תרגיל כיתה 3-4 במתמטיקה א (גבולות)

חלק א'

א. התבוננו בגרף הפונקציה $f(x)$ וחשבו את הגבולות/הערכים הבאים:

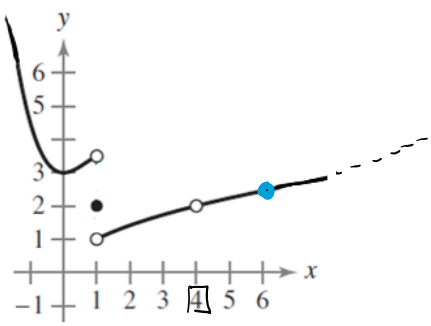
$f(1) = 2$

$f(4) =$ לא מוגדר

פונקציה לא יכולה שהרס הפ' לא מוגדר אז מינוס.

$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3.5 \end{cases}$ $\neq$ לא קיים!

$\lim_{x\to 4} f(x) = 2$ כי גבול ימין = גבול שמאל



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

תרגיל 3373 פונקציה שמראה את הנגזרת הפ' מהצד

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

$-\infty$ ∞

ב. התבוננו בגרף הפונקציה $g(x)$ וחשבו את הגבולות/הערכים הבאים:

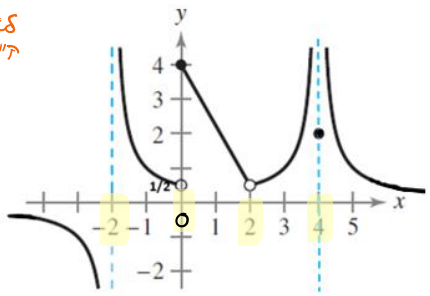
עדיף הפ'

$g(-2) =$ לא מוגדר

$\lim_{x\to -2} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -2^+} g(x) = \infty \\ \lim_{x\to -2^-} g(x) = -\infty \end{cases}$ $\neq$ לא קיים

$g(4) = 2$

$\lim_{x\to 4} g(x) = \infty$ גבול ימין = גבול שמאל



$g(0) = 4$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} g(x) = 4 \\ \lim_{x\to 0^-} g(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\neq$ לא קיים

כאשר הגבול מימין $\neq$ מהגבול משמאל
אז התשובה של מה הגבול $x\to 0$
(בלי הנגזרה) היא "לא קיים".

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$

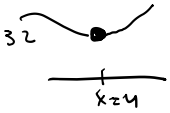
חישוב גבולות

ג. חשבו את הגבולות הבאים:

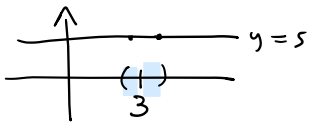
נתחיל בהצבה:

הגבול מוגדר - התוצאה מיידית.

1. $\lim\limits_{x\to 4} 7x+4 = \overset{28}{7\cdot 4+4} = \boxed{32}$



2. $\lim\limits_{x\to 3} 5 = \boxed{5}$



הגבול לא מוגדר - נפעיל אסטרטגיות בהתייחס לסוג הגבול.

אסטרטגיה: פירוק לגורמים/ הרחבה בצמוד/ לופיטל (בהמשך)

$\sqrt{\square} \pm \square$

$(-)\cdot(-) = (+)$

$"\frac{0}{0}" = 1 \,/\, 0 \,/\, \text{בתנאי}$

3. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = "\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \boxed{\frac{1}{6}}$

"תמיד"

תמיד

$(3, \frac{1}{6})$ חור

4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{3x^2+x-14} = "\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1\cdot\cancel{(x-2)}(x+1)}{3\cancel{(x-2)}(x+\frac{7}{3})} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+1}{3x+7} = \boxed{\frac{3}{13}}$

$2 \quad -\frac{7}{3}$

טריגום

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$x_{1,2}$ מאפסים שמה בנוסחא

$\sqrt{\square+\triangle} \neq \sqrt{\square}+\sqrt{\triangle}$

$\sqrt{\square\cdot\triangle} = \sqrt{\square}\cdot\sqrt{\triangle}$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1} = "\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+15}-4)(\sqrt{x+15}+4)}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)}$

$\square - \triangle \qquad \square + \triangle$

הרחבה בצמוד

בצמוד בינו

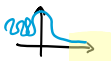
$(\square+\triangle)(\square-\triangle) = \square^2-\triangle^2$

$(\sqrt{\ }+\triangle)(\sqrt{\ }-\triangle) = (\sqrt{\ })^2-\triangle^2$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\overbrace{x+15}^{\square^2}-\overbrace{16}^{\triangle^2}}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+15}+4)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} = \boxed{\frac{1}{8}}$

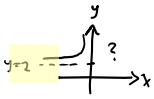
$\pm\frac{\infty}{\infty}$ אסטרטגיה: הוצאת גורם דומיננטי /לופיטל (בהמשך)

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-9} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{x}_{\infty}\cdot\left(1-\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{0}\right)} = \frac{1}{\infty\cdot(1-0)} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$



7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+5}{2x^2-9x+1} \overset{\text{"}\frac{\infty-\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(4+\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{5}{x^2}}_{0}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\underbrace{\frac{9}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

x^2



$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\cdot5^x+1}{15\cdot7^x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5^x\left(3+\frac{1}{5^x}\right)}{7^x\cdot 15} = \lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^x}_{0}\cdot\frac{3+\underbrace{\frac{1}{5^x}}_{0}}{15} = 0\cdot\frac{3}{15} = \boxed{0}$

"$\infty-\infty$" אסטרטגיה: הוצאת גורם דומיננטי/ הרחבה בצמוד

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}-x+3}{x} =$

דרך א

דרך ב

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}=$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}3e^{2x}-2\cdot 3^{x}=$

חלק ב'

אסטרטגיה: פיצול לגבול ימין ושמאל $(a\neq 0)$ "$\frac{a}{0}$"

12. $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\frac{4}{x-1}=$

13. $\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2-9} =$

14. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{3+x}}{x} =$

15. $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{6}\right)^{\left(\frac{1}{x^2-9}\right)} =$

16. $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} =$

"$1^{\pm\infty}$" אסטרטגיה: אויילר/ שימוש ב"אילן" (בהמשך)

אוילר:

$$\lim_{\blacksquare\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\blacksquare}\right)^{\blacksquare}=e$$

$$\lim_{\blacksquare\to 0}(1+\blacksquare)^{\frac{1}{\blacksquare}}=e$$

כדי להשתמש באוילר צריכים להתקיים 2 תנאים:

1. הגבול שואף ל $1^{\pm\infty}$
2. מבנה ייחודי $\left(1+\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a}}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+4x)^{\frac{1}{x}}=$

18. (לבד) $\lim\limits_{x\to 0+}(1+x^3)^{\frac{1}{x^2}}=$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\sqrt{x}}=$

20. (לבד) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{x}+x^2)^{-\frac{1}{2x}}=$

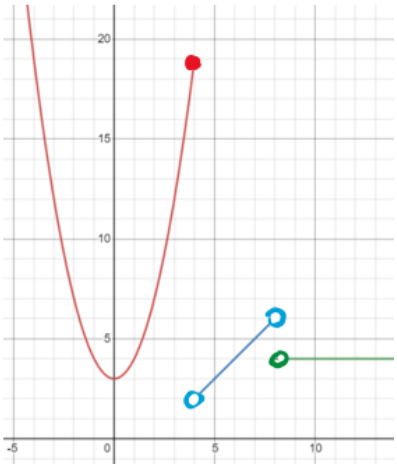
21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x-1}{x^2+3x}\right)^{-4x+1} =$

דרך א

דרך ב

גבול של פונקציה מפוצלת

22. $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\le 4 \\ x-2 & 4<x<8 \\ 4 & x>8 \end{cases}$



- $\lim\limits_{x\to 9} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

- $\lim_{x \to 4} f(x) =$

- $\lim_{x \to 8^-} f(x) =$

23. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x+5} & x \leq 4 \\ 2x - 9 & 4 < x < 8 \\ -6 & x > 8 \end{cases}$

- $\lim_{x \to -5} f(x) =$

- $\lim_{x \to 4} f(x) =$

- $\lim_{x \to 6} f(x) =$

- $\lim_{x \to 8} f(x) =$

- $\lim_{x \to 10} f(x) =$

24. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{e^{2x}-1} & x < 0 \\ 3^{-\frac{1}{x}} + 2 & x > 0 \end{cases}$

- $\lim_{x \to 0} f(x) =$

- $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{2}{x}\right) =$

גבול ערך מוחלט

25. $\lim_{x\to 3} \frac{|x+1|}{x+13} =$

26. $\lim_{x\to 7} \frac{|9-x|}{x-7} =$

27. $\lim_{x\to 10} \frac{|2x-6|-14}{x-10} =$

28. $\lim_{x\to 10} \frac{6}{|x-12|-2} =$

29. $\lim_{x\to 10} \frac{|x-10|}{(x-10)(x+2)}$

30. $\lim_{x\to \infty} \frac{|2-x|-3x}{|2x-3|-x} =$

- **מצאו את כל ערכי הפרמטר** a **עבורם** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **קיים**
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{\frac{1}{e^{x-1}}+1} & x < 1 \\ \frac{|1-x|}{x-1} + \ln x - \frac{1}{2} & x > 1 \end{cases}$

סוג הגבול	**אסטרטגיה**
$\frac{0}{0}$	- פירוק לגורמים, וצמצום הגורם המאפס. - הרחבה בצמוד (שורש ריבועי).
$\frac{\text{מספר השונה מאפס}}{0}$	פיצול לגבולות חד צדדיים.

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	- הוצאת גורמים דומיננטיים (או חלוקת המונה והמכנה בגורם דומיננטי של מונה/מכנה)
$\infty - \infty$	- הוצאת גורם דומיננטי. - הרחבה בצמוד (שורש ריבועי).
$1^{\pm\infty}$	- אוילר (במידה ויש את המבנה המיוחד שלו)
סכום/הפרש שברים	מעבר למכנה משותף

לסיכום: