1. Derivada

Iniciaremos esta unidad abordando las derivadas que, aunque tienen diversas utilidades y significados, vamos a considerarlas como la velocidad en la que una función cambia en un punto determinado.

Contemplando esto y considerando la relación de una derivada con la velocidad y el ritmo o tiempo, imaginemos las siguientes situaciones: ¿será lo mismo deslizarse por una resbaladilla, un tobogán en un parque acuático o un juego mecánico como la montaña rusa?

Además de la adrenalina que cada uno sugiere, la velocidad y el tiempo que requiere cada pendiente es diferente, independientemente de la longitud, ya que, si realizamos equivalencias, definitivamente la montaña rusa supera por mucho a una resbaladilla.

Por lo anterior, en el cálculo se presentan problemas como el de determinar la pendiente de la recta tangente o la velocidad de un objeto. En estas situaciones para dar solución empleamos el límite de una función en particular llamada derivada.

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante.

La expresión para la derivada de una función es la siguiente:

Veamos ahora cómo influyen la inclinación o pendiente, la velocidad y los cambios que ocurren al combinar los dos factores anteriores.

* 1. Pendiente, velocidad y razón de cambio

Pendiente, velocidad y razón de cambio son conceptos que se relacionan estrechamente. Imagina un auto que está en la carretera en la punta de una montaña y baja a velocidad neutral. A medida que baja la pendiente, la velocidad aumenta y, cuando la pendiente acaba, la velocidad disminuye y, por lo tanto, también la distancia recorrida. A esto último, se le considera razón de cambio.

IT. Crear una animación donde aparezca un auto parecido al de las siguientes imágenes. La animación debe iniciar con el auto en la punta de una montaña y conforme vaya bajando la pendiente, acelere la velocidad y cuando se encuentre en la parte plana, vaya disminuyendo la velocidad.

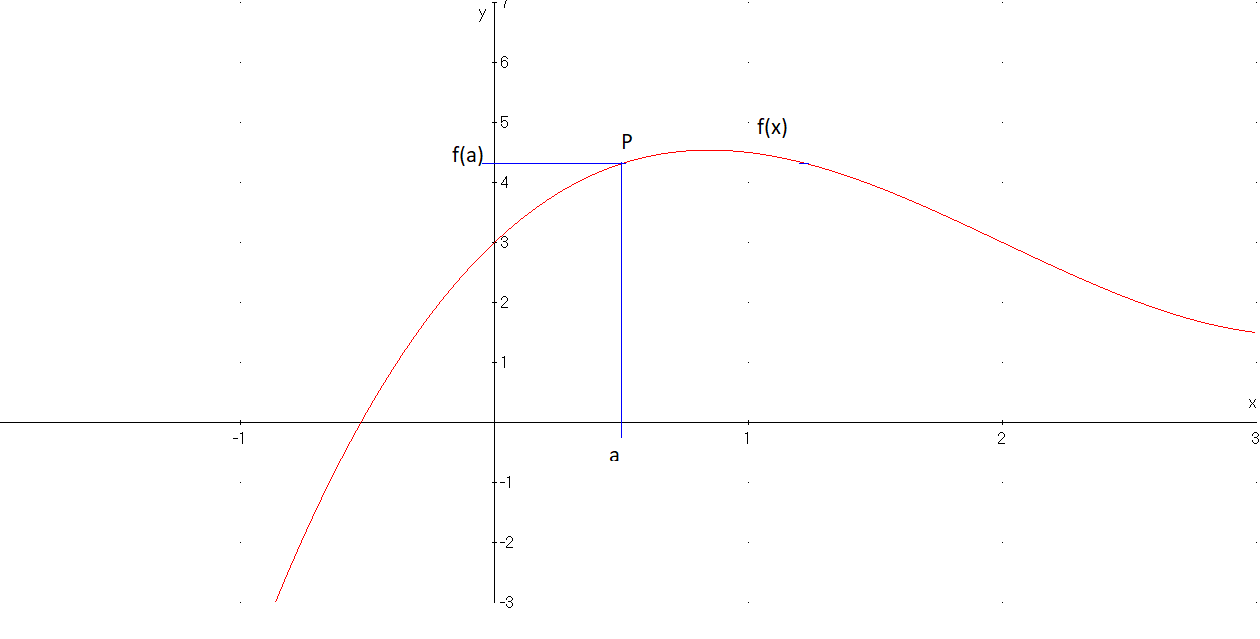
 

Analicemos los conceptos mencionados anteriormente.

