חקירה

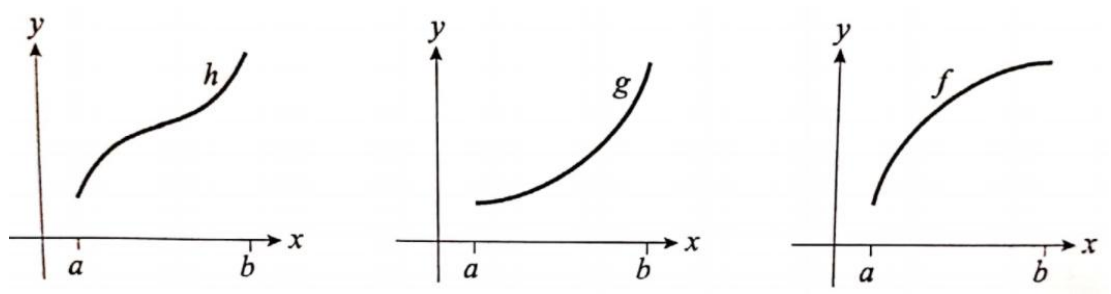
תחומי קמירות וקעירות

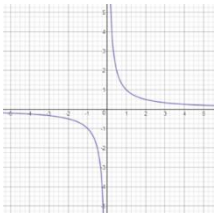
הגדרה: תהא $f(x)$ מוגדרת בקטע I.

- $f(x)$ **קמורה** בקטע I אם המיתר (הקו המחבר) בין כל שתי נקודות על הגרף של f בקטע I נמצא מעל לגרף.
- $f(x)$ **קעורה** בקטע I אם המיתר בין כל שתי נקודות על הגרף של f בקטע I נמצא מתחת לגרף.

הגדרה:

x_0 **נקודת פיתול** של $f(x)$, אם $f(x)$ קמורה מצד אחד של x_0 וקעורה מצד שני ורציפה ב-x_0

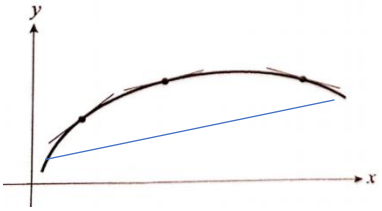




הערה: נקודת פיתול חייבת להיות נקודה רציפה.

למשל: $f(x)=\frac{1}{x}$ ב- $x=0$ אין פיתול, כי היא נקודת אי רציפות.

מציאת תחומי קמירות וקעירות



נתבונן בפונקציה הקעורה f באיור.

שיפוע המשיק בנקודה $(x_0, f(x_0))$ הולך וקטן ככל ש- x_0 גדל.

כלומר, הנגזרת f' היא פונקציה יורדת.

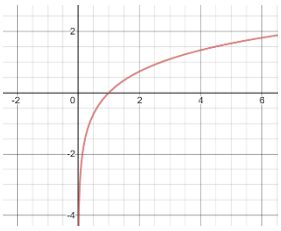
במקרה זה המיתר בין 2 נקודות יהיה מתחת לגרף הפונקציה

הבחנה זו מובילה לקריטריון הבא:

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע I וגזירה בו פעמיים.

- אם בכל נקודה פנימית x של I מתקיים $\boldsymbol{f''(x) > 0}$ (f' עולה בקטע) אז $f(x)$ **קמורה** ב-I.
- אם בכל נקודה פנימית x של I מתקיים $\boldsymbol{f''(x) < 0}$ (f' יורדת בקטע) אז $f(x)$ **קעורה** ב-I.

דוגמאות:

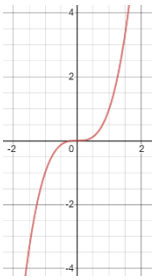


א. $f(x) = \ln x$. f מוגדרת בתחום $(0,\infty)$. נגזור פעמיים בתחום זה:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$\boldsymbol{f''(x) < 0}$ בכל תחום הגדרתה. לכן, f **קעורה** בתחום הגדרתה.

