📐 דף נוסחאות ונהלי עבודה: חזקות, שורשים וגזירה

מסמך זה מרכז את כל הכלים המתמטיים הנדרשים לפתרון תרגילים בחדו"א וכלכלה.

כלל הזהב: חדו"א זה כמו בישול – קודם מכינים את המצרכים (סידור אלגברי), ורק אז מדליקים את (גזירה).

1. ארגז כלים אלגברי: חוקי חזקות ושורשים 🛠️

לפני שניגשים לנגזרת, חובה לסדר את הפונקציה.

א. טבלת חוקי חזקות בסיסיים

המטרה: לצמצם הכל לביטוי אחד פשוט.

שם החוק	הנוסחה המילולית	הנוסחה המתמטית	דוגמה
כפל בסיסים	חיבור מעריכים	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	${}^2 \cdot x^3 = x^5$
מנת בסיסים	חיסור מעריכים	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{x^7}{x^3} = x^4$
חזקה של חזקה	כפל מעריכים	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(x^2)^3 = x^6$
מכפלה בחזקה	החזקה חלה על שניהם	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$2x)^3 = 8x^3$
חזקה שלילית	הופכי (מעלית)	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
חזקה על שבר	החזקה מתפצלת למונה ולמכנה	$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(\frac{x}{3})^2 = \frac{x^2}{9}$

🧠 **בראש שלי:**

- **כפל?** החזקות מתחברות (נהיות גדולות יותר).
- **חילוק?** החזקות מתקזזות (העליונה פחות התחתונה).
- **סוגריים?** זה כפל כוחני (מכפילים את החזקות).
- **החזקה המטיילת על שבר:**
  - בגדול, החזקה צריכה להיות על **כל השבר** (סוגריים) או על **כל אחד בנפרד** (מונה ומכנה) כדי שזה יהיה אותו דבר.

- **החריג (איפה שזה לא משנה):** כשיש **1** במונה (למשל $\frac{1}{x}$). אז זה לא משנה אם החזקה היא רק למטה ($\frac{1}{x^2}$) או על הכל $(\frac{1}{x})^2$, כי 1 נשאר תמיד 1.

ב. חוקי "ההצלה" (הכנה לגזירה)

בלי זה אי אפשר לגזור. הנשק הסודי שלנו.

1. חזקה שלילית (המעלית)

כשיש x תקוע למטה במכנה, הוא לא שמיש. חייבים להעלות אותו למעלה.

הנוסחה: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

- **דוגמה:** $\frac{1}{x^2} \to x^{-2}$
- 🧠 **בראש שלי:** "אתה למטה? תעלה למעלה, אבל תשלם קנס (מינוס בחזקה)."

2. שורשים - הטבלה המלאה (ההמרה) 🔄

שורש הוא תחפושת לחזקה. בחדו"א אנחנו תמיד רוצים לראות את החזקה האמיתית (השבר).

המקרה	הנוסחה	דוגמה	🧠 בראש שלי
שורש ריבועי (זוגי)	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} \to x^{0.5}$	ברירת המחדל. אין מספר בחוץ = זה 2.
שורש מסדר אי-זוגי	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	המספר שבחוץ (הסדר) הופך **למכנה** של הח
שורש מורכב (חזקה בפנים)	$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$	**החוק:** פנימי למונה, חיצוני למכנה. "החזקה למעלה, השורש למטה."
העונש הכפול (שבר שלילי)	$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-1.5}$	גם עולה למעלה (**מינוס**) וגם הופך משורש לחזקה (**שבר**).

2. חוקי הגזירה (Derivatives) 📉

השיפוע של הפונקציה.

א. נגזרות מיידיות

הפונקציה	הנגזרת	🧠 תכלס (איך זוכרים)

C (מספר)	0	למספר לבד אין שיפוע, הוא שטוח. מת.
x	1	השיפוע של x נקי הוא תמיד 1.
$10x$	10	אם ה- x בחזקת 1, הוא נעלם ונשאר רק המקדם.
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	**החוק הראשי (פולינום):** החזקה קופצת קדימה לכפל, ואז יורדת בדרגה אחת.
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	הלן הופך לאחד חלקי.

ב. פונקציות מעריכיות (x נמצא במעריך למעלה) 🚀

כאן ה-x הוא החזקה. זה **לא** פולינום! החזקה לא יורדת ב-1.

המקרה	הפונקציה	הנגזרת
הבסיסי	e^x	e^x
בסיס שונה מ-e	5^x	$5^x \cdot \ln(5)$
המשולבת (שרשרת)	5^{3x}	$5^{3x} \cdot \ln(5) \cdot 3$

🧠 בראש שלי (ההבדל הקריטי):

- e^x: הילד הטוב. לא משתנה בחיים.
- **איבר רגיל (5^x):** מעתיק את עצמו + משלם "קנס בסיס" ($\ln(5)$).
- **חזקה מורכבת (5^{3x}):** משלמים פעמיים:
  1. מעתיקים את הפונקציה כמו שהיא.
  2. משלמים **קנס בסיס** ($\ln 5$).
  3. משלמים **קנס גובה** (נגזרת של המעריך, 3).