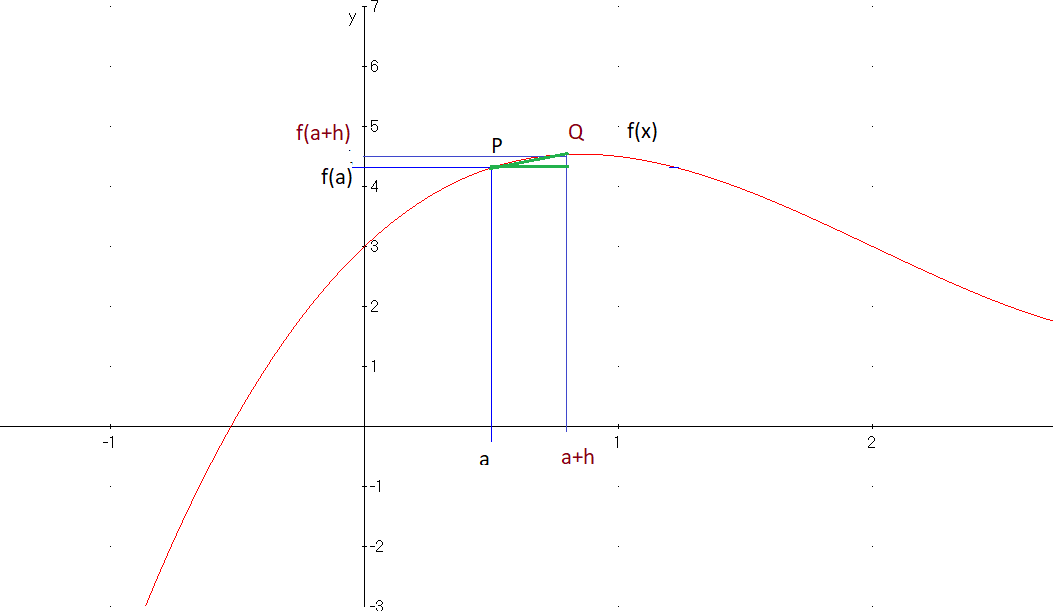
* La derivada como pendiente de la recta tangente

Consideremos una función y determinemos la pendiente de la recta tangente de la función en el punto P de coordenadas .

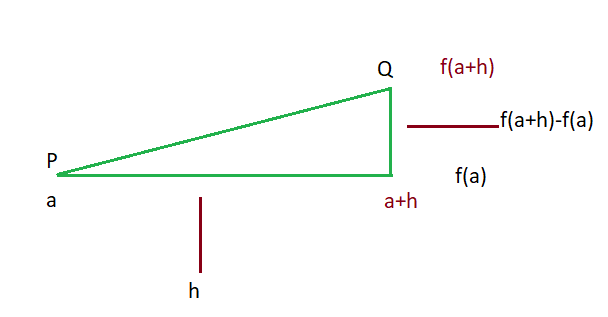
La siguiente es la gráfica de la función y ubicamos el punto P.



Para determinar la pendiente, consideremos un incremento para , con lo cual tenemos al punto Q de coordenadas y podemos formar el triángulo con los puntos P, Q y el segmento horizontal de en .

****

El triángulo que formamos tiene por hipotenusa la recta secante de P a Q, luego es posible determinar la pendiente de esta recta secante.



¿Qué sucede si aproximamos el punto Q a P?

Conforme el punto Q se aproxima a P, notamos que la recta secante se convierte en la recta tangente en el punto P, esto lo encontramos si se aproxima a , es decir, si .

Luego

Entonces, podemos afirmar que:

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

“La recta tangente a la curva de la función en el punto es la recta que pasa por P con pendiente

siempre que el límite exista” (Stewart, 2012).

Observando el problema puede verse cómo determinar la pendiente en el punto y encontrar la pendiente entre este punto y un punto cualquiera , con lo cual .

Y tenemos dos formas diferentes de representar a la pendiente de la recta tangente, con condiciones diferentes. Observemos los siguientes ejemplos:

a) Determinar la pendiente de la recta tangente a la función en el punto .

