תרגיל כיתה 11 במתמטיקה א (רול וקיצון מוחלט)

משפט רול - Rolle

תהא $f(x)$ פונקציה המקיימת:

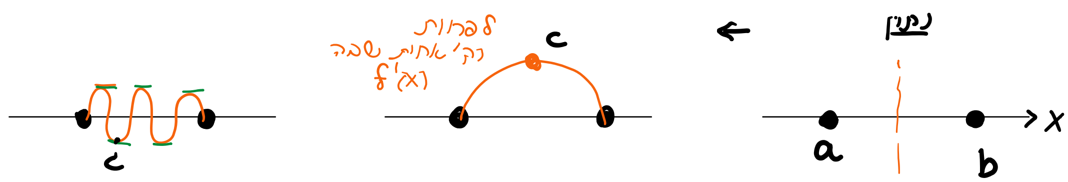
1. $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.
2. $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b).
3. $f(a)=f(b)$

אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש - $f'(c)=0$. (c נקודת קיצון "עגולה")

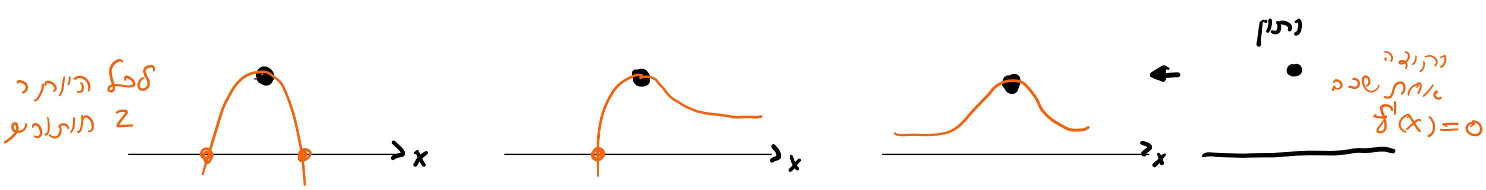
מסקנות ממשפט רול:

א. בתנאי רול: בין כל שתי נקודות בהן $f(x)$ מתאפסת (חותכת את ציר x), קיימת נקודה בה $f'(x)$ מתאפסת.

אם ל- $f(x)$ $n\geq 2$ נקודות חיתוך עם ציר x ⟸ $f'(x)$ מתאפסת **לפחות** $n-1$ פעמים.



ב. אם $f(x)$ גזירה בקטע A , וישנן n נקודות בהן $f'(x)$ מתאפסת בקטע, אז $f(x)$ מתאפסת (חותכת את ציר x) **לכל היותר** $n+1$ פעמים בקטע.



הערה: המסקנות נכונות לגבי כל ישר מהצורה $y=k$ ולא רק לגבי ציר x (שהוא $y=0$).

תרגיל 1

$2x\ f'=0$ רול

הוכיחו שנגזרת הפונקציה $f(x)=x(x^4-3x^2-4)(e^x+2)$ מתאפסת לפחות פעמיים.

מה נראה?

הוכחה:

- $f(x)$ אלמנטרית, רציפה בתחום הגדרתה, כלומר עבור כל x. בפרט רציפה בכל קטע סגור.
- $f(x)$ גזירה עבור כל x (מכפלת פונקציות גזירות – פולינום ומעריכית). בפרט גזירה בכל קטע פתוח.

$$f(x)=x(x^4-3x^2-4)(e^x+2)=0$$

$\boxed{x=0}$

$x^4-3x^2-4=0$

$x^2=t$

$t^2-3t-4=0$

$t=4$ $\quad$ $t=-1$

$x^2=4$ / $\sqrt{\ }$ $\quad$ $\underbrace{x^2}_{0/+}=-1$

$\boxed{x=\pm 2}$ $\quad$ לא x

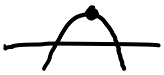
$\underbrace{e^x}_{+}+2=0$

לא x

$f(x)$ רציפה לכל x ובפרט ב $[-2,2]$ וגזירה בכל x ובפרט ב $(-2,2)$

1 $f(x)$ מתאפסת 3 פעמים $\Leftarrow$ לפי משפט רול $y'=0$ לכל הפחות פעמיים.

