רציפות ואי רציפות

רציפות

אינטואיטיבית, פונקציה רציפה אם ניתן לציירה במשיכת קולמוס (מבלי להרים את העט מהדף).

$f(x)$ <u>רציפה</u> בנקודה x_0 אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

<u>1.</u> $f(x)$ מוגדרת בנקודה x_0.

<u>2.</u> $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים.

<u>3.</u> $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

פונקציה לא מפוצלת נקראת פונקציה אלמנטרית

<u>משפט:</u> פונקציות אלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן!

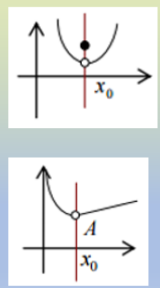
במילים אחרות תחום ההגדרה = תחום רציפות

סיווג נקודות אי רציפות

סליקה

הגבול קיים וסופי, אך אין שוויון לערך בנק'

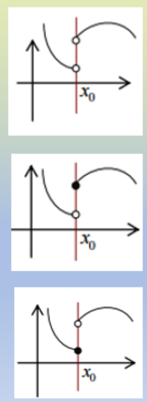
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$



סוג I- קפיצה

גבולות חד צדדיים קיימים סופיים ושונים

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_1 \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_2$



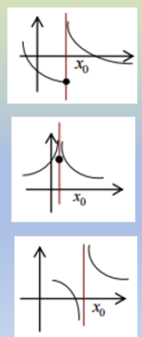
סוג II- עיקרי

לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים אינסופי או לא קיים.

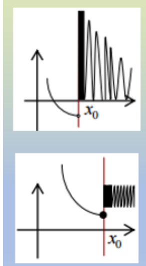
(המקרים שאינם סליקה או קפיצה)

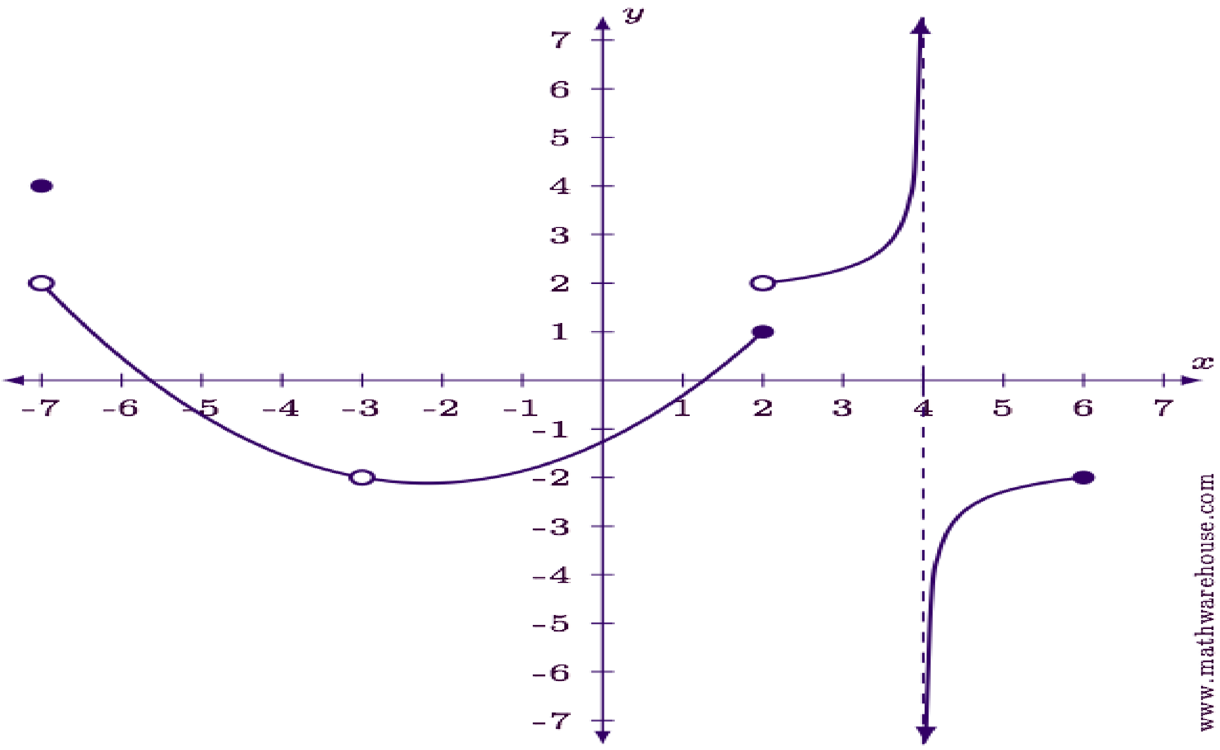
$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ו/או $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

