Simplificación de expresiones y ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ejemplo 1.

Simplifica la expresión $log_3(log_2 512)$.

Sea $y = log_2 512$, de donde $2^y = 512$.

¿Qué exponente del 2 me da como resultado 512? Obtenemos $y = 9$.

Así, $log_2 512 = log_2 2^9 = 9$, porque $log_a(a^x) = x$.

Luego, $log_3(log_2 512) = log_3(9)$.

$log_3(log_2 512) = log_3(9) = log_3(3^2)$, representando al 9 como potencia de 3.

$log_3(log_2 512) = log_3(9) = log_3(3^2) = 2\, log_3(3)$,

aplicando leyes de los logaritmos $log_a(a^x) = x$,

como $log_3(3) = log_3(3^1) = 1$.

Por lo que $log_3(log_2 2\,56) = 2\, log_3(3) = 2(1) = 2$.

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación $log_{\frac{1}{7}} x = \frac{3}{2}$ para x.

Aplicando la función exponencial de base $\frac{1}{7}$, tenemos

$\left(\frac{1}{7}\right)^{log_{\frac{1}{7}} x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{2}}$, de donde

$$x = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.0539949$$

Ejemplo 3.

Encontrar la solución de la ecuación $5^x - 5^{-x} = 2$.

No es posible aplicar directamente el logaritmo a la función, ya que por las propiedades de los logaritmos no es posible simplificar el logaritmo de una suma; así que primero resolveremos la ecuación para la función exponencial 5^x.

Sea $u = 5^x$, así $5^x - 5^{-x} = 2$, se representa como sigue:

$u - u^{-1} = 2$

$u - \frac{1}{u} = 2$

$\frac{u^2-1}{u} = 2$

$u^2 - 1 = 2u$

$u^2 - 2u - 1 = 0$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$u = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ y $u = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

Así $5^x = 1 + \sqrt{2}$ y $5^x = 1 - \sqrt{2}$.

La segunda opción no puede ser debido a que una función exponencial no puede tomar un número negativo, de tal modo que la única opción es $5^x = 1 + \sqrt{2}$, de donde

$$log_5(5^x) = log_5\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 1.826056$$

Ejemplo 4.

Encontrar la solución de la ecuación.

$$log_3(2x - 1) - log_3(5x + 2) = log_3(x - 2) - 2$$

Mantenemos a la izquierda las expresiones con logaritmo natural

$log_3(2x - 1) - log_3(5x + 2) - log_3(x - 2) = -2$

Factorizando el signo

$log_3(2x-1)-(log_3(5x+2)+log_3(x-2))=-2$

Aplicando las propiedades del logaritmo

$log_3(2x-1)-log_3(5x+2)(x-2)=-2$

Aplicando las propiedades del logaritmo

$log_3\frac{(2x-1)}{(5x+2)(x-2)}=-2$

Aplicado las ecuaciones inversas se tiene

$3^{log_3\frac{(2x-1)}{(5x+2)(x-2)}}=3^{-2}$

Se elimina la función exponencial con la logarítmica

$\frac{(2x-1)}{(5x+2)(x-2)}=\frac{1}{3^2}$

Resolviendo la ecuación algebraica

$\frac{(2x-1)}{(5x+2)(x-2)}=\frac{1}{9}$

$9(2x-1)=(5x+2)(x-2)$

$18x-9=5x^2-10x+2x-4$

$5x^2-26x+5=0$

Resolviendo con la fórmula general

$$x=\frac{26\pm\sqrt{26^2-4(5)(5)}}{2(5)}$$

$$x=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{10}$$

$$x=\frac{26\pm\sqrt{576}}{10}$$

$$x=\frac{26\pm 24}{10}$$

$$x=\frac{26+24}{10}=\frac{50}{10}=5 \text{ y } x=\frac{26-24}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$