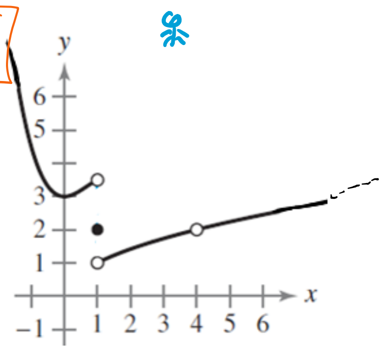
תרגיל כיתה 3-4 במתמטיקה א (גבולות)

חלק א'

א. התבוננו בגרף הפונקציה $f(x)$ וחשבו את הגבולות/הערכים הבאים:



הערך של הפונ' (y)

$f(1) = 2$

גבול

$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3.5 \end{cases}$ $\neq$ לא קיים!

$f(4) =$ לא מוגדר (חור)

$\lim_{x\to 4} f(x) = \boxed{2}$

גבול ימני = גבול שמאל לפי התשובה 2

לאינסוף הגבול הוא הכי גדול

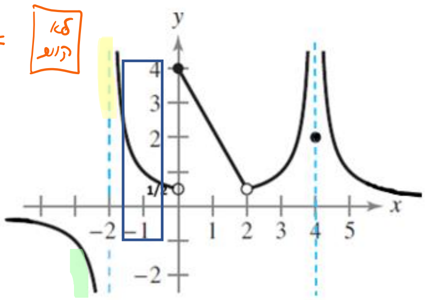
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$\cancel{\infty^{+}}$

לא קיים ב ∞

ב. התבוננו בגרף הפונקציה $g(x)$ וחשבו את הגבולות/הערכים הבאים:



$g(-2) =$ לא מוגדר

$\lim_{x\to-2} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -2^+} g(x) = \infty \\ \lim_{x\to -2^-} g(x) = -\infty \end{cases}$ $\neq$ לא קיים

$g(4) = 2$

$\lim_{x\to 4} g(x) = \begin{cases} \text{ימני } \infty \\ \text{שמאל } \infty \end{cases} = \boxed{\infty}$

$g(0) = 4$

$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x)} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} g(x) = 4 \\ \lim_{x\to 0^-} g(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\neq$ לא קיים

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$

חישוב גבולות

ג. חשבו את הגבולות הבאים:

נתחיל בהצבה:

הגבול מוגדר - התוצאה מיידית.

1. $\lim_{x\to 4} 7x+4 = \overset{28}{7\cdot 4}+4 = 32$

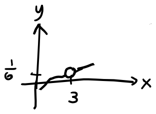
2. $\lim_{x\to 3} 5 = 5$

הגבול לא מוגדר - נפעיל אסטרטגיות בהתייחס לסוג הגבול.

$\frac{1}{0}$ בהמשך

"$\frac{0}{0}$" אסטרטגיה: פירוק לגורמים/ הרחבה בצמוד (שורשים)/ לופיטל (בהמשך) (עוד לא למדנו)

3. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$



פירוק לגורמים

4. $\lim_{x\to 2}\frac{1x^2-x-2}{3x^2+x-14} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to 2}\frac{1\cdot\cancel{(x-2)}(x+1)}{3\cancel{(x-2)}(x+\frac{7}{3})} =$

מוצאים במחשבון

$2, -\frac{7}{3}$

טריק

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

מוצאים x_1, x_2 במחשבון

$= \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{3x+7} = \frac{3}{13}$

הרחבה בצמוד

5. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+15}-4)\cdot(\sqrt{x+15}+4)}{(x-1)\,(\sqrt{x+15}+4)} =$

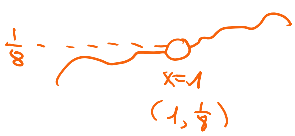
ביטוי צמוד

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(\sqrt{\ }+ ☺)(\sqrt{\ }- ☺) = (\sqrt{\ })^2 - ☺^2$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+15-16}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+15}+4)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+15}+4} = \frac{1}{8}$

$(1,\frac{1}{8})$ חור



$\frac{\infty}{\infty} = \infty$

$\frac{\infty}{\infty} = k$ קבוע

$\frac{\infty}{\infty} = 0$

אסטרטגיה: הוצאת גורם דומיננטי/ לופיטל (בהמשך) $\pm\frac{\infty}{\infty}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-9} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(1-\frac{9}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x(1-\frac{9}{x^2})} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} \boxed{0}$

