קיצון מקומי

תחומי עליה וירידה

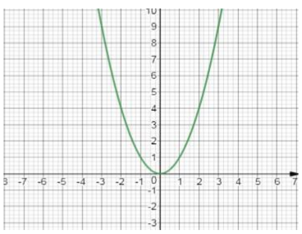
הגדרה: תהא $f(x)$ מוגדרת בקטע (a,b).

- $f(x)$ **עולה בקטע (a,b)** אם לכל x_1,x_2 בקטע המקיימים $x_1<x_2$, מתקיים $f(x_1)<f(x_2)$.
- $f(x)$ **יורדת בקטע (a,b)** אם לכל x_1,x_2 בקטע המקיימים $x_1<x_2$, מתקיים $f(x_1)>f(x_2)$.
- פונקציה שהיא עולה או יורדת בקטע נתון נקראת **מונוטונית בקטע**.

משפט: תהא $f(x)$ גזירה בקטע (a,b).

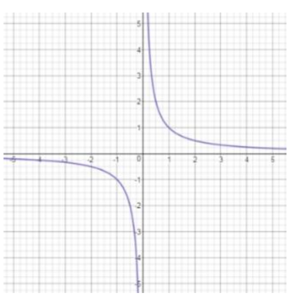
- אם $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$, אזי f **עולה** ב- (a,b)
- אם $f'(x)<0$ לכל $x\in(a,b)$, אזי f **יורדת** ב- (a,b)
- אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, ומונוטונית בקטע (a,b), אזי f מונוטונית בקטע $[a,b]$

דוגמאות:



1. $f(x)=x^2 \quad \leftarrow \quad f'(x)=2x$.

- לכל x בקטע $(0,\infty)$ $f'(x)>0$, ולכן f **עולה** בקטע זה.
- לכל x בקטע $(-\infty,0)$ $f'(x)<0$, ולכן f **יורדת** בקטע זה.
- כיוון ש- $f(x)$ רציפה ב-$x=0$ נסיק שהיא עולה בקטע $[0,\infty)$ ויורדת בקטע $(-\infty,0]$



2. $f(x)=\frac{1}{x} \quad \leftarrow \quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

$f'(x)<0$ לכל x בתחום הגדרתה של f .

האם מכך נוכל להסיק ש- f יורדת בכל תחום הגדרתה? לא!

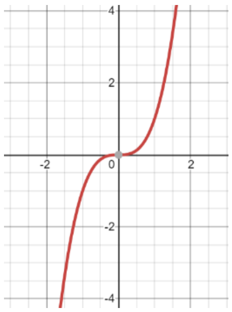
המשפט **מדבר על קטעים פתוחים**. תחום הגדרתה של $f(x)=\frac{1}{x}$ אינו קטע פתוח.

כדי להשתמש במשפט יש להפריד לתחומים.

- בקטע $(0,\infty)$, f יורדת.

- בקטע $(-\infty,0)$, f יורדת.

אבל f אינה מונוטונית בתחום $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

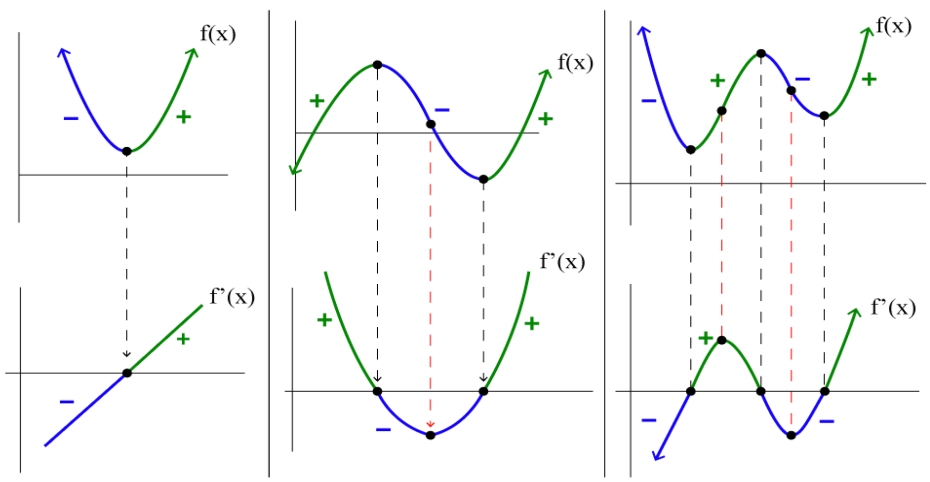


<u>**הערה (לקריאה עצמית):**</u> הכיוון ההפוך למשפט לא נכון.