La pendiente de la recta tangente en el punto es con y .

Así

La pendiente de la recta tangente es .

b) Determinar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto .

Para determinar la ecuación de la recta tangente usamos la ecuación punto pendiente de la recta, ésta es

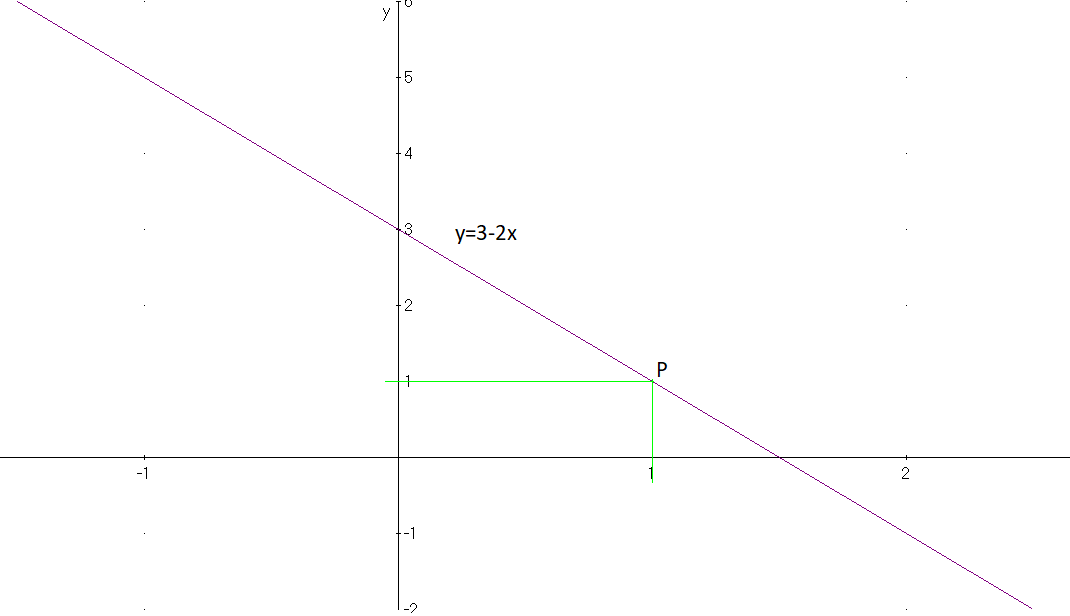
El punto de coordenadas , en este caso, es y la pendiente de la recta tangente ya la calculamos en el inciso anterior.

Así

La recta tangente a la función en es .

Es decir, la misma recta es la recta tangente.

En la gráfica siguiente se representa la función y el punto de tangencia, la recta tangente es igual a la función, como ya se calculó algebraicamente.



Otro ejemplo sería hallar la pendiente de la tangente a la curva en el punto y encontrar las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde vale: i) , ii) y iii) (*Cálculo I-2009*, 2009).

Primero determinemos el valor de la pendiente en un punto cualquiera .

, con

Sumamos las fracciones

Con lo cual la pendiente de la función en el punto es .

Con esto determinamos la pendiente para cualquier valor de , podemos usar esta expresión para determinar el valor de la pendiente de la función si .

