3. Funciones trascendentes

Las funciones trascendentes son funciones matemáticas que no pueden ser expresadas de manera algebraica utilizando una combinación finita de operaciones algebraicas básicas, como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y exponentes. Estas funciones trascendentes suelen involucrar operaciones más complejas, como funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas o hiperbólicas.

Las funciones trascendentes se llaman así porque "trascienden" las limitaciones algebraicas y no pueden ser resueltas algebraicamente. Su comportamiento y propiedades a menudo se estudian utilizando métodos analíticos, aproximaciones numéricas o técnicas avanzadas de cálculo.

Las funciones trascendentes que definiremos son las funciones exponenciales naturales y generales, logarítmicas naturales y generales, trigonométricas y trigonométricas inversas, e hiperbólicas e hiperbólicas inversas. En cada caso se define la función, su dominio, imagen, gráfica y, en caso de ser posible, propiedades algebraicas necesarias.

3.1 Exponenciales naturales y generales

La función exponencial natural, denotada por , es la función potencia con base en el número irracional y con un exponente de cualquier número real . El dominio de la función son los reales y la imagen el intervalo .

El número irracional denotado por la letra y llamado número de Euler se define como con valor es ...

La gráfica de la función exponencial natural es la siguiente:

Gráfico

Descripción generada automáticamente

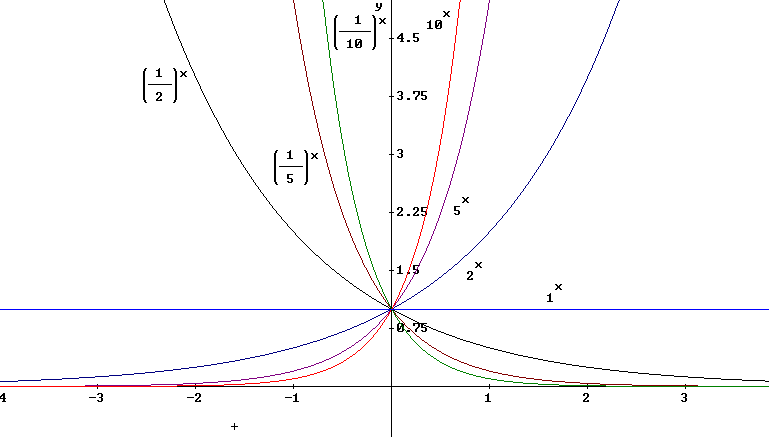
Al ser la función exponencial natural una función exponencial, cumple las leyes de los exponentes.

Entonces, si y son números reales y *r* es un número racional, entonces:

Por su parte, la función exponencial general o función exponencial de base , denotada por , con número real, se define como , para todo y para todo número real *.*

Como los valores de son positivos para todo *,* también lo son para . Así el dominio de la función son los números reales y su imagen los reales positivos o el intervalo .

La gráfica de la función exponencial general depende del valor de la base . A continuación, se muestran algunas de ellas.



Notamos que si , entonces la gráfica de la función es creciente y se comporta como se observa a continuación:

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Si , entonces la gráfica de la función es decreciente y se comporta como se ilustra enseguida:

Imagen que contiene Gráfico

Descripción generada automáticamente

Finalmente, si , la función es , ya que es cualquier número real. Así, éste es un caso especial donde la función es igual a la recta constante .

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

La función exponencial general también cumple las leyes de los exponentes.

IT. Colocar en una caja Para saber más.

IT. Colocar sobre el título del video el hipervínculo al mismo: <https://www.youtube.com/watch?v=CfbspxOf0lA> Colocar la referencia: Andalón (2017).

Si deseas refrescar tu conocimiento acerca de las leyes de los exponentes, revisa el siguiente video:

Leyes de los exponentes

En este teorema, sean y números reales positivos y si y son números reales cualesquiera, entonces:

Tomemos como ejemplo el inciso y el para realizar la demostración de estas propiedades.

2)

Tenemos

por definición de la función exponencial

ya que se cumplen las leyes de los exponentes para la función exponencial natural

factorizando el logaritmo natural

por la propiedad para la función exponencial natural.

Con lo cual

Así demostramos que esta propiedad es válida.

IT. Colocar en una caja Para saber más.

IT. Colocar sobre el título del video el hipervínculo al mismo: <https://www.youtube.com/watch?v=4G0sKzlYwnQ> Colocar la referencia: Scienzia Educación (2020).

Si deseas refrescar tu conocimiento acerca de las propiedades de los logaritmos, revisa el siguiente video:

Logaritmos

4)

por definición de la función exponencial

para la constante

por las propiedades de los logaritmos,

multiplicando

por las leyes de los exponentes

por la definición de la función exponencial.

Así

Con lo que demostramos que la propiedad es válida.

Existen otras funciones que son inversas a la función exponencial, llamadas logarítmicas, esto es, cuando la base del logaritmo es el número se le llama logaritmo natural.

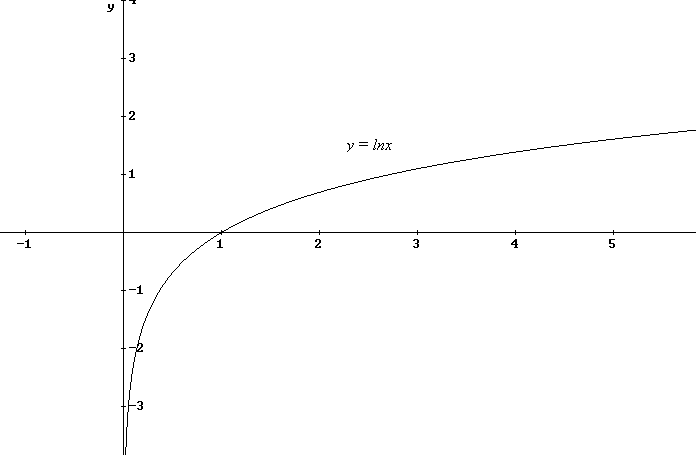
3.2 Logarítmicas naturales y generales

La función logaritmo natural, denotada por , se define como

l

La función logaritmo natural tiene por dominio el intervalo y por imagen los números reales.

La gráfica de la función es la siguiente:



Otra forma de definir la función logaritmo natural, denotada por , es si y sólo si .

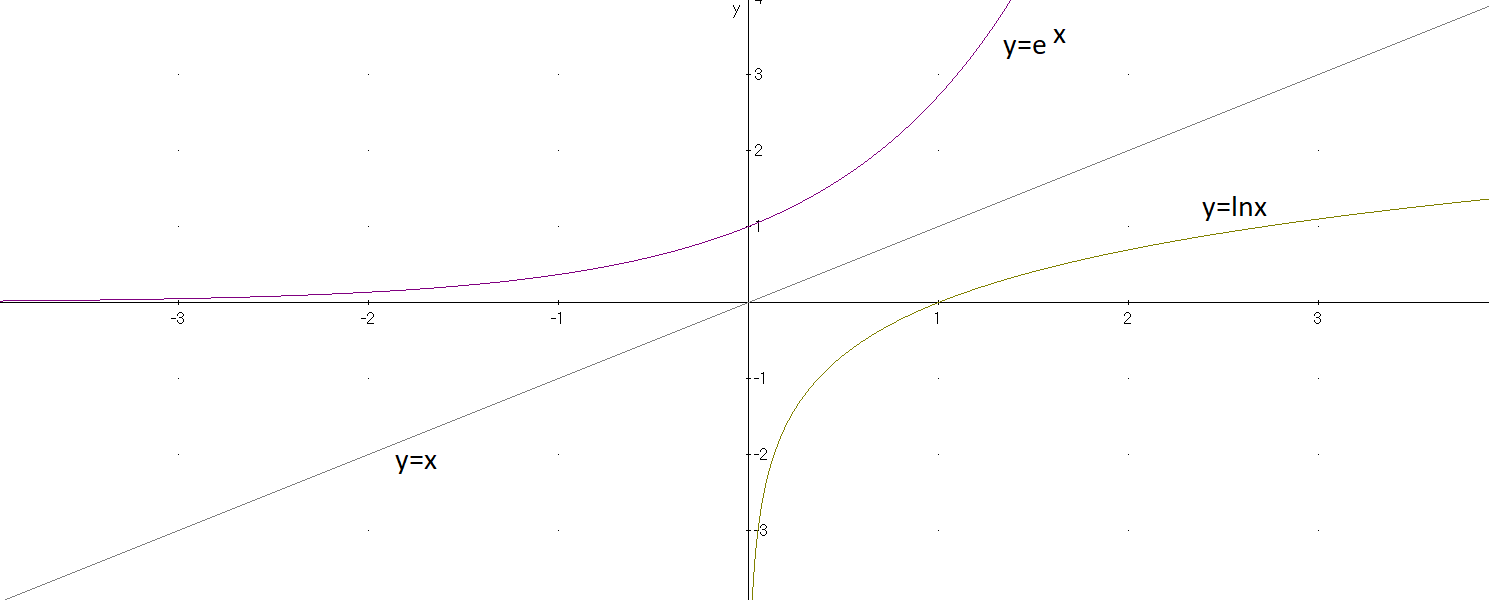
Con esto es posible definir la función logaritmo natural como la inversa de la función exponencial natural o viceversa y, a su vez, la función exponencial natural como la inversa de la función logaritmo natural.

Estas funciones al ser inversas cumplen propiedades de funciones inversas como lo es el teorema siguiente.

Teorema: para todo número real .

para todo número real positivo.

Y se cumplen en sus gráficas, porque una es el reflejo de la otra con respecto a la recta .



La función cumple también con las propiedades de los logaritmos.

En el teorema, si y son números reales positivos, esto es y , y *r* un número racional, entonces:

El teorema nos define el logaritmo natural de un producto, de un cociente y de una potencia, no se define el logaritmo natural de una suma o una diferencia.

Un ejemplo donde se hace uso de las leyes de los logaritmos es el siguiente.

Determinar el valor del logaritmo empleando , y .

Usando las leyes de los logaritmos se tiene

Con lo cual

Usando los valores

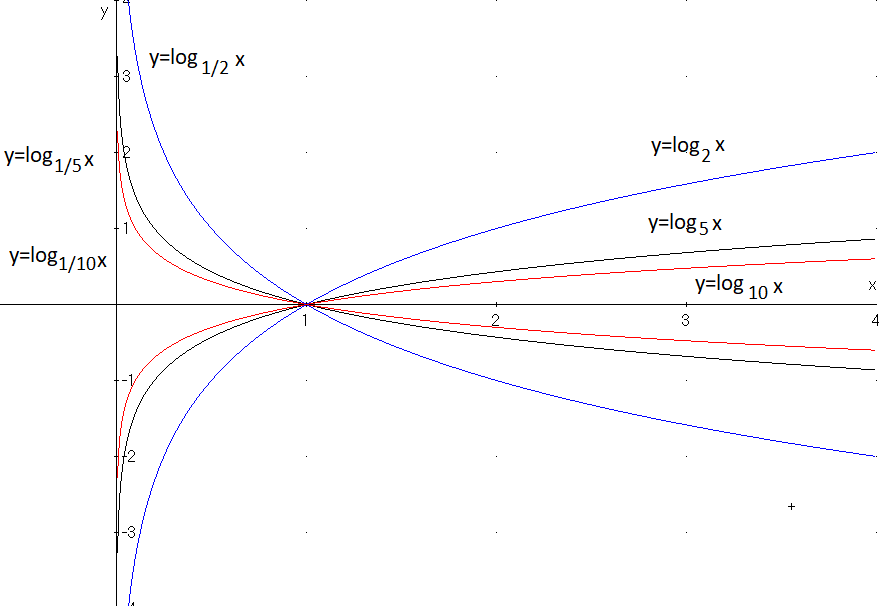
Por otra parte, la función logarítmica en base es la función inversa de la función exponencial de base . Para que exista la función inversa de la función exponencial de base *a*, ésta debe de ser biunívoca y esto se cumple si .

La función logaritmo general o logaritmo en base , denotada por , se define como

si y solo si con número real positivo y a≠1

El dominio de la función es el intervalo y su imagen los números reales.

La gráfica de la función logaritmo general en base depende del valor de la base. Algunos ejemplos de ellas se muestran a continuación.



La función logaritmo en base cumple las leyes de los logaritmos.

Teorema: si x y son números reales positivos, esto es y , es un número real positivo y , y un número racional, entonces:

Como las funciones y son inversas, se cumplen las igualdades siguientes, llamadas ecuaciones inversas.

para todo número real

para todo

Propiedad:cambio de base del logaritmo.

Demostración:

Sea .

Al escribir esta expresión de manera exponencial tenemos .

Aplicando el logaritmo natural a la igualdad, tenemos .

Por las leyes de los logaritmos .

De donde .

Luego, como y , entonces .

Descarga el siguiente archivo en PDF, donde podrás consultar más ejemplos con simplificación de expresiones y resolver ecuaciones con funciones logarítmicas y exponenciales.

IT. Colocar la siguiente información en un archivo en formato PDF. Colocar la identidad gráfica correspondiente.

Simplificación de expresiones y ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ejemplo 1. Simplifica la expresión .

Sea , de donde .

¿Qué exponente del me da como resultado 512? Obtenemos .

Así, , porque .

Luego, .

, representando al como potencia de .

, aplicando leyes de los logaritmos

y porque ,

como .

Por lo que .

Ejemplo 2. Resolver la ecuación para .

Aplicando la función exponencial de base , tenemos

, de donde

Ejemplo 3. Encontrar la solución de la ecuación .

No es posible aplicar directamente el logaritmo a la función, ya que por las propiedades de los logaritmos no es posible simplificar el logaritmo de una suma; así que primero resolveremos la ecuación para la función exponencial .

Sea , así , se representa como sigue:

y

Así y .

La segunda opción no puede ser debido a que una función exponencial no puede tomar un número negativo, de tal modo que la única opción es , de donde

Ejemplo 4. Encontrar la solución de la ecuación.

Mantenemos a la izquierda las expresiones con logaritmo natural

Factorizando el signo

Aplicando las propiedades del logaritmo

Aplicando las propiedades del logaritmo

Aplicado las ecuaciones inversas se tiene

Se elimina la función exponencial con la logarítmica

Resolviendo la ecuación algebraica

Resolviendo con la fórmula general

y

Ahora que conoces cómo simplificar expresiones y resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales, realiza el ejercicio correspondiente.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 7. Simplificación de expresiones y ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ejercicio 7. Simplificación de expresiones y ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Instrucciones:

1. Lee los siguientes reactivos y realiza lo que te solicitan.
2. Escribe la expresión como un solo logaritmo con coeficiente.
3. Resolver la ecuación para .
4. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
5. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
6. Espera la realimentación.

Existe otra función llamada trigonométrica, que se relaciona con dos de los lados de un triángulo rectángulo, la cual veremos a continuación.

3.3 Trigonométricas y trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, denotadas por *sen, cos, tan, cot, sec, csc*, respectivamente. Y se pueden definir a partir del triángulo rectángulo y de la circunferencia unitaria. Observemos ambas definiciones.

|  |  |
| --- | --- |
| Definición usando el triángulo rectángulo | Definición usando la circunferencia unitaria |
| Para un ángulo agudo , las funciones trigonométricas se definen como cocientes de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. | Para cualquier ángulo , sea cualquier punto sobre la circunferencia de modo que el eje y la recta del origen a forman el ángulo . |
|  | Dibujo1 |
| Siendo:  hip = hipotenusa  op = cateto opuesto  ady = cateto adyacente | Donde:  es la distancia del eje al punto  es la distancia del eje al punto |
|  |  |
| La limitante de definir a las funciones trigonométricas por medio del triángulo rectángulo es que sólo podemos considerar un ángulo agudo. | El argumento de las funciones trigonométricas es: un ángulo que se puede medir en radianes o en grados; sin embargo, en la definición de estas funciones se considera que el ángulo está definido en radianes. |

Usando la circunferencia unitaria, la medida en radianes de un ángulo *t* es la longitud del arco que comprende.

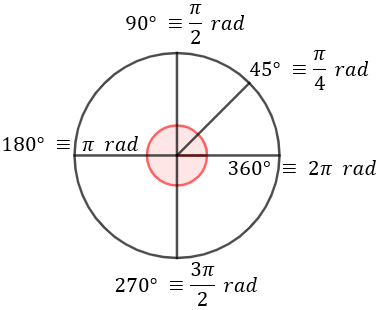
De valores conocidos de arcos y radianes tenemos que y .

Estos valores nos permiten determinar que

y

La siguiente figura es una representación gráfica de la proporcionalidad entre grados y radianes.

IT. Realizar la siguiente imagen. Colocar el símbolo =, únicamente con 2 rayitas. Colocar la referencia.



Para determinar el dominio y la imagen de las funciones trigonométricas empleamos la definición de éstas obtenida al usar la circunferencia unitaria, en este caso el dominio de la función lo determina el ángulo que se puede tomar.

Para las funciones seno y coseno no hay alguna restricción para el ángulo que se toma, con lo cual el dominio son los números reales.

Para las funciones tangente y secante, el ángulo es cualquier valor de excepto aquel en el que , esto es aquél para el cual , por lo que hay que excluir del dominio aquellos puntos en los que el coseno es cero y esto se cumple si , , , , etc. En general, .

Para las funciones cotangente y cosecante hay que excluir del dominio aquellos puntos para los cuales , esto es y así , , , etc., es decir, aquellos múltiplos de . Así los dominios para las funciones trigonométricas son:

* Dominio de la función seno
* Dominio de la función coseno
* Dominio de la función tangente
* Dominio de la función secante
* Dominio de la función cosecante
* Dominio de la función cotangente

Determinemos ahora la imagen de las funciones trigonométricas.

IT. Colocar la siguiente información en flipcard donde aparezca la imagen y su definición. Primero que aparezca la definición y después la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| Función seno, por definición , los valores que tome son los mismos que toma la función y, como está dentro de la circunferencia unitaria, varía de a , así la imagen de seno es .  Dominio de la función seno . | Gráfico  Descripción generada automáticamente con confianza media  Función seno |
| Función coseno, por definición , los valores que tome son los mismos que toma la función y, como está dentro de la circunferencia unitaria, varía de a , así la imagen de coseno es .  Dominio de la función coseno . | Diagrama  Descripción generada automáticamente con confianza media  Función coseno |
| Función tangente, por definición , el único valor donde no está definido es por lo que hay que quitar este valor del denominador y el cociente genera los números reales, así la imagen es .  Dominio de la función tangente . | Diagrama  Descripción generada automáticamente  Función tangente |
| Función cotangente, por definición , el único valor donde no está definido es por lo que hay que quitar este valor del denominador y el cociente genera los números reales, así la imagen es .  Dominio de la función cotangente . | Diagrama  Descripción generada automáticamente  Función cotangente |
| Función secante, se define como , donde toma los valores desde a , y no es cero. El cociente para estos valores es un número en el intervalo .  Dominio de la función secante . | Diagrama  Descripción generada automáticamente  Función secante |
| Función cosecante se define como , donde toma los valores desde a , y no es cero. El cociente para estos valores es un número en el intervalo .  Dominio de la función cosecante . | Diagrama  Descripción generada automáticamente  Función cosecante |

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas, cada cierto valor se repiten. Las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen periodo y las funciones tangente y cotangente tienen periodo .

* Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas constituyen el álgebra de las funciones trigonométricas, ya que ellas permiten simplificar una función o expresarla de una manera equivalente.

La simetría de la función trigonométrica permite obtener las igualdades:

porque la función seno es impar

porque la función coseno es par

Las identidades fundamentales se obtienen a partir de la definición de las funciones trigonométricas

Las identidades de suma y resta de los ángulos pueden ser usadas para reescribir los valores de los ángulos. Con ellas es posible encontrar los valores de funciones trigonométricas de cualquier ángulo. Estas identidades son:

Por otro lado, las identidades de los ángulos dobles son identidades trigonométricas usadas para reescribir las funciones trigonométricas, como seno, coseno y tangente, que tienen un doble ángulo, como . Estas identidades son derivadas usando las identidades de sumas de ángulos. Las identidades de ángulos dobles para seno y para coseno son las siguientes; pero hay que considerar que éstas pueden tener diferentes variaciones.

Para la identidad de la mitad de un ángulo, se utiliza:

Hay más identidades que se obtienen de la aplicación de las identidades básicas. Para demostrar que una identidad es válida se puede empezar del lado izquierdo de la igualdad y aplicando identidades llegar al lado derecho, o iniciar del lado derecho y concluir en la expresión del lado izquierdo, o se pueden reducir ambos lados de la igualdad a una expresión en común. Y de una expresión a otra es posible aplicar una identidad trigonométrica o se puede llevar a cabo un procedimiento algebraico.

Observemos el siguiente ejemplo:

Verificar que la identidad es válida.

Iniciemos del lado izquierdo y usando la identidad para cotangente y tangente

sumando las funciones del numerador

reduciendo a una sola fracción

elevando al cuadrado al denominador

descomponiendo en una diferencia

Reduciendo

usando identidades para cosecante y secante

Por lo que la identidad es válida.

De acuerdo con el procedimiento anterior, realiza el ejercicio correspondiente a la verificación de la identidad.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 8. Verificación de identidad válida

Ejercicio 8. Verificación de identidad válida

Instrucciones:

1. Demuestra que la identidad es válida.
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Para resolver una ecuación trigonométrica, haremos las transformaciones necesarias para trabajar con una sola función trigonométrica, por ello debemos conocer el valor de cada función.

* Solución de ecuaciones trigonométricas

Usando la circunferencia unitaria, determinamos los valores principales de los ángulos y es posible determinar el valor de las funciones trigonométricas seno y coseno, y a partir de ellas usando las identidades podemos tener el valor de todas las funciones trigonométricas en estos ángulos.

Los valores principales de las funciones trigonométricas son:

IT. Ventana modal. Recurso en PDF. Ambas tablas deben de quedar juntas de manera horizontal y juntas.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | -√3/2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

En el siguiente ejemplo, podrás ver el proceso para dar solución a una ecuación trigonométrica.

Hay que encontrar las soluciones de la ecuación en el intervalo .

Para determinar las soluciones de la ecuación, primero despejemos una función trigonométrica. Igualemos a cero

Agrupamos términos en común

Factorizamos el término común

Cada factor es igual a cero

usando identidades y

,

el seno vale un medio si el ángulo es y

de donde

el coseno es un medio si el ángulo es y .

Las soluciones de la ecuación son , , y en .

Resuelve el siguiente ejercicio, correspondiente a ecuaciones trigonométricas.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 9. Solución de ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 9. Solución de ecuaciones trigonométricas

Instrucciones:

1. Encuentra las soluciones de la ecuación en el intervalo .
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Recordemos que las operaciones inversas hacen la operación opuesta a ésta, lo mismo pasa en trigonometría. Si se conoce la razón trigonométrica pero no el ángulo, se pueden utilizar estas funciones trigonométricas inversas. Veamos a continuación.

* Funciones trigonométricas inversas

La inversa de una función existe si la función es biunívoca. Como las funciones trigonometrías son periódicas, ninguna de ellas es biunívoca. Así, para poder definir las funciones trigonométricas inversas, necesitamos restringir el dominio de las funciones trigonométricas en intervalos donde sean biunívocas y tomar el intervalo que contenga a cero o un valor cercano a cero.

La restricción de los dominios de las funciones trigonométricas son los siguientes:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Función | Dominio | Imagen |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Definimos las funciones trigonométricas inversas de la siguiente manera:

1. La función seno inverso, que se denota por o por , se define con la condición si y sólo si , para toda en y para toda en .
2. La función coseno inverso, que se denota por o por , se define con la condición si y sólo si , para toda en y para toda en .
3. La función tangente inversa, que se denota por o por , se define con la condición si y sólo si , para toda real y para toda en .
4. La función cotangente inversa, que se denota por o por , se define con la condición si y sólo si , para toda real y para toda en .
5. La función secante inversa, que se denota por o por , se define con la condición si y sólo si , para toda en y para toda en .
6. La función cosecante inversa, que se denota por o por , se define con la condición si y sólo si , para toda en y para toda en .