למשל: הפונקציה $f(x)=x^3$ עולה בכל תחום הגדרתה ב-$\mathbb{R}$,

אבל קיימת נקודה $x_0=0\in\mathbb{R}$ עבורה: $f'(0)=0\ngtr 0$

קשר גרפי בין פונקציה לנגזרת



Calcworkshop.com

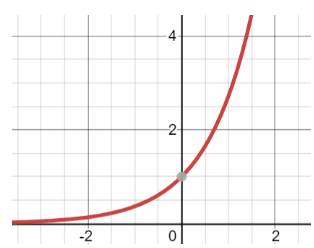
נקודות קיצון מקומי

הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0.

- x_0 **נקודת מקסימום מקומי** של $f(x)$ אם קיימת סביבה I של x_0 כך ש$f(x) \le f(x_0)$ לכל $x \in I$.
- x_0 **נקודת מינימום מקומי** של $f(x)$ אם קיימת סביבה I של x_0 כך ש$f(x) \ge f(x_0)$ לכל $x \in I$.
- נקודה שהיא מקסימום מקומי או מינימום מקומי נקראת **נקודת קיצון מקומי**.

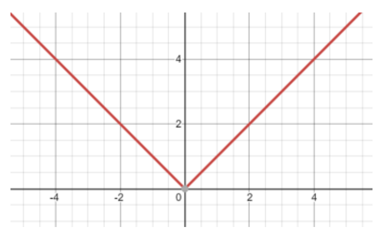
דוגמאות:

$f(x) = e^x$



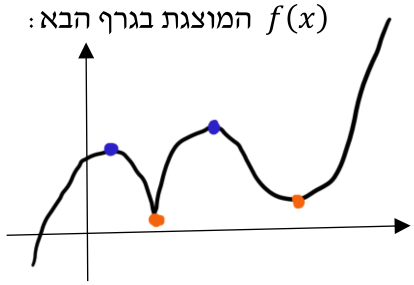
אין קיצון

$f(x) = |x|$



(0,0) מינימום מקומי

$f(x)$ המוצגת בגרף הבא:



max מקומי, min מקומי

הערה: f צריכה להיות מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 כדי שx_0 תוכל להיות קיצון שלה. אם תחום ההגדרה של f הוא קטע, נקודת קיצון מקומית היא בהכרח נקודה פנימית.

משפט פרמה

תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0.

אם x_0 היא נקודת קיצון (מקומי) של $f(x)$ בה הפונקציה גזירה אז $f'(x_0) = 0$.

הסבר אינטואיטיבי: שיפוע המשיק בנקודת קיצון גזירה (שאינה קצה/שפיץ) היא 0 (המשיק מקביל לציר ה-x).

הוכחה (לקריאה עצמית):

נניח x_0 היא נקודת קיצון (מקומי) של $f(x)$ בה הפונקציה <u>גזירה</u>.

אז הגבול $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$ <u>קיים וסופי</u>.

נניח $f(x_0)$ מקסימום מקומי (הוכחה דומה עבור מינימום מקומי), נתבונן בגבולות החד צדדיים:

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\text{מונה}\leq 0}}{\underbrace{h}_{\text{מכנה}>0}} \leq 0$$

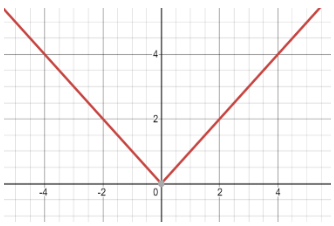
$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

כיוון ש- f גזירה ב-x_0,

הגבולות בהכרח שווים,

כלומר: $f'(x_0)=0$

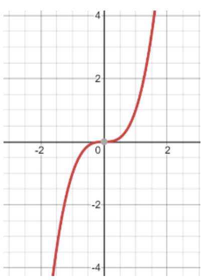
הערות (לקריאה עצמית):



א. ייתכן שיש קיצון ב- x_0 , אבל $f'(x_0)\neq 0$.

למשל: $f(x)=|x|$ ב- x=0.

קיצון יכולה להתקבל בנקודות בהן הפונקציה אינה גזירה.



ב. הכיוון ההפוך למשפט אינו נכון.

ייתכן ש- $f'(x_0)=0$ אבל x_0 לא קיצון.

למשל: $f(x)=x^3$ ב- x=0.

בהנחה ש-f <u>גזירה</u> ב-x_0, התנאי $f'(x_0)=0$ הכרחי לקיצון אך <u>לא מספיק</u>.

<u>**משפט**</u>**:** אם f מקבלת קיצון ב-x_0, אז שתי אפשרויות: $f'(x_0)=0$ או $f'(x_0)$ לא קיים.

<u>תנאי מספיק לקיצון (מבחן הנגזרת הראשונה)</u>

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ב- x_0 וגזירה בסביבתה, פרט אולי ל- x_0 עצמה, אז:

- אם $f'(x)$ מחליפה סימן ב-x_0 מ- (+) ל- (-), אזי x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.
- אם $f'(x)$ מחליפה סימן ב-x_0 מ- (-) ל- (+), אזי x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.
- אם $f'(x)$ לא מחליפה סימן ב-x_0 אז x_0 אינה נקודת קיצון.

נסיק ונסכם:

תהי $f(x)$ פונקציה בעלת מספר סופי של נקודות קיצון.

על מנת למצוא **נקודות קיצון מקומי (רציפות)** של $f(x)$ ותחומי עליה וירידה:

1. נרכיב רשימת נקודות קריטיות (חשודות לקיצון): נקודות בהן $f'(x_0)=0$ או $f'(x_0)$ לא קיימת.
2. נצרף לרשימה גם נקודות אי רציפות.
3. נסמן נקודות אלו ב- $x_1 < x_2 < x_3 <\ldots< x_n$
4. בכל הקטעים $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n), (x_n, \infty)$ נבדוק עליה/ירידה עפ"י סימן הנגזרת (הערה: בכל קטע סימן הנגזרת בהכרח קבוע).
5. נקבע את סוג הנקודות (מקסימום מקומי, מינימום מקומי או כלל לא קיצון) עפ"י מבחן הנגזרת הראשונה.

דוגמאות:

א. נתונה $f(x)=x^4-2x^2$.

i. מצאו נקודות קיצון מקומיות ותחומי עליה וירידה.

ii. בהנחה ש- f מוגדרת על הקטע $[-1,1]$ האם f חח"ע ?, מהי התמונה של f.

פתרון:

i. **תחום הגדרה**: $\mathbb{R}$

נמצא נקודות חשודות:

נגזור: $f'(x)=4x^3-4x$

נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת: **אין**

נשווה את $f'(x)$ ל-0: $0=4x(x^2-1)$

נקודות בהן הנגזרת מתאפסת: $\boldsymbol{x=0 \quad x=1, \quad x=-1}$

נבנה טבלה:

$\boldsymbol{x}$		$\boldsymbol{-1}$		$\boldsymbol{0}$		$\boldsymbol{1}$	
$\boldsymbol{f'}$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
השתנות f	↘	**min**	↗	**max**	↘	**min**	↗
ערך ה-y		$\boldsymbol{-1}$		0		$\boldsymbol{-1}$	

ii. בהנחה ש- f מוגדרת על הקטע $[-1,1]$
האם f חח"ע ?, לא
התמונה של f היא $[-1,0]$

ב. נתונה $f(x)=(x^2-9)^5$. מצאו נקודות קיצון מקומיות ותחומי עליה וירידה.

<u>**תחום הגדרה**</u>: $\mathbb{R}$

<u>**נמצא נקודות חשודות:**</u>

נגזור: $f'(x)=5(x^2-9)^4\cdot 2x$

<u>נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת</u>: **אין**

נשווה את $f'(x)$ ל-0: $0=10x(x^2-9)^4$

<u>נקודות בהן הנגזרת מתאפסת</u>: $\boldsymbol{x=0 \quad x=3,\ \ x=-3}$

<u>**נבנה טבלה:**</u>

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,-3)$	$\boldsymbol{-3}$	$(-3,0)$	**0**	$(0,3)$	$\boldsymbol{3}$	$(3,\infty)$
$\boldsymbol{f'}$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
השתנות $\boldsymbol{f}$	↘		↘	**min**	↗		↗
ערך ה- $\boldsymbol{y}$		0		$-59{,}049$		0	

נציב את x=0 ב- f למציאת ערך ה- y: $f(0)=(-9)^5=-59{,}049$

נקודת קיצון מקומית: $\textbf{min}\ (\boldsymbol{0,-59,049})$

ג. מצאו נקודות קיצון מקומיות ותחומי עליה, ירידה עבור: $f(x)=x^2 lnx$

פתרון בעמוד הבא

<u>תחום הגדרה:</u> $(0,\infty)$

<u>נמצא נקודות חשודות:</u>

נגזור: $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}$

<u>נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת</u>: **אין**

נשווה את $f'(x)$-ל-0: $0=2x\ln x+x$

$0=x(2\ln x+1)$

$2\ln x=-1$ או x=0

$\ln x=-\frac{1}{2}$ לא בתחום

<u>נקודות בהן הנגזרת מתאפסת</u>: $\boldsymbol{x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}}$

(נקודת קצה תחום: $x=0$, אינה מוגדרת)

<u>תחומי עליה</u>: $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right)$

<u>תחומי ירידה</u>: $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

<u>תרגילים:</u>

3. מצאו קיצון מקומיות ותחומי עליה וירידה עבור: $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 18x$

<u>תחום הגדרה:</u> R

<u>נמצא נקודות חשודות:</u>

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 18x = 3x^{\frac{2}{3}} - 18x$$

נגזור:

$$f^1(x) = 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3} - 18 = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 18$$

<u>נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת: $x = 0$</u>

נשווה את $f'(x)$ ל-0:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 18 = 0$$

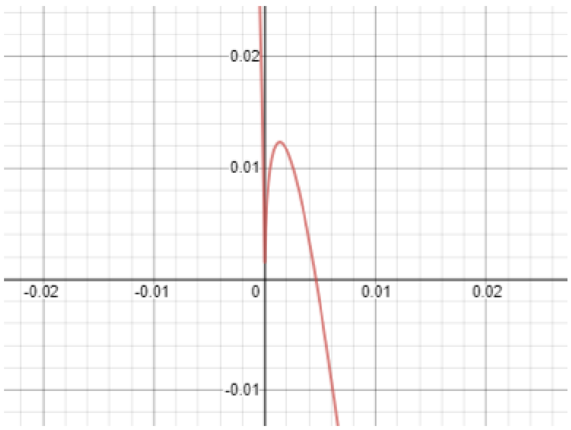
$$\sqrt[3]{x} = \frac{1}{9}$$

$$x = \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{1}{729}$$

<u>נבנה טבלה:</u>

x	(,)	**0**	(,)	$\frac{1}{729}$	(,)
f'	-		+		-

f	↘	*min*	↗	max	



תחומי עליה:

תחומי ירידה:

לבד: מצאו קיצון מקומיות ותחומי עליה וירידה עבור: $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$

תחום הגדרה: $[0,\infty)$

נמצא נקודות חשודות:

נגזור:

$$f'(x) = 1e^{-\sqrt{x}} + xe^{-\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} =$$

$$(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} =$$

נקודות (רציפות) בהן $f'(x)$ לא קיימת: אין

נשווה את $f'(x)$ ל-0:

$$f'(x) = (1 - \frac{1}{2}\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} = 0$$

לכן

$1-\frac{1}{2}\sqrt{x}=0$ או $e^{-\sqrt{x}}=0$

$$1=\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$2=\sqrt{x}$$

$$x=4$$

<u>נקודות בהן הנגזרת מתאפסת:</u>

<u>נבנה טבלה:</u>

$\boldsymbol{x}$	0,		4	
$\boldsymbol{f'}$		$+$		$-$
$\boldsymbol{f}$		$\nearrow$	מקס	$\searrow$

קיצון_ $max\left(4,{}^{4}/_{e^2}\right)$

המשך תרגיל:

1. אם f מוגדרת על הקטע $[0,1]$ האם f חח״ע?, מהי התמונה של f.

2. האם קיים k עבורו הישר $y=k$ חותך את הפונקציה f
   a. ב- 3 נקודות?
   b. ב- 2 נקודות?
   c. בנקודה אחת?

בעיות כלכליות

1. העלות (בדולרים) של ייצור t מכשירי רדיו ליום היא $c(t) = 700 + 100t - \frac{1}{2}t^2$ כאשר $0 \le t \le 100$

א. חשבו את $\frac{dc}{dt}$ שהיא העלות השולית ברמת ייצור של t מכשירים

$$\frac{dc}{dt} = 100 - t$$

ב. חשבו את $\frac{dc}{dt}(80)$ העלות השולית ברמת ייצור של 80 מכשירים ופרשו את התוצאה.

$$\frac{dc}{dt}(80) = 100 - 80 = 20$$

ג. חשבו את העלות המדויקת של ייצור המכשיר ה- 81 והשוו עלות זו עם התוצאה מסעיף ב'.

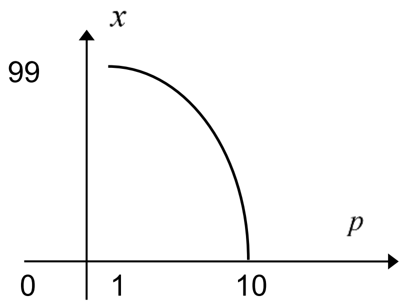
$$c(81) - c(80) = 700 + 100 \cdot 81 - \frac{1}{2}81^2 - \left(700 + 100 \cdot 80 - \frac{1}{2}80^2\right) = 19.5$$

ד. חשבו את C'' ופרשו את התוצאה.

$$c''(t) = -1 < 0$$

לכן **העלות השולית** פוחתת

2. בפיציה ביפו אנשים מוכנים לקנות x ק"ג של טבק ליום במחיר של p שקלים **לרבע קילו**, על-פי משוואת הביקוש הבאה: $x=100-p^2$ כאשר $1\le p\le 10$



א. מיצאו את $\frac{dx}{dp}$, קצב שינוי הביקוש כפונקציה של המחיר p.

ב. חשבו את $\frac{dx}{dp}$ עבור $p=2$ ו- $p=8$ ופרשו את התוצאות.

ג. מהי פונקציית ההכנסה השולית $R'(p)$?

ד. באיזה תחום של מחירים פונקצית ההכנסה, $R(p)$, עולה?

ה. הראו כי $R''<0$ והסבירו את המשמעות.

אם יש זמן פותרים לבד

3. מצאו קיצון מקומיות ותחומי עליה וירידה עבור: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 16)^2}$

4. הביקוש היומי ללחם במעדנייה אשדוד נתון על ידי הפונקציה $x = 6000 - 6p$.

p מחיר לכיכר לחם

x כמות הכיכרות

א. מצא את הביקוש השולי והסבר את התוצאה

ב. עלות יצור x כיכרות לחם נתונה על ידי הפונקציה $C(x) = \frac{1}{2}px + 300$.

i. מצא את פונקצית הרווח $\pi(x)$ לפי המשתנה x.

ii. מצאו כמה כיכרות לחם על המעדנייה להכין ביום על מנת **שהרווח ליחידה** $y = \frac{\pi(x)}{x}$ יהיה מקסימאלי