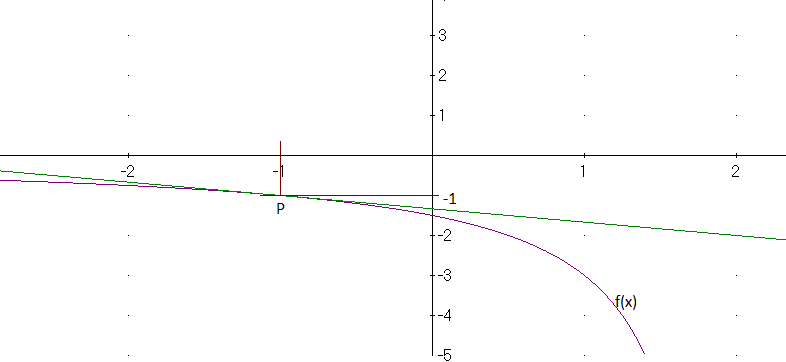
Si

Si

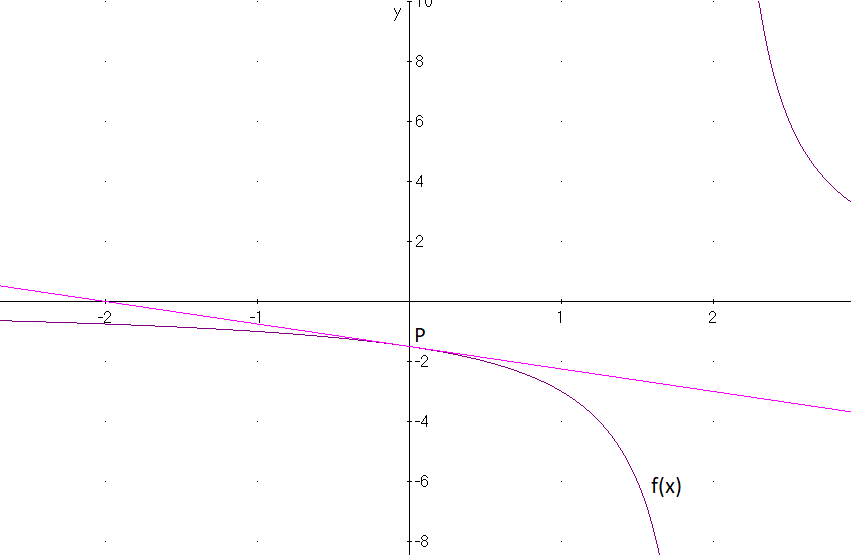
Si

Nos fue útil el cálculo de la pendiente en un punto cualquiera para determinar el valor de la pendiente en los otros puntos que se piden.

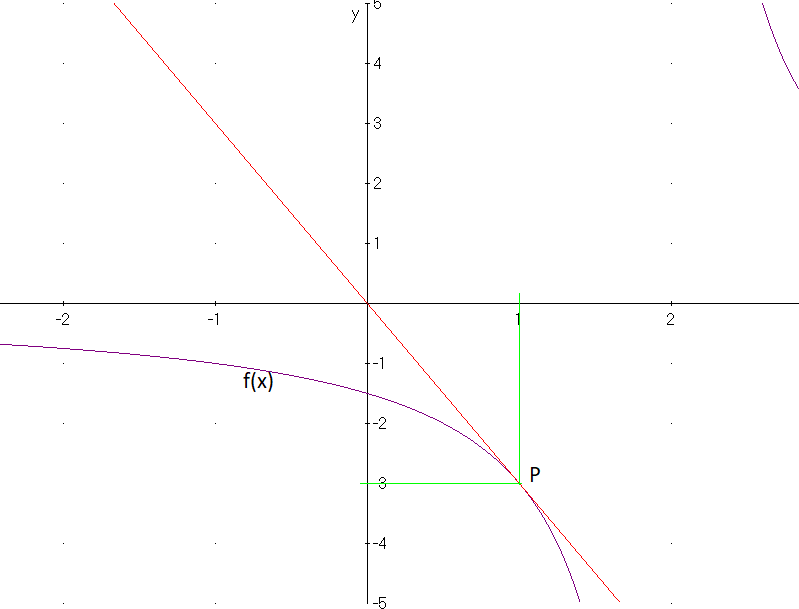
La gráfica ilustra la rectan tangente de la función en el punto donde .



La gráfica ilustra la rectan tangente de la función en el punto donde .



La gráfica ilustra la rectan tangente de la función en el punto donde .



* La derivada como velocidad

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta y que su posición es , donde es el desplazamiento del objeto en el instante y (Stewart, 2012) describe la trayectoria del movimiento.

La velocidad promedio en el intervalo , se define como

Velocidad promedio

Si se calcula la velocidad promedio sobre intervalos cada vez más cortos, esto es, si , obtenemos la velocidad instantánea que se define de la siguiente manera:

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

La velocidad o velocidad instantánea en el instante en que es el límite de las velocidades promedio, esto es,

(Stewart, 2012)

siempre que el límite exista.

Así encontramos que la expresión para determinar la velocidad instantánea es la misma que se emplea para determinar la pendiente de la recta tangente en un punto, ejemplo:

Un objeto que cae libremente a partir del reposo lo hace una distancia en metros, los primeros segundos, ¿cuál es la velocidad instantánea en el instante en el que

Determinemos la velocidad instantánea para y .

La velocidad instantánea es .