Los dominios e imágenes de las funciones trigonométricas inversas son los siguientes:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Función | Dominio | Imagen |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

En el siguiente recurso, podrás relacionar las funciones trigonométricas y trigonométricas inversas, así como su representación gráfica.

IT. Poner la siguiente tabla en un carrusel, colocando las fórmulas dentro de la gráfica.

|  |  |
| --- | --- |
| para en | seninv |
| para en |
| para en | acos |
| para en |
| para en | atan |
| para real |
| para en para | acot |
| para real |
| para en | asec |
| para en |
| para en | acsc |
| para en |

En el siguiente ejemplo, veremos la composición de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas.

1. Determinar el valor de

Usando la fórmula de suma de ángulos

Calculemos

como seno y arcseno son funciones inversas

Sea , por definición . Hay que determinar el valor de

usando la identidad .

Así

Con lo cual

Así

Sea , por definición . Hay que determinar el valor de

usando la identidad .

Así

Con lo cual

Luego

Así

Sea , por definición . Hay que determinar el valor de .

Anteriormente calculamos

usando la identidad

Así

Con lo cual

Así

Con lo cual

2) Probar que la identidad es válida.

La igualdad se cumple si .

Es válida si

Calculemos

Sea , así y hay que calcular .

Usando la identidad del doble del ángulo

Tenemos que

Calculamos

Usamos la identidad

De donde

Así

Luego

Así

y la igualdad se cumple.

Es momento de realizar el siguiente ejercicio, para determinar el valor de las ecuaciones trigonométricas.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 10. Valor de ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 10. Valor de ecuaciones trigonométricas

Instrucciones:

1. Determina el valor de las siguientes ecuaciones:
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Como te pudiste dar cuenta, la trigonometría, al estar basada en los triángulos y en las relaciones entre sus ángulos y lados, y sus funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, se encuentra presente en situaciones tan sencillas en la vida diaria como el despegue o aterrizaje de un avión, la proyección de una sombra, etc., y haciendo uso de las operaciones necesarias podemos definir los cálculos de éstas.

Ahora es momento de revisar las hiperbólicas.

3.4 Hiperbólicas e hiperbólicas inversas

Las funciones hiperbólicas usan como función principal la función exponencial natural y se definen de la siguiente manera:

IT. Colocar la siguiente información en flipcard donde aparezca primero la definición y después la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| Función seno hiperbólico, se define como para toda *,* tiene por dominio los números reales y por imagen los números reales. | senoh  Función seno hiperbólico |
| Función coseno hiperbólico, se define como para toda *,* tiene por dominio los números reales y por imagen . | cosenoh  Función coseno hiperbólico |
| Función tangente hiperbólica, se define como para toda *,* tiene por dominio los números reales y por imagen . | tangenteh  Función tangente hiperbólica |
| Función cotangente hiperbólica, se define como para toda *,* tiene por dominio y por imagen . | Función cotangente hiperbólica cotangenteh |
| Función secante hiperbólica, se define como para toda *,* tiene por dominio los números reales y por imagen . | Función secante hiperbólica secanteh |
| Función cosecante hiperbólica, se define como para toda *,* tiene por dominio y por imagen . | cosecanteh  Función cosecante hiperbólica |

Las funciones trigonométricas tienen como base la circunferencia y, en las funciones hiperbólicas, la hipérbola es . Éstas varían en un signo, por esa razón las identidades hiperbólicas, en algunos casos, varían de las trigonométricas en un signo. Observemos estas identidades.

|  |  |
| --- | --- |
| Identidades básicas | Identidades del doble de la variable |
| Identidades de la mitad de la variable | Identidades de la suma de dos variables |

Veamos el siguiente ejemplo referente a las identidades.

Demostrar que se cumple la identidad .

Para demostrarlo podemos partir del lado derecho o del izquierdo y usamos la definición de las funciones hiperbólicas.

Iniciemos con la suma y la definición de las funciones seno y coseno hiperbólicos.