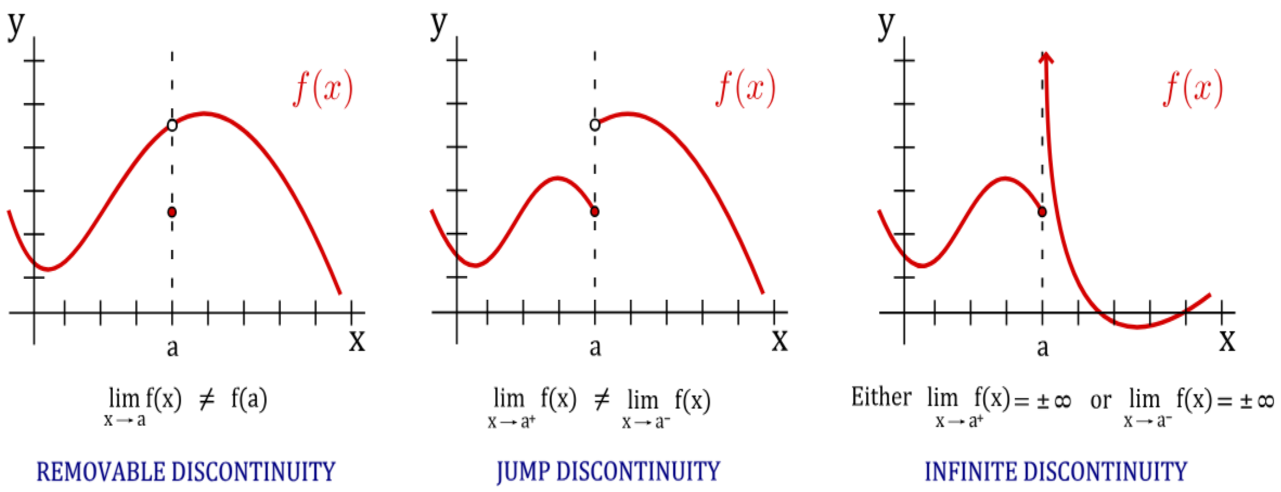
אי-רציפות עם אסימפטוטה



אי-רציפות ללא אסימפטוטה







<u>היכן נצפה למצוא אי רציפות :</u>

- נקודות "בעייתיות" בתחום ההגדרה
- נקודות תפר - צריך לבדוק

תרגילים:

משפט: פונקציה אלמנטרית רציפה בכל תחום הגדרתה

למשל

א. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ רציפה לכל $x\neq \pm 1$

ב. $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ רציפה לכל x

ג. $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{7x^2-28} & x>1\\ \frac{1}{x^2+4x-12} & x<1\end{cases}$ רציפה לכל $x\neq 1,2,-6$

שימו לב פונקציה זו אינה אלמנטרית

ד. $(x)=\begin{cases}\frac{3}{7x^2-28} & x\geq 1\\ \frac{1}{x^2+4x-12} & x<1\end{cases}$ רציפה לכל $x\neq\ 2,-6$

נקודת התפר $x=1$ יש לבדוק רציפות

ימין

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{3}{7x^2-28}=-\frac{1}{7}$$

שמאל

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2+4x-12}=-\frac{1}{7}$$

לכן רציפה ב- $x=1$

לכן רציפה לכל $x\neq\ 2,-6$

.1

האם הפונקציות הבאות אלמנטריות?

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות ומיינו אותן לפי סוגן :

ה. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

פתרון : פונקציה אלמנטרית רציפה בכל תחום הגדרתה שזה לכל x

ו. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3|x|-4}$

פתרון : תחום הגדרה $x^2 + 3|x| - 4 \neq 0$

נציב $t = |x|$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t = 1 \qquad ,t = -4$$

$$|x| = 1 \qquad |x| = -4$$

לכן $x = 1, -1$ נקודות אי רציפות

בדיקה $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2+3|x|-4} = \pm\infty$$

סוג 2

בדיקה $x = -1$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+3|x|-4} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-4)} =$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{5}$$

סליקה נקודות אי רציפות

ז. $f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 4 - x & x \geq 2 \end{cases}$

פתרון : כל ענף הוא פונקציה אלמנטרית רציפה בכל תחום הגדרתה

נבדוק בתפר

ימין

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 4 - x = 4 - 2 = 2$$

שמאל

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x = 2$$

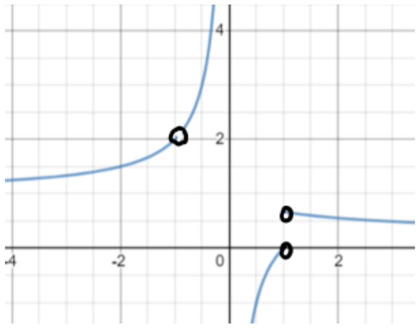
ערך בנקודה

$$f(2) = 2$$

לכן רציפה לכל x

2. מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות ומיינו אותן לפי סוגן:

א. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+x} & x < 1 \\ \frac{4\sqrt{x}-4}{3(x-1)} & x > 1 \end{cases}$



3. נתונה הפונקציה הבאה ($a \neq 0$):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{a\sqrt{x}-a} & x>1 \\ 1 & x=1 \\ \dfrac{ax}{5^x+2^{\ln x}} & x<1 \end{cases}$$

א. האם קיים a עבורו f רציפה ב- $x=1$?

ב. מה יהיה סוג אי הרציפות במקרים אחרים של a ($a \neq 0$)?

פתרון א

פתרון: כל ענף הוא פונקציה אלמנטרית רציפה בכל תחום הגדרתה

נבדוק בתפר $x=1$

ימין

$$l^+ = \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x-2}{a\sqrt{x}-a} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{a(\sqrt{x}-1)} =$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x}+1)}{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x}+1)}{a(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{(x+2)(\sqrt{x}+1)}{a} = \frac{6}{a}$$

שמאל

$$l^- = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{ax}{5^x+2^{\ln x}} = \frac{a}{5^1+2^{\ln 1}} = \frac{a}{5+1} = \frac{a}{6}$$

ערך בנקודה

$$f(1) = 1$$

רציפות כאשר

$$l^+ = l^- = f(1)$$

$$\frac{a}{6} = \frac{6}{a} = 1$$

$$a = 6$$

פתרון ב

סליקה כאשר

$$l^+ = l^- \neq f(1)$$

$$\frac{a}{6} = \frac{6}{a} \neq 1$$

לכן

$$a = -6$$

סוג ראשון

$$l^+ \neq l^-$$

לכן

$$a = -6,6$$

מכיון ש – a פרמטר סופי אין סוג שני

אם יש זמן פותרים לבד

1. מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות ומיינו אותן לפי סוגן :

$$f(x) = \frac{|2-2x|}{x^2+x-2}$$

2. מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציה הבאה ומיינו אותן לפי סוגן :

$$f(x) = \frac{(x-1)e^{2/x}}{|x|-1}$$

3. עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B הפונקציה הבאה רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x < 2 \\ Ax+B & 2 \le x \le 3 \\ \frac{6x-18}{x^2-9} & x > 3 \end{cases}$$

4. נתונה פונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{e^{\left(-\frac{2}{x}\right)}+3} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{|2x-5|-\sqrt{x^2+25}}{x-x^2} & x < 0 \end{cases}$$

א. האם קיימים ערכי a,b שעבורם הפונקציה הבאה רציפות ב- $x = 0$? נמקו את תשובתכם.

ב. הציבו $a = 1$ ו – $b = \frac{3}{\sqrt{5}}$ ומצאו מה יהיה סוג האי רציפות בנקודה $x = 0$?