$x \to \infty$, $\frac{9}{x^2} \to 0$

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2+3x+5}{2x^2-9x+1} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}(4+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2})}{\cancel{x^2}(2-\frac{9}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

$\frac{3}{x} \to 0$, $\frac{5}{x^2} \to 0$, $\frac{9}{x} \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to 0$

הוצאת גורם דומיננטי

$5^\infty = \infty$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\cdot5^x+1}{15\cdot7^x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x(3+\frac{1}{5^x})}{7^x\cdot 15} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^x \cdot \frac{3+\frac{1}{5^x}}{15} = 0\cdot\frac{3}{15} = \boxed{0}$

$\left(\frac{5}{7}\right)^x \to 0$, $\frac{1}{5^x} \to 0$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0<a<1 \\ \infty & a>1 \end{cases}}$$

$(\Delta+\square)(\Delta-\square)$

אסטרטגיה: הוצאת גורם דומיננטי/ הרחבה בצמוד "$\infty - \infty$"

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}-x+3}{x} \overset{\text{"}\frac{\infty-\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\sqrt{x^2+9}-(x-3)]}{x} \cdot \frac{[\sqrt{x^2+9}+(x-3)]}{[\sqrt{x^2+9}+(x-3)]} =$

דרך א

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+9-(x-3)^2}{x[\sqrt{x^2+9}+(x-3)]} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+\cancel{9}-(\cancel{x^2}-6x+\cancel{9})}{x[\quad]} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6\cancel{x}}{\cancel{x}[\sqrt{x^2+9}+(x-3)]} = \frac{6}{\infty} = \boxed{0}$

דדרך ב

$\sqrt{\square+\Delta} \neq \sqrt{\square}+\sqrt{\Delta}$

$\sqrt{\square\cdot\Delta} = \sqrt{\square}\cdot\sqrt{\Delta}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}-x+3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{9}{x^2})}-x+3}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x+3}{x}$

$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x\geq0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

(כי x חיובי (שואף ∞

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x+3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-1+\frac{3}{x})}{\cancel{x}_{1}} =$

$\frac{9}{x^2} \to 0$, $\frac{3}{x} \to 0$

$\frac{\sqrt{1}-1+0}{1} = \boxed{0}$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{x}_{\to\infty}\sqrt{1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}=\infty$$

באופן דומה השני

"$\infty-\infty$"

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{}-\sqrt{}\right)\left(\sqrt{}+\sqrt{}\right)}{\left(\sqrt{}+\sqrt{}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\cancel{x^2}-2x-1)-(\cancel{x^2}-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-1+7x-3}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\ldots$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(5-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{7}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{0}}\right)}=\frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{5}{2}=\boxed{2.5}$$

$(e^2)^x$ Vs 3^x

"$\infty-\infty$"

11. $\lim_{x\to\infty} 3e^{2x} - 2\cdot 3^x =$

$a^\infty \to \infty \quad a>1$

$a^\infty \to 0 \quad 0<a<1$

$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

"$\infty-\infty$"

11. $\lim_{x\to\infty} 3e^{2x} - 2\cdot 3^x = \lim_{x\to\infty} e^{2x}\left(3 - \frac{2\cdot 3^x}{(e^2)^x}\right)$

$\lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{2x}}_{\infty}\left[3 - 2\underbrace{\left(\frac{3}{e^2}\right)^x}_{0^+}\right] = \boxed{\infty}$

$e^{2x} = (e^2)^x$

חלק ב'

$\frac{1}{0^+}\to\infty \qquad \frac{1}{0^-}\to-\infty \qquad "\frac{1}{0}" =$ לא מוגדר

אסטרטגיה: פיצול לגבול ימין ושמאל $(a\neq 0)$ $"\frac{a}{0}"$

12. $\lim_{x\to 1^+} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{0^+} = \infty$

"$\frac{3}{0}$"

13. $\lim_{x\to 3} \frac{x}{x^2-9} = \begin{cases} \lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x^2-9} = \frac{3}{0^+} = \infty \\ \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x^2-9} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{cases}$ $\neq$ הגבול לא קיים!

"$\frac{3-\sqrt{3}}{0}$"

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{3+x}}{x} = \frac{1.6}{0} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{3+x}}{x} \overset{"\frac{1.6}{0^+}"}{=} \infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{3+x}}{x} \overset{"\frac{1.6}{0^-}"}{=} -\infty \end{cases}$ $\neq$

הגבול לא קיים!

14. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{6}\right)^{\left(\frac{1}{x^2-9}\right)} \overset{\text{"}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{0}}\text{"}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{x^2-9}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{0^+}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{x^2-9}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{0^-}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{\infty} = \infty \end{cases}$

$\neq$

גבול
לא קיים!

13. $\lim\limits_{x\to 1^+} \overset{\frac{1}{0^+}}{\frac{x^2}{x^2-1}} - \overset{\frac{1}{0^+}}{\frac{2}{x-1}} \overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x-1}^{\,/x+1} =$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x-2}{x^2-1} \overset{\frac{-3}{0^+}}{=} \boxed{-\infty}$

"$1^{\pm\infty}$" אסטרטגיה: אויילר/ שימוש ב"אילן" (בהמשך)

:אוילר

$$\lim_{\blacksquare\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\blacksquare}\right)^{\blacksquare} \overset{1^{\infty}}{=} e$$

$$\lim_{\blacksquare\to 0}(1+\blacksquare)^{\frac{1}{\blacksquare}} = e$$

כדי להשתמש באוילר צריכים להתקיים 2 תנאים :

1. הגבול שואף ל $1^{\pm\infty}$
2. מבנה ייחודי $\left(1+\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a}}$

15. $\lim_{x\to 0^+}(1+4x)^{\frac{1}{x}} \underset{\text{שלב}}{\overset{"1^{\infty}"}{=}} \lim_{x\to 0^+}\left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^{\frac{4x}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^4 = \boxed{e^4}$

16. (לבד) $\lim_{x\to 0+}(1+x^3)^{\frac{1}{x^2}} =$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

17. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\sqrt{x}} \underset{\text{שלב}}{\overset{"1^{\infty}"}{=}} \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{-x}\right)^{\frac{-x}{3}}\right]^{\frac{3}{-x}\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-3\sqrt{x}}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-3}{\sqrt{x}}} = e^0 = \boxed{1}$

18. (לבד) $\lim_{x\to 0}(1+\mathrm{x}+x^2)^{-\frac{1}{2x}} =$

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{x^2+5x-1}{x^2+3x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}\right)} = 1$$

19. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5\mathrm{x}-1}{x^2+3x}\right)^{-4x+1} \overset{\text{"}1^{-\infty}\text{"}}{=}$$

דרך א

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+5x-1}{x^2+3x}-1\right)^{-4x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{x^2}+5x-1-\cancel{x^2}-3x}{x^2+3x}\right)^{-4x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3x}\right)^{\frac{x^2+3x}{2x-1}}\right]^{\frac{2x-1}{x^2+3x}\cdot(-4x+1)} = \ldots$$

מפה ועכשיו להמשיך..

דרך ב

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+2x}{x^2+3x}\right)^{-4x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2+3x}+\frac{2x-1}{x^2+3x}\right)^{-4x+1} =$$

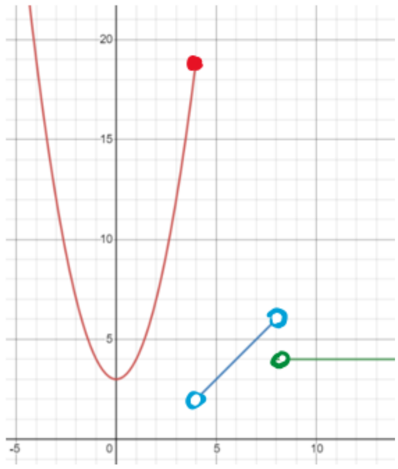
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3x}\right)^{\frac{x^2+3x}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2+3x}\cdot(-4x+1)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{-8x^2+2x}{x^2+3x}} = e^{\text{"}\frac{\infty-\infty}{\infty}\text{"}}$$

$$e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(-8+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}\right)}} = e^{-8} = \boxed{\frac{1}{e^8}}$$

גבול של פונקציה מפוצלת

20. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \leq 4 \\ x - 2 & 4 < x < 8 \\ 4 & x > 8 \end{cases}$



- $\lim_{x \to 9} f(x) = 4$
- $\lim_{x \to 3} f(x) = 3^2 + 3 = 12$
- * $\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 4^+} x - 2 = 4 - 2 = 2 \\ \lim_{x \to 4^-} x^2 + 3 = 4^2 + 3 = 19 \end{cases}$ $\neq$ לא קיים
- $\lim_{x \to 8^-} f(x) =$

  $\lim_{x \to 8^-} x - 2 = 8 - 2 = \boxed{6}$

21. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x + 5} & x \leq 4 \\ 2x - 9 & 4 < x < 8 \\ -6 & x > 8 \end{cases}$

- $\lim_{x \to -5} f(x) =$
- $\lim_{x \to 4} f(x) =$
- $\lim_{x \to 6} f(x) =$
- $\lim_{x \to 8} f(x) =$
- $\lim_{x \to 10} f(x) =$

22. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} & x < 0 \\ 3^{-\frac{1}{x}} + 2 & x > 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

- $\lim\limits_{x \to \infty} f\left(\frac{2}{x}\right) =$

<u>גבול ערך מוחלט</u>

$|+| = (\;)$

$|-| = -(\;)$

להסיר או לא להסיר?

זאת השאלה ☺

אין בעיה עם הערך המוחלט

23. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{|x+1|}{x+13} = \boxed{\frac{4}{16}}$

אין בעיה עם הערך המוחלט

24. $\lim\limits_{x \to 7} \frac{|9-x|}{x-7} \overset{\text{"}\frac{2}{0}\text{"}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 7^+} \frac{|9-x|}{x-7} = \frac{2}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 7^-} \frac{|9-x|}{x-7} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}$ $\neq$ לא קיים!

יש בעיה. רוצים לכנס אברים והערך המוחלט מפריע. בסביבה 10 $|+|$

25. $\lim\limits_{x \to 10} \frac{\overset{+}{|2x-6|}-14}{x-10} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x \to 10} \frac{2x-6-14}{x-10} = \lim\limits_{x \to 10} \frac{2x-20}{x-10} = \lim\limits_{x \to 10} \frac{2\cancel{(x-10)}}{\cancel{(x-10)}} = \boxed{2}$

רוצים לכנס אברים וערך המוחלט מפריע. נגלה את הסימן בתוכו רגע. ☺

26. $\lim\limits_{x \to 10} \frac{6}{\underset{-}{|x-12|}-2} \overset{\text{"}\frac{6}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x \to 10} \frac{6}{-(x-12)-2} = \lim\limits_{x \to 10} \frac{6}{-x+12-2} = \lim\limits_{x \to 10} \frac{6}{10-x} =$

$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 10^+} \frac{6}{10-x} = \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 10^-} \frac{6}{10-x} = \frac{6}{0^+} = \infty \end{cases}$ $\neq$ לא קיים!

27. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{|x-10|}{(x-10)(x+2)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 10^{+}}\frac{\overset{|+|}{\cancel{x-10}}}{\cancel{(x-10)}(x+2)} = \boxed{\frac{1}{12}} \\ \lim\limits_{x\to 10^{-}}\frac{-\cancel{(x-10)}}{\underset{|-|}{\cancel{(x-10)}}(x+2)} = \boxed{-\frac{1}{12}} \end{cases} \neq$

לא קים

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|2-x|-3x}{|2x-3|-x} =$

- מצאו את כל ערכי הפרמטר a עבורם $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ קיים

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{\frac{1}{e^{x-1}}+1} & x < 1 \\ \dfrac{|1-x|}{x-1} + \ln x - \frac{1}{2} & x > 1 \end{cases}$

<u>לסיכום:</u>

סוג הגבול	אסטרטגיה
$\frac{0}{0}$	- פירוק לגורמים, וצמצום הגורם המאפס. - הרחבה בצמוד (שורש ריבועי).
$\frac{\text{מספר השונה מאפס}}{0}$	פיצול לגבולות חד צדדיים.
$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	- הוצאת גורמים דומיננטיים (או חלוקת המונה והמכנה בגורם דומיננטי של מונה/מכנה)
$\infty - \infty$	- הוצאת גורם דומיננטי. - הרחבה בצמוד (שורש ריבועי).
$1^{\pm\infty}$	- אוילר (במידה ויש את המבנה המיוחד שלו)
סכום/הפרש שברים	מעבר למכנה משותף