

נגזרות

נוסחאות גזירה לפי סוג הפונקציה

תהיינה $x \in A$ גזירות בתחום A , אזי לכל $f(x), g(x)$

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{R}$ $C' = 0$ $x' = 1$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(e^x)' = e^x$

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(תחומי ההגדרה של הפונקציות כפי שהוגדרו בהרצאה בפרק של פונקציות).

דוגמאות:

1. $y = x^5$ $y' = 5x^4$

2. $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

3. $y = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ $y' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

4. $y = \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $y = \sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$ $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

6. $y = x$ $y' = 1$

7. $y = 6$ $y' = 0$

8. $y = 2^x$ $y' = 2^x \ln 2$

9. $y = \log_3 x$ $y' = \frac{1}{x \ln 3}$

משפט: כלל השרשרת (נגזרת של הרכבה) :

(בנוסחאות הניל, אם במקום x יהיה u , בחישוב הנגזרת נכפול בנגזרת הפנימית u')

$$y = u^n$$

$$y' = n \cdot u^{n-1} u'$$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u u'$$

$$y = \ln u$$

$$y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \sqrt{u}$$

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

דוגמאות:

10. $y = (2x - 3)^5$ $y' = 5(2x - 3)^4 \cdot 2 = 10(2x - 3)^4$

11. $y = (2\ln x - 1)^7$ $y' =$

12. $y = \sqrt{e^x + 1}$ $y' =$

13. $y = \ln(e^x + 1)$ $y' =$

14. $y = e^{\sqrt{x}}$ $y' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

15. $y = e^{3x}$ $y' = 3e^{3x}$

16. $y = e^{\frac{1}{x}}$ $y' = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)$

17. $y = \ln(5x)$ $y' = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$

18. $y = \ln(x^2)$ $y' =$

19. $y = \ln^3 x$ $y' =$

20. $y = \sqrt{\ln 2x + 1}$ $y' =$

ארכיטקטורה של גזירות

תהיינה $x \in A$ גזירות בתחום A , אזי לכל $f(x), g(x)$

1. $(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad g(x) \neq 0$

דוגמאות:

1. $y = 3 + e^{3x} - 5 \cdot 2^x \quad y' = 3e^{3x} - 5 \cdot 2^x \ln 2$

2. $y = 4x - 2\sqrt{x^2 + 1} \quad y' = 4 - \frac{2 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3. $y = 3x^4 - \ln(3x) + 2x + 7 \quad y' =$

4. $y = \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \quad y' =$

5. $y = 2e^{3x} - 3e^{-2x} \quad y' =$

$$6. \quad y = x^3 e^{4x} \quad y' = 3x^2 e^{4x} + x^3 e^{4x} \cdot 4 = (3x^2 + 4x^3)e^{4x}$$

$$7. \quad y = x^2 \ln x \quad y' =$$

$$8. \quad y = x^2 e^{\sqrt{x}} \quad y' =$$

$$9. \quad y = 5x^3 \cdot \sqrt{2x+7} \quad y' =$$

$$10. \quad y = \frac{\ln x}{x} \quad y' =$$

$$11. \quad y = \frac{x}{(x-1)^2} \quad y' =$$

$$12. \quad y = \frac{\ln^3 x}{x} \quad y' =$$

$$13. \quad y = x \ln^2 x \quad y' =$$

$$14. \quad y = \frac{\ln x}{1 - \ln x} \quad y' =$$

$$15. \quad y = x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad y' =$$

$$16. \quad y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \quad y' =$$

$$17. \quad y = \frac{\ln x}{x^2} \quad y' =$$

$$18. \quad y = \frac{x}{(x+2)^2} \quad y' =$$

תרגילים:

נתונה פונקציה המקיים $f(2) = 3$

a. חשב את $g'(1)$. $g(x) = f(2x)$

b. חשב את $l'(2)$. $l(x) = xf(x)$

c. חשב את $h'(2)$. $h(x) = xf(6 - 2x)$

d. $k'(1)$. חשב את $k(x) = \sqrt{1 + (f(2x))^2}$

פתרון: כלל השרשרת (נגזרת של הרכבה):

$$g(x) = f(2x) \quad \text{a.}$$

$$g'(x) = f'(2x) \cdot 2 \quad \text{נגזר}$$

$$g'(1) = f'(2) \cdot 2 = 10$$

$$.l(x) = xf(x) \quad \text{b.}$$

נגזר

$$l'(x) = 1f(x) + xf'(x)$$

$$l'(2) = f(2) + 2f'(2) = 13$$

$$.h(x) = xf(6 - 2x) \quad \text{c.}$$

נגזר

$$h'(x) = 1f(6 - 2x) + xf'(6 - 2x)(-2)$$

$$h'(2) = f(2) + 2f'(2)(-2) = 3 - 20 = -17$$

$$.k(x) = \sqrt{1 + (f(2x))^2} .$$

נגזר

$$k'(x) = \frac{2f(2x)f'(2x)2}{2\sqrt{1 + (f(2x))^2}} = \frac{2f(2x)f'(2x)}{\sqrt{1 + (f(2x))^2}}$$

$$k'(1) = \frac{2f(2)f'(2)}{\sqrt{1 + (f(2))^2}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$$

גזירה לוגריתמית

שימוש בחוקי לוגריתמים לצורך גזירה.

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

3. $\ln x^k = k \ln x$

4. $e^{\ln A} = A$

(תחום ההגדרה כפי שהוגדר בהרצאה בפרק של פונקציות).

דוגמאות:

1. $y = \ln\left(\frac{e^x}{x-2}\right)$

פתרון : לפי חוקי לוגריתמים

$$y = \ln\left(\frac{e^x}{x-2}\right) = \ln e^x - \ln(x-2) = x - \ln(x-2)$$

נגזר

$$y' = 1 - \frac{1}{x-2}$$

2. $y = x^{4x}$

פתרון : לפי חוקי לוגריתמים

$$y = x^{4x} = e^{\ln x^{4x}} = e^{4x \ln x}$$

נגזר

$$y' = e^{4x \ln x} \left(4 \ln x + 4x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{4x \ln x} (4 \ln x + 4) = 4x^{4x} (\ln x + 1)$$

$$3. \quad y = \sqrt[x]{x^2}$$

פתרון : לפי חוקי לוגריתמים

$$y = \sqrt[x]{x^2} = x^{\frac{2}{x}} = e^{\ln x^{\frac{2}{x}}} = e^{\frac{2}{x} \ln x} = e^{\frac{2 \ln x}{x}}$$

נגזר

$$\begin{aligned} y' &= e^{\frac{2 \ln x}{x}} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{x} x - 2 \ln x}{x^2} = e^{\frac{2 \ln x}{x}} \cdot \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} = \\ &= \sqrt[x]{x^2} \cdot \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{2\sqrt[x]{x^2}(1 - \ln x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$4. \quad y = \ln\left(\frac{e^x}{(x-10)^3}\right)$$

פתרון : לפי חוקי לוגריתמים

$$\begin{aligned} y &= \ln(e^x) - \ln((x-10)^3) = \\ &= x \ln(e) - 3 \ln(x-10) = x - 3 \ln(x-10) = \end{aligned}$$

נגזר

$$y' = 1 - \frac{3}{x-10}$$

$$5. \quad y = x^{2-\ln x}$$

$$6. \quad y = \sqrt[x]{e^x + 1}$$

7. הוכחו את נוסחת הגזירה של המנה באמצעות גזירה לוגריתמית.

הוכחה:

$$\mathbf{y} = \frac{f}{g}$$

$$y = e^{\ln(\frac{f}{g})}$$

$$y = e^{\ln f - \ln g}$$

$$\mathbf{y}' = e^{\ln f - \ln g} \cdot \left(\frac{1}{f} \cdot f' - \frac{1}{g} \cdot g' \right)$$

$$y' = e^{\ln f - \ln g} \cdot \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right)$$

$$y' = \frac{f}{g} \cdot \frac{f'g - fg'}{f \cdot g} = \underline{\underline{\frac{f'g - fg'}{g^2}}}$$

תרגילים נוספים

.1 הראה שהפונקציה $f(x) = e^{3x}$ מקיימת לכל x $f''(x) - 2f'(x) - 3f(x) = 0$.

פתרון

$$f(x) = e^{3x}$$

$$f'(x) = 3e^{3x}$$

$$f''(x) = 9e^{3x}$$

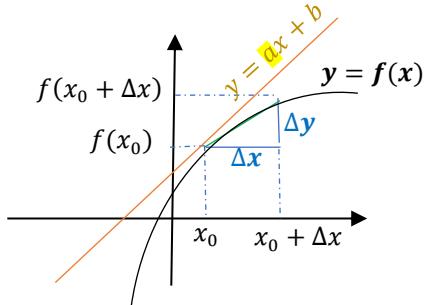
לכן

$$f''(x) - 2f'(x) - 3f(x) = 9e^{3x} - 6e^{3x} - 3e^{3x} = 0$$

.2 הראה שהפונקציה $f(x) = x^2 + x + 5$ מקיימת לכל x $5f''(x) + xf'(x) - 2f(x) + x = 0$.

דיפרנציאל

פירוש גיאומטרי - נגזרת פונקציה בנקודה $x_0 = x$ (אם קיימת), שווה לשיפוע המשיק בנקודה זו.



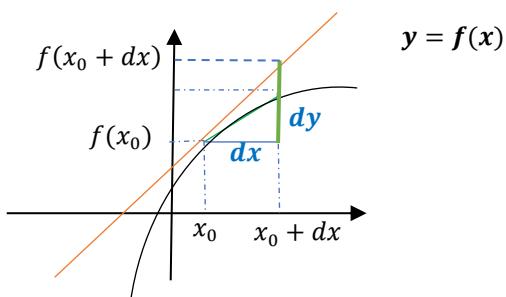
$$a = f'(x_0)$$

הסבר: נתבונן בקטע (בירוק) המחבר בין שתי הנקודות הנתונות.