* La derivada como razón de cambio

Calculamos el cociente de las diferencias del desplazamiento de un objeto entre un intervalo de tiempo al que llamamos *velocidad promedio*, del mismo modo podemos calcular el cociente de las diferencias de la concentración de un reactivo con respecto a un intervalo de tiempo o de las diferencias de la población con respecto a un intervalo de tiempo. Es posible determinar el cociente de las diferencias de una función que representa cualquier fenómeno entre un intervalo de tiempo, en general le llamamos razón de cambio promedio.

Así, supongamos que tenemos una función que representa el comportamiento de algún fenómeno con respecto a una variable .

Si tenemos que en se tiene un cambio de un valor a un valor , decimos que se tiene un incremento en y se representa con la diferencia y denotamos por , es decir,

Lo que produce un cambio en la función, o sea, un incremento en y se representa por la diferencia y se denota por , esto es,

El cociente de los incrementos se llama razón de cambio promedio de con respecto de sobre el intervalo (Stewart, 2012). Si calculamos la razón de cambio promedio sobre intervalos cada vez más cortos, obtenemos la razón de cambio instantánea que se define de la siguiente manera:

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

La razón de cambio instantánea o razón de cambio de con respecto a es

siempre que el límite exista.

Si tomamos , tenemos .

Y si consideramos que , tenemos .

Así tenemos que la razón de cambio de una función , que representa el comportamiento de algún fenómeno con respecto a una variable , puede calcularse con la misma expresión con que se calcula la pendiente de la recta tangente en un punto y la velocidad instantánea, ejemplo:

El costo de producir abrigos es .

a) Encontrar la razón de cambio promedio de con respecto a , cuando se cambia el nivel de producción de a y de a (Stewart, 2012).

b) Hallar la razón de cambio instantánea de con respecto a , cuando (Stewart, 2012).

Iniciemos calculando el primer inciso.

1. Determinemos la razón de cambio promedio de a , tenemos que , y .

Razón de cambio promedio (RCP) es .

Razón de cambio promedio de a es .

Como razón de cambio promedio de a tenemos que , y

Razón de cambio promedio es

Razón de cambio promedio de a es .

1. Para la razón de cambio instantánea para y , tomamos que y usamos el hecho de que la razón de cambio es igual a .

Así la razón de cambio instantánea es de 16.

Conforme se toman intervalos más pequeños se observa que disminuye el valor de la razón de cambio promedio y se aproximan a 16, que fue la razón de cambio instantánea.

Es momento de practicar lo aprendido, realizando el ejercicio correspondiente a pendiente, velocidad y razón de cambio.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 23. Pendiente, velocidad y razón de cambio

Ejercicio 23. Pendiente, velocidad y razón de cambio

Instrucciones:

1. Determina la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto y encuentra la ecuación de la recta tangente.
2. Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de , su altura en pies después de segundos se expresa con (Stewart, 2012). Encontrar la velocidad cuando .
3. La temperatura en de una solución al tiempo en minutos está dada por

Calcula la razón de cambio promedio para:

1. Cuando cambia de a minutos.
2. Cuando cambia de a minutos.
3. Cuando cambia de a minutos.
4. Calcular la razón de cambio para .
5. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
6. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E23* para que quede tu evidencia registrada.
7. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase

Con esto vimos que se tiene una misma expresión para determinar la pendiente de una recta tangente, la velocidad instantánea de un objeto o la razón de cambio de cualquier función, es decir, la misma expresión en diferentes contextos. Ahora revisemos la derivada en un punto y diferentes intervalos.

1.2 Derivada en un punto y en diferentes intervalos

La derivada es el cambio que se da en una función matemática en un punto específico de su dominio, o sea, que representa la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto.

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Derivada en un punto

La derivada de una función en un número , denotada por , se define como

si el límite existe (Stewart, 2012).

Podemos también expresar a la derivada de la función en un punto como

Si hacemos la sustitución *.*

Despejando

y si , entonces .

Por lo tanto,

En donde se tiene el punto y la variable .

Entonces, decimos que una función es derivable o diferenciable en un punto , si existe, ejemplo:

1. Hallar la derivada de la función en el número .

Usamos la expresión para en .

Así

1. Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de en , si cumple las condiciones y .

No se da la expresión algebraica de la función, pero sí condiciones de ella.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente en un punto es

y que , luego .

Como se pide la ecuación de la recta tangente en y , el punto de tangencia es .

Para determinar la ecuación de la recta tangente usemos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

De las condiciones tenemos

, y

Así calculemos la ecuación de la recta tangente

Con lo cual la ecuación de la recta tangente a la función .

Observemos a continuación cómo se comportan las derivadas bajo otras circunstancias.

* Derivadas unilaterales

La derivada de la función en un punto se definió como un límite y sabemos que el límite en el punto existe si existen los límites unilaterales, entonces podemos asegurar que:

El límite existe si y sólo si y existen.

Ahora analicemos las derivadas unilaterales, calculando los valores únicamente desde un solo punto.

Definamos ahora la derivada unilateral.

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Derivada unilateral

1. Una función es derivable por la derecha si existe. O bien, existe.
2. Una función es derivable por la izquierda si existe. O bien, existe.

Tomamos en cuenta las dos formas en que se puede definir la derivada y concluimos que existe si y sólo si las derivadas por la derecha y por la izquierda en existen y son iguales.

* Derivada de una función en un intervalo

Primero definimos la derivada en un intervalo abierto.

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Decimos que es derivable en un intervalo abierto si es derivable en todo punto del intervalo. El intervalo está definido por números reales, pero también puede ser infinito; estos intervalos también pueden ser , o .

Definimos también la derivada de una función en un intervalo cerrado.

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Una funciónes derivable en un intervalo cerrado si es derivable en el intervalo y las derivadas unilaterales existen.

Derivada por la derecha de , .

Y derivada por la izquierda de , .

Veamos el siguiente ejemplo:

Determinar si la función  es derivable en el intervalo .

Como hay que determinar si la función es derivable en un intervalo cerrado, por definición debemos de determinar:

1. derivable en el intervalo .
2. derivable por la derecha de .
3. derivable por la izquierda de .

Calculémoslo:

1. Sea un punto del intervalo .

Sumando las fracciones del numerador

Expresando como una sola fracción

Simplificando

Así y la función es derivable en el intervalo .

1. Determinemos que es derivable por la derecha de .

Así y la función es derivable por la derecha de .

1. Determinemos que es derivable por la izquierda de .

Así y la función es derivable por la izquierda de .

Como la función es derivable en el intervalo , por la derecha de y por la izquierda de , decimos que es derivable en .

Veamos otro ejemplo. Determinar si la función es derivable.

Como no se indica el intervalo, debemos de determinar si la función es derivable en los reales, esto es, en .

Al ser un intervalo abierto se debe de determinar si es derivable para cualquier número real .

Sin embargo, la función se define como una función por partes, así

Por lo que hay que determinar si la función es derivable si:

1. Para este caso el intervalo es y supongamos que .

Calculamos

Así y la función es derivable.

1. Para este caso el intervalo es y supongamos que .

Calculamos

Así y la función es derivable.

1. Para determinar que la función es derivable en , calculamos derivadas unilaterales, ya que cambia la definición de la función en torno a este valor.

