2. Reglas de derivación

Definiremos las reglas de derivación para las funciones algebraicas y trascendentes, éstas permitirán determinar de una forma más directa la derivada de una función, ya que son procedimientos que permiten llevar a cabo de una manera más fácil y eficiente el cálculo de la función derivada sin hacer uso de la definición de derivada, de esta manera, nos evitamos cálculos sin sentido.

2.1 Derivación de funciones algebraicas y trascendentes

En general, para demostrar que las reglas de derivación son válidas, usaremos la definición de derivada. En la siguiente tabla podrás revisar las reglas más comunes para realizar la derivación de funciones algebraicas y trascendentes, y mostraremos la comprobación de algunas de ellas.

IT. Colocar la siguiente información en una tabla, donde al dar clic en ciertos apartados, sale la comprobación de la regla. Colocar un ícono semejante a este ☜ o 🖐 para indicar que esa regla lleva comprobación. Colocar una instrucción en la tabla: Da clic en los íconos para revisar la comprobación de la regla. También realizar la tabla en un PDF para descarga.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Reglas de derivación | | |
| Derivadas de funciones algebraicas | | |
| 1. | La derivada de una constante es cero |  |
| 2. | La derivada de la variable es uno |  |
| 3. | La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas |  |
| 4. | La derivada de una diferencia es igual a la diferencia de las derivadas |  |
| 5. | La derivada de un producto de una constante por la función es igual a la constante por la derivada de la función |  |
| 6. | Derivada de un producto 🖐 |  |
| 7. | Derivada de la potencia de la variable |  |
| 8. | Derivada del cociente de funciones 🖐 |  |
| Derivadas de funciones trascendentes | | |
| Derivadas de funciones logarítmo natural y general | | |
| 9. | 🖐 | |
| 10. | 🖐 | |
| Derivadas de las funciones exponencial natural y general | | |
| 11. |  | |
| 12. | 🖐 | |
| Derivadas de funciones trigonométricas | | |
| 13. | 🖐 | |
| 14. |  | |
| 15. | 🖐 | |
| 16. |  | |
| 17. |  | |
| 18. |  | |
| Derivadas de las funciones trigonométricas inversas | | |
| 19. |  | |
| 20. |  | |
| 21. |  | |
| 22. |  | |
| 23. | 🖐 | |
| 24. |  | |
| Derivadas de funciones hiperbólicas | | |
| 25. |  | |
| 26. | 🖐 | |
| 27. |  | |
| 28. |  | |
| 29. |  | |
| 30. |  | |
| Derivadas de funciones hiperbólicas inversas | | |
| 31. |  | |
| 32. |  | |
| 33. |  | |
| 34. | 🖐 | |
| 35. |  | |
| 36. |  | |

Demostraciones.

(6)

Demostraremos que se cumple la regla de derivación

Usando la definición de derivada

Sumemos

Así, .

(8)

Demostraremos que se cumple la regla de derivación

Despejando

Sumando

Así, .

(9)

Demostraremos que

Por definición

Debido a que la derivada y la integral son operaciones inversas.

(10)

Demostraremos que

Recordemos la propiedad del cambio de base

(12)

Demostraremos que se cumple

Como si y sólo si .

Entonces calculemos la derivada de manera implícita

Así se cumple que .

(13)

Demostraremos que

Usando la definición de derivada

Así se cumple que .

(15)

Demostraremos que

Usemos reglas de derivación ya conocidas como las que se tienen en los puntos 13 y 14 y la del cociente

Y se cumple que.

(23)

Demostraremos que

Con derivación implícita si y sólo si .

Derivando en ambos lados de la igualdad con respecto a

Sabemos que y que .

Luego

Así,

(26)

Demostraremos que

Para ello usemos la definición implícita de la función

Así,

Se cumple la igualdad.

(34)

Demostraremos que

Usemos el hecho de que si y sólo si .

Calculemos la derivada implícita

De donde

Sabemos que y se tiene la identidad

.

Así,

Y

En el siguiente PDF encontrarás la tabla anterior para que puedas descargarla y consultarla las veces que sean necesarias.

IT. Colocar la tabla anterior en formato PDF. El nombre del PDF debe ser: Reglas de derivación, por lo tanto, este nombre debe quitarse de la tabla. El PDF no llevará las demostraciones.

Con esto tenemos una expresión para poder determinar la derivada de cualquier función algebraica o trascendente, y para demostrar su validez se empleó la definición de derivada, las reglas de derivación ya conocidas, una definición para la función o derivación implícita.

No siempre se tiene sólo una función simple, sino que también hay funciones compuestas y para poder determinar la derivada de una función compuesta usamos la regla de la cadena, que definimos a continuación.

2.2 La regla de la cadena

Como mencionamos, la regla de la cadena nos sirve para determinar la derivada de una función compuesta. Recodemos que es compuesta si puede escribirse como , esto simplifica una función dentro de una función, esto es la función de una función. Entonces podemos decir que:

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Regla de la Cadena

Si tanto como son funciones derivables y es la función compuesta definida por , entonces la función compuesta es derivable y su derivada se expresa como:

Usando otra notación, si y son funciones derivables entonces:

(Stewart, 2012)

Si tenemos funciones algebraicas o trascendentes compuestas, esto es, que dependan de una función que a su vez depende de , . Para calcular la derivada de la función usamos la *regla de la cadena* y, si cada una de las reglas de derivación que definimos las aplicamos a funciones compuestas, tendremos la regla de derivación para la función compuesta. Estas reglas se muestran en la siguiente tabla.

IT. Realizar un PDF para descarga y que se muestre en una ventana modal.

|  |  |
| --- | --- |
| Funciones algebraicas | |
| 1. | 1. , donde y son funciones de |
| 2. | 1. , donde y son funciones de |
| 3. | 1. , donde es función de |
| 4. | 1. , donde y son funciones de |
| 5. | 1. , donde es función de |
| 6. | 1. , donde y son funciones de |
| Derivadas de las funciones logaritmo natural y general | |
| 7. | 1. , donde es función de |
| 8. | 1. , donde es función de |
| Derivadas de las funciones exponencial natural y general | |
| 9. | 1. , donde es función de |
| 10. | , donde es función de |
| Derivadas de funciones trigonométricas | |
| 11. | , donde es función de |
| 12. | , donde es función de |
| 13. | , donde es función de |
| 14. | , donde es función de |
| 15. | , donde es función de |
| 16. | , donde es función de |
| Derivadas de las funciones trigonométricas inversas | |
| 17. | , donde es función de |
| 18. | , donde es función de |
| 19. | , donde es función de |
| 20. | , donde es función de |
| 21. | , donde es función de |
| 22. | , donde es función de |
| Derivadas de funciones hiperbólicas | |
| 23. | , donde es función de |
| 24. | , donde es función de |
| 25. | , donde es función de |
| 26. | , donde es función de |
| 27. | , donde es función de |
| 28. | , donde es función de |
| Derivadas de funciones hiperbólicas inversas | |
| 29. | , donde es función de |
| 30. | , donde es función de |
| 31. | , donde es función de |
| 32. | , donde es función de |
| 33. | , donde es función de |
| 34. | , donde es función de |

Revisemos los siguientes ejemplos donde se puede aplicar la regla de la cadena.

Ejemplo 1.Determinar la derivada de la función .

La función es compuesta y se puede expresar como potencia

Calculamos la derivada de la potencia

Ejemplo 2.Determinar la derivada de la función .

La función es una potencia de la forma . Derivando

Ejemplo 3.Determinar la derivada de la función . Esta función es compuesta, potencia de un cociente.

Calculamos la derivada

Ejemplo 4.Determinar la derivada de la función

Ejemplo 5.Determinar la derivada de la función

Para determinar la derivada de una función que está definida como una potencia con base y exponente función, esto es, de la forma , no podemos usar la derivada de la función , base función y exponente constante, o , base constante y exponente función. Lo que emplearemos para calcular la derivada es usar las funciones inversas logaritmo natural y exponente natural, con lo cual

Ejemplo 6.Determinar la derivada de la función

Es momento de realizar el siguiente ejercicio correspondiente a las reglas de derivación.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 25. Reglas de derivación

Ejercicio 25. Reglas de derivación

Instrucciones:

1. Determinar la derivada de las siguientes funciones:
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E25* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

En el siguiente ejemplo es posible usar la derivada de la función como solución de problemas, en este caso en un contexto geométrico y no sólo en el cálculo algebraico de la derivada de una función dada.

Ejemplo 7. Encontrar una parábola que pase por el punto que tenga la ecuación y cuya tangente en tenga la ecuación .

Usamos el hecho de que la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada en el punto de tangencia.

La recta tangente tiene una pendiente .

Y

En el punto de tangencia

Luego

También sabemos que el punto de tangente pertenece a la recta y a la parábola, con lo cual

Finalmente, sabemos que el punto pertenece a la parábola, con lo cual

Tenemos las ecuaciones

De donde

Sumando

Sustituyendo en

Luego, la función es

Realiza el siguiente ejercicio donde aplicarás el concepto de derivada, para saber cuándo se cumple alguna de las siguientes condiciones: que la recta tangente sea horizontal, la pendiente igual a derivada o el cálculo con reglas de derivación.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 26. Derivada

Ejercicio 26. Derivada

Instrucciones:

1. Determinar para qué valores de la gráfica de tiene tangente horizontal.
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E26* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

Hasta el momento hemos implementado las reglas de derivación para las funciones algebraicas, trascendentes y funciones compuestas; sin embargo, es importante mencionar cómo se abordan la derivación implícita y explícita, que veremos a continuación.

2.3 Derivación implícita y derivación explícita

Si tenemos una expresión algebraica con las variables y , que nos define una función y no la expresamos de la forma , ya sea porque algebraicamente no es posible despejar la variable o porque se quiera mantener como ecuación, decimos que la función está definida de manera implícita y, si la función está dada por , decimos que está definida de manera explícita.

Son funciones en forma implícita ,, , , , , .

Si la función queda definida de manera explícita, ¿cómo calculamos su derivada? Para determinar la derivada de una función definida de esta forma usamos las reglas de derivación y la regla de la cadena. Para hacerlo más práctico, veremos el procedimiento mediante el siguiente ejemplo:

Determinar la derivada de la función , esto es, de la expresión .

Para determinar la derivada implícita primero calculamos la derivada en la igualdad

La derivada de una igualdad es la derivada de cada uno de los miembros de la igualdad

Calculamos la derivada de la suma

Calculamos la derivada de cada función, y , en este caso la variable de la derivada es y representa a la función de , así tenemos que emplear la regla de la cadena con lo cual y , ya que la variable de la derivada y la de la función son iguales.

Así,

Resolvemos la ecuación para determinar el valor de la derivada

Luego la derivada es igual a , que al igual que la función original está dada de manera implícita.

Analicemos otro ejemplo:

Demostrar que la recta tangente a la elipse en el punto es .

La ecuación de la recta tangente es

Nos falta el valor de la pendiente, para ello usamos el hecho .

Podemos despejar y calcular la derivada usando reglas de derivación o podemos aplicar la derivación implícita.

Derivemos implícitamente

Despejando

Luego

Calculamos la ecuación de la recta

Partimos de la ecuación de la elipse

Así, la ecuación de la recta es

Es momento de realizar el siguiente ejercicio aplicando los procedimientos anteriores.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 27. Derivación implícita y explícita

Ejercicio 27. Derivación implícita y explícita

Instrucciones:

1. Determinar la derivada de la función .
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en .
3. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
4. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E27* para que quede tu evidencia registrada.
5. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

Ya que abordamos las derivadas implícitas y explicitas, donde observamos que la y no se encuentran despejadas, es momento de revisar las derivadas de orden superior.

2.4 Derivadas de orden superior

Dada la función , al calcular la derivada obtenemos , ésta es una nueva función, la función derivada y como obtenemos una función es posible determinar su derivada, esto es la derivada de la derivada que denotamos como y decimos que es la segunda derivada, ya que calculamos dos veces la derivada de .

También es posible denotar a la segunda derivada de la función como , o .

La segunda derivada es una nueva función y podemos determinar su derivada, así

, ésta es la tercera derivada y la denotamos como , , o .

Este proceso se puede continuar hasta obtener la derivada -ésima de la función denotada por, , o , y que se obtiene derivando veces la función .

Observemos el siguiente ejemplo:

Calcular la primera derivada, segunda derivada, tercera derivada y derivada -ésima de la función .

* Primera derivada

Así,

* Segunda derivada

Calculamos la derivada de la función , podemos calcular la derivada del cociente o podemos expresarlo como potencia, ya que el numerador es constante.

Derivando

Así,

* Tercera derivada

Derivamos la función

Así,

Tenemos

* Derivada -ésima

Si tenemos la derivada de orden , podemos calcular la derivada y obtendríamos la derivada -ésima; pero no se tiene ésta y debe ser cualquier número entero.

Para determinar la derivada -ésima calculamos varias derivadas de orden superior hasta que podamos, con base en un patrón, determinar cuál es la derivada -ésima. Por el momento llevamos tres derivadas; pero necesitamos calcular algunas otras para obtener la derivada -ésima.

* Calculemos la cuarta derivada de la función

Podemos identificar que la derivada -ésima tiene el factor con un cierto exponente, el orden de la derivada es el valor de y vemos que para la primera derivada el exponente de es , para la segunda derivada el exponente de es , en la tercera derivada el exponente es , luego para la derivada -ésima el exponente es .

Los signos van intercambiándose, función positiva, primera derivada negativa, segunda derivada positiva, tercera derivada negativa y cuarta derivada positiva, esto es, son potencias de , el cual representa el signo.

Los coeficientes son primera derivada , segunda derivada , tercera derivada , cuarta derivada 48, así tenemos que:

|  |
| --- |
| Primera derivada, |
| Segunda derivada, |
| Tercera derivada, |
| Cuarta derivada, |
| Derivada -ésima, |

Luego

Si expresamos el exponente positivo

Observa el siguiente ejemplo:

Determinar la derivada -ésima de la función

* Primera derivada
* Segunda derivada
* Tercera derivada
* Cuarta derivada

Ésta es igual a la función, así tenemos que se repiten las derivadas, teniendo:

* Primera derivada, quinta derivada
* Segunda derivada, sexta derivada
* Tercera derivada, séptima derivada
* Función, cuarta derivada, octava derivada

Para esta función no hay un patrón para todas, sólo hay cuatro diferentes opciones:

Aquí obtenemos una función por partes.

Ya que hemos terminado con el subtema de derivadas de orden superior, es momento de practicar lo aprendido.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 28. Derivadas de orden superior

Ejercicio 28. Derivadas de orden superior

Instrucciones:

1. Encuentra una expresión para la derivada -ésima de la función .
2. Determina la derivada de orden de la función , esto es, .
3. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
4. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E28* para que quede tu evidencia registrada.
5. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

Así es posible determinar la derivada de cualquier función algebraica o trascendente y si está expresada de manera explícita o si hay que usar un procedimiento para una función definida de manera implícita, esto es, donde no es posible despejar. También se calcula la segunda derivada, la tercera derivada o la -ésima derivada. Sabiendo ya calcular derivadas centrémonos en las aplicaciones de la derivada, la primera de ellas será razones de cambio relacionadas donde la derivada es una herramienta para la solución de un problema.