מכאן נובע למשל ש- $ln\frac{a+b}{2} \geq \frac{ln\,a+ln\,b}{2}$



ב. תהי $f(x) = x^3$. f מוגדרת עבור כל x ממשי. נגזור פעמיים:

$$f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f''(x) = 6x$$

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,0)$	$\mathbf{0}$	$(0,\infty)$
$\boldsymbol{f''}$	-	0	+
$\boldsymbol{f}$	$\cap$		$\cup$

מכאן נובע למשל שלכל $a,b > 0$ יתקיים $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

טענה:

אם x_0 היא נקודת פיתול של פונקציה $f(x)$, ו-$f(x)$ גזירה פעמיים ב-x_0, אז $f''(x_0) = 0$

הערות:

א. ייתכן שיש פיתול ב- x_0 , אבל $f''(x_0) \neq 0$.

למשל: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

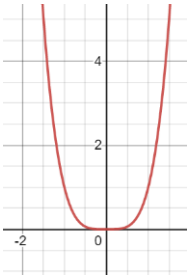
יש פיתול ב- 0, אבל $f''(0) \neq 0$.

הנגזרת ב-0 לא קיימת.

ב. ייתכן ש- $f''(x_0) = 0$ אבל x_0 לא פיתול.

למשל: $f(x) = x^4$. $f''(0) = 0$, אבל 0 אינה נקודת פיתול.

בהנחה ש-f <u>גזירה</u> פעמיים ב-x_0, התנאי $f''(x_0) = 0$ הכרחי לפיתול אך <u>לא מספיק.</u>



תנאי מספיק לפיתול

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ב- x_0 וגזירה פעמיים בסביבתה, פרט אולי ל- x_0 עצמה, אז:

אם הנגזרת השנייה $f''(x)$ משנה סימן ב-x_0, אז x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$.

נסיק ונסכם:

על מנת למצוא נקודות פיתול של $f(x)$ ותחומי קמירות וקעירות:

1. נרכיב רשימת חשודות לפיתול: נקודות בהן $f''(x_0) = 0$ או נקודות (רציפות) בהן $f''(x_0)$ לא קיימת.
2. נצרף לרשימה גם נקודות אי רציפות.
3. נסמן נקודות אלו ב- $x_1 < x_2 < x_3 <\ldots< x_n$
4. בכל הקטעים $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n), (x_n, \infty)$ נבדוק קמירות/קעירות עפ"י סימן הנגזרת השנייה .
5. נקבע את נקודות הפיתול.

הערה: תהא $f(x)$ פונקציה רציפה וגזירה אז בין כל שתי נקודות קיצון יש ל-f נקודת פיתול

תרגיל:

מצאו תחומי קמירות, קעירות ופיתול לפונקציה $f(x) = x^4 - 12x^3$

פתרון:

תחום הגדרה: $\mathbb{R}$

נמצא נקודות חשודות:

נגזור פעמיים:

$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 72x$$

נקודות (רציפות) בהן $f''(x)$ לא קיימת: אין

נשווה ל-0:

$$f''(x) = 12x^2 - 72x = 0$$

$$12x(x-6) = 0$$

$$x = 0, x = 6$$

נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת: $x = 0, x = 6$

נבנה טבלה:

x		0		6	
f''	+	0	-		+
f	∪		∩		∪

תחומי קמירות:

תחומי קעירות:

אסימפטוטות

אסימפטוטה - תופעה של "התקרבות של גרף הפונקציה" לאיזשהו ישר.

אסימפטוטה אנכית $x=x_0$

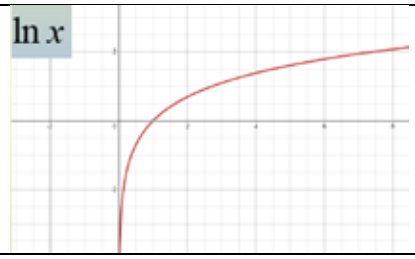
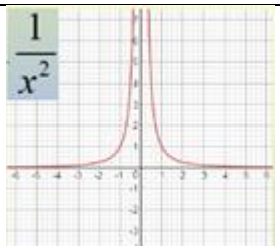
קיימת כאשר $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ו/או $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ (זהו מצב של אי רציפות סוג II).

נשים לב: גרף הפונקציה אינו חותך אסימפטוטה אנכית המתקבלת בנק' שאינה מוגדרת בפונקציה.

מציאת אסימפטוטה אנכית:

נבדוק את **התנהגות הפונקציה בסביבת נקודות חשודות – נק' אי רציפות** (גם בנק' קצה פתוח של הפונקציה)

דוגמאות:

		
אלמנטרית, רציפה עבור $x \geq 0$ יש רציפות חד צדדית ב-0 מימין. משמאל הפונקציה לא קיימת. אין אסימפטוטה אנכית	אלמנטרית, רציפה עבור $x > 0$ חשודה: $x = 0$ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ אסימפטוטה אנכית $x = 0$	אלמנטרית, רציפה עבור $x \neq 0$ חשודה: $x = 0$ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ אסימפטוטה אנכית $x = 0$.

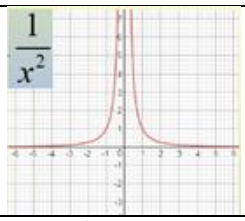
אסימפטוטה אופקית y=L

קיימת כאשר קיים גבול סופי L ב- ∞ ו/או ב- -∞ (לכל היותר 2)

מציאת אסימפטוטה אופקית:

נבדוק את **התנהגות הפונקציה "בקצוות".** כלומר נחשב את הגבולות: $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim_{x\to \infty} f(x)$

דוגמאות:

	
$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$ אין אסימפטוטה אופקית	$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ אסימפטוטה אופקית $y = 0$.

<u>תרגילים:</u>

מצאו אסימפטוטות לפונקציות שלפניכם:

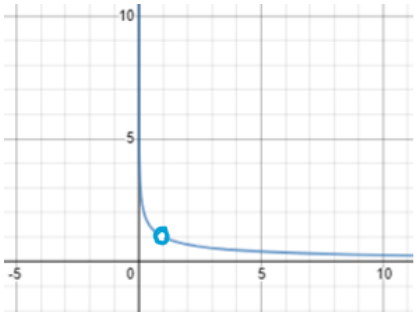
- $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

<u>אסימפטוטה אנכית:</u>

<u>תחום הגדרה:</u> $\{x|\ 1 \neq x > 0\}$

נבדוק את התנהגות הפונקציה בסביבת הנקודה x=0 (מימין):

נבדוק את התנהגות הפונקציה בסביבת הנקודה x=1:



אסימפטוטה אופקית:

נבדוק האם קיים גבול סופי ב- ∞ :

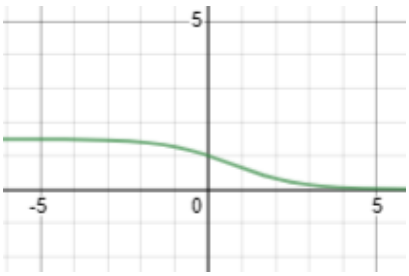
- $f(x) = \frac{3}{2+e^x}$

אסימפטוטה אנכית:

תחום הגדרה: $\mathbb{R}$

אסימפטוטה אופקית:

נבדוק האם קיים גבול סופי ב- ∞ ו/או ב- $-\infty$:



אם יש זמן פותרים לבד
מצאו את האסימפטוטות האנכיות והאופקיות/משופעות של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = x^2 e^{1/x}$

2. $f(x) = \frac{e^x}{|x|-1}$

חקירת פונקציה

חקרו את הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = x\,ln^2 x$

פתרון:

תחום הגדרה:

נקודת חיתוך עם ציר ה-y: אין **נקודת חיתוך עם ציר ה-x:**

$$y = 0$$

$$x\,ln^2 x = 0$$

$$ln\,x = 0$$

$$x = 1$$

קיצון:

נמצא נקודות חשודות:

נגזור:

$$f'(x) = 1\,ln^2 x + 2\,ln\,x \cdot \frac{1}{x} \cdot x = ln^2 x + 2\,ln\,x$$

נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת: **אין**

נשווה את $f'(x)$ ל-0:

$$ln^2 x + 2\,ln\,x = 0$$

$$ln\,x = 0, ln\,x = -2$$

$$x = 1, x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

נקודות בהן הנגזרת מתאפסת:

נבנה טבלה:

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1	
f'		+	0	-		+
f		↗	max	↘	min	↗

תחומי עליה:

תחומי ירידה:

נמצא נקודות חשודות לפיתול:

נגזור פעם שנייה:

$$f'(x) = ln^2 x + 2\, ln\, x$$

$$f''(x) = 2\, ln\, x \cdot \frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} = \frac{2(\ln x+1)}{x}$$

נקודות (רציפות) בהן $f''(x)$ לא קיימת: **אין**

נשווה את $f''(x)$ל-0:

$$\frac{2(\ln x + 1)}{x} = 0$$

$$\ln x + 1 = 0$$

$$ln\, x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת:

נבנה טבלה:

x	0		$\frac{1}{e}$	
f''		-		+
f		$\cap$		$\cup$

אסימפטוטה אנכית:

תחום הגדרה:

נבדוק את התנהגות הפונקציה בסביבת הנקודה x=0 (מימין):

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$$

אין

אסימפטוטה אופקית:

נבדוק האם קיים גבול סופי ב- ∞ :

$$\lim_{x\to\infty} x\ln^2 x = \infty$$

שרטוט

המשך: נגדיר את f בקטע $[1,e)$

1. האם f חח"ע
2. מהי התמונה

2) $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$

פתרון:

תחום הגדרה: $(0,\infty)$

נקודת חיתוך עם ציר ה-y:

נקודת חיתוך עם ציר ה-x: $(1,0)$

קיצון:

נמצא נקודות חשודות:

נגזור: $f'(x)=\frac{2\ln x\frac{1}{x}\cdot x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=$

נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת: **אין**

נשווה את $f'(x)$ל-0: נשווה מונה

$$2\ln x-\ln^2 x=0$$

$$\ln x\,(2-\ln x)=0$$

$$\ln x=0,\ln x=2$$

נקודות בהן הנגזרת מתאפסת: $x=1 \quad x=e^2$

נבנה טבלה:

x	0	(0,1)	1	$(1,e^2)$	e^2	(e^2,∞)
f'		$-$	0	$+$	0	$-$
השתנות f		↘	**min**	↗	**max**	↘

תחומי עליה:

תחומי ירידה:

פיתול (אם יש זמן): מחישוב קודם: $f'(x)=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$

נמצא נקודות חשודות:

נגזור פעם שנייה:

$$f''(x)=\frac{\left(\frac{2}{x}-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x^2-(2\ln x-\ln^2 x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{(2x-2x\ln x)-(2\ln x-\ln^2 x)\cdot 2x}{x^4}=$$

$$\frac{2x(1-\ln x)-(2\ln x-\ln^2 x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x(1-\ln x-2\ln x+\ln^2 x)}{x^4}=\frac{2(1-3\ln x+\ln^2 x)}{x^3}$$

נקודות (רציפות) בהן $f''(x)$ לא קיימת: **אין**

נשווה את $f''(x)$ל-0:

נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת:

נבנה טבלה:

x		(,)		(,)		(,)
f''						
f						

אסימפטוטה אנכית:

תחום הגדרה:

נבדוק את התנהגות הפונקציה בסביבת הנקודה x=0 (מימין):

אסימפטוטה אופקית:

נבדוק האם קיים גבול סופי ב- ∞ :

שרטוט:

- נשחיר בשרטוט תחומים לא מוגדרים, אם יש.
- נשרטט את האסימפטוטות (אם קיימות).
- נשרטט את נקודות החיתוך עם הצירים, נקודות הקיצון והפיתול, ונק' "חור" (אם קיימות).
- לפי תחומי העלייה והירידה, ולפי תחומי הקמירות והקעירות נחבר בין הנקודות משמאל לימין תוך התייחסות למה שקיבלנו בסעיף האסימפטוטות.