תרגיל 2 - **לקריאת עצמית**



הוכיחו שלפונקציה $f(x) = (x^2 + x - 2) \cdot e^{x^2}$ יש <u>לפחות</u> נקודת קיצון אחת.

<u>הוכחה:</u>

- $f(x)$ אלמנטרית, רציפה בתחום הגדרתה, כלומר עבור כל x. בפרט רציפה בכל קטע סגור.
- $f(x)$ גזירה עבור כל x (מכפלת פונקציות גזירות). בפרט גזירה בכל קטע פתוח.

יש להראות 2 נק' חיתוך עם ציר x.

$$(x^2+x-2)\cdot \underbrace{e^{x^2}}_{\neq 0}=0$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x=1,-2$$

משפט רול: הפ' רציפה בקטע $[-2,1]$ וגזירה ב $(-2,1)$

ויש לה 2 חיתוכים עם ציר ה x בתחום זה

לכן לפי' לפחות נק' קיצון אחת.

תרגיל 3

0 $\qquad$ $f'=0$

$1 \longrightarrow x$ חיתוך אחד

א. הוכיחו שלמשוואה $x^2 + \ln x = 0$ יש לכל היותר פתרון אחד.

הוכחה:

נעזר במשפט רול:

- נגדיר: $f(x) = x^2 + \ln x$ (בעיה שקולה להראות ש $f(x)$ מתאפסת לכל היותר פעם אחת).
- $f(x)$ אלמנטרית, רציפה בתחום הגדרתה, כלומר עבור כל $x > 0$.
- $f(x)$ גזירה עבור כל $x > 0$ (הינה סכום פונקציות גזירות – לן ופולינום)

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = 0 \qquad \underset{\text{אישור}}{x \neq 0} \quad \text{וגם} \quad \underset{\text{נגטיבה}}{x > 0} \qquad \boxed{x>0}$$

$$\underbrace{2x^2}_{0/+} \overset{+}{+} 1 = 0$$

אין פתרון

f רציפה בכל הקטע סגור שבתחר $x>0$ וגזירה בכל הקטע פתוח שנבחר ב $x>0$.

ו $f' \neq 0$ לכל $x>0$ ⇐ לפי משפט רול לפי f לכל היותר חיתוך אחד עם ציר x

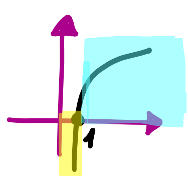
⇐ למשוואה לכל היותר פתרון אחד.

ב. הוכיחו שלמשוואה $x^2 + \ln x = 0$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכחה:

נעזר במשפט ערך הביניים:

*תזכורת – אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וכן $f(a) \cdot f(b) < 0$ אזי קיימת $c \in (a, b)$, כך ש-$f(c) = 0$



$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$\ln e^{☺} = ☺$

$e^{\ln ☺} = ☺$

$f(x) = x^2 + \ln(x)$ $\qquad$ $(x>0$ ת.ה.$)$

התחלפת סימן

$$f(e^{-2}) = (e^{-2})^2 + \ln e^{-2} = e^{-4} - 2 < 0$$
$$f(e^{2}) = (e^{2})^2 + \ln e^{2} = e^{4} + 2 > 0$$

f אלמנטרית רציפה ב $x>0$ ובפרט $[e^{-2}, e^2]$

ו $f(e^{-2}) \cdot f(e^2) < 0$ ⇐ לפי מ.ע.ב. יש לפחות חיתוך אחד.

משילוב של רול + ע.ב.ב יש בדיוק פתרון אחד למשוואה.

תרגיל 4 - לקריאת עצמית

מצאו את מסי' הפתרונות המדוייק למשוואה $x^6 + 2x^4 = 3 - x^2$.

הוכחה:

נעזר במשפט רול:

- נסדר: $x^6 + 2x^4 + x^2 - 3 = 0$
- נגדיר $f(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 - 3$ (בעיה שקולה למצוא את מספר נקודות האיפוס של $f(x)$)
- $f(x)$ אלמנטרית, רציפה בתחום הגדרתה, כלומר עבור כל x.
- $f(x)$ גזירה עבור כל x (פולינום)

$$f'(x) = 6x^5 + 8x^3 + 2x = 0$$

$$2x(3x^4 + 4x^2 + 1) = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x^2 = t$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0$$

$t = -1$ $\quad$ $t = -\frac{1}{3}$

$x^2 = -1$ $\quad$ $x^2 = -\frac{1}{3}$

$\varnothing$ $\quad$ $\varnothing$

לפי משפט רול: לפי לכל היותר 2 נק' חיתוך עם ציר x

נעזר במשפט ערך הביניים:

$f(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 - 3$

$f(x)$ אלמנטרית, רציפה בתחום הגדרתה, כלומר עבור כל x.

$f(-1) = (-1)^6 + 2(-1)^4 + (-1)^2 - 3 = 1$ $\oplus$

החלפת סימן I

$f(0) = -3$ $\ominus$

החלפת סימן II

$f(1) = 1 + 2 + 1 - 3 = 1$ $\oplus$

לפי משפט ע.ה.ב הפו' רציפה ויש 2 החלפות סימן ⇐ יש לה לפחות 2 נק' איפוס.

משילוב המשפטים יש לה בדיוק 2 פתרונות!

תרגיל 5 - לקריאת עצמית

הוכיחו שהפונקציות $f(x)=e^{2x}+\ln x+3$ ו- $g(x)=6x+\ln x+8-1$ נחתכות בדיוק בנק' אחת.

הוכחה : צריך להוכיח שלמשוואה $6x+\ln x+8=e^{2x}+\ln x+3$ פתרון אחד בדיוק (בתחום $x>0$).

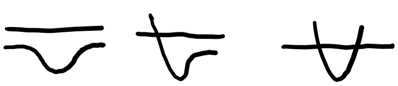
נעזר במשפט רול:

- נסדר : $e^{2x}-6x-5=0$
- נגדיר $h(x)=e^{2x}-6x-5$ (בעיה שקולה להראות ש$h(x)$ מתאפסת פעם אחת בדיוק בתחום $x>0$).
- $h(x)$ רציפה בתחום $x>0$ (הינה הפרש בין $f(x)$ ל-$g(x)$ אשר רציפות בתחום $x>0$).
- $h(x)$ גזירה בתחום $x>0$ (הינה הפרש בין $f(x)$ ל-$g(x)$ אשר גזירות בתחום $x>0$).

רול חסר אפסים

$$h'(x)=2e^{2x}-6=0$$
$$2e^{2x}=6$$
$$e^{2x}=3$$
$$2x=\ln 3$$
$$x=\frac{\ln 3}{2}$$

$\rightarrow$ לפי משפט רול יש נק' אחת בה הנגזרת 0
ולכן יש לכל היותר 2 נק' בהן הפו' מתאפסת.



נעזר במשפט ערך הביניים:

- $h(x)=e^{2x}-6x-5$
- $h(x)$ רציפה בתחום $x>0$

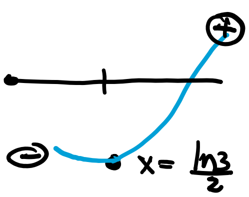
$$h\left(\frac{\ln 3}{2}\right)=e^{2\cdot\frac{\ln 3}{2}}-6\cdot\frac{\ln 3}{2}-5=3-3\ln 3-5=\ominus$$

משמאל

אם יש עוד אחת היא משמאל מרול

$$\lim_{x\to 0^+} e^{2x}-6x-5=e^0-5=-4=\ominus$$

סין



מימין

$$f(5)=e^{10}-35=\oplus$$

לכן יש בדיוק נק' חיתוך אחת!

