Unidad II. Límites de funciones y continuidad

1. Límites de manera gráfica y numérica

En esta segunda unidad, daremos seguimiento al tema de límites y su representación. Comúnmente tenemos la noción de lo que es un límite, ya que ocupamos este concepto muy a menudo, por ejemplo, cuando vemos la capacidad máxima de una pipa de agua, el número de litros de gasolina que le caben al tanque de un automóvil, la longitud máxima de una varilla, etc., así que, intuitivamente, sabemos lo que es un límite, ya que es natural que las cantidades o medidas lo tengan.

Pero ¿qué significa el límite de una función? Matemáticamente, el límite de una función en un punto es el valor al cual se aproxima la función cuando se acerca a ese punto y se representa de la siguiente manera:

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Hay diferentes maneras de representar los límites, ya sea de manera gráfica o numérica. Veamos a continuación cada una de ellas.

* Gráficamente

Consideremos una función y determinemos el límite de la función cuando tiende a , esto es , para ello tomemos puntos cercanos a , tanto mayores como menores, y examinemos lo que ocurre con los valores de la función.

**Gráfico

Descripción generada automáticamente con confianza media**

Al tomar valores cada vez más cercanos al punto ,tanto menores como mayores, notamos que el valor de la función en estos puntos se aproxima a un mismo punto, siendo este , por lo cual éste es su límite.

Si tenemos en cuenta funciones con una representación gráfica diferente de la función que consideramos en un principio, vemos que la situación al determinar el límite de la función en un punto es semejante, conforme nos aproximamos al valor de con valores menores y mayores, los valores de la función se aproximan a un mismo valor, siendo este el valor de la función en , .

|  |  |
| --- | --- |
| Gráfico  Descripción generada automáticamente | Gráfico, Diagrama  Descripción generada automáticamente |

Notamos que independientemente de si la función es creciente, decreciente, si es un valor máximo o si es un valor mínimo, al determinar el valor del límite de la función en un punto , éste es igual al valor de la función en este punto.

* Numéricamente

Otra opción, para aproximarnos al valor de una función conforme nos aproximamos a un valor fijo, es de manera numérica.

Tomemos la función y determinamos el límite de la función en el punto , tomando valores cercanos a y calculando el valor de la función en esos puntos.

Valores menores que

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1 | 0 |
| 1.5 | -1.375 |
| 1.7 | -1.757 |
| 1.9 | -1.971 |
| 1.99 | -1.999700999 |
| 1.999 | -1.999997001 |
|  |  |
| 2.001 | -1.999996998 |
| 2.01 | -1.999699000 |
| 2.1 | -1.969 |
| 2.3 | -1.703 |
| 2.5 | -1.125 |
| 3 | 2 |

Valores mayores que

Al aproximarnos al punto , con valores más pequeños o grandes, obtenemos que nos acercamos al mismo punto . Éste es el límite de la función, es decir:

¿Qué pasa con el límite de la función, si la función no está definida en un punto, o está definida por partes? Examinemos la situación.

Empecemos considerando una función que no está definida en un punto, en particular en el punto . Gráficamente observamos un hueco en este punto.

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Al querer determinar el límite de la función, notamos que, si tomamos valores más pequeños que y más grandes que , los valores de la función se aproximan al mismo punto, en este caso a .

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Por lo que, a pesar de que la función no está definida en , el límite existe y vale . Esto es:

no existe y

De manera numérica podemos encontrar también el valor del límite, de manera algebraica la representación de la función es .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0.5 | 1.3121 |
| 0.7 | 2.0541 |
| 0.9 | 2.6981 |
| 0.99 | 2.969998010 |
| 0.999 | 2.996999997 |
|  |  |
| 1.001 | 3.003000002 |
| 1.01 | 3.030002009 |
| 1.1 | 3.3021 |
| 1.3 | 3.9621 |
| 1.5 | 4.8125 |

De donde se determina que el valor del límite es de .

Por lo cual, para que el límite de la función exista en un punto, no es necesario que la función esté definida en el mismo.

Otro caso particular es con una función por partes. Sea una función que está formada por dos partes, una curva de (-∞,1) y por otra curva de , y se desea determinar el límite en el punto en el cual se cambia de función (curva), en este caso es en .

Un mapa de colores

Descripción generada automáticamente con confianza baja

Si nos aproximamos al punto con valores más pequeños, observamos que los valores de se aproximan a un mismo valor, éste es . Y, si nos aproximamos a con valores más grandes, notamos que los valores de se aproximan al punto .

Luego, si tomamos ambos valores a los que se aproxima la función, menores y mayores, éstos no son el mismo punto, por lo cual el límite de la función en el punto no existe; esto es no existe.

Definamos el límite de la función en un punto.

IT. Colocar la siguiente información en una caja de importante

Decimos que el límite de una función , cuando tiende a , es igual a y, por lo tanto, (Stewart, 2013), si los valores de se aproximan tanto como es posible a , tomando a lo más cerca de , pero sin ser igual a .

Y los límites unilaterales.

IT. Colocar la siguiente información en una caja de importante

Decimos que el límite por la izquierda de , cuando tiende , es igual a y, por lo tanto, (Tamayo, s.f.), si los valores de se aproximan tanto como es posible a , tomando a lo más cerca de , pero .

Decimos que el límite por la derecha de cuando tiende a , es igual a y, por lo tanto, (Tamayo, s.f.), si los valores de se aproximan tanto como es posible a , tomando a lo más próximo a , pero .

La relación entre el límite de la función en un punto y los límites unilaterales se presenta en el teorema siguiente.

Teorema: si y sólo si

(Stewart, 2013)

Observación: Si la función a la que determinamos el límite es un polinomio o una función racional, y está en el dominio de la función, entonces (Stewart, 2013).

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 13. Límites de funciones

Ejercicio 13. Límites de funciones

Instrucciones:

1. Determina el límite de la función , usando el método gráfico y numérico.
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Hasta ahora tenemos los elementos necesarios para calcular un límite, ya sea de forma numérica, mediante una tabla, en la que se asignan valores a para acercarnos a de una función, ya sea por la derecha o la izquierda.

También exploramos el método gráfico, en el cual vemos el comportamiento de la función al aplicar el límite, igualmente por la derecha o la izquierda, en el punto que se analiza.

Ahora es momento de abordar el método analítico utilizando los teoremas, para conocer el límite de una función en un valor de , dependiendo del tipo de límite y sus características. Continúa con el siguiente tema.