המשך תרגיל:

1. אם f מוגדרת על הקטע $[1, e^3]$ האם f חח"ע ?, מהי התמונה של f.

2. עבור אילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה f
   a. ב- 2 נקודות?
   b. בנקודה אחת?

3) $f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}$

פתרון:

תחום הגדרה: כל X

נקודת חיתוך עם ציר ה-y: $(0,0)$

נקודת חיתוך עם ציר ה-x:

$$f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}(x-5) = 0$$

$$x = 0, x = 5$$

קיצון:

נמצא נקודות חשודות:

נגזור: $f'(x) = 3 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} - 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{-\frac{1}{3}}$:

נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת: $x = 0$

נשווה את $f'(x)$ל-0:

$$f'(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$5x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$$

נכפול $x^{\frac{1}{3}}$

$$5x - 10 = 0$$

נקודות בהן הנגזרת מתאפסת: $x = 2$

נבנה טבלה:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2, \infty)$
f'	$+$		$-$	0	$+$
השתנות f	↗	**max**	↘	**min**	↗

תחומי עליה:

תחומי ירידה:

פיתול: מחישוב קודם: $f'(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{-\frac{1}{3}}$

נמצא נקודות חשודות:

נגזור פעם שנייה:

$$f''(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} + \frac{10}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{10x + 10}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

נקודות (רציפות) בהן $f''(x)$ לא קיימת: $x = 0$

נשווה את $f''(x)$ל-0:

נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת: $x = -1$

נבנה טבלה:

x	(,)	-1	(,)	0	(,)
f''					
f					

אסימפטוטה אנכית: אין

תחום הגדרה:

אסימפטוטה אופקית:

נבדוק האם קיים גבול סופי ב- ∞ ו/או ב- $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}} = \lim_{x\to\pm\infty} 3x^{\frac{2}{3}}(x-5) = \pm\infty$$

לכן אין

שרטוט:

אם יש זמן פותרים לבד

4) $f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$

פתרון:

תחום הגדרה:

נקודת חיתוך עם ציר ה-y: **נקודת חיתוך עם ציר ה-x:**

קיצון:

נמצא נקודות חשודות:

נגזור:

נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת: **אין**

נשווה את $f'(x)$ל-0:

נקודות בהן הנגזרת מתאפסת: $x = 2$

נבנה טבלה:

x	$(-\infty, 0)$	**0**	$(0,2)$	**2**	$(2, \infty)$
f'	$+$		$-$	0	$+$
השתנות f	↗		↘	**min**	↗

תחומי עליה:

תחומי ירידה:

פיתול: מחישוב קודם: $f'(x) = e^{\frac{2}{x}}\left(1 - \frac{2}{x}\right)$

נמצא נקודות חשודות:

נגזור פעם שנייה:

$$f''(x) = e^{\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right) + e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^2} = e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^2} \cdot \left(-1\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 1\right) = e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^2} \cdot \frac{2}{x}$$

נקודות (רציפות) בהן $f''(x)$ לא קיימת: **אין**

נשווה את $f''(x)$ל-0:

נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת: **אין**

נבנה טבלה:

x	(,)	0	(,)
f''			
f			

אסימפטוטה אנכית:

תחום הגדרה:

נבדוק את התנהגות הפונקציה בסביבת הנקודה x=0 :

אסימפטוטה אופקית:

נבדוק האם קיים גבול סופי ב- ∞ ו/או ב- -∞:

שרטוט:

המשך תרגיל:

אם f מוגדרת על הקטע $(0,1)$ האם f חח"ע ?, מהי התמונה של f.