תרגיל 6

רול+מ.ע.ב

נמקו במדויק בכמה נק' נחתכות הפונקציות :

$$f(x) = e^x - \sqrt{x} + 3x, \quad g(x) = 7x - \sqrt{x} + a, \qquad 5 < a < 7$$

פתרון :

צריך למצוא כמה פתרונות בדיוק למשוואה $7x - \sqrt{x} + a = e^x - \sqrt{x} + 3x$ (בתחום $x \geq 0$)

נעזר במשפט רול:

- נסדר: $0 = e^x - 4x - a$
- נגדיר $h(x) = e^x - 4x - a$ (בעיה שקולה למצוא את מספר נקודות האיפוס של $h(x)$ בתחום $x \geq 0$).
- $h(x)$ רציפה בתחום $x \geq 0$ (הינה הפרש בין $f(x)$ ל-$g(x)$ אשר רציפות בתחום $x \geq 0$).
- $h(x)$ גזירה בתחום $x > 0$ (הפרש בין $f(x)$ ל-$g(x)$ אשר גזירות בתחום $x > 0$)

$$h'(x) = e^x - 4 = 0$$
$$e^x = 4$$
$$x = \ln 4$$

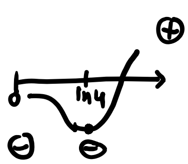
h רציפה ב $x \geq 0$ ולכן בכל קטע סגור שנבחר וגזירה בכל קטע פתוח $x > 0$
ומצאנו ש $h' = 0$ בנקודה אחת ⇐ יש לפו' לכל היותר 2 חיתוך עם ציר x.

$$h(x) = e^x - 4x - a$$

נעזר במשפט ערך הביניים:

h אלמנטרית רציפה $x \geq 0$ ולכן בכל קטע סגור בתחום.

$$h(0) = e^0 - 4 \cdot 0 - a = 1 - \overset{5<a<7}{a} < 0$$ ← נציב את הקצה.



מינ' → $h(\ln 4) = e^{\ln 4} - 4\ln 4 - a = \underbrace{4}_{+} \underbrace{- 4\ln 4 - a}_{+\,\text{מ}} < 0$

יותר גדול e   5<a<7

מעבר סימן

$$h(10) = e^{10} - 40 - \overset{5<a<7}{a} > 0$$

משפט של מ.ע.ב ורול המסקנה שיש בדיוק נק' חיתוך אחת.
פתרון אחד למשוואה.

תרגיל 7

$f'<0$

נתונה f יורדת וגזירה ומקיימת $f(0)=4,\ f(4)=0$. נסמן $g(x)=e^{f(x)}-f(4-x)$

בכמה נקודות חותכת g את הישר $y=5$?

פתרון:

צריך למצוא כמה פתרונות למשוואה $g(x)=5$, כלומר למשוואה: $e^{f(x)}-f(4-x)=5$

נעזר במשפט רול:

- נסדר: $e^{f(x)}-f(4-x)-5=0$
- נגדיר $h(x)=e^{f(x)}-f(4-x)-5$ (בעיה שקולה למצוא את מספר נקודות האיפוס של $h(x)$)
- $h(x)$ גזירה כהפרש והרכבה של פונקציות גזירות (נתון ש- f גזירה), ולכן גם רציפה.

רול:

$$h'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)-f'(4-x)(-1)$$

$$h'(x)=\underbrace{e^{f(x)}}_{+}\cdot\underbrace{f'(x)}_{-}+\underbrace{f'(4-x)}_{-}=-+-=-$$

h' לא מתאפסת לעולם! ולכן לפי משפט רול יש לכל היותר חיתוך אחד.

נעזר במשפט ערך הביניים:

$$h(x)=e^{f(x)}-f(4-x)-5$$

הפו' רציפה.....

מעבר סימן

$$\begin{cases} h(0)=e^{f(0)}-f(4)-5=e^4-0-5=e^4-5>0 \\ h(4)=e^{f(4)}-f(0)-5=e^0-4-5=-8<0 \end{cases}$$

← לפי מ.ע.ב. יש לפחות אחת.

רול + מ.ע.ב ⇐ יש בדיוק פתרון אחד!