ג. דוגמאות מהשטח: מה שראיתי בעיניים (7^{x^2} מול e^{x^2}) 👁️

ניתוח המקרים שנתקלת בהם: חזקה על חזקה.

מקרה 1: החבילה המלאה (7^{x^2})

הפונקציה: $y = 7^{x^2}$ הנגזרת: $y' = 7^{x^2} \cdot \ln(7) \cdot 2x$

🧠 **בראש שלי:** ראיתי שלושה חלקים בשרשרת:

1. **האיבר עצמו:** 7^{x^2} (פשוט מועתק, לא נוגעים בו).
2. **הקנס על הבסיס:** $\ln(7)$ (כי הבסיס הוא 7 ולא e).
3. **הקנס על הגג:** $2x$ (כי למעלה זה לא סתם x, אלא x^2 ש"ירד למטה" בגזירה).

מקרה 2: החבילה בהנחה (e^{x^2})

הפונקציה: $y = e^{x^2}$ הנגזרת: $y' = e^{x^2} \cdot 2x$

🧠 **בראש שלי:** זה כמעט אותו דבר, אבל יותר נקי:

1. **האיבר עצמו:** e^{x^2} (מועתק כמו שהוא).
2. **הקנס על הבסיס:** אין! (כי $\ln(e) = 1$, אז הוא נעלם).
3. **הקנס על הגג:** $2x$ (חייבים לגזור את המעריך x^2).

ד. מחזור חיים של שורש שלישי 🧠

איך מפרקים ומרכיבים שורש מסדר שלישי ($\sqrt[3]{x}$):

1. **ההמרה:** שורש מסדר שלישי הופך לחזקת **שליש** ($x^{\frac{1}{3}}$).
2. **הגזירה:**
   - השליש יורד למקדם.
   - מורידים 1 מהחזקה: $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$.
   - קיבלנו: $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.
3. **התוצאה (למה זה נראה ככה?):**
   - **המינוס בחזקה:** גורם לאיבר להיות שבר (זורק אותו למכנה).
   - **השבר בחזקה:** הופך את כל מה שירד למטה חזרה לשורש.
   - **החוק:** סדר השורש הולך ל**מכנה** של החזקה, וה**מונה** הוא החזקה על האיבר שבתוך השו
   - סופית: $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ה. כללי גזירה למתקדמים (הכבדים) 🏋️

1. נגזרת מכפלה (Product Rule)

מתי? כשיש כפל בין שני גורמים ששניהם מכילים x (למשל $x^2 \cdot e^x$).

הנוסחה: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

🧠 **בראש שלי (חוק ההוגנות):** אי אפשר לגזור את שניהם בבת אחת. עושים תורות:

1. גוזרים את **הראשון** (השני נח ומסתכל).
2. עושים **פלוס**.
3. הראשון נח, וגוזרים את **השני**.

2. נגזרת מנה (Quotient Rule)

מתי? כשיש חילוק בין ביטויים עם x.

הנוסחה: $y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

🧠 **בראש שלי (המונה הוא המלך):**

- "גזור מונה תשאיר מכנה"
- **מינוס** (-)
- "תשאיר מונה גזור מכנה"
- הכל חלקי המכנה הרגיל בריבוע (המכנה למטה מוגן, לא גוזרים אותו).

3. כלל השרשרת (Chain Rule)

מתי? כשיש פונקציה בתוך פונקציה. למשל: $(3x^2 + 1)^5$.

הנוסחה: $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (חיצונית כפול פנימית)

🧠 **בראש שלי (שיטת הבצל/בבושקה):** המשפט המנצח: **"נגזרת חיצונית (להשאיר את הפנימית) $\times$ רק הנגזרת הפנימית"**

1. **קליפה חיצונית:** מטפלים בחזקה הראשית. **לא נוגעים בבפנוכו עדיין!**
2. **כפול הלב:** רק עכשיו כופלים בנגזרת של מה שבתוך הסוגריים.

4. המקרה המורכב: שרשרת ובתוכה מנה ("הבובות הרוסיות") 🪆

המצב: יש סוגריים בחזקה (שרשרת), ובתוכם מסתתר שבר (מנה). למשל: $y = (\frac{2x}{x+1})^3$.

הביצוע (לפי הראש שלך):

1. **הנגזרת החיצונית (העטיפה):** גוזרים לפי חזקה. ה-3 יורד למקדם, החזקה הופכת ל-2.
   - **הכי חשוב:** את השבר בפנים **לא משנים**. משאירים אותו רגיל.
   - קיבלנו: $3(\frac{2x}{x+1})^2$
2. **הכפל (המעבר):** עושים סימן כפול ($\cdot$) ופותחים סוגריים מרובעים גדולים.
3. **הנגזרת הפנימית (זירת הקרב):** בתוך הסוגריים החדשים, גוזרים את השבר לפי **חוק המנה**:

- גזור מונה (2) כפול מכנה רגיל $(x+1)$
- **מינוס**
- מונה רגיל $(2x)$ כפול גזור מכנה (1)
- הכל חלקי מכנה בריבוע.