Como, tenemos un número negativo, así

Así

Como , tenemos un número positivo, así

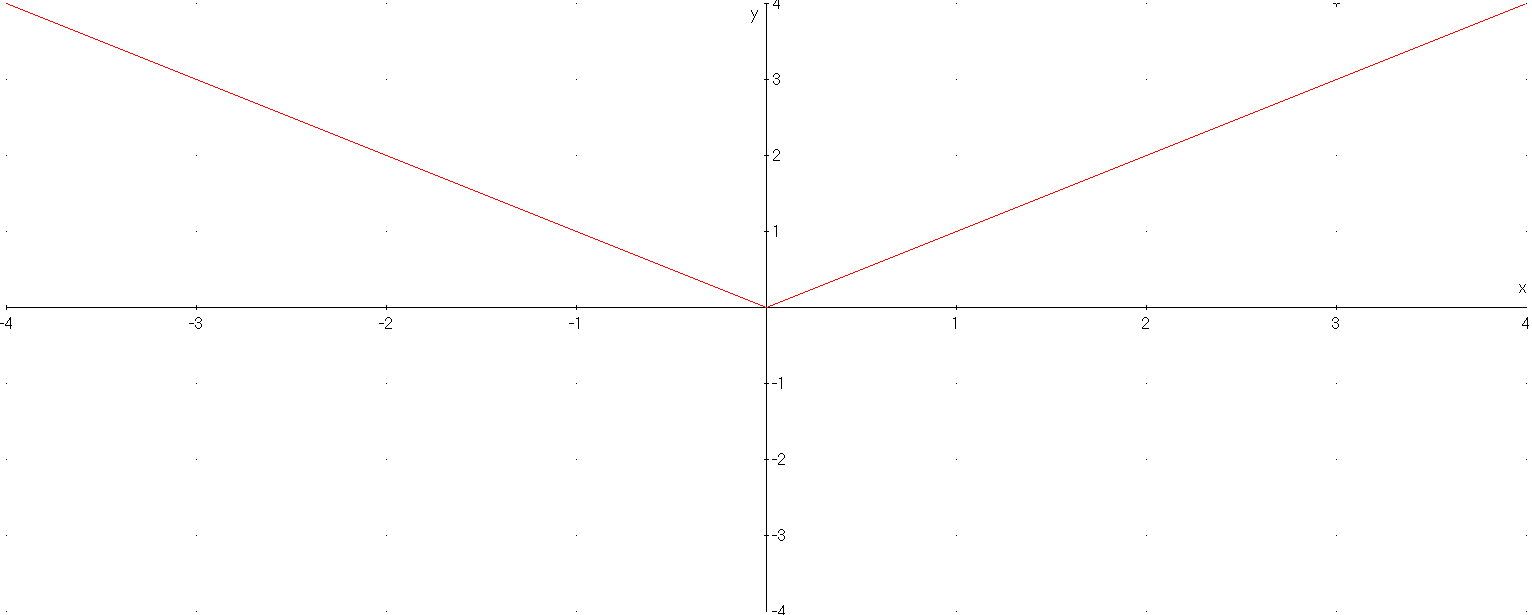
Así .

Las derivadas unilaterales son diferentes por lo que la derivada en cero no existe.

Decimos que la función no es derivable o que no es derivable en .

Pero podemos decir es derivable en .

Con este ejemplo encontramos que la función no es derivable en el punto en el que , veamos la gráfica para ver lo que sucede en este punto.

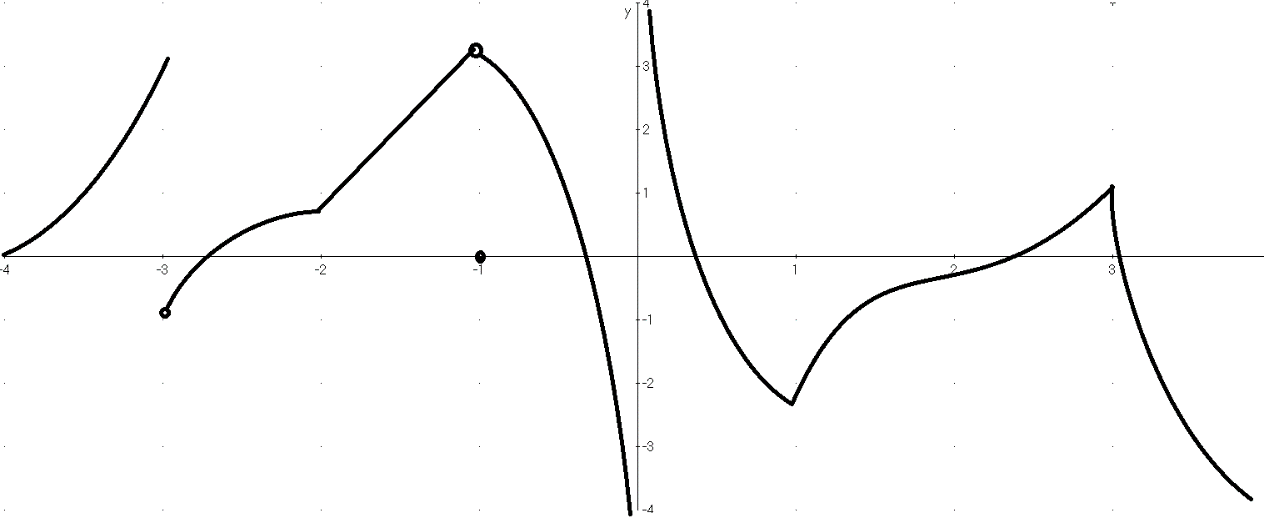


Notamos que, en el punto en el que la derivada de no existe, la gráfica de la función tiene un pico.

