2. Cálculo analítico de límites

Para calcular el valor del límite de una función de manera algebraica necesitamos definir las propiedades de los límites.

Supóngase que los límites y existen y que *c* es una constante. Entonces, las propiedades serían las siguientes:

IT. Colocar el siguiente texto en un carrusel o flip card. Si es carrusel, la definición deberá quedar debajo. Si es flip card, se deberá presentar la propiedad y atrás la definición.

|  |  |
| --- | --- |
| Propiedad de la suma | “Esta propiedad menciona que el límite de la suma de dos funciones de , siendo una y la otra , será igual a la suma del límite de más el límite de ” (Robles y García, 2021). |
| Propiedad de la resta | “Esta propiedad […] describe que el límite de la resta de dos funciones es igual al límite de la primera función menos el límite de la segunda función” (Robles y García, 2021). |
| Propiedad del producto de una función y una constante | “Esta propiedad afirma que el límite de una constante multiplicada por una función de , será igual al producto de tal constante multiplicada por el límite de la función de ” (Robles y García, 2021). |
| Propiedad de un producto | “Esta propiedad muestra que el límite del producto (multiplicación) de dos funciones es igual al límite de una función multiplicado por el límite de la segunda función” (Robles y García, 2021). |
| Propiedad de un cociente  si | “Esta propiedad explica que el límite del cociente entre dos funciones es igual al límite de la primera función sobre el límite de la segunda función siempre y cuando este último no sea igual a ” (Robles y García, 2021). |
| Propiedad de una potencia  para todo | “Esta propiedad indica que el límite de una función a la *n* potencia será igual al límite de dicha función posteriormente elevado a la misma potencia” (Robles y García, 2021). |
| Propiedad de la raíz | “Esta propiedad dice que el límite de la raízde una función se obtendrá al sacar el límite de la función y luego sacar la raíz de tal cifra obtenida” (Robles y García, 2021). |

En el siguiente ejemplo podrás observar cómo se calcula el límite de una función, aplicando las propiedades anteriores.

Calcular el límite de la función de manera algebraica.

Usando las propiedades de los límites

Si cada vez que calculamos el límite de una función y aplicamos las propiedades de los límites, se tiene un procedimiento extenso, la propiedad siguiente permite reducir el procedimiento.

Propiedad. Si la función es un polinomio o una función racional y está en el dominio de la función, entonces .

Aplicando la propiedad, el límite anterior se calcula de la siguiente manera:

Cuando al calcular el valor de un límite llegamos a la solución al evaluar la función en el valor al que tiende , decimos que el límite es evaluable.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 14. Aplicación de las propiedades de los límites

Ejercicio 14. Aplicación de las propiedades de los límites

Instrucciones:

1. Determina el valor del límite , usando las propiedades de los límites y la propiedad que permite sólo evaluar.
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Ya aplicamos algunas propiedades en el cálculo de límites; pero ¿qué pasa cuando no se pueden obtener los límites? Para estos casos, recurrimos a los límites de formas indeterminadas.

* 1. Límites de formas indeterminadas

Podemos decir que una indeterminada es una operación en la que el resultado no se encuentra definido; pero esto no significa que no exista el límite, sino que se necesitará buscar el resultado de otra manera. Así que ¿cómo podemos saber qué opción tomar para resolver el límite de una forma indeterminada?

Recordemos lo siguiente, “cuando determinamos el límite de una función , tenemos las siguientes opciones:

1. es igual a un número real.
2. no existe.
3. es una forma indeterminada”.

(Ruiz y Gutiérrez, 2022)

Las dos primeras opciones son solución del límite de la función y en el último caso para llegar a una solución del límite se debe de eliminar la forma indeterminada, esto puede ser empleando algún procedimiento algebraico.

Las formas indeterminadas son:

IT. Realizar animación popup.

|  |
| --- |
| Cocientes indeterminados  o |
| Productos indeterminados  : |
| Diferencias indeterminadas |
| Potencias indeterminadas  , y |

En esta sección nos abocaremos a los límites que tienen solución o que toman la forma indeterminada de cociente.

Al evaluar encontramos expresiones que no son formas indeterminadas, como las siguientes:

, , y , estas expresiones son iguales a los valores que se indican , , y

Uno de los procedimientos que se usa en el cálculo de límites de funciones algebraicas para llegar a una solución es la factorización, este procedimiento se aplica cuando al evaluar el límite se obtiene una forma indeterminada de cociente, generalmente la forma , y es posible factorizar para eliminar la forma indeterminada. Veamos los siguientes ejemplos:

* Determinar que el valor del límite , si existe.

Primero evaluamos

Luego, se obtiene una forma indeterminada de cociente.

Para eliminar la forma indeterminada y llegar a una solución, apliquemos un procedimiento de factorización.

Factorizando la diferencia de cubos de numerador, tenemos

Es posible eliminar el factor

Evaluando

Así, el límite vale 3.

* Determinar que el valor del límite , si existe.

Si empezamos factorizando el numerador, simplificamos y evaluamos

Así, el límite existe y vale .

Pero si usamos otro procedimiento y empezamos evaluando

El límite existe y vale .

Encontramos resultados diferentes, ¿esto es posible?, ¿por qué sucede?

Cuando aplicamos una factorización al calcular un límite lo hacemos para eliminar el término que hace que se tenga la forma indeterminada . Al factorizar y eliminar un factor, eliminamos el cero y con lo que vemos en el segundo procedimiento no hay una forma indeterminada, por lo que no es necesario el factorizar.

El procedimiento correcto en el ejemplo anterior es el segundo y el valor del límite es .

Cuando calculamos el límite de una función, primero debemos evaluar y, si tenemos una forma indeterminada, aplicamos un procedimiento algebraico que elimine la indeterminación para poder obtener una solución.

Otro procedimiento que se puede aplicar cuando se tiene un cociente indeterminado es la racionalización.

El procedimiento de racionalización se aplica cuando multiplicamos la función por el conjugado del denominador o del numerador, ejemplo:

Determinar el valor del límite , si existe.

Evaluemos

Obtenemos una forma indeterminada.

Racionalicemos la función multiplicando por el conjugado del denominador

Así, el límite existe y su valor es .

Veamos otro ejemplo. Calcular el valor del límite , si existe.

Evaluemos

Obtenemos la forma de cociente indeterminado.

Racionalicemos, multiplicando por el conjugado del numerador

No se puede simplificar, evaluemos

Nuevamente es una forma indeterminada.

Apliquemos ahora la factorización

Simplificando

Evaluando

En este ejemplo se aplican las dos técnicas para determinar el límite, cuando tenemos una forma de cociente indeterminado.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 15. Límites de formas indeterminadas

Ejercicio 15. Límites de formas indeterminadas

Instrucciones:

1. Determina el valor del límite del límite dado, si existe.

2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.

3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.

4. Espera la realimentación.

Ya que sabes cómo se realizan los límites de formas indeterminadas, revisemos los límites unilaterales, que son prácticamente los mismos que los límites normales, sólo que se restringen cuando se aproxima desde un solo lado.

* 1. Límites unilaterales

Podemos definir los límites unilaterales como el límite de una función a medida que se acerca a , ya sea desde el lado derecho o desde el lado izquierdo. Estos se utilizan cuando hay una discontinuidad de salto y los dos lados no coinciden, ejemplo:

Determinar el valor del límite, si existe.

La gráfica de la función es la siguiente:

Imagen que contiene Diagrama

Descripción generada automáticamente

Observamos que, conforme nos acercamos a con valores más pequeños, los valores de la crecen.

Evaluamos

Al evaluar sustituimos a por el valor de por la izquierda.

Con por la izquierda, pensamos un valor próximo a ; pero con valores más pequeños que el .

Así , ya que, aunque nos aproximemos con valores más pequeños que , nos aproximamos a y si restamos es .

Y , ya que, al aproximarnos a con valores más pequeños, nos aproximamos a y con el cuadrado a .

Luego

Con lo cual el límite por la izquierda de la función no existe.

Otro ejemplo sería al determinar el valor del límite, si existe.

Evaluamos

Al evaluar sustituimos a por el valor de por la derecha.

Con por la derecha, pensamos un valor próximo a ; pero con valores más grandes que el .

Así , ya que, aunque nos aproximemos con valores más grandes que , nos aproximamos a y si restamos es .

Y , ya que, al aproximarnos a con valores más grandes, nos aproximamos a y con el cuadrado a .

Luego

Con lo cual el límite por la derecha de la función no existe.

* Límites de funciones por partes

El cálculo del límite de una función por partes depende del punto donde se pide calcularlo, recordemos que una función por partes, por secciones o a trozos, es aquélla que se define por diferentes funciones en cada intervalo.

Si se pide determinar el límite de una función por partes dentro de uno de los intervalos, se calcula este límite evaluando o como una forma indeterminada; pero si se pide que se calcule en uno de los puntos donde cambia la función, se deben de calcular límites unilaterales. Ejemplo:

Sea , hallar los límites siguientes:

, , , , y

Calculemos , para valores menores que . La función se define como , que es la primera parte de la función .

Evaluemos .

Obtenemos que el límite en por la izquierda es igual a .

Calculemos , para valores mayores que . La función se define como , que es la segunda parte de la función .

Evaluemos .

Obtenemos que el límite en por la derecha es igual a .

Calculemos .

Para no se define la función; pero para calcular el límite de la función en un punto no necesita estar definida en él, sino alrededor de ese punto, y para la función, si está definida para valores más pequeños y más grandes que , usaremos el teorema que se definió con anterioridad:

IT. Colocar en una caja de importante

si y sólo si

(Stewart, 2013)

Así se deben de calcular los límites unilaterales.

Ya calculamos y . Como los límites por la derecha y por la izquierda de son diferentes, el límite no existe, ya que los valores se aproximan a dos valores diferentes.

Calculemos . es mayor que , por lo cual, se usa para la función la expresión .

Calculemos . es mayor que , por lo cual, se usa para la función la expresión .

Calculemos . es mayor que , por lo cual, se usa para la función la expresión .

Como la función está definida en por medio de un polinomio, es posible determinar el límite sólo evaluando.

También podemos calcular el límite usando los límites unilaterales, ya que los calculamos con anterioridad, como y , el .

Es momento de revisar otro tipo de funciones con valor absoluto, en éstas se mide la distancia desde en la recta numérica.

* Límite de funciones con valor absoluto

El valor absoluto es la distancia desde un punto hasta el origen, al ser una distancia es siempre positivo y algebraicamente se define como

Se puede aplicar a cualquier expresión algebraica o función.

Son funciones con valor absoluto

Observa el siguiente ejemplo:

Determinar el límite .

Como la función valor absoluto se define como una función por partes, tenemos

esto es

Así

Así la función queda expresada como una función por partes, ésta es la que emplearemos para calcular el límite .

Al ser una función por partes que cambia de expresión en torno a , calculamos límites unilaterales

y

Como los límites unilaterales son diferentes, el no existe.

Realiza el siguiente ejercicio referente a los límites unilaterales.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 16. Límites unilaterales

Ejercicio 16. Límites unilaterales

Instrucciones:

1. Determina los siguientes límites:
2. Sea , determina: , , , , , , , .
3. Determinar el valor del límite , si existe.

2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.

3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.

4. Espera la realimentación.

Cuando el límite unilateral es a la derecha o izquierda de , o cuando al aplicarlo nos queda a la izquierda o derecha de , hay que dar el signo exacto, ya que se determina el comportamiento de la función si el valor es muy grande o muy pequeño .

* 1. Límite de funciones trigonométricas

En el cálculo del límite de funciones trigonométricas se usan las identidades trigonométricas, que es el álgebra de estas funciones y se calculan en su mayoría cuando la variable tiende a . Tenemos como base cuatro límites que se presentan en los teoremas siguientes.

IT. Colocar el siguiente texto en un carrusel.

|  |
| --- |
| Teorema: |
| Corolario: |
| Teorema: |
| Teorema: |

Veamos cómo aplicaremos estos problemas en los siguientes ejemplos:

* Determinar el valor del límite , si existe.

Buscamos usar

* Determinar el valor del límite , si existe.

Usamos identidades

En este caso, usamos tanto las identidades como los límites básicos definidos en los teoremas.

* Determinar el valor del límite , si existe.

Evaluando

No se obtiene un resultado, aplicamos álgebra, en este caso, las identidades trigonométricas

Realiza el siguiente ejercicio correspondiente al límite de funciones trigonométricas.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 17. Límite de funciones trigonométricas

Ejercicio 17. Límite de funciones trigonométricas

Instrucciones:

1. Calcula el valor del límite de las siguientes funciones, si existe.

2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.

3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.

4. Espera la realimentación.

Hemos definido el límite de una función, calculado los límites de la función en el punto o al ser unilaterales, y definido cuando existe un límite. El cálculo de límites lo hemos hecho alrededor de un número real; pero también es posible determinar el límite de una función cuando la crece arbitrariamente, esto es, cuando tiende a infinito.