EIN NUMERISCH STABILER CONDENSING ALGORITHMUS FÜR OCP

ROBERT SCHOLZ

Abstract. Bei der numerischen Lösung von OCPs treten dünnbesetzte strukturierte QPs auf. Es ist üblich diese Struktur mit der Hilfe eines Condensing Algorithmuses auszunutzen. Jedoch werden bei den bisher verwendeten Ansätzen viele Blockmatrizen miteinander multipliziert. Bei schlecht gestellten Problemen führt dies zu numerischen Problemen. Hier wird ein Ansatz vorgestellt, bei dem ausschließlich mit der Multiplikation von orthonormalen Matrizen gearbeitet wird.

1. Einleitung

Bei der Lösung von Optimale Steurungs Problemen (OCP) mit SQP-Verfahren tauchen quadratische Programme (QP) mit einer typischen Struktur auf. Durch die Ausnutzung dieser Struktur lässt sich die Geschwindigkeit der Verfahren stark erhöhen. Dabei wird das ursprüngliche dünnbesetzte QP in ein dichtbesetztes QP mit kleinerer Dimension transformiert. In diesem Bericht stellen wir einen Ansatz vor, der auf QR-Faktorisierung beruht. Da nur mit orthogonalen Matrizen gearbeitet wird zeichnet dieser Ansatz sich durch numerische Stabiltät aus.

Wir behandeln quadratische Programme mit der folgenden Strukur. Dabei gibt n_u die Anzahl der Steuerung, n_s die Anzahl der Zustande und n_{dis} die Anzahl der Shootingintervalle an.

$$
\begin{aligned}
\max_{u,s,p}\quad & p^\top B_{pp} p + f_p^\top p \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_{dis}} s_i^\top B_{ss}^i s_i + u_i^\top B_{uu}^i u_i \\
& + \sum_{i=1}^{n_{dis}} s_i^\top B_{su}^i u_i + p^\top B_{ps}^i s_i + p^\top B_{pu}^i u_i \\
& + \sum_{i=1}^{n_{dis}} (f_u^i)^\top u_i + (f_s^i)^\top s_i \\
s.t.\quad & s_{i+1} = X_p^i p + X_s^i s_i + X_u^i u_i - X_c^i && i = 1,\dots,n_{dis}-1 \\
& R_u^i u_i + R_s^i s_i + R_p^i p = R_c && i = 1,\dots,n_{dis} \\
& \sum_{i=1}^{n_{dis}} C_u^i u_i + C_s^i s_i + R_p^i p = C_c \\
& p_l \le p \le p_u \\
& s_l^i \le s_i \le s_u^i && i = 1,\dots,n_{dis} \\
& u_l^i \le u_i \le u_u^i && i = 1,\dots,n_{dis}
\end{aligned}
$$

Die Beschreibung des Algorithmus in diesem Bericht orientiert sich an der dazu gehörigen Matlab Implementierung. Dabei wurde der Programmcode nicht auf Geschwindigkeit optimiert. Stattdessen ist der Fokus auf der Übersichtlich und der Nachvollziehbarkeit.

2. Der Algorithmus

Analog zu der Implementierung werden wir den Algorithmus in vier Schritten darstellen.

Schritt 1: Anordnung der einzelnen Matrizen. Zunächst definieren wir $x = (p, s_0, u_0, s_1, u_1, \dots, s_{n_{dis}}, u_{n_{dis}})$. Somit können wir das QP auch schreiben als:

$$
\begin{aligned}
\max_{x}\quad & \frac{1}{2} x^\top H x + f^\top x \\
s.t.\quad & Sx = s \\
& Qx = q \\
& b_l \le x \le b_u
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$
H = \begin{bmatrix}
B_{pp} & B_{ps}^1 & B_{pu}^1 & \cdots & B_{ps}^{n_{dis}} & B_{pu}^{n_{dis}} \\
(B_{ps}^1)^\top & B_{ss}^1 & B_{su}^1 & & & \\
(B_{pu}^1)^\top & (B_{su}^1)^\top & B_{uu}^1 & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
(B_{ps}^{n_{dis}})^\top & & & & B_{ss}^{n_{dis}} & B_{su}^{n_{dis}} \\
(B_{pu}^{n_{dis}})^\top & & & & (B_{su}^{n_{dis}})^\top & B_{uu}^{n_{dis}}
\end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix}
f_p \\ f_s^1 \\ f_u^1 \\ \vdots \\ f_s^{n_{dis}} \\ f_u^{n_{dis}}
\end{bmatrix}
$$

$$S = \begin{bmatrix} X_p^0 & X_s^0 & X_u^0 & -I & & & & \\ X_p^1 & & & X_s^1 & X_u^1 & -I & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ X_p^{n_{dis}-1} & & & & & X_s^{n_{dis}-1} & X_u^{n_{dis}-1} & -I \end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix} X_c^0 \\ X_c^1 \\ \dots \\ X_c^{n_{dis}-1} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} R_p^0 & R_s^0 & R_u^0 & & & & & \\ R_p^1 & & & R_s^1 & R_u^1 & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & \\ R_p^{n_{dis}} & & & & & & R_s^{n_{dis}} & R_u^{n_{dis}} \\ C_p & C_s^0 & C_u^0 & C_s^1 & C_u^1 & \dots & C_s^{n_{dis}} & C_u^{n_{dis}} \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} R_c^0 \\ R_c^1 \\ \vdots \\ R_c^{n_{dis}} \\ C_c \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} p_l \\ s_l^0 \\ u_l^0 \\ \vdots \\ s_l^{n_{dis}} \\ u_l^{n_{dis}} \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} p_u \\ s_u^0 \\ u_u^0 \\ \vdots \\ s_u^{n_{dis}} \\ u_u^{n_{dis}} \end{bmatrix}$$

Schritt 2: Iterative QR-Faktorrisierung und Variabelentransformation. Wir betrachten nun die einzelnen Matchingblöcke und berechnen eine entsprechende QR-Zerlegung.

Sei Q_0 und R_0 die QR-Zerlegung des Blockes $[X_s^0 X_u^0 - I]$, wobei Q_0 eine orthonormale Matrix der Dimension $n_u + 2n_s$ ist und R_0 eine invertierbare untere Dreiecksmatrix mit der Dimension n_s ist.

Es gilt also :

$$\left[X_s^0 \; X_u^0 \; -I\right] = \left[R_0 \; 0\right] Q_0$$

und somit ist :

$$S = \begin{bmatrix} X_p^0 & R_0 & 0 & 0 & & & & \\ X_p^1 & \tilde{X}_s^0 & \tilde{X}_u^0 & \tilde{X}_s^1 & X_u^1 & -I & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ X_p^{n_{dis}-1} & & & & & X_s^{n_{dis}-1} & X_u^{n_{dis}-1} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}$$

IWR Uni Heidelberg
E-mail address: robert.scholz@iwr.uni-heidelberg.de