מאנליטית ידוע ששיעור קטע/ישר בין שתי נקודות נתון ע"י:

כלל ש- Δx קטן, שיפוע הקטע יתקרב לשיפוע המשיק (בכתחום)

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$dx = \Delta x$$

$$\text{לכן } dy = f'(x) dx \text{ או } y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

באופן כללי תהיה הנגזרת של הפונקציה α לפי המשתנה β

משמעות כלכלית שנייה ב- α כתוצאה מהגדלת β ב-1

תרגילים על דיפרנציאל

.1. חשבו בקרוב

$$\sqrt{49.85} \text{ .a}$$

$$\ln(0.98) \text{ .b}$$

.2. פונקציית עלות כוללת נתונה על ידי $300 + 50x - \frac{1}{2}x^2$

a. חשבו את $c(51) - c(50)$ והסבירו

b. חשבו את $\frac{dc}{dx}(50)$ והסבירו

c. חשבו את c''

.3. נתונה הפונקציה $P = 2x + 8x^2 - 3e^x$ חשבו את $\frac{dp}{dx}$ עבור $x = 0$

פתרון:

$$\frac{dp}{dx} = 2 + 16x - 3e^x = -1$$

.4. נתונה הפונקציה $T = 3p + 5ap^2 - 12$

עבור $a = 1$ ו $p = 1$

חשבו את $\frac{dT}{dp}$.a

חשבו את $\frac{dT}{da}$.b

.5. פונקציית הביקוש נתונה על ידי $x = 300 - 12\sqrt{P} - 6p$.

כאשר x כמות ו- p מחיר

$$\frac{dx}{dp}$$
 חשבו את

a. כאשר $P = 4$

b. כאשר $P = 25$

פתרון

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{12}{2\sqrt{p}} - 6$$

$$\frac{dx}{dp} = -9 \quad P = 4$$

$$\frac{dx}{dp} = -7.2 \quad P = 25$$

אם יש זמן פותרים לבד

.1. גורו את הפונקציות

$$a. \quad y = x^2 e^{\frac{2}{x}} \quad y' =$$

$$b. \quad y = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{2}{x}}}{x+1}$$

$$c. \quad y = x^3 \ln 2x \quad y' =$$

$$d. \quad y = 4x^3 e^{\sqrt{x}} \quad y' =$$

$$e. \quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad y' =$$

$$f. \quad y = \frac{x}{(x+1)^3} \quad y' =$$

$$g. \quad y = \frac{\ln^3 x}{x} \quad y' =$$

$$h. \quad y = \sqrt[x]{x^4}$$

$$i. \quad y = x^{1-2 \ln x}$$

2. נתונה הפונקציה f המקיים ש- $f(1) = 8$ ו- $f(x) = \sqrt{1 + x \cdot f(x^3)}$

דיעו כי $g'(1) = 4$ אז

$$5 < f'(1) < 7 \quad .1$$

$$f'(1) < -6 \quad .2$$

$$f'(1) = 16 \quad .3$$

$$-6 < f'(1) < 0 \quad .4$$

3. נתונה הפונקציה f המקיים ש- $f'(2) = 1$ ו- $f(x) = \frac{f(2x)}{x-2}$

אז $g'(1) = 3$ ואם

$$f(2) = -5 \quad .1$$

$$f(2) = -1 \quad .2$$

$$f(2) > 2 \quad .3$$

$f(2)$ לא ניתן לחישוב $.4$

$f(2)$ יש שתי תוצאות ל-

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^{\ln x} - x$ שווה $f'(e)$ לא

3 .1

e .2

0 .3

$\frac{1}{e}$.4

.5 אף תשובה לא נכונה

5. נתונה הפונקציה $K = P^2at + \frac{3pa-5}{p-a}$

א. חשבו את $\frac{dK}{dt}$

ב. חשבו את $\frac{dK}{dP}$

ג. חשבו את $\frac{dK}{da}$

לקראיה עצמית:

8. $y = \ln\left(\frac{(x+1)^{13} \cdot (x-4)^{11}}{(x-1)^5 \cdot (x-10)^{21}}\right)$

$$y = \ln((x+1)^{13} \cdot (x-4)^{11}) - \ln((x-1)^5 \cdot (x-10)^{21})$$
$$y = \ln(x+1)^{13} + \ln(x-4)^{11} - (\ln(x-1)^5 + \ln(x-10)^{21})$$
$$y = \ln(x+1)^{13} + \ln(x-4)^{11} - \ln(x-4)^5 - \ln(x-10)^{21}$$
$$y = 13 \ln(x+1) + 11 \ln(x-4) - 5 \ln(x-4) - 21 \ln(x-10)$$

נגזר:

$$\textcolor{brown}{y'} = \frac{13}{x+1} + \frac{11}{x-4} - \frac{5}{x-1} - \frac{21}{x-10}$$