזרת את נגזרת הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$

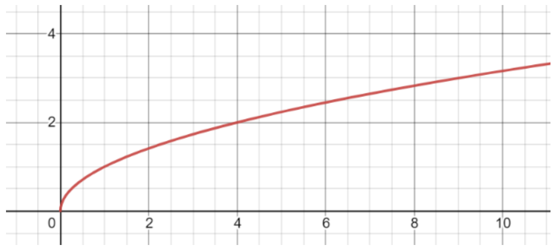
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f(x+h)} - f(x)}{h} =$$

פיתרון :

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\boldsymbol{x+h}} - \sqrt{\boldsymbol{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\boldsymbol{x+h}} - \sqrt{\boldsymbol{x}}}{h} \frac{\sqrt{\boldsymbol{x+h}} + \sqrt{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{\boldsymbol{x+h}} + \sqrt{\boldsymbol{x}}} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{x+h-x}}{h(\sqrt{\boldsymbol{x+h}} + \sqrt{\boldsymbol{x}})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{h}}{h(\sqrt{\boldsymbol{x+h}} + \sqrt{\boldsymbol{x}})} == \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{1}}{(\sqrt{\boldsymbol{x+h}} + \sqrt{\boldsymbol{x}})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

הערות לגבי הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$:

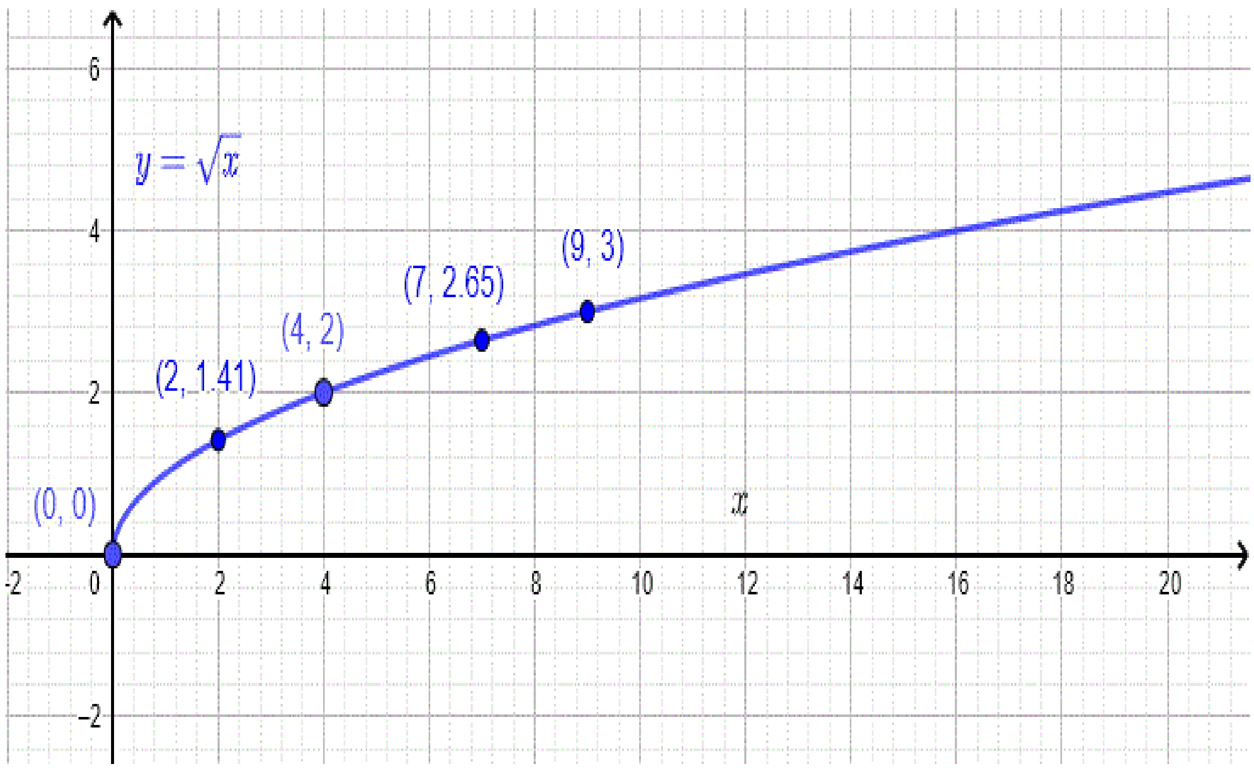


נגזרת $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1. $f'(x)$ מוגדרת לכל $x > 0$

2. $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה

3. ככול שנגדיל את x אז $f'(x)$ תקטן, ז"א השיפועים קטנים וגם התוספות השולייות קטנות



3. מצאו בעזרת הגדרת הנגזרת את נגזרת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x+1}$

פתרון :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h+1}-\frac{x}{x+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)(x+1)-x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}=$$

צמצמו מונה

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(x+h+1)(x+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h+1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}$$

4. הוכח ש- $(e^x)'=e^x$

הוכחה:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=$$

גבול אוילר : $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ או $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

נציב

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^h-1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x((1+h)-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x h}{h}=e^x$$

משפט:

- אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x = x_0$, אז היא בהכרח רציפה בנקודה $x = x_0$.
- ניסוח שקול: אם $f(x)$ אינה רציפה בנקודה $x = x_0$, אז $f(x)$ אינה גזירה בנקודה $x = x_0$.

(ההפך לא נכון: רציפות אינה גוררת גזירות!)

הוכחה:

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה $x = x_0$. מכאן שהגבול $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ קיים וסופי.

נרצה להראות ש-$f(x)$ רציפה ב-x_0, כלומר ש-$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (גבול שווה לערך בנקודה):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0) =$$

$$\lim_{x \to x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) =$$

$$\lim_{x \to x_0} f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

קיבלנו: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. כלומר: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

על מנת להראות שפונקציה אינה גזירה בנקודה:

נראה ש**גבול הגדרת הנגזרת** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **אינו קיים** או **אינו סופי** בנקודה.

(אם $f(x)$ אינה רציפה בנקודה, ניתן להסיק מייד שאינה גזירה בנקודה זו).

5. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = |x|$ לא גזירה ב- $x = 0$.

פיתרון :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

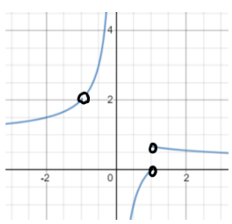
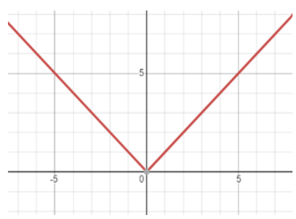
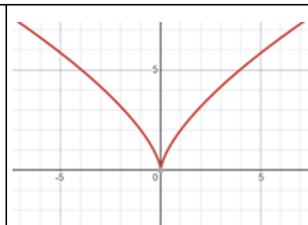
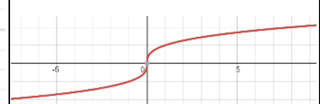
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cdot|0+h|-\cdot|0|}{h} =$$ .1

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cdot|h|}{h} = \begin{cases} |+| \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{h}{h} = 1 \\ |-| \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

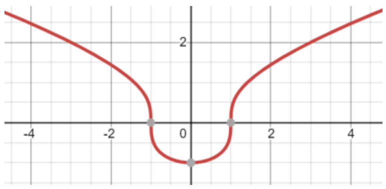
0

קיבלנו ש**הגבול אינו קיים** לפיכך, הפונקציה $f(x) = |x|$ לא **גזירה בנקודה** x=0.

דוגמאות גרפיות לנקודות שבהן הפונקציה אינה גזירה:

6. הוכיחו בעזרת הגדרת הנגזרת כי הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ לא גזירה ב- $x=1$



$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

פיתרון:

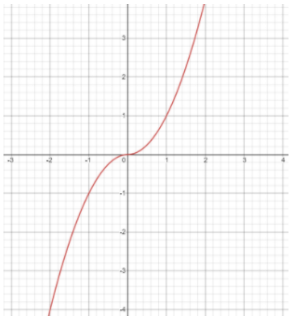
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+h)^2-1}-0}{\underset{h\to 0}{h}}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2h+h^2-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{2h+h^2}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}\,\sqrt[3]{2+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{2+h}}{\sqrt[3]{h^2}}=\infty$$

לכן הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ לא גזירה ב- $x=1$

7. האם הפונקציה $f(x) = x \cdot |x|$ גזירה ב- x=0?



$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

פיתרון:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(0+h)\cdot|0+h|-0\cdot|0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot|h|}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0$$

קיבלנו ש**הגבול קיים וסופי**. לפיכך, הפונקציה $f(x) = x \cdot |x|$ **גזירה בנקודה** x=0.

אם יש זמן פותרים לבד

8. הוכיחו כי למשוואה $e^x = e^{-x} + x + 1$ יש פתרון

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x}}$
   a. מצאו בעזרת הגדרת הנגזרת את נגזרת של $f(x)$
   b. מצאו את משוואת המשיק ל- $f(x)$ בנקודה $x = -3$

10. האם הפונקציה $f(x) = \sqrt[5]{x - |x|}$ גזירה ב-$x = 0$?

11. נתונה הפונקציה $f(x) = |x^3 - 2x^2|$
   a. האם f גזירה ב-$x = 0$?
   b. האם f גזירה ב-$x = 2$?