Elevamos al cuadrado

Factorizando la constante

Desarrollando el cuadrado

Simplificando

Reduciendo

Reduciendo

Por definición

Con lo cual la identidad es válida.

Siguiendo el ejemplo anterior, realiza el ejercicio correspondiente a hiperbólicas para encontrar la identidad.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 11. Hiperbólicas

Ejercicio 11. Hiperbólicas

Instrucciones:

1. Demuestra que la identidad es válida.
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Como en las demás funciones, las hiperbólicas también tienen sus funciones inversas, las cuales son opuestas a las originales. Veámoslas a continuación.

* Funciones hiperbólicas inversas

Para poder definir las funciones hiperbólicas inversas se debe de cumplir que las funciones hiperbólicas sean biunívocas, las funciones hiperbólicas , , , son biunívocas, para tener las 6 funciones hiperbólicas inversas restringimos el dominio de las funciones y de la siguiente manera.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dominio de las funciones hiperbólicas que permiten que existan las funciones hiperbólicas inversas | | |
| Función | Dominio | Imagen |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Las funciones hiperbólicas inversas pueden definirse, al igual que las funciones trigonométricas inversas, de manera implícita. Observa las siguientes tarjetas.

IT. Colocar la siguiente información en flipcard donde aparezca primero la definición y después la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| Función seno hiperbólico inverso , se define  si y sólo si para toda y real. | Imagen en blanco y negro  Descripción generada automáticamente con confianza media  Función seno hiperbólico inverso |
| Función coseno hiperbólico inverso , se define si y sólo si cos para toda en y para toda en . | Imagen en blanco y negro  Descripción generada automáticamente con confianza media  Función coseno hiperbólico inverso |
| Función tangente hiperbólica inversa , se define  si y sólo si , para toda en y para toda real. | Dibujo de un barco  Descripción generada automáticamente con confianza media  Función tangente hiperbólica inversa |
| Función cotangente hiperbólica inversa , se define  si y sólo si , para toda en y para toda en . | GRAFICA COTH.jpg  Función cotangente hiperbólica inversa |
| Función secante hiperbólica inversa , se define  si y sólo si , para toda en y para toda en . | Gráfico  Descripción generada automáticamente con confianza baja  Función secante hiperbólica inversa |
| Función cosecante hiperbólica inversa , se define  si y solo si para todo en y para toda en . | Imagen en blanco y negro  Descripción generada automáticamente con confianza media  Función cosecante hiperbólica inversa |

Al ser funciones inversas se cumple la condición de que la imagen de la función hiperbólica es el dominio de la función hiperbólica inversa y viceversa.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Función | Dominio | Imagen |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Otra de las consecuencias de ser funciones inversas (las funciones hiperbólicas y las hiperbólicas inversas) es que se cumplen las ecuaciones inversas siguientes.

|  |  |
| --- | --- |
| Ecuaciones inversas | |
| para real | para real |
| para en | para en |
| para real | para en |
| para | para en |
| para en | para en |
| para | para |

Como las funciones hiperbólicas se definen con base en la función exponencial natural y como la función inversa de ésta es el logaritmo natural, debe de ser posible expresar la inversa, esto es, las funciones hiperbólicas inversas en términos de la función logaritmo natural. El siguiente teorema define de manera explícita las funciones hiperbólicas inversas.

* Teorema:

Revisemos el siguiente ejemplo para determinar la inversa de una función tangente hiperbólica.

Demostrar que la función es igual a .

Determinemos la inversa de la función tangente hiperbólica.

Por definición .

La función es biunívoca, lo vemos en la gráfica de la función que se definió con anterioridad.

Despejemos de la función, tomemos a como función hiperbólica

Expresemos todos los exponentes como positivos

Sumando

Simplificando

Luego la inversa es la función .

Con lo cual .

Las funciones hiperbólicas nos permiten modelar cables colgantes, un collar u órbitas no delimitadas, y se emplean en la solución de ecuaciones diferenciales.

Con esto concluimos los tipos de funciones que emplearemos a lo largo del curso, y las usaremos en los conceptos que se desarrollarán posteriormente, como son límites de funciones, cálculo de derivadas e integrales.