🧠 **בראש שלי:** "קודם תוריד כאפה לכל העסק (טפל בחזקה החיצונית), אל תיגע בבפנוכו. סיימת? יופי. עכשיו תפתח סוגריים בצד ותטפל בבלגן שבפנים כאילו זה תרגיל נפרד של נגזרת מנה."

5. המקרה המשולש: לאן עם חזקה ("המפלצת") 🐲

מקרה נפוץ ומבלבל: $y = \ln^4(5x^2)$. יש כאן שלוש שכבות: חזקה, לאן, ופולינום.

🧠 **בראש שלי (הנוהל המקוצר שלך):**

1. **גוזרים לפי חזקה:** המעריך יורד, החזקה קטנה ב-1 $(n-1)$.
2. **גוזרים לאן:** כופלים ב- $\frac{1}{\text{argument}}$ (אחד חלקי הביטוי שבפנים).
3. **גוזרים ארגומנט:** כופלים בנגזרת של מה שבתוך הלאן.

סופית: כופלים את הכל ביחד בשרשרת.

טיפ של אלופים: אם יש כפל בתוך הלאן, תשתמש בחוקי לוגריתמים $(\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ לפני הגזירה, ואז לא תצטרך נגזרת מכפלה בכלל!

ו. ספיישל שורש ריבועי (הקיצור) ⚡

לשורש ריבועי $(\sqrt{x})$ יש קיצור דרך שלא מחייב להפוך לחזקת חצי.

1. הנוסחה הבסיסית (עם שרשרת מובנית)

כשגוזרים שורש, הנגזרת של ה"בפנוכו" עולה למונה, והשורש עצמו יורד למכנה (כפול 2).

הנוסחה:

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

🧠 **בראש שלי:**

1. תעשה קו שבר.
2. **למטה:** תעתיק את השורש כמו שהוא ותכפיל ב-2.

3. **למעלה:** תגזור רק את מה שבתוך השורש.

2. תרחישים נפוצים (השאלות שלך)

המקרה	דוגמה	מה עושים?
פונקציה בתוך השורש	$\sqrt{3x^2+1}$	**כלל השרשרת (הקיצור):** למטה $2\sqrt{3x^2+1}$ למעלה הנגזרת של הבפנוכו ($6x$).
כפל מחוץ לשורש	$x^2 \cdot \sqrt{x}$	**כלל המכפלה (הוגנות):** מתייחסים לשורש כאל פונקציה רגילה לגמרי. $2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
כפל בתוך השורש	$\sqrt{x \cdot e^x}$	**שרשרת + מכפלה במונה:** למטה רגיל ($2\sqrt{\dots}$). למעלה צריך לגזרת את הבפנוכו ($x \cdot e^x$), וזה דורש נגזרת מכפלו

3. הטקטיקה לתרגיל מעצבן: שורש על מנה (כלל האוזן) 💡

המצב: יש שורש ענק על כל השבר $\sqrt{\frac{A}{B}}$. אם נגזור ישר, נקבל "רב קומות" שאי אפשר לצאת ממנו.

הפתרון (לפי הראש שלך):

1. **לפני הגזירה (פיצול):** מפרידים כוחות. $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.
2. **הגזירה:** משתמשים בנוסחת הנגזרת לשבר רגיל (נגזרת מנה), אבל זוכרים שהאיברים הם שוו
3. **אוזן (במקרה של הצבה בנוסחת השורש):** אם הלכת לפי נוסחת השורש ($\frac{1}{2\sqrt{A/B}}$), קיבלת קומות.

- ה-2 נצמד למונה של השורש ($\sqrt{A}$).
- המכנה של השורש ($\sqrt{B}$) קופץ למעלה למונה הראשי (כלל האוזן).
- נשארים עם שבר מסודר (2 קומות) שאפשר להמשיך לכפול אותו.

🧠 **בראש שלי:** "אל תשאיר שורש על כל הבניין. תן שורש לגג ושורש לרצפה. אם נוצר לך בניין של 3 קומות? תעשה **כלל אוזן**: הקומה הכי תחתונה (המרתף) טסה במעלית לקומה הכי עליונה (הפנטהאוז), והאמצע נשאר תקוע עם ה-2."

4. צ'ק ליסט לפתרון תרגיל (נוהל קרב) ✅

1. **סריקה:** האם יש שורשים או x במכנה?
   - כן? $\rightarrow$ הפעל **חוקי הצלה** (חזקות שליליות/שברים).
   - לא? $\rightarrow$ תמשיך.
2. **זיהוי:** מול מה אני מתמודד?
   - סתם פולינום? $\rightarrow$ גזור רגיל.
   - כפל? $\rightarrow$ חוק ההוגנות (תור-תור).
   - מנה? $\rightarrow$ גזור מונה, תשאיר מכנה...