<u>תרגול 13 – שאלות ממבחנים</u>

בחינה בקורס: מתמטיקה א' לכלכלנים 3.2.13

שם מרצה: ד"ר יעקב ארז

<u>חלק א, (30 נקודות)</u>

יש לפתור את השאלה במחברת המצורפת

<u>שאלה א</u> חקירה

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\cdot x$

1. <u>חקרו את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:</u>

א. תחום הגדרה.

ב. תחומי עליה/ ירידה ונקודות קיצון מקומיות.

ג. תחומי קמירות/ קעירות ונקודות פיתול.

ד. אסימפטוטות.

ה. נקודות חיתוך עם הצירים.

ו. שרטוט גרף הפונקציה.

גזירות ✓ **2. <u>בדוק לפי הגדרת הנגזרת</u>** האם הפונקציה $g(x)=\left|x^2+x-2\right|$ גזירה ב- $x=-2$.

חלק ב', (70 נקודות)

יש לסמן את התשובה הנכונה (אחת בלבד) בדף הסימונים
המחברת משמשת כטיוטה בלבד ולא תיבדק

גבולות

שאלה מס' 1

גבול הפונקציה $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{e^{2x}+15\cdot 4^{x}}$ הוא:

1. e^{2}
2. e
3. 4
4. ∞
5. הגבול לא קיים.

$e^{\ln}$ טריק + פונקציות

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}+15\cdot 4^{x}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{"\infty^{0}"}{=} \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(e^{2x}+15\cdot 4^{x}\right)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^{2x}+15\cdot 4^{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+15\cdot 4^{x}\right)}{x}} = \boxed{e^{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+15\cdot 4^{x}\right)}{x} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\cdot e^{2x}+15\cdot 4^{x}\cdot\ln 4}{e^{2x}+15\cdot 4^{x}}}{1} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^{2x}}\cdot\left(2+15\cdot\ln 4\cdot\frac{4^{x}}{(e^{2})^{x}}\right)}{\cancel{e^{2x}}\cdot\left(1+15\cdot\frac{4^{x}}{(e^{2})^{x}}\right)}$$

כי מספר קטן מ-1 בחזקת ∞ שואף ל-0

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2+15\cdot\ln 4\cdot\left(\frac{4}{e^{2}}\right)^{x}}{1+15\cdot\left(\frac{4}{e^{2}}\right)^{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$\left(\frac{4}{e^{2}}\right)^{x}\to 0$

פנת התזכורת

$(a^{x})' = a^{x}\cdot\ln a$

$(e^{x})' = e^{x}\cdot\underbrace{\ln e}_{1}$

$(4^{x})' = 4^{x}\cdot\ln 4$

פנת התזכורת

$2^{\infty}\to\infty$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\to 0$

שאלה מס' 2

ידוע כי $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ אזי ערך גבול הפונקציה $\lim_{x\to 0}\left(1-f(x)\right)^{1/x}$ הוא:

1. e^{-2}
2. 1
3. e
4. ∞
5. לא קיים מאחר שהגבול מימין לא שווה לגבול משמאל.

נתון

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \boxed{\frac{f(0)}{0} = 2}$$

$\frac{5}{0} = \pm\infty$ ✗ $\qquad$ $\frac{0}{0}$ ✓ $\qquad$ $\frac{\pm\infty}{0^{\pm}} = \infty\cdot\frac{1}{0^{+}} = \infty\cdot\infty = \boxed{\infty}$ ✗

אופציה יחידה לקבל תשובה הגיונית (2)

$$\lim_{x\to 0}\left(1-f(x)\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1-f(0)\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\pm\infty} = \lim_{x\to 0}\boxed{\left(1+(-f(x))\right)^{\frac{1}{-f(x)}}}^{\,\cdot\,\frac{-f(x)}{1}\cdot\frac{1}{x}}$$

$\to e$

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{f(x)}{x}} = e^{-2}$$

נתון 2

שאלה מס'3 רציפות

בנקודה $x=0$ הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & x<0\\ 1 & x=0\\ (2+x)^{2/x} & x>0\end{cases}$$ תהיה

1. בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני
2. רציפה
3. בעלת נקודת אי רציפות מסוג ראשון
4. בעלת נקודת אי רציפות סליקה.
5. אינה מוגדרת

ערך הפונ' $f(0)=\boxed{1}$

גבול ימין $\lim\limits_{x\to0^+}(2+x)^{\frac{2}{x}}=2^{\frac{2}{0^+}}=2^{\infty}=\boxed{\infty}$ → $\boxed{x=0 \text{ נק' אי רציפות סוג 2}}$

