2. Funciones inversas

Las funciones inversas son aquéllas donde la función es completamente opuesta, lo que hace que el elemento del contradominio regrese al del dominio.

Se puede decir que si tenemos una función , su función inversa se denota como y tiene la propiedad de que, cuando aplicas a un valor obtenido a través de , vuelves al valor original de .

Para encontrar la función inversa de una función dada, puedes seguir estos pasos:

1. Expresar la función original en términos de .
2. Intercambiar y en la ecuación, es decir, reemplazar todas las por y todas las por .
3. Resolver la nueva ecuación para obtener *y* en términos de . Este resultado se denota como .

Es importante considerar que no todas las funciones tienen una función inversa, debido a la inyectividad o sobreyectividad, esto es, si una función es inyectiva, quiere decir que cada valor de tiene un único valor en , o sea, que no hay dos valores diferentes de que se asignen al mismo valor de . Por otra parte, si la función es sobreyectiva, quiere decir que cada valor de tiene al menos un valor correspondiente en *x*, en otras palabras, el rango de la función cubre todo el contradominio. Si la función no es inyectiva o sobreyectiva, entonces no puede definir una función inversa.

Enseguida analizaremos esto con mayor detenimiento con la función biunívoca.

* Función biunívoca, uno a uno o inyectiva

La relación entre una función inversa y una función biunívoca es estrecha, ya que una función debe ser biunívoca para tener una función inversa bien definida.

Una función biunívoca es aquélla que cumple dos propiedades importantes: es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, como ya lo habíamos explicado anteriormente.

La función inversa, descrita como , toma los valores de de la función original y devuelve los valores de originales. La función inversa es también una función biunívoca, ya que invierte los roles de y , y mantiene la propiedad de inyectividad y sobreyectividad.

Entonces se define que una función *,* con dominio A e imagen B, es biunívoca, uno a uno o inyectiva si nunca toma el mismo valor dos veces, es decir:

1. Si entonces , o
2. Si entonces

Observa el siguiente ejemplo al respecto:

1. Determinar que la función es biunívoca.

Supongamos que el valor de la función en dos puntos es el mismo

usando la definición de la función

simplificando

simplificando

Los valores deben de ser iguales, luego es biunívoca o uno a uno.

1. Determinar si la función es biunívoca.

Suponiendo que el valor de la función es el mismo para dos puntos

Evaluando

¿Se cumple esta igualdad?

Veámoslo. Si es válida se debe de cumplir para cualquier par de números reales. Si tomamos y , siendo que , encontramos que , y por definición si partimos de dos números diferentes al evaluar las funciones también deben de ser diferentes, por lo cual no se cumple la igualdad y la función no es biunívoca.

Sea una función con dominio A e imagen B, si es la función con dominio B e imagen A, entonces es la función inversa de , si y sólo si se cumple:



De acuerdo con la definición para determinar la función inversa, debemos despejar la variable y la función que se obtenga será la función inversa, para garantizar que es la inversa debemos de ver que se cumplan las condiciones del teorema.

Entre una función y su inversa se cumple:

1. si y sólo si .

b) La gráfica de una función y su inversa se reflejan con respecto a la recta .

Para calcular la inversa de una función :

1. Verificamos que la función sea biunívoca o uno a uno.
2. Despejamos de la igualdad .
3. Obtenemos la función y cambiamos la variable para obtener .
4. Verificamos que se cumplen las condiciones del teorema y , lo que permitirá determinar que es la función inversa.
5. Damos la función inversa .

Revisemos el siguiente ejemplo.

Determinar la inversa de la función y graficar la función y su inversa en el mismo plano.

1. ¿ es biunívoca?

Algebraicamente:

Supongamos que el valor de la función en dos puntos es el mismo

usando la definición de la función

simplificando

simplificando

Sacando raíz cubica

La función es biunívoca.

1. Despejamos .
2. Así, ,

cambiando variable

1. Verificamos las composiciones

Se cumplen ambas condiciones, con lo cual la función es la función inversa.

Graficamos las funciones y .

Mapa de colores

Descripción generada automáticamente con confianza media

Observamos que se cumple que la función y su inversa se reflejan con respecto a la recta , y en la gráfica de la función se tiene el punto y en la función inversa el punto .

Otra forma de determinar que la función es biunívoca o uno a uno es por medio de una representación gráfica, la prueba de la recta horizontal.

* Prueba de la recta horizontal

Una función es biunívoca o uno a uno si y sólo si toda recta horizontal interseca a la gráfica de la función a lo más en un punto. Retomemos las funciones del ejemplo anterior para dar seguimiento.

La gráfica de la función es

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Al trazar cualquier recta horizontal corta a la gráfica de la función en un punto.

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Con lo cual la función es biunívoca o uno a uno.

Graficando la función se tiene

Gráfico

Descripción generada automáticamente con confianza baja

Al trazar cualquier recta horizontal, notamos que hay rectas que no la cortan, hay una recta que la corta en un punto; pero hay rectas que la cortan en dos puntos, por lo que la función no es biunívoca.

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Si determinamos la monotonía de la función en un intervalo o en su dominio, podremos determinar si es biunívoca o uno a uno.

Es momento de practicar lo aprendido. Realiza el ejercicio correspondiente.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 6. Funciones inversas

Ejercicio 6. Funciones inversas

Instrucciones:

1. Observa las siguientes funciones:
2. Determina la inversa de la función.
3. Grafica la función y su inversa en el mismo plano.
4. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
5. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
6. Espera la realimentación.

Las funciones inversas desempeñan un papel importante en el estudio de las relaciones entre variables y la resolución de problemas. Proporcionan una forma de invertir la relación de una función original, lo que permite encontrar los valores originales de la variable de entrada a partir de los valores obtenidos a través de la función; sin embargo, no todas las funciones tienen una función inversa bien definida, ya que esto depende de las propiedades de inyectividad y sobreyectividad.

En el siguiente tema, abordaremos las funciones trascendentes, las cuales no pueden ser expresadas algebraicamente a través de una combinación finita de operaciones algebraicas (como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces).