EIN NUMERISCH STABILER CONDENSING ALGORITHMUS FÜR OCP

ROBERT SCHOLZ

Abstract. Bei der numerischen Lösung von OCPs treten dünnbesetzte strukturierte QPs auf. Es ist üblich diese Struktur mit der Hilfe eines Condensing Algorithmuses auszunutzen. Jedoch werden bei den bisher verwendeten Ansätzen viele Blockmatrizen miteinander multipliziert. Bei schlecht gestellten Problemen führt dies zu numerischen Problemen. Hier wird ein Ansatz vorgestellt, bei dem ausschließlich mit der Multiplikation von orthonormalen Matrizen gearbeitet wird.

1. Einleitung

Bei der Lösung von Optimale Steurungs Problemen (OCP) mit SQP-Verfahren tauchen quadratische Programme (QP) mit einer typischen Struktur auf. Durch die Ausnutzung dieser Struktur lässt sich die Geschwindigkeit der Verfahren stark erhöhen. Dabei wird das ursprüngliche dünnbesetzte QP in ein dichtbesetztes QP mit kleinerer Dimension transformiert. In diesem Bericht stellen wir einen Ansatz vor, der auf QR-Faktorisierung beruht. Da nur mit orthogonalen Matrizen gearbeitet wird zeichnet dieser Ansatz sich durch numerische Stabiltät aus.

Wir behandeln quadratische Programme mit der folgenden Strukur. Dabei gibt n_u die Anzahl der Steuerung, n_s die Anzahl der Zustande und N die Anzahl der Shootingintervalle an. Um die Darstellung einfach zu halten gehen wir davon aus, dass die gekoppelten sowie die ungekoppelten Nebenbedingungen mit Gleichheit erfüllt sein müssen. Der Ansatz lässt sich jedoch problemlos auch auf Ungleichungsnebenbedingungen erweitern.

$$
\begin{aligned}
\min_{u,s,p}\ & p^\top B_{pp} p + f_p^\top p \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} s_i^\top B_{ss}^i s_i + u_i^\top B_{uu}^i u_i \\
& + \sum_{i=1}^{N} s_i^\top B_{su}^i u_i + p^\top B_{ps}^i s_i + p^\top B_{pu}^i u_i \\
& + \sum_{i=1}^{N} (f_u^i)^\top u_i + (f_s^i)^\top s_i \\
s.t.\ & s_{i+1} = X_p^i p + X_s^i s_i + X_u^i u_i - X_c^i && i = 1,\dots,N-1 \\
& R_u^i u_i + R_s^i s_i + R_p^i p = R_c && i = 1,\dots,N \\
& \sum_{i=1}^{N} C_u^i u_i + C_s^i s_i + R_p^i p = C_c \\
& p_l \le p \le p_u \\
& s_l^i \le s_i \le s_u^i && i = 1,\dots,N \\
& u_l^i \le u_i \le u_u^i && i = 1,\dots,N
\end{aligned}
$$

Die Beschreibung des Algorithmus in diesem Bericht orientiert sich an der dazu gehörigen Matlab Implementierung. Dabei wurde der Programmcode nicht auf Geschwindigkeit optimiert. Stattdessen ist der Fokus auf der Übersichtlich und der Nachvollziehbarkeit.

2. Der Algorithmus

Analog zu der Implementierung werden wir den Algorithmus in vier Schritten darstellen.

Schritt 1: Anordnung der einzelnen Matrizen. Zunächst definieren wir $x = (p, s_0, u_0, s_1, u_1, \ldots, s_N, u_N)$. Somit können wir das QP auch schreiben als:

$$
\begin{aligned}
x^\star = \underset{x}{max} \quad & \frac{1}{2} x^\top H x + f^\top x \\
s.t. \quad & Sx = s \\
& Qx = q \\
& b_l \leq x \leq b_u
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$
H = \begin{bmatrix}
B_{pp} & B_{ps}^1 & B_{pu}^1 & \ldots & B_{ps}^N & B_{pu}^N \\
(B_{ps}^1)^\top & B_{ss}^1 & B_{su}^1 & & & \\
(B_{pu}^1)^\top & (B_{su}^1)^\top & B_{uu}^1 & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
(B_{ps}^N)^\top & & & & B_{ss}^N & B_{su}^N \\
(B_{pu}^N)^\top & & & & (B_{su}^N)^\top & B_{uu}^N
\end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_p \\ f_s^1 \\ f_u^1 \\ \vdots \\ f_s^N \\ f_u^N \end{bmatrix}
$$

$$
S = \begin{bmatrix}
X_p^0 & X_s^0 & X_u^0 & -I & & & & & \\
X_p^1 & & & X_s^1 & X_u^1 & -I & & & \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
X_p^{N-1} & & & & & X_s^{N-1} & X_u^{N-1} & -I
\end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix} X_c^0 \\ X_c^1 \\ \ldots \\ X_c^{N-1} \end{bmatrix}
$$