גבול שמאל $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(1-\sqrt{1+x^2})}{x}\cdot\dfrac{(1+\sqrt{1+x^2})}{(1+\sqrt{1+x^2})}=$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1^2-(1+x^2)}{x(1+\sqrt{1+x^2})}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(1+\sqrt{1+x^2})}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{(1+\sqrt{1+x^2})}=\dfrac{0}{2}=\boxed{0}$

שאלה מס'4 אסימפטוטות

לפונקציה $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, יש

ת.ה: 1. $x\neq0$ 2. $1+\underbrace{x^2}_{0/+}\geq0$ ⇐ לכל x ⇐ $\boxed{x\neq0}$ גם

1. יש אסימפטוטה אנכיות אחת ושתי אסימפטוטות אופקית שונות ב- $\pm\infty$.
2. יש אסימפטוטה אנכיות אחת ואסימפטוטות זהות ב- $\pm\infty$.
3. יש אסימפטוטה אנכיות אחת ואסימפטוטה אופקית אחת. ב- ∞.
4. יש אסימפטוטה אנכיות בלבד
5. אין אסימפטוטות כלל.

אס. אופקיות $(x\to\pm\infty)$ $\boxed{y=\text{מספר}}$

כי x חיובי שואף ל ∞.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{\cancel{x}}=\sqrt{\frac{1}{\infty}+1}=\sqrt{0+1}=\boxed{1}$

$y=1$ אס. אופקית מימין

x שלילי

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}\dots\dots\dots\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\cancel{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{\cancel{x}}=-\sqrt{\frac{1}{\infty}+1}=-\sqrt{1}=\boxed{-1}$

$y=-1$ אס. אופקית משמאל

$\sqrt{(-3)^2} = (3)$

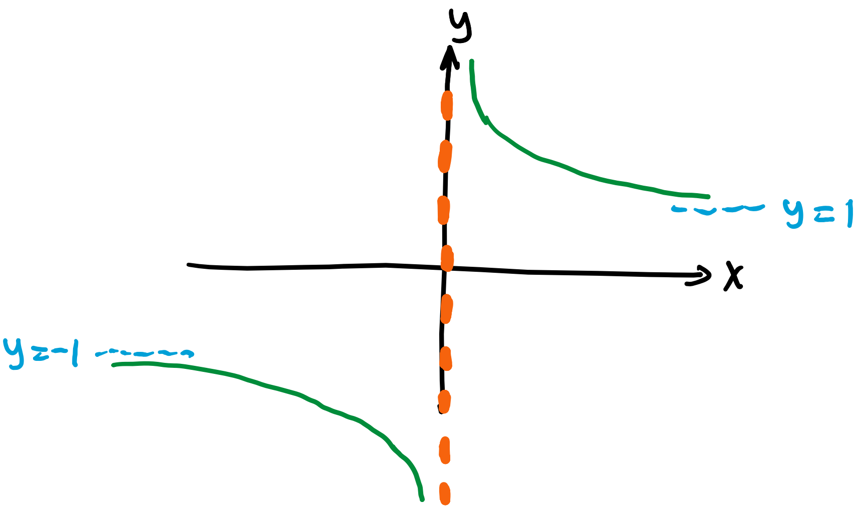
לא. אנכית (ת.ה.) $\boxed{x = \text{מספר}}$

מועמדות $: x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{0} = \begin{cases} 0^+ & \boxed{\infty} \\ 0^- & \boxed{-\infty} \end{cases}$$

$\boxed{\text{מספר ש } x=0 \text{ אסימפטוטה}}$

אם היינו נדרשים לשרטט :



מין התורה (שתפורה)

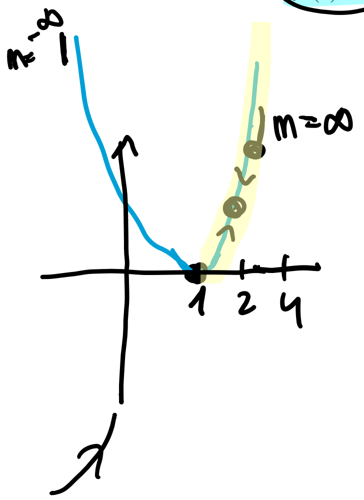
שאלה מס'5

ת.ה. f' ; $+$; ת.ה. לכל x

נתונה הפונקציה $y = f(x)$, המקיימת $f'(x) = \left(e^x + 3|x|\right)\cdot(x-1)$ עבור לכל x וכן $f(1)=0$

אזי הטענה שאיננה נכונה היא:

1. f חד חד ערכית. — לא נכון. $\forall$
2. בקטע $(0,1)$ הפונקציה f יורדת. — טבלה נכון
3. בקטע $1 \le x \le 4$ נקודות הקיצון המוחלטות מתקבלות בקצוות של הקטע. — נכון
4. הגבול $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ — נכון (רציפה)
5. לכל $x \ge 1$ מתקיים אי השוויון $f(x) \ge 0$ — נכון (שרטוט) (טבלה) min



מועמדים לקיצון מקומי :

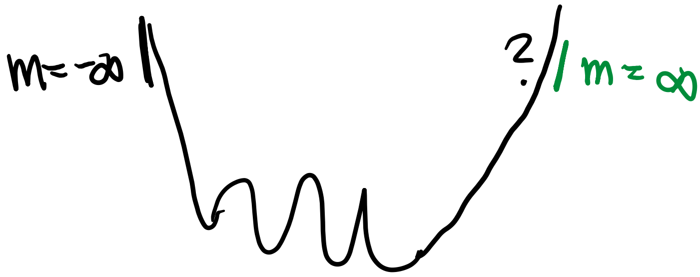
1. אין נקודות: ת.ה. f' - לכל x → $\boxed{\text{אין}}$

2. $f'=0$:

$$(e^x + 3|x|)(x-1) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x=1}$$

טבלה:

		1	
סימן f'	$-$		$+$
f	↘	min	↗



יש שיפוע

מבנה פתרון ערך מוחלט:

$e^x+3|x|=0$

$\underbrace{e^x}_{+}+\underbrace{3|x|}_{0/+}=0$

או

$x<0$ וגם

$e^x-3x=0$

⋮

$\boxed{}$

$\boxed{\text{וגם}}$

$x>0$ וגם

$e^x+3x=0$

⋮

$\boxed{}$

$\boxed{\text{וגם}}$

או

$\boxed{\text{תשובה}}$

ניצן

שאלה מס'6

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

אזי מספר נקודות הקיצון של f הוא:

1. 3
2. 2
3. 1
4. 0
5. לא ניתן לדעת

תזכורת: $\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$

ת.ה f: כל x

$$f(x)=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x=\frac{4x}{3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

ת.ה f':

$3\sqrt[3]{x^2-1}\neq 0$

$\sqrt[3]{x^2-1}\neq 0$

$x^2-1\neq 0$

$x^2\neq 1$

$x\neq \pm 1$

מועמדים לקיצון מקומי:

1. אי גזירות:

ת.ה f: כל x

ת.ה f': $x\neq\pm1$

$\Leftarrow$ נקודות שמוגדרות ב f אבל לא מוגדרות ב f' הן נק' אי גזירות של f

ולכן $x=\pm1$

2. $f'=0$:

$$f'=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}=0$$

$4x=0$

$x=0$

טבלה:

ת.ה f + מועמדים

x		-1		0		1	
סימן f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	↘	min	↗	max	↘	min	↗

חישוב y של נק' הקיצון:

$y(-1)=\sqrt[3]{((-1)^2-1)^2}=\boxed{0}$

$y(0)=\sqrt[3]{(0^2-1)^2}=\boxed{1}$

$y(1)=\sqrt[3]{(1^2-1)^2}=\boxed{0}$

3 נק' קיצון:

min $(-1,0)$

max $(0,1)$

min $(1,0)$

ת. עליה: $(-1,0)\cup(1,\infty)$

ת. ירידה: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

נגזרת של
פו' לא
מפורשת

<u>שאלה מס'7</u>

נתונה הפונקציה f המקיימת ש- $f(2)=4$ נסמן $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x+1}$

אם $g'(1)=0$ אז:

1. $f'(2)=1$
2. $f'(2)=0$
3. $f'(2)=16$
4. $f'(2)$ לא קיים
5. $f'(2)>8$

$$g'(x)=\frac{f'(2x)\cdot 2\cdot(x+1)-f(2x)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$g'(1)=\frac{f'(2)\cdot 2\cdot 2-f(2)}{2^2}=0$$

$$\frac{4\cdot f'(2)-4}{4}=0 \quad /\cdot 4$$

$$4f'(2)-4=0$$

$$4f'(2)=4 \quad /:4$$

$$\boxed{f'(2)=1}$$

<u>שאלה מס'8</u> – כלכלית - ירד

<u>שאלה מס'9</u> – פונקציה ב 2 משתנים - ירד

פונ' הנגזרת

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

גבול הנגזרת
ונגזרת

<u>שאלה מס' 10</u>

נתונה הפונקציה $y=f(x)$ המקיימת $f(1)=3$ ו- $f'(1)=5$

נסמן: $g(x)=x^2\cdot f(x)$

צריך להבין

אזי הערך של $g'(1)=\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}}$ הוא

1. 11
2. 8
3. לא קיים
4. 0
5. שלילי

$$g'(x)=2x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)$$

$$g'(1)=2\cdot 1\cdot f(1)+1^2\cdot f'(1)$$

נתון

$$=2\cdot 3+1\cdot 5$$

$$=\boxed{11}$$

איך בודקים גזירות דרך ? 1. רציפות - ערך הפו' = גבול מימין = גבול משמאל.

2. נגזרת - חישוב גבול נגזרת או

$\boxed{\text{גבול הנגזרת מימין} = \text{גבול הנגזרת משמאל}}$

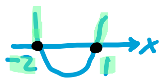
פינת התזכורת
הסרת ערך מוחלט
$|+| = (\ \ )$
$|-| = -(\ \ )$

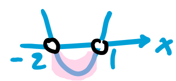
גזירות

2. **בדוק לפי הגדרת הנגזרת** האם הפונקציה $g(x)=\left|x^2+x-2\right|$ גזירה ב- $x=-2$.

נכתוב את הפו' כמפוצלת.

$$g(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & x^2+x-2 \geq 0 \\ -(x^2+x-2) & x^2+x-2 < 0 \end{cases}$$





$$\boxed{g(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & x\leq -2 \text{ או } x\geq 1 \\ -x^2-x+2 & -2<x<1 \end{cases}}$$

1. האם הפו' רציפה ב $x=-2$:

נימוק 1 מומלץ

הפו' מוגדרת ב $x=-2$
וערך מוחלט לא מייצר אי רציפות
לכן הפו' רציפה שם.

או

נימוק 2

$g(-2)=(-2)^2-2-2=4-4=\boxed{0}$

$\lim_{x\to -2^+} -x^2-x+2 = -4+4=\boxed{0}$

$\lim_{x\to -2^-} x^2+x-2 = 4-4=\boxed{0}$

כולם שווים לכן רציפה שם

2. גבול נגזרת:

לפי הגדרת הנגזרת:

$$g(x)=|x^2+x-2|$$

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$g'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|(h-2)^2+(h-2)-2|-|(-2)^2+(-2)-2|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2-4h+\cancel{4}+h-\cancel{2}-\cancel{2}|-|\overset{0}{\overbrace{4-4}}|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2-3h|}{h}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\begin{cases}\overset{|-|}{\lim_{h\to 0^+}}\dfrac{-(h^2-3h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\dfrac{-\cancel{h}(h-3)}{\cancel{h}}=\boxed{3}\\[2em] \overset{|+|}{\lim_{h\to 0^-}}\dfrac{h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0^-}\dfrac{\cancel{h}(h-3)}{\cancel{h}}=\boxed{-3}\end{cases}$$

$\neq$ לא קיים

מסקנה: גבול הנגזרת לא קיים לכן הפו' לא גזירה ב $x=-2$.

בדוק לפי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה $g(x)=\left|x^2+x-2\right|$ גזירה ב- $x=-2$.

1. בדוק תפו' רציפה ב $x=-2$:

נימוק 1

הפו' מוגדרת ב $x=-2$
וערך מוחלט לא מייצר אי רציפות
לכן הפו' רציפה שם.

2. לפי הגדרת הנגזרת:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$g'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|(h-2)^2+(h-2)-2\right|-\left|(-2)^2+(-2)\right.}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left|h^2-4h+\cancel{4}+h-\cancel{2}-\cancel{2}\right|-\left|\overbrace{4-4}^{0}\right|}{h}$$

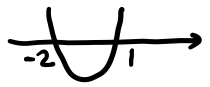
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left|h^2-3h\right|}{h}\ \text{"}\tfrac{|0|}{0}\text{"}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-(h^2-3h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-\cancel{h}(h-3)}{\cancel{h}}=\boxed{3} & |-| \\[2ex] \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(h^2-3h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\cancel{h}(h-3)}{\cancel{h}}=\boxed{-3} & |+|\end{cases}$$

$$3\neq -3$$

מסקנה: גבול הנגזרת לא קיים לכן הפו' לא גזירה ב $x=-2$.

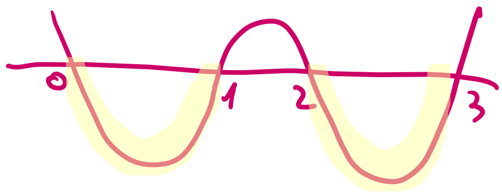
בדוק לפי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה $g(x)=\left|x^2+x-2\right|$ גזירה ב- $x=-2$.

$y=x^2+x-2$



$g=\left|x^2+x-2\right|$

$f(x)$



$|f(x)|$