Así, si no existe, entonces la gráfica de la función tiene un pico en el punto ; pero ¿será ésta la única característica gráfica para que una función no tenga derivada en un punto? Con el siguiente ejemplo determinaremos si hay más características a considerar.

Como último ejemplo referente a la derivada de una función en un intervalo tenemos el siguiente:

Dada la gráfica de una función , determinar los puntos en los que la función no es derivable y dar la razón.



Observamos que la función tiene picos en los puntos donde , y , por lo que en esos puntos no es derivable.

Analíticamente, al determinar la derivada en los puntos mencionados encontramos que las derivadas unilaterales son diferentes.

Por ejemplo, en el punto donde , se tiene que la recta tangente, para valores menores que , tiene pendiente negativa y, para valores mayores a , tiene pendiente positiva, lo que lleva a valores diferentes.

Otros puntos que notamos en la gráfica son aquéllos donde la función no es continua, los cuales son:

, en donde hay un salto.

, donde hay un hueco.

, donde se va a infinito.

Si las funciones se definen por una expresión algebraica diferente, como sucede con una función por partes, hay que calcular derivadas unilaterales y al ser diferentes no existen.

Luego, en los puntos donde la función no es continua, la derivada no existe.

Así, gráficamente una función no es derivable en los puntos en los que hay:

1. Un hueco
2. Un salto
3. Tendencia a infinito o menos infinito
4. Un pico
5. Tangente vertical

* Derivabilidad y continuidad

Hay una relación entre la continuidad de una función y la derivabilidad, ésta queda expresada en el teorema siguiente.

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Teorema: si una función es derivable o diferenciable en un punto entonces es continua en .

Este teorema es importante ya que garantiza que si una función tiene derivada entonces es continua; sin embargo, no garantiza que, si una función es continua, tenga que ser derivable por lo que el recíproco del teorema es falso. Existen funciones continuas que no son derivables, un ejemplo de esto es la función valor absoluto , ya que esta función es continua en ; pero acabamos de demostrar que no es derivable en este punto, gráficamente notamos que tiene un pico.

* La derivada como una función

Hemos calculado la pendiente de la recta tangente en más de un valor, la velocidad de un objeto en uno o varios valores, la razón de cambio y finalmente la derivada de la función en un punto o varios puntos, así como calculado la derivada para cualquier punto en un intervalo, lo que permite que el punto que tomamos haga el papel de variable. Definamos, entonces, la derivada como una función usando la variable .

Así, la derivada de la función para algún valor de en el dominio de la función es

Con lo cual es una función que se denomina derivada de .

El dominio de la función derivada de es el conjunto de todos los valores de tales que existe, esto es, .

Nota: representamos la derivada de como , , , , , , donde y se denominan operadores de derivación. Ejemplo:

Determinar la derivada de la función y el dominio de .

Determinemos el dominio de la función .

Como es una raíz cuadrada el radicando debe ser positivo.

Luego, el dominio de la función es .

Debemos de determinar entonces si la función es derivable en el intervalo y en .

Determinemos la derivada para cualquier valor de en .

Como no es posible eliminar la raíz cuadrada o distribuir, racionalicemos

Así, para en .

Determinemos ahora la derivada en , determinamos la derivada por la derecha.

Por lo que la derivada en no existe.

Así la función es derivable en .

El dominio de la derivada de la función

Ya hemos revisado lo correspondiente a las derivadas, por lo que es momento de practicar lo aprendido con el siguiente ejercicio.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 24. Derivada en puntos e intervalos

Ejercicio 24. Derivada en puntos e intervalos

Instrucciones:

1. Determinar la derivada de la función en .
2. Determinar si la función es derivable en el intervalo .
3. Graficar la función definida como sigue

Determina a partir de su gráfica dónde no es continua la función y da las razones de tu respuesta.

1. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
2. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E24* para que quede tu evidencia registrada.
3. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

Con la definición dada es posible determinar la derivada de funciones en un punto o en un intervalo; pero es un procedimiento que no es directo ni práctico si se tiene una función compleja o una aplicación. Así, buscando la forma más inmediata de calcular la derivada de una función, definiremos las reglas de derivación.