$$
Q = \begin{bmatrix}
R_p^0 & R_s^0 & R_u^0 & & & & & \\
R_p^1 & & & R_s^1 & R_u^1 & & & \\
\vdots & & & & & \ddots & & \\
R_p^N & & & & & & R_s^N & R_u^N \\
C_p & C_s^0 & C_u^0 & C_s^1 & C_u^1 & \ldots & C_s^N & C_u^N
\end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} R_c^0 \\ R_c^1 \\ \vdots \\ R_c^N \\ C_c \end{bmatrix}
$$

$$
u = \begin{bmatrix} p_l \\ s_l^0 \\ u_l^0 \\ \vdots \\ s_l^N \\ u_l^N \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} p_u \\ s_u^0 \\ u_u^0 \\ \vdots \\ s_u^N \\ u_u^N \end{bmatrix}
$$

Schritt 2: Iterative QR-Faktorrisierung und Variabelentransformation. Wir betrachten nun die einzelnen Matchingblöcke und berechnen eine entsprechende QR-Zerlegung.

Sei Q_0 und R_0 die QR-Zerlegung des Blockes $[X_s^0 X_u^0 - I]$, wobei Q_0 eine orthonormale Matrix der Dimension $n_u + 2n_s$ ist und R_0 eine invertierbare untere Dreiecksmatrix mit der Dimension n_s ist.

Es gilt also :

$$\begin{bmatrix} X_s^0 & X_u^0 & -I \\ 0 & 0 & X_s^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ \tilde{X}_s^0 & \tilde{X}_u^0 & \hat{X}_s^1 \end{bmatrix} Q_0$$

Dieser Prozess wiederholen wir nun für alle folgenden Blockzeilen. Für $i = 2, \dots, N-1$ sind die Matrizen R_i und Q_i rekursiv so gewählt, dass

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_s^i & X_u^i & -I \\ 0 & 0 & X_s^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 \\ \tilde{X}_s^i & \tilde{X}_u^i & \hat{X}_s^{i+1} \end{bmatrix} Q_i$$

gilt. Sei $\tilde{Q}_i$ die orthonormale Matrix, die die entsprechende Spaltenoperation repräsentiert. Die Matrix hat also die Struktur

$$\tilde{Q}_i = \left[\begin{array}{c|c|c} I_{n_p+(i-1)(n_s+n_u)} & & \\ \hline & Q_i & \\ \hline & & I_{(N-i-2)(n_u+n_s)-n_s} \end{array}\right].$$

Die Struktur der Matrix S verändert sich also:

$$\begin{aligned}
S &= \begin{bmatrix} X_p^0 & R_0 & 0 & 0 & & & & \\ X_p^1 & \tilde{X}_s^0 & \tilde{X}_u^0 & \hat{X}_s^1 & X_u^1 & -I & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ X_p^{N-1} & & & & & X_s^{N-1} & X_u^{N-1} & -I \end{bmatrix} Q_0 \\
&= \begin{bmatrix} X_p^0 & R_0 & & & & & & & & \\ X_p^1 & \tilde{X}_s^0 & \tilde{X}_u^0 & R_1 & & & & & & \\ X_p^2 & & & \tilde{X}_s^1 & \tilde{X}_u^1 & \hat{X}_s^2 & X_u^2 & -I & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ X_p^{N-1} & & & & & & & X_s^{N-1} & X_u^{N-1} & -I \end{bmatrix} Q_1 Q_0 \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} X_p^0 & R_0 & & & & & & \\ X_p^1 & \tilde{X}_s^0 & \tilde{X}_u^0 & R_1 & & & & \\ X_p^2 & & & \tilde{X}_s^1 & \tilde{X}_u^1 & R_2 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ x_p^{N-1} & & & & & R_{N-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{:=\tilde{S}} \underbrace{Q_{N-1} \cdots Q_1 Q_0}_{:=Q}.
\end{aligned}$$

Anschließend sortieren wir die Spalten von $\tilde{S}$ so um dass $\hat{S} = \left[\hat{S}_1 | \hat{S}_2\right]$ gilt, mit

$$\hat{S}_1 = \begin{bmatrix} R_0 & & & & \\ \tilde{X}_s^0 & R_1 & & & \\ & \tilde{X}_s^1 & \ddots & & \\ & & \ddots & R_{N-2} & \\ & & & \tilde{X}_s^{N-2} & R_{N-1} \end{bmatrix}, \hat{S}_2 = \begin{bmatrix} X_p^0 & \tilde{X}_u^0 & & & & \\ X_p^1 & & \tilde{X}_u^1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ X_p^{N-2} & & & & \tilde{X}_u^{N-2} & \\ X_p^{N-1} & & & & & \tilde{X}_u^{N-1} \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $\hat{S}_1$ eine invertierbare Diagonalmatrix. Algebraisch wird die Umsortierung der Spalten durch die Multiplikation von rechts mit einer Permutationsmatrix P realisiert. Es gilt also

$$S = \tilde{S}Q = \hat{S}P^\top Q = \left[\hat{S}_1|\hat{S}_2\right] P^\top Q.$$

Wir definieren dann die orthonormale Transformationsmatrix $T := P^\top Q$.

Schritt 3: QP Transformieren. Wir benutzen die in Schritt 2 erstellte Matrix um das QP zu transformieren. Dafür setzen wir $u = Tx$. Dann ist das QP äquivalent zu

$$\begin{aligned} \max_u \quad & \frac{1}{2}u^\top \hat{H}u + \hat{f}^\top u \\ s.t. \quad & \left[\hat{S}_1|\hat{S}_2\right] u = s \\ & \hat{Q}u = q \\ & b_l \leq T^\top u \leq b_u \end{aligned}$$

mit $\hat{H} = THT^\top$, $\hat{f} = Tf$ und $\hat{Q} = QT^\top$.

Schritt 4:Condensing. Um die Anzahl der Variablen zu reduzieren nutzen wir aus, dass die Matrix $\hat{S}_1$ invertierbar ist und diagonalstruktur hat. Sei $u = [v^\top w^\top]^\top$, so dass

$$\left[\hat{S}_1|\hat{S}_2\right] u = \hat{S}_1 v + \hat{S}_2 w$$

gilt. Da $\hat{S}_1$ invertierbar ist folgt daraus, dass

$$v = \underbrace{\hat{S}_1^{-1}s}_{:=s'} - \underbrace{\hat{S}_1^{-1}\hat{S}_2}_{:=S'} w$$

gilt. Substituieren wir v in dem QP, so erhalten wir folgendens QP:

$$\begin{aligned} w^\star = \max_w \quad & \frac{1}{2}w^\top \left(S'^\top H_{11}S' - H_{12}^\top S' - S'^\top H_{12} + H_{22}\right) w \\ & + \left(H_{12}^\top s' - S'^\top H_{11}s' - S'^\top f1 + f2\right)^\top w \\ s.t. \quad & \left(Q_2 - Q_1 S'\right) w = q - Q_1 s' \\ & b_l - T^\top \begin{pmatrix} s' \\ 0 \end{pmatrix} \leq T^\top \begin{pmatrix} -S' \\ I \end{pmatrix} w \leq b_u - T^\top \begin{pmatrix} s' \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $\hat{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^\top & H_{22} \end{bmatrix}$, $\hat{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ und $\hat{Q} = [Q_1\ Q_2]$.

3. Rücktransformation

Mit der Annahme, dass die Matrix H positiv definit ist und somit die Lösung der QPs eindeutig ist, gilt:

$$x^\star = T^\top \begin{bmatrix} s' - S' \\ I \end{bmatrix} w^\star$$

***************Platzhalter*******************************

und somit ist :

$$S = S_1 \begin{bmatrix} I & & & & \\ & Q_0 & & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{bmatrix}$$

mit

$$S_1 = \begin{bmatrix} X_p^0 & R_0 & 0 & 0 & & & & \\ X_p^1 & \tilde{X}_s^0 & \tilde{X}_u^0 & \hat{X}_s^1 & X_u^1 & -I & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ X_p^{N-1} & & & & & X_s^{N-1} & X_u^{N-1} & -I \end{bmatrix}$$

für eine obere Dreiecksmatrix R_1 und eine orthonormale Matrix Q_1. Somit ist

$$S_1 = S_2 \begin{bmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & Q_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{bmatrix}$$

mit

$$S_2 = \begin{bmatrix} X_p^0 & R_0 & & & & & & & & \\ X_p^1 & \tilde{X}_s^0 & \tilde{X}_u^0 & R_1 & & & & & & \\ X_p^2 & & & \tilde{X}_s^1 & \tilde{X}_u^1 & \hat{X}_s^2 & X_u^2 & -I & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ X_p^{N-1} & & & & & & & X_s^{N-1} & X_u^{N-1} & -I \end{bmatrix}.$$

Dieser Prozess wird iterativ wiederholt, bis wir eine Faktorisierung

$$S = \tilde{S}Q$$

erhalten, wobei

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} X_p^0 & R_0 & & & & & & \\ X_p^1 & \tilde{X}_s^0 & \tilde{X}_u^0 & R_1 & & & & \\ X_p^2 & & & \tilde{X}_s^1 & \tilde{X}_u^1 & R_2 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ x_p^{N-1} & & & & & R_{N-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$Q = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Q_{N-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & Q_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & Q_0 & & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{bmatrix}$$

ist.

IWR Uni Heidelberg
E-mail address: robert.scholz@iwr